## 1) INTRODUCTION

La logique est l'outillage nécessaire à la construction des mathématiques;elle permet de faire des raisonnements.La logique est la science qui enseigne les règles et les conditions nécessaires pour raisonner juste.

Chez les Grecs,ce fut Zénon d'Elée qui traita le premier des problèmes de logique;les sophistes en firent une méthode de discussion.Platon l'intègra dans la philosophie, Aristote la traita en science indépendante.

La méthode généralement utilisée par les Grecs en logique fut un raisonnement appelé syllogisme.

Exemple: " Tous les hommes sont mortels
Socrate est un homme
Donc Socrate est mortel "

Un tel raisonnement est appelé déductif.Nous partons d'une vérité générale:" Tous les hommes sont mortels " pour en déduire un cas particulier: " Socrate est mortel ".

Tout au long du Moyen-Age,les savants se limitaient aux travaux d'Aristote;ce ne fut qu'à partir du 17$^{e}$ siècle que la logique connût une innovation: Francis Bacon introduisa un nouvel instrument pour connaître la vérité: l'induction.La méthode inductive consiste à partir d'un ou de quelques faits connus pour en déduire une vérité générale.

Exemple: Nous savons que $2\cdot 3=3\cdot 2$ ; $4\cdot 5=5\cdot 4$ .
Nous ne pouvons vérifier cette propriété (commutativité) pour tous les entiers naturels;cependant nous admettons cette ~~pr~~propriété sur tout l'ensemble $\mathbb{N}$ en la vérifiant seulement pour quelques cas.
Le détective policier qui part de quelques indices pour reconstruire un crime,poursuit une méthode inductive.

En mathématiques,la méthode déductive est le plus souvent employée.Ce fut Descartes qui l'y introduisa de manière systématique.

## 2) PROPOSITION

L'une des caractéristiques de la logique employée en mathématiques est qu'elle se sert de phrases qui ne peuvent être que vraies ou bien fausses. Une telle phrase est appelée proposition ( ou assertion ).

Ainsi: " Il y a 28 élèves dans notre classe " est une proposition car cette phrase ne peut être que vraie ou bien fausse.

" Dans notre classe, tout élève est intelligent " n'est pas une proposition, car nous ne pouvons dire avec certitude si un certain élève est intelligent ou ne l'est pas: il croit peut-être que tel est le cas tandis que son voisin n'en est pas tellement sûr.

Les ensembles sont définis souvent à l'aide de propositions; on dit alors qu'ils sont écrits en compréhension.

$A=\{x/x$ est un nombre naturel inférieur ou égal à $5\}$ est un ensemble écrit en compréhension.

" x est un nombre naturel inférieur ou égal à 5 " est une proposition qui est vraie pour tout entier naturel égal à 0,1,2,3,4 ou 5, et fausse pour tous les autres.

Donc $A=\{0,1,2,3,4,5\}$ ; A est écrit maintenant en extension.

Au lieu d'écrire : " x est un nombre naturel inférieur ou égal à 5 ", nous pouvons abbrévier cette proposition par: $x \in A$.

Si x est un nombre naturel, nous avons deux possibilités: ou bien $x \in A$ ou bien $x \notin A$.

Ceci est indiqué à l'aide d'une table d'appartenance:

| A |
|---|
| $\in$ |
| $\notin$ |

Souvent, le symbole " $\in$ " dans cette table est remplacé par le chiffre 1, le symbole " $\notin$ " par le chiffre 0.

La table a donc l'aspect suivant:

| A |
|---|
| 1 |
| 0 |

Cette notation qui utilise 0 et 1, est appelée notation binaire.

Si nous ne voulons pas utiliser des ensembles, nous écrivons simplement p(x) au lieu de " x est un nombre naturel inférieur ou égal à 5 ". A l'aide de cette notation, nous pouvons écrire: $A = \{x / p(x) \text{ est vraie}\} = \{x/p(x)\}$.

p(x) signifie donc:

" x est un nombre naturel inférieur ou égal à 5 "

ou $x \in A$.

Si $x \in A$, " x est un nombre naturel inférieur ou égal à 5 " est une proposition vraie; p est vrai pour x.

Si $x \notin A$, " x est un nombre naturel inférieur ou égal à 5 " est une proposition fausse; p est faux pour x.

Nous notons ces deux cas respectivement par V (vrai) et F (faux), ou encore par 1 (vrai) et 0 (faux). Analoguement aux tables d'appartenance pour les ensembles, nous pouvons dresser pour les propositions des tables de vérité:

| p |
|---|
| V |
| F |

| p |
|---|
| 1 |
| 0 |

## 3) CONTRADICTION, TAUTOLOGIE

Définition:

Une proposition p qui est toujours fausse, est appelée contradiction.

Exemple: " x est un nombre naturel strictement inférieur à 0 " est une contradiction, car aucun entier naturel ne peut être strictement inférieur à 0.

L'ensemble correspondant $A = \{x \in N / x \text{ strictement inférieur à } 0\}$ ne contient aucun élément: $A = \emptyset$

Définition:

Une proposition qui est toujours vraie, est appelée tautologie.

Soit p une tautologie; $A=\{x \in E/p(x)\}$ l'ensemble correspondant. p est vrai pour tout x de E, donc A=E.

Remarque:

p est une tautologie signifie: p est toujours vrai, ou simplement: p.

Démontrer p veut donc dire: démontrer que p est une tautologie.

4) <u>EQUIVALENCE DE DEUX PROPOSITIONS</u>

Soit E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. A=B signifie: A et B ont exactement les mêmes éléments.

Soit $A=\{x/p(x)\}$ , soit $B=\{x/q(x)\}$

Supposons A=B;

soit $x \in A=B$; p(x) est vrai et q(x) est vrai

soit $x \notin A=B$; p(x) est faux et q(x) est faux.

Il est impossible que p soit vrai et q soit faux; il est également impossible que p soit faux et q soit vrai. Nous disons alors que p et q sont des propositions équivalentes. Nous notons: $p \Leftrightarrow q$

Définition:

$p \Leftrightarrow q$ ( " p équivalent à q " ) est la proposition qui est vraie lorsque p et q sont tous les deux vrais et lorsque p et q sont tous les deux faux.

Table de vérité:

| p | q | $p \Leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

Exemple: Soient $E=\{x/x$ est élève de la classe 715$\}$

$A = \{x \in E / x$ est un garçon$\}$

$B = \{x \in E / x$ n'est pas une fille$\}$

p(x) signifie: x est un garçon.

q(x) signifie: x n'est pas une fille.

Un élève x ne peut être que garçon ou fille.

Supposons que x soit un garçon: p et q sont tous les deux vrais pour x.

Supposons que x soit une fille: p et q sont tous les deux faux pour x.

Donc p est équivalent à q : $p \Leftrightarrow q$

Cet exemple nous montre que "p est équivalent à q" veut dire la même chose que "q est équivalent à p".

Donc: $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$ (commutativité de l'équivalence)

Démontrons cette équivalence à l'aide d'une table de vérité:

| p | q | $p \Leftrightarrow q$ | q | p | $q \Leftrightarrow p$ | $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$ est une tautologie,donc toujours vrai.

Remarques:

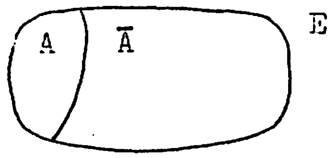
* Il existe quatre possibilités pour la vérité du couple (p,q): (V,V);(V,F);(F,V);(F,F),qui peuvent être notées: (1,1);(1,0);(0,1);(0,0) .

* Deux propositions sont équivalentes si leurs tables de vérité sont les mêmes.

## 5) NEGATION D'UNE PROPOSITION

Soit E un ensemble, $A \subset E$, p la proposition définissant A: $A = \{x \in E / p(x)\}$

Considérons le complémentaire de A dans E: $C_E A = \bar{A}$




$x \in \bar{A}$ signifie: $x \notin A$ c'est-à-dire p(x) est faux.
La proposition: " p(x) est faux " est notée: $\bar{p}(x)$.
$\bar{A} = \{x \in E / \bar{p}(x) \text{ est vrai}\} = \{x \in E / \bar{p}(x)\}$
$\bar{p}$ est vrai lorsque p est faux;
$\bar{p}$ est faux lorsque p est vrai.
$\bar{p}$ est la négation de p.

Définition:

La négation $\bar{p}$ d'une proposition p est la proposition qui est vraie lorsque p est faux, et qui est fausse lorsque p est vrai.

Table de vérité:

| p | $\bar{p}$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

Exemple:

Soit $E = \{0,1,2,3,4,5\}$, $A = \{x \in E / x \text{ est pair}\} = \{0,2,4\}$
$\bar{A} = \{x \in E / x \text{ n'est pas pair}\} = \{1,3,5\}$
p(x) signifie: x est pair;
$\bar{p}(x)$ signifie: x n'est pas pair ( x est impair)

Considérons: $\bar{\bar{A}} = C_E(C_E A) = C_E\{x \in E / x \notin A\}$
$= C_E\{x \in E / x \in \bar{A}\}$
$= \{x \in E / x \notin \bar{A}\}$

Or: $x \notin \bar{A}$ signifie: $x \in A$
$\bar{\bar{A}} = \{x \in E / x \in A\} = A$, donc: $\bar{\bar{A}} = A$

$\bar{\bar{A}} = C_E\{x \in E/\bar{p}(x)\} = \{x \in E/\bar{\bar{p}}(x)\}$
$= A = \{x \in E/p(x)\}$

$\bar{\bar{p}}$ est vrai lorsque $\bar{p}$ est faux,c'est-à-dire p est vrai;
$\bar{\bar{p}}$ est faux lorsque $\bar{p}$ est vrai,c'est-à-dire p est **faux.**
$\bar{\bar{p}}$ est équivalent à p.

Propriété:

Soit p une proposition.Alors on a:

$$\bar{\bar{p}} \Leftrightarrow p$$

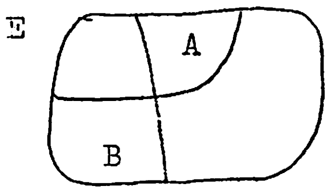
Démontrons cette propriété à l'aide d'une table de vérité:

| $p$ | $\bar{p}$ | $\bar{\bar{p}}$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |

La première et la troisième colonnes montrent que $\bar{\bar{p}} \Leftrightarrow p$ .

## 6) CONJONCTION ET DISJONCTION

Soit E un ensemble,A et B deux sous-ensembles de E.




Soit p la proposition définissant A,q la proposition définissant B.

$A=\{x \in E/p(x)\}$ ; $B=\{x \in E/q(x)\}$

Alors: $A \cap B = \{x \in E/x \in A \ \underline{\text{et}}\ x \in B\}$
$= \{x \in E/p(x) \text{ et } q(x)\}$

Définition:

On appelle conjonction de deux propositions p,q la proposition "p et q" notée $p \wedge q$,qui est vraie lorsque p et q sont tous les deux vrais et qui est fausse dans tous les autres cas.

De manière analogue: $A \cup B = \{x \in E/x \in A \ \underline{\text{ou}}\ x \in B\}$
$= \{x \in E/p(x) \text{ ou } q(x)\}$

"$p(x)$ ou $q(x)$" est vrai lorsque:

* $p(x)$ est vrai et $q(x)$ est vrai
* $p(x)$ est vrai, mais $q(x)$ est faux
* $p(x)$ est faux tandis que $q(x)$ est vrai.

Nous pouvons simplifier ces conditions en disant que: "$p(x)$ ou $q(x)$" est faux dans le seul cas où les propositions $p(x)$ et $q(x)$ sont toutes les deux fausses.

Définition:

On appelle disjonction de deux propositions $p,q$ la proposition "$p$ ou $q$" notée $p \vee q$, qui est fausse lorsque $p$ et $q$ sont tous les deux faux, et qui est vraie dans tous les autres cas.

Regardons les tables d'appartenance pour $A \cap B$ et $A \cup B$:

| A | B | $A \cap B$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

| A | B | $A \cup B$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

Les tables de vérité pour $p \wedge q$ et $p \vee q$ présentent un aspect analogue:

| p | q | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

| p | q | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

Les propriétés de l'intersection et de la réunion des ensembles se transcrivent pour la conjonction et la disjonction des propositions:

* L'intersection des ensembles est commutative: $A \cap B = B \cap A$
$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

Vérifions ce résultat par une table de vérité:

| p | q | p∧q | q | p | q∧p |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Troisième et dernière colonnes: $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
La conjonction des propositions est commutative.

* L'intersection des ensembles est associative:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$

Pour la vérité de trois propositions, il y a 8 cas possibles: 4 cas pour q et r lorsque p est vrai,
4 cas pour q et r lorsque p est faux.

Table de vérité:

| p | q | r | p∧q | r | (p∧q)∧r | p | q∧r | p∧(q∧r) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Donc: $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
La conjonction des propositions est associative.

* La réunion des ensembles est commutative: $A \cup B = B \cup A$
$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

Table de vérité:

| p | q | $p \vee q$ | q | p | $q \vee p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Donc: $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

La disjonction des propositions est commutative.

* La réunion des ensembles est associative:

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

Table de vérité:

| p | q | r | $p \vee q$ | r | $(p \vee q) \vee r$ | p | $q \vee r$ | $p \vee (q \vee r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Donc: $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

La disjonction des propositions est associative.

* L'intersection est distributive par rapport à la réunion: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Table de vérité:

| p | q | r | $q\vee r$ | $p\wedge(q\vee r)$ | $p\wedge q$ | $p\wedge r$ | $(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Donc: $p\wedge(q\vee r) \Leftrightarrow (p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

La conjonction est distributive par rapport à la disjonction.

* La réunion est distributive par rapport à l'intersection: $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$

$$p\vee(q\wedge r) \Leftrightarrow (p\vee q)\wedge(p\vee r)$$

| p | q | r | $q\wedge r$ | $p\vee(q\wedge r)$ | $p\vee q$ | $p\vee r$ | $(p\vee q)\wedge(p\vee r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Donc: $p\vee(q\wedge r) \Leftrightarrow (p\vee q)\wedge(p\vee r)$

La disjonction est distributive par rapport à la conjonction.

* Lois de Morgan pour les ensembles:

$$C_E(A\cap B) = C_E A \cup C_E B \quad ; \quad \overline{A\cap B} = \bar{A}\cup\bar{B}$$

$$C_E(A\cup B) = C_E A \cap C_E B \quad ; \quad \overline{A\cup B} = \bar{A}\cap\bar{B}$$

Pour les propositions, nous obtenons: $\overline{p\wedge q} \Leftrightarrow \bar{p}\vee\bar{q}$

$$\overline{p\vee q} \Leftrightarrow \bar{p}\wedge\bar{q}$$

Tables de vérité:

| $p$ | $q$ | $p\wedge q$ | $\overline{p\wedge q}$ | $\bar{p}$ | $\bar{q}$ | $\bar{p}\vee\bar{q}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

| $p$ | $q$ | $p\vee q$ | $\overline{p\vee q}$ | $\bar{p}$ | $\bar{q}$ | $\bar{p}\wedge\bar{q}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Donc: $\overline{p\wedge q} \Leftrightarrow \bar{p}\vee\bar{q}$

$\overline{p\vee q} \Leftrightarrow \bar{p}\wedge\bar{q}$

Ce sont les lois de Morgan pour les propositions.

Remarque:

Le "ou" utilisé en logique est non exclusif,c'est-à-dire la proposition "p ou q" n'est pas seulement vraie lorsque une seule des deux propositions p et q est vraie,mais également lorsque ces deux propositions sont vraies à la fois.

On utilise parfois "ou bien" dans le sens exclusif, c'est-à-dire la proposition "p ou bien q",notée $p\Delta q$, est vraie lorsque une seule des propositions p et q est vraie,mais "p ou bien q" est faux lorsque p et q sont tous les deux vrais ou lorsque p et q sont tous les deux faux.

Table de vérité:

| $p$ | $q$ | $p\Delta q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

Exercice:

Démontrer à l'aide d'une table de vérité que $p \vee \bar{p}$ est une tautologie.

En déduire, sans table de vérité, que $p \wedge \bar{p}$ est une contradiction.

Solution:

| $p$ | $\bar{p}$ | $p \vee \bar{p}$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |

$p \vee \bar{p}$ est donc toujours vrai; cette proposition est par conséquent une tautologie. La négation de cette proposition est toujours fausse, c'est-à-dire $\overline{p \vee \bar{p}}$ est une contradiction.

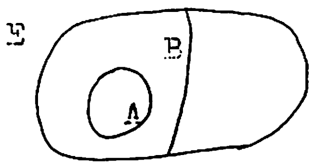
Appliquons les lois de Morgan à $\overline{p \vee \bar{p}}$ :

$\overline{p \vee \bar{p}} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{\bar{p}} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge p \Leftrightarrow p \wedge \bar{p}$

Donc $p \wedge \bar{p}$ est une contradiction.

## 7) IMPLICATION

Soit $E$ un ensemble, $A$ et $B$ deux sous-ensembles de $E$ avec $A \subset B$.




$A \subset B$ signifie: Tout élément de $A$ est élément de $B$;

c'est-à-dire: Si $x \in A$, alors $x \in B$.

Soient $p$ et $q$ les propositions définissant $A$ et $B$.

$A = \{x \in E / p(x)\}$ ; $B = \{x \in E / q(x)\}$

$A \subset B$ signifie: Si $p(x)$ est vrai, alors $q(x)$ est vrai;

Si $p$, alors $q$.

Cette proposition: "Si $p$, alors $q$" est notée: $p \Rightarrow q$.

$p(x)$ vrai et $q(x)$ vrai signifie: $x \in A$ et $x \in B$, ce qui est bien possible; $p \Rightarrow q$ est vrai dans ce cas.

$p(x)$ vrai et $q(x)$ faux signifie: $x \in A$ mais $x \notin B$, ce qui n'est pas possible; $p \Rightarrow q$ est faux.

$p(x)$ faux et $q(x)$ vrai signifie: $x \notin A$ et $x \in B$, possible, donc $p \Rightarrow q$ est vrai.

$p(x)$ faux et $q(x)$ faux signifie: $x \notin A$ et $x \notin B$, possible, donc $p \Rightarrow q$ est vrai.

Définition:

La proposition "Si p, alors q" notée $p \Rightarrow q$, est la proposition qui est fausse lorsque p est vrai et q est faux, et qui est vraie dans tous les autres cas.

$p \Rightarrow q$ est lu: p implique q<br>p entraîne q

$p \Rightarrow q$ est une implication.

Table de vérité:

| p | q | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

Exemples:

" Si 2=3, alors je suis Napoléon " est une proposition vraie, car "2=3" est faux.

" Si 2=3, alors je suis un homme " est toujours vrai car "2=3" est faux.

" Si 2=2, alors je suis Napoléon " est une proposition fausse, car "2=2" est vrai tandis que "je suis Napoléon" est certainement faux.

" Si 2=2, alors je suis un homme " est vrai, car "2=2" et "je suis un homme" sont toutes les deux des propositions vraies.

Nous remarquons donc:

Si p est une proposition fausse, alors $p \Rightarrow q$ est toujours vrai, quelle que soit la proposition q.

Si p est une proposition vraie, alors il faut que q soit une proposition vraie pour que $p \Rightarrow q$ soit vrai.

Supposons maintenant que la proposition $p \Rightarrow q$ soit vraie.

Alors: pour que p soit vrai, il faut que q soit vrai. on dit que q est la condition nécessaire de p.

D'autre part: Si p est vrai, alors q est nécessairement vrai; c'est-à-dire: il suffit que p soit vrai pour que q soit vrai. On dit que p est la condition suffisante de q.

Remarque: " Si $p \Rightarrow q$ est vrai et p est vrai, alors q est vrai " peut être énoncé de la façon suivante: $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ est une tautologie. Naturellement, cette proposition peut être démontrée à l'aide d'une table de vérité:

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ | $(p \Rightarrow q) \wedge p$ | $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Supposons encore que $p \Rightarrow q$ soit vrai.

" Si p est vrai, alors q est vrai " peut être exprimé par: "q est vrai, si p est vrai" ou encore par: "q si p".

" Pour que p soit vrai, il faut que q soit vrai " peut également s'exprimer autrement:

"p est vrai, seulement si q est vrai " ou:

" p seulement si q ".

Cette proposition signifie également:

" Si q est faux, alors p est faux "

" Si $\bar{q}$ est vrai, alors $\bar{p}$ est vrai "

" Si $\bar{q}$, alors $\bar{p}$ "

c'est-à-dire: $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$

$\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ est appelé (proposition) contraposée de $p \Rightarrow q$.

Montrons à l'aide d'une table de vérité que $p \Rightarrow q$ et la contraposée $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ sont des propositions équivalentes:

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ | $\bar{q}$ | $\bar{p}$ | $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Exemple:

Nous savons que tout chat (sain) possède quatre pattes. D'où:

x est un chat (sain) $\Rightarrow$ x possède quatre pattes

La proposition contraposée s'énonce:

x ne possède pas quatre pattes $\Rightarrow$ x n'est pas un chat sain.

Propriété:

Les deux propositions: " $p \Leftrightarrow q$ " et " $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ " sont équivalentes.

Démontrons ce résultat à l'aide d'une table de vérité:

| $p$ | $q$ | $p \Leftrightarrow q$ | $p \Rightarrow q$ | $q \Rightarrow p$ | $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

$p \Leftrightarrow q$ signifie donc:

$p \Rightarrow q$ et $q \Rightarrow p$

" Si p, alors q " et " Si q, alors p "

" p seulement si q " et " p si q "

" p si et seulement si q "

Remarque:

Soit A l'ensemble défini par la proposition p,
soit B l'ensemble défini par la proposition q.

$p \Leftrightarrow q$ signifie: $p \Rightarrow q$ et $q \Rightarrow p$

$A \subset B$ et $B \subset A$, donc $A=B$.

Exercice:

Montrer que les propositions " $p \Rightarrow q$ " et " $\bar{p} \vee q$ " sont équivalentes (à l'aide d'une table de vérité).

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ | $\bar{p}$ | $\bar{p} \vee q$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Exercice:

Sachant que $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge \bar{q})$ est une proposition vraie, qu'est-ce que vous pouvez dire pour p et q ?

Table de vérité:

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ | $\bar{q}$ | $p \wedge \bar{q}$ | $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge \bar{q})$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

Une seule possibilité: p est vrai et q est faux.

Exercice:

Sachant que $(q \vee \bar{q}) \Rightarrow p$ est une proposition vraie, qu'est-ce que vous pouvez dire pour p et q ?

Table de vérité:

| $p$ | $q$ | $q \vee \bar{q}$ | $(q \vee \bar{q}) \Rightarrow p$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |

Nous pouvons dire que p est certainement vrai; mais nous ne pouvons affirmer rien pour q.

8) Quantificateurs

Condidérons les propositions: "Un élève de notre classe aura .. ans le .......... prochain" et: "Un élève de notre classe est élève du secondaire technique".

Manifestement, l'expression "Un élève" a deux sens:

* Dans la première proposition, on veut dire: "Il y a un élève qui ..."; certainement tous les élèves de notre classe n'auront pas .. ans le .......... prochain.
* Dans la seconde proposition par contre, on entend certainement: "Tous les élèves de notre classe ...".

Les deux propositions doivent être exprimées respectivement: "Il y a (Il existe) un élève de notre classe qui aura .. ans le .......... prochain" et "Tout élève de notre classe est élève du secondaire technique".

Au lieu de "Il y a ... " ou "Il existe (au moins) un ..." on éorit le symbole: $\exists$ (quantificateur existentiel).

L'expression "Pour tout ..." est notée par le symbole: $\forall$ (quantificateur universel).

"Il existe un et un seul ..." est noté par: $\exists!$ (quantificateur existentiel unitaire).

Nos deux propositions se notent, si E désigne l'ensemble des élèves de notre classe:

* $(\exists\, x \in E)$ x aura .. ans le ......... prochain
* $(\forall\, x \in E)$ x est élève du secondaire technique

Ces propositions sont appelées propositions quantifiées.

Exercices:

1) Désignons par v(x) la proposition: "x possède un vélo" et par a(x) la proposition: "x possède une voiture automobile". Est-ce que les propositions suivantes sont vraies ou fausses?

| | |
|---|---|
| $(\exists\, x \in E)\ v(x)$ | $(\exists\, x \in E)\ v(x)$ ou $a(x)$ |
| $(\exists!\, x \in E)\ v(x)$ | $(\exists!\, x \in E)\ v(x)$ ou $a(x)$ |
| $(\forall\, x \in E)\ v(x)$ | $(\forall\, x \in E)\ v(x)$ ou $a(x)$ |
| $(\exists\, x \in E)\ \bar{v}(x)$ | $(\exists\, x \in E)\ \bar{v}(x)$ ou $\bar{a}(x)$ |
| $(\exists\, x \in E)\ a(x)$ | $(\exists\, x \in E)\ v(x)$ et $a(x)$ |
| $(\exists!\, x \in E)\ a(x)$ | $(\exists!\, x \in E)\ v(x)$ et $a(x)$ |
| $(\forall\, x \in E)\ a(x)$ | $(\forall\, x \in E)\ v(x)$ et $a(x)$ |
| $(\exists!\, x \in E)\ \bar{a}(x)$ | $(\exists\, x \in E)\ \bar{v}(x)$ et $a(x)$ |

2) Indiquez si les propositions suivantes sont vraies ou bien fausses:

$(\exists\, x \in \mathbb{N})$ x divise 5

$(\exists'\, x \in \mathbb{N})$ x divise 3

$(\exists!\, x \in \mathbb{N})$ x divise 1

$(\exists!\, x \in \mathbb{Z})$ x divise 1

$(\forall\, x \in \mathbb{N})$ x divise 1

$(\forall\, x \in \mathbb{N})$ 1 divise x

$(\forall\, x \in \mathbb{N})$ $0 : x = 0$

$(\forall\, x \in \mathbb{N})$ 2x est pair

$(\exists\, x \in \mathbb{N}^*)$ x  10 et 5 divise x

$(\forall\, x \in \mathbb{N})$ 2 divise x ou x est impair

3) L'addition des entiers naturels est commutative. Cette propriété s'écrit par des propositions quantifiées de la manière suivante:

$$(\forall\, x \in \mathbb{N})\ (\forall y \in \mathbb{N})\ x+y = y+x$$

Ecrivez de la même façon que l'addition des entiers naturels est associative.

## Ordre des quantificateurs

Il est facile de voir qu'on peut échanger l'ordre de deux quantificateurs identiques.

Exemples:

$(\forall\, x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})\ x+y = y+x$ exprime la même propriété que: $(\forall y \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{N})\ x+y = y+x$ .

$(\exists\, x \in \mathbb{N})(\exists\, y \in \mathbb{N})\ x+y=0$ est équivalent à: $(\exists\, y \in \mathbb{N})(\exists\, x \in \mathbb{N})\ x+y=0$ .

Par contre, l'ordre de deux quantificateurs différents ne peut être échangé, comme le montre l'exemple suivant:

$(\forall\, x \in \mathbb{N}^*)(\exists\, y \in \mathbb{N})\ x-y = 1$ est une proposition vraie. ($y=x-1$, mais le choix de y dépend de x.)

$(\exists\, y \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{N}^*)\ x-y = 1$ est une proposition fausse. (on ne peut choisir y indépendemment de x, c.à.d. avant de connaître x.)

## Négation de propositions quantifiées

Considérons la proposition: "Tout élève de notre classe a les yeux bleus", ou, si p(x) signifie: x a les yeux bleus:

$$(\forall x \in E)\ p(x)$$

La négation de cette proposition est:

"Tout élève de notre classe n'a pas les yeux bleus" ou:

"Il existe au moins un élève de notre classe qui n'a pas les yeux bleus",c.à.d.: $(\exists x \in E)\ \bar{p}(x)$

La proposition "Aucun élève de notre classe n'a les yeux bleus",c.à.d. "Tout élève de notre classe a des yeux qui ne sont pas bleus",est la négation de la proposition: "Il y a au moins un élève de notre classe qui a les yeux bleus".
Donc: $(\forall x \in E)\ \bar{p}(x)$ est la négation de: $(\exists x \in E)\ p(x)$

Nous pouvons énoncer:

$$\boxed{\begin{array}{l} \overline{(\exists x)\ p(x)} \Leftrightarrow (\forall x)\ \bar{p}(x) \\ \overline{(\forall x)\ p(x)} \Leftrightarrow (\exists x)\ \bar{p}(x) \end{array}}$$

Exercice:

Exprimez les propositions suivantes sous forme quantifiée et indiquez si les propositions sont vraies:

* Tout nombre naturel n'est pas divisible par 3.
* Aucun nombre naturel positif n'est un multiple de 0.
* Il existe un entier naturel qui n'est pas divisible par au moins deux entiers naturels.
* Il existe un entier naturel qui est divisible par tous les autres entiers naturels.
* Il n'existe pas d'entier naturel qui se laisse diviser par tous les entiers naturels.
* Tout entier naturel est divisible par 1.
* Il n'existe pas deux entiers natures dont le produit ne soit pas un entier naturel.
* Tout quotient de deux entiers naturels n'est pas un entier naturel.
* Il n'existe pas des entiers naturels qui ne soient pas des nombres décimaux.
* Tout nombre décimal peut s'écrire sous forme d'une fraction.
* Il existe des fractions qui ne s'écrivent pas sous forme décimale.
* Il existent des fractions qui ne sont pas irréductible.
* Il existe des fractions avec des numérateurs différents,qui sont égales.