COMPTE RENDU DES OPÉRATIONS

DE

LA COMMISSION INSTITUÉE PAR M. LE MINISTRE DE LA GUERRE,

POUR ÉTALONNER LES RÈGLES QUI ONT ÉTÉ EMPLOYÉES

en 1850, 1851, 1852 et 1853,

PAR MM. LES OFFICIERS D'ÉTAT-MAJOR DE LA SECTION GÉODÉSIQUE DU DÉPÔT DE LA GUERRE,

A LA MESURE DES BASES GÉODÉSIQUES BELGES.

PUBLIÉ AVEC L'AUTORISATION

DE M. LE MINISTRE DE LA GUERRE.

BRUXELLES,

M. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE.

1855.

COMPTE RENDU DES OPÉRATIONS

DE

LA COMMISSION INSTITUÉE PAR M. LE MINISTRE DE LA GUERRE,

POUR ÉTALONNER LES RÈGLES QUI ONT ÉTÉ EMPLOYÉES

A LA MESURE DES BASES GÉODÉSIQUES BELGES.

INTRODUCTION.

Dans le courant de l'année 1847, M. le colonel d'état-major prussien *Baeyer,* aujourd'hui général, se disposait à mesurer une base géodésique aux environs de *Bonn,* à l'aide des Règles et par les procédés de *Bessel,* en vue de vérifier les triangles de Tranchot, dans la Prusse rhénane. Informé de cette circonstance, le Ministre de la guerre, M. le lieutenant général baron *Prisse,* sollicita et obtint du gouvernement prussien l'autorisation d'envoyer à Bonn deux officiers du corps d'état-major belge, afin de suivre, sur le terrain, les opérations projetées. Ces officiers virent fonctionner les Règles de *Bessel,* et ne tardèrent pas à en apprécier les avantages : elles permettaient de mesurer des bases avec promptitude, facilité et précision. Mus par le désir de contribuer aux progrès de la géodésie chez eux, et encouragés d'ailleurs par les procédés pleins de bienveillance à leur égard de M. le général *Baeyer* et de ses officiers, ils tentèrent une démarche dans le but de procurer au Dépôt de la guerre de Bruxelles les moyens de mesurer quelques bases en Belgique, avec les instruments et d'après les méthodes de l'état-major prussien. Cette ouverture, accueillie par M. le général *Baeyer* avec la bonté qui lui est habituelle, eut pour effet de mettre le directeur du Dépôt de la guerre en possession de l'appareil de *Bessel,* avec tous ses accessoires, y compris le comparateur pour l'étalonnage des Règles. Ces instruments arrivèrent à Bruxelles en novembre 1847.

Il avait été décidé qu'une première base serait mesurée l'année suivante, à titre d'essai, aux environs de Bruxelles, pour familiariser le personnel de la section géodésique du Dépôt avec l'usage de l'appareil, avant de procéder à

la mesure d'une base définitive. Entre-temps, on s'occupa de rechercher un emplacement favorable pour l'essai projeté, et d'arrêter le nombre et la position des bases qui seraient mesurées par la suite. Le plateau de Linthout, situé aux portes de Bruxelles, offrait un terrain convenable pour la mesure d'une base d'essai. Quant aux bases définitives, leurs positions paraissaient indiquées par la configuration des frontières qui, dans leur ensemble, présentent la forme d'un triangle. Si la possibilité de mesurer une base à chaque sommet était reconnue, on relierait entre elles ces bases par trois chaînes de triangles circonscrivant le territoire, et dirigées, l'une dans le prolongement de la méridienne de Sedan, une autre suivant l'arc du parallèle compris entre Ostende et Sittart, et la troisième en diagonale, d'Ostende à Virton.

On reconnut, pour la première de ces bases, un terrain assez favorable dans la province de Limbourg, au nord et à proximité du camp de Beverloo, non loin de Lommel; l'emplacement de la seconde se rencontra aux environs d'Ostende, à deux kilomètres à peu près de cette ville, sur l'un des accotements de la route de Thourout. Quant à la troisième, on devait en rechercher l'emplacement plus tard, dans la partie méridionale de la province de Luxembourg.

On s'était proposé d'essayer l'appareil en 1848 : mais les événements de cette époque ne le permirent pas et forcèrent d'ajourner à 1850 l'exécution de ce projet.

Cette année, une petite base de 380 mètres environ fut mesurée sur le plateau de Linthout. On maçonna sous terre deux bornes dans chacune desquelles fut scellé un cylindre en cuivre dont l'axe devait indiquer l'extrémité mathématique de la base. Aux deux termes fixés de cette manière, furent érigés les supports en fonte qui devaient servir dans la mesure des bases définitives, supports formés de quatre colonnes creuses, surmontées d'une plaque percée au centre et boulonnée, à travers les colonnes, à une seconde plaque de plus grandes dimensions, qui est boulonnée elle-même dans le massif maçonné qui la porte. L'objet de ces supports est de fixer invariablement, pendant toute la durée de la mesure de la base, la position des fils à plomb qui correspondent aux extrémités, et de servir d'appui à l'instrument destiné à la mesure des angles de départ.

Le terrain sur lequel l'appareil allait être essayé offrant beaucoup de fermeté, on put, comme M. le général *Baeyer* l'avait pratiqué à Bonn, faire reposer les chevalets, supports des Règles, directement sur le sol. L'opération commença le 16 juillet; elle marcha d'abord très-péniblement : on mettait de 20 à 30 minutes par portée, et vers la fin, seulement 12 minutes, ce qui était encore beaucoup si l'on considère que, par la suite, dans la mesure des bases définitives, la durée d'une portée excéda rarement 6 ou 7 minutes. Vers le milieu de la base, on simula une fin de journée. Un bloc de bois, sur lequel avait été clouée préalablement une lame de plomb, fut enterré à une profondeur de 30 centimètres environ au-dessous de l'extrémité antérieure de la dernière Règle de la journée; puis, à l'aide d'un fil à plomb descendu de cette extrémité, on marqua le point sur la lame. Ce moyen était celui que M. le général *Baeyer* avait employé à Bonn, à l'exemple de Delambre, qui en avait fait usage dans la mesure des bases de la méridienne de France. La petite base de Linthout fut mesurée deux fois. La différence des deux mesures, toutes réductions faites, s'est élevée à $0^{l},416$ ou $0^{mm},938$, sur une longueur de $196^{t},861$ ou $383^{m},689$.

Cet essai, entrepris dans le seul but d'expérimenter les Règles et d'apprendre à les manœuvrer, attira l'attention sur quelques points qui paraissaient susceptibles d'amélioration, notamment sur l'usage du fil à plomb pour marquer, soit les extrémités de la base, soit les fins de journée. On avait reconnu, avant de procéder à la mesure de la base, combien il est difficile, pour ne pas dire impossible, d'obtenir un fil à plomb exactement centré, ou dont la pointe soit dans le prolongement de l'axe du fil.

Beaucoup d'essais ayant été tentés infructueusement pour en construire un, il fallut bien se contenter d'un fil à plomb défectueux, dont l'excentricité était une première cause d'erreur très-appréciable. Mais il en est une autre infiniment plus sensible, *dans l'emploi du fil à plomb en plein air*. L'expérience a montré que par un temps calme, et en prenant les précautions les plus minutieuses, on ne parvient pas à constituer le fil dans un état d'immobilité complète, même en le suspendant à un support isolé. Bien plus, un fil à plomb, abrité sous une cage en verre, a été observé pendant plusieurs jours, sans qu'on ait pu le voir immobile. Cependant l'expérience était faite sous

une baraque, loin de la ville, en pleine campagne, et à plusieurs centaines de mètres de la route la plus rapprochée.

L'emploi d'un instrument aussi mobile devait être proscrit dans la mesure des bases définitives, et il le fut, du moins pour les fins de journée. On se borna à l'employer pour marquer les extrémités de la base, mais en substituant au plomb en forme de poire un plomb en forme de parallélépipède rectangle, qui plongeait dans l'eau, sous une baraque parfaitement close.

En procédant à la mesure de la base d'essai, on avait éprouvé d'assez grandes difficultés pour le placement des chevalets, qui devaient se trouver tout à la fois dans l'alignement de la base, à distance et à hauteur; la dernière de ces conditions surtout était difficile à réaliser, à cause du peu de jeu, dans le sens vertical, des points sur lesquels portent les Règles. Cette circonstance exigeait que le terrain, pour le cas où sa consistance permettrait de poser directement les chevalets sur le sol, fût nivelé ou recoupé de manière à présenter des pentes uniformes; et, dans le cas contraire, qu'on fit usage de plates-formes portées sur des piquets enfoncés dans le sol, de niveau, ou suivant des pentes déterminées. C'est ce qu'on fit pour les bases de Lommel et d'Ostende.

La première de ces bases fut mesurée en 1851, dans la bruyère dite *Langen-Heuvel,* entre le village de Lommel et le camp de Beverloo. Les massifs des termes avaient été construits en maçonnerie, vers la fin de l'année précédente, pour que le tassement, auquel toute construction de ce genre est sujette, pût être accompli lorsque le mesurage commencerait. Ces massifs sont au nombre de trois : un à chaque extrémité, et le troisième entre ceux-ci.

De gros piquets en bois de hêtre, de $0^m,08$ d'équarrissage et de longueurs différentes, à cause des aspérités du terrain, avaient été enfoncés dans le sol, d'une des extrémités de la base à l'autre, leurs têtes alignées dans des pentes successives. Ils devaient supporter des plates-formes en bois de sapin de $3^m,85$ sur $0^m,40$ de largeur et $0^m,10$ d'épaisseur. Ces plates-formes, au nombre de sept, constituaient, pendant le mesurage, une sorte de plancher mobile sur lequel se plaçaient les chevalets.

Commencée le 8 juillet 1851, la mesure de la base de Lommel fut ter-

minée le 5 août de la même année : elle donna, pour la distance comprise entre les deux termes extrêmes, 2300^{m},600.

Bien que ce résultat soit une moyenne de deux mesures très-concordantes, il n'inspira que peu de confiance, pour les raisons suivantes :

1° Pendant la durée de la mesure de la première section, on s'était aperçu que la Règle n° 2 était mobile sur la barre de fer qui la supporte dans sa caisse ; 2° l'alignement des Règles, qui s'obtenait au moyen d'un théodolite placé en avant, du côté du terme vers lequel on se dirigeait, à une distance parfois trop considérable, avait été défectueux ; 3° les deux observateurs, chargés de la lecture des intervalles, en introduisant les prismes en verre dans l'espace laissé libre entre deux Règles consécutives, les avaient serrés trop fortement contre les biseaux ; 4° les circonstances atmosphériques avaient été souvent défavorables ; 5° enfin, les appareils servant à marquer les fins de journée n'avaient pas été fixés avec assez de soin. Pour ces divers motifs, on prit la résolution de mesurer de nouveau la même base en 1852, en remédiant à tous les inconvénients qui avaient été reconnus dans l'opération précédente.

La seconde mesure de la base de Lommel exigea neuf journées de travail sur le terrain, en ne comprenant pas, dans cette évaluation, le temps consacré aux préparatifs : elle eut lieu du 5 juin au 2 juillet. Chaque section fut mesurée deux fois : la différence des mesures a été, pour la première section, 0^{l},166, et, pour la seconde, 0^{l},640. On trouva, cette fois, la longueur de la base égale à 2300^{m},571, nombre qui diffère en moins, de celui de l'année précédente, de 0^{m},029, ou *trois centimètres*.

En 1853, on mesura la base d'Ostende, dont l'emplacement avait été reconnu en 1852. Les termes, au nombre de trois, construits sur le modèle de ceux de la base de Lommel, sont situés sur l'accotement de gauche de la route d'Ostende à Thourout, en venant d'Ostende. Le premier se trouve un peu au delà de la *première barrière ;* le second, à 1253^{m},0 du précédent, et le troisième, à 1235^{m},8 du second. Pour cette nouvelle mesure, on fit usage de petites plates-formes en fonte, en remplacement de celles qui avaient servi à Lommel ; elles reposaient chacune sur trois piquets enfoncés dans le sol et nivelés. Des toiles, qui s'accrochaient à des perches plantées le long de la

bordure du pavé ou aux arbres de la route, selon que le vent soufflait de l'ouest ou de l'est, garantissaient les Règles pendant le mesurage. Manœuvrées par trois hommes, elles avançaient avec les Règles, et les protégeaient ainsi constamment. Huit journées suffirent pour mesurer deux fois les deux sections. La différence des mesures a été, pour la première section, $0^{l},600$, et, pour la seconde, $0^{l},329$. La longueur totale de la base est de $2488^{m},811$.

Ces nombres, comme ceux qui précèdent, sont le résultat de calculs basés sur les coefficients déduits, par M. le général *Baeyer,* du dernier étalonnage des Règles fait par lui en 1846, et qui lui ont servi à calculer les bases de Berlin et de Bonn. Ils ne sont que provisoires. On s'était proposé d'étalonner les Règles en Belgique, aussitôt que la troisième base, celle qui devait être mesurée dans la province de Luxembourg, aurait été déterminée, et de procéder ensuite aux calculs définitifs des bases, en y employant les nouveaux coefficients que l'étalonnage aurait donnés. Mais M. le général *Baeyer,* occupé, depuis quelques années, à relier la triangulation de la Prusse à celle de la Russie, avait pris l'engagement de mesurer une base de raccordement en Silésie, dans un délai dont le terme était fixé à 1854. Par suite de cette circonstance, l'appareil de Règles dut être renvoyé à Berlin dans les premiers jours du mois de mai de cette année, et il fallut, pour pouvoir compléter les résultats obtenus jusqu'alors, s'occuper immédiatement d'étalonner les Règles. Cette opération délicate réclamait le concours de quelques hommes spéciaux. C'est pourquoi le Ministre de la guerre, M. le lieutenant général *Anoul,* sur la proposition du colonel directeur du Dépôt de la guerre, crut devoir en charger une commission, qui fut instituée par un arrêté du 19 octobre 1853, ainsi conçu :

« Le Ministre de la guerre,

» Considérant que les bases géodésiques, mesurées sur le territoire belge
» par MM. les officiers d'état-major employés au Dépôt de la guerre, à l'aide
» de l'appareil de Règles de l'état-major général prussien, ne pourront être
» évaluées, avec toute la précision désirable, qu'après que les Règles qui ont
» servi à les obtenir auront été étalonnées;

» Voulant que cette opération délicate soit faite dans des conditions sus-
» ceptibles d'en assurer la bonne exécution,

» ARRÊTE :

» ART. 1er. — L'étalonnage des Règles confiées, par l'état-major général
» prussien, au Dépôt de la guerre de Belgique, pour la mesure des bases
» géodésiques, sera fait par une commission.

» ART. 2. — La commission, instituée par l'article précédent, se compose des membres désignés ci-après :

» MM. *Nerenburger,* colonel d'état-major, directeur du Dépôt de la guerre,
» membre de l'Académie royale des sciences de Belgique;

» *Stas,* professeur de chimie à l'École militaire, membre de l'Académie;

» *Diedenhoven* (Jacques), major d'état-major, chef de la section géodésique
» du Dépôt de la guerre;

» *Meyers,* major du génie;

» *Liagre,* capitaine du génie, professeur à l'École militaire, membre de
» l'Académie;

» *Dekeuwer,* lieutenant d'état-major;

» *Sacré,* ingénieur-mécanicien.

» ART. 3. — Les dépenses que nécessitera l'opération seront imputées sur
» l'art. 5 du chap. Ier du Budget de la guerre.

» ART. 4. — La commission adressera au Ministre de la guerre un rapport
» détaillé sur ses opérations.

» Bruxelles, le 19 octobre 1853.

» ANOUL. »

La commission se mit à l'œuvre immédiatement, et, le 15 février 1854, elle fut en mesure de commencer ses opérations, qui durèrent jusqu'au 24 avril. C'est le compte rendu de ses travaux, adressé à M. le Ministre de la guerre en exécution de l'art. 4 de l'arrêté rapporté ci-dessus, que le Dépôt de la guerre publie aujourd'hui. Il se divise en cinq parties :

La première est consacrée à l'exposition des méthodes d'étalonnage créées par *Bessel;*

Dans *la deuxième,* on donne une description détaillée du comparateur adopté par la commission;

La troisième traite de la détermination des toises qui ont servi à l'étalonnage;

La quatrième, de la comparaison des Règles entre elles, et de leur comparaison à la toise;

La cinquième, de la détermination de la longueur absolue des quatre Règles.

Cette publication peut être considérée comme formant le premier chapitre d'un travail plus étendu, qui offrira une relation détaillée des opérations faites par le Dépôt de la guerre, en 1851, 1852 et 1853, près de Lommel et près d'Ostende, pour fixer la longueur des côtés de départ de la nouvelle triangulation du royaume. Cet ouvrage, dont la rédaction est très-avancée, paraîtra l'année prochaine. En attendant, puisque le travail de la commission a permis de calculer la longueur définitive des bases, on consignera ici les résultats de ces calculs, comme étant propres à donner une idée de la précision des méthodes pratiques imaginées par *Bessel.*

Les bases mesurées sont partagées chacune en deux sections, AC et CB, dont la somme AC + CB est égale à la base totale AB. La section AC de la base de Lommel comprend trois parties $A\alpha$, $\alpha\beta$, βC; la section CB en comprend deux $C\alpha$, αB. Les sections AC et CB de la base d'Ostende se divisent chacune en deux : $AC = A\alpha + \alpha C$, $CB = C\beta + \beta B$.

BASE DE LOMMEL.

—

SECTION AC.

1re et 2e journées. Partie $A\alpha$.	1re mesure.	2e mesure.
151 Règles = 151 L + x' + x'' + x'''.	+ 0',02121	+ 0',02121
Réduction à l'horizon.	— 2,31824	— 2,34195
Thermomètres métalliques . . .	— 119,12820	— 108,72831
Intervalles.	+ 225,64500	+ 226,41200
m.	+ 11,08240	+ 0,00000
$A\alpha$ = 151 L.	+ 115,30217	+ 115,36295
	Diff. = 0',061	= 0,mm.137

3e et 4e journées. Partie $\alpha\beta$.	1re mesure.	2e mesure.
127 Règles = 127 L + x' + x'' + x^{iv}	+ 0',07158	+ 0',07158
Réduction à l'horizon	— 1,89647	— 1,82449
Thermomètres métalliques . . .	— 106,57021	— 88,50372
Intervalles	+ 191,79500	+ 191,87100
n — m	+ 17,75160	+ 0,00000
Intervalle négatif	— 1,46900	— 1,55220
$\alpha\beta$ = 127 L	+ 99,66250	+ 100,06217
	Diff. = 0',3997 = 0mill.,902	

5e journée. Partie βC.	1re mesure.	2e mesure.
63 Règles = 63 L + x' + x''' + x^{iv}	— 0',37841	— 0',37841
Réduction à l'horizon	— 1,16050	— 1,10977
Thermomètres métalliques . . .	— 51,94763	— 46,99887
Intervalles	+ 95,45950	+ 96,02850
Distance de la dernière Règle au terme C	+ 209,26600	+ 174,73400
n	— 28,81400	— 0,00000
Intervalle négatif	— 1,53200	— 1,57030
βC = 63 L	+ 220,89296	+ 220,70515
	Diff. = 0',188 = 0mill.,424	

Section AC.	1re mesure.	2e mesure.
Aα = 151 L	+ 115',50217	+ 115',56295
$\alpha\beta$ = 127 L	+ 99,66250	+ 100,06217
βC = 63 L	+ 220,89296	+ 220,70515
AC = 341 L	+ 435,85763	+ 436,13027
	Diff. = 0',273 = 0mill.,615	

Moyenne des deux mesures . . . . . 341 L + 435',99395

Après réduction au niveau de la mer. . . . . AC = 1351m,0649.

SECTION CB.

6e ET 7e JOURNÉES. PARTIE Cα.	1re MESURE.	2e MESURE.
155 Règles = 155 L + x' + x'' + x'''	+ 0',02121	+ 0',02121
Réduction à l'horizon	— 9,55079	— 9,25526
Thermomètres métalliques.	— 129,78823	— 120,07171
Intervalles	+ 232,10450	+ 230,66400
Épaisseur du fil suspendu en C.	+ 0,12634	+ 0,12634
m.	+ 8,86600	+ 0,00000
Cα = 155 L.	+ 101,77303	+ 101,48458
	Diff. = 0',288 =	0mill.,651

8e ET 9e JOURNÉES. PARTIE αB.	1re MESURE.	2e MESURE.
93 Règles = 93 L + x^{iv}	— 0',02121	— 0',02121
Réduction à l'horizon	— 3,55073	— 3,58096
Thermomètres métalliques	— 82,13840	— 76,08226
Intervalles	+ 140,79650	+ 140,56150
Distance de la dernière Règle au terme B. .	+ 818,19800	+ 803,17300
m.	— 8,86600	— 0,00000
Intervalle négatif	— 1,36540	— 1,30590
αB = 93 L	+ 863,04676	+ 862,74417
	Diff. = 0',303 =	0mill.,683

SECTION CB.	1re MESURE.	2e MESURE.
Cα = 155 L.	+ 101',77303	+ 101',48458
αB = 93 L.	+ 863,04676	+ 862,74417
CB = 248 L.	+ 964,81979	+ 964,22875
	Diff. = 0',591 =	1mill.,333

Moyenne des deux mesures . . . . . 248 L + 964',52427

Après réduction au niveau de la mer. . . . . CB = 969m,5072

AC = 1331,0649

Longueur de la base AB = 2300,5721.

Calculée d'après les coefficients obtenus, en 1846, par M. le général *Baeyer*, cette même base avait été trouvée de 2300m,5710. La différence que présentent ces deux évaluations n'est aussi petite, que parce qu'il a fallu introduire dans

la seconde une correction particulière, dont on donnera l'explication dans le compte rendu de la mesure des bases; sinon, la substitution des nouveaux coefficients aux anciens eût produit un accroissement de longueur sur AB de $0^m,0136$, au lieu de $0^m,0011$.

BASE D'OSTENDE.

SECTION AC.

1re ET 3e JOURNÉES. PARTIE Aα.	1re MESURE.	2e MESURE.
157 Règles = 157 L + x'	— 0',28562	— 0',28562
Réduction à l'horizon	— 1,47477	— 1,56828
Thermomètres métalliques	— 141,92707	— 138,56125
Intervalles	+ 239,61550	+ 247,54350
m	+ 10,63900	+ 0,00000
Règle de repère n° 1	+ 159,58700	+ 159,58700
Aα = 157 L	+ 266,15404	+ 266,51735
	Diff. = 0',363 =	0mill.,820

2e ET 4e JOURNÉES. PARTIE αC.	1re MESURE.	2e MESURE.
160 Règles = 160 L	+ 0',00000	+ 0',00000
Réduction à l'horizon	— 0,98855	— 0,97448
Thermomètres métalliques	— 127,63630	— 119,34088
Intervalles	+ 250,95550	+ 255,83400
m	— 10,63900	— 0,00000
Distance de la dernière Règle au terme C	— 676,14566	— 699,70066
Épaisseur du fil	— 0,12634	— 0,12634
αC = 160 L	— 564,58035	— 564,30836
	Diff. = 0',272 =	0mill.,614

SECTION AC.	1re MESURE.	2e MESURE.
Aα = 157 L.	+ 266',15404	+ 266',51735
αC = 160 L.	— 564,58035	— 564,30836
AC = 317 L	— 298,42631	— 297,79101
	Diff. = 0',635 =	1mill.,433
Moyenne des deux mesures	317 L	— 298',10866
Après réduction au niveau de la mer	AC =	1235m,81135

SECTION CB.

5e ET 7e JOURNÉES. PARTIE Cβ.	1re MESURE.	2e MESURE.
160 Règles = 160 L	+ 0',00000	+ 0',00000
Réduction à l'horizon	— 1,06376	— 1,04988
Thermomètres métalliques	— 119,15182	— 106,39299
Intervalles	+ 241,82650	+ 221,99550
Règle de repère n° 2 + l'intervalle	+ 161,10850	+ 161,09750
m	+ 0,00000	+ 7,09270
Cβ = 160 L	+ 282,71942	+ 282,74283
	Diff. = 0',0234 =	0mill.,053

6e ET 8e JOURNÉES. PARTIE βB.	1re MESURE.	2e MESURE.
161 Règles = 161 L + *x'*	— 0',28562	— 0',28562
Réduction à l'horizon	— 1,38499	— 1,43123
Thermomètres métalliques	— 107,80425	— 133,34652
Intervalles	+ 229,72500	+ 246,31200
Distance de la dernière Règle au terme B.	+ 41,45300	+ 50,72500
Recul vers C de la règle de repère	— 34,13380	— 34,13380
Épaisseur du fil	+ 0,12634	+ 0,12634
βB = 161 L	+ 127,69568	+ 127,96617
	Diff. = 0',270 =	0mill.,609

SECTION CB.	1re MESURE.	2e MESURE.
Cβ = 160 L.	+ 282',71942	+ 282',74283
βB = 161 L.	+ 127,69568	+ 127,96617
CB = 321 L.	+ 410',41510	+ 410,70900
	Diff. = 0',294 =	0mill.,663

Moyenne des deux mesures	321 L +	410',56205
Après réduction au niveau de la mer	CB =	1253m,0123
	AC =	1235, 8114
Longueur de la base	AB =	2488, 8237.

Comparées aux bases françaises, les deux bases mesurées en Belgique sont extrêmement petites. La plus longue des deux n'est guère que la huitième partie de la plus longue des sept bases mesurées sur le territoire de la France. et le quart de la plus courte.

		mètres.
La base de Melun	a	11842,15
— Perpignan	»	11706,40
— Brest	»	10526,91
— Ensisheim	»	19044,40
— Bordeaux	»	14119,08
— Gourbera	»	12220,03
— Aix	»	8066,65.

Trois bases ont été mesurées en Prusse. La première, due à *Bessel,* est celle de Königsberg: son développement est de 934^{t},9931 ou 1822^{m},3357; les deux autres, mesurées par M. le général *Baeyer,* sont les bases de Berlin et de Bonn. La base de Berlin a 1198^{t},723 ou 2336^{m},355, et celle de Bonn, 1094 toises environ, ou 2132 mètres.

Les géodésiens * français sont, comme on voit, partisans des longues bases; *Bessel* et ses successeurs donnent la préférence aux petites bases. De ces deux systèmes, quel est le plus avantageux? La question serait résolue en mesurant une petite base à proximité d'une grande, dans l'unique but de déduire la longueur de celle-ci de la longueur de l'autre, par le calcul d'un réseau de triangles qui relierait les deux bases. La démonstration serait péremptoire. Jusqu'à ce qu'elle soit faite, les partisans de chaque système n'invoqueront en faveur de leur opinion que des arguments généralement controversables. « Les grandes bases, diront les uns, sont préférables aux » petites bases, parce que les opérations géodésiques que l'on fait pour » grandir celles-ci et arriver au côté du réseau de triangles que l'on veut » former, n'ont pas le degré de précision que l'on obtient dans la mesure » d'une base; et que si les termes venaient à éprouver de légers déplace-

* Nous empruntons ce mot à une brochure fort intéressante, publiée récemment par M. le colonel d'état-major français *Blondel,* directeur du Dépôt de la guerre, à Paris.

» ments, par suite de quelques mouvements locaux du sol, ils seraient négli-
» geables pour de grandes bases, tandis qu'ils ne seraient peut-être pas sans
» importance dans une petite *. »

Les autres répondront que les soins minutieux et l'attention que la mesure d'une base réclame, ne peuvent se soutenir longtemps au même degré; que, sous ce rapport, une petite base sera mesurée avec plus d'exactitude qu'une grande; qu'elle pourra l'être au moins deux fois; que les triangles qui la relient à un côté de premier ordre sont en petit nombre; que les angles de ces triangles peuvent être observés avec d'autant plus de soin, que les distances auxquelles on observe sont peu considérables; que l'application de la théorie des probabilités aux observations d'angles ajoute à leur précision; et enfin, que partant d'une petite base mesurée, pour y revenir en suivant un réseau de triangles de peu d'étendue, on a trouvé par expérience que la base déduite ne différait de la base mesurée que d'une quantité comprise dans les limites de la différence de deux mesures directes.

En présence de ces deux opinions, n'y aurait-il pas un intérêt réel à éclaircir le doute qu'elles font naître, en confiant à l'expérience le soin d'établir la supériorité de l'un des systèmes sur l'autre?

Bruxelles, octobre 1854.

Le général-major, directeur du Dépôt de la guerre,
Président de la Commission,

A. NERENBURGER.

* Cette opinion, qu'on trouve énoncée dans un écrit remarquable de M. le colonel d'état-major français *Peytier*, inséré au *Mémorial du Dépôt de la guerre* (tome IX, page 462) sous le titre : *Notes sur les opérations géodésiques*, a été émise tout récemment, à propos des bases mesurées en Belgique. Les indications contenues dans cet article sur les Règles de *Bessel*, sont dues à M. le lieutenant-colonel d'état-major *Hossard*, qui s'était rendu à Ostende, en 1853, pour voir les appareils employés, à cette époque, par MM. les officiers d'état-major belges, dans les opérations relatives à la mesure de la base d'Ostende. Les termes dans lesquels M. le colonel *Peytier* s'exprime sur ces opérations, prouvent que nos travaux ont été favorablement appréciés par M. le colonel *Hossard*. Le suffrage de juges aussi compétents, de savants aussi distingués que MM. les colonels *Peytier* et *Hossard*, nous est infiniment précieux, et nous leur exprimons ici toute notre reconnaissance de ce qu'ils ont bien voulu le consigner dans un de leurs écrits.

COMPTE RENDU

DES

OPÉRATIONS DE LA COMMISSION INSTITUÉE PAR M. LE MINISTRE DE LA GUERRE,

POUR ÉTALONNER LES RÈGLES QUI ONT SERVI, EN 1850, 1851, 1852 ET 1853,

A LA

MESURE DES BASES GÉODÉSIQUES BELGES.

Les Règles * au nombre de quatre, que la commission était chargée d'étalonner, sont en fer battu, terminées à leurs extrémités par des biseaux d'acier trempé et longues de *deux toises* environ. Une règle de zinc, soudée et vissée, vers l'une de ses extrémités, à la règle de fer, repose librement sur celle-ci, et porte à son autre extrémité un biseau horizontal également d'acier. Cette seconde règle forme, avec la première, un thermomètre métallique qui accuse à chaque instant la température des deux règles, par l'excès de la dilatation du zinc sur celle du fer. Lorsque cet excès est connu, on est à même d'assigner la longueur absolue correspondante de la règle de fer.

* On en trouve une description détaillée dans l'ouvrage de *Bessel*, intitulé : *Gradmessung in Ostpreussen, und ihre Verbindung*, etc.

Ces Règles ayant été étalonnées précédemment déjà deux fois, on peut se demander s'il était bien nécessaire de les soumettre à un nouvel étalonnage. *Bessel* les avait comparées entre elles et à la toise, en 1834; et 12 ans après, ses expériences avaient été répétées par son collaborateur et ami, M. le colonel d'état-major *Baeyer*, aujourd'hui général. Il semble donc que la longueur des Règles dût être connue avec toute la précision désirable, et, par suite, qu'il devenait sinon inutile, du moins superflu de la déterminer de nouveau. Cependant, lorsque l'on compare les résultats obtenus par M. le général *Baeyer* à ceux de *Bessel*, un fait bien digne d'attention se manifeste : c'est la diminution non-seulement de la longueur des Règles à même température, mais aussi des coefficients de dilatation des deux métaux dont elles sont formées.

Que la longueur des Règles ait été trouvée moindre 12 ans après les expériences de *Bessel*, alors que, dans l'intervalle, l'appareil avait servi à mesurer de nouvelles bases, et qu'à la suite d'un accident survenu en mer, il avait fallu enlever la rouille qui s'était formée sur les biseaux, on le conçoit. Mais comment expliquer l'altération des coefficients de dilatation du fer et du zinc? Et d'abord, le fait de cette altération était-il constant; devait-on admettre que la dilatation des métaux, dans certaines circonstances, diminue avec le temps? C'était là un point de physique très-intéressant à vérifier, et qui ne pouvait l'être qu'en soumettant les Règles à un nouvel étalonnage.

D'un autre côté, depuis 1846 jusqu'en 1854, les Règles avaient été employées à la mesure de nouvelles bases. En 1847, on les transporta de Berlin à Bonn, où elles servirent à la mesure de la base de Bonn. La même année elles retournèrent à Berlin, et de Berlin elles furent expédiées à Bruxelles. En Belgique, on les employa à mesurer trois bases : une première, à titre d'essai, aux environs de *Bruxelles;* la seconde, dans la province de *Limbourg*, au nord et à proximité du camp de *Beverloo;* et la troisième, près de la côte, au sud d'*Ostende*, sur la route de Thourout. Il se pouvait donc que les biseaux fussent sensiblement altérés par l'usage, et de plus, que la relation des diverses parties dont chaque Règle se compose eût subi des modifications de nature à influer sur sa longueur. Cette possibilité suffisait à elle seule pour motiver un nouvel étalonnage.

§ Ier.

EXPOSITION SUCCINCTE DES PROCÉDÉS D'ÉTALONNAGE SUIVIS PAR BESSEL ET BAEYER.

—

Réduite à ses lignes mathématiques, une Règle du système de Bessel peut être considérée comme formée de deux droites superposées AB, AC (*planche I, fig.* 1), attachées l'une à l'autre en A. AB représente la règle de fer; AC, la règle de zinc. D est un point de repère marqué sur la règle de fer.

La droite AC reposant librement sur AB, son extrémité C se rapproche ou s'éloigne du point D, suivant que la température croît ou décroît.

La température étant croissante, il arrive un instant où l'intervalle thermométrique CD est nul, et, à ce moment, la règle AB atteint son *maximum* de longueur en même temps que AC.

Soient λ la longueur *maximum* de AB,
Z la longueur *maximum* de AC,
e le coefficient de dilatation du fer,
z » » du zinc,
l et Z' les longueurs respectives de AB et AC à t degrés de température *au-dessous* de la température inconnue qui annule l'intervalle CD.

On aura évidemment

$$\lambda - l = \lambda . t . e,$$
$$Z - Z' = Z . t . z;$$

expressions qui, divisées l'une par l'autre, donnent, en représentant $Z-Z'$ par a, et $\frac{\lambda e}{Zz}$ par m,

$$l = \lambda - am. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Cette formule permet de calculer la longueur l d'une Règle, correspondante à un intervalle thermométrique a, lorsque λ et m sont connus. *Assigner les valeurs numériques de ces deux quantités pour chaque Règle,* tel était le

but du travail de la Commission. Ce but avait été atteint précédemment par *Bessel* et *Baeyer*, comme il va être expliqué.

Que l'on conçoive deux points fixes, p et q (*planche I, fig.* 2) dont l'écartement excède de quelques lignes seulement la longueur l d'une Règle placée entre les deux. Soient i, i' les intervalles compris entre les extrémités de la Règle et les points fixes; a l'intervalle thermométrique actuel, et M la distance pq. On aura, eu égard à la formule (1),

$$l = \mathrm{M} - (i + i') = \lambda - am \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Pour une autre température, correspondante à un intervalle thermométrique a', et très-différente de la première, la longueur l' de la Règle sera exprimée par

$$l' = \mathrm{M} - (i_1 + i'_1) = \lambda - a'm,$$

en représentant par i_1 et i'_1 les intervalles extrêmes correspondants à la nouvelle température a'.

De ces deux égalités on déduit,

$$m = \frac{(i + i') - (i_1 + i'_1)}{a - a'},$$

valeur qui dépend des intervalles thermométriques et des intervalles extrêmes, et que l'on pourra calculer du moment où l'on aura le moyen de mesurer la grandeur d'un intervalle.

Le coefficient thermométrique m étant connu, si l'on mesure, à l'aide d'un étalon, la distance M des points fixes, et qu'on en substitue l'expression numérique dans la formule (2), on déduira de celle-ci la valeur de λ.

Voilà donc un procédé d'étalonnage fort simple et qui exige seulement, pour pouvoir être appliqué, que l'on sache mesurer avec précision de petits intervalles. *Bessel* y est parvenu en faisant que ces intervalles soient toujours compris entre deux biseaux d'acier f et g (*planche I, fig.* 3), l'un vertical, l'autre horizontal. Il est facile alors d'en trouver la grandeur au moyen d'un prisme $a\ b\ c\ d$, portant sur l'une de ses faces parallèles des divisions égales. Ce prisme, introduit entre les biseaux, jusqu'au contact de ses faces verticales avec les arêtes, ne peut y occuper qu'une seule position; et si son épaisseur, à chaque trait de division tel que fg, est connue, l'intervalle le sera aussi.

Les prismes que *Bessel* fit construire pour cet objet, sont en cristal; leurs

faces parallèles à trois lignes de distance; leur épaisseur, vers l'une des extrémités, est de 0l8, et vers l'autre, de 2l00 *. L'espace compris entre les deux traits extrêmes, correspondants à ces épaisseurs, est divisé en 120 parties égales, et la différence de longueur de deux traits consécutifs est 0l01 environ. Les divisions sont d'ailleurs assez grandes pour qu'on puisse évaluer à vue la $\frac{1}{10}$ partie de l'une d'elles. Ces prismes donnent donc la mesure d'un intervalle à $\frac{1}{1000}$ de ligne près, quantité équivalente à $\frac{1}{455}$ de millimètre environ.

La condition de n'avoir à mesurer que des intervalles compris entre deux arêtes, oblige à substituer aux points fixes *p* et *q* de la figure 2, des biseaux convenablement situés. L'appareil propre à étalonner les Règles se modifie alors, de manière à constituer le *comparateur* de *Bessel,* auquel se rapportent les explications suivantes.

AB (*planche I, fig.* 7) est un bâti en bois, ayant la forme d'un conduit rectangulaire de $0^m,16$ à $0^m,20$ d'équarrissage, long de 4^m environ, et reposant en *t,t* sur des tréteaux en charpente lestés par quelques poids. A chaque extrémité de ce bâti est fixé un appareil en laiton (*planche I, fig.* 4), terminé vers le haut par une face plane portant une rainure *r,* dirigée dans le sens de la longueur du comparateur : elle est destinée à recevoir un cylindre d'acier, terminé d'un côté en calotte sphérique et de l'autre en biseau (*planche I, fig.* 6). Ce cylindre, dont la longueur est de $0^m,15$ environ, se place dans la rainure, de manière que l'extrémité en biseau soit vis-à-vis d'un biseau fixe *b* (*planche I, fig.* 4) également en acier, attaché par deux vis à la face supérieure de l'appareil en laiton. Les deux bouts du cylindre sont trempés.

Les toises dont *Bessel* et *Baeyer* ont fait usage pour leurs opérations, sont terminées par de petits cylindres ayant leurs axes dans le prolongement de l'axe des toises. Lors donc que celles-ci étaient mises bout à bout et en ligne droite entre les biseaux fixes du comparateur, on obtenait aux extrémités de leur longueur totale, des intervalles tels que *i* (*planche I, fig.* 5), compris entre une arête horizontale et une petite surface circulaire, intervalle qui ne pouvait être mesuré à l'aide des prismes en cristal. Il fallut donc remédier à cet inconvénient, en s'arrangeant de manière à obtenir aux extrémités de la double toise des intervalles qui fussent compris entre deux arêtes. On y parvint en interposant un cylindre (*planche I, fig.* 6) de la forme décrite plus haut, entre chacune des extrémités de la double toise et le biseau fixe correspondant. C'est ainsi qu'on a été amené à introduire dans l'appareil de comparaison une complication regrettable, mais qui n'aurait pu être évitée qu'en

* L'unité de longueur adoptée par *Bessel* est la toise française.

employant des toises terminées en biseau d'un côté, conséquemment en adoptant une forme désavantageuse, eu égard à l'étalonnage et à la conservation des étalons eux-mêmes.

L'obligation de faire usage de cylindres pour la double toise, eut pour effet d'en rendre l'emploi nécessaire avec les Règles, attendu que la distance des biseaux fixes du comparateur se trouvait déterminée par la somme des longueurs des deux toises et des deux cylindres, et que la longueur d'une Règle est, à très-peu près, égale à deux toises. La figure 8 (*planche I*) montre une Règle dans sa caisse placée sur le comparateur : deux bandes en fer *u, u,* encastrées à la partie supérieure des tréteaux, la supportent.

Pour établir les deux toises bout à bout et en ligne droite, on fait usage d'un support particulier en bois, représenté par la figure 9 (*planche I*). Deux rainures parallèles, destinées à recevoir huit galets de la forme décrite par la figure 10 (*planche I*), également espacés, et alignés au moyen d'un fil tendu, existent à la face supérieure *mn*. La figure 11 montre les deux toises reposant sur ces galets.

Les opérations auxquelles *Bessel* emploie l'appareil * décrit ci-dessus comprennent deux périodes qui sont relatives, la première, à la comparaison des Règles entre elles, et la seconde, à la comparaison d'une des Règles avec la double toise.

De la comparaison des Règles entre elles.

La formule (1) appliquée successivement aux quatre Règles donne, en désignant celles-ci par leurs numéros respectifs :

$$\left.\begin{array}{l} l' = \lambda' - am' \\ l'' = \lambda'' - bm'' \\ l''' = \lambda''' - cm''' \\ l^{\text{iv}} = \lambda^{\text{iv}} - dm^{\text{iv}} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (A).$$

Si L représente la moyenne arithmétique $\frac{\lambda' + \lambda'' + \lambda''' + \lambda^{\text{iv}}}{4}$, on aura, en appelant x', x'', x''', x^{iv}, les différences entre cette moyenne et chacune

* L'ouvrage de *Bessel* en fournit une description plus détaillée.

des longueurs λ', λ'', λ''', λ^{IV},

$$\begin{aligned} \lambda' &= L + x' \\ \lambda'' &= L + x'' \\ \lambda''' &= L + x''' \\ \lambda^{\text{IV}} &= L + x^{\text{IV}} \end{aligned}$$

D'où l'on déduit :

$$\lambda' + \lambda'' + \lambda''' + \lambda^{\text{IV}} = 4L + (x' + x'' + x''' + x^{\text{IV}});$$

et comme, par supposition,

$$4L = \lambda' + \lambda'' + \lambda''' + \lambda^{\text{IV}},$$

on a cette condition,

$$x' + x'' + x''' + x^{\text{IV}} = o.$$

Par la substitution des valeurs de λ', λ'', λ''', λ^{IV}, trouvées ci-dessus, dans les égalités (A), celles-ci deviennent,

$$\left.\begin{aligned} l' &= L + x' - am' \\ l'' &= L + x'' - bm'' \\ l''' &= L + x''' - cm''' \\ l^{\text{IV}} &= L + x^{\text{IV}} - dm^{\text{IV}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (B).$$

D'autre part, si M est la distance inconnue des biseaux fixes du comparateur, s la somme également inconnue des longueurs des cylindres, n la somme des intervalles, on a, pour les quatre Règles :

$$\begin{aligned} M - s &= l' + n' \\ \text{»} &= l'' + n'' \\ \text{»} &= l''' + n''' \\ \text{»} &= l^{\text{IV}} + n^{\text{IV}} \end{aligned}$$

Ou bien, en mettant $L + C$ à la place de $M - s$, C représentant une nouvelle inconnue,

$$\left.\begin{aligned} l' &= L + C - n' \\ l'' &= L + C - n'' \\ l''' &= L + C - n''' \\ l^{\text{IV}} &= L + C - n^{\text{IV}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (C).$$

Combinées avec (B), ces dernières égalités conduisent aux suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} n' = C - x' + am' \\ n'' = C - x'' + bm'' \\ n''' = C - x''' + cm''' \\ n^{\text{IV}} = C - x^{\text{IV}} + dm^{\text{IV}} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (D).$$

Ces quatre équations renferment neuf inconnues, savoir : C, m', m'', m''', m^{IV} et x', x'', x''', x^{IV} ; mais la condition $x' + x'' + x''' + x^{\text{IV}} = 0$ en réduit le nombre à huit.

L'inconnue C dépend de M et de s, c'est-à-dire de la distance comprise entre les biseaux fixes du comparateur, et de la longueur des cylindres. Or, ni l'une ni l'autre de ces quantités n'est rigoureusement invariable. Les variations thermométriques et hygrométriques de l'air influent incessamment sur le bâti, entièrement en bois, du comparateur, et conséquemment aussi sur la distance des biseaux supposés fixes. Les cylindres participent, à leur tour, de la température de l'air ambiant, et de plus, comme on est obligé de les prendre avec les doigts chaque fois qu'une Règle est présentée au comparateur, ils tendent à acquérir la température de la main. De là, nécessité de grouper les observations en séries, pour chacune desquelles les Règles sont présentées au comparateur dans l'ordre I, II, III, IV, IV, III, II, I. De cette manière on élimine, en partie, les erreurs dues à la variabilité de la distance M, et l'on atténue celles qui proviennent des changements de température des cylindres, puisqu'on limite à la durée d'une série le temps pendant lequel la longueur des cylindres doit rester constante. Plusieurs séries sont d'ailleurs réunies pour en former des moyennes, qui servent à établir des groupes tels que (D), mais dont l'ensemble renferme plus d'équations qu'il n'y a d'inconnues à déterminer.

Les observations relatives à la comparaison des Règles entre elles comprennent trois périodes. Dans la première, la température des quatre Règles est de 4 à 6 degrés Réaumur; dans la seconde, elle s'élève à 24 ou 26 degrés; et, dans la troisième, deux Règles ont de 4 à 6 degrés, tandis que la température des deux autres est plus élevée de 20 degrés environ. Il y a donc nécessité d'opérer en hiver, ou tout au moins au commencement du printemps, pour pouvoir profiter des basses températures naturelles, sauf à chauffer artificiellement les Règles qui, dans les seconde et troisième périodes, doivent avoir une température élevée.

Le local consacré aux expériences doit réunir plusieurs conditions essen-

tielles. Il faut d'abord qu'il se compose de deux pièces contiguës : l'une destinée au comparateur, et l'autre aux Règles dont la température doit être élevée au *maximum*. Il sera situé au rez-de-chaussée, sans caves au-dessous, à l'abri des rayons directs du soleil, bien éclairé et assez à l'écart pour qu'on n'y ressente pas les vibrations imprimées au sol par le roulement des voitures.

L'établissement du comparateur dans la pièce qui lui est destinée réclame quelques précautions. Les tréteaux, supports de l'appareil, reposeront sur des massifs maçonnés dans le sol, et isolés; les bandes de fer qui les terminent, et sur lesquelles portent les Règles, seront fixées soigneusement dans leurs encastrements; enfin, les rainures, destinées aux cylindres, seront correctement alignées.

Ces dispositions terminées, on procède aux observations. Prenons pour exemple le cas de deux Règles à basse température, les deux autres étant à température élevée. Afin de gagner du temps lors des comparaisons, on commence par présenter successivement chaque Règle au comparateur, en vue de disposer préalablement la hauteur de ses extrémités, de manière que l'axe de la Règle, et les axes des cylindres, soient en ligne droite sur l'axe du comparateur, qui est déterminé par le milieu des biseaux fixes. Dans ce but, on présente les cylindres, placés sur les rainures, leurs biseaux tournés vers les biseaux de la Règle, par conséquent leur partie arrondie en regard des biseaux du comparateur, l'arête de chacun d'eux, à angle droit avec l'arête correspondante de la Règle : puis, au moyen de cales minces (ce sont des lames de zinc), placées entre la caisse de la Règle et les bandes de fer qui la supportent, on amène le milieu de chacune des arêtes terminales de la Règle en correspondance avec le milieu de l'arête du cylindre. Cette position est celle que la Règle devra reprendre toutes les fois qu'on la présentera au comparateur. Une Règle pesant 80 kilogrammes environ, deux hommes sont nécessaires pour la mettre sur le comparateur ou pour l'en ôter.

Lorsque la place des quatre Règles est ainsi préparée, deux d'entre elles, par exemple les nos II et IV, sont transportées dans la pièce voisine, où la température a été élevée jusqu'à 30 ou 35 degrés; là, placées l'une à côté de l'autre, sur deux tréteaux, elles prennent graduellement la température de l'air ambiant, tandis que les deux autres Règles, laissées dans la salle, en acquièrent à leur tour la température, qui est de 4 à 6 degrés. Au bout de trois à quatre heures, les premières ont la température voulue, et les expériences peuvent commencer. La Règle no I est établie sur le comparateur, le milieu des biseaux qui la terminent en regard du milieu des biseaux des

cylindres : après quoi les deux cylindres sont retournés bout pour bout, de manière que, reposant dans les rainures, ils présentent leur arête à l'arête du biseau fixe correspondant, dans une situation verticale, tandis que leur partie arrondie touche le biseau de la Règle au point milieu. Deux observateurs, munis chacun d'un prisme en cristal, procèdent alors à la lecture des intervalles. Celui des deux qui se trouve du côté du biseau vertical de la Règle commence par lire l'intervalle thermométrique : après quoi, tous deux lisent simultanément les intervalles compris entre les biseaux fixes et ceux des cylindres. Ces trois mêmes intervalles sont lus une seconde fois; mais de telle sorte que les nouvelles lectures de l'un des observateurs contrôlent celles qui ont été faites précédemment par l'autre. La Règle n° III succède à la Règle n° I, et donne lieu aux mêmes opérations.

Les Règles II et IV sont soumises à leur tour au comparateur, puis replacées dans la salle où elles prennent leur température. Si les quatre Règles ont été comparées dans l'ordre I, III, II, IV, elles reviennent dans l'ordre inverse IV, II, III, I, et les huit comparaisons simples, obtenues ainsi, constituent *une première série* d'observations.

Les Règles à haute température et les Règles à basse température restant les mêmes, on fait une seconde série; mais celle-ci terminée, les expériences se continuent en adoptant, après chaque double série, une autre combinaison des Règles, de manière à avoir épuisé, en douze séries, les six combinaisons possibles de deux Règles à haute température et de deux Règles à basse température, c'est-à-dire les combinaisons suivantes :

A HAUTE TEMPÉRATURE.		A BASSE TEMPÉRATURE.	
II	IV	I	III
I	II	III	IV
III	I	II	IV
III	IV	I	II
I	IV	II	III
II	III.	I	IV.

Ces douze séries d'observations sont suivies de douze autres séries partagées en deux groupes de six. Dans l'un, toutes les Règles ont de 24 à 26 degrés, et dans l'autre, leur température commune est de 4 à 6 degrés. Il y a donc en tout 24 séries. Les résultats d'observations sont, pour une Règle, d'une part,

l'indication thermométrique, et de l'autre, la somme des intervalles compris entre les biseaux des cylindres et ceux du comparateur. Les premiers étant désignés par les lettres *a, b, c, d,* qui se rapportent aux Règles I, II, III, IV, et les seconds par les lettres n', n'', n''', n^{iv}, leurs valeurs numériques sont inscrites dans un tableau dont voici le modèle :

Comparaison des Règles entre elles.

DATE.	Nos des séries.	n'	a	n''	b	n'''	c	n^{iv}	d
1846.									
12 mars	1	3,5198	1,8409	2,9197	1,9139	3,3631	1,8434	3,3509	1,8814
	2	3,5201	1,8341	2,9171	1,9069	3,3635	1,8336	3,3336	1,8699
	3	3,5171	1,8255	2,9151	1,8984	3,3603	1,8245	3,3511	1,8661

Comparaison d'une des Règles avec la toise.

Lorsque, pour les comparaisons d'une Règle avec la toise, on ne dispose que d'un seul étalon, les opérations se compliquent de la difficulté d'obtenir une longueur double au moyen de cet étalon porté à la suite de lui-même, ainsi que *Bessel* l'a pratiqué en 1834. Il est donc infiniment préférable d'employer deux toises qui, mises bout à bout et en ligne droite, fournissent immédiatement la longueur voulue. C'est ainsi qu'a procédé M. le général *Baeyer* en 1846. Les toises dont il a fait usage alors, avaient pour formules :

$$F = 863,838714 + t.\,0,0100811$$
$$G = 863,831484 + t.\,0,0100811.$$

Placées bout à bout et en ligne droite, elles donnaient une longueur qui, représentée par 2T, était exprimée par

$$2T = 1727,670198 + t.\,0,0201622 \quad \ldots\ldots$$ *

Supposant les toises établies sur le comparateur, et les cylindres en contact

* Voyez l'ouvrage de *Baeyer* intitulé : *Die Küstenvermessung*, etc., page 14.

avec elles, si n est la somme des intervalles compris entre les biseaux des cylindres et ceux du comparateur, on aura évidemment

$$2T = M - s - n,$$

formule dans laquelle M représente, comme précédemment, la distance inconnue des biseaux fixes du comparateur, et s la somme des longueurs des cylindres. Mais, par hypothèse,

$$M - s = L + C;$$

conséquemment,

$$2T = L + C - n.$$

D'autre part, la substitution de la Règle n° I aux deux toises, sur le comparateur, donne (formules C, page 7)

$$l' = L + C - n'.$$

De cette équation, combinée avec la précédente, on tire, en ayant égard aux formules (B),

$$L = 2T - x' + am' + n - n'. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (E).$$

Cette expression de la Règle moyenne, déduite de la comparaison des deux toises avec la Règle n° I, ne renferme que des quantités connues. 2T dépend uniquement de la température t des toises; x' et m' sont des résultats provenant de la comparaison des Règles entre elles; a est l'intervalle thermométrique de la Règle n° I, soumise au comparateur immédiatement après les toises, et n' la somme des intervalles lus pour cette Règle; enfin n est la somme des intervalles lus pour les toises.

A l'aide des prismes, les intervalles s'obtiennent, ainsi qu'on l'a dit plus haut, à $\frac{1}{1000}$ de ligne près. La valeur de L, déduite d'une seule expérience, et calculée par la formule (E), offrira ce degré d'exactitude, si la température t des toises est connue avec une précision suffisante. En ayant recours à la formule

$$2T = 1727^{l}670198 + t.\,0{,}0201622,$$

on trouve que l'approximation nécessaire est exprimée par $\frac{0.001}{0.0201622}$, quantité équivalente à $0^{\circ}{,}049$, ou, en nombre rond, à $\frac{1}{20}$ de degré centigrade.

Ce résultat montre combien il faut apporter de soin à constater la température des toises.

La première condition est d'avoir à sa disposition d'excellents thermomètres soigneusement comparés. Il faut ensuite pourvoir au moyen d'obtenir les toises à même température dans toutes leurs parties. *Bessel* et *Baeyer* y sont parvenus en les plongeant dans un bain d'eau distillée, contenant de l'alcool ou une dissolution alcaline pour prévenir l'oxydation. Mais il faut préalablement les revêtir d'une enveloppe de drap mince qui n'en laisse à découvert que les extrémités.

On choisit, pour procéder aux expériences, un jour où la température naturelle est voisine de 16° centigrades. Une auge en bois ou en fer-blanc, disposée convenablement dans la salle, à proximité du comparateur, est destinée à recevoir le liquide. On la remplit la veille, afin que celui-ci prenne la température de la salle aussi parfaitement que possible. Une heure au moins avant de commencer les opérations, les toises, revêtues de leurs enveloppes en drap, et munies de thermomètres dont la boule est introduite entre l'enveloppe et la surface du métal, sont mises dans le bain, reposant sur un support convenable, l'une à côté de l'autre. On agite l'eau au moyen de spatules, afin d'égaliser la température du bain.

Pendant ce temps, on établit sur le comparateur le support *p* (*planche I, fig.* 9) avec ses galets dont la position a dû être réglée préalablement de manière que les toises, au sortir du bain, mises bout à bout sur leur support, soient en ligne droite et à hauteur des biseaux fixes. La position de la Règle à étalonner (c'est habituellement la Règle n° I) a dû être déterminée aussi, comme on l'a dit plus haut, pour que, dans le cours des expériences, ses biseaux soient parfaitement en correspondance avec ceux du comparateur. Ces divers préparatifs terminés, les opérations commencent : elles consistent à présenter successivement au comparateur la double toise et la Règle, et à lire les thermomètres et les intervalles.

La double toise étant en expérience, on approche les cylindres de ses extrémités, jusqu'à ce qu'ils les touchent par leur partie arrondie. Alors, tandis que deux observateurs font la lecture des thermomètres, deux autres lisent les intervalles compris entre les biseaux des cylindres et ceux du comparateur. Ces diverses lectures sont répétées immédiatement par les mêmes observateurs, mais de manière, quant aux intervalles, que la deuxième lecture faite par l'un soit celle de l'intervalle lu par l'autre en premier lieu : après quoi, les toises sont enlevées, remises dans leur bain et remplacées par la Règle n° I; le thermomètre métallique et les intervalles sont lus : la dou-

ble toise succède à la Règle, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait au moins dix séries d'observations, se composant chacune de deux observations de la double toise et d'une de la Règle. Les résultats obtenus sont inscrits dans le tableau suivant :

Comparaison de la Règle N° I *avec la double toise.*

		t	$2T$	n et n'	a
1re Série.	Toises	15°,700	1727',9867	3',5507	
	R. N° I. . . .	. . . . .	. . . . .	3,5485	1',5467
	Toises	15,800	1727,9888	3,5491	
2e Série.	Toises	15,900	1727,9908	3,5498	
	R. N° I. . . .	. . . . .	. . . . .	3,5527	1,5421
	Toises	16,000	1727,9928	3,5517	

Ce tableau, et celui qui termine l'article précédent relatif à la comparaison des Règles entre elles, renferment toutes les données de la question. Il resterait à en exposer le calcul : ce sera l'objet du cinquième et dernier paragraphe.

La Commission, après avoir pris connaissance des procédés décrits sommairement dans l'exposé qui précède, s'est demandé s'ils présentent toutes les garanties d'exactitude désirables, pour une opération aussi délicate que l'étalonnage de Règles géodésiques. Chaque Règle du système prussien pèse 80 kilogrammes environ : c'est là un poids considérable et d'un maniement difficile, surtout lorsqu'on n'y emploie que des bras, à l'exclusion de tout agent mécanique. Cependant ces Règles si lourdes doivent, dans les expériences décrites ci-dessus, subir de fréquents déplacements : elles sont présentées au comparateur un grand nombre de fois; il faut les y placer avec justesse, en faisant correspondre bien exactement les milieux des biseaux qui les terminent avec les milieux des arêtes des cylindres; les établir sur le comparateur et les en ôter, sans trop ébranler l'appareil, de peur d'altérer, d'une

expérience à la suivante, la distance des biseaux fixes, supposés invariables dans le cours d'une série d'observations.

D'autre part, les deux toises, en passant fréquemment du bain, dans lequel elles prennent leur température, au comparateur, sont exposées à recevoir des chocs; leur alignement sur les galets doit, semble-t-il, s'obtenir imparfaitement, puisqu'il est nécessaire d'opérer avec quelque rapidité pour que la température des étalons se conserve pendant toute la durée d'une expérience; l'opération de les ôter de leur bain et de les y remettre; celle d'enlever leur support en bois du comparateur et de l'y replacer, sont incommodes et lentes.

Ces considérations ont porté la Commission à penser qu'il était indispensable de modifier profondément les moyens d'exécution mis en pratique par *Bessel*, tout en conservant intactes ses méthodes d'observation et de calcul. Elle a adopté en conséquence les résolutions suivantes, qui lui ont paru de nature à faire disparaître tous les inconvénients signalés ci-dessus.

I. *Les biseaux du comparateur seront fixés sur des pilastres en pierre de taille, du poids de* 700 *à* 800 *kilogrammes, et isolés;*

II. *Les Règles et la double toise trouveront place sur un chariot porté par deux rails en fer forgé, solidement établis sur des massifs également en pierre de taille.*

III. *Les Règles et la double toise seront présentées au comparateur dans le milieu auquel elles emprunteront leur température.*

C'est en vue de satisfaire à ces conditions que la Commission a arrêté le projet de comparateur dont la description fait l'objet du paragraphe suivant.

§ II.

DESCRIPTION DU COMPARATEUR DE LA COMMISSION (planches II et III).

—

Ses parties principales sont :

1° Les supports A, A des biseaux fixes, pilastres en pierre de taille, de $0^m,90$ de hauteur au-dessus du sol;

2° Deux dés en pierre C, C, de $3^m,90$ de longueur sur $0^m,65$ de hauteur, surmontés chacun d'un rail en fer battu, à section triangulaire;

3° Un chariot MN, dont le tablier, en bois de sapin, a $3^m,96$ de longueur sur $2^m,06$ de largeur et $0^m,05$ d'épaisseur;

4° Un mécanisme comprenant une vis, deux coussinets, un écrou et une manivelle, supporté par deux pilastres.

Des biseaux fixes (planche IV).

Dans le comparateur de *Bessel,* chaque biseau est attaché, par deux vis, sur un support en laiton, formé d'une semelle de 3 à 4 millimètres d'épaisseur (*planche I, fig.* 4) et d'une plaque parallèle, reliée à la première par deux parois à jour; des vis à bois fixent ces supports aux extrémités du bâti. Leurs longueur, largeur et hauteur, sont respectivement $0^m,16$, $0^m,06$ et $0^m,05$. La plaque supérieure porte une rainure destinée à recevoir le cylindre, et, lorsque les deux supports sont mis en place, il faut, pour qu'ils soient réglés, que la rainure de l'un se trouve dans le prolongement de celle de l'autre. Or, cette condition essentielle paraît difficilement réalisable sans le secours d'aucune vis de rappel, surtout avec le mode d'attache adopté pour ces supports. D'un autre côté, si l'on considère les dimensions des supports, on peut craindre qu'ils soient exposés à des altérations de forme dues aux variations de la température, et par suite, que la distance comprise entre les biseaux ne reste pas suffisamment constante.

Pour parer à ce dernier inconvénient, la Commission a fait, du support des biseaux, un véritable compensateur dont voici la description :

AA (*planche IV, fig.* 1) est un parallélépipède en bronze à canon de $0^m,16$ de longueur sur $0^m,06$ de largeur et $0^m,015$ d'épaisseur, fixé au pilastre par

deux vis V,V, à têtes noyées, traversant la pierre pour tarauder dans un écrou E qu'une ouverture latérale O, pratiquée dans le pilastre, permet de présenter aux deux vis. B est un deuxième parallélépipède de même métal et de même longueur que le premier, mais dont la largeur et l'épaisseur sont moindres. Deux vis V',V', le fixent au parallélépipède A, comme le montre la figure. Une troisième pièce D, sur laquelle est vissé le biseau, s'adapte et est maintenue par quatre vis sur le parallélépipède supérieur, de telle sorte que l'arête *a* du biseau se trouve dans le plan vertical déterminé par les axes des vis V,V. Par cette disposition, en supposant que le parallélépipède inférieur se dilate de *b* vers *c*, d'une certaine quantité, comme, à cause de l'identité du métal des deux parallélépipèdes, le supérieur se dilatera d'autant, mais en sens inverse et à partir de *c*, il est clair que l'arête *a* du biseau ne bougera pas, quels que soient les changements de température.

Le parallélépipède supérieur porte, indépendamment du biseau, un guide G qui remplace la rainure du support de *Bessel*. On a été conduit à adopter cette modification, par une considération relative aux cylindres. Pour que les lectures des intervalles soient comparables entre elles, il faut qu'elles se rapportent à des intervalles compris entre l'arête du biseau fixe et celle du cylindre, celle-ci formant toujours le même angle avec la première. Dans le comparateur de *Bessel*, la position des cylindres ne paraît pas suffisamment assurée; elle peut être dérangée par l'introduction des prismes entre les biseaux : c'est pour remédier à cet inconvénient que la Commission a jugé convenable de faire construire de nouveaux cylindres, également en acier, de mêmes dimensions que ceux de *Bessel*, mais pourvus de deux collets carrés à la manière d'une lunette de niveau-cercle. Reposant par ces collets sur une surface plane, ils présentent beaucoup de stabilité, et leurs arêtes prennent invariablement la même position par rapport aux arêtes des biseaux fixes du comparateur.

Les quatre vis *r,r,r,r*, servent à imprimer de petits mouvements au parallélépipède supérieur, avant qu'il ne soit fixé, et permettent de le régler.

Des cylindres à collets carrés.

La figure 2 (*planche IV*) les représente et en montre les dimensions réelles; *c,c* est un couvercle en acier pouvant s'adapter à l'extrémité arrondie des cylindres, pour y marquer, par le sommet *s* d'un petit cône, un point de l'axe qui sert à déterminer la position des Règles ou celle de la double toise, sur le comparateur. Ces cylindres, destinés à remplacer ceux de *Bessel*, de-

vaient satisfaire à plusieurs conditions essentielles. Il fallait, pour chacun d'eux :

1° Que les deux collets fussent égaux ;

2° Que le biseau eût une direction perpendiculaire au plan déterminé par les faces d'appui des collets ;

3° Que le sommet du petit cône du couvercle se trouvât dans l'axe du cylindre ;

4° Que cet axe passât par les centres des collets.

La vérification minutieuse à laquelle deux membres de la Commission les soumirent, permit de reconnaitre que ces diverses conditions avaient été soigneusement observées dans l'exécution, et qu'aucune erreur appréciable ne pouvait résulter de quelques légères imperfections reconnues.

L'égalité des collets fut constatée au moyen d'un calibre, c'est-à-dire d'une plaque dans laquelle avait été pratiquée une ouverture égale au carré d'un des collets. En introduisant successivement les deux collets dans cette ouverture, on trouva qu'ils y entraient à frottement sans laisser aucun jour.

Comme c'est *le même point* du biseau vertical du cylindre qui vient constamment se mettre en présence du biseau fixe du comparateur, il n'était pas nécessaire que la verticalité du premier fût bien rigoureuse. On se borna donc à poser successivement les cylindres par leurs faces 1 et 3 sur une glace horizontale bien plane, et à placer une équerre en fer soigneusement vérifiée, l'un de ses côtés en contact avec le biseau et l'autre avec la glace. Examinant avec attention, on trouva que le biseau de l'un des cylindres est perpendiculaire au plan de support, dans les deux positions des collets; et que celui de l'autre est perpendiculaire au même plan, quand les collets reposent par les faces 1 ; mais qu'il présente une très-légère obliquité lorsque les collets reposent par les faces opposées.

Les surfaces sphériques ayant été *tournées* en même temps que les cylindres, le centre de chaque sphère devait évidemment se trouver sur l'axe même du cylindre.

Pour s'assurer que le sommet du petit cône de chaque couvercle est dans le prolongement de l'axe du cylindre, on fixa ce dernier au-dessous d'un microscope, de manière que le sommet coïncidât avec la croisée des fils du micromètre; puis on imprima au couvercle un mouvement de rotation sur son cylindre. La pointe resta pour ainsi dire immobile, car on ne remarqua qu'un déplacement insignifiant, provenant sans doute du jeu inévitable que doit avoir le couvercle. Restait à vérifier la coïncidence de l'axe du cylindre avec l'axe des collets.

Si l'axe du cylindre, sans passer par les centres de ses deux collets, était parallèle à la droite qui unit ces centres, l'erreur ne pourrait avoir d'influence sur les opérations; car le point de contact de la sphère, soit avec le biseau d'une Règle, soit avec la face verticale qui termine la toise, serait toujours le même et se trouverait au sommet de la calotte sphérique. Mais si l'axe du cylindre était oblique par rapport à celui des collets, le point de la surface de la sphère, situé dans l'axe du cylindre (point correspondant au sommet du petit cône), serait celui que l'on mettrait en contact avec le biseau horizontal de la Règle, tandis qu'un autre point, situé sur un rayon horizontal de la sphère, toucherait la face verticale qui termine la toise. L'erreur commise dans cette hypothèse serait le sinus-verse $c'k = x$ (*planche IV, fig.* 3).

Désignant par R le rayon de la sphère, et ck par δ, on a :

$$x = \frac{\delta^2}{2R}.$$

Dans le but d'obtenir la grandeur δ, on a fixé l'une sur l'autre, à angle droit, deux glaces bien dressées (*planche IV, fig.* 4). La perpendicularité a été obtenue au moyen d'une équerre en fer soigneusement vérifiée, et on a reconnu qu'elle avait lieu effectivement, par un procédé analogue à celui qu'on emploie dans le sextant pour rendre le grand miroir perpendiculaire au plan du limbe. L'une des glaces a ensuite été établie horizontalement: elle représentait la plaque sur laquelle devaient reposer les cylindres lors des expériences pour la comparaison; l'autre, verticale, figurait le bout de la toise et avait été préalablement recouverte d'une couche très-légère de noir de fumée.

En faisant reposer, par les faces 1, le cylindre muni de son couvercle, sur la glace horizontale, si on l'approchait de la glace verticale, le sommet du petit cône venait toucher celle-ci et y marquait un point brillant; et, lorsqu'on faisait glisser le cylindre parallèlement à lui-même, ce point se transformait en une ligne horizontale brillante *aa*, de la largeur du sommet du cône. Retournant le cylindre pour le faire reposer par ses faces opposées, et répétant l'opération, on obtenait une seconde horizontale *bb*.

On se place dans les conditions les plus défavorables :

1° En supposant que l'intervalle *ab* soit dû, *tout entier*, à l'obliquité de l'axe des cylindres, et nullement à ce que cet axe perce les collets (1, 3) en dehors du centre de figure;

2° En remplaçant la quantité ck de la figure 3 par $\frac{1}{2}$ *ab* de la figure 4 : en

effet, *ab* est plus grand que 2*ck*, puisque la pointe du petit cône est en saillie sur la surface de la sphère.

Plaçant la lame noircie sous le micromètre, on trouva les valeurs suivantes pour l'intervalle *ab* :

CYLINDRE A.	En faisant reposer successivement sur la glace horizontale les faces des collets numérotées.	(1) et (3) $ab = 0^{mm},186$, $\delta = 0^{mm},093$. (2) et (4) $ab = 0\ ,034$, $\delta = 0,\ 017$.
CYLINDRE B.	»	(1) et (3) $ab = 0^{mm},060$, $\delta = 0^{mm},030$. (2) et (4) $ab = 0\ ,185$, $\delta = 0\ ,093$.

Détermination de la valeur du rayon R. — Les portions sphériques étant polies, on les a employées comme miroirs convexes : mais, comme on n'a besoin que du rayon de courbure de la partie centrale, on a commencé par enduire la surface des miroirs d'une couche de noir de fumée; puis, mettant les cylindres sur le tour, on a nettoyé circulairement les milieux des miroirs, de manière à y laisser une calotte brillante dont on a mesuré le diamètre *d*.

Cela fait, plaçant le cylindre sur un plan horizontal, on a présenté au miroir une mire verticale MN (*planche IV, fig.* 5) de hauteur connue; et on l'a éloignée jusqu'à ce que son image *mn* fût exactement un diamètre du champ circulaire du miroir. L'œil de l'observateur était placé dans l'axe du cylindre, près de la mire MN. A cet instant on a mesuré la distance $Mk = s$.

Soit H la hauteur réelle de la mire; *h* celle de son image; R le rayon *ok* du miroir; *f* la distance focale *km*. Les triangles semblables OMN et *omn* donnent

$$H : h = R + s : R - f.$$

La théorie des miroirs convexes fournit en outre la relation,

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{2}{R}.$$

Éliminant *f* entre ces deux équations, on en déduit

$$R = 2s \times \frac{h}{H - h}.$$

Si l'image se formait à la surface même du miroir, h serait précisément égal au diamètre d du champ circulaire, ce qui permettrait de calculer directement R par la formule précédente : mais l'image se forme à une distance f derrière la surface du miroir; et quand l'œil placé en M (*fig.* 6) juge que $h = d$, on a en réalité

$$h : d = s + f : s,$$

d'où

$$h = d. \frac{s + f}{s}.$$

Substituant à f, dans cette dernière relation, sa valeur $\frac{Rs}{R + 2s}$, on en conclut,

$$h = d. \frac{2(R + s)}{R + 2s};$$

$$H - h = \frac{H(R + 2s) - 2d(R + s)}{R + 2s};$$

$$\frac{h}{H - h} = \frac{2d(R + s)}{H(R + 2s) - 2d(R + s)}.$$

Cette valeur, substituée à l'expression $\frac{h}{H - h}$ dans la formule $R = 2s \frac{h}{H - h}$, transforme celle-ci en une équation qui, étant résolue, donne

$$R = -\frac{Hs - 3ds}{H - 2d} + \sqrt{\frac{4s^2d}{H - 2d} + \left(\frac{Hs - 3ds}{H - 2d}\right)^2}.$$

Telle est la formule qui a été employée pour calculer numériquement le rayon de courbure central de la surface qui termine chacun des cylindres.

L'observation a été faite deux fois pour chacun d'eux, et elle a donné :

Cylindre A.	1° . . .	$H = 203^{mm},6$	On en déduit	$R = 39^{mm},2.$
		$s = 415\ ,0$		
		$d = 8\ ,8$		
	2° . . .	$H = 100\ ,0$	. . . .	$R = 38^{mm},3.$
		$s = 180\ ,0$		
		$d = 8\ ,8$		

Cylindre B.	1° . . .	H = 203mm,6 s = 355 ,0 d = 8 ,75	On en déduit R = 33mm,4.	
	2° . . .	H = 100 ,0 s = 153 ,0 d = 8 ,75	. . . . .	R = 32mm,5.

Connaissant les rayons de courbure, on a pu calculer la valeur de x, c'est-à-dire l'influence que l'obliquité des axes des cylindres exercerait sur la comparaison des Règles avec la toise. Si l'on prend pour δ, sa valeur *maximum* 0mm,093, pour R et R′ leurs valeurs *minimum* 38mm,3 et 32mm,5, on obtient dans cette hypothèse, qui est la plus défavorable,

Pour le cylindre A . . . . . x = 0mm,000113
Pour le cylindre B. . . . . x = 0mm,000133 *

On avait donc l'assurance que l'erreur ne s'élevait guère au delà d'un dix-millième de millimètre, et qu'elle serait par conséquent tout à fait insensible.

De l'ajustement des biseaux fixes sur les pilastres.

Les appareils, au nombre de deux, décrits précédemment, et représentés par la figure 1 (*planche IV*), devaient être attachés sur les pilastres très-solidement, et de manière que les deux cylindres eussent leurs axes sur une seule ligne droite, lorsque leurs collets s'appuieraient, d'un côté, sur les plaques qui devaient les supporter, et de l'autre, contre les guides destinés à assurer leur direction. On satisfit à cette condition en procédant de la manière suivante.

On commença par dresser avec soin les faces *mn* (*planche IV, fig.* 1) des pilastres, et d'abord l'une d'elles. Lorsqu'on l'eut obtenue plane et horizontale aussi parfaitement que possible, on s'occupa de la seconde, qui devait se trouver dans le prolongement de la première. Pour s'assurer que cette condition était remplie, on établit un niveau-cercle en dehors de l'alignement

* Les procédés d'observation et de calcul qui ont conduit à ces résultats, sont dus à M. le capitaine du génie Liagre. Il a été aidé dans ses opérations par M. E. Sacré, ingénieur-mécanicien, dont le talent et l'activité ont été très-utiles à la Commission, tant pour la construction que pour l'établissement des appareils qu'elle a employés.

des pilastres, à égale distance de chacun d'eux, et une petite mire à trait horizontal, sur l'une des faces dressées. La lunette du niveau étant réglée, le fil horizontal de son réticule coïncidait avec le trait de la mire, et si les deux pilastres étaient de niveau, il fallait que cette coïncidence eût encore lieu, lorsque la mire serait placée sur l'autre pilastre et qu'on dirigerait vers elle la lunette.

Les faces *mn* dressées et à hauteur, on monta d'abord l'un des appareils, en laissant de côté toutefois la pièce D (à laquelle est attaché le biseau), qui ne pouvait être fixée que plus tard, à cause du mode adopté pour le règlement des guides G. Après quoi on procéda à l'installation du second appareil. La fixation du parallélépipède A ne réclamait d'autre attention que celle de placer ses faces latérales dans le prolongement des faces latérales du parallélépipède correspondant du premier appareil; ce qui s'obtint aisément, et d'une manière suffisamment exacte, à l'aide d'un fil tendu. Mais la mise en place du parallélépipède B était une opération délicate, parce que la position du guide qu'il porte devait être subordonnée à celle du guide déjà fixé. Il s'agissait ici de placer une droite, d'une longueur d'un décimètre environ, dans le prolongement d'une autre droite de même longueur, à la distance de 4 mètres. Parmi plusieurs moyens de solution proposés au sein de la Commission, on accorda la préférence au suivant, qui paraissait devoir être sûr et commode. Un manchon d'acier (*planche IV, fig.* 7), portant deux collets carrés, égaux à ceux des cylindres, fut adapté à une petite lunette, dont la croisée des fils avait deux mouvements rectangulaires, dans le plan perpendiculaire à l'axe. Disposée ainsi, cette lunette pouvait se régler de manière que son axe optique coïncidât avec l'axe de ses collets : il suffisait, pour réaliser cette condition, de placer la lunette sur un plan, en l'y faisant appuyer alternativement par deux faces opposées des collets, par exemple, les faces 1 et 2; puis d'amener la croisée des fils, à l'aide des vis *r,r,* à rester en coïncidence avec un point éloigné, que la lunette reposât par les faces 1 ou par les faces opposées 2. L'axe optique était alors réglé par rapport aux faces opposées 1 et 2. Cette opération, répétée pour les faces 3 et 4, en y employant les vis *r',* amenait l'axe dans la position voulue, c'est-à-dire à l'intersection des plans situés à égale distance des faces opposées. La lunette réglée, on la plaça sur le premier appareil, ses collets contre le guide (*planche IV*, *fig.* 8). L'un des cylindres fut placé de même sur l'autre appareil, sa partie arrondie, munie de son couvercle, tournée vers la lunette. Un observateur se tenait près de la lunette, un autre près du cylindre, le premier indiquant au second les mouvements à imprimer au parallélépipède B, pour amener le sommet *s*

du petit cône dans l'axe optique de la lunette. Ce résultat obtenu, le cylindre était substitué à la lunette, et réciproquement. Si l'axe du premier avait été réglé par l'opération précédente, il eût fallu, après cette substitution, qu'en regardant dans la lunette, on aperçût de nouveau le sommet du cône à la croisée des fils; mais cette circonstance n'eut pas lieu. Pour qu'elle se reproduisit, l'observateur placé à la lunette, en agissant convenablement sur les vis de l'appareil, s'efforçait d'amener l'axe optique sur le sommet du petit cône, sans déranger notablement le point de cet axe, déjà situé sur l'alignement; après quoi, les positions de la lunette et du cylindre étaient de nouveau interverties, et les premières opérations répétées. En continuant à procéder ainsi, on parvint bientôt à donner au parallélépipède B de l'appareil à régler, la position voulue. Pour qu'il ne se dérangeât pas en serrant les vis destinées à le fixer, on prit les précautions nécessaires; et, lorsque l'opération fut terminée, on eut soin de vérifier l'alignement, qui se trouva être exact à très-peu près. Pour une position de la lunette et du cylindre, il y avait coïncidence parfaite, et pour l'autre, inverse de la première, le sommet du petit cône se trouvait exactement sur le fil vertical du réticule, mais en dehors du fil horizontal d'une quantité qui fut évaluée à $\frac{1}{5}$ de millimètre environ. On crut inutile de pousser l'exactitude au delà, l'erreur qui devait résulter de ce défaut d'alignement étant de beaucoup au-dessous de la limite des quantités appréciables.

Les deux appareils réglés, on fixa sur chacun d'eux son biseau, en vissant la pièce D (*planche IV, fig.* 1) à la place qui lui était destinée sur le parallélépipède B. Deux couvercles en bois, fermant à clef, abritaient les biseaux fixes et les préservaient de tout accident, lorsqu'on ne faisait pas usage du comparateur.

La figure 1 de la planche IV montre, indépendamment des appareils décrits ci-dessus, une lunette L, attachée par deux vis au pilastre. Son objet était de rendre apparent tout déplacement du pilastre dans le sens de l'axe du comparateur, pour le cas où, malgré tous les soins apportés à la construction des massifs, quelque mouvement aurait eu lieu dans ceux qui portaient les biseaux. Un point, marqué sur un des murs de la salle, dans le prolongement de l'axe de la lunette, servait de repère à celle-ci.

Du chariot.

On distingue dans le chariot (*planches II et III*):

1° *Les pierres d'appui;*

2° *Le tablier;*
3° *Le mode de support des Règles sur le tablier;*
4° *L'appareil pour chauffer les Règles;*
5° *Le mécanisme pour communiquer le mouvement au chariot;*
6° *La caisse en tôle des toises.*

1° *Des pierres d'appui.*

La section droite de ces pierres (C,C) est figurée sur la planche III; leur longueur est de 3m,96. Leur poids, calculé d'après les dimensions cotées du dessin, peut être évalué à 5000 kilogrammes pour chacune. Placées parallèlement entre elles, dans une direction perpendiculaire à l'axe du comparateur. leur distance de milieu à milieu est de 2m,27. On décrira plus loin les précautions prises pour les établir.

Vers le haut, à 0m,1 de la face qui les termine (*planche II*), elles sont percées, de part en part, d'ouvertures carrées, *p, p, p,* de 0m,05 de côté, espacées de 0m,45. Ces ouvertures sont destinées à recevoir des écrous *e,e* pour les vis *v,v,* qui servent à fixer les rails *r,r.*

2° *Du tablier* (planche II).

Le tablier, en bois de sapin du Nord, de quatre à cinq ans de sciage, a été construit, avec beaucoup de soin, à l'arsenal d'Anvers, sous la direction de M. le colonel d'artillerie *Guillaumot,* directeur de l'établissement. Cet officier supérieur, appréciant la nécessité de constituer pour les Règles un appui solide, mais surtout invariable sous l'influence de l'humidité et de la chaleur, eut l'obligeance de faire faire des essais, sur un moyen généralement recommandé pour empêcher le bois de se voiler, et qui consiste à l'imprégner d'huile de lin. Une Commission, composée de MM. les capitaines d'artillerie *Descoville, Mamet* et *Navez,* fut chargée de mettre en expérience un ou deux madriers en sapin du Nord, de 4 mètres de longueur, 0m,28 à 0m,30 de largeur et 0m,05 d'épaisseur, pour s'assurer si, en laissant un de ces madriers plongé dans l'huile à une température aussi élevée que possible, il absorberait le liquide profondément. L'extrait suivant, d'un rapport de la Commission de l'arsenal, indique la marche de l'expérience et les résultats qu'elle a donnés :

« La Commission fit choix d'un madrier exempt de défaut et bien sec. Ce

» madrier fut parfaitement dressé, puis rainé au bouvet sur ses deux côtés.
» Après le dressage, il avait les dimensions suivantes :

» Longueur	4^m,000
» Largeur.	0 ,300
» Épaisseur	0 ,050.

» Une auge en zinc, ayant 4^m,10 de longueur sur 0^m,080 de largeur et
» 0^m,340 de hauteur, fut construite pour recevoir le madrier.

» Comme il aurait été fort long de monter un appareil propre à maintenir
» le bain d'huile à une température élevée et constante, on a dû se conten-
» ter de verser le liquide bouillant dans l'auge.

» L'huile fut chauffée par quantités successives de 20 litres (capacité de la
» chaudière dont on disposait). Aussitôt que l'huile entrait en ébullition, on
» la versait dans l'auge sur le madrier.

» Le madrier était placé de champ dans l'auge, reposant sur six petits
» linteaux en bois. Le liquide pouvait ainsi se répandre sous la planche.

» Il fallut placer des poids sur le madrier pour le maintenir entièrement
» immergé dans le liquide.

» Aussitôt que le madrier fut entouré d'huile chaude, on entendit des cra-
» quements provenant de ce que des fentes longitudinales s'étaient produites
» par l'influence de la chaleur.

» L'immersion fut commencée le jeudi 1er décembre 1853, à midi; sa
» durée fut de quarante-huit heures.

» On laissa égoutter l'huile, après que le madrier eut été retiré du bain,
» depuis le samedi 3 décembre, à midi, jusqu'au lundi matin 5. Le madrier
» fut alors examiné avec soin. Cet examen donna lieu aux observations sui-
» vantes :

» 1° Le dressage du madrier est resté intact;

» 2° Les dimensions n'ont subi aucune variation sensible;

» 3° De nombreuses fentes longitudinales sillonnent ses grandes faces. Ces
» fentes paraissent profondes; aux extrémités du madrier, il y en a qui ont
» produit des solutions de continuité d'une face à l'autre. Il est remarqua-
» ble que ces fentes n'ont pas eu d'influence sensible sur les dimensions du
» madrier.

» Le madrier a été scié suivant sa largeur de manière à en séparer un
» morceau long de 0^m,50.

» En examinant la tranche de la section droite du madrier, on a pu s'as-

» surer que la pénétration de l'huile dans le bois avait été fort irrégulière :
» elle était presque nulle sur une partie des grandes faces.

» Le morceau du madrier long de 0m,50 a été scié en deux parties égales
» suivant sa longueur. Puis ces parties, dont chacune était rainée, ont été
» assemblées au moyen d'une languette en chêne.

» Cet essai avait pour objet de s'assurer si l'huile, dont les pièces à assem-
» bler étaient imprégnées, ne serait pas un obstacle à l'emploi de la colle.
» Dix-neuf heures après l'opération du collage, on a cherché, sans y réussir,
» à désunir à coups de maillet et de masse les deux pièces assemblées.

» Le madrier avait absorbé environ un litre d'huile. »

Il résultait de cette expérience que l'emploi de l'huile bouillante devait être proscrit. On se borna donc à laisser les planches ou madriers plongés pendant quelques jours dans un bain d'huile non chauffée; et, plus tard, lorsque le tablier fut monté, on y appliqua, au pinceau, une couche de dissolution d'asphalte dans de l'alcool.

Que ces précautions aient été efficaces ou non, toujours est-il qu'en examinant attentivement le tablier, après l'étalonnage des Règles, on n'y a découvert aucune altération de forme.

Le tablier devait offrir une superficie assez grande pour que les quatre Règles, enfermées dans des caisses de 3m,86 de longueur sur 0m,20 d'équarrissage, et une cinquième caisse de mêmes dimensions destinée aux étalons, pussent y être placées convenablement : on lui donna 3m,96 de longueur sur 2m,06 de largeur. Son épaisseur était de 0m,05.

Un plancher de ces dimensions, construit d'une pièce, eût été exposé à se déformer; c'est pourquoi on le fit en trois parties *a, a, a* (*planche II*), avec intervalles de 0m,01. La planche II montre ces parties boulonnées sur trois bandes de fer parallèles *d, d, d,* dont les deux extrêmes, taillées en rainure de forme triangulaire, s'adaptent aux rails *r, r*. Celle du milieu porte un écrou en cuivre, rendu apparent sur la coupe *mn*. Cet écrou est destiné à la vis qui sert à communiquer le mouvement au chariot glissant sur les rails.

3° *Du mode de support des Règles sur le tablier* (planche II).

Il avait été décidé que les Règles seraient supportées, durant l'étalonnage, comme elles l'avaient été dans la mesure des bases : or, dans cette dernière circonstance, elles reposaient sur les chevalets, en trois points disposés comme l'indiquent les points *s, s, s*. Trois vis traversent le tablier en ces

points et peuvent être manœuvrées par dessous. Chaque caisse, y compris celle des étalons *uu*, repose donc sur trois vis à l'aide desquelles il sera facile, lors des comparaisons, d'amener les extrémités des Règles ou de la double Toise, à la hauteur marquée par le sommet du petit cône des cylindres. Restait à pourvoir au moyen de faire correspondre le milieu des biseaux, ou le centre des extrémités de la double Toise, avec le sommet de ce même cône. Les encoignures en fonte *g, g,* qui sont au nombre de quatre par caisse, ont cette destination. Chacune d'elles est fixée au tablier par trois boulons, et porte vers le haut deux vis, V,V', à angle droit, qui agissent, l'une, V, sur les longues parois de la caisse, perpendiculairement à la direction de l'axe du comparateur, et l'autre, V', dans le sens de cette direction.

Les vis de support et celles des encoignures constituent, comme on voit, un système à l'aide duquel chaque Règle peut être mue, sur le tablier, en tout sens, avec beaucoup de facilité, puisqu'il suffit d'agir sur ces vis. Les encoignures ont encore l'avantage d'assurer la position des caisses sur les trois vis de support *s, s, s,* en offrant à ces caisses huit points d'appui sur les parois verticales.

4° *De l'appareil pour chauffer les Règles sur le tablier.*

En jetant les yeux sur la planche II, on voit les Règles groupées deux par deux sur des parties séparées du tablier. Cette disposition est motivée par l'idée de chauffer les Règles, en les abritant sous des couvercles dans l'intérieur desquels on élèverait la température de l'air au moyen de tubes remplis d'eau chaude. Il fallait pour cela deux couvercles séparés, puisque, d'après la marche indiquée et suivie par *Bessel* et *Baeyer,* les expériences d'une des périodes d'observation exigent que deux Règles soient à température élevée, les deux autres étant à température basse; tandis que, pour une autre période, toutes les Règles doivent être à température élevée. A l'aide des couvercles adoptés par la Commission, il devenait facile de placer les Règles dans les diverses conditions de température réclamées par les expériences, si l'on remarque que celles-ci devaient être faites en hiver, à une époque où la température naturelle permettait d'obtenir les Règles à 5 ou 6°, en les laissant exposées au contact de l'air.

Voulait-on présenter au comparateur toutes les Règles à température élevée, on les enfermait deux par deux sous leurs couvercles; puis les tubes chauffeurs étaient remplis d'eau à 100°, et au bout de quelques heures, les

thermomètres métalliques accusaient la température voulue. Si deux Règles seulement devaient être chauffées, les deux autres restant à température basse, il suffisait de laisser ces dernières libres sur le tablier, et d'abriter les deux autres sous leur couvercle. Lorsque toutes les Règles devaient être à basse température, les deux couvercles étaient enlevés, et la température de l'air de la salle se communiquait librement aux quatre Règles.

Pour abriter deux caisses espacées entre elles de $0^m,10$, en réservant l'emplacement nécessaire pour les tubes chauffeurs, il faut un couvercle des dimensions indiquées par le dessin de la *planche III;* et comme, d'après les considérations exposées ci-dessus, les couvercles doivent pouvoir s'enlever et être mis en place assez fréquemment, il convenait d'en rendre la manœuvre prompte et facile. On atteignit ce but en adoptant les dispositions suivantes :

p,p,p...., sont les longues parois latérales des couvercles, fixées invariablement au tablier par des équerres en fer boulonnées; *q, q* en sont les petites parois. Ces dernières, formées d'une planche dans laquelle sont découpés deux carrés de $0^m,23$ de côté, se placent à coulisse entre les précédentes, de façon à laisser en dehors des couvercles les extrémités des Règles et les encoignures. Le dessus est recouvert de planchettes de $0^m,75$ sur $0^m,29$, rainées à mi-bois, et qui se juxtaposent comme l'indique la *planche III.* Cette disposition permet de monter les couvercles ou de les démonter très-aisément et en peu de temps. Lorsqu'ils sont démontés, les grands côtés restent seuls sur le tablier.

Dès que le tablier, les tubes chauffeurs et les couvercles furent montés, on s'empressa d'essayer l'appareil pour s'assurer s'il répondait convenablement à sa destination. Deux Règles furent enfermées sous l'un des couvercles, et l'on remplit d'eau chaude les tubes chauffeurs. Au bout de trois heures environ, les intervalles thermométriques des Règles atteignirent la limite au delà de laquelle il n'est plus possible d'en faire la lecture à l'aide des prismes. Jugeant alors l'expérience complète et ses résultats satisfaisants, on défit le couvercle pour examiner les Règles : *elles étaient couvertes de gouttelettes provenant de vapeur d'eau condensée.* Dans le premier moment, on attribua cette circonstance à quelque imperfection dans les tubes qui, bien qu'on eût eu l'attention de les essayer préalablement, pouvaient avoir laissé échapper de la vapeur d'eau par des fissures cachées dans les soudures; mais un examen attentif de l'état de leur surface montra qu'il fallait en chercher la cause ailleurs. Elle résidait évidemment dans l'*hygrométricité* du bois du couvercle, du tablier et des caisses des Règles. On sait que le bois, quelque vieux

qu'il soit, absorbe et conserve une notable quantité d'eau provenant de l'air. Il était donc permis de supposer que, lorsque la température s'élevait sous le couvercle, l'eau contenue dans les pores du bois s'évaporait; et que, du moment que l'air enfermé en était saturé, elle se condensait sur les Règles qui n'avaient pu prendre encore la température du milieu environnant. Cette particularité ne pouvait exercer aucune influence nuisible sur les opérations, ni altérer les Règles, si on prenait la précaution de les essuyer à leur sortie des couvercles. Pour parer à l'inconvénient, il suffisait d'ailleurs de doubler intérieurement les couvercles avec des feuilles de zinc, et c'est ce qu'on fit. Par ce moyen, on réduisit sensiblement la quantité d'eau qui se déposait sur les Règles, sans pouvoir toutefois l'anéantir totalement, parce qu'il fallait laisser libres les caisses des Règles, les petits côtés des couvercles et les planchettes de recouvrement, qui fournissaient leur contingent de vapeur d'eau. Mais, par la suite, pour prévenir l'oxydation des métaux dont les Règles sont formées, chaque fois que celles-ci devaient être chauffées, on avait l'attention de les frotter avec un chiffon imbibé d'huile, et lorsqu'elles sortaient des couvercles, on les essuyait soigneusement.

Les tubes chauffeurs *t, t, t,* sous chaque couvercle, sont au nombre de trois, et disposés conformément aux indications de la *planche II.* La contenance de chacun de ces tubes est de 25 litres. Des linteaux en bois les supportent, et des brides en zinc, soudées sur le fond, les maintiennent. A chaque tube en sont adaptés trois autres, de moindre section, E, R, K: le premier, qui se termine par un entonnoir, est destiné à l'introduction de l'eau; le second traverse le tablier, se prolonge au-dessous, est coudé vers son extrémité, et se termine par un robinet R qui sert à faire écouler l'eau; et le troisième donne issue à l'air contenu dans le tube principal lorsqu'on le remplit. Pour que la chaleur se conservât mieux, on appliqua une couche de noir de fumée délayé dans de la térébenthine, sur les tubes et les faces intérieures des couvercles, ainsi que sur le tablier. Enfin, comme les tubes chauffeurs sont très-rapprochés des caisses des Règles, on plaça entre les deux des écrans *l, l,* en carton, noircis du côté des tubes et blancs du côté opposé, pour atténuer les effets du rayonnement des surfaces chauffées sur les caisses des Règles, qui, sans cette précaution, auraient pu être exposées à se déformer.

5° *De la caisse en tôle pour les Toises* (planche V).

Voulant que les Toises fussent présentées au comparateur dans le liquide auquel elles emprunteraient leur température, la Commission avait décidé

qu'elles seraient placées dans une caisse en métal. On fit choix de la tôle, parce que les parois devaient offrir une résistance suffisante à la pression du liquide dans lequel les étalons seraient immergés.

Les dimensions de la caisse sont :

Longueur (hors œuvre)	3^m,888
Largeur	0, 165
Hauteur	0, 160
Épaisseur du fond	0, 005
Épaisseur des parois longitudinales	0, 002
Épaisseur des parois extrêmes	0, 0025

Sa capacité est de 100 litres environ.

Son poids, lorsqu'elle est remplie et qu'elle renferme les Toises avec leurs supports, approche de 200 kilogrammes; et comme l'obligation de la mouvoir sur le tablier par les moyens adoptés pour les Règles, exigeait qu'elle fût portée sur trois vis, on dut songer à atténuer autant que possible les effets de la flexion qu'elle aurait à subir sous un poids aussi considérable. C'est pourquoi un renfort *rr*, (*fig.* 1), formé de deux bandes de tôle de 0^m,024 de hauteur et de 0^m,005 d'épaisseur, est brasé sur le fond dans toute sa longueur. Ce renfort est surmonté, savoir : en *n*, d'une pièce qui se termine par un dé au centre duquel existe une petite excavation hémisphérique; et en *p*, par une portion de surface cylindrique comprise entre les parois longitudinales. Les petites faces sont percées, en *t*, d'ouvertures circulaires par lesquelles passent les bouts cylindriques des Toises, lorsque celles-ci reposent sur leurs supports. Le dessus de la caisse est ouvert. En *o*, sur les grandes faces, sont deux autres ouvertures de 0^m,03 de diamètre, qui permettent de voir latéralement dans l'intérieur de la caisse, pour juger du contact des Toises : elles sont fermées par de petites glaces qui compriment, au moyen de rondelles vissées dans l'épaisseur de la tôle, un disque de caoutchouc.

Chaque Toise a, dans la caisse, son support particulier. C'est une barre de fer *ff*, de 1^m,73 de longueur, 0^m,03 de hauteur, et 0^m,013 d'épaisseur (*planche V, fig.* 2). Cette barre repose par trois points *a*, *b*, *c*, sur le renfort du fond de la caisse. Elle porte quatre galets qui peuvent, au moyen de vis destinées à cet usage, être amenés à toucher un même plan de niveau : d'autres vis servent à les fixer dans cette position.

Sur les galets ainsi réglés, on pose la Toise, et on l'appuie par l'une de ses faces latérales contre deux vis V,V (*planche V, fig.* 2) adaptées à la monture des galets extrêmes; puis, au moyen de ces vis, on lui donne la direction

convenable. Deux ressorts T,T, attachés aux montures des mêmes galets, vis-à-vis des points d'appui de la Toise, la maintiennent dans cette direction.

Une seconde caisse, en bois, un peu plus longue que la caisse en tôle, et de $0^m,22$ d'équarrissage, reçoit celle-ci; et, pour que cette dernière puisse se dilater ou se contracter librement, on la fait reposer, par trois points, sur le fond de la caisse qui lui sert d'enveloppe, en ayant soin de la consolider dans cette situation par deux cales en forme de coin. La caisse enveloppe est supportée, comme celles des Règles, par trois vis qui traversent le tablier. Des encoignures, au nombre de quatre, munies chacune de deux vis, complètent le système.

L'intervalle compris entre la caisse en tôle et son enveloppe est rempli avec de la laine, pour que la température du bain, lorsque les comparaisons auront lieu, se maintienne avec plus de persistance au degré voulu.

Ce ne fut qu'après l'installation de la caisse en tôle sur le tablier, qu'on put régler les galets. On procéda à cette opération en faisant un véritable nivellement, du premier galet de l'un des supports des Toises au dernier galet de l'autre support, à l'aide d'une règle métallique construite pour cet objet, et de deux niveaux à bulle d'air qui se fixaient à angle droit sur la règle. Mais comme des deux Toises qui devaient être employées dans les expériences, la Commission n'en possédait pour le moment qu'une, celle du Dépôt de la guerre (la seconde était à Berlin), il se pouvait, si les épaisseurs des deux Toises n'étaient pas rigoureusement les mêmes, qu'on dût, à l'arrivée de la seconde Toise, modifier la position des galets de l'un des supports. En attendant, on supposa les deux étalons identiques de forme, et l'on fit construire deux toises en bois, d'après les dimensions connues de la Toise du Dépôt de la guerre, pour pouvoir terminer les préparatifs.

Il s'agissait de les placer sur leurs galets, en contact et en ligne droite, puis de fermer hermétiquement les ouvertures des petites faces de la caisse en tôle, à travers lesquelles les bouts des Toises devaient passer.

Pour les placer en ligne droite, on commença par tendre un fil d'argent de l'extrémité de la vis V (*planche V, fig.* 3) à l'extrémité de la vis V_1 : après quoi, les deux vis intermédiaires V′, V′, furent amenées en contact avec le fil. Les extrémités des quatre vis étaient donc en ligne droite, et comme les Toises avaient mêmes dimensions, elles devaient, placées sur les galets, et appuyant contre les vis, se trouver alignées à leur tour. On les mit ensuite en contact, leur extrémité libre passant à travers l'ouverture pratiquée dans les petits côtés de la caisse, et débordant également. Restait à fermer hermétiquement ces ouvertures, sans déranger la position des Toises ni contrarier

leur dilatation. Voici le moyen que la commission avait adopté et dont elle fit usage.

Un manchon en caoutchouc vulcanisé, *cc* (*planche V, fig. 4*), de $0^{mm},25$ d'épaisseur, attaché à la racine du bout cylindrique *t* de la Toise, se replie en dehors de la caisse sur la surface extérieure de la paroi qu'il traverse. *rr* est une rondelle de cuivre, évidée circulairement au centre, et appliquée sur le caoutchouc comme le montre la figure. Une seconde rondelle *r'r'*, également de cuivre et vide au centre, s'adapte à la paroi de la caisse, et y est maintenue par huit vis qui la serrent contre la première rondelle, en comprimant le caoutchouc entre celle-ci et la caisse; l'ouverture *o,o* se trouve ainsi hermétiquement fermée, sans qu'il puisse en résulter aucun inconvénient.

Pour maintenir les deux Toises en contact, un ressort *mn, mn,* placé de chaque côté du bout cylindrique *t,* agit sur les Toises dans le sens de leur longueur, en prenant ses points d'appui sur la petite paroi de la caisse, dans l'intérieur, en *n, n*. Ces ressorts sont au nombre de quatre, deux à chaque extrémité de la double Toise.

6° *Du mécanisme pour communiquer le mouvement au chariot.* (Planche II).

Cette partie du comparateur de la Commission ne réclame aucune explication. Composée d'un arbre horizontal en fer, de $0^{m},05$ de diamètre, tourné en pas de vis à filet carré, sur une longueur de $1^{m},92$; de deux coussinets; d'un écrou fixé au tablier, et d'une manivelle, elle paraît suffisamment décrite par le dessin qu'en donne la planche II.

On fera observer seulement que le petit coussinet de l'extrémité de la vis n'est pas attaché à la pierre qui le supporte : il repose librement sur cette pierre, et cela, afin de laisser toute liberté à la vis qui, si elle avait été fixée en deux points, aurait pu éprouver des tractions qui se seraient communiquées au tablier et par suite aux Règles.

Du local, et de l'établissement des fondations (planche VI).

Un local réunissant la plupart des conditions énoncées au § 1er se rencontra dans les ateliers de l'ancien établissement dit *le Renard,* situé à Bruxelles, non loin de la porte de Hal. Au nord-est du vaste bâtiment qui les renferme, est un hangar de 70 mètres de long, sur $9^{m},50$ de large, bien

éclairé par des fenêtres en grand nombre percées dans la toiture. M. de Brouckere, bourgmestre de la ville de Bruxelles, consentit à le mettre à la disposition de la Commission, avec le plus obligeant empressement.

On fit choix, dans cette vaste enceinte, d'un espace carré qui, étant clos par les murs M,M, devint la salle où devait être érigé le comparateur.

En fouillant le terrain, on reconnut que les massifs en pierres de taille, destinés à supporter l'appareil, devaient être établis sur une couche de terre remblayée, ayant environ 3 mètres d'épaisseur; attendu qu'au-dessous de cette couche, le terrain (argileux) est peu consistant, et qu'il eût fallu descendre à 7 mètres pour trouver de meilleures conditions, ce qui eût été coûteux et eût exigé trop de temps.

Dans cette circonstance, on jugea que le seul parti à prendre était de s'établir sur la couche de remblai, après avoir fait subir au sol une compression assez forte pour ne plus devoir craindre aucun tassement après la pose des massifs.

Cette compression fut obtenue au moyen d'un battage avec des moutons à bras: chaque mouton, pesant 36 kilogrammes, était manœuvré par deux hommes; l'opération fut continuée pendant six jours.

Pour évaluer le résultat obtenu, on a fait usage de la formule

$$Q = N \frac{P}{S} \left(\frac{H}{h} + 1 \right),$$

dans laquelle Q représente la charge capable de produire une dépression égale à celle obtenue par le battage;

P, poids du mouton	= 36k,00
S, surface battante	0m,032
H, hauteur de chute	0,50
N, nombre de coups par journée	8.

La dépression h, subie par le terrain après chaque journée, a été :

1re journée	0m,040
2e id.	0 ,026
3e id.	0 ,015
4e id.	0 ,007
5e id.	0 ,004
6e id.	0 ,002.

Il résulte de la formule précédente qu'il aurait fallu l'action d'un poids de 2 259 000 kilogrammes par mètre carré, pour produire la dépression obtenue après le battage de la 6e journée; dès lors il était évident qu'il n'y avait plus lieu de craindre une nouvelle dépression par le poids des massifs, dont l'ensemble ne devait exercer, en moyenne, qu'une pression de 3 311 kilogrammes par mètre carré.

Le résultat obtenu par le battage a donc été beaucoup au delà de ce qui était nécessaire; et si l'opération a été poussée aussi loin, c'est par le désir d'observer les effets du battage aussi longtemps qu'il resterait possible de les apprécier.

Le terrain étant ainsi préparé, les pierres de soubassement de chaque massif, soulevées au moyen d'une grue, ont été descendues avec précaution dans une couche de béton de $0^m,10$ d'épaisseur, étendue au préalable sur l'emplacement déterminé pour chacune des pierres.

On a employé la même méthode pour poser chacune des pierres supérieures sur le soubassement qui lui était destiné; seulement le béton était remplacé par une couche de mortier de $0^m,01$ d'épaisseur.

Les parements des pierres étaient dressés avec assez de précision pour qu'on pût éviter l'emploi des cales.

Ces précautions ont produit le résultat voulu, et l'on n'a observé aucun mouvement dans l'appareil pendant toute la durée des opérations auxquelles il a servi.

Un plancher totalement isolé des massifs, et s'étendant tout autour sur une superficie de 64 mètres carrés, compléta la construction du comparateur.

§ III.

DES TOISES ÉTALONS.

—

Les Toises qui ont été employées par la Commission pour l'étalonnage des Règles, sont en acier fondu. Leur forme est celle d'une règle méplate, de $0^m,043$ de largeur et $0^m,01$ d'épaisseur. Elles sont terminées par des cylindres de $0^m,014$ de longueur et de $0^m,01$ de diamètre, dans lesquels un second cylindre de 3 millimètres de diamètre et $0^{mm},4$ de longueur est brasé en saillie sur les premiers. Les petites bases apparentes de ces derniers cylindres, dressées perpendiculairement à l'axe des règles, constituent *les bouts* des Toises.

L'une et l'autre sont des copies de la Toise de *Bessel,* conservée à l'observatoire de Königsberg; et celle-ci, construite à Paris par *Fortin,* est une copie authentique de la Toise originale dite *du Pérou,* étalonnée par MM. *Arago* et *Zahrtmann.* Sa longueur, à 16°,25 centigrades ou 13° (Réaumur), *température normale* de la Toise du Pérou, est de $863^t,9992$ *.

Les deux Toises dont la Commission s'est servie, ont été construites par M. *Baumann,* habile ingénieur-mécanicien de Berlin, et appartiennent, l'une à M. le général *Baeyer,* et l'autre au Dépôt de la guerre de Bruxelles. La première porte le n° 9 et la seconde le n° 11. Toutes deux ont été comparées, en 1852, par M. le général *Baeyer,* à la Toise de Königsberg, à l'aide du comparateur et par les procédés dont *Bessel* avait fait usage antérieurement pour la détermination de l'unité de longueur en Prusse.

Indépendamment de ces deux copies, M. le général *Baeyer* en fit construire une troisième, destinée à M. *Struve,* et qui lui fut envoyée pour être comparée à la Toise russe. C'est le n° 10. Dans une lettre adressée au directeur du Dépôt de la guerre à Bruxelles, qui en a donné connaissance à la Commission, M. le général *Baeyer* fait connaître en ces termes les résultats de cette comparaison :

« Mesurée avec la Toise de *Bessel,* la copie n° 10 est égale à $863^t,99901$,
» avec l'erreur probable $\pm 0^t,00011$.

» *Struve* a mesuré la longueur de cette copie à l'aide de la Toise russe de

* On entend par *température normale,* la température à laquelle l'étalon dont les savants français ont fait usage pour la mesure des bases de l'arc terrestre du Pérou, et pour celle des bases de la méridienne de France, est égal à *la toise* (3 pieds, 11 lignes, $0^t,44$, de Paris).

» *Fortin,* et il l'a trouvée égale à 863^{l},99914, avec l'erreur probable ± 0^{l},00010.
» D'où il suit que la Toise de *Bessel,* mesurée avec la Toise russe, égale
» 863^{l},99933, tandis que le certificat de cette même Toise lui assigne une
» longueur de 863^{l},99920. La différence est donc de 0^{l},00013, avec l'erreur
» probable ± 0^{l},00015.

» La Toise n° 11 est précisément égale au n° 10. Sa longueur est donc,
» d'après la Toise russe, de 863^{l},99914, avec l'erreur probable ± 0^{l},00016.
» Sa détermination d'après la Toise de *Bessel* comporte l'erreur probable
» ± 0^{l},00012.

» La Toise russe est donc de 0^{l},00013 plus longue que celle de Königsberg.
» Cette belle coïncidence prouve que les comparaisons des diverses Toises
» ont été faites avec une grande précision, et ne laissent rien à désirer au
» point de vue des opérations géodésiques. On peut calculer maintenant, en
» toute sûreté, les triangles depuis Ostende jusqu'à Moscou. »

En faisant parvenir au Dépôt de la guerre de Bruxelles, la Toise n° 11 qui lui était destinée, M. le général *Baeyer* eut l'obligeance d'y joindre une notice sur la détermination des trois Toises n°s 9, 10 et 11. Cet écrit donne, sur l'opération de leur étalonnage, tous les détails d'expérience et de calcul nécessaires pour l'intelligence des méthodes suivies par le savant général. C'est pourquoi la Commission a jugé opportun d'en faire faire une traduction par un de ses membres, et de décider qu'elle serait insérée intégralement dans le Compte rendu de ses opérations. Voici ce document important :

Construction de quelques copies de la Toise de Bessel.

« La comparaison des copies entre elles et avec la Toise originale, a été faite à l'aide du comparateur que *Bessel* avait fait construire pour déterminer la mesure normale de la Prusse, et que le Ministère des Travaux Publics a bien voulu mettre à ma disposition.

» Les copies confectionnées par M. *Baumann,* ce célèbre mécanicien qui a également construit le comparateur, ont les mêmes dimensions que la Toise de *Bessel,* mais elles en diffèrent par la forme des extrémités. Elles sont en acier fondu, et se terminent par deux bouts cylindriques dans lesquels de petits cylindres d'acier trempé, ayant leurs bases perpendiculaires à l'axe des règles, ont été brasés. La troisième copie (n° 11) a été commandée après les deux autres, et quoiqu'elle sorte des mêmes ateliers que celles-ci, elle ne provient cependant pas de la même pièce de métal.

» M. le docteur *Busch*, directeur de l'observatoire de Königsberg, s'est rendu en personne à Berlin, avec la Toise de *Bessel*.

» L'usage d'une Toise est infiniment plus commode lorsque l'on connaît, non-seulement sa longueur à la température normale, mais aussi son coefficient de dilatation. Je me suis donc proposé de déterminer, aussi exactement que possible, les longueurs et les dilatations des copies, et j'ai suivi, pour atteindre ce but, la méthode employée avec tant de succès par *Bessel*, lorsque, pour la mesure d'un arc de méridien dans la Prusse orientale, il assigna la longueur des Règles et détermina leurs coefficients thermométriques. Cette méthode consiste à comparer, à différentes températures, les règles de fer avec une règle d'un autre métal dont la dilatation soit beaucoup plus grande ou beaucoup plus petite, et à déduire, des différences de longueur mesurées directement, la dilatation des deux métaux. J'ai donc fait construire une règle auxiliaire, de zinc, dont la forme et les dimensions sont identiques avec celles des règles d'acier, et qui se termine, comme ces dernières, par des cylindres d'acier trempé. Une règle de platine eût peut-être été préférable, parce qu'on n'est pas encore entièrement fixé sur la régularité de la dilatation du zinc; mais le temps et les ressources financières ont fait défaut.

» Dans toute comparaison de mesures métalliques, il est de la plus haute importance de rechercher la température vraie des règles qui, exposées seulement au contact de l'air, en prennent rarement ou peut-être jamais la température. Pour écarter cette difficulté, et suivant en cela l'exemple de *Bessel*, qui avait fait disposer en conséquence le comparateur, toutes les comparaisons ont eu lieu dans un bain d'alcool. En ce qui concerne l'invariabilité des points fixes, la construction du comparateur laisse à désirer. Cet instrument se compose d'une pièce de bois de huit pouces d'équarrissage, dont l'invariabilité, faute de pouvoir être constatée par un moyen direct, doit être admise en principe. *Bessel* a donné une description complète du comparateur dans son Exposé des recherches et des mesures ayant pour objet d'établir, de 1835 à 1838, l'unité de longueur en Prusse. (*Darstellung der Untersuchungen und Maassregeln, welche, in den Jahren* 1835 *bis* 1838, *durch die Einheit des Preussischen Längenmaasses veranlast worden sind von F. W. Bessel.* Berlin, 1839). Je me bornerai donc ici à faire remarquer qu'un tour de la vis micrométrique vaut $0^{l},12$, et que la tête de la vis est divisée en 100 parties.

» Les préparatifs n'ont pu être terminés qu'en automne 1851 : il a fallu tout l'hiver pour réunir les appareils et confectionner les règles (toises). Les comparaisons des règles d'acier à différentes températures, avec la règle de zinc, ont commencé le 23 mars 1852; elles ont été faites par M. *Baumann* et

moi. Le 1er avril elles étaient terminées. Vers cette époque, M. le docteur *Busch* apporta la Toise de *Bessel* à Berlin, où elle fut comparée immédiatement avec chacune des règles, à des températures voisines de la température normale. Comme *Bessel* avait déterminé avec beaucoup d'exactitude la dilatation de sa Toise, celle-ci fut également comparée avec la règle de zinc, à 3° et à 23° centigrades environ, afin d'obtenir une vérification rigoureuse des coefficients de dilatation. Indépendamment de cette vérification, une seconde série d'observations fut faite entre une des règles d'acier et la Toise de *Bessel,* pour voir quel était l'accord entre deux comparaisons entièrement indépendantes. Les comparaisons de la Toise de *Bessel* avec les règles ont été faites alternativement par M. le docteur *Busch* et par moi, secondés par M. *Baumann.*

» Il me reste à dire, relativement à la marche suivie dans les observations, que chaque comparaison d'une règle d'acier avec la règle de zinc, résulte d'une moyenne entre quatre observations faites dans l'ordre suivant: F,Z,Z,F.

» La température de la salle différait peu de celle du liquide, et on cherchait à la maintenir aussi constante que possible.

» Pendant la comparaison de deux règles, celles-ci étaient immergées dans le bain d'alcool.

» Deux thermomètres, soigneusement étalonnés, étaient plongés, aux extrémités du comparateur, dans le liquide dont ils indiquaient la température; et pour que celle-ci fût partout égale, on agitait le bain fréquemment.

» Lorsqu'on soumit les premières observations au calcul, on s'aperçut tout de suite que l'hypothèse de l'invariabilité du comparateur pendant la durée d'une série d'observations, ne se vérifiait pas. La cause en fut reconnue plus tard. On remarqua que la caisse dans laquelle était contenu l'alcool n'était pas complétement étanche, d'où il résultait que le madrier, support des points fixes, s'imprégnait de liquide.

» Ma première intention avait été de rechercher, d'une manière indépendante, les variations des Toises, produites par la chaleur; j'ai dû renoncer à cette idée et me contenter de prendre, pour base de la dilatation des copies, la dilatation de la Toise de *Bessel.* Ce mode d'opération repose sur la supposition de l'invariabilité du comparateur, ou tout au moins sur cette hypothèse, que la distance des points fixes varie proportionnellement à la durée d'une double comparaison, qui est de 6 à 8 minutes. Cette dernière hypothèse s'est, du reste, vérifiée.

» J'indiquerai maintenant la marche que j'ai suivie, par suite de la circonstance rapportée ci-dessus, pour arriver à mon but; après quoi je ferai connaitre les résultats de l'opération.

» Soient T une température au-dessous de zéro, à laquelle les règles d'acier et la règle de zinc ont une même longueur l; e et z les changements de longueur des règles d'acier et de zinc, pour la température t; E^t et $E^{t'}$, Z^t et $Z^{t'}$ les longueurs des règles aux températures t et t'; on aura :

$$\begin{array}{ll} E^t = l + e & E^{t'} = l + e' \\ Z^t = l + z & Z^{t'} = l + z' \\ \hline Z^t - E^t = z - e = a, & Z^{t'} - E^{t'} = z' - e' = a'; \end{array} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

a et a' représentent les variations de longueur des règles aux températures t et t'.

» Ces variations étant proportionnelles aux températures t et t', sont proportionnelles entre elles; par conséquent,

$$\frac{e}{z} = \frac{e'}{z'};$$

$$z - e : z' - e' = e : e' = z : z';$$

ou bien

$$a : a' = e : e' = z : z',$$

d'où

$$\frac{e}{a} = \frac{e'}{a'}.$$

» Il suit de là que la variation de longueur de la règle d'acier, divisée par la différence entre cette longueur et celle de la règle de zinc, est une quantité constante, bien qu'inconnue, pour toutes les valeurs correspondantes de e et a, e' et a', etc.

» Si donc on pose $\frac{e}{a} = m$, on aura

$$e = am \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

» Cette expression, substituée dans (1), donne

$$z = a\,(1 + m) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

» Si E^0 et Z^0 représentent les longueurs des règles à zéro degré de température; ε et ζ, les dilatations de l'acier et du zinc, exprimées en parties de ces longueurs également à zéro, on obtient, pour t degrés de température,

$$E^t = E^0\,(1 + \varepsilon t)$$
$$Z^t = Z^0\,(1 + \zeta t).$$

» Comparant ces expressions à (1), on trouve

$$E^\circ + \varepsilon E^\circ t = l + e$$
$$Z^\circ + \zeta Z^\circ t = l + z;$$

d'où, par soustraction,

$$z - e = Z^\circ - E^\circ + (\zeta Z^\circ - \varepsilon E^\circ)\, t.$$

» Mais d'après (1), $z - e = a$, et si l'on pose $Z^\circ - E^\circ = a^\circ$, $\zeta Z^\circ - \varepsilon E^\circ = q$, q étant la variation de la différence des deux règles, pour un degré du thermomètre, l'équation précédente devient alors,

$$a = a^\circ + qt. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

» La différence a entre deux règles à la température t, s'obtient par le comparateur; a° et q sont des inconnues.

» Toute autre règle, comparée à la règle de zinc, donne lieu à une équation pareille.

» Pour déterminer les inconnues a° et q, il suffit de mesurer les différences de longueur entre la règle d'acier et la règle de zinc, à des températures basses, moyennes et hautes. Si l'on répète dix fois cette opération, à chacune de ces trois températures, on obtient, pour chaque règle d'acier, *trente* égalités, qui ne renferment que deux inconnues, et qui, pour ce motif, doivent être traitées par la méthode des moindres carrés.

» Soient F la Toise-étalon, dont la longueur et la dilatation sont connues; E′, E″, E‴ les copies. Si l'on compare F, E′, E″, E‴ à la règle de zinc, à des températures basses, moyennes et hautes, on a les systèmes d'égalités :

$$\left.\begin{array}{ccccc} f & = & f^\circ & + & qt \\ \vdots & & & \vdots & \\ a & = & a^\circ & + & q't' \\ \vdots & & & \vdots & \\ b & = & b^\circ & + & q''t'' \\ \vdots & & & \vdots & \\ c & = & c^\circ & + & q'''t''' ; \\ \vdots & & & \vdots & \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

qui se répètent autant de fois qu'il y a eu de comparaisons entre F, E′, E″, E‴. Chaque système conduit à deux équations finales, qui, pour la règle F, par exemple, sont

$$\left.\begin{array}{ccccc} [an] & = & [aa]\, f^\circ & + & [ab]q \\ [bn] & = & [ab]\, f^\circ & + & [bb]q \\ \text{Etc.,} & & \text{etc.} & & \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

» La résolution de ces équations conduit aux valeurs de f^o, a^o, b^o, c^o, et de q, q', q'', q'''.

» La règle d'acier et la règle de zinc ayant même longueur à une certaine température T, leur différence, exprimée par l'équation (4), est nulle. Dans ce cas, cette dernière équation devient $o = a^o + qT$.

» La même circonstance, considérée relativement aux autres règles, modifie les équations (5), et les transforme dans le groupe suivant :

$$\left.\begin{array}{l} -f^o = qT \\ -a^o = q'T' \\ -b^o = q''T'' \\ -c^o = q'''T'''. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

» De ces expressions, on tire les valeurs des températures T, T', T'', T''', auxquelles les règles d'acier sont égales en longueur à la règle de zinc. Et comme on a posé plus haut $Z^o - E^o = a^o$, on obtient, pour les différentes règles :

$$\left.\begin{array}{l} F^o = Z^o - f^o \\ E^{o\prime} = Z^o - a^o \\ E^{o\prime\prime} = Z^o - b^o \\ E^{o\prime\prime\prime} = Z^o - c^o. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

» La longueur F de la Toise originale, à zéro, étant connue, $Z^o = F^o + f^o$ l'est également, et par suite $E^{o\prime}$, $E^{o\prime\prime}$, $E^{o\prime\prime\prime}$.

» Par hypothèse, $q = \zeta Z^o - \varepsilon E^o$.

» On a donc, pour les quatre règles :

$$\begin{array}{l} q = \zeta Z^o - \varepsilon F^o \\ q' = \zeta Z^o - \varepsilon' E^{o\prime} \\ q'' = \zeta Z^o - \varepsilon'' E^{o\prime\prime} \\ q''' = \zeta Z^o - \varepsilon''' E^{o\prime\prime\prime}. \end{array}$$

» Dans la première de ces égalités, $\zeta Z^o = \varepsilon F^o + q$ est connu ; d'où l'on déduit,

$$\left.\begin{array}{l} \zeta Z^o = \varepsilon F^o + q \\ \varepsilon' E^{o\prime} = \varepsilon F^o + q - q' \\ \varepsilon'' E^{o\prime\prime} = \varepsilon F^o + q - q'' \\ \varepsilon''' E^{o\prime\prime\prime} = \varepsilon F^o + q - q'''. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

» Ces équations ne renferment plus, comme inconnues, que les coefficients de dilatation, qui pourraient être déterminés directement, s'il n'était préférable de combiner toutes les observations de la manière la plus avantageuse.

» Comme, en général, $E^t = E^o + \varepsilon E^o t$, on trouve, pour les différentes règles, en mettant pour E^o, ses valeurs tirées des égalités (8), pour Z^o, l'expression $F^o + f^o$, et pour εE^o, les expressions (9),

$$\begin{aligned}
Z^t &= F^o + f^o + (\varepsilon F^o + q)t \\
E'^t &= F^o + f^o - a^o + (\varepsilon F^o + q - q')t \\
E''^t &= F^o + f^o - b^o + (\varepsilon F^o + q - q'')t \\
E'''^t &= F^o + f^o - c^o + (\varepsilon F^o + q - q''')t.
\end{aligned}$$

Mais $\quad F^o + \varepsilon F^o t = F^t$, donc :

$$\left.\begin{aligned}
Z^t - F^t &= f^o + qt \\
E'^t - F^t &= f^o - a^o + (q - q')t \\
E''^t - F^t &= f^o - b^o + (q - q'')t \\
E'''^t - F^t &= f^o - c^o + (q - q''')t.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

» Ces expressions donnent la longueur des règles, à la température t, lorsque, comme on l'a supposé, F^t est connu. Elles donnent, en outre, indépendamment de F^t, les différences entre les copies et l'original ; et si ces différences ont été mesurées directement, elles offrent un moyen de vérification rigoureux pour les égalités précédentes, vérification d'autant plus nécessaire, qu'il est toujours difficile de déterminer d'une manière précise la température des règles. Lorsque la comparaison se fait dans l'alcool, il est presque impossible, pour les températures extrêmes, à moins d'attendre la saison favorable, d'obtenir la température de la salle au même degré que celle du liquide. Si la température de l'alcool varie pendant l'opération, celle des règles ne varie pas de la même manière : elle reste un peu en arrière. Les petites erreurs que ces différences occasionnent peuvent être éliminées en partie, si l'on fait une série d'observations, par exemple, dans le voisinage de la température normale, pendant la durée de laquelle la salle possède sensiblement le même degré de chaleur que le liquide. On sait alors que celui-ci a la même température que le métal, ou que la différence est très-petite. De

telles comparaisons donnent :

$$\left.\begin{array}{l} Z^t - F^t = p \\ E'^{t'} - F^{t'} = p' \\ E''^{t''} - F^{t''} = p'' \\ E'''^{t'''} - F^{t'''} = p''' ; \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

et si l'on introduit les températures t, t', t'', t''' dans les égalités (10), il vient

$$\left.\begin{array}{l} p = f^\circ + qt \\ p' = f^\circ - a^\circ + (q - q')\,t' \\ p'' = f^\circ - b^\circ + (q - q'')\,t'' \\ p''' = f^\circ - c^\circ + (q - q''')\,t''' : \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

équations qui doivent être satisfaites par les valeurs de f°, a°, b°, c° et de q, q', q'', q''' déduites des égalités (6), si ces valeurs sont exactes. Mais, comme la remarque en a été faite plus haut, les égalités (6) peuvent offrir quelque incertitude à cause des températures extrêmes, ce qui n'a pas lieu pour les équations (11); et les erreurs dues à cette circonstance s'obtiennent et s'éliminent, du moins en partie, en résolvant les équations (6) sous la condition que les inconnues satisfassent aux équations (12). On trouve ainsi les valeurs les plus probables des huit inconnues qui, introduites dans les formules (7), conduisent aux valeurs définitives de T, T', T'', T'''. Ces dernières, mises à la place des lettres qui les représentent, dans les équations (10), permettent de calculer les longueurs des règles d'acier dans le cas où elles sont égales à la longueur de la règle de zinc, c'est-à-dire,

$$\left.\begin{array}{l} Z^T = F^T = l \\ E'^{T'} = F^{T'} = l' \\ E''^{T''} = F^{T''} = l'' \\ E'''^{T'''} = F^{T'''} = l''' . \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

» Mettant, dans les équations (1), à la place de e, la valeur am, nous aurons, aux températures t et o,

$$\begin{array}{rcl} E^t & = & l + am \\ E^\circ & = & l + a^\circ m \\ \hline E^t - E^\circ & = & (a - a^\circ)\,m . \end{array}$$

» D'autre part, $E^t - E^\circ = \varepsilon E^\circ t$: donc $\varepsilon E^\circ t = (a - a^\circ)\,m$; et comme, d'après

les égalités (4), $a - a^0 = qt$, il en résulte $\varepsilon E^0 = qm$: on en déduit les équations

$$\left.\begin{array}{lcl} \varepsilon\, E^0 & = & qm \\ \varepsilon'\, E^{0\prime} & = & q'm' \\ \varepsilon''\, E^{0\prime\prime} & = & q''m'' \\ \varepsilon'''\, E^{0\prime\prime\prime} & = & q'''m''', \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

qui font connaître m, m', m'', m'''. Par suite on a, d'après les équations (9),

$$\zeta Z^0 = q(1 + m) = q'(1 + m') = q''(1 + m'') = q'''(1 + m''').$$

Lorsque les valeurs de l et de m sont connues pour une règle d'acier et la règle de zinc, chaque différence observée fait connaître, à l'aide des équations (1), la longueur de la règle d'acier, $E^t = l + am$, et la longueur de la règle de zinc, $Z^t = l + a(1 + m)$.

» Deux de ces règles, pour lesquelles les valeurs de T et de q sont connues, constituent un thermomètre métallique très-sensible. Comme l répond à la température T, am indique la variation de la règle pour la température $t - T$, et puisque, d'après le groupe (14), qm représente la variation pour un degré du thermomètre, on a

$$am = qm\,(t - T),$$

et conséquemment, la température de la règle

$$t = T + \frac{a}{q}.$$

» Appliquant cette formule à chaque règle, il vient :

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Pour la Toise originale} & t = T & + \dfrac{f}{q} \\ \text{»} \quad E' \ldots\ldots & t = T' & + \dfrac{a}{q'} \\ \text{»} \quad E'' \ldots\ldots & t = T'' & + \dfrac{b}{q''} \\ \text{»} \quad E''' \ldots\ldots & t = T''' & + \dfrac{c}{q'''}. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

» Ces expressions peuvent servir à calculer la différence de la température des règles à la température du bain pendant la durée d'une comparaison. Il est donc facile d'assigner la température à $\frac{1}{100}$ de degré près.

Application de la théorie exposée ci-dessus à la détermination de la longueur et de la dilatation des copies.

» La longueur de la Toise de *Bessel,* à la température normale, est égale, d'après le certificat de cette toise *, à

$$863^{t},99920;$$

sa longueur, à C° du thermomètre centigrade, est donnée, d'après la détermination de *Bessel* **, par la formule

$$863^{t},841161 + 0^{t},0097255\ C^{\circ}.$$

» Par conséquent

$$F^{\circ} = 863^{t},841161$$
$$\varepsilon F^{\circ} = 0^{t},0097255.$$

I. *Comparaison des règles d'acier avec la règle de zinc, à différentes températures.*

» Entre la Toise de *Bessel* F et la règle de zinc Z, il a été fait dix doubles comparaisons aux températures 3°, 16° et 23° centigrades, ce qui donne 30 équations de la forme (5). Mais comme à une certaine température au-dessus de zéro, la longueur de la règle de zinc est égale à celle des règles d'acier, les quantités f°, a°, b°, c°, sont négatives. A raison de cette circonstance, les équations (5) deviennent

$$-f = f^{\circ} - qt$$

Etc., etc.

» Traitées par la méthode des moindres carrés, après y avoir appliqué les nombres donnés par l'observation, ces trente équations conduisent aux équations finales suivantes :

$$\text{A.} \quad \left\{ \begin{array}{l} -\ 3{,}07896 = +\ 30\ f^{\circ} - 430{,}66\ q \\ +\ 69{,}29103 = -\ 430{,}66\ f^{\circ} + 8185{,}4872\ q. \end{array} \right.$$

* *Bessel,* Recherches sur la longueur du pendule à seconde simple. (*Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels.* Berlin 1828, Seite 126).

** Exposé des Recherches et des dispositions auxquelles a donné lieu la détermination de l'unité de longueur en Prusse, p. 90. (*Darstellung der Untersuchungen und Maassregeln welche durch die Einheit des Preussischen Längenmaasses veranlasst worden sind. Seite* 90.)

» Les copies ont été comparées avec la règle de zinc, savoir : le n° 9 ou E′, 44 fois ; le n° 10 ou E″, 32 fois ; et le n° 11 ou E‴, également 32 fois. D'après cela, on a :

$$\text{B.} \ldots \begin{cases} -\ 4{,}59121 = 44\ a^\circ - 650{,}15\ q' \\ +\ 107{,}20087 = -\ 650{,}15\ a^\circ + 12586{,}1979\ q' \end{cases}$$

$$\text{C.} \ldots \begin{cases} -\ 3{,}15626 = 32\ b^\circ - 450{,}62\ q'' \\ +\ 86{,}46408 = -\ 450{,}62\ b^\circ + 9543{,}7458\ q'' \end{cases}$$

$$\text{D.} \ldots \begin{cases} -\ 2{,}84435 = 32\ c^\circ - 425{,}76\ q''' \\ +\ 73{,}11264 = -\ 425{,}76\ c^\circ + 8351{,}7380\ q''' . \end{cases}$$

II. *Comparaison des copies avec la Toise de* Bessel, *aux environs de la température normale.*

	10	observations	à 17°,04	donnent	E′ — F =	+ 0,00293
	12	id.	» 16,97	»	E′ — F =	+ 0,00272
Moyenne. . .	22	»	» 17°,00	»	E′ — F =	+ 0,002825
	9	»	» 16,55	»	E″ — F =	— 0,00037
	10	»	» 16,42	»	E‴ — F =	— 0,00030.

» En introduisant ces valeurs dans les formules (12), on a les trois équations de condition suivantes :

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots + 0{,}002825 = a^\circ - f^\circ + (q - q')\ 17{,}00$$
$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots - 0{,}000370 = b^\circ - f^\circ + (q - q'')\ 16{,}55$$
$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots - 0{,}000300 = c^\circ - f^\circ + (q - q''')\ 16{,}42.$$

» Si toutes les observations étaient rigoureusement exactes, les valeurs de f°, q, a°, q', tirées des égalités A et B, satisferaient à l'équation (1); celles des égalités A et C, à l'équation (2), et enfin celles des égalités A et D, à l'équation (3). Mais il ne peut en être ainsi, à cause des erreurs d'observation, sur la répartition desquelles on n'a aucune règle. Cependant on sait, par la théorie développée plus haut, que les comparaisons directes des copies avec la Toise ont une exactitude bien supérieure aux autres, attendu que la température a le moins varié pendant leur durée, et qu'il est permis d'admettre que la température des règles était fort peu différente de celle du bain.

» Il suit de là que les valeurs fournies par les équations précédentes doi-

vent subir les corrections les plus faibles. Or, comme les corrections ne peuvent être appliquées qu'arbitrairement, il semble rationnel de conserver intactes ces dernières équations, et de résoudre les autres sous la condition qu'elles satisfassent à celles-ci. On atteint ce but en résolvant les équations dont il s'agit, de manière que A et B satisfassent à (1), A et C à (2), A et D à (3). Opérant ainsi, on déduit

de A et B.

Pour F et Z.	Pour E′ et Z.
$f^\circ = +\ 0^{l},0769935$, $q = +\ 0^{l},0125412$;	$a^\circ = +\ 0^{l},0910034$, $q' = +\ 0^{l},0131949$;
Erreurs probables. $\pm\ 0,0003251$, $\pm\ 0,0000197$.	$\pm\ 0,0003746$, $\pm\ 0,0000222$.

de A et C.

Pour F et Z.	Pour E″ et Z.
$f^\circ = +\ 0^{l},0770318$, $q = +\ 0^{l},0125346$.	$b^\circ = +\ 0^{l},0865447$, $q'' = +\ 0^{l},0131317$;
Erreurs probables. . . .	$\pm\ 0,0003728$, $\pm\ 0,0000216$.

de A et D.

Pour F et Z.	Pour E‴ et Z.
$f^\circ = +\ 0^{l},0769190$, $q = +\ 0^{l},0125399$.	$c^\circ = +\ 0^{l},0859708$, $q''' = +\ 0^{l},0131095$;
Erreurs probables. . . .	$\pm\ 0,0003758$, $\pm\ 0,0000233$.

» On a donc trois valeurs pour f° et q, et leur accord témoigne de la bonté des observations.

» Leur moyenne arithmétique est

$$f^\circ = +\ 0^{l},0769814, \quad q = +\ 0^{l},0125386.$$

» Remarque. — L'erreur probable est celle qui résulte de la résolution *directe* des équations A, B, C, D, et non de leur résolution *conditionnelle*. Les erreurs qui ont servi à la calculer proviennent de deux causes : de la lecture des micromètres et des indications thermométriques. Le plus grand écart de la moyenne, pour f°, est $0^{l},0000624$, et pour q, $0^{l},0000026$. On peut en conclure que la règle de zinc n'a pas varié pendant les comparaisons, quoiqu'elle ait été soumise à différentes températures comprises entre 0° et 30°.

» Introduisant les nombres trouvés ci-dessus dans les équations (7), puis

tirant de celles-ci les valeurs de T qui représentent les températures auxquelles les règles d'acier ont la longueur de la règle de zinc, on trouve :

Pour la Toise de Bessel	T	= 6°,1393	centigrades.
» copie n° 9.	T′	= 6,8937	»
» » n° 10.	T″	= 6,5905	»
» » n° 11.	T‴	= 6,5579.	»

» Les longueurs des règles à zéro de température, calculées par les équations (8), sont :

$Z^o = F^o - f^o$	=	863',674179
Copie n° 9, $E^{o\prime}$	=	863,855170
» n° 10, $E^{o\prime\prime}$	=	863,850674
» n° 11, $E^{o\prime\prime\prime}$.	=	863,850213.

» La résolution des formules (9) donne les dilatations pour 1° centigrade :

ζZ	=	0',0222645
$\varepsilon' E^{o\prime}$	=	0,0090718
$\varepsilon'' E^{o\prime\prime}$	=	0,0091284
$\varepsilon''' E^{o\prime\prime\prime}$	=	0,0091560.

» Ces valeurs divisées par les précédentes expriment, en fonction de la longueur des règles, la dilatation pour 1° centigrade, qui est :

Pour la règle de zinc.	ζ	=	0,0000257765
» copie n° 9.	ε'	=	0,0000104959
» » n° 10.	ε''	=	0,0000105671
» » n° 11.	ε'''	=	0,0000105991.

» Des nombres précédents résultent les formules suivantes, qui expriment la longueur des règles à une température quelconque t du thermomètre centigrade :

$$Z^t = 863',764179 + 0',0222645.\,t$$
$$E'^t = 863,855170 + 0,0090718.\,t$$
$$E''^t = 863,850674 + 0,0091284.\,t$$
$$E'''^t = 863,850213 + 0,0091560.\,t.$$

Pour $t = 16°,25$, on trouve :

		$Z^{16°,25}$	= 864',125982		
Copie n° 9 . . .	$E'^{16,25}$	= 864,002587	avec l'erreur probable	±	0',000138
» n° 10 . . .	$E''^{16,25}$	= 863,999011	» »	±	0,000109
» n° 11 . . .	$E'''^{16,25}$	= 863,998998	» »	±	0,000119.

» Dans les équations précédentes, on n'a eu égard, pour déterminer la longueur de la règle de zinc, qu'aux égalités A et aux conditions qui résultent des comparaisons des copies avec la Toise de *Bessel*. Cependant, des comparaisons directes entre cette Toise et les règles ont été faites dans le voisinage de la température normale. Elles servent à contrôler rigoureusement les erreurs dues aux températures, puisque les variations de longueur de la règle de zinc, pour chaque changement de température, sont plus grandes, du double, que celles des règles d'acier. On a fait d'abord 10, puis 12 de ces comparaisons, qui ont donné, savoir :

10	observations	à	15,979 ...	$Z - F = + 0^{l},122068 = - f^{\circ} + 15,979.\ q$
12	»	»	16,978 ...	$Z - F = + 0,136788 = - f^{\circ} + 16,978.\ q$
Moyenne 22	»	»	16,524 ...	$Z - F = + 0,130097 = - f^{\circ} + 16,524.\ q.$

» Remplaçant, dans cette égalité, f° et q par leurs valeurs, on trouve

$$f^{\circ} - 16,524.\ q = 0^{l},130212;$$

et cette quantité diffère de $Z - F = + 0,130097$, de $0^{l},000115$, qui est l'erreur.

» Si on l'attribue aux indications thermométriques, l'équation (15) donne $\frac{0,000115}{q} = 0^{\circ},009$ centigrade. En diminuant donc la température de $0^{\circ},009$ dans l'expression précédente, celle-ci est satisfaite par les valeurs trouvées pour f° et q. Mais comme les observations faites aux environs de la température normale offrent le plus de garanties, et qu'elles sont très-nombreuses, il est préférable de maintenir l'égalité précédente pour déterminer les éléments relatifs à la règle de zinc.

» Conséquemment, si l'équation A est résolue de manière qu'elle satisfasse à ces valeurs de f° et q, on obtient, pour la règle de zinc,

$$f^{\circ} = + 0^{l},077027; \quad q = + 0^{l},0125347$$
$$t = 0,0000257712$$
$$Z' = 863^{l},764134 + 0^{l},0222602.\ t$$
$$Z^{16^{\circ},25} = 864,125862, \text{ avec l'erreur probable } \pm 0^{l},00032.$$

Berlin, le 31 janvier 1854.

« BAEYER. »

Lorsque, en 1846, M. le général *Baeyer* étalonna les Règles, il fit usage de deux Toises qui appartenaient à M. le conseiller *Schumacher,* directeur de l'Observatoire d'Altona *, et qui avaient été comparées par *Bessel* à sa propre Toise **. Celle-ci étant désignée par P ***, et les deux autres par F et G, *Bessel* avait trouvé

$$\left.\begin{array}{l} F - P = + \ 0^{l},00333 \\ G - P = - \ 0,00390. \end{array}\right\} (\alpha).$$

L'ouvrage de *Bessel,* sur la mesure d'un arc de méridien dans la Prusse orientale, contient (page 22) la formule de la Toise P, celle dont il est question dans la notice reproduite ci-dessus. Cette formule est :

$$P = 863^{l},835384 + 0^{l},0100811\ t. \quad (\beta).$$

Pour la même Toise, la notice donne

$$P = 863^{l},841161 + 0^{l},0097255\ t. \quad (\gamma).$$

On voit que ces formules, toutes deux relatives à la Toise de *Bessel,* diffèrent dans leurs coefficients et leurs valeurs à zéro degré. Cette circonstance réclame quelques éclaircissements.

Les Toises P, F et G sont toutes trois des copies immédiates de la Toise originale du Pérou. P est trop courte de $0^{l},0008$; F a exactement la longueur de la Toise originale, et G est trop longue de $0^{l},00021$.

En 1835, *Bessel* compara entre elles ces trois Toises et trouva les relations (α).

Cependant, d'après les certificats de comparaison des trois Toises, les différences auraient dû être :

$$\begin{array}{l} F - P = + \ 0^{l},0008 \\ G - P = + \ 0,0010, \end{array}$$

* *Baeyer.* Triangulation des côtes et son raccordement avec la base de Berlin, par la section trigonométrique de l'état-major général (page 14).

Die Küstenvermessung und ihre Verbindung mit der Berliner Grundlinie. Ausgeführt von der trigonometrischen Abtheilung des Generalstabes (*Seite* 14).

** *Bessel.* Exposé des Recherches et des dispositions auxquelles a donné lieu la détermination de l'unité de longueur en Prusse (page 32).

Darstellung der Untersuchungen und Maassregeln, welche, in den Jahren 1835 *bis* 1838, *durch die Einheit des Preussischen Längenmaasses veranlast worden sind* (*Seite* 32).

*** Elle est désignée par F dans la notice de M. le général *Baeyer,* reproduite ci-dessus.

attendu que, à la température normale,

$$\left.\begin{array}{lcl} P & = & 863^{t},99920 \\ F & = & 864,00000 \\ G & = & 864,00021. \end{array}\right\} (\delta).$$

En considérant comme exactes les différences (α), on aurait donc, par suite des valeurs (δ), trois expressions sensiblement différentes pour la Toise P de *Bessel*, qui seraient,

P	=	863^{t},99920	d'après son certificat.
P	=	863,99667	d'après la Toise F.
P	=	864,00411	» » G.

Bessel conserva comme bonne la première de ces valeurs, parce qu'elle avait été employée pour des opérations déjà terminées. De 1835 à 1837, il détermina le coefficient de dilatation de l'unité de longueur en Prusse, et à cette occasion, il rechercha pareillement le coefficient de sa propre Toise, qu'il trouva égal à 0^{t},0097255 au lieu de 0^{t},0100811. De là les deux formules (β) et (γ) qui, pour $t = 16^{\circ},25$, donnent l'une et l'autre P = 863^{t},99920.

C'est en 1834 que *Bessel* a étalonné les Règles géodésiques prussiennes, en faisant usage de sa Toise. Il a donc dû employer nécessairement la première formule (β), puisque la seconde n'a été calculée que plus tard. M. le général *Baeyer* a répété l'étalonnage en 1846, conséquemment à une époque où cette dernière formule était connue. Il semblerait donc qu'il eût dû accorder la préférence à celle-ci. S'il ne l'a pas fait, la cause en est vraisemblablement dans le peu d'importance qu'il y a à substituer l'une à l'autre, pour le cas où l'étalonnage s'opère à des températures voisines de la température normale. En effet, si l'on calcule la somme F + G, successivement d'après chaque formule, on trouve,

$$\begin{array}{rcl} F + G & = & 1727^{t},670198 + 0^{t},0201622\ t; \\ F + G & = & 1727,681752 + 0,0194510\ t. \end{array}$$

Faisant $t = 16^{\circ},25$, il vient

$$\begin{array}{rcl} F + G & = & 1727^{t},997834 \\ F + G & = & 1727,997831 \\ \hline \text{Diff.} \ldots\ldots & = & 0,000003. \end{array}$$

C'est là, très-probablement, le motif pour lequel *Bessel* et *Baeyer* recommandent, dans leurs ouvrages, d'employer les Toises, autant que possible, à une température voisine de la température normale.

§ IV.

ÉTALONNAGE DES RÈGLES.

Dans le principe, la Commission avait eu l'idée de comparer simultanément les Règles entre elles et à la double Toise : c'était une conséquence des dispositions adoptées pour l'étalonnage, puisqu'elles permettaient de ranger sur le tablier du chariot les cinq caisses renfermant les longueurs à comparer, et de les amener successivement, dans un intervalle de temps assez court, entre les biseaux fixes du comparateur. On aurait obtenu ainsi un très-grand nombre de comparaisons des Règles avec la double Toise, en même temps que des Règles entre elles, et de plus, chacune des Règles, au lieu d'une seule, aurait été comparée aux étalons, ce qui eût procuré de nombreuses vérifications, et un résultat peut-être plus précis par l'adoption d'une moyenne. Mais on ne tarda pas à se convaincre que ces comparaisons simultanées, avantageuses sous certains rapports, seraient défavorables sous beaucoup d'autres. Ainsi, les deux Toises auraient dû être maintenues très-longtemps dans leur bain; leur mouvement de va-et-vient, répété plus fréquemment, se serait effectué sur une étendue plus considérable, circonstance qui, malgré les précautions prises pour assurer la fixité des Toises, aurait pu les exposer à être dérangées; les séries d'observations, dont il était important, sous certains rapports, d'abréger la durée, auraient exigé plus de temps, à cause des précautions que l'entretien et l'observation de la température du bain réclamaient; les bouts des Toises, qu'il était si nécessaire de conserver intacts, auraient été exposés, dans un très-grand nombre d'expériences, et pour peu qu'on se fût relâché de la plus scrupuleuse attention, à recevoir des chocs; enfin il aurait fallu opérer dans des circonstances très-défavorables au maintien d'une température uniforme dans le bain, puisque les Règles devaient être présentées au comparateur, tantôt chauffées sous leurs couvercles, tantôt exposées à l'air libre par une température naturelle de 4° à 6°. On renonça donc à l'idée de comparer simultanément les Règles entre elles et aux Toises, et à l'exemple de *Bessel* et *Baeyer*, on scinda l'opération en deux, en commençant par la comparaison des Règles entre elles.

I. *De la comparaison des Règles entre elles.*

La comparaison des Règles entre elles a commencé le 13 février (1854), par la période d'observations dans laquelle les quatre Règles devaient être présentées au comparateur à basse température. La température moyenne de la salle était de 10°,50 centigrades. Cinq séries d'observations, numérotées de 1 à 5, ont été obtenues ce jour-là, depuis 1h34m jusqu'à 4h30m. La durée moyenne d'une série a donc été de 33 minutes.

Deux observateurs, munis des prismes III et IV, lisaient les intervalles à haute voix, et les résultats énoncés par eux étaient consignés immédiatement dans des tableaux préparés à l'avance et tenus en double. Après quoi, ils changeaient de place, et chacun d'eux lisait les intervalles lus précédemment par l'autre. On recommençait les lectures d'un intervalle, chaque fois qu'elles différaient de 0i,003. Les tableaux servant à l'inscription des lectures étaient du modèle ci-après, étendu aux quatre Règles :

13 février 1854.	N° des séries.	Heures.	Minutes.	RÈGLE N° I. Thermomètres à mercure. I.	II.	Thermomètres métalliques. Lect.	Err.	Intervalles. Biseau vertical. Lect.	Err.	Biseau horizontal. Lect.	Err.	RÈGLE N° II. Thermomètres à mercure. I.	II	Thermomètres métalliques. Lect.	Err.	Intervalles. Biseau vertical. Lect.	Err.	Biseau horizontal. Lect.	Err.
				R.	R.														
		1	34	7°,75	7°,73	192,3	+ 07	184,4	+ 01	182,2	— 10			198,2	+ 10	138,5	— 25	168,0	— 15
						191,8	— 03	184,3	— 08	182,1	00			198,8	00	138,5	— 36	168,8	— 06
	I					189,8	+ 06	183,6	+ 01	181,2	— 11			197,1	+ 09	137,1	— 26	168,8	— 15
		2	10	7°,00	7°,50	189,8	— 04	183,5	— 09	181,2	— 01			197,4	— 01	137,4	— 37	169,0	— 06
Sommes des lectures.	»	»		»	»	763,7	+ 06	736,3	— 15	726,7	— 22			792,1	+ 18	551,5	—124	675,5	— 42
Corrections.	»	»		»	»	+ 1		— 2		— 2				+ 2		— 1,2		— 4	
Lectures corrigées	»	»		»	»	763,8		736,1		726,5				792,2		550,3		675,1	
Moyennes	»	»		»	»	190,95		184,025		181,625				198,075		137,575		168,775	
M.	»	»		»	»	»				184,025								137,575	
Sommes des intervalles s.	»	»		»	»	»				365,65								306,35	

Les deux premières lignes se rapportent aux lectures faites successivement, pour chaque Règle, dans l'ordre I, II, III, IV, et les deux autres, aux lectures pour les Règles amenées entre les biseaux fixes dans l'ordre inverse. Les 5e et 6e colonnes contiennent les indications de deux thermomètres à mercure placés aux extrémités du tablier, et qui étaient lus au commencement et à la fin de chaque série.

Deux hommes étaient employés à tourner la manivelle, pour amener les Règles entre les biseaux fixes du comparateur. Pendant ces premières comparaisons, il est arrivé parfois qu'on dût tâtonner assez longtemps pour obtenir les Règles correctement alignées; mais les jours suivants, les soldats chargés de mouvoir la manivelle, ainsi que les observateurs, avaient acquis l'expérience nécessaire, et dès lors, la durée d'une série d'observations dépassa rarement 20 minutes.

Le lendemain, 14 février, on fit dix nouvelles séries d'observations dans les mêmes conditions de température. Elles sont numérotées de 6 à 15. Le travail dura depuis 9^h25^m jusqu'à 3^h7^m. La température moyenne de la salle avait été de 10°,15 centigrades.

A la séance suivante (15 février) commencèrent les comparaisons des Règles, deux d'entre elles (les nos I et II) étant à haute température, et les deux autres à basse température. Les Règles qu'on s'était proposé de chauffer avaient été abritées la veille sous l'un des couvercles. Il ne restait donc plus, pour être à même de procéder aux observations, qu'à élever la température sous le couvercle jusqu'à ce que les thermomètres métalliques indiquassent le degré voulu, lequel devait correspondre, à peu près, au plus petit intervalle susceptible d'être lu à l'aide des prismes.

On jugea convenable d'élever la température graduellement, en ne versant d'abord, dans chacun des tubes chauffeurs, que le tiers de la quantité d'eau qu'il pouvait contenir. Cette précaution avait pour objet d'amener lentement un équilibre stable entre la température du métal des Règles et celle de l'air enfermé dans les caisses; on obviait en même temps, en grande partie, à un inconvénient que l'on avait remarqué en essayant l'appareil de chauffage : on se rappelle en effet que l'air intérieur, échauffé alors trop rapidement, s'était saturé de l'humidité enlevée au bois, et l'avait déposée sur la surface des Règles. Commencée à 7^h30^m du matin, par une température moyenne dans la salle de 6°,4 centigrades, l'opération d'amener les Règles au degré de chaleur convenable ne fut terminée qu'à 11^h30^m : le tableau suivant en indique la marche.

HEURES.	Thermomètres métalliques.		Température de la SALLE.	REMARQUES.
	RÈGLE N° I chauffée	RÈGLE N° III à l'air libre.		
7h30m (1)	196,0	»	»	(1) On verse dans chaque tube une mesure (de la contenance de 8 litres) d'eau à 50°.
7 36 (2)	194,8	194,8	»	(2) On ajoute une mesure d'eau à 100°.
7 45	193,1	194,7	»	
8 0 (3)	188,2	194,7	6°,50	(3) Id. id. id.
8 15 (4)	183,3	194,6	6,25	(4) On enlève à chaque tube une mesure d'eau, qui est remplacée immédiatement par une autre mesure d'eau à 100°.
8 30	175,7	194,5	6,25	
8 45 (5)	167,3	194,4	6,25	(5) Id. id. id.
9 0	160,8	194,2	6,25	
9 15 (6)	152,5	194,1	6,40	(6) On remplace la totalité de l'eau contenue dans les tubes par de l'eau à 100°.
9 30	144,6	194,0	6,40	
9 45	135,5	193,8	6,60	
10 0	127,0	193,7	6,50	
10 15	117,3	193,5	6,40	
10 30	110,9	193,5	6,40	
10 45	105,2	193,4	6,25	
11 0	100,9	193,1	»	
11 15	96,8	192,0	»	
11 30	95,7	191,6	»	Les observations commencent.

Six séries d'observations, numérotées de 16 à 21, ont été recueillies dans cette séance, depuis 11^h30^m jusqu'à 1^h42^m. Dans cet espace de temps (2^h12^m), la température des Règles s'était maintenue avec une constance suffisante pour qu'on ne dût plus renouveler l'eau des tubes chauffeurs. Il en fut de même les jours suivants : une fois que la température voulue avait été atteinte, elle persistait sous les couvercles, en ne perdant que très-peu jusqu'à la fin de la séance, ainsi qu'on peut en juger par les observations de chaque jour.

La température de la salle, pendant la durée des comparaisons de cette journée, a été en moyenne de 8°,50 centigrades.

Du 16 au 20 février, on s'occupa des autres comparaisons à température

mixte, en suivant, pour chauffer les Règles, la marche qui vient d'être expliquée. Les combinaisons entre les Règles chauffées et les Règles exposées à l'air libre, ont été, savoir :

	RÈGLES CHAUFFÉES.	RÈGLES EXPOSÉES à l'air libre.
Le 16 février	I, III	II, IV
Le 17 »	I, IV	II, III
Le 18 »	II, IV	I, III
Le 19 »	III, IV	I, II
Le 20 »	II, III	I, IV

Chaque jour on faisait six séries d'observations; elles sont numérotées :

Celles du 16	de 22 à 27
— 17	28 à 33
— 18	34 à 39
— 19	40 à 45
— 20	46 à 51.

La température moyenne de la salle, pendant la durée des expériences, a été :

Le 16	de 9°,16 centigrades.
— 17	8°,88
— 18	6°,18
— 19	8°,33
— 20	7°,35.

La température de l'air, sous le couvercle renfermant deux des quatre Règles, était de 40° centigrades, environ.

Le 21 février, on procéda à trois nouvelles séries d'observations des quatre Règles à basse température (nos 52, 53, 54), afin de porter à dix-huit le nombre total des séries de cette catégorie, ce qui devait permettre de les par-

tager ultérieurement, pour les calculs, en groupes de six, dont chacun donnerait une moyenne, de même que chaque groupe de six de la période d'observations précédente. La température de la salle, pour ces trois séries, a été de 5°,84 centigrades.

La Commission avait décidé qu'indépendamment des comparaisons à basse et à haute température, ainsi qu'à température mixte, il en serait fait dix-huit à température moyenne. Les journées du 24 et du 25 février furent consacrées à cet objet. La salle chauffée, ces deux jours, depuis 4 heures du matin, offrait une température de 21° centigrades environ. On fit 9 séries d'observations le 24 février, et autant le lendemain. Ces dix-huit séries sont numérotées de 55 à 72.

Restait à comparer les Règles entre elles à haute température. On les abrita deux à deux sous les couvercles, puis on éleva la température en procédant comme on l'avait fait précédemment, et comme l'indiquent les tableaux qui suivent :

27 Février.

HEURES.	Thermomètres métalliques.				Température sous LES COUVERCLES des RÈGLES I ET II.	Température de la SALLE.	REMARQUES.
	RÈGLE I.	RÈGLE II.	RÈGLE III.	RÈGLE IV.			
7h30m	»	»	»	»	»	18°,9	A 7h10m on verse une mesure d'eau à 50°.
8 15	143,8	151,7	146,4	152,8	»	19,8	
8 30	134,8	142,8	138,3	144,3	»	19,0	A 7h20m, on ajoute une mesure d'eau à 100°.
8 45	127,5	133,5	131,2	137,3	»	18,7	
9 00	119,9	128,1	124,5	130,3	29°,12	17,5	A 7h55m id.
9 20	109,2	117,7	115,3	120,7	31,63	17,4	A 8h15m, on remplace une mesure par une autre à 100°.
9 45	98,2	107,6	103,2	109,0	34,14	17,2	
10 3	91,0	99,5	93,7	100,0	36,26	17,2	A 8h40m id.
10 18	86,4	94,7	88,9	94,7	37,72	17,2	A 9h20m, on remplace, dans chaque tube, deux mesures d'eau sous le couvercle I et II, et les trois mesures dans chaque tube, sous le couvercle III et IV.
10 25	87,0	95,0	89,8	95,9	37,13	17,2	
10 45	85,0	91,2	84,2	90,0	38,00	17,2	
11 0	83,0	91,3	84,0	89,4	38,38	17,3	
11 18	84,3	92,2	83,2	88,5	36,89	17,8	

28 Février.

HEURES.	Thermomètres métalliques.				Température sous le couvercle des règles III et IV.	Température de la salle.	REMARQUES.
	RÈGLE I.	RÈGLE II.	RÈGLE III.	RÈGLE IV.			
7h10m	»	»	»	»	»	22°,0	A 7h 15m on verse une mesure d'eau à 50°.
7 30	»	»	»	»	»	22,7	A 7h 25m on ajoute une mesure d'eau à 100°.
8 0	152,1	150,8	151,7	158,3	37°,0	20,0	A 7h 50m id.
8 30	137,1	144,4	137,4	143,8	40,2	18,5	A 8h 20m, on remplace une mesure par une autre à 100°.
8 45	129,0	136,8	129,8	136,1	40,6	18,2	
9 0	122,2	129,5	123,3	129,4	40,6	18,0	A 9h 5m id.
9 15	113,8	121,1	115,6	121,4	43,6	17,3	A 9h 35m id.
9 30	107,5	114,9	110,1	116,0	43,6	18,0	
9 45	98,9	106,2	102,1	109,0	46,1	18,4	
10 0	94,5	101,9	97,1	103,3	45,8	18,8	
10 15	90,7	98,1	92,9	98,5	45,4	19,5	
10 30	86,2	93,4	89,6	93,7	44,9	20,0	
11 0	80,5	88,0	83,9	89,3	41,7	20,0	
11 19	Le prisme ne peut être introduit.	86,7	82,7	89,3	40,4	20,0	
11 30		86,6	82,3	87,9	41,1	20,0	
11 45		87,1	81,4	87,2	40,2	20,0	
12 0	»	87,8	81,9	87,1	40,0	19,7	

Neuf séries furent obtenues le 27 et les neuf autres le lendemain. Elles sont numérotées de 73 à 90.

Toutes les séries, réunies par groupes de six et par périodes d'observations, sont reproduites dans le tableau suivant, qui contient en outre les moyennes, au nombre de 15, destinées au calcul des inconnues. On ne s'est pas astreint, dans la formation des groupes, à classer les observations suivant leur ordre de date : autant que possible, on a cherché à réunir en une seule moyenne, les comparaisons qui avaient été faites pendant que la salle offrait les mêmes conditions de température.

Comparaison des Règles entre elles. — Résultats des observations.

Nos des séries.	a.	n'.	b.	n''.	c.	n'''.	d.	nIV.
1	1,90950	3,65650	1,98075	3,06350	1,90925	3,52025	1,95200	3,49325
2	1,88325	3,63775	1,95700	3,04700	1,88550	3,50350	1,92750	3,47700
6	1,90375	3,65600	1,96925	3,05650	1,89825	3,51400	1,94225	3,48550
32	1,93925	3,68800	1,99900	3,08825	1,90200	3,54300	1,97950	3,51750
33	1,93800	3,68700	1,99800	3,08725	1,90150	3,54175	1,97850	3,51675
34	1,93675	3,68525	1,99700	3,08575	1,90050	3,53875	1,97750	3,51575
Moyenne.	1,918417	3,668417	1,983500	3,071375	1,899500	3,526875	1,959542	3,500958
3	1,85950	3,62400	1,93500	3,03250	1,86550	3,48875	1,90775	3,46250
4	1,84500	3,61425	1,91850	3,02150	1,85000	3,47825	1,89075	3,45200
5	1,83225	3,60650	1,90525	3,01150	1,83875	3,46875	1,87925	3,44375
7	1,86375	3,63425	1,93550	3,03375	1,87150	3,49450	1,91175	3,46725
8	1,85075	3,62350	1,92125	3,02650	1,85950	3,48750	1,89700	3,46075
9	1,83700	3,61575	1,91100	3,01975	1,85050	3,48150	1,88925	3,45500
Moyenne.	1,848375	3,619708	1,921083	3,024583	1,855958	3,483208	1,895958	3,456875
10	1,81950	3,60600	1,89100	3,00950	1,83200	3,47100	1,87100	3,44300
11	1,79875	3,59475	1,87100	2,99800	1,81350	3,45850	1,85100	3,43250
12	1,79775	3,59400	1,87075	2,99725	1,81300	3,45800	1,85225	3,43250
13	1,79750	3,59475	1,87250	2,99925	1,81350	3,45900	1,85250	3,43300
14	1,80175	3,59975	1,87875	3,00300	1,81500	3,46200	1,85650	3,43850
15	1,80750	3,60450	1,88575	3,00950	1,81750	3,46550	1,86100	3,44150
Moyenne.	1,803792	3,598058	1,878292	3,002750	1,817417	3,462333	1,857375	3,436833
16	0,92700	3,13475	1,00875	2,53250	1,91000	3,52350	1,96000	3,49800
17	0,90650	3,12450	0,98825	2,52275	1,89850	3,51575	1,94550	3,48975
18	0,89450	3,12000	0,98025	2,51925	1,89025	3,50875	1,93425	3,48300
19	0,89450	3,12075	0,98000	2,52075	1,88150	3,50250	1,92575	3,47725
20	0,90850	3,13300	0,99550	2,53175	1,86525	3,49375	1,90950	3,46750
21	0,92150	3,14125	1,01000	2,53975	1,85525	3,48600	1,89825	3,46075
Moyenne.	0,90875	3,12904	0,99379	2,52779	1,88346	3,50504	1,92888	3,47938

Nos DES SÉRIES.	a.	n'.	b.	n''.	c.	n'''.	d.	nIV.
22	0,84400	3,09325	1,93025	3,03925	0,88075	2,93575	1,90925	3,46525
23	0,83725	3,09150	1,92700	3,03925	0,87800	2,93475	1,90525	3,46375
24	0,83925	3,09325	1,92675	3,03975	0,87925	2,93775	1,90625	3,46450
25	0,84575	3,10050	1,92600	3,03725	0,88450	2,94450	1,90300	3,46325
26	0,86025	3,10625	1,91425	3,02875	0,89150	2,95200	1,89375	3,45425
27	0,87525	3,11550	1,90350	3,02175	0,90125	2,96125	1,88175	3,44700
Moyenne.	0,85029	3,10004	1,92129	3,03433	0,88588	2,94453	1,89988	3,45967
28	0,86375	3,10175	1,92750	3,03525	1,85375	3,48325	0,94575	2,91725
29	0,85725	3,10125	1,92775	3,03750	1,85325	3,48425	0,94225	2,91425
30	0,85850	3,10200	1,92775	3,03650	1,85325	3,48375	0,94250	2,91825
31	0,86775	3,10950	1,92675	3,03400	1,85225	3,48225	0,95500	2,92775
32	0,88600	3,12000	1,92425	3,03200	1,85225	3,48000	0,96950	2,93650
33	0,90200	3,12975	1,92200	3,03000	1,85075	3,47700	0,98650	2,94925
Moyenne.	0,87254	3,11071	1,92600	3,03421	1,85258	3,48175	0,95692	2,92721
34	1,95875	3,69750	0,96500	2,50650	1,95825	3,55600	0,94375	2,91800
35	1,95075	3,69250	0,95400	2,50225	1,95325	3,54875	0,93575	2,91200
36	1,94325	3,68775	0,95275	2,50225	1,94750	3,54475	0,93475	2,91150
37	1,93925	3,68450	0,95925	2,50625	1,94400	3,54125	0,94125	2,92000
38	1,93550	3,68400	0,97125	2,51400	1,94150	3,53875	0,95200	2,92950
39	1,93525	3,68425	0,98775	2,52475	1,94100	3,53925	0,96775	2,94050
Moyenne.	1,94379	3,68842	0,96500	2,50933	1,94758	3,54479	0,94588	2,92192
40	1,90050	3,65800	1,97700	3,06175	0,83350	2,90325	0,86325	2,86825
41	1,89300	3,65475	1,96925	3,05825	0,82050	2,89500	0,84900	2,86100
42	1,88800	3,65100	1,96425	3,05475	0,81825	2,89425	0,84625	2,85875
43	1,88450	3,64900	1,96125	3,05225	0,82075	2,89800	0,84875	2,86300
44	1,88075	3,64775	1,95800	3,05175	0,82675	2,90475	0,85700	2,87175
45	1,88000	3,64700	1,95775	3,05175	0,83550	2,91425	0,87025	2,88100
Moyenne.	1,88779	3,65125	1,96458	3,05508	0,82588	2,90158	0,85575	2,86729

Nos des séries.	a.	n'.	b.	n''.	c.	n'''.	d.	n^iv.
46	1,91425	3,66900	0,86825	2,45750	0,82550	2,89975	1,95450	3,49900
47	1,91025	3,66675	0,85425	2,45100	0,81400	2,89375	1,95100	3,50025
48	1,90625	3,66425	0,84925	2,44850	0,81125	2,89150	1,94775	3,49275
49	1,90250	3,66175	0,85450	2,45250	0,81200	2,89675	1,94400	3,49075
50	1,90050	3,65950	0,86450	2,46000	0,82000	2,90450	1,94250	3,48800
51	1,89950	3,65875	0,88350	2,47250	0,82950	2,91550	1,94100	3,48800
Moyenne.	1,90554	3,66333	0,86238	2,45700	0,81871	2,90029	1,94679	3,49313
55	1,50800	3,43575	1,58500	2,84100	1,52475	3,29450	1,57150	3,26850
56	1,50075	3,43200	1,57825	2,83500	1,52150	3,28975	1,56675	3,26500
57	1,49525	3,42825	1,57325	2,83125	1,51925	3,28700	1,56250	3,26150
58	1,48975	3,42450	1,56700	2,82725	1,51325	3,28250	1,55825	3,25725
59	1,48325	3,42025	1,56075	2,82325	1,50850	3,27725	1,55225	3,25425
60	1,47700	3,41725	1,55475	2,81975	1,50250	3,27550	1,54550	3,25250
Moyenne.	1,49233	3,42633	1,56983	2,82958	1,51496	3,28442	1,55946	3,25983
61	1,45700	3,40725	1,53500	2,80925	1,48100	3,26350	1,52450	3,23875
62	1,45175	3,40500	1,52825	2,80600	1,47575	3,26100	1,52075	3,23625
63	1,44675	3,40225	1,52350	2,80475	1,47050	3,25750	1,51525	3,23375
64	1,48975	3,42700	1,56550	2,83025	1,50675	3,28350	1,55525	3,25775
65	1,47925	3,42200	1,55550	2,82400	1,49875	3,27725	1,54350	3,25100
66	1,47000	3,41750	1,54675	2,81925	1,48950	3,27225	1,53675	3,24700
Moyenne.	1,46575	3,41350	1,54208	2,81358	1,48704	3,26917	1,53267	3,24408
67	1,46375	3,41275	1,54100	2,81600	1,48475	3,26775	1,53125	3,24325
68	1,45875	3,41025	1,53550	2,81175	1,48025	3,26550	1,52600	3,23925
69	1,45525	3,40750	1,53150	2,81150	1,47650	3,26250	1,52225	3,23775
70	1,44075	3,40200	1,51850	2,80350	1,46475	3,25650	1,50875	3,23200
71	1,43875	3,39950	1,51550	2,80250	1,46350	3,25425	1,50675	3,23050
72	1,43775	3,39850	1,51300	2,80125	1,46200	3,25250	1,50575	3,22950
Moyenne.	1,44917	3,40508	1,52583	2,80775	1,47196	3,25983	1,51679	3,23538

Nos des séries.	a.	n'.	b.	n''.	c.	n'''.	d.	n^iv.
73	0,81025	3,07150	0,88175	2,45050	0,82150	2,89750	0,87450	2,87625
74	0,80300	3,06800	0,87700	2,45700	0,82025	2,89500	0,87575	2,87725
75	0,80275	3,06850	0,88025	2,45750	0,81675	2,89225	0,87600	2,87750
76	0,80200	3,06700	0,87725	2,45525	0,81275	2,88650	0,87275	2,87400
77	0,80100	3,06575	0,87575	2,45525	0,81000	2,88325	0,87200	2,87300
78	0,80250	3,06700	0,87775	2,45550	0,80950	2,88150	0,87150	2,87075
Moyenne.	0,80358	3,06796	0,87829	2,45667	0,81513	2,88953	0,87375	2,87479
79	0,80825	3,07425	0,88525	2,46200	0,81275	2,88750	0,87500	2,87725
80	0,81750	3,08000	0,89450	2,46900	0,81750	2,89375	0,87950	2,88225
81	0,82800	3,08500	0,90475	2,47325	0,82275	2,89925	0,88825	2,88600
88	0,82925	3,09000	0,90725	2,47925	0,84025	2,92050	0,90575	2,89950
89	0,84050	3,09625	0,91900	2,48850	0,85200	2,92800	0,91900	2,90025
90	0,85325	3,10275	0,93175	2,49425	0,86400	2,93775	0,93375	2,91750
Moyenne.	0,82946	3,08804	0,90708	2,47771	0,83488	2,91113	0,90021	2,89529
82	0,79950	3,06825	0,88450	2,46400	0,80600	2,88100	0,86125	2,86275
83	0,80250	3,06975	0,88775	2,46450	0,80625	2,88000	0,86125	2,86150
84	0,80150	3,06700	0,88525	2,46225	0,80700	2,88200	0,86175	2,86350
85	0,80300	3,06750	0,88475	2,46075	0,80975	2,88750	0,86500	2,86850
86	0,80500	3,07125	0,88700	2,46375	0,81425	2,89300	0,87150	2,87400
87	0,81125	3,07600	0,89100	2,46675	0,82425	2,90325	0,88275	2,88275
Moyenne.	0,80379	3,06996	0,88671	2,46367	0,81125	2,88779	0,86725	2,86883

II. — *Comparaison de la Règle n° I avec la double Toise.*

L'installation des Toises destinées à l'étalonnage avait exigé des préparatifs qui ne purent être terminés que vers le milieu du mois d'avril. M. le major *Von Hesse,* officier très-distingué de l'état-major général prussien, et depuis longtemps attaché à la personne de M. le général *Baeyer,* sous la direction de qui il coopère puissamment aux travaux géodésiques de son pays, reçut la mission de se rendre à Bruxelles avec la Toise n° 9, et d'assister aux comparaisons auxquelles cette Toise et celle du Dépôt de la guerre de Bruxelles

devaient servir. Il arriva en cette ville le 17 avril : les comparaisons purent commencer le 20. Le peu de jours qui s'écoulèrent entre son arrivée et le commencement des expériences furent utilisés à mettre la dernière main aux préparatifs.

La comparaison des Règles entre elles avait été terminée le 28 février. Aussitôt après, l'un des membres de la commission, M. le professeur *Stas*, s'occupa de la construction des thermomètres qui, lors des comparaisons entre la Règle n° I et les Toises, devaient donner avec une grande précision la température du bain dans lequel celles-ci seraient immergées. Cet objet étant important, vu que le succès de l'étalonnage dépend surtout de l'exactitude avec laquelle est constatée la température des Toises, on exposera ici, avec quelque détail, les procédés dont M. le professeur *Stas* a fait usage, pour procurer à la Commission des thermomètres offrant toutes les garanties désirables.

Des thermomètres pour constater la température des Toises étalons.

Cinq thermomètres ont servi : deux thermomètres étalons, portant leurs points fondamentaux, 0° et 100°, ainsi que leurs subdivisions, tracés au diamant sur la tige même; trois thermomètres A, B et C, munis à leur partie supérieure d'un réservoir à déversement, divisés également sur la tige, et ayant une course de 30° centigrades environ. Ces différents instruments ont été construits tous avec les mêmes soins et de la manière suivante :

Leur tige, choisie parmi un grand nombre de tubes capillaires, a été prise aussi cylindrique que possible; leur réservoir est de forme *cylindrique*, et de *verre français ordinaire*, de même que la tige.

Avant de procéder au *calibrage* du tube capillaire, on y a fait passer, tout en chauffant très-fortement le tube, d'abord un mélange d'acide azotique et d'acide sulfurique concentré, pour détruire toutes les poussières; ensuite de l'eau distillée, et enfin un courant d'air sec pour enlever les dernières traces d'humidité.

Du calibrage.

On a introduit une colonne de mercure de 15 à 20 millimètres de longueur dans le tube capillaire, et ensuite des tampons de coton sec dans les cylindres

soudés à ses extrémités. Après avoir amené l'extrémité gauche de la colonne mercurielle près d'un des cylindres soudés, on a engagé le tube capillaire dans la rainure d'un support métallique, et on a fixé celui-ci sur le tablier d'une machine à diviser, de manière que l'axe de la vis de la machine fût parallèle à l'axe du cylindre du tube engagé dans la rainure du support.

La machine à diviser qui a été employée, est construite comme la plupart des instruments de ce genre : une vis micrométrique s'engage dans un écrou, et fait mouvoir un chariot qui porte simultanément un tracelet et un microscope muni d'un réticule. Le tracelet est terminé par un diamant capable de produire sur le verre un trait délié mais visible à l'œil nu : par le jeu des vis qui retiennent le tracelet, on peut modifier sa position, et mettre en coïncidence le trait qu'il produit et le croisement des fils du réticule. Un cadran divisé en 500 parties égales est adapté à la vis de la machine, dont le pas est de $1^{mm},3865$: on apprécie aisément et avec certitude au microscope un déplacement correspondant à $\frac{1}{500}$ de millimètre.

Après avoir réglé la position du tracelet par rapport à la croisée des fils du microscope, on a amené, par le mouvement de la vis, l'intersection des fils sur l'extrémité gauche de la colonne mercurielle, et on a donné, à l'aide du diamant, un trait délié sur le tube: on a examiné si le centre de ce trait était tangent à l'extrémité de la colonne, et l'on a fait mouvoir, à l'aide de la vis, le chariot portant le microscope, jusqu'à ce que le réticule fût en coïncidence avec l'extrémité droite de la colonne de mercure : on a inscrit le nombre de tours et de fractions de tour dont la vis avait marché.

Par le mouvement de la vis, on a ramené le réticule du microscope vers l'extrémité gauche de la colonne, en prenant la précaution de dépasser cette extrémité de quelques tours, afin de se mettre à l'abri de toute erreur résultant du temps perdu de la vis; et l'on a mis de nouveau le réticule en coïncidence avec l'extrémité gauche. Après s'être assuré que le centre du trait n'avait pas cessé de correspondre au sommet de la colonne, et avoir noté le point de l'indicateur sur le cadran, on a fait marcher le microscope vers l'extrémité droite, jusqu'à amener la croisée des fils en contact avec elle : si l'on obtenait la même lecture que la première fois, on donnait un second trait; dans le cas contraire, on faisait rétrograder de nouveau le chariot, et l'on recommençait une vérification; mais cela n'est jamais arrivé, quand on a pris la précaution de rendre bien fixes la machine et le support : dans ce cas, l'immobilité de la colonne a été parfaite.

Les deux premiers traits étant tracés, on a fait avancer la colonne mer-

curielle dans le tube, en soulevant le support, de manière à porter l'extrémité gauche de la colonne presque en contact avec le second trait, en prenant toutefois la précaution de la laisser un peu en deça du trait; on a amené ensuite le point de croisement des fils en coïncidence avec le sommet gauche de la colonne : la position de l'indicateur du cadran ayant été notée, on a fait marcher le microscope de manière à pointer exactement le centre du second trait *. On a constaté ainsi la fraction de tour dont le sommet de la colonne mercurielle se trouvait en deçà du centre du trait; on a fait avancer ensuite le microscope, et rendu son réticule tangent au sommet droit de la colonne. Après avoir noté l'indication de la vis, on est revenu sur ses pas, et l'on a déterminé de nouveau la distance entre l'extrémité gauche de la colonne et le second trait, et entre celui-ci et le sommet droit de la colonne; le résultat étant conforme au premier (bien entendu dans les limites des erreurs de visée), on a fait avancer le microscope d'une fraction de tour égale à l'intervalle constaté entre le sommet gauche de la colonne et le second trait, et l'on a marqué un troisième trait sur le tube à l'aide du tracelet.

Cela fait, on a soulevé de nouveau le support avec le tube; on a porté en avant la colonne mercurielle, de manière à placer son extrémité gauche aussi près que possible du troisième trait, et, continuant à suivre la même marche, on a ainsi partagé toute la longueur du tube en intervalles d'égale capacité.

Pendant l'opération du calibrage des tubes, qui a pris plusieurs jours, comme on le conçoit aisément, on s'est assuré à diverses reprises de la longueur initiale de la colonne mercurielle, en la reportant chaque fois entre les deux premiers traits. Cette longueur a toujours été trouvée la même, quand on a pris la précaution d'imprimer simultanément aux deux extrémités du support, dans la rainure duquel le tube est fixé, une secousse qui donne la même forme aux extrémités de la colonne mercurielle. Sans cette précaution, on a rarement trouvé la même longueur, dans une même partie du tube capillaire, à une colonne qui avait été déplacée. Cette secousse a été également imprimée au support toutes les fois que la colonne a été amenée dans une nouvelle partie du tube.

* Cette observation offre une certaine difficulté : en effet, quand on a placé le sommet de la colonne au foyer du microscope, le trait marqué sur le tube, étant plus rapproché, ne se trouve plus au foyer. L'expérience a démontré qu'on arrive au résultat le plus exact, en ne mettant au foyer ni le sommet de la colonne, ni le trait, mais en faisant en sorte que le foyer se trouve au milieu des deux.

De la subdivision des intervalles d'égale capacité.

Les intervalles fournis par le tracé qu'on vient de décrire, ont été directement subdivisés à l'aide du diamant, en dix parties égales, quand deux intervalles consécutifs ne présentaient que des différences insignifiantes. Quand, au contraire, ces intervalles différaient sensiblement, comme cela arrive dans les tubes coniques, on a tenu compte de cette circonstance dans la graduation, et l'on a subdivisé alors ces parties comme si elles étaient *régulièrement* coniques.

De la vérification du calibrage et des subdivisions.

Cette vérification a été faite en introduisant dans le tube des colonnes de mercure représentant successivement environ la moitié, le tiers, le sixième de sa longueur totale, et en mesurant chaque fois le nombre de divisions et de fractions de division occupées par la colonne mercurielle.

Pour exécuter la vérification, on a fixé d'abord au tablier de la machine à diviser un microscope incliné à 45° environ : ce microscope a pour objet de constater l'immobilité de la colonne de mercure, pendant le mouvement du microscope attaché au chariot.

On a amené ensuite la colonne vers le zéro de l'échelle du tube, et on a engagé celui-ci dans la rainure du support métallique ; puis on a fait glisser le support sur le tablier, jusqu'à ce que l'extrémité gauche de la colonne fût tangente au réticule du *microscope fixe*. A l'aide de la vis de la machine, on a mis en mouvement le chariot avec son microscope, et on a déterminé la fraction de division occupée par l'extrémité gauche de la colonne, entre $0^{\text{div.}}$ et $1^{\text{div.}}$; enfin, faisant avancer le chariot, on a déterminé la fraction de division occupée par l'extrémité droite de la colonne ; on a ajouté ces quantités au nombre de divisions constaté directement.

En inclinant ensuite le support métallique, on a fait avancer la colonne de mercure, et on a amené l'extrémité gauche à la place occupée précédemment par l'extrémité droite, quand on voulait déplacer la colonne de toute sa longueur, ou à toute autre position ; et, par le même moyen, on a déterminé le nombre de divisions et de fractions de division qu'occupait la même colonne.

Voici tous les résultats fournis par le *calibrage*, ainsi que la vérification du calibrage et des subdivisions, pour le tube qui est devenu le thermomètre étalon à 290 divisions : c'est celui qui a servi, pendant les opérations de l'étalonnage, à déterminer la véritable température des thermomètres métastatiques plongés dans le bain à côté des Toises étalons.

Résultats du calibrage.

Une même colonne a occupé les espaces suivants :

1°	de	0div.	à	10div.	. . . . .	10	tours	110div.	du cadran	=	14,17
2°	»	10	»	20	. . . . .	10	»	109	»	=	14,17
3°	»	20	»	30	. . . . .	10	»	99	»	=	14,14
4°	»	30	»	40	. . . . .	10	»	101	»	=	14,15
5°	»	40	»	50	. . . . .	10	»	75	»	=	14,07
6°	»	50	»	60	. . . . .	10	»	66	»	=	14,05
7°	»	60	»	70	. . . . .	10	»	44	»	=	13,99
8°	»	70	»	80	. . . . .	10	»	46	»	=	14,00
9°	»	80	»	90	. . . . .	10	»	34	»	=	13,96
10°	»	90	»	100	. . . . .	10	»	30	»	=	13,95
11°	»	100	»	110	. . . . .	10	»	30	»	=	13,95
12°	»	110	»	120	. . . . .	10	»	25	»	=	13,93
13°	»	120	»	130	. . . . .	10	»	20	»	=	13,92
14°	»	130	»	140	. . . . .	10	»	30	»	=	13,95
15°	»	140	»	150	. . . . .	10	»	25	»	=	13,93
16°	»	150	»	160	. . . . .	10	»	20	»	=	13,92
17°	»	160	»	170	. . . . .	10	»	36	»	=	13,97
18°	»	170	»	180	. . . . .	10	»	18	»	=	13,91
19°	»	180	»	190	. . . . .	10	»	9	»	=	13,89
20°	»	190	»	200	. . . . .	10	»	10	»	=	13,89
21°	»	200	»	210	. . . . .	10	»	21	»	=	13,92
22°	»	210	»	220	. . . . .	10	»	90	»	=	14,11
23°	»	220	»	230	. . . . .	10	»	109	»	=	14,17
24°	»	230	»	240	. . . . .	10	»	114	»	=	14,18
25°	»	240	»	250	. . . . .	10	»	140	»	=	14,25
26°	»	250	»	260	. . . . .	10	»	162	»	=	14,31
27°	»	260	»	270	. . . . .	10	»	192	»	=	14,40
28°	»	270	»	280	. . . . .	10	»	185	»	=	14,38
29°	»	280	»	290	. . . . .	10	»	223	»	=	14,48.

Vérification des divisions principales.

Voulant chercher si les divisions tracées au diamant sur le tube, sont d'accord avec la mesure des colonnes faites au microscope, on a vérifié la longueur réelle de l'échelle en trois points, entre 0div. et 90div., entre 0div. et 190div.,

et entre $0^{div.}$ et $290^{div.}$; on a obtenu :

1°	$126^{mm},68$
2°	265 ,95
3°	408 ,00.

En faisant la somme des neuf premiers intervalles, on a trouvé $126^{mm},70$: différence $0^{mm},02$.

La somme des dix-neuf premiers intervalles est $266^{mm},02$: différence $0^{mm},07$.

Enfin la somme totale est $408^{mm},11$: différence $0^{mm},11$.

Ainsi, on a fait, dans le tracé qui représente des colonnes d'égale capacité, une erreur totale qui s'élève à $0^{mm},11$; toutefois cette erreur peut être considérée comme nulle pour le tracé du premier tiers du tube.

Vérification des subdivisions.

Une colonne mercurielle a occupé successivement les nombres suivants de subdivisions :

Entre	$0^{div.}$	et	$140^{div.}$	.....	$140^{div.},62$ *	Différence	$0^{div.},04$.
»	140	»	280	.....	140 ,66		

La même colonne a occupé :

De	$0^{div.}$	à	$140^{div.}$	.....	$140^{div.},62$	Différence	$0^{div.},02$
»	40	»	180	.....	140 ,64	»	0 ,00
»	80	»	220	.....	140 ,64	»	0 ,02
»	120	»	260	.....	140 ,66	»	0 ,04.
»	149	»	289	.....	140 ,62		

Le lendemain, la température ayant changé, la même colonne a occupé :

De	$0^{div.}$	à	$140^{div.}$	.....	$140^{div.},61$	Différence	$0^{div.},00$
»	140	»	280	.....	140 ,61	»	0 ,02
»	0	»	140	.....	140 ,59	»	0 ,01
»	140	»	280	.....	140 ,58	»	0 ,04.
»	0	»	140	.....	140 ,62		

* Les chiffres inscrits sont les moyennes entre les résultats de deux observations.

Une deuxième colonne a donné les résultats suivants :

De	$0^{div.}$	à	$139^{div.}$	.....	$139^{div.},35$	Différence	$0^{div.},03.$
»	139	»	278	.....	139 ,38		

Une troisième colonne a conduit aux chiffres suivants :

De	$0^{div.}$	à	$91^{div.}$	.....	$91^{div.},54$	Différence	$0^{div.},03$
»	91	»	182	.....	91 ,57	»	0 ,03.
»	182	»	273	.....	91 ,54		

Enfin une quatrième colonne a donné :

De	$0^{div.}$	à	$50^{div.}$	.....	$50^{div.},24$	Différence	$0^{div.},06$
»	50	»	100	.....	50 ,30	»	0 ,00
»	100	»	150	.....	50 ,30	»	0 ,04.
»	150	»	200	.....	50 ,26		

On n'a pu continuer l'observation, la colonne s'étant échappée.

En admettant que les différences observées proviennent d'un défaut dans le calibrage du tube, et non d'erreurs de lecture, il résulte de tout ce qui précède que la capacité représentée par les 140 premières divisions est égale à la capacité des suivantes, à $0^{div.},04$ près; mais cette différence peut tout aussi bien être attribuée à des erreurs de visée, puisque la colonne, observée à plusieurs reprises dans la même partie du tube, a donné des résultats qui diffèrent aussi entre eux de $0^{div.},04$. D'ailleurs, en opérant avec des colonnes plus courtes, et dans des parties du tube où le calibrage avait fait constater une cylindricité presque parfaite, on a observé des différences aussi considérables. On peut donc conclure que les erreurs qui existent nécessairement dans le calibrage et les divisions, se confondent avec celles que l'on a commises dans le pointage lors de la vérification, et que, partant, elles sont négligeables.

Détermination des points extrêmes 100° et 0° des thermomètres étalons; valeur des 100° de l'échelle centigrade.

Les tiges étant vérifiées, on a procédé, de la manière indiquée plus haut, à un nettoyage du tube capillaire et des cylindres; on a ensuite fermé un des cylindres, pour le transformer en réservoir, et après y avoir introduit et fait bouillir du mercure chimiquement pur, qui lui-même avait déjà bouilli

dans de l'hydrogène sec, on a fermé le thermomètre, en maintenant toutefois à sa partie supérieure une capacité, laquelle, dans l'un des thermomètres (l'étalon à 290 divisions), a été vidée d'air; et dans l'autre (l'étalon à 570 divisions), a été remplie d'acide carbonique sec.

Pour déterminer le point d'ébullition de l'eau, on a engagé les deux thermomètres, chacun au moyen d'un bouchon, dans une des tubulures d'un vase en fer-blanc *. Ce vase est formé d'une chaudière du même métal, de 4 litres de capacité, qui a été remplie d'eau distillée : sur la chaudière est soudé un cylindre de 18 centimètres de diamètre et de 110 centimètres de hauteur. Ce cylindre, fermé du haut, renferme lui-même un second cylindre de même hauteur, et de 10 centimètres de diamètre. La vapeur d'eau qui se dégage de la chaudière monte par le cylindre intérieur renfermant les thermomètres, passe par des ouvertures pratiquées à sa partie supérieure, et descend ensuite par l'espace annulaire compris entre les deux enveloppes, pour se dégager librement dans l'air par deux tubulures soudées à la partie inférieure du cylindre.

Pour s'assurer que, dans l'intérieur du cylindre renfermant les thermomètres, la pression était égale à celle de l'atmosphère, on a engagé, dans une autre tubulure soudée sur la plaque qui ferme le cylindre, un tube communiquant avec un manomètre à eau.

Le réservoir des thermomètres, ainsi que leur tige contenant la colonne mercurielle, étaient tout à fait hors du contact de l'eau en ébullition, et plongeaient entièrement dans la vapeur d'eau. On n'a laissé passer, de la colonne mercurielle, que tout juste la quantité nécessaire pour faire l'observation.

Pour calculer la température de la vapeur d'eau se dégageant de la chaudière, on a admis qu'une différence de $\pm$ 26^{mm},695 dans la pression atmosphérique, correspond à une différence de $\pm$ 1° centigrade dans la température de l'ébullition de l'eau. On a admis en outre, quoique le fait soit contesté, que la température de la vapeur d'eau était identique à celle de l'eau distillée dont elle émanait.

La pression atmosphérique a été prise à l'aide d'un baromètre Fortin, comparé préalablement au baromètre d'Ernst, n° 180, de l'Observatoire royal de Bruxelles.

On a constaté le point zéro degré, en enveloppant de glace pilée le réservoir et la colonne mercurielle des thermomètres : la glace a été placée dans

* Ce vase est le même, sauf les dimensions, que celui qui a été décrit par M. Regnault, dans les *Annales de chimie et de physique*, 3me série, t. IV, pl. 1re, fig. 4.

une grande cloche de verre, de 18 litres de capacité, et percée par le bas, pour fournir un écoulement à l'eau de fonte de la glace, à mesure qu'elle se produisait. Pour fixer les thermomètres au sein même de la glace, on les a engagés chacun, à l'aide d'un bouchon de liége, dans une planchette reposant sur les bords de la cloche, la glace enveloppant la planchette de tous côtés. Quand on a déterminé soit *le point d'ébullition de l'eau,* soit *celui de la glace fondante,* on a toujours attendu que la colonne de mercure fût devenue *stationnaire.* Pour noter le point d'ébullition, dont la détermination a toujours *précédé* celle du zéro degré, on a attendu que le sommet de la colonne fût devenu *plan,* de *convexe* qu'il était, et que la colonne restât ainsi immobile pendant au moins *une demi-heure.* On a noté au contraire le zéro degré, dès que la colonne descendante s'est arrêtée pendant quelque temps, pour montrer ensuite un mouvement ascensionnel. A cet instant, on a eu soin de *tasser de nouveau la glace* autour du réservoir, et on s'est assuré de la nouvelle position de la colonne.

On a relevé la hauteur de la colonne mercurielle, dans les thermomètres, à l'aide d'un cathétomètre : le vernier de cet instrument donne directement $\frac{1}{50}$ de millimètre, et on apprécie aisément la hauteur d'une colonne à $\frac{1}{100}$ de millimètre. Néanmoins cette exactitude est réduite de moitié, par suite de la nécessité dans laquelle on se trouve, de pointer sur les divisions qui ne peuvent se trouver au même foyer que la colonne mercurielle même. L'expérience a démontré que deux lectures d'une colonne *stationnaire* n'ont jamais différé de plus de $\frac{1}{50}$ de millimètre : c'est dans cette limite de précision que toutes les observations thermométriques faites au cathétomètre doivent être prises.

Données fournies par les deux étalons.

Étalon à 570 div^{ons}.	(1°).	Baromètre observé	$0^{m},75895$
		Température du baromètre	$19^{\circ},50$
		Baromètre réduit à zéro	$0^{m},75578$
		Point d'ébullition de l'eau	$99^{\circ},84$
		Étalon au point d'ébullition	$556^{div.},78$
		Étalon à zéro degré	$6^{div.},14$ *

D'où l'on déduit pour la valeur des 100° centigrades . . . . $551^{div.},52$.

* La détermination du 0° n'a été faite que 2 heures après qu'on eut enlevé le thermomètre de la vapeur d'eau. Quand on a fait cette observation, on ne se doutait pas encore de la *rapidité* avec laquelle le 0° se déplace, lorsque le thermomètre a été préalablement porté à 100°. *Le résultat obtenu est donc entaché d'une erreur.*

(IIe). Baromètre observé 0m,76060
Température du baromètre. . . . . 17°,50
Baromètre réduit à zéro 0m,75766
Point d'ébullition de l'eau. . . . . 99°,913
Étalon au point d'ébullition. 557div.,26
Étalon à 0° degré immédiatement après sa sortie de la vapeur 6div.,091

Valeur des 100° centigrades . . . . . 551div.,65.

Une troisième opération a donné :

(IIIe). Point d'ébullition de l'eau . . . . . 99°,918
Étalon au point d'ébullition 557div.,35
Étalon au point zéro. 6div.,096

Valeur des 100° centigrades . . . . . 551div.,70.

Enfin on a trouvé par une quatrième opération :

(IVe). Point d'ébullition de l'eau. . . . . 99°,928
Étalon au point d'ébullition 557div.,37
Étalon à zéro degré. 6div.,09

Valeur des 100° centigrades . . . . . 551div.,68.

En prenant la moyenne des quatre résultats, on trouve pour la valeur des 100° . . . . . 551div.,64.

Mais comme la première observation est fautive, par la raison que la détermination du 0° n'a pas été faite immédiatement après la sortie du thermomètre de la vapeur d'eau, on a adopté pour résultat la moyenne des trois dernières observations, savoir 551div.,68

Étalon à 290 divons. (Ie). Baromètre observé 0m,75895
Température du baromètre. . . . . 19°,3
Baromètre réduit à zéro 0m,75577
Point d'ébullition de l'eau. . . . . 99°,84
Étalon au point d'ébullition 274div.,69
Étalon à zéro degré 58div.,10

D'où l'on déduit pour la valeur des 100° centigrades . . . 216div.,94.

La détermination du 0° de l'étalon a été faite deux heures après sa sortie de la vapeur d'eau. L'observation est donc entachée de la même erreur que le (Ie) de l'étalon à 570 divisions.

(IIe). Point d'ébullition de l'eau. . . . . 99°,918
Étalon au point d'ébullition 274div.,94
Étalon à zéro degré 58div.,04

Valeur des 100° centigrades . . . . . 217div.,08.

(IIIe). Point d'ébullition de l'eau. . . . . 100°,096
Étalon au point d'ébullition 275div.,40
Étalon à zéro degré 58div.,05

Valeur des 100° centigrades. . . . . 217div.,14.

(IVe). Point d'ébullition de l'eau. . . . . 99°,81
Étalon au point d'ébullition 274div.,91
Étalon à zéro degré 58div.,08

Valeur des 100° centigrades. . . . . 217div.,24.

Cette dernière détermination a été faite le 20 avril, une heure avant le commencement des opérations de l'étalonnage. La moyenne des quatre résultats précédents conduit, pour les 100° centigrades, à une valeur de 217div.,10

Des thermomètres employés pour l'étalonnage.

Les trois thermomètres qui ont servi à la détermination de la température du bain renfermant les Toises étalons, ont été calibrés et vérifiés avec les mêmes soins que les thermomètres étalons : ils portent tous les trois, à leur partie supérieure, un *réservoir* à *déversement;* ce sont des thermomètres à *maximum* de M. *Walferdin.*

Le thermomètre A porte 350 divisions ayant chacune en moyenne 1mm,55 de longueur : sa course est de 30°,98 centigrades.

Le thermomètre B porte 370 divisions ayant chacune en moyenne 1mm,23 de longueur : sa course est de 40°,53.

Le thermomètre C porte 140 divisions ayant chacune en moyenne 1mm,94 de longueur : sa course est de 28°,09.

Le zéro de ces trois instruments ayant été convenablement placé pour l'observation de la température à donner aux Toises étalons, on les a abandonnés pendant fort longtemps à eux-mêmes dans l'air ambiant, afin d'avoir le plus de fixité possible dans la position de leur zéro.

Comparaison des thermomètres A, B, C, au thermomètre étalon à 570 divisions. Détermination de la valeur du degré centigrade de chacun d'eux, en fonction de leur division.

Pour comparer chacun de ces thermomètres à l'étalon, on a engagé, à l'aide d'un bouchon, chacun d'eux à côté de l'étalon, dans l'ouverture d'une

planchette reposant sur le bord d'un vase en métal. Ce vase, de 50 centimètres de hauteur, et de 25 centimètres de diamètre, a été entièrement rempli d'eau, ayant une température *très-peu* différente de celle de l'air ambiant.

Les thermomètres et l'étalon étaient placés de telle manière, que le *milieu du réservoir de chacun d'eux se trouvait sur la même ligne dans l'eau.*

Pendant toute la durée de l'observation, une personne a agité l'eau du bain, en insufflant continuellement, à l'aide d'un tube de verre, de l'air vers le fond du vase, afin de produire dans l'eau une température aussi uniforme que possible aux différentes hauteurs.

On a observé les thermomètres à l'aide du cathétomètre. La comparaison a été faite à une température voisine de celle à laquelle l'étalonnage des Règles devait s'exécuter. Pour la comparaison, on a commencé par observer d'abord deux fois l'étalon, ensuite deux fois le thermomètre à déversement, et enfin on a fait deux nouvelles observations de l'étalon. On a admis pour la véritable température, la moyenne des deux premières et des deux dernières observations de l'étalon : le manque d'un second cathétomètre a forcé de recourir à ce procédé.

Résultat des comparaisons.

THERMOMÈTRE A.

Étalon	Avant. . . .	$108^{div.},50$ *	= $108^{div.},40$.
	Après. . . .	108 ,49 *	
Thermomètre A.			= 240 ,40 *.

THERMOMÈTRE B.

Étalon	Avant. . . .	$108^{div.},75$ *	= $108^{div.},775$.
	Après. . . .	108 ,80 *	
Thermomètre B			= 210 , 99 *.

THERMOMÈTRE C.

Étalon	Avant. . . .	$108^{div.},10$ *	= $108^{div.},20$.
	Après. . . .	108 ,30 *	
Thermomètre C.			= 109 ,17 *.

Pendant toutes ces observations, qui ont duré près de trois heures, la tem-

* Moyenne de deux observations faites successivement.

pérature de l'air a été de 19° environ, et celle du bain a varié de 18°,40 à 18°,55.

Comparaison des deux étalons.

ÉTALON à 570 divisions.

Avant » . . . 109div.,00 *
Après » . . . 109 ,00 * = 109div.,00.

ÉTALON à 290 divisions.

1° 98div.,68
2° . . . . . 98 ,70 = 98div.,69.

Après avoir comparé les thermomètres A, B, C, ainsi que l'étalon à 290 divisions, au thermomètre étalon à 570 divisions, on a immédiatement déterminé leur point zéro. Les étalons étaient restés dans l'air ambiant, avant cette détermination, pendant huit jours au moins, pour éviter le déplacement de leur zéro dans le cours des opérations. Les thermomètres A, B, C étaient restés au moins trois mois dans cette condition.

Voici les résultats :

ÉTALON à 570 divisions.

1° . . . . 0° = 6div.,64
2° . . . . 0° = 6 ,67 } 0° = 6div.,657.
3° . . . . 0° = 6 ,66.

ÉTALON à 290 divisions.

1° . . . . 0° = 58div.,43
2° . . . . 0° = 58 ,43
3° . . . . 0° = 58 ,48 } 0° = 58div.,435.
4° . . . . 0° = 58 ,40.

THERMOMÈTRE A.

1° . . . . 0° = 31div.,70
2° . . . . 0° = 31 ,73. } 0° = 31div.,715.

THERMOMÈTRE B.

1° . . . . 0° = 42div.,07
2° . . . . 0° = 42 ,05. } 0° = 42div.,06.

THERMOMÈTRE C.

1° . . . . 0° = 17div.,46
2° . . . . 0° = 17 ,46. } 0° = 17div.,46.

* Moyenne de deux observations faites successivement.

On déduit des observations qui viennent d'être rapportées les valeurs suivantes :

Pour l'étalon à 290 divisions,	1 degré centigrade			=	$2^{div.}$,170
» le thermomètre	A	»	»	=	11 ,315
» »	B	»	»	=	9 ,126
» »	C	»	»	=	4 ,983.

On connait déjà la valeur du degré centigrade pour l'étalon à 290 divisions : elle a été trouvée, en moyenne, égale à $2^{div.}$,171 : cette valeur se confond donc avec celle déduite de la comparaison des deux étalons. Aussi, en cherchant la température, lors de cette comparaison, on trouve :

1° Pour l'étalon à 570 divisions.

	$109^{div.}$,000	(indication dans le bain).
—	6 ,657	(zéro degré).
	102 ,343	: 5,5168 = 18°,55 centigrades.

2° Pour l'étalon à 290 divisions.

	$98^{div.}$,690	(indication dans le bain).
—	58 ,435	(zéro degré).
	40 ,255	: 2,1711 = 18°,54 centigrades.

Concordance bien remarquable, puisque la différence n'est que de $\frac{1}{100}$ de degré centigrade.

Comparaison des thermomètres A, B, C, avec l'étalon à 290 divisions.

Le 20 avril, après qu'on eut procédé à la 1re série de l'étalonnage, on a fait une nouvelle détermination de la valeur du degré des thermomètres A, B, C, en fonction des divisions tracées sur leur tige, en les comparant cette fois à l'étalon à 290 divisions, et à la température même à laquelle l'étalonnage avait eu lieu *. La valeur des 100° de l'étalon avait été déterminée dans la matinée du même jour.

* On a comparé cette fois les trois thermomètres A, B, C, avec l'étalon à 290 divisions, parce que l'étalon à 570 divisions s'était brisé la veille lors de la détermination de son zéro.

Voici les résultats :

THERMOMÈTRE A.

Étalon	Avant	$93^{div.},24$	$= 93^{div.},29.$
	Après	93 ,34	
Thermomètre A			= 214 ,41.

THERMOMÈTRE B.

Étalon	Avant	$93^{div.},34$	$= 93^{div.},40.$
	Après	93 ,45	
Thermomètre B			= 189 ,91.

THERMOMÈTRE C.

Étalon	Avant	$93^{div.},45$	$= 93^{div.},51.$
	Après	93 ,58	
Thermomètre C			= 98 ,42.

Immédiatement après cette comparaison, on a placé les quatre thermomètres dans la glace fondante, pour déterminer leur point zéro : on a trouvé, pour les thermomètres A, B, C, identiquement les mêmes résultats que ceux obtenus quelques jours auparavant; tandis que le zéro de l'étalon, qui dans la matinée avait été soumis à l'influence de la vapeur d'eau, était déjà remonté. Dans la matinée, il était à $58^{div.},08$, par trois déterminations concordantes; le soir, après la comparaison, on a trouvé :

1°	$58^{div.},234$	$0° = 58^{div.},24.$
2°	58 ,250	

En déduisant des données qui précèdent la valeur du degré centigrade pour les thermomètres A, B, C, on trouve :

Pour le thermomètre	A,	1 degré centigrade			$= 11^{div.},316$
»	»	B,	»	»	= 9 ,129
»	»	C,	»	»	= 4 ,984.

Le 21 avril, après la fin de l'étalonnage des Règles, on a fait une nouvelle comparaison du thermomètre A avec l'étalon, et l'on a déterminé de nouveau

leur point zéro. Voici les résultats :

Étalon	Avant	$93^{div.},31$	$= 93^{div.}, 315$
	Après	93 ,32	
Thermomètre A.			= 214 , 03
Étalon à zéro degré			= 58 , 32
Thermomètre A à zéro degré			= 31 , 72.

On déduit de ces données la valeur du degré centigrade du thermomètre $A = 11^{div.},311$.

De l'erreur qui peut affecter la détermination de la température des Toises étalons.

Deux causes peuvent concourir à altérer l'exactitude des résultats thermométriques : l'une provenant de l'erreur commise sur la valeur du degré centigrade trouvée aux thermomètres A, B, C; l'autre due à des erreurs de lecture. Il est facile de trouver la limite de l'une et de l'autre erreur.

La valeur du degré centigrade des thermomètres A, B, C, en fonction de leurs divisions, peut être affectée d'une erreur commise : 1° lors de la détermination de la valeur du degré de l'étalon; 2° lors de la comparaison des thermomètres avec l'étalon.

Pour l'étalon à 570 divisions, on a trouvé pour limites extrêmes, et pour 100 degrés, $551^{div.},65$ et $551^{div.},70$, ou une différence de $0^{div.},05$, qui représente $0^{\circ},009$, quantité tout à fait inappréciable pour la température de 16°, aux environs de laquelle la comparaison des Toises a eu lieu.

Pour l'étalon à 290 divisions, on a trouvé pour limites extrêmes, et pour 100 degrés, $216^{div.},94$ et $217^{div.},24$, ou une différence de $0^{div.},30$, qui représente $0^{\circ},14$, et, pour les 16° de température, $0^{\circ},022$, c'est-à-dire une quantité qui se confond avec l'erreur que l'on peut commettre dans la lecture de la température, en se servant du cathétomètre.

Ainsi, on peut considérer comme entièrement exactes les indications fournies par l'étalon à 570 divisions, bien entendu pour la température à laquelle la comparaison des Toises a été faite; tandis que, pour l'étalon à 290 divisions, l'erreur *maxima* peut s'élever à $0^{\circ},022$, pour la température de 16° centigrades.

On a vu plus haut que les valeurs du degré centigrade des thermomètres

A, B, C, ont été les suivantes :

Thermomètre A.	Thermomètre B.	Thermomètre C.
11div.,315 *	9div.,126 *	4div.,983 *
11 ,316 **	9 ,129. **	4 ,984. **
11 ,311. **		

La différence 0div.,005, qui existe entre les valeurs du degré du thermomètre A, représente 0°,007, pour la température de 16 degrés.

La différence 0div.,003, pour le thermomètre B, représente, pour 16° centigrades, 0°,005.

Enfin la différence 0div.,001, entre les valeurs du degré du thermomètre C, équivaut à 0°,003, pour 16° de température.

Reste à apprécier les erreurs qu'on a pu commettre lors de la lecture des thermomètres. On verra plus loin que, pendant les opérations de l'étalonnage, on a lu, en se servant d'une loupe, les indications des thermomètres plongés dans le bain. Quoique l'expérience nous ait appris que l'on peut apprécier, à l'aide d'une loupe, une fraction des divisions des thermomètres à $\frac{1}{20}$ de leur longueur totale, admettons néanmoins qu'on se soit trompé de $\frac{1}{10}$; on aura :

1° Pour le thermomètre	A,	une erreur de	0°,009;
2° »	»	B,	»	»	0°,010;
3° »	»	C,	»	»	0°,020.

En supposant que ces erreurs soient venues s'ajouter à celles qui peuvent exister sur la valeur du degré des thermomètres, on aura :

Pour le thermomètre	A,	0°,009	+	0°,007	= 0°,016;
» »	B,	0°,010	+	0°,005	= 0°,015;
» »	C,	0°,020	+	0°,003	= 0°,023.

C'est-à-dire, en moyenne, une erreur de . . . . 0°,018.

Ainsi, en se plaçant dans les conditions les plus défavorables, on peut admettre que la température indiquée par les trois thermomètres *est exacte à* $\frac{1}{50}$ *de degré* centigrade près.

Comme on l'a dit plus haut, les comparaisons entre la double Toise et la Règle n° 1, ont commencé le 20 avril. Les deux Toises employées dans ces

* Déduit de la comparaison avec l'étalon à 570 divisions.

** Déduit de la comparaison avec l'étalon à 290 divisions.

expériences sont les copies nos 9 et 11 qui ont pour formules, savoir :

La Toise, copie n° 9. (Prussienne.)	863'855170	+ 0'0090718 t.
» » n° 11. (Belge.) . . .	863,850213	+ 0,0091560 t.
Leur somme est donc . . . . . 2T =	1727,705383	+ 0,0182278 t.

Les galets sur lesquels ces Toises devaient reposer, dans la caisse en tôle, avaient été nivelés, comme on l'a expliqué au § 2, à l'aide d'une règle métallique munie de deux niveaux à bulle d'air à angle droit. Lorsqu'on plaça les Toises sur les galets, en les faisant buter contre les vis V,V',V',V_1 (*planche V, fig.* 3) préalablement alignées au moyen d'un fil d'argent tendu de V à V_1, elles se trouvèrent de niveau individuellement, mais non en ligne droite : à l'aide des vis butantes, on amena facilement leurs axes à être situés dans un même plan vertical. Mises alors en contact, les deux Toises étaient dans la position indiquée par la figure 5 de la planche V : l'une d'elles, c'était le n° 11, se trouvait au-dessous du niveau de l'autre, de $\frac{1}{4}$ de millimètre environ. Comme toutes deux étaient parfaitement horizontales, et qu'elles se touchaient intimement, on les laissa dans cette situation, pour ne pas devoir corriger les galets dont le règlement était assez pénible. Cette irrégularité de position ne pouvait d'ailleurs offrir d'inconvénient, puisqu'elle était sans influence sur la longueur totale des Toises.

Celles-ci placées et alignées comme on vient de l'expliquer, on mit aux extrémités de la caisse en tôle les ressorts (deux à chaque bout) destinés à maintenir les Toises en contact ; puis on fit agir latéralement les ressorts fixes T,T (*planche V, fig.* 2) qui, en serrant les Toises contre les vis butantes V,V, les préservaient de tout dérangement dans le sens perpendiculaire à leur direction. Ces dispositions prises, on ferma les ouvertures des petites faces de la caisse, en fixant les rondelles *r*,*r'*, (*planche V, fig.* 4), après avoir fait déborder également, des deux extrémités de la caisse en tôle, les bouts extérieurs des étalons.

Lorsque les Toises furent établies dans la caisse, on disposa les thermomètres qui devaient donner la température du bain pendant la durée des comparaisons. Ces thermomètres, au nombre de trois, sont ceux qu'on a désignés, dans l'article précédent, par les lettres A, B, C. On y ajouta trois autres thermomètres, savoir : l'étalon à 290 divisions, et deux thermomètres à divisions tracées sur cuivre, que M. le major d'état-major *Von Hesse* avait eu la complaisance d'apporter de Berlin ; mais on convint de ne tenir compte que des indications des trois thermomètres A, B, C, parce que ceux-ci avaient seuls été comparés soigneusement aux étalons, et que, pour ce motif, ils inspiraient

toute confiance. On adapta à la caisse en tôle, vers ses extrémités et vers le milieu, trois planchettes telles que IK (*planche V, fig.* 6), percées d'ouvertures dans lesquelles passaient les thermomètres munis de bouchons qu'ils traversaient, et qui servaient à les maintenir dans une situation verticale. Les boules se trouvaient à quelques millimètres du fond, complétement immergées. Les six thermomètres étaient répartis, sur la longueur de la caisse, de la manière suivante : vers l'une des extrémités, le thermomètre prussien n° 1, désigné par P_1, le thermomètre étalon à 290 divisions, E, et le thermomètre A ; au milieu, le thermomètre B ; enfin, vers l'autre extrémité, le thermomètre C et le thermomètre prussien n° 2, désigné par P_2.

Deux *dames-jeannes,* de la contenance de 55 litres chacune, pleines d'eau distillée, se trouvaient, depuis plusieurs jours, dans la salle consacrée aux expériences, à proximité du comparateur. Le 20 avril, les thermomètres exposés à l'air libre, dans la salle, indiquaient une température de 15 à 16° centigrades : c'était la température à laquelle *Bessel* et *Baeyer* recommandent d'opérer.

Vers midi, on plaça les *dames-jeannes* sur des supports de hauteur convenable, tout près de la caisse en tôle, et l'on fit arriver l'eau dans le récipient des Toises, au moyen de siphons en verre, jusqu'à deux centimètres du bord; puis on versa dans le bain une dissolution de potasse caustique, pour prévenir l'oxydation des Toises, et au moyen de tubes en fer-blanc, dans lesquels on se réservait d'introduire de la glace pilée, pour abaisser la température du liquide lorsque la nécessité s'en ferait sentir, on agita l'eau alcaline en cherchant à y produire un courant continu. Au bout d'une heure environ, les thermomètres plongés dans le bain indiquaient une température sensiblement uniforme dans toute l'étendue de la caisse : cette température était de 15°,43 centigrades. On jugea qu'à ce moment les expériences pouvaient commencer.

Six observateurs y prirent part. MM. le colonel *Nerenburger* et le major *Diedenhoven* (*Jac.*) lisaient, à l'aide des prismes en cristal, les intervalles, et le thermomètre métallique de la Règle n° I, qui avait été placée sur le tablier du chariot, à côté de la double Toise; les thermomètres à mercure, plongés dans le bain, étaient lus au moyen de loupes, savoir : P_1, E et A par M. le capitaine du génie *Liagre;* B, par M. le major d'état-major *Von Hesse;* C et P_2, par M. l'ingénieur-mécanicien *Sacré.* M. le professeur *Stas* s'était chargé d'entretenir la température du bain égale dans toutes ses parties, en agitant l'eau fréquemment dans le cours des expériences. MM. les lieutenants d'état-major *Dekeuwer* et *Fourcault* tenaient, en double expédition, les tableaux d'inscription destinés à recevoir les résultats des observations, et qui sont du modèle suivant :

20 avril 1854.	Siècles.	Heures.	Minutes.	DOUBLE TOISE.						RÈGLE N° I.							
				Thermomètre à mercure.		Intervalles.				Thermomètres				Intervalles.			
						I.		II.		à mercure.		métallique.		I.		II.	
				Désignation.	Lectures.	Lect.	Corr.	Lect.	Corr.	Désig^ns.	Lectures.	Lect.	Corr.	Lect.	Corr.	Lect.	Corr.
				P_1	18°,55												
		12	35	E	91,80	176,5	— 03	171,1	— 15			150,6	— 17	175,5	— 04	168,7	— 15
				A	206,0	176,6	— 13	170,9	— 06			150,5	— 27	175,4	— 14	168,6	— 06
				B	18,24												
	1re			C	94,30	176,3	— 04	171,0	— 15								
		1	5	P_2	18,50	176,3	— 13	171,0	— 06								
Sommes des lectures. .		»		»	»	705,7	— 33	684,0	— 42			301,1	— 44	350,7	— 18	337,3	— 21
Corrections		»		»	»	— 3		— 4				4		— 2		— 2	
Lectures corrigées. . .		»		»	»	705,4		683,6				300,7		350,5		337,1	
Moyennes		»		»	»	176,35		170,90		P_1 E A B C P_2	18°,63 91,80 206,50 18,28 94,60 18,53	150,35		175,25		168,55	
Moyennes de l'interv. I .		»		»	«	»		176,35								175,25	
Sommes des intervalles.		»		»	»	»		347,25								343,80	

Lorsque la double Toise était amenée, par le mouvement du chariot, entre les biseaux fixes du comparateur, on réglait sa position de manière à faire correspondre les centres des petits cercles qui la terminent, aux sommets des cônes des couvercles des cylindres. Cette opération se faisait à vue. Après quoi, on enlevait les couvercles pour mettre à nu les parties arrondies des cylindres, et ceux-ci étaient approchés avec précaution des bouts de la double Toise, jusqu'au contact. A ce moment, on donnait le signal de faire la lecture des thermomètres plongés dans le bain, et ceux-ci étaient lus à haute voix dans l'ordre P_1, E, A, B, C, P_2. On lisait ensuite simultanément les intervalles compris entre les arêtes des cylindres et ceux des biseaux fixes du comparateur; puis les observateurs changeaient de place et se contrôlaient réciproquement. Une première observation relative à la double Toise était alors terminée, et l'on amenait immédiatement la Règle n° 1 entre les biseaux fixes du comparateur. Le thermomètre métallique et les deux intervalles étaient lus. La double Toise succédait à la Règle, et donnait lieu aux opérations

décrites précédemment. On avait ainsi une première *série* de comparaisons, composée de deux observations de la double Toise et d'une de la Règle. Le 20 avril, on obtint 20 séries : la durée moyenne d'une série avait été de huit minutes environ.

La journée terminée, on fit écouler l'eau contenue dans la caisse en tôle, par un robinet R,R (*planche V, fig.* 1) adapté à la partie inférieure de la caisse, et on la recueillit dans les *dames-jeannes,* pour être employée le lendemain. Les Toises furent immédiatement retirées de la caisse, essuyées avec le plus grand soin au moyen de serviettes chauffées, puis remises dans leurs boites.

Le 21 avril, on prit les mêmes dispositions que la veille, à cela près que l'une des Toises (le n° 11) reposait sur les galets de son support, par la face opposée à celle par laquelle elle avait reposé la veille. Vingt nouvelles séries furent obtenues, en suivant la marche décrite ci-dessus. Commencées à $12^h\ 40^m$, elles furent terminées à $3^h\ 10^m$.

En ne tenant compte que des indications fournies par les thermomètres A, B, C, on a le tableau suivant des températures du bain, et conséquemment de la double Toise, groupées par séries d'observations. On le consigne ici, parce qu'il permet de juger du degré d'uniformité de la température du bain, pendant la durée de chaque série d'observations *.

Températures indiquées par les thermomètres A, B, C.

Indication des thermomètres.	1re Série.		2e Série.		3e Série.		4e Série.	
A.	15°,424	15°,468	15°,486	15°,515	15°,526	15°,557	15°,592	15°,615
B.	15,437	15,481	15,492	15,536	15,558	15,580	15,591	15,655
C.	15,368	15,428	15,444	15,458	15,498	15,518	15,558	15,598
Moyennes.	15,410	15,459	15,474	15,502	15,527	15,552	15,580	15,616
	5e Série.		6e Série.		7e Série.		8e Série.	
A.	15°,641	15°,683	15°,690	15°,743	15°,765	15°,787	15°,818	15°,855
B.	15,646	15,679	15,690	15,725	15,745	15,767	15,767	15,800
C.	15,608	15,658	15,664	15,698	15,698	15,748	15,754	15,788
Moyennes.	15,632	15,677	15,681	15,721	15,736	15,767	15,780	15,814

* Voir la note à la fin du Compte rendu.

Indication des thermomètres.	9e Série.		10e Série.		11e Série.		12e Série.	
A.	15°,867	15°,911	15°,942	15°,955	15°,960	16°,039	16°,044	16°,092
B.	15,822	15,855	15,866	15,932	15,943	15,987	16,020	16,031
C.	15,798	15,818	15,818	15,868	15,878	15,908	15,908	15,968
Moyennes.	15,829	15,861	15,875	15,918	15,927	15,978	15,991	16,030
	13e Série.		14e Série.		15e Série.		16e Série.	
A.	16°,115	16°,152	16°,137	16°,176	16°,181	16°,221	16°,221	16°,258
B.	16,053	16,097	16,108	16,141	16,141	16,185	16,152	16,251
C.	15,978	16,008	16,018	16,078	16,078	16,088	16,078	16,148
Moyennes.	16,049	16,079	16,088	16,132	16,133	16,165	16,150	16,212
	17e Série.		18e Série.		19e Série.		20e Série.	
A.	16°,243	16°,292	16°,300	16°,305	16°,318	16°,393	16°,398	16°,424
B.	16,273	16,284	16,306	16,317	16,328	16,372	16,383	16,405
C.	16,158	16,198	16,202	16,208	16,218	16,278	16,298	16,308
Moyennes.	16,225	16,258	16,269	16,277	16,288	16,348	16,360	16,379
	21e Série.		22e Série.		23e Série.		24e Série.	
A.	15°,526	15°,561	15°,584	15°,610	15°,623	15°,668	15°,676	15°,683
B.	15,646	15,657	15,657	15,679	15,679	15,714	15,723	15,734
C.	15,628	15,638	15,658	15,704	15,718	15,758	15,758	15,778
Moyennes.	15,600	15,619	15,633	15,664	15,673	15,713	15,719	15,732
	25e Série.		26e Série.		27e Série.		28e Série.	
A.	15°,687	15°,700	15°,723	15°,761	15°,765	15°,778	15°,782	15°,783
B.	15,734	15,767	15,767	15,800	15,800	15,822	15,833	15,844
C.	15,788	15,808	15,798	15,828	15,838	15,858	15,864	15,874
Moyennes.	15,736	15,758	15,763	15,796	15,801	15,819	15,826	15,834

Indication des thermomètres.	29e Série.		30e Série.		31e Série.		32e Série.	
A.	15°,783	15°,862	15°,877	15°,871	15°,876	15°,911	15°,915	15°,946
B.	15,844	15,877	15,888	15,910	15,910	15,943	15,943	15,976
C.	15,898	15,908	15,920	15,928	15,952	15,968	15,988	16,008
Moyennes.	15,842	15,882	15,895	15,903	15,913	15,941	15,948	15,977
	33e Série.		34e Série.		35e Série.		36e Série.	
A.	15°,951	15°,964	15°,968	16°,004	16°,008	16°,035	16°,035	16°,044
B.	15,990	15,990	15,998	16,009	16,009	16,031	16,031	16,053
C.	16,012	16,018	16,022	16,038	16,042	16,092	16,088	16,108
Moyennes.	15,984	15,991	15,996	16,017	16,020	16,053	16,051	16,068
	37e Série.		38e Série.		39e Série.		40e Série.	
A.	16°,049	16°,060	16°,088	16°,101	16°,115	16°,128	16°,132	16°,143
B.	16,053	16,097	16,108	16,119	16,119	16,141	16,152	16,174
C.	16,118	16,124	16,128	16,134	16,148	16,168	16,188	16,198
Moyennes.	16,073	16,094	16,108	16,118	16,127	16,146	16,157	16,172

Des deux colonnes relatives à chaque série, la première contient les lectures des thermomètres plongés dans le bain, *avant* l'observation de la Règle n° 1, et la seconde, les lectures des thermomètres *après* cette observation. Les moyennes sont les températures qu'on a employées pour calculer, à l'aide de la formule $2T = 1727^{t},70583 + 0^{t},0182278\ t$, la longueur de la double Toise, correspondante à chaque série. Le tableau suivant présente les résultats de ce calcul, et de plus, les sommes n et n' des intervalles pour la double Toise et la Règle n° 1, ainsi que les intervalles thermométriques a relatifs à cette Règle, c'est-à-dire les données qui, avec x' et m' (ces valeurs ont été fournies par la comparaison des Règles entre elles), sont nécessaires pour traduire en nombres la formule (E) page 12, expression de la Règle moyenne L.

Comparaison de la Règle n° I avec la double Toise. — Résultats des observations.

N°s des comparaisons.	Dates.	DURÉE de la comparaison.	TOISES et Règle n° I.	TEMPÉRATURE centigrade.	2T	n	n'	a
1	20 avril 1854.	de 12h55m à 1 5.	Toises. Règle N° 1. Toises.	15°,41 » 15,45	1727t,98627 » 1727,98700	3t,4738 » 3,4712	3t,4380	1t,5035
			Moyennes . .	15,43	1727,98663	3,4725		
2	»	de 1h5m à 1 13.	Toises. N° I. Toises.	15,48 » 15,50	1727,98755 » 1727,98791	3,4732 » 3,4698	3,4335	1,5010
			Moyennes . .	15,49	1727,98773	3,4715		
3	»	de 1h13m à 1 22.	Toises. N° I. Toises.	15,53 » 15,55	1727,98846 » 1727,98882	3,4698 » 3,4692	3,4305	1,4995
			Moyennes . .	15,54	1727,98864	3,4695		
4	»	de 1h22m à 1 31.	Toises. N° I. Toises.	15,58 » 15,62	1727,98937 » 1727,99010	3,4688 » 3,4682	3,4290	1,4965
			Moyennes . .	15,60	1727,98973	3,4685		
5	»	de 1h31m à 1 40.	Toises. N° I. Toises.	15,63 » 15,67	1727,99028 » 1727,99101	3,4658 » 3,4662	3,4265	1,4950
			Moyennes . .	15,65	1727,99064	3,4660		
6	»	de 1h40m à 1 48.	Toises. N° I. Toises.	15,68 » 15,72	1727,99119 » 1727,99193	3,4653 » 3,4642	3,4240	1,4915
			Moyennes . .	15,70	1727,99156	3,46475		

Nos des comparaisons.	Dates.	DURÉE de la comparaison.	TOISES et Règle n° I.	TEMPÉRATURE centigrade.	2T	n	n'	a
7	20 avril 1854.	de 1h48m à 1 56.	Toises. Règle N° I. Toises.	15°,73 » 15,77	1727',99211 » 1727,00283	3',4643 » 3,4632	3',4240	1',4895
			Moyennes . .	15,75	1727,99247	3,46375		
8	»	de 1h56m à 2 4.	Toises. N° I. Toises.	15,78 » 15,82	1727,99502 » 1727,99356	3,4618 » 3,4617	3,4220	1,4875
			Moyennes . .	15,80	1727,99329	3,46175		
9	»	de 2h4m à 2 12.	Toises. N° I. Toises.	15,82 » 15,86	1727,99375 » 1727,99447	3,4608 » 3,4602	3,4185	1,4855
			Moyennes . .	15,84	1727,99411	3,4605		
10	»	de 2h12m à 2 22.	Toises. N° I. Toises.	15,88 » 15,92	1727,99405 » 1727,99557	3,4595 » 3,4627	3,4180	1,4810
			Moyennes . .	15,90	1727,99511	3,4610		
11	»	de 2h22m à 2 31.	Toises. N° I. Toises.	15,92 » 15,98	1727,99556 » 1727,99666	3,4608 » 3,4607	3,4140	1,4795
			Moyennes . .	15,95	1727,99611	3,46075		
12	»	de 2h31m à 2 39.	Toises. N° I. Toises.	15,99 » 16,03	1727,99685 » 1727,99757	3,4588 » 3,4602	3,4145	1,4755
			Moyennes . .	16,01	1727,99721	3,4595		

N°s des comparaisons.	Dates.	DURÉE de la comparaison.	TOISES et Règle n° I.	TEMPÉRATURE centigrade.	2T	n	n'	a
13	20 avril 1854.	de 2h39m à 2 46.	Toises. Règle N° I. Toises.	16°,05 » 16,07	1727',99794 » 1727,99830	3',4593 » 3,4592	3',4115	1',4740
			Moyennes . .	16,06	1727,99812	3,45925		
14	»	de 2h46m à 2 54.	Toises. N° I. Toises.	16,09 » 16,13	1727,99867 » 1727,99939	3,4588 » 3,4572	3,4100	1,4720
			Moyennes . .	16,11	1727,99903	3,4580		
15	»	de 2h54m à 3 2.	Toises. N° I. Toises.	16,13 » 16,17	1727,99939 » 1728,00013	3,4558 » 3,4552	3,4095	1,4695
			Moyennes . .	16,15	1727,99976	3,4555		
16	»	de 3h2m à 3 11.	Toises. N° I. Toises.	16,15 » 16,21	1727,99976 » 1728,00086	3,4548 » 3,4562	3,4075	1,4675
			Moyennes . .	16,18	1728,00031	3,4555		
17	»	de 3h11m à 3 19.	Toises. N° I. Toises.	16,22 » 16,26	1728,00104 » 1728,00176	3,4543 » 3,4537	3,4060	1,4655
			Moyennes . .	16,24	1728,00140	3,4540		
18	»	de 3h19m à 3 26.	Toises. N° I. Toises.	16,27 » 16,27	1728,00195 » 1728,00195	3,4548 » 3,4552	3,4055	1,4635
			Moyennes . .	16,27	1728,00195	3,4550		

Nos des comparaisons.	Dates.	DURÉE de la comparaison.	TOISES et Règle n° I.	TEMPÉRATURE centigrade.	2T	n	n'	a
19	20 avril 1854.	de 3h26m à 3 34.	Toises. Règle N° I. Toises.	16°,29 » 16,35	1728',00231 » 1728,00341	3',4518 » 3,4547	3',4040	1',4605
			Moyennes . .	16,32	1728,00286	3,45325		
20	»	de 3h34m à 3 41.	Toises. N° I. Toises.	16,36 » 16,38	1728,00359 » 1728,00395	3,4548 » 3,4527	3,4035	1,4595
			Moyennes . .	16,37	1728,00377	3,45375		
21	21 avril 1854.	de 12h40m à 12 51.	Toises. N° I. Toises.	15,60 » 15,62	1727,98974 » 1727,99010	3,4750 » 3,4735	3,4275	1,4815
			Moyennes . .	15,61	1727,98992	3,47425		
22	»	de 12h51m à 12 59.	Toises. N° I. Toises.	15,64 » 15,66	1727,99047 » 1727,99083	3,4717 » 3,4718	3,4260	1,4810
			Moyennes . .	15,65	1727,99065	3,47175		
23	»	de 12h59m à 1 7.	Toises. N° I. Toises.	15,67 » 15,71	1727,99101 » 1727,99174	3,4728 » 3,4687	3,4250	1,4805
			Moyennes . .	15,69	1727,99137	3,47075		
24	»	de 1h7m à 1 14.	Toises. N° I. Toises.	15,71 » 15,73	1727,99174 » 1727,99210	3,4723 » 3,4707	3,4240	1,4795
			Moyennes . .	15,72	1727,99192	3,4715		

Nos des comparaisons.	Dates.	DURÉE de la comparaison.	TOISES et Règle n° I.	TEMPÉRATURE centigrade.	2T	n	n'	a
25	21 avril 1854.	de 1h14m à 1 21.	Toises.	15,74	1727,99211	3,4713	3,4230	1,4790
			Règle N° I.	»	»	»		
			Toises.	15,76	1727,99265	3,4682		
			Moyennes . .	15,75	1727,99238	3,46975		
26	»	de 1h21m à 1 29.	Toises.	15,76	1727,99265	3,4673	3,4230	1,4785
			N° I.	»	»	»		
			Toises.	15,80	1727,99338	3,4677		
			Moyennes . .	15,78	1727,99301	3,4675		
27	»	de 1h29m à 1 36.	Toises.	15,80	1727,99338	3,4673	3,4220	1,4775
			N° I.	»	»	»		
			Toises.	15,82	1727,99374	3,4667		
			Moyennes . .	15,81	1727,99356	3,4670		
28	»	de 1h36m à 1 43.	Toises.	15,83	1727,99393	3,4668	3,4220	1,4775
			N° I.	»	»	»		
			Toises.	15,83	1727,99393	3,4667		
			Moyennes.	15,83	1727,99393	3,46675		
29	»	de 1h43m à 1 52.	Toises.	15,84	1727,99411	3,4673	3,4210	1,4765
			N° I.	»	»	»		
			Toises.	15,88	1727,99484	3,4667		
			Moyennes . .	15,86	1727,99447	3,4670		
30	»	de 1h52m à 1 59.	Toises.	15,90	1727,99511	3,4668	3,4210	1,4755
			N° I.	»	»	»		
			Toises.	15,90	1727,99511	3,4657		
			Moyennes . .	15,90	1727,99511	3,46625		

N^os des comparaisons.	Dates.	DURÉE de la comparaison.	TOISES et Règle n° I.	TEMPÉRATURE centigrade.	2T	n	n'	a
31	21 avril 1854.	de 1h59m à 2 6.	Toises. Règle N° I. Toises.	15°,92 » 15,94	1727',99539 » 1727,99593	3',4653 » 3,4652	3',4195	1',4765
			Moyennes . .	15,93	1727,99566	3,46525		
32	»	de 2h6m à 2 15.	Toises. N° I. Toises.	15,95 » 15,97	1727,99612 » 1727,99648	3,4663 » 3,4637	3,4195	1,4765
			Moyennes . .	15,96	1727,99630	3,4650		
33	»	de 2h15m à 2 22.	Toises. N° I. Toises.	15,99 » 15,99	1727,99675 » 1727,99675	3,4648 » 3,4642	3,4185	1,4755
			Moyennes . .	15,99	1727,99675	3,4645		
34	»	de 2h22m à 2 29.	Toises. N° I. Toises.	16,00 » 16,02	1727,99685 » 1727,99739	3,4623 » 3,4637	3,4185	1,4745
			Moyennes . .	16,01	1727,99712	3,4630		
35	»	de 2h29m à 2 35.	Toises. N° I. Toises.	16,02 » 16,06	1727,99739 » 1727,99794	3,4633 » 3,4632	3,4195	1,4745
			Moyennes . .	16,04	1727,99766	3,46325		
36	»	de 2h35m à 2 42.	Toises. N° I. Toises.	16,05 » 16,07	1727,99794 » 1727,99830	3,4628 » 3,4617	3,4180	1,4745
			Moyennes . .	16,06	1727,99812	3,46225		

Nos des comparaisons.	Dates.	DURÉE de la comparaison.	TOISES et Règle n° I.	TEMPÉRATURE centigrade.	2T	n	n'	a
37	21 avril 1854.	de 2h42m à 2 49.	Toises. Règle N° I. Toises.	16°,07 » 16,09	1727t,99830 » 1727,99866	3t,4618 » 3,4627	3t,4170	1t,4740
			Moyennes . .	16,08	1727,99848	3,46225		
38	»	de 2h49m à 2 57.	Toises. N° I. Toises.	16,10 » 16,12	1727,99885 » 1727,99921	3,4623 » 3,4607	3,4180	1,4725
			Moyennes . .	16,11	1727,99903	3,4615		
39	»	de 3h57m à 3 4.	Toises. N° I. Toises.	16,13 » 16,15	1727,99940 » 1727,99958	3,4618 » 3,4607	3,4160	1,4715
			Moyennes . .	16,14	1727,99949	3,46125		
40	»	de 3h4m à 3 10.	Toises. N° I. Toises.	16,15 » 16,17	1727,99976 » 1728,00012	3,4613 » 3,4602	3,4190	1,4715
			Moyennes . .	16,16	1727,99994	3,46075		

On a dit au § 1er que, dans les étalonnages faits en Prusse par *Bessel* et *Baeyer*, les Toises étaient immergées dans le bain et présentées au comparateur, recouvertes d'une enveloppe de drap mince. La Commission, en substituant à ce procédé celui dont elle a fait usage, avait cru prévenir un inconvénient : elle pensait que, par l'effet de l'évaporation du liquide contenu dans l'enveloppe de drap, la température des Toises devait baisser assez rapidement pour que, pendant la durée d'une observation de la double Toise, celle-ci dût subir une diminution sensible de longueur. M. le major *Von Hesse*, à qui ce scrupule fut soumis, témoigna le désir que la Commission donnât suite à l'idée qu'elle avait émise, de faire une série d'expériences dans le but d'éclaircir le point en question. On consacra donc la journée du 22 avril à cet objet.

Les deux Toises furent revêtues, chacune, d'une enveloppe de drap qui ne laissait à découvert que les bouts, et placées en contact et en ligne droite dans la caisse en tôle. Celle-ci fut remplie d'eau distillée. Une heure après, jugeant que la température du liquide s'était communiquée aux étalons, on laissa écouler l'eau, après avoir amené la double Toise entre les biseaux du comparateur. Aussitôt que le niveau de l'eau eut atteint l'axe des galets, MM. le major *Von Hesse* et le colonel *Nerenburger* commencèrent à lire les intervalles compris entre les biseaux fixes et ceux des cylindres. Voici les résultats qu'ils ont obtenus :

HEURES.	SOMME des intervalles.	HEURES.	SOMME des intervalles.
3h42m00s	344!5	3h51m00s	344!3
3 42 30	344,5	3 51 30	344,4
3 43 00	344,7	3 52 00	344,4
3 43 30	344,7	3 52 30	344,4
3 44 00	344,6	3 53 00	344,3
3 44 30	344,5	3 53 30	344,2
3 45 00	344,5	3 54 00	344,1
3 45 30	344,5	3 54 30	344,2
3 46 00	344,5	3 55 00	344,2
3 46 30	343,9	4 00 00	344,2
3 47 00	344,4	4 5 00	344,1
3 47 30	344,5	4 10 00	344,2
3 49 00	344,2	4 15 00	343,8
3 49 30	344,3	4 20 00	343,9
3 50 00	344,4	4 25 00	343,9
3 50 30	344,4	»	»

Ce tableau montre que, dans un intervalle de temps de 43 minutes, la longueur de la double Toise, placée dans les circonstances rapportées ci-dessus, n'a pas varié d'une quantité appréciable : car la différence entre la première somme d'intervalles et la dernière ne peut être attribuée qu'à des erreurs de lecture, à moins d'admettre que la double Toise se soit allongée sous l'influence de l'évaporation du liquide alcalin dont le drap était imprégné. Quelque extraordinaire que puisse paraître ce phénomène, on serait tenté de croire à son existence, d'après la marche décroissante des résultats obtenus à partir de 3h51m.

§ V.

CALCUL DES LONGUEURS RELATIVES DES RÈGLES. — DÉTERMINATION DE LEURS COEFFICIENTS THERMOMÉTRIQUES ET DE LEURS LONGUEURS ABSOLUES. — CALCUL DES COEFFICIENTS DE DILATATION DES RÈGLES DE FER ET DE ZINC.

—

I. *Calcul des longueurs relatives des Règles, et détermination de leurs coefficients thermométriques.*

Sous le titre : *De la comparaison des Règles entre elles,* on a démontré, au § 1er, les égalités suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} n' = C - x' + am' \\ n'' = C - x'' + bm'' \\ n''' = C - x''' + cm''' \\ n^{\text{iv}} = C - x^{\text{iv}} + dm^{\text{iv}}. \end{array}\right\} \ldots\ldots (D)$$

On a dit que ce système d'équations renferme *neuf* inconnues, savoir : la constante C, les quatre m et les quatre x; mais que les neuf inconnues se réduisent réellement à huit en vertu de la relation

$$x' + x'' + x''' + x^{\text{iv}} = o,$$

qui permet d'éliminer un des x.

Comme l'appareil de comparaison ne reste pas nécessairement dans des conditions identiques, lorsque l'on passe d'une comparaison des quatre Règles à la comparaison suivante, chaque système analogue à (D) renfermera une nouvelle constante C, de sorte que h comparaisons fourniront $4h$ équations entre $h + 7$ inconnues.

Le tableau rapporté ci-dessus (*page* 60) des observations qui ont été faites dans le but d'apprécier les longueurs relatives des Règles, et de déterminer leurs coefficients thermométriques, comprend 90 séries, dans chacune desquelles les quatre Règles ont été comparées quatre fois ; mais on les a rame-

nées à 15 séries distinctes, formées, chacune, de la moyenne entre 6 séries primitives. On s'est donc procuré ainsi 60 équations entre 22 inconnues; ce sont les équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lllllll} 3{,}66842 & = & C_1 & - & x' & + & 1{,}91842\, m' \\ 3{,}07137 & = & C_1 & - & x'' & + & 1{,}98350\, m'' \\ 3{,}52687 & = & C_1 & - & x''' & + & 1{,}89950\, m''' \\ 3{,}50096 & = & C_1 & - & x^{\text{IV}} & + & 1{,}95954\, m^{\text{IV}}. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lllllll} 3{,}61971 & = & C_2 & - & x' & + & 1{,}84837\, m' \\ 3{,}02458 & = & C_2 & - & x'' & + & 1{,}92108\, m'' \\ 3{,}48321 & = & C_2 & - & x''' & + & 1{,}85596\, m''' \\ 3{,}45687 & = & C_2 & - & x^{\text{IV}} & + & 1{,}89596\, m^{\text{IV}}. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lllllll} 3{,}59896 & = & C_3 & - & x' & + & 1{,}80379\, m' \\ 3{,}00275 & = & C_3 & - & x'' & + & 1{,}87829\, m'' \\ 3{,}46233 & = & C_3 & - & x''' & + & 1{,}81742\, m''' \\ 3{,}43683 & = & C_3 & - & x^{\text{IV}} & + & 1{,}85737\, m^{\text{IV}}. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lllllll} 3{,}12904 & = & C_4 & - & x' & + & 0{,}90875\, m' \\ 2{,}52779 & = & C_4 & - & x'' & + & 0{,}99379\, m'' \\ 3{,}50504 & = & C_4 & - & x''' & + & 1{,}88346\, m''' \\ 3{,}47938 & = & C_4 & - & x^{\text{IV}} & + & 1{,}92888\, m^{\text{IV}}. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lllllll} 3{,}10004 & = & C_5 & - & x' & + & 0{,}85029\, m' \\ 3{,}03433 & = & C_5 & - & x'' & + & 1{,}92129\, m'' \\ 2{,}94433 & = & C_5 & - & x''' & + & 0{,}88588\, m''' \\ 3{,}45967 & = & C_5 & - & x^{\text{IV}} & + & 1{,}89988\, m^{\text{IV}}. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lllllll} 3{,}11071 & = & C_6 & - & x' & + & 0{,}87254\, m' \\ 3{,}03421 & = & C_6 & - & x'' & + & 1{,}92600\, m'' \\ 3{,}48175 & = & C_6 & - & x''' & + & 1{,}85258\, m''' \\ 2{,}92721 & = & C_6 & - & x^{\text{IV}} & + & 0{,}95692\, m^{\text{IV}}. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lllllll} 3{,}68842 & = & C_7 & - & x' & + & 1{,}94379\, m' \\ 2{,}50933 & = & C_7 & - & x'' & + & 0{,}96500\, m'' \\ 3{,}54479 & = & C_7 & - & x''' & + & 1{,}94758\, m''' \\ 2{,}92192 & = & C_7 & - & x^{\text{IV}} & + & 0{,}94588\, m^{\text{IV}}. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lllllll} 3{,}63125 & = & C_8 & - & x' & + & 1{,}88779\, m' \\ 3{,}05508 & = & C_8 & - & x'' & + & 1{,}96458\, m'' \\ 2{,}90158 & = & C_8 & - & x''' & + & 0{,}82588\, m''' \\ 2{,}86729 & = & C_8 & - & x^{\text{IV}} & + & 0{,}85575\, m^{\text{IV}}. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3{,}66333 & = & C_9 - x' + 1{,}90554\, m' \\ 2{,}45700 & = & C_9 - x'' + 0{,}86238\, m'' \\ 2{,}90029 & = & C_9 - x''' + 0{,}81871\, m''' \\ 3{,}49313 & = & C_9 - x^{\text{IV}} + 1{,}94679\, m^{\text{IV}}. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3{,}42633 & = & C_{10} - x' + 1{,}49233\, m' \\ 2{,}82958 & = & C_{10} - x'' + 1{,}56983\, m'' \\ 3{,}28442 & = & C_{10} - x''' + 1{,}51496\, m''' \\ 3{,}25983 & = & C_{10} - x^{\text{IV}} + 1{,}55946\, m^{\text{IV}}. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3{,}41350 & = & C_{11} - x' + 1{,}46575\, m' \\ 2{,}81558 & = & C_{11} - x'' + 1{,}54208\, m'' \\ 3{,}26917 & = & C_{11} - x''' + 1{,}48704\, m''' \\ 3{,}24408 & = & C_{11} - x^{\text{IV}} + 1{,}53267\, m^{\text{IV}}. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3{,}40308 & = & C_{12} - x' + 1{,}44917\, m' \\ 2{,}80775 & = & C_{12} - x'' + 1{,}52583\, m'' \\ 3{,}25983 & = & C_{12} - x''' + 1{,}47196\, m''' \\ 3{,}23538 & = & C_{12} - x^{\text{IV}} + 1{,}51679\, m^{\text{IV}}. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3{,}06796 & = & C_{13} - x' + 0{,}80358\, m' \\ 2{,}45667 & = & C_{13} - x'' + 0{,}87829\, m'' \\ 2{,}88933 & = & C_{13} - x''' + 0{,}81513\, m''' \\ 2{,}87479 & = & C_{13} - x^{\text{IV}} + 0{,}87375\, m^{\text{IV}}. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3{,}08804 & = & C_{14} - x' + 0{,}82946\, m' \\ 2{,}47771 & = & C_{14} - x'' + 0{,}90708\, m'' \\ 2{,}91113 & = & C_{14} - x''' + 0{,}83488\, m''' \\ 2{,}89529 & = & C_{14} - x^{\text{IV}} + 0{,}90021\, m^{\text{IV}}. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3{,}06996 & = & C_{15} - x' + 0{,}80379\, m' \\ 2{,}46367 & = & C_{15} - x'' + 0{,}88671\, m'' \\ 2{,}88779 & = & C_{15} - x''' + 0{,}81125\, m''' \\ 2{,}86883 & = & C_{15} - x^{\text{IV}} + 0{,}86725\, m^{\text{IV}}. \end{array}\right.$$

Pour leur appliquer commodément la méthode des moindres carrés, on a cherché d'abord la solution littérale du problème, afin de pouvoir former les équations finales, en substituant simplement aux lettres leurs valeurs numériques fournies par l'observation. On y est parvenu de la manière suivante :

Les équations primitives (D) sont de la forme

$$
\begin{aligned}
n_1' &= C_1 - x' + a_1 m' \\
n_1'' &= C_1 - x'' + b_1 m'' \\
n_1''' &= C_1 - x''' + c_1 m''' \\
n_1^{\text{IV}} &= C_1 - x^{\text{IV}} + d_1 m^{\text{IV}}. \\
n_2' &= C_2 - x' + a_2 m' \\
n_2'' &= C_2 - x'' + b_2 m'' \\
n_2''' &= C_2 - x''' + c_2 m''' \\
n_2^{\text{IV}} &= C_2 - x^{\text{IV}} + d_2 m^{\text{IV}}. \\
n_3' &= C_3 - x' + a_3 m' \\
\text{Etc.,} &\quad \text{etc.,} \quad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

On a de plus l'équation générale de condition

$$x' + x'' + x''' + x^{\text{IV}} = o.$$

Les équations normales par rapport aux C constituent donc un premier groupe, qui est le suivant :

$$
\left.
\begin{aligned}
n_1' + n_1'' + n_1''' + n_1^{\text{IV}} &= 4C_1 + a_1 m' + b_1 m'' + c_1 m''' + d_1 m^{\text{IV}} \\
n_2' + n_2'' + n_2''' + n_2^{\text{IV}} &= 4C_2 + a_2 m' + b_2 m'' + c_2 m''' + d_2 m^{\text{IV}} \\
&\vdots \\
n_{15}' + n_{15}'' + n_{15}''' + n_{15}^{\text{IV}} &= 4C_{15} + a_{15} m' + b_{15} m'' + c_{15} m''' + d_{15} m^{\text{IV}}.
\end{aligned}
\right\} \quad \ldots\ldots \text{(F)}
$$

L'équation de condition a fait disparaître les x de ce premier groupe.

Si l'on adopte la notation générale $n'_1 + n'_2 + n'_3 \ldots + n'_{15} = [n']$; $C_1 + C_2 + C_3 \ldots + C_{15} = [C]$, etc., les équations normales par rapport aux x formeront un second groupe, qui sera :

$$
\left.
\begin{aligned}
[n'] - [C] + [1]\, x' - [a]\, m' &= o \\
[n''] - [C] + [1]\, x'' - [b]\, m'' &= o \\
[n'''] - [C] + [1]\, x''' - [c]\, m''' &= o \\
[n^{\text{IV}}] - [C] + [1]\, x^{\text{IV}} - [d]\, m^{\text{IV}} &= o.
\end{aligned}
\right\} \quad \ldots\ldots \text{(G)}
$$

Enfin les équations normales par rapport aux m donneront un dernier

groupe, savoir :

$$\left.\begin{array}{l} -[an'] + [aC] - [a]\,x' + [aa]\,m' = o \\ -[bn''] + [bC] - [b]\,x'' + [bb]\,m'' = o \\ -[cn'''] + [cC] - [c]\,x''' + [cc]\,m''' = o \\ -[dn^{\text{IV}}] + [dC] - [d]\,x^{\text{IV}} + [dd]\,m^{\text{IV}} = o. \end{array}\right\} \ldots\ldots \text{(H)}.$$

Substituant, dans les groupes (G) et (H), les valeurs des C déduites du groupe (F), on obtient les huit équations normales propres à faire connaître les valeurs les plus probables des x et des m. Ces équations normales sont :

$$(\text{I}).\left\{\begin{array}{l} [n'] - \frac{1}{4}([n'] + [n''] + [n'''] + [n^{\text{IV}}]) + [1]\,x' - \frac{3}{4}[a]\,m' + \frac{1}{4}[b]\,m'' + \frac{1}{4}[c]\,m''' + \frac{1}{4}[d]\,m^{\text{IV}} = o \\ [n''] - \frac{1}{4}([n'] + [n''] + [n'''] + [n^{\text{IV}}]) + [1]\,x'' + \frac{1}{4}[a]\,m' - \frac{3}{4}[b]\,m'' + \frac{1}{4}[c]\,m''' + \frac{1}{4}[d]\,m^{\text{IV}} = o \\ [n'''] - \frac{1}{4}([n'] + [n''] + [n'''] + [n^{\text{IV}}]) + [1]\,x''' + \frac{1}{4}[a]\,m' + \frac{1}{4}[b]\,m'' - \frac{3}{4}[c]\,m''' + \frac{1}{4}[d]\,m^{\text{IV}} = o \\ [n^{\text{IV}}] - \frac{1}{4}([n'] + [n''] + [n'''] + [n^{\text{IV}}]) + [1]\,x^{\text{IV}} + \frac{1}{4}[a]\,m' + \frac{1}{4}[b]\,m'' + \frac{1}{4}[c]\,m''' - \frac{3}{4}[d]\,m^{\text{IV}} = o. \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} -[an'] + \frac{1}{4}([an'] + [an''] + [an'''] + [an^{\text{IV}}]) - [a]\,x' + \frac{3}{4}[aa]\,m' - \frac{1}{4}[ab]\,m'' - \frac{1}{4}[ac]\,m''' - \frac{1}{4}[ad]\,m^{\text{IV}} = o \\ -[bn''] + \frac{1}{4}([bn'] + [bn''] + [bn'''] + [bn^{\text{IV}}]) - [b]\,x'' - \frac{1}{4}[ab]\,m' + \frac{3}{4}[bb]\,m'' - \frac{1}{4}[bc]\,m''' - \frac{1}{4}[bd]\,m^{\text{IV}} = o \\ -[cn'''] + \frac{1}{4}([cn'] + [cn''] + [cn'''] + [cn^{\text{IV}}]) - [c]\,x''' - \frac{1}{4}[ac]\,m' - \frac{1}{4}[bc]\,m'' + \frac{3}{4}[cc]\,m''' - \frac{1}{4}[cd]\,m^{\text{IV}} = o \\ -[dn^{\text{IV}}] + \frac{1}{4}([dn'] + [dn''] + [dn'''] + [dn^{\text{IV}}]) - [d]\,x^{\text{IV}} - \frac{1}{4}[ad]\,m' - \frac{1}{4}[bd]\,m'' - \frac{1}{4}[cd]\,m''' + \frac{3}{4}[dd]\,m^{\text{IV}} = o. \end{array}\right.$$

En les traduisant numériquement, on obtient :

$$\begin{array}{l} +3{,}59038 + 15\,x' - 15{,}58752\,m' + 5{,}43143\,m'' + 5{,}18055\,m''' + 5{,}57428\,m^{\text{IV}} = o \\ -5{,}54297 + 15\,x'' + 5{,}19584\,m' - 16{,}29430\,m'' + 5{,}18055\,m''' + 5{,}57428\,m^{\text{IV}} = o \\ +1{,}14149 + 15\,x''' + 5{,}19584\,m' + 5{,}43143\,m'' - 15{,}54104\,m''' + 5{,}57428\,m^{\text{IV}} = o \\ +0{,}81109 + 15\,x^{\text{IV}} + 5{,}19584\,m' + 5{,}43143\,m'' + 5{,}18055\,m''' - 16{,}12285\,m^{\text{IV}} = o. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -5{,}81095 - 20{,}78356\,x' + 24{,}06688\,m' - 7{,}79356\,m'' - 7{,}47803\,m''' - 7{,}72468\,m^{\text{IV}} = o \\ +7{,}19451 - 21{,}72573\,x'' - 7{,}79356\,m' + 25{,}97004\,m'' - 7{,}80161\,m''' - 8{,}04491\,m^{\text{IV}} = o \\ -2{,}50791 - 20{,}72218\,x''' - 7{,}47803\,m' - 7{,}80161\,m'' + 23{,}96851\,m''' - 7{,}72246\,m^{\text{IV}} = o \\ -2{,}04458 - 21{,}49710\,x^{\text{IV}} - 7{,}72468\,m' - 8{,}04491\,m'' - 7{,}72246\,m''' + 23{,}46602\,m^{\text{IV}} = o. \end{array}$$

Le travail de l'élimination entre ces huit équations se simplifiera considérablement, si l'on remarque que chacune d'elles ne renferme qu'un x, ce qui permet d'arriver très-facilement à quatre équations entre les m. Pour trouver une forme littérale qui permette d'établir *à priori* ces quatre dernières équations, on posera d'abord :

$$n_1 = \frac{1}{4}(n_1' + n_1'' + n_1''' + n_1^{\text{IV}})$$
$$n_2 = \frac{1}{4}(n_2' + n_2'' + n_2''' + n_2^{\text{IV}}) \text{ etc.}$$

d'où

$$[n] = \tfrac{1}{4}\left([n'] + [n''] + [n'''] + [n^{\text{v}}]\right);$$

puis prenant, dans la 1re des équations du groupe (I), la valeur de x', pour la substituer dans la 5e; prenant, dans la 2e équation, la valeur de x'', pour la substituer dans la 6e, et ainsi de suite, on obtiendra de cette manière, pour déterminer les m, les quatre équations littérales suivantes, dont la forme symétrique est très-remarquable :

$$\left([an] - \frac{[a][n]}{[1]}\right) - \left([an'] - \frac{[a][n']}{[1]}\right) + \tfrac{3}{4}\left([aa] - \frac{[a][a]}{[1]}\right)m' - \tfrac{1}{4}\left([ab] - \frac{[a][b]}{[1]}\right)m'' - \tfrac{1}{4}\left([ac] - \frac{[a][c]}{[1]}\right)m''' - \tfrac{1}{4}\left([ad] - \frac{[a][d]}{[1]}\right)m^{\text{v}} = o$$

$$\left([bn] - \frac{[b][n]}{[1]}\right) - \left([bn''] - \frac{[b][n'']}{[1]}\right) - \tfrac{1}{4}\left([ab] - \frac{[a][b]}{[1]}\right)m' + \tfrac{3}{4}\left([bb] - \frac{[b][b]}{[1]}\right)m'' - \tfrac{1}{4}\left([bc] - \frac{[b][c]}{[1]}\right)m''' - \tfrac{1}{4}\left([bd] - \frac{[b][d]}{[1]}\right)m^{\text{v}} = o$$

$$\left([cn] - \frac{[c][n]}{[1]}\right) - \left([cn'''] - \frac{[c][n''']}{[1]}\right) - \tfrac{1}{4}\left([ac] - \frac{[a][c]}{[1]}\right)m' - \tfrac{1}{4}\left([bc] - \frac{[b][c]}{[1]}\right)m'' + \tfrac{3}{4}\left([cc] - \frac{[c][c]}{[1]}\right)m''' - \tfrac{1}{4}\left([cd] - \frac{[c][d]}{[1]}\right)m^{\text{v}} = o$$

$$\left([dn] - \frac{[d][n]}{[1]}\right) - \left([dn^{\text{v}}] - \frac{[d][n^{\text{v}}]}{[1]}\right) - \tfrac{1}{4}\left([ad] - \frac{[a][d]}{[1]}\right)m' - \tfrac{1}{4}\left([bd] - \frac{[b][d]}{[1]}\right)m'' - \tfrac{1}{4}\left([cd] - \frac{[c][d]}{[1]}\right)m''' + \tfrac{3}{4}\left([dd] - \frac{[d][d]}{[1]}\right)m^{\text{v}} = o.$$

Leur traduction numérique donne ;

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrr}
- & 0{,}83628 & + & 2{,}46947\,m' & - & 0{,}26800\,m'' & - & 0{,}30008\,m''' & - & 0{,}27852\,m^{\text{v}} & = & o \\
- & 0{,}85383 & - & 0{,}26800\,m' & + & 2{,}56966\,m'' & - & 0{,}29820\,m''' & - & 0{,}26090\,m^{\text{v}} & = & o \\
- & 0{,}93099 & - & 0{,}30008\,m' & - & 0{,}29820\,m'' & + & 2{,}49806\,m''' & - & 0{,}29802\,m^{\text{v}} & = & o \\
- & 0{,}88215 & - & 0{,}27852\,m' & - & 0{,}26090\,m'' & - & 0{,}29802\,m''' & + & 2{,}55975\,m^{\text{v}} & = & o\,;
\end{array}$$

et l'élimination ordinaire fournit, pour les quatre coefficients thermométriques, les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
m' &= 0{,}53125 \\
m'' &= 0{,}54627 \\
m''' &= 0{,}56957 \\
m^{\text{v}} &= 0{,}56882.
\end{aligned}$$

Si l'on transporte ces valeurs dans les quatre premières équations du groupe (I), on en déduit les valeurs des x, savoir :

$$\begin{aligned}
x' &= -\ 0{,}28562 \\
x'' &= +\ 0{,}37841 \\
x''' &= -\ 0{,}07158 \\
x^{\text{v}} &= -\ 0{,}02121\,^{*}.
\end{aligned}$$

* Ces valeurs des m et des x ont été calculées par M. le capitaine du génie *Liagre*, à qui est due la méthode littérale qui vient d'être exposée. Les mêmes inconnues ont été calculées en double, par MM. le

Si enfin on les transporte dans le groupe (F), on trouvera pour les C, les valeurs ci-dessous :

$C_1 = 2'36711$	$C_6 = 2'35969$	$C_{11} = 2'35062$
$C_2 = 2,35436$	$C_7 = 2,36433$	$C_{12} = 2,35087$
$C_3 = 2,35623$	$C_8 = 2,36049$	$C_{13} = 2,35520$
$C_4 = 2,36141$	$C_9 = 2,36416$	$C_{14} = 2,36211$
$C_5 = 2,36296$	$C_{10} = 2,34997$	$C_{15} = 2,35587.$

Veut-on maintenant trouver les erreurs d'observation : on substituera, dans les 60 équations primitives, les valeurs calculées pour les x, les m et les C; on obtiendra ainsi :

$\Delta_1 = -0'00346$	$\Delta_{21} = +0'00186$	$\Delta_{41} = -0'00142$
$\Delta_2 = -0,00085$	$\Delta_{22} = +0,00082$	$\Delta_{42} = +0,00098$
$\Delta_3 = +0,00628$	$\Delta_{23} = -0,00469$	$\Delta_{43} = +0,00000$
$\Delta_4 = -0,00198$	$\Delta_{24} = +0,00200$	$\Delta_{44} = +0,00044$
$\Delta_5 = -0,00222$	$\Delta_{25} = +0,00583$	$\Delta_{45} = -0,00128$
$\Delta_6 = -0,00079$	$\Delta_{26} = -0,00374$	$\Delta_{46} = +0,00178$
$\Delta_7 = +0,00017$	$\Delta_{27} = -0,00044$	$\Delta_{47} = -0,00100$
$\Delta_8 = +0,00285$	$\Delta_{28} = -0,00165$	$\Delta_{48} = +0,00052$
$\Delta_9 = -0,00115$	$\Delta_{29} = +0,00226$	$\Delta_{49} = +0,00024$
$\Delta_{10} = -0,00112$	$\Delta_{30} = -0,00018$	$\Delta_{50} = +0,00010$
$\Delta_{11} = -0,00062$	$\Delta_{31} = -0,00089$	$\Delta_{51} = -0,00172$
$\Delta_{12} = +0,00289$	$\Delta_{32} = -0,00117$	$\Delta_{52} = +0,00138$
$\Delta_{13} = -0,00076$	$\Delta_{33} = +0,00123$	$\Delta_{53} = -0,00034$
$\Delta_{14} = +0,00191$	$\Delta_{34} = +0,00016$	$\Delta_{54} = -0,00150$
$\Delta_{15} = -0,00071$	$\Delta_{35} = -0,00176$	$\Delta_{55} = +0,00192$
$\Delta_{16} = -0,00042$	$\Delta_{36} = +0,00039$	$\Delta_{56} = -0,00008$
$\Delta_{17} = -0,00026$	$\Delta_{37} = -0,00206$	$\Delta_{57} = +0,00146$
$\Delta_{18} = +0,00024$	$\Delta_{38} = +0,00047$	$\Delta_{58} = +0,00183$
$\Delta_{19} = +0,00522$	$\Delta_{39} = -0,00001$	$\Delta_{59} = -0,00172$
$\Delta_{20} = -0,00518$	$\Delta_{40} = +0,00160$	$\Delta_{60} = -0,00156.$

major *Diedenhoven* et le lieutenant *Dekeuwer,* qui avaient trouvé, chacun de leur côté, les nombres ci-après, en suivant la marche indiquée par le général *Baeyer* dans son ouvrage intitulé *Die Küstenvermessung :*

$m' = 0,53126$	$x' = -0,28561$
$m'' = 0,54627$	$x'' = +0,37639$
$m''' = 0,56958$	$x''' = -0,07159$
$m^{iv} = 0,56885.$	$x^{iv} = -0,02118.$

Les différences entre ces nombres et ceux rapportés ci-dessus, sont, comme on voit, tout à fait insignifiantes.

La somme des carrés de ces 60 erreurs est $0^{l},000\ 271\ 426$; et comme 22 inconnues ont été calculées à l'aide de 60 équations, 38 de ces dernières sont surabondantes. L'erreur moyenne d'une équation est donc :

$$\sqrt{\frac{0^{l},000\,271\,426}{38}} = \pm\ 0^{l},002\ 673.$$

Cette erreur ne doit pas être attribuée entièrement à l'observation : elle provient, en partie, de ce qu'on a supposé la quantité C invariable pendant la durée d'une série composée de six comparaisons quadruples. Or, quelques-unes des séries renferment des observations faites dans deux et même dans trois journées différentes; et les variations de température de la salle suffisent pour exercer sur la longueur des petits cylindres en acier une influence très-appréciable.

Le fait de la dilatation des cylindres est mis parfaitement en évidence par les observations : en effet, la valeur moyenne des C, pour les 9 premières séries, est $2^{l},3615$. Pendant les observations correspondantes, la température moyenne de la salle a été de $8^{o},2$.

Pour les 6 dernières séries, pendant lesquelles la température moyenne de la salle a été de $20^{o},1$, la valeur moyenne des C n'est que $2^{l},3537$: la différence $0^{l},0078$ est triple de l'erreur moyenne calculée précédemment; elle s'exerce d'ailleurs dans le sens voulu, car l'expression

$$C = M - L - s \text{ (§ 1, page 7)}$$

montre que C doit varier en sens inverse de la longueur s des cylindres; autrement dit, que C doit diminuer quand la température augmente, et réciproquement.

En admettant que l'acier des cylindres se dilate de $\frac{1}{100000}$ par degré centésimal, on trouve que 12° feront subir à un cylindre de 65 lignes de longueur, une dilatation précisément égale à $0^{l},0078$. La variation de C, trouvée ci-dessus, n'est donc que la moitié de ce qu'elle devrait être, puisqu'elle provient des deux cylindres à la fois. On comprend du reste qu'il en soit ainsi, car l'observateur, maniant fréquemment les cylindres, dont le métal est un excellent conducteur, leur communique une partie de la chaleur normale de son corps : il les échauffe donc d'autant plus que la salle est plus froide, et tend ainsi à leur donner une température constante.

Si les coefficients de dilatation ont été déterminés exactement, si les observations ont été faites avec régularité et précision, on pourra fractionner le

groupe total des 15 séries en plusieurs groupes partiels correspondants à des températures différentes, et l'on devra, en transportant dans ceux-ci les valeurs trouvées plus haut pour les m, obtenir pour les x des valeurs qui s'accordent avec les précédentes, dans les limites de l'erreur moyenne.

Pour soumettre les résultats à ce moyen de contrôle, on a formé quatre groupes partiels :

Le 1er	renferme	les séries	1, 2, 3,	faites à	basse température;
Le 2e	»	»	4, 5, 6, 7, 8, 9,	»	températures mixtes;
Le 3e	»	»	10, 11, 12,	»	la température normale;
Le 4e	»	»	13, 14 et 15,	»	haute température.

Les valeurs trouvées pour les x sont les suivantes :

1er groupe	$x' = -0^{l},28335$;	$x'' = +0^{l},37933$;	$x''' = -0^{l},07352$;	$x^{iv} = -0^{l},02246$;
2e »	$= -0,28731$;	$+0,37854$;	$-0,07103$;	$-0,02020$;
3e »	$= -0,28403$;	$+0,37733$;	$-0,07124$;	$-0,02206$;
4e »	$= -0,28607$.	$+0,37826$.	$-0,07107$.	$-0,02113$.

Ces quatre groupes présentent, on le voit, un accord très-satisfaisant : les différences entre chacun des résultats individuels, et le résultat général obtenu ci-dessus par la combinaison des 15 séries simultanées, sont respectivement :

Pour x',	$-0^{l},00227$;	pour x'', $+0^{l},00092$;	pour x''', $+0^{l},00194$;	pour x^{iv}, $+0^{l},00125$;
	$+0,00169$;	$+0,00013$;	$-0,00055$;	$-0,00101$;
	$-0,00159$;	$-0,00108$;	$-0,00034$;	$+0,00085$;
	$+0,00045$.	$-0,00015$.	$-0,00051$.	$-0,00008$.
Moyennes	$-0^{l},00043$;	$-0^{l},00005$;	$+0^{l},00013$;	$+0^{l},00025$.

On peut donc dire que les deux procédés de calcul conduisent identiquement au même résultat.

II. *Détermination de la longueur absolue des quatre Règles.*

Pour trouver la longueur de la Règle moyenne L, on a comparé, d'après les procédés décrits au § 4, la double Toise à la Règle n° 1. Le tableau de la page 87 renferme les résultats de cette comparaison.

Si l'on substitue dans la formule (E) les valeurs de 2T, n, n' et a, fournies par ce tableau, ainsi que les valeurs de x' et de m' calculées précédemment, on obtiendra les 40 équations suivantes, que l'on a séparées en deux groupes de 20, correspondant à chacune des deux journées d'observation :

								Écarts par rapport à la moyenne générale.
1	L = 1727,98663	— x'	+ 0,0345	+ 1,5035 m'	=	1729,10547		— 0,005 50
2	98773	— x'	+ 0,0380	+ 1,5010 m'	= . . .	10874		— 0,002 23
3	98864	— x'	+ 0,0390	+ 1,4995 m'	= . . .	10986		— 0,001 11
4	98973	— x'	+ 0,0395	+ 1,4965 m'	= . . .	10985		— 0,001 12
5	99064	— x'	+ 0,0395	+ 1,4950 m'	= . . .	10997		— 0,001 00
6	99156	— x'	+ 0,04075	+ 1,4915 m'	= . . .	11028		— 0,000 69
7	99247	— x'	+ 0,03975	+ 1,4895 m'	= . . .	10912		— 0,001 85
8	99329	— x'	+ 0,03975	+ 1,4875 m'	= . . .	10888		— 0,002 09
9	99411	— x'	+ 0,0420	+ 1,4855 m'	= . . .	11089		— 0,000 08
10	99511	— x'	+ 0,0430	+ 1,4810 m'	= . . .	11050		— 0,000 47
11	99611	— x'	+ 0,04675	+ 1,4795 m'	= . . .	11445		+ 0,003 48
12	99721	— x'	+ 0,0450	+ 1,4755 m'	= . . .	11168		+ 0,000 71
13	99812	— x'	+ 0,04775	+ 1,4740 m'	= . . .	11454		+ 0,003 57
14	99903	— x'	+ 0,0480	+ 1,4720 m'	= . . .	11464		+ 0,003 67
15	99976	— x'	+ 0,0460	+ 1,4695 m'	= . . .	11204		+ 0,001 07
16	1728,00031	— x'	+ 0,0480	+ 1,4675 m'	= . .	11353		+ 0,002 56
17	00140	— x'	+ 0,0480	+ 1,4655 m'	= . .	11355		+ 0,002 58
18	00195	— x'	+ 0,0495	+ 1,4635 m'	= . . .	11454		+ 0,003 57
19	00286	— x'	+ 0,04925	+ 1,4605 m'	= . . .	11361		+ 0,002 64
20	00377	— x'	+ 0,05025	+ 1,4595 m'	= . . .	11409		+ 0,004 02
Moyenne	L = 1727,99552	— x'	+ 0,04372	+ 1,48087 m'	=	1729,11156		
21	L = 1727,98992	— x'	+ 0,04675	+ 1,4815 m'	=	1729,10932		— 0,001 65
22	99065	— x'	+ 0,04575	+ 1,4810 m'	= . . .	10879		— 0,002 18
23	99137	— x'	+ 0,04575	+ 1,4805 m'	= . . .	10924		— 0,001 73
24	99192	— x'	+ 0,0475	+ 1,4795 m'	= . . .	11101		+ 0,000 04
25	99238	— x'	+ 0,04675	+ 1,4790 m'	= . . .	11046		— 0,000 51
26	99301	— x'	+ 0,0445	+ 1,4785 m'	= . . .	10857		— 0,002 40
27	99356	— x'	+ 0,0450	+ 1,4775 m'	= . . .	10909		— 0,001 88
28	99393	— x'	+ 0,04475	+ 1,4775 m'	= . . .	10921		— 0,001 76
29	99447	— x'	+ 0,0460	+ 1,4765 m'	= . . .	11047		— 0,000 50
30	99511	— x'	+ 0,04525	+ 1,4755 m'	= . . .	10983		— 0,001 14
31	99566	— x'	+ 0,04575	+ 1,4765 m'	= . . .	11141		+ 0,000 44
32	99630	— x'	+ 0,0455	+ 1,4765 m'	= . . .	11180		+ 0,000 83
33	99675	— x'	+ 0,0460	+ 1,4755 m'	= . . .	11222		+ 0,001 25
34	99712	— x'	+ 0,0445	+ 1,4745 m'	= . . .	11056		— 0,000 41
35	99766	— x'	+ 0,04375	+ 1,4745 m'	= . . .	11035		— 0,000 62
36	99812	— x'	+ 0,04425	+ 1,4745 m'	= . . .	11131		+ 0,000 34
37	99848	— x'	+ 0,04525	+ 1,4740 m'	= . . .	11240		+ 0,001 43
38	99903	— x'	+ 0,0435	+ 1,4725 m'	= . . .	11040		— 0,000 57
39	99949	— x'	+ 0,04525	+ 1,4715 m'	= . . .	11208		+ 0,001 11
40	99994	— x'	+ 0,04175	+ 1,4715 m'	= . . .	10903		— 0,001 94
Moyenne	L = 1727,99524	— x'	+ 0,04518	+ 1,47642 m'	=	1729,11038		
Moyenne générale.	L = 1727,99538	— x'	+ 0,04445	+ 1,47865 m'	=	1729,11097		

La somme des carrés des écarts, par rapport à la moyenne générale, est $0^{l},000\ 171\ 41$;

Par suite, l'erreur moyenne d'une comparaison de la Règle avec la double Toise est

$$\sqrt{\frac{0^{l},000\ 171\ 41}{39}} = \pm\ 0^{l},002\ 096.$$

L'erreur moyenne du résultat des 20 comparaisons d'une journée est

$$\frac{0^{l},002\ 096}{\sqrt{20}} = \pm\ 0^{l},000\ 47.$$

La valeur de L qui vient d'être trouvée est intermédiaire entre les résultats obtenus par *Bessel* et par *Baeyer* en 1834 et en 1846. On a respectivement :

Valeur de L en	1854.	$1729^{l},11097$
» »	1846.	1729,0999
» »	1834.	1729,1167.

Il est facile maintenant de calculer, au moyen des formules (A), page 6, les longueurs absolues des quatre Règles, pour les indications *a,b,c,d* de leurs thermomètres métalliques : ces longueurs sont :

Règle n° I.	l'	$= 1728^{l},8250$	$- 0,53125.$	*a*
II	l''	$= 1729,4890$	$- 0,54627.$	*b*
III. . . .	l'''	$= 1729,0390$	$- 0,56957.$	*c*
IV. . . .	l^{iv}	$= 1729,0894$	$- 0,56882.$	*d*.

En 1846, *Baeyer* avait trouvé

Règle n° I.	l'	$= 1728^{l},8130$	$- 0,53027.$	*a*
II	l''	$= 1729,4930$	$- 0,55092.$	*b*
III	l'''	$= 1729,0276$	$- 0,56308.$	*c*
IV	l^{iv}	$= 1729,0659$	$- 0,56485.$	*d*.

En 1834, il avait obtenu, conjointement avec *Bessel*,

Règle n° I.	l'	= 1728,8152	— 0,54033. a
II	l''	= 1729,5153	— 0,55976. b
III. . . .	l'''	= 1729,0454	— 0,57575. c
IV. . . .	l^{iv}	= 1729,0909	— 0,58103. d.

Nos coefficients thermométriques sont intermédiaires entre ceux qui ont été calculés en 1834 et en 1846, mais se rapprochent davantage de ces derniers. Quant à la valeur d'une portée des quatre Règles, correspondante à $a = b = c = d = o$, on trouve,

En 1834.	6916,4668
» 1846.	6916,3995
» 1854.	6916,4424.

Pour l'indication moyenne $1^{1},50$, des quatre thermomètres métalliques, ces valeurs deviennent respectivement :

En 1834.	6913,0815
» 1846.	6913,0858
» 1854.	6913,1185.

III. *Second calcul pour la comparaison des Règles entre elles.*

Au lieu de réunir par six les 90 séries de comparaisons des quatre Règles, et d'en former 15 groupes, on les a réunies par trois seulement *, afin de rester autant que possible dans les mêmes conditions de température. On a formé ainsi 30 groupes, dont les résultats moyens sont consignés dans le tableau suivant :

* Sauf pour les groupes 1 et 5, dont l'un renferme 2 séries et l'autre 4.

GROUPES.	SÉRIES.	a	n'	b	n''	c	n'''	d	n^{IV}
1	1. 2	1,89637	3,64712	1,96887	3,05525	1,89737	3,51187	1,95975	3,48512
2	3. 4. 5	1,84558	3,61492	1,91958	3,02183	1,85142	3,47858	1,89258	3,45275
3	6. 7. 8	1,87342	3,63792	1,94200	3,03958	1,87642	3,49867	1,91700	3,47117
4	9.10.11	1,81842	3,60550	1,89100	3,00008	1,83200	3,47033	1,87042	3,44350
5	12.13.14.15	1,80112	3,59825	1,87694	3,00225	1,81475	3,46112	1,85556	3,43637
6	52.53.54	1,93800	3,68675	1,99800	3,08708	1,90133	3,54117	1,97850	3,51667
7	16.17.18	0,90933	3,12642	0,99242	2,52483	1,89958	3,51600	1,94658	3,40025
8	19.20.21	0,90817	3,13167	0,99517	2,53075	1,86733	3,49408	1,91117	3,46850
9	22.23.24	0,84017	3,09267	1,92800	3,03942	0,87933	2,93608	1,90692	3,46450
10	25.26.27	0,86042	3,10742	1,91458	3,02925	0,89242	2,95258	1,89283	3,45483
11	28.29.30	0,85983	3,10167	1,92767	3,03642	1,85342	3,48575	0,94350	2,91658
12	31.32.33	0,88525	3,11975	1,92433	3,03200	1,85175	3,47975	0,97033	2,93783
13	34.35.36	1,95092	3,69258	0,95725	2,50367	1,95300	3,54983	0,93808	2,91383
14	37.38.39	1,93667	3,68425	0,97275	2,51500	1,94217	3,53975	0,95373	2,93000
15	40.41.42	1,89383	3,65458	1,97017	3,05825	0,82408	2,89750	0,85283	2,86267
16	43.44.45	1,88175	3,64792	1,95900	3,05192	0,82767	2,90567	0,85867	2,87192
17	46.47.48	1,91025	3,66667	0,85725	2,45233	0,81692	2,89500	1,95108	3,49733
18	49.50.51	1,90083	3,66000	0,86750	2,46167	0,82050	2,90558	1,94250	3,48892
19	55.56.57	1,50133	3,43200	1,57883	2,83575	1,52183	3,29042	1,56692	3,26500
20	58.59.60	1,48333	3,42067	1,56083	2,82342	1,50808	3,27842	1,55200	3,25467
21	61.62.63	1,45183	3,40480	1,52825	2,80667	1,47575	3,26067	1,52017	3,23625
22	64.65.66	1,47967	3,42217	1,55592	2,82450	1,49833	3,27767	1,54517	3,25192
23	67.68.69	1,45925	3,41017	1,53600	2,81308	1,48050	3,26525	1,52650	3,24008
24	70.71.72	1,43908	3,40000	1,51567	2,80242	1,46342	3,25442	1,50708	3,23067
25	73.74.75	0,80533	3,06933	0,87967	2,45800	0,81950	2,89492	0,87542	2,87700
26	76.77.78	0,80183	3,06658	0,87692	2,45533	0,81075	2,88375	0,87208	2,87258
27	79.80.81	0,81792	3,07975	0,89483	2,46808	0,81767	2,89350	0,88092	2,88183
28	82.83.84	0,80117	3,06833	0,88583	2,46358	0,80642	2,88100	0,86142	2,86158
29	85.86.87	0,80642	3,07158	0,88758	2,46375	0,81608	2,89458	0,87308	2,87508
30	88.89.90	0,84100	3,09633	0,91933	2,48733	0,85208	2,92875	0,91950	2,90875

Les 120 équations qui en résultent, traitées par la méthode des moindres carrés, d'après la solution littérale indiquée plus haut, conduisent aux quatre équations suivantes entre les m :

$$o = -1{,}67199 + 4{,}962504\ m' - 0{,}543502\ m'' - 0{,}607338\ m''' - 0{,}563957\ m^{IV}$$
$$o = -1{,}66811 - 0{,}543502\ m' + 4{,}762150\ m'' - 0{,}603435\ m''' - 0{,}529005\ m^{IV}$$
$$o = -1{,}87235 - 0{,}607338\ m' - 0{,}603435\ m'' + 5{,}016930\ m''' - 0{,}602885\ m^{IV}$$
$$o = -1{,}76549 - 0{,}563957\ m' - 0{,}529005\ m'' - 0{,}602885\ m''' + 4{,}741220\ m^{IV}.$$

Éliminant entre ces équations, on trouve

$$\begin{aligned} m' &= 0{,}53145 \\ m'' &= 0{,}54662 \\ m''' &= 0{,}57170 \\ m^{\text{iv}} &= 0{,}56927. \end{aligned}$$

Substituant ces valeurs dans les équations finales par rapport aux x, qui sont

$$\begin{aligned} o &= +\ 7{,}18050 + 30\,x' - 31{,}19887\,m' + 10{,}87053\,m'' + 10{,}36797\,m''' + 10{,}75557\,m^{\text{iv}} \\ o &= -\ 11{,}98478 + 30\,x'' + 10{,}39962\,m' - 32{,}61161\,m'' + 10{,}36797\,m''' + 10{,}75557\,m^{\text{iv}} \\ o &= +\ 2{,}28339 + 30\,x''' + 10{,}39962\,m' + 10{,}87053\,m'' - 31{,}10390\,m''' + 10{,}75557\,m^{\text{iv}} \\ o &= +\ 1{,}62088 + 30\,x^{\text{iv}} + 10{,}39962\,m' + 10{,}87053\,m'' + 10{,}36797\,m''' - 32{,}26672\,m^{\text{iv}} \end{aligned}$$

on trouve :

$$\begin{aligned} x' &= -\ 0^{\text{l}}{,}28640 \\ x'' &= +\ 0{,}37779 \\ x''' &= -\ 0{,}06977 \\ x^{\text{iv}} &= -\ 0{,}02162. \end{aligned}$$

Ces résultats s'accordent en général, à un millième de ligne près, avec ceux qui ont été déduits du premier procédé.

Quant aux valeurs de C et aux erreurs d'observation, on a :

$$C_1 = 2^{\text{l}}{,}35659 \left\{ \begin{array}{l} -\ 0^{\text{l}}{,}00370 \\ +\ 0{,}00023 \\ +\ 0{,}00079 \\ +\ 0{,}00267. \end{array} \right. \quad C_4 = 2^{\text{l}}{,}35406 \left\{ \begin{array}{l} -\ 0^{\text{l}}{,}00136 \\ -\ 0{,}00083 \\ -\ 0{,}00086 \\ +\ 0{,}00306. \end{array} \right. \quad C_7 = 2^{\text{l}}{,}35941 \left\{ \begin{array}{l} -\ 0^{\text{l}}{,}00266 \\ +\ 0{,}00073 \\ +\ 0{,}00082 \\ +\ 0{,}00110. \end{array} \right.$$

$$C_2 = 2{,}35053 \left\{ \begin{array}{l} -\ 0{,}00285 \\ -\ 0{,}00019 \\ -\ 0{,}00016 \\ +\ 0{,}00320. \end{array} \right. \quad C_5 = 2{,}35526 \left\{ \begin{array}{l} -\ 0{,}00061 \\ -\ 0{,}00118 \\ -\ 0{,}00139 \\ +\ 0{,}00317. \end{array} \right. \quad C_8 = 2{,}36071 \left\{ \begin{array}{l} +\ 0{,}00192 \\ +\ 0{,}00383 \\ -\ 0{,}00396 \\ -\ 0{,}00179. \end{array} \right.$$

$$C_3 = 2{,}35654 \left\{ \begin{array}{l} -\ 0{,}00066 \\ -\ 0{,}00068 \\ -\ 0{,}00040 \\ +\ 0{,}00173. \end{array} \right. \quad C_6 = 2{,}37406 \left\{ \begin{array}{l} -\ 0{,}00367 \\ -\ 0{,}00135 \\ +\ 0{,}01034 \\ -\ 0{,}00533. \end{array} \right. \quad C_9 = 2{,}36100 \left\{ \begin{array}{l} -\ 0{,}00125 \\ +\ 0{,}00233 \\ +\ 0{,}00259 \\ -\ 0{,}00368. \end{array} \right.$$

$$C_{10} = 2{,}36313 \begin{cases} +\ 0{,}00061 \\ +\ 0{,}00948 \\ -\ 0{,}00744 \\ -\ 0{,}00265. \end{cases} \quad C_{17} = 2{,}36245 \begin{cases} +\ 0{,}00262 \\ -\ 0{,}00093 \\ -\ 0{,}00426 \\ +\ 0{,}00258. \end{cases} \quad C_{24} = 2{,}34990 \begin{cases} -\ 0{,}00110 \\ +\ 0{,}00175 \\ -\ 0{,}00189 \\ +\ 0{,}00123. \end{cases}$$

$$C_{11} = 2{,}35777 \begin{cases} +\ 0{,}00054 \\ +\ 0{,}00272 \\ -\ 0{,}00339 \\ +\ 0{,}00011. \end{cases} \quad C_{18} = 2{,}36422 \begin{cases} -\ 0{,}00082 \\ +\ 0{,}00104 \\ +\ 0{,}00251 \\ -\ 0{,}00272. \end{cases} \quad C_{25} = 2{,}35588 \begin{cases} -\ 0{,}00095 \\ -\ 0{,}00093 \\ +\ 0{,}00075 \\ +\ 0{,}00114. \end{cases}$$

$$C_{12} = 2{,}35898 \begin{cases} +\ 0{,}00389 \\ -\ 0{,}00764 \\ +\ 0{,}00483 \\ -\ 0{,}00107. \end{cases} \quad C_{19} = 2{,}35005 \begin{cases} -\ 0{,}00233 \\ +\ 0{,}00045 \\ +\ 0{,}00056 \\ +\ 0{,}00133. \end{cases} \quad C_{26} = 2{,}35320 \begin{cases} +\ 0{,}00086 \\ +\ 0{,}00056 \\ -\ 0{,}00274 \\ +\ 0{,}00132. \end{cases}$$

$$C_{13} = 2{,}36232 \begin{cases} +\ 0{,}00702 \\ -\ 0{,}00410 \\ +\ 0{,}00122 \\ -\ 0{,}00415. \end{cases} \quad C_{20} = 2{,}34750 \begin{cases} -\ 0{,}00155 \\ +\ 0{,}00051 \\ -\ 0{,}00100 \\ +\ 0{,}00203. \end{cases} \quad C_{27} = 2{,}35760 \begin{cases} +\ 0{,}00107 \\ -\ 0{,}00085 \\ -\ 0{,}00135 \\ +\ 0{,}00113. \end{cases}$$

$$C_{14} = 2{,}36370 \begin{cases} +\ 0{,}00491 \\ -\ 0{,}00263 \\ -\ 0{,}00404 \\ +\ 0{,}00176. \end{cases} \quad C_{21} = 2{,}34809 \begin{cases} -\ 0{,}00129 \\ +\ 0{,}00101 \\ -\ 0{,}00087 \\ +\ 0{,}00114. \end{cases} \quad C_{28} = 2{,}35326 \begin{cases} +\ 0{,}00287 \\ +\ 0{,}00391 \\ -\ 0{,}00307 \\ -\ 0{,}00370. \end{cases}$$

$$C_{15} + 2{,}35825 \begin{cases} +\ 0{,}00345 \\ +\ 0{,}00087 \\ -\ 0{,}00164 \\ -\ 0{,}00268. \end{cases} \quad C_{22} = 2{,}35080 \begin{cases} -\ 0{,}00138 \\ +\ 0{,}00101 \\ +\ 0{,}00050 \\ -\ 0{,}00014. \end{cases} \quad C_{29} = 2{,}35693 \begin{cases} -\ 0{,}00031 \\ -\ 0{,}00055 \\ +\ 0{,}00132 \\ -\ 0{,}00047. \end{cases}$$

$$C_{16} = 2{,}36114 \begin{cases} +\ 0{,}00030 \\ -\ 0{,}00227 \\ +\ 0{,}00160 \\ +\ 0{,}00036. \end{cases} \quad C_{23} = 2{,}34952 \begin{cases} -\ 0{,}00127 \\ +\ 0{,}00175 \\ -\ 0{,}00044 \\ -\ 0{,}00006. \end{cases} \quad C_{30} = 2{,}36528 \begin{cases} -\ 0{,}00231 \\ -\ 0{,}00268 \\ +\ 0{,}00658 \\ -\ 0{,}00159. \end{cases}$$

La somme des carrés des 120 erreurs est

0,000 942 347;

et comme 37 inconnues ont été déterminées à l'aide de 120 équations, l'erreur moyenne d'une observation est

$$\sqrt{\frac{0{,}000\,942\,347}{120-37}} = \pm\ 0{,}003\,370.$$

Cette erreur moyenne peut provenir de sources diverses qu'il a paru intéressant d'étudier de près. Les causes qui la produisent résident, en tout ou en partie :

1° Dans la non-fixité des biseaux scellés sur les piliers;

2° Dans la dilatation variable des petits cylindres en acier;

3° Dans l'irrégularité de la dilatation des métaux qui constituent les thermomètres métalliques, particulièrement du zinc;

4° Dans la détérioration qu'ont subie les faces des prismes en cristal, par suite de l'usage qu'on en a fait;

5° Enfin dans l'imperfection des sens de l'observateur.

Analyser et séparer ces différentes causes d'erreur est un problème délicat : on ne doit pas espérer pouvoir le résoudre d'une manière rigoureuse; mais en combinant convenablement les observations, on peut mettre en évidence l'existence de quelques-unes de ces causes, et même apprécier, jusqu'à un certain point, leur importance relative.

1° L'immobilité des piliers sur lesquels sont fixés les biseaux a été constatée à l'aide de lunettes de repère, dirigées sur des mires tracées sur une des murailles de la salle d'observation. D'ailleurs, le déplacement de ces piliers, s'il s'était manifesté d'une manière appréciable, aurait suivi très-probablement une marche lente et graduelle, dont la loi aurait été très-simple. Or, en jetant les yeux sur les valeurs de C, on voit que cette quantité varie brusquement et irrégulièrement. On peut donc regarder les biseaux comme étant restés à la même distance l'un de l'autre pendant toute la durée des observations.

2° La variation de longueur des cylindres, d'un jour à l'autre, suivant la température de la salle, est mise hors de doute par la comparaison des valeurs de C, faite à la page 102. Mais cette variation est-elle assez sensible, dans l'espace d'une même journée, pour empêcher de réunir dans un seul groupe plusieurs séries successives, en y supposant C constant? C'est particulièrement en vue de répondre à cette question, que l'on a groupé les observations de deux manières, d'abord par six, ensuite par trois, et que l'on a calculé, dans chacun des deux cas, l'erreur moyenne d'une observation.

Si la variation des cylindres est insensible pendant les opérations d'un même groupe, les erreurs moyennes calculées dans les deux cas, seront entre elles comme $\sqrt{3} : \sqrt{6}$; si, au contraire, cette variation est appréciable, le second mode de groupement conduira à des résultats qui, relativement, seront plus exacts que dans le premier. En effet, dans celui-ci, on suppose C constant pendant la durée de six comparaisons, et dans celui-là, pendant la durée de trois seulement.

Lorsque l'on groupe les comparaisons par six, l'erreur moyenne d'une observation est, a-t-on vu, de $0^{l},002\,673$: la multipliant par $\sqrt{6} : \sqrt{3}$, on obtient $0^{l},003\,780$, pour celle qui devrait correspondre au cas où les comparaisons seraient groupées par trois. Or, ce dernier mode de groupement a donné en réalité $0^{l},003\,370$ pour erreur moyenne : la différence, $0^{l},000\,410$, représente ce que l'on a gagné en précision, en ne regardant C comme constant que pendant 3 séries au lieu de 6. L'avantage est bien faible, et les conséquences que l'on voudrait déduire de ce résultat seraient plus ou moins hasardées.

3° et 4° Les deux causes d'erreur énoncées sous les titres 3° et 4° se combinent entre elles sans pouvoir être séparées l'une de l'autre. En effet, dans les observations où les températures des Règles différaient considérablement, les intervalles ont été lus sur les prismes en des points très-distants : les anomalies que l'on observe alors, peuvent donc résulter aussi bien d'une fausse indication des prismes, que d'une fausse indication des thermomètres métalliques.

Une nouvelle vérification de la division des prismes, destinée à contrôler celle qui a été faite une première fois à Königsberg, en 1832, permettra d'apprécier la profondeur du sillon qui a pu être creusé dans leurs faces, par suite de leur introduction fréquente entre les biseaux d'acier des Règles. Il nous semble néanmoins que cette cause est tout à fait insuffisante pour expliquer certaines erreurs notables que l'on remarque dans les tableaux des pages 101 et 108, d'autant plus qu'elles se manifestent toutes pour des lectures faites vers les extrémités de l'échelle des prismes, parties qui n'ont guère été employées sur le terrain. Nous les attribuons à ce que les thermomètres métalliques n'ont pas une marche régulière : les variations de longueur des Règles de zinc paraissent ne pas avoir toujours été rigoureusement proportionnelles aux variations de température.

Si cette dernière hypothèse est juste, les comparaisons dans lesquelles les quatre Règles avaient la même température, présenteront un certain accord entre elles, tandis que le désaccord se manifestera pour les observations

faites à températures mixtes, dans lesquelles deux des Règles étaient à basse température, et les deux autres à température élevée. Or, c'est ce qui a lieu en effet : pour les 36 comparaisons à températures mixtes (de la 16e à la 51e série, page 107), la somme des carrés des erreurs est $0^{l},000\ 557\ 457$; tandis que pour les 36 comparaisons à températures moyenne et haute, cette même somme n'est que $0^{l},000\ 163\ 916$, c'est-à-dire trois fois et demie plus faible.

Les 15 premières séries, à basse température, ont donné pour la somme des carrés des erreurs $0^{l},000\ 070\ 358$, nombre qui, multiplié par le rapport de 36 à 15, devient $0^{l},000\ 168\ 859$, résultat analogue au précédent.

On ne tient pas compte, pour le moment, du groupe n° 6, observé à très-basse température, huit jours après les cinq premiers, et qui présente des anomalies particulières dont il sera question bientôt. — Remarquons en passant, que le fait qui vient d'être signalé, se représente dans les comparaisons de *Baeyer* (voy. *Die Küstenvermessung*, p. 13) : la somme des carrés des 16 erreurs à températures mixtes est cinq fois plus forte que la somme des carrés des 16 erreurs à température uniforme.

Le groupe n° 6, dont on vient de parler, offre, a-t-on dit, des écarts considérables. En effet, le C correspondant surpasse de beaucoup la valeur moyenne; et l'erreur d'observation, pour la Règle n° III, s'élève à $+\ 0^{l},010$. Il paraît évident que cette anomalie est due à ce que le thermomètre métallique de la Règle n° III est resté en arrière d'environ $0^{l},04$.

En effet, les cinq premiers groupes donnent en moyenne :

$$a = 1^{l},847;\quad b = 1^{l},910;\quad c = 1^{l},854;\quad d = 1^{l},895;$$

tandis que le sixième donne :

	$a = 1^{l},938$;	$b = 1^{l},998$;	$c = 1^{l},901$;	$d = 1^{l},978$.
Différences	$0^{l},091$	$0^{l},088$	$0^{l},047$	$0^{l},083$.

L'accord est très-satisfaisant pour les Règles nos I, II et IV; mais le c du 6e groupe est trop faible de $0^{l},04$, d'où cm''' trop faible d'environ $0^{l},02$. La somme des quatre erreurs commises sur les C d'une même série étant d'ailleurs toujours nulle, on voit que la valeur de C_4, correspondant à la Règle n° III, doit être *trop forte* de $0^{l},01$, tandis que la somme des trois autres C_4 sera *trop faible* de la même quantité : c'est ce qui a lieu effectivement.

Le groupe n° 10 présente une irrégularité analogue dans la marche des

thermomètres métalliques : en suivant la voie qui vient d'être tracée, on reconnait que l'indication *a* y est trop faible de $0^{l},024$, et qu'elle continue à être trop faible dans les groupes 11 et 12.

Enfin la discussion du groupe n° 30 montre d'une manière incontestable, que les variations des thermomètres métalliques ne sont pas rigoureusement proportionnelles aux variations de longueur des Règles. Pendant les trois observations de ce groupe, la température allait en diminuant, et les Règles se sont évidemment contractées d'une quantité supérieure à ce qu'indiquait la marche de leurs thermomètres. En effet, si l'on *calcule,* en fonction des indications thermométriques, les contractions que devaient subir les quatre Règles, dans le passage du 29e au 30e groupe, on trouve :

Règle n°	I.	II.	III.	IV.
	$0^{l},019$	$0^{l},018$	$0^{l},020$	$0^{l},025$;

tandis que les contractions *observées* ont été respectivement :

$0^{l},025$	$0^{l},023$	$0^{l},034$	$0^{l},033$.

Comme il n'est pas probable que les Règles de fer se soient refroidies plus vite que les Règles de zinc, il faut en conclure que ces dernières ont été gênées dans leur contraction.

De même, si l'on compare le groupe 26 au groupe 27, on trouve que la température était croissante, et que les Règles, qui d'après les indications des thermomètres auraient dû se dilater de

$0^{l},007$	$0^{l},007$	$0^{l},005$	$0^{l},005$,

se sont dilatées en réalité de

$0^{l},016$	$0^{l},018$	$0^{l},007$	$0^{l},008$.

Ici encore les thermomètres restent en arrière. Il semble donc prouvé que les Règles de zinc ne sont pas tout à fait libres dans leur travail de contraction et de dilatation : certaines résistances, dues peut-être à l'inertie de leur masse, à la compressibilité de leur matière, ou à la constitution moléculaire du métal, gênent leurs mouvements, surtout lorsque les variations de température s'opèrent avec lenteur.

5° L'erreur moyenne résultant des causes purement accidentelles, tient en partie à la nature du procédé d'observation, et en partie à l'imperfection des sens de l'observateur. Pour l'évaluer rigoureusement, il faudrait pouvoir débarrasser les comparaisons de l'influence des anomalies thermométriques. On a essayé de faire cette opération délicate, dans la discussion des comparaisons de la double Toise avec la Règle n° I, et l'on a obtenu, pour l'erreur moyenne d'une semblable comparaison, $0^{l},001\ 061$ à $0^{l},001\ 125$ (voyez plus loin, page 121). Pour le moment, contentons-nous de remarquer que, pour 36 comparaisons faites à température uniforme, qui sont le moins exposées aux anomalies thermométriques (sans y être complétement soustraites), la somme des carrés des erreurs a été de $0^{l},000\ 163\ 916$: pour les 90 comparaisons, elle serait, en proportion, de $0^{l},000\ 409\ 789$. Divisant cette dernière somme par 83, et extrayant la racine carrée du quotient, on obtient pour l'erreur moyenne $0^{l},0022$: on est donc en droit de dire que, dans la comparaison des quatre Règles entre elles, l'erreur moyenne accidentelle d'une observation ne surpasse pas deux millièmes de ligne.

IV. *Considérations sur la comparaison de la double Toise avec la Règle n° I.*

En faisant concourir au calcul de la longueur de la règle moyenne *toutes* les observations qui ont été recueillies en vue de déterminer cette longueur, on a voulu se conformer à un principe généralement admis : « ne rejeter aucune » observation, à moins qu'elle ne soit entachée d'une erreur accidentelle » évidente et grossière, ou signalée comme douteuse dans le registre d'in- » scription des résultats. »

Cependant, lorsqu'un procédé d'expérimentation est affecté d'une cause d'erreur *régulière,* celle-ci ne se manifeste d'ordinaire que dans la discussion des résultats calculés : or, si cette discussion établit d'une manière incontestable l'existence d'une pareille cause, les observations qui en sont affectées sont impropres à conduire à la vérité, et doivent être rejetées par tout calculateur consciencieux.

Un simple coup d'œil jeté sur la série des valeurs de L (page 104) fait apercevoir l'existence d'une anomalie très-remarquable :

Dans la première journée, les 10 premières valeurs sont toutes, sans exception, *inférieures* à la moyenne générale; les 10 dernières lui sont toutes *supérieures.*

Dans la seconde journée, sur les 10 premières valeurs, 9 sont *inférieures* à la moyenne générale *.

Il existe donc incontestablement une erreur régulière, qui tend à donner à la Règle une longueur trop faible dans la première moitié de la série, ou trop forte dans la seconde. Mais où réside la source de cette erreur? Appartient-elle à la double Toise ou à la Règle? Faut-il la chercher dans la température du bain, comparée à celle de la double Toise, ou dans les indications du thermomètre métallique, comparées à la température réelle de la Règle? Tient-elle enfin au mode de juxtaposition des deux Toises, ou à la variation de distance des biseaux fixes, ou à la dilatation des cylindres d'acier?

Ces divers points ont été examinés et analysés avec un soin minutieux : en procédant par voie d'exclusion, on a été conduit à attribuer l'anomalie au thermomètre métallique de la Règle, qui a donné des indications trop faibles pendant les premières observations de chaque journée. Essayons de justifier cette opinion.

Si les biseaux fixes variaient dans leur écartement, ou les cylindres dans leur longueur (ce qui revient au même quant aux résultats numériques obtenus), l'influence serait sensiblement *égale* sur la moyenne des deux observations de la Toise et sur l'observation de la Règle qui sépare les deux précédentes. Or, la formule

$$L = 2T - x' + am' + (n - n')$$

est indépendante de C, et n'est fonction que de la *différence* $(n - n')$. En admettant leur existence, les deux causes que nous venons de citer disparaîtraient donc de la comparaison de la Règle avec la double Toise.

Du reste, si elles existent réellement, on s'en apercevra en calculant la série des valeurs de C, déduites de l'équation générale

$$L + x' - am' = L + C - n',$$

d'où

$$C = x' + n' - am', \quad \ldots\ldots \quad (\alpha)$$

qui se rapporte à la Règle seule; et en calculant ensuite les valeurs parallèles de $L + C$, tirées de l'équation générale

$$L + C = 2T + n, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

* La même particularité se remarque dans les nombres obtenus par *Baeyer* en 1846 (voyez *Die Küstenvermessung*, page 17) : sur 10 observations, les quatre premières donnent des résultats *inférieurs* à la moyenne.

L'étalonnage fait en 1834 par *Bessel* et *Baeyer* ne permet pas d'établir une comparaison analogue, parce que les 12 observations qui le composent ont été faites en 3 jours. Il est probable cependant qu'il

qui se rapporte à la double Toise seule. Si l'anomalie signalée provient uniquement de la Règle, les différentes valeurs des C, fournies par l'équation (α), varieront suivant une loi déterminée, tandis que les valeurs de (L + C), fournies par l'équation (β), s'accorderont entre elles. Le contraire aura lieu si l'anomalie a sa source dans la double Toise : les valeurs des C seront les mêmes (ou du moins varieront irrégulièrement, dans les limites des erreurs accidentelles), tandis que celles de L + C suivront une variation régulière. Enfin, si l'anomalie a sa cause ailleurs que dans la Règle ou dans la Toise, les valeurs de C et de L + C devront être soumises simultanément aux mêmes désaccords.

En effectuant les calculs relatifs à la première journée, on trouve :

Pour la Règle.		*Pour la double Toise.*	
	—		—
C_1 =	2'3537	L + C_1 =	1731'4591
C_2 =	2,3505	L + C_2 =	4592
C_3 =	2,3483	L + C_3 =	4581
C_4 =	2,3484	L + C_4 =	4582
C_5 =	2,3467	L + C_5 =	4566
C_6 =	2,3460	L + C_6 =	4564
C_7 =	2,3471	L + C_7 =	4562
C_8 =	2,3462	L + C_8 =	4550
C_9 =	2,3437	L + C_9 =	4546
C_{10} =	2,3456	L + C_{10} =	4561
C_{11} =	2,3424	L + C_{11} =	4568
C_{12} =	2,3450	L + C_{12} =	4567
C_{13} =	2,3428	L + C_{13} =	4573
C_{14} =	2,3424	L + C_{14} =	4570
C_{15} =	2,3432	L + C_{15} =	4553
C_{16} =	2,3423	L + C_{16} =	4558
C_{17} =	2,3419	L + C_{17} =	4554
C_{18} =	2,3424	L + C_{18} =	4570
C_{19} =	2,3425	L + C_{19} =	4561
C_{20} =	2,3425	L + C_{20} =	4575
C_1 — C_{20} =	0,0112.	C_1 — C_{20} =	0,002.

Les observations de la double Toise présentent entre elles beaucoup de

aurait offert une singularité aussi forte, si les séries d'une même journée avaient été plus nombreuses; car dans les 4 observations faites le 16 juin (voyez *Gradmessung*, page 25), les indications (α) du thermomètre métallique de la Règle ont *diminué* régulièrement, tandis que les intervalles correspondants (n') ont *augmenté* d'une manière graduelle. Le thermomètre métallique marque donc une *élévation* de température, et les intervalles accusent une *contraction* de la Règle.

concordance : les premières donnent C supérieur à sa valeur moyenne, de 2 à 3 millièmes de ligne ; mais à partir de la 5me, on peut dire que les résultats obtenus suivent la loi des erreurs accidentelles.

Il n'en est pas de même des observations de la Règle : les valeurs de C offrent, dans la première moitié de la série, une marche décroissante bien caractérisée, et leur allure ne devient régulière que dans la seconde moitié. Par rapport à la valeur moyenne de cette seconde moitié, la première observation donne C trop grand de $0^{l},01$ au moins.

On peut conclure de là que la dilatation des cylindres, due à leur maniement, ne s'est manifestée que pendant les premières observations de la journée, et n'a pas dépassé 2 à 3 millièmes de ligne (c'est la variation *commune* à la Règle et à la double Toise); tandis que la marche du thermomètre métallique de la Règle entre dans l'anomalie pour 7 à 8 millièmes de ligne.

Pour vérifier cet aperçu, comparons la différence des deux intervalles extrêmes n_1 et n_{20} (voyez le tableau de la page 87), à la variation de température $0^{\circ},94$ qu'a subie la double Toise : on a

$$n_1 - n_{20} = 0^{l},01875;$$

d'où

$$0,94\,x = 0^{l},01875,$$

en désignant par x la dilatation de la double Toise pour 1° d'augmentation de température. On en déduit

$$x = 0^{l},0200;$$

tandis que l'étalonnage direct a donné $x = 0,0182.$

Il y a donc une erreur de. . . . . $0^{l},0018.$

Mais si, comme nous le croyons, le maniement des cylindres les a dilatés de 2 millièmes de ligne entre la première et la dernière observation, l'intervalle n_1 a été *trop grand* de cette quantité : effectuant la correction, on a

$$0,94\,x = 0^{l},0168;$$
$$x = 0,0179:$$

valeur qui ne diffère de la véritable que de $0^{l},0003$. Les observations sont ainsi parfaitement représentées ; la juxtaposition des Toises n'a donc rien laissé à désirer, et leur température réelle n'a pas différé de celle du bain, pendant toute la durée des comparaisons.

La même vérification se présente pour la Règle, mais d'une manière beaucoup plus frappante : les intervalles extrêmes donnent

$$n_1' - n_{20}' = 0^{l},0345$$
$$a_1 - a_{20} = 0,0440;$$

d'où

$$0^{l},0440\ m' = 0^{l},0345;$$
$$m' = 0,78,$$

coefficient thermométrique évidemment exagéré, puisque sa valeur, déduite des observations spéciales qui ont été faites, n'est que de 0,53.

Au contraire, si nous effectuons les corrections nécessitées par notre manière d'expliquer l'anomalie, les résultats deviennent d'une concordance remarquable. Diminuons en effet n'_1 de $0^{l},002$, pour avoir égard à la dilatation des cylindres; puis, pour corriger le retard du thermomètre métallique, augmentons $a_1 m'$ de $0^{l},008$, ce qui revient à augmenter a_1 de $\frac{0^{l},008}{0,53} = 0^{l},0151$: nous aurons alors

$$a_1 = 1^{l},5186;$$
$$a_1 - a_{20} = 0,0591;$$
$$n'_1 - n'_{20} = 0,0325;$$

d'où

$$0^{l},0591\ m' = 0^{l},0325$$
$$m' = 0,55,$$

coefficient de dilatation qui s'accorde très-bien avec la valeur véritable, 0,53.

Ainsi qu'on l'a déjà fait remarquer, la série des valeurs de C montre qu'à partir de la 11e, les observations deviennent régulières; et en effet, on a

$$a_{11} - a_{20} = 0^{l},0200;$$
$$n'_{11} - n'_{20} = 0,0105;$$

d'où

$$0,0200\ m' = 0,0105:$$

on en déduit $m' = 0,53$, valeur qui est précisément celle du coefficient thermométrique de la Règle.

Quant à la valeur du coefficient de dilatation de la Toise, fournie par cette seconde moitié de la série, elle est

$$x = \frac{0^{l},00700}{0,42} = 0^{l},017,$$

exacte à un millième de ligne près, bien qu'elle ne résulte que d'une variation de température de $0^{\circ},42$ *.

* Pendant la seconde journée, la 11e observation, comparée à la 20e, donne $x = \frac{0^{l},00450}{0,235} = 0^{l},0192$; et cette valeur, si rapprochée de la véritable, résulte cependant d'une variation de température qui ne surpasse pas $0^{\circ},235$. En comparant la 1re observation à la 20e, on trouverait $x = 0^{l},0246$. L'influence de la dilatation des cylindres, à partir de la 1re observation, est encore mise ici parfaitement en évidence.

De ce qui précède, on est en droit de conclure :

1° Que les observations de la double Toise ont toute la précision désirable;

2° Que, dans les premiers moments de leur emploi, les cylindres se sont dilatés chacun de un millième de ligne environ, particularité qui n'a, du reste, aucune influence sur la comparaison de la Règle avec la Toise;

3° Que la première indication du thermomètre métallique de la Règle est trop faible de $0^{l},015$, erreur qui va en diminuant progressivement, mais qui persiste néanmoins pendant la moitié des observations, et ne paraît complétement éteinte qu'à partir de la onzième. Le thermomètre métallique, fer et zinc, constitue donc, à notre avis, un système défectueux, la dilatation du zinc ne suivant pas une loi régulière et proportionnelle à celle du fer;

4° Enfin, que la seconde moitié de la série des 20 observations peut être regardée comme entièrement dégagée d'erreurs régulières, et qu'on doit faire usage d'elle seule, à l'exclusion de la première moitié.

La seconde journée offre des résultats analogues en tous points aux précédents, mais moins fortement prononcés : les calculs relatifs à cette journée donnent :

Pour la Règle.		*Pour la double Toise.*	
C_1 =	$2^{l},3549$	L + C_1 =	$1731^{l},4642$
C_2 =	3536	L + C_2 =	4624
C_3 =	3529	L + C_3 =	4621
C_4 =	3524	L + C_4 =	4634
C_5 =	3517	L + C_5 =	4621
C_6 =	3520	L + C_6 =	4605
C_7 =	3515	L + C_7 =	4606
C_8 =	3515	L + C_8 =	4606
C_9 =	3510	L + C_9 =	4615
C_{10} =	3515	L + C_{10} =	4614
C_{11} =	3495	L + C_{11} =	4609
C_{12} =	3495	L + C_{12} =	4613
C_{13} =	3490	L + C_{13} =	4612
C_{14} =	3496	L + C_{14} =	4601
C_{15} =	3506	L + C_{15} =	4609
C_{16} =	3491	L + C_{16} =	4604
C_{17} =	3483	L + C_{17} =	4607
C_{18} =	3501	L + C_{18} =	4605
C_{19} =	3487	L + C_{19} =	4607
C_{20} =	3517.	L + C_{20} =	4607.

Les valeurs de L + C, déduites de l'observation de la Toise, deviennent régulières à partir de la sixième comparaison; celles de C, déduites de l'observation de la Règle, ne deviennent régulières qu'à partir de la seconde moitié de la série. Ainsi, les cylindres se sont encore dilatés pendant les premiers moments de leur emploi, et le thermomètre métallique n'a donné des indications exactes qu'à partir de la onzième observation. Il est donc prudent de n'employer également que la seconde moitié des observations faites dans cette journée *.

Adoptant cette manière de procéder, on trouve :

1re journée	L =	1729,11376
2e » la Toise n° 11 reposant sur les galets par sa face opposée	L =	1729,11116
Moyenne.	L =	1729,11246.

Si l'on calcule maintenant les erreurs individuelles de chaque comparaison, on obtient :

1re JOURNÉE.	2e JOURNÉE.
+ 0,00069	+ 0,00025
— 0,00208	+ 0,00064
+ 0,00078	+ 0,00106
+ 0,00088	— 0,00060
— 0,00172	— 0,00081
— 0,00023	+ 0,00015
— 0,00021	+ 0,00124
+ 0,00078	— 0,00076
— 0,00015	+ 0,00092
+ 0,00123.	— 0,00213.

La première journée présente maintenant 5 erreurs positives et 5 négatives; la seconde, 6 erreurs positives et 4 négatives : les signes sont d'ailleurs distribués irrégulièrement. Les observations sont donc affranchies de toute cause régulière d'erreur.

La somme des carrés des écarts est, pour la première journée,

$$0,000\ 011\ 384\ 5,$$

et, pour la seconde,

$$0,000\ 010\ 132\ 8.$$

* La dernière observation (n° 40 du tableau) présente une petite irrégularité, due évidemment à la lecture des intervalles (n') entre la Règle et les biseaux : cette lecture est trop forte de 2 millièmes de ligne au moins.

L'erreur moyenne d'une observation est, dans le premier cas,

$$\pm\ 0^{l},001\ 125,$$

et, dans le second,

$$\pm\ 0^{l},001\ 061.$$

C'est la moitié environ de ce que l'on trouve, lorsque l'on conserve les 20 observations de chaque journée.

L'erreur moyenne du résultat des 10 comparaisons d'un jour est :

$$\frac{0^{l},001\ 125}{\sqrt{10}} = \pm\ 0^{l},000\ 356$$

ou bien,

$$\frac{0^{l},001\ 061}{\sqrt{10}} = \pm\ 0^{l},000\ 335.$$

On a trouvé précédemment $\pm\ 0^{l},000\ 47$ pour l'erreur moyenne du résultat des 20 comparaisons d'un même jour : sous le rapport de la précision, on gagne donc un tiers à employer seulement les 10 dernières observations de chaque série, au lieu de faire usage des 20 dont elle se compose.

V. *Calcul des coefficients de dilatation des règles de fer et de zinc.*

Les thermomètres à mercure qui sont fixés dans l'intérieur des caisses des Règles, avaient été détachés de leurs montures parce qu'ils n'y tenaient pas assez solidement. Le général *Baeyer* les fit replacer de manière qu'à $+16^{\circ}$, ils indiquassent tous quatre exactement cette température. Les expériences auxquelles on les soumit ensuite, ont fourni les corrections suivantes, à la température de la glace fondante : pour le n° 1, $-0^{\circ},3$; le n° 2, $-0^{\circ},3$; le n° 3, $+\ 0^{\circ},1$; le n° 4, $0^{\circ},0$. On aurait pu, à l'aide de ces données, corriger les lectures thermométriques; mais le général *Baeyer* a préféré faire usage de la table de corrections calculée avec beaucoup de soin par *Bessel*, et qui est consignée dans le *Gradmessung* (page 28), tout en ayant égard au déplacement des tubes sur l'échelle. Il retrancha donc de toutes les corrections données par la table, celle que cette même table indique pour $+\ 16^{\circ}$. On a adopté ici la même marche pour les indications thermométriques des six dernières lignes du tableau suivant.

Les données des quatre premières lignes proviennent de la comparaison

des Règles entre elles; celles des six dernières sont tirées des mesurages des bases de Lommel et d'Ostende.

Lectures correspondantes des thermomètres à mercure et métalliques.

R	a	R	b	R	c	R	d
4°,150	1',93925	4°,150	1',99900	4°,150	1',90200	4°,150	1',97950
4,300	1,93800	4,300	1,99800	4,300	1,90150	4,300	1,97850
4,350	1,93675	4,350	1,99700	4,350	1,90050	4,350	1,97750
7,425	1,79762	7,425	1,87162	6,950	1,81750	7,425	1,85237
14,550	1,54115	16,125	1,55825	14,050	1,53561	16,042	1,51108
15,850	1,44850	19,000	1,41765	15,353	1,46458	18,609	1,40120
18,550	1,33855	19,646	1,39510	17,807	1,35280	19,797	1,35785
19,177	1,32175	21,425	1,33335	19,028	1,31275	21,035	1,33088
22,219	1,19094	22,631	1,28669	20,732	1,26215	22,613	1,27071
23,900	1,12455	23,767	1,21985	21,228	1,24681	23,576	1,21965

Soient O l'indication du thermomètre métallique à zéro degré Réaumur, et p sa variation pour un degré de la même échelle : alors les indications des thermomètres métalliques a,b,c,d, peuvent être représentées par les équations ci-dessous, dans lesquelles R exprime, en degrés Réaumur, les températures correspondantes aux indications a,b,c,d.

$$\left.\begin{array}{l} a = 0' - Rp' \\ b = 0'' - Rp'' \\ c = 0''' - Rp''' \\ d = 0^{\text{IV}} - Rp^{\text{IV}}. \end{array}\right\} \ldots\ldots (1).$$

Chacune de ces égalités renferme deux inconnues; et comme il y en a 10 pour chaque lettre a,b,c,d, elles doivent être traitées par la méthode des moindres carrés.

Les quatre groupes d'équations peuvent être représentés par ceux-ci :

$$\begin{array}{llll}
a' = 0' - R_1' p' & b' = 0'' - R_2' p'' & c' = 0''' - R_3' p''' & d' = 0^{\text{IV}} - R_4' p^{\text{IV}} \\
a'' = 0' - R_1'' p' & b'' = 0'' - R_2'' p'' & c'' = 0''' - R_3'' p''' & d'' = 0^{\text{IV}} - R_4'' p^{\text{IV}} \\
a''' = 0' - R_1''' p' & b''' = 0'' - R_2''' p'' & c''' = 0''' - R_3''' p''' & d''' = 0^{\text{IV}} - R_4''' p^{\text{IV}} \\
\vdots & & & \\
a^{10} = 0' - R_1^{10} p'. & b^{10} = 0'' - R_2^{10} p''. & c^{10} = 0''' - R_3^{10} p'''. & d^{10} = 0^{\text{IV}} - R_4^{10} p^{\text{IV}}.
\end{array}$$

Traité d'après la méthode des moindres carrés, chaque groupe donne deux équations de la forme :

$$1 \begin{cases} o = -[a] + 10 \times 0' - [R_1]\,p' \\ o = +[aR_1] - [R_1]\,0' + [R_1^2]\,p'. \end{cases} \quad 2 \begin{cases} o = -[b] + 10 \times 0'' - [R_2]\,p'' \\ o = +[bR_2] - [R_2]\,0'' + [R_2^2]\,p''. \end{cases}$$

$$3 \begin{cases} o = -[c] + 10 \times 0''' - [R_3]\,p''' \\ o = +[cR_3] - [R_3]\,0''' + [R_3^2]\,p'''. \end{cases} \quad 4 \begin{cases} o = -[d] + 10 \times 0^{\text{iv}} - [R_4]\,p^{\text{iv}} \\ o = +[dR_4] - [R_4]\,0^{\text{iv}} + [R_4^2]\,p^{\text{iv}}. \end{cases}$$

Substituant aux lettres leurs valeurs numériques, on a les systèmes suivants :

$$1 \begin{cases} 15{,}57686 = +10.\ 0' - 134{,}471\ p' \\ -187{,}048309 = -134{,}471\ 0' + 2349{,}444415\ p'. \end{cases}$$

$$2 \begin{cases} 16{,}05451 = +10.\ 0'' - 142{,}819\ p'' \\ -205{,}257735 = -142{,}819\ 0'' + 2652{,}809641\ p''. \end{cases}$$

$$3 \begin{cases} 15{,}69620 = +10.\ 0''' - 127{,}948\ p''' \\ -182{,}732161 = -127{,}948\ 0''' + 2101{,}652450\ p'''. \end{cases}$$

$$4 \begin{cases} 15{,}87924 = +10.\ 0^{\text{iv}} - 141{,}897\ p^{\text{iv}} \\ -201{,}759573 = -141{,}897\ 0^{\text{iv}} + 2614{,}976749\ p^{\text{iv}}. \end{cases}$$

La résolution de ces huit équations donne :

$$\begin{aligned} 0' &= 2{,}114\,633, & p' &= 0{,}041\,418, \\ 0'' &= 2{,}162\,750, & p'' &= 0{,}039\,194, \\ 0''' &= 2{,}068\,174, & p''' &= 0{,}038\,954, \\ 0^{\text{iv}} &= 2{,}143\,763, & p^{\text{iv}} &= 0{,}039\,172. \end{aligned}$$

Par suite, les équations (1) deviennent :

$$\begin{aligned} a &= 2{,}114\,633 - 0{,}041\,418\ R \\ b &= 2{,}162\,750 - 0{,}039\,194\ R \\ c &= 2{,}068\,174 - 0{,}038\,954\ R \\ d &= 2{,}143\,763 - 0{,}039\,172\ R. \end{aligned}$$

Il faut qu'en substituant à R, dans ces égalités, les températures observées, on retrouve les indications des thermomètres métalliques correspondantes à

ces températures. Les différences ne peuvent provenir que d'erreurs d'observation, ou d'irrégularités dans la marche des thermomètres métalliques, ou enfin de ce que les Règles n'avaient pas la température indiquée par les thermomètres à mercure. Voici le tableau des différences entre les indications des thermomètres métalliques observées et calculées :

a	*b*	*c*	*d*
+ 0°,0035	+ 0°,0011	+ 0°,0045	+ 0°,0017
− 0,0015	− 0,0038	− 0,0008	− 0,0052
− 0,0023	− 0,0047	− 0,0018	− 0,0041
+ 0,0095	+ 0,0001	− 0,0200	+ 0,0005
− 0,0291	− 0,0075	− 0,0147	+ 0,0043
+ 0,0099	− 0,0036	+ 0,0055	+ 0,0136
+ 0,0068	− 0,0003	+ 0,0217	+ 0,0108
− 0,0014	− 0,0103	+ 0,0102	− 0,0111
+ 0,0134	− 0,0109	− 0,0016	− 0,0127
+ 0,0002	+ 0,0114	− 0,0056	+ 0,0006

Ces différences, à l'exception d'un petit nombre, dépassent de beaucoup la limite des erreurs de lecture dues aux prismes.

Désignant par e', e'', e''', e^{IV}, la dilatation du fer; par z', z'', z''', z^{IV}, la dilatation du zinc; par E′, E″, E‴, E^{IV}, les longueurs des règles de fer, et par Z′, Z″, Z‴, Z^{IV}, les longueurs des règles de zinc, à la température de la glace fondante, on aura pour les longueurs de ces règles à une température quelconque R,

Règle n° I. . . . . $E'(1 + e'R)$; $Z'(1 + z'R)$.
II . . . . $E''(1 + e''R)$; $Z''(1 + z''R)$.
III. . . . $E'''(1 + e'''R)$; $Z'''(1 + z'''R)$.
IV. . . . $E^{\text{IV}}(1 + e^{\text{IV}}R)$; $Z^{\text{IV}}(1 + z^{\text{IV}}R)$.

La variation de longueur de la règle de fer, correspondante à la température R, sera donc, pour l'une des Règles, par exemple le n° I, exprimée par $E'e'R$, et sa variation pour 1°, par $E'e'$. La variation de longueur de la règle, correspondante à l'indication a du thermomètre métallique, est représentée par am' : pour une autre indication $a + x$ de ce thermomètre, on aura donc la variation $(a + x)m'$. Retranchant de cette expression la précédente, on trouve qu'à une variation x du thermomètre métallique correspond une

variation de longueur exprimée par xm'. Si l'on pose $x=p'$ (variation du thermomètre métallique pour 1° Réaumur), la variation correspondante de la règle sera $p'm'$; et comme on a vu plus haut que cette même variation est exprimée par $E'e'$, on aura :

$$E'e' = p'm';$$

d'où

$$e' = \frac{p'm'}{E'} \ldots\ldots\ldots (2)$$

D'autre part, $Z'z'$ représente la variation de longueur de la règle de zinc, pour 1° Réaumur, et $Z'e'$ la variation de longueur d'une règle de fer dont la longueur serait Z'. Or, les thermomètres métalliques indiquent les différences de dilatation du fer et du zinc de deux règles de même longueur : on aura donc aussi, pour 1° Réaumur,

$$p' = Z'(z' - e'),$$

donc

$$z' - e' = \frac{p'}{Z'} \ldots\ldots\ldots (3)$$

Chaque Règle donne lieu à une expression semblable.

A la température de la glace fondante, les longueurs des Règles sont :

$$\begin{aligned}
E' &= 1728^{l},82684 - 2^{l},114633\ m' = 1727^{l},70344\\
E'' &= 1729,49087 - 2,162750\ m'' = 1728,30942\\
E''' &= 1729,04088 - 2,068174\ m''' = 1727,86291\\
E^{iv} &= 1729,09125 - 2,143763\ m^{iv} = 1727,87183.
\end{aligned}$$

Pour obtenir les longueurs des règles de zinc, il faut retrancher de ces derniers nombres, la longueur des biseaux d'acier ($26^{l},0$), et les indications des thermomètres métalliques, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
Z' &= 1727^{l},70344 - 26^{l},0 - 2^{l},11463 = 1699^{l},58881\\
Z'' &= 1728,30942 - 26,0 - 2,16275 = 1700,14667\\
Z''' &= 1727,86291 - 26,0 - 2,06817 = 1699,79474\\
Z^{iv} &= 1727,87183 - 26,0 - 2,14376 = 1699,72807.
\end{aligned}$$

Mettant ces valeurs de E et de Z dans les formules (2) et (3), on trouve

définitivement les dilatations pour 1° Réaumur, c'est-à-dire les coefficients de dilatation cherchés. Ces coefficients sont :

$$1854 \begin{cases} e' = 0{,}000\,012\,735, & z' - e' = 0{,}000\,024\,369, & z' = 0{,}000\,037\,104 \\ e'' = 0{,}000\,012\,330, & z'' - e'' = 0{,}000\,023\,053, & z'' = 0{,}000\,035\,383 \\ e''' = 0{,}000\,012\,841, & z''' - e''' = 0{,}000\,022\,917, & z''' = 0{,}000\,035\,758 \\ e^{\text{IV}} = 0{,}000\,012\,895. & z^{\text{IV}} - e^{\text{IV}} = 0{,}000\,023\,046. & z^{\text{IV}} = 0{,}000\,035\,941. \end{cases}$$

En 1834 et 1846, les coefficients déterminés par *Bessel* et *Baeyer* étaient :

$$1846 \begin{cases} e' = 0{,}000\,013\,921, & z' - e' = 0{,}000\,026\,688, & z' = 0{,}000\,040\,609 \\ e'' = 0{,}000\,013\,735, & z'' - e'' = 0{,}000\,025\,345, & z'' = 0{,}000\,039\,080 \\ e''' = 0{,}000\,014\,585, & z''' - e''' = 0{,}000\,026\,332, & z''' = 0{,}000\,040\,917 \\ e^{\text{IV}} = 0{,}000\,014\,405. & z^{\text{IV}} - e^{\text{IV}} = 0{,}000\,025\,926. & z^{\text{IV}} = 0{,}000\,040\,331. \end{cases}$$

$$1834 \begin{cases} e' = 0{,}000\,014\,367, & z' - e' = 0{,}000\,027\,029, & z' = 0{,}000\,041\,497 \\ e'' = 0{,}000\,014\,818, & z'' - e'' = 0{,}000\,026\,911, & z'' = 0{,}000\,041\,729 \\ e''' = 0{,}000\,015\,015, & z''' - e''' = 0{,}000\,026\,509, & z''' = 0{,}000\,041\,524 \\ e^{\text{IV}} = 0{,}000\,015\,202. & z^{\text{IV}} - e^{\text{IV}} = 0{,}000\,026\,597. & z^{\text{IV}} = 0{,}00\,0041\,799. \end{cases}$$

On voit, à l'inspection de ces nombres, que les coefficients de dilatation du zinc et du fer des Règles, ont été en diminuant depuis 1834. Ce fait remarquable, qui avait été pressenti par M. le général *Baeyer*, semble acquérir, par le dernier étalonnage fait à Bruxelles, le caractère de la certitude; et l'on doit admettre que, *dans les circonstances où les Règles géodésiques prussiennes se sont trouvées jusqu'à ce jour, les coefficients de dilatation des deux métaux dont elles sont formées diminuent incessamment.*

Le phénomène remarquable d'une diminution lente et progressive dans la valeur du coefficient de dilatation de certains métaux, ne se trouvant indiqué dans aucun traité de physique, le président de la Commission a cru devoir le signaler à l'attention d'un des physiciens les plus distingués de notre époque, M. le professeur *Plateau*, et lui demander en même temps quelle explication il lui assignait. Voici un extrait de la réponse que ce savant lui a adressée.

..... « La dilatation étant un phénomène moléculaire, tout ce qui modi-
» fiera la structure intime d'un corps pourra influer sur le coefficient de dila-
» tation de celui-ci; et réciproquement, un changement dans le coefficient
» de dilatation indique nécessairement un changement dans la structure

» intime. Cela posé, il y a trois ordres de faits connus, auxquels on peut
» rattacher un changement lent dans la structure intime de certains métaux.

» En premier lieu, les physiciens savent que le coefficient de dilatation
» d'un même corps est sensiblement constant entre 0° et 100°; mais qu'il y
» a une exception pour l'acier trempé, dont le coefficient de dilatation va
» en diminuant de la première de ces deux températures à la seconde. Cette
» particularité provient de ce que le coefficient de dilatation de l'acier non
» trempé est plus petit que celui de l'acier trempé; et de ce que l'acier
» trempé, en passant de 0° à 100°, éprouve un certain recuit qui diminue
» sa trempe. Or, l'acier n'est pas le seul corps susceptible de trempe : le
» verre, par exemple, se trempe aussi par un refroidissement brusque; et
» l'on pourrait admettre que la plupart des métaux qui ont été travaillés
» à chaud, et que l'on a laissés refroidir sans précautions, possèdent aussi
» un léger degré de trempe. S'il en était ainsi, les Règles, exposées aux
» variations de la température atmosphérique, auraient éprouvé un petit
» recuit chaque fois que cette température s'est élevée, et ces petites actions
» successives auraient peu à peu amoindri leurs coefficients de dilatation.

» En deuxième lieu, certains corps tendent à prendre spontanément, et
» avec le temps, une structure cristalline. Le zinc, il est vrai, la possède
» déjà à un certain degré, immédiatement après sa fabrication; et le fer battu
» présente des indices d'une semblable structure : mais il se peut que cette
» même structure, qui n'a pu se former d'une manière parfaite à cause du
» refroidissement rapide des métaux en question, tende ensuite à se com-
» pléter d'elle-même à la longue. Ce qui viendrait à l'appui de cette manière
» de voir, c'est la modification bien connue qu'éprouvent les essieux des
» locomotives après quelque temps d'usage : ils deviennent cassants, et à
» structure éminemment cristalline; et l'on peut admettre que les ébranle-
» ments auxquels il ont été soumis sur les chemins de fer, n'ont fait qu'aider
» la tendance naturelle du métal à adopter cette structure.

» En troisième lieu, on trouve dans la nature des corps de même composi-
» tion chimique, et présentant des formes cristallines appartenant à deux sys-
» tèmes incompatibles; et il en est de même de certaines substances obtenues
» artificiellement. Dans ce dernier cas, les deux genres de cristaux incompa-
» tibles se forment toujours dans des circonstances différentes : l'un, par
» exemple, s'obtient à chaud, et l'autre à froid. Or, il arrive alors que, si
» l'on soumet à une élévation de température prolongée les cristaux obtenus
» à froid, ou si on laisse froids pendant longtemps les cristaux qui avaient
» été obtenus à chaud, leur structure intérieure se modifie : ils se trans-

» forment en une agglomération de petits cristaux, lesquels appartiennent
» au système qui correspond à cette nouvelle température. Le soufre en
» offre un exemple remarquable : les cristaux de cette substance obtenus
» par voie de fusion, et conséquemment à chaud, sont transparents; mais
» si on les abandonne à eux-mêmes à la température ordinaire, ils de-
» viennent, au bout de quelques jours, opaques et friables, et sont alors
» composés d'une foule de petits cristaux appartenant à un autre système.
» Le sulfate de nickel présente le même phénomène dans des circonstances
» inverses : obtenu en cristaux à froid, par voie de dissolution, puis exposé
» à la chaleur du soleil dans un vase fermé, il se transforme également en
» un agrégat de petits cristaux d'une forme différente. Maintenant ne pour-
» rait-on pas supposer que le fer et le zinc, dans lesquels la structure
» cristalline s'est développée à chaud, lorsqu'ils commençaient à se solidi-
» fier complétement, prendraient une structure cristalline appartenant à un
» autre système, si celle-ci pouvait se produire à froid; et qu'ainsi, dans les
» barres exposées pendant longtemps à la température ordinaire, la struc-
» ture passe lentement du premier système au second? — Cette manière de
» voir me paraît, du reste, moins probable que les deux précédentes. »

CONCLUSION.

La Commission se réunit une dernière fois, le 23 novembre 1854, pour clore ses travaux. Dans cette séance, après avoir discuté les calculs et les considérations qui font l'objet des quatre premiers articles du paragraphe précédent, et qui lui furent présentés par un de ses membres, M. le capitaine du génie *Liagre*, elle adopta à l'unanimité, pour résultats définitifs de ses opérations, les constantes et les formules suivantes :

$$x' = -\ 0^{l},2856, \quad m' = 0,53125$$
$$x'' = +\ 0,3784, \quad m'' = 0,54627$$
$$x''' = -\ 0,0716, \quad m''' = 0,56957$$
$$x^{\text{IV}} = -\ 0,0212. \quad m^{\text{IV}} = 0,56882.$$
$$\text{L} = 1729^{l},1125.$$

Erreur moyenne d'une des 20 comparaisons de la Règle avec la double Toise :

$$\varepsilon = \pm\ 0^{l},001\ 064.$$

$$\begin{array}{llll}
\text{Règle n° I.} \ldots\ldots & l' = 1728^{l},8268 & -\ 0,53125\ a \\
\text{II} \ldots\ldots & l'' = 1729,4909 & -\ 0,54627\ b \\
\text{III.} \ldots\ldots & l''' = 1729,0409 & -\ 0,56957\ c \\
\text{IV.} \ldots\ldots & l^{\text{IV}} = 1729,0913 & -\ 0,56882\ d.
\end{array}$$

Erreur moyenne d'une des 60 équations (p. 96) relatives à la comparaison des Règles entre elles :

$$\varepsilon' = \pm\ 0^{l},002\ 673.$$

$$\begin{array}{lll}
e' = 0,000\ 012\ 735, & z' - e' = 0,000\ 024\ 369, & z' = 0,000\ 037\ 104 \\
e'' = 0,000\ 012\ 330, & z'' - e'' = 0,000\ 023\ 053, & z'' = 0,000\ 035\ 383 \\
e''' = 0,000\ 012\ 841, & z''' - e''' = 0,000\ 022\ 917, & z''' = 0,000\ 035\ 758 \\
e^{\text{IV}} = 0,000\ 012\ 895. & z^{\text{IV}} - e^{\text{IV}} = 0,000\ 023\ 046. & z^{\text{IV}} = 0,000\ 035\ 941.
\end{array}$$

Bruxelles, le 23 novembre 1854.

A. NERENBURGER.
J.-S. STAS.
MEYERS.
DIEDENHOVEN, JACQ.
J. LIAGRE.
D. DEKEUWER.
E. SACRÉ.

NOTE.

—

Le tableau des températures du bain, tel qu'il est donné à la page 84, a été calculé d'après les constantes ci-après, qu'on avait adoptées *provisoirement :*

Désignation DES THERMOMÈTRES.	Le zéro correspond à la division.	Valeur de 1°.	Valeur d'une division.
Étalon à 290 divisions	$58^{div.}$,435	$2^{div.}$,171	0°,4607
Thermomètre A	31 ,715	11 ,30	0,0885
— B	42 ,06	9 ,13	0,110
— C	17 ,46	4 ,98	0,200

Une nouvelle discussion des expériences rapportées dans le § IV, a modifié quelque peu ces nombres, en donnant les valeurs *définitives* suivantes :

Désignation DES THERMOMÈTRES.	Le zéro correspond à la division.	Valeur de 1°.	Valeur d'une division.
Étalon à 290 divisions	$58^{div.}$,435	$2^{div.}$,171	0°,4607
Thermomètre A	31 ,717	11 ,314	0,0884
— B	42 ,06	9 ,128	0,1095
— C	17 ,46	4 ,983	0,2006

Les différences entre les nombres respectifs consignés dans ces deux tableaux, sont :

Désignation DES THERMOMÈTRES.	Pour les divisions correspondantes à zéro.	Pour les valeurs de 1°.	Pour les valeurs d'une division.
Étalon à 290 divisions	Diff. = $0^{div.}$,000	Diff. = $0^{div.}$,000	Diff. = $0^{div.}$, 000
Thermomètre A	» + 0 ,002	» + 0 ,014	» — 0 ,0001
— B	» 0 ,000	» — 0 ,002	» — 0 ,0005
— C	» 0 ,000	» + 0 ,003	» + 0 ,0006

Ces différences, on le voit, sont tout à fait insignifiantes.

En faisant usage des *valeurs définitives*, pour calculer les températures indiquées par les thermomètres A, B, C, pendant la durée de la première série, on trouve :

A	15°,407	15°,451
B	15,367	15,411
C	15,414	15,474
Moyennes	15,396	15,445.

Ces mêmes températures, calculées par les *constantes provisoires*, sont, d'après le premier des deux tableaux qui précèdent :

A	15°,424	15°,468
B	15,437	15,481
C	15,360	15,428
Moyennes	15,410	15,459.

La moyenne de ces deux dernières moyennes est	15°,4345
» » des deux premières » »	15,4205
La différence est donc	0,0140,

ou moins de $\frac{1}{70}$ de degré.

Or, on a vu, par la relation des procédés employés par M. le professeur *Stas*, dans la construction des thermomètres, que les lectures faites aux thermomètres A, B, C ne peuvent être considérées comme donnant la température qu'à $\frac{1}{50}$ de degré près. Dès lors, la Commission a trouvé complétement superflu de refaire le calcul des températures d'après les *constantes définitives*, puisque la substitution de ces constantes à celles dont on avait fait usage précédemment, ne devait apporter aux résultats obtenus que des modifications négligeables, à raison de l'approximation donnée par les thermomètres.

La Commission a donc maintenu les températures, telles que leur calcul par les *constantes provisoires* les avait établies.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

INTRODUCTION I
Résultats des calculs de la base de *Lommel* VIII
Idem id. d'*Ostende*. XI

§ Ier. — *Exposition succincte des procédés d'étalonnage suivis par* BESSEL *et* BAEYER 3
De la comparaison des Règles entre elles 6
Comparaison d'une Règle avec la Toise 11

§ II. — *Description du comparateur de la Commission* 16
Des biseaux fixes . . . . . *Ib.*
Des cylindres à collets carrés 17
De l'ajustement des biseaux fixes sur les pilastres. 22
Du chariot 24
Des pierres d'appui 25
Du tablier . . . . . *Ib.*
Du mode de support des Règles sur le tablier 27
De l'appareil pour chauffer les Règles sur le tablier 28
De la caisse en tôle pour les Toises 30
Du mécanisme pour communiquer le mouvement au chariot 33
Du local, et de l'établissement des fondations . . . . . *Ib.*

§ III. — *Des Toises étalons* 36
Construction de quelques copies de la Toise de *Bessel* 37

§ IV. — *Étalonnage des Règles* 53
De la comparaison des Règles entre elles 54
Des thermomètres pour constater la température des Toises étalons. 64
Comparaison de la Règle n° I avec la double Toise 80

§ V. — *Calcul des longueurs relatives des Règles. — Détermination de leurs coefficients thermométriques et de leurs longueurs absolues. — Calcul des coefficients de dilatation des règles de fer et de zinc.* 95
Calcul des longueurs relatives des Règles, et détermination de leurs coefficients thermométriques . . . *Ib.*
Détermination de la longueur absolue des quatre Règles 103
Second calcul pour la comparaison des Règles entre elles 106
Considérations sur la comparaison de la double Toise avec la Règle n° I 114
Calcul des coefficients de dilatation des règles de fer et de zinc 121

Conclusion 129