DE LA MÉTHODE ANALOGIQUE.

DISCOURS

prononcé le 6 novembre 1843, à la solennité de l'ouverture des cours de l'Université de Liége,

PAR

J.-N. NOËL, Recteur sortant.

Messieurs,

Le gouvernement, dans sa sollicitude pour le progrès des universités de l'État, vient de décider que, chaque année, le recteur sortant prononcerait, le jour même de l'ouverture des cours, un discours sur la situation académique de l'université pendant son rectorat, et dans lequel il traiterait une question relative à la partie de la science qu'il professe.

Cette mesure, ayant pour but de faire connaître l'état du haut enseignement, est avantageuse aux professeurs ainsi qu'aux familles, qui doivent y trouver une garantie de plus. Un usage analogue existe dans beaucoup d'universités d'Allemagne; mais il est moins complet, en ce que le recteur se contente, à son entrée en fonctions, de traiter une question scientifique ou littéraire, à son choix.

Pour me conformer à la décision ministérielle, je vais, Messieurs, jeter un coup d'œil sur l'état de l'enseignement supérieur à Liége.

Depuis plusieurs années, le nombre des élèves de notre université va en croissant et s'est élevé, l'année dernière, à 442 (45 de plus que l'année précédente). Sur ces 442 élèves, 88 s'étaient fait inscrire en philosophie, 80 en droit, 81 en médecine, 69 et 124 pour les sciences et les écoles spéciales. Ce dernier chiffre, supérieur à chacun de ceux qui le précèdent, s'explique par les besoins de l'industrie et de l'administration des mines; mais il est à remarquer, en même temps, que la majeure partie des élèves nouveaux s'étaient inscrits pour les cours préparatoires à l'étude de la médecine et du droit.

Cette augmentation constante dans le nombre de nos élèves prouve déjà, Messieurs, que le public apprécie chaque jour davantage les ressources multipliées qu'offre l'université, soit aux jeunes gens qui la fréquentent dans le but de se créer une carrière, soit aux hommes studieux, qui ne viennent y chercher que de nouveaux aliments pour l'activité de leur intelligence.

L'autorité communale, secondant avec autant de lumières que de sollicitude les vues éclairées et le zèle infatigable de M. l'administrateur-inspecteur de l'université, a donné, depuis 1836, à cet établissement, une extension qui en a doublé l'étendue et nous a enrichis de locaux admirables pour la bibliothèque, les collections anatomiques, industrielles et autres, dont l'énumération et l'importance sont consignées dans une notice publiée, en 1841, par notre savant collègue, M. Lesbroussart.

Nous ne devons pas oublier non plus le concours du conseil provincial, qui a puissamment contribué à l'établissement de l'atelier de l'école des mines, des arts et manufactures et du musée d'agriculture par les subsides considérables qu'il a votés en sa faveur depuis l'époque de sa fondation. La bibliothèque, le cabinet de physique, les laboratoires de chimie et les diverses collections s'enrichissent chaque année et égaleront bientôt, s'ils ne le font déjà, ceux des universités étrangères les plus célèbres.

Les professeurs ne se sont pas bornés, Messieurs, au simple accomplissement de leurs devoirs; la plupart d'entre eux ont publié des travaux destinés à étendre le domaine des diverses branches des connaissances humaines.

Ces travaux sont de deux sortes: les uns, sous la forme de manuels et traités élémentaires, sont directement relatifs à l'enseignement; les autres, d'une nature plus générale, ont paru dans différents recueils littéraires ou scientifiques, tels que la *Revue belge*, les Mémoires de l'Académie de Bruxelles et de l'Académie royale de médecine de Belgique, ceux de la Société de médecine de Gand, de la Société des sciences naturelles et médicales de Bruxelles, ceux de la Société royale des sciences de Liége, etc. Plusieurs ont paru isolément, tant en Belgique qu'en France.

Nous n'avons donc rien négligé, messieurs, pour remplir complétement la haute mission qui nous est confiée. S'identifiant avec le père et l'ami éclairé, chacun de nous, toujours accessible aux élèves, toujours disposé à les écouter et à les diriger, par de bons conseils, dans la carrière, parfois épineuse, des lettres et des sciences, chacun de nous a la conscience d'avoir été utile aux jeunes gens qui fréquentent nos cours. Aussi recueillons-nous, en ce moment, messieurs, le fruit de nos soins dans les résultats obtenus par nos élèves devant les jurys et dans les concours universitaires.

Devant les jurys, le plus grand nombre de ceux qui se sont présentés ont obtenu le diplôme, soit d'une manière satisfaisante, soit avec distinction, soit même avec la grande et avec la plus grande distinction. Le chiffre en est fort élevé, eu égard à la sévérité des examens, à l'étendue et à la multiplicité des matières qu'ils doivent embrasser; et il le serait davantage encore, si tous les étudiants arrivaient à l'université convenablement préparés par des études moyennes complètes et approfondies; car les échecs ont lieu, le plus souvent, dans les épreuves préparatoires.

Hâtons-nous, toutefois, de reconnaître que l'enseignement, déjà prospère dans plusieurs athénées et colléges, s'est généralement amélioré, d'une manière sensible, depuis quelques années, non seulement par les encouragements et l'impulsion que le gouvernement lui a donnés en établissant les concours et les inspections, mais aussi par les soins éclairés des administrations communales, le bon choix des professeurs et le zèle qui les anime dans l'exercice de leurs fonctions. Aussi les échecs, dans les épreuves préparatoires, vont-ils en diminuant chaque année.

Les élèves, de leur côté, comprennent mieux l'importance des études élémentaires approfondies; ils savent mieux combien l'étude des langues anciennes et celle des langues modernes contribuent à orner l'esprit, à développer l'intelligence et à compléter l'éducation; combien elles sont nécessaires, comme préparation aux études d'un ordre supérieur auxquelles ils vont se livrer. Remarquons également que les mathématiques élémentaires sont enseignées avec plus de succès. Il est donc permis d'espérer que, dans un avenir prochain, les progrès incessants de l'enseignement moyen rendront moins nécessaires nos cours *transitoires;* surtout si les élèves qui se destinent au droit et à la médecine se persuadent bien de l'utilité d'une étude approfondie des mathématique élémentaires, pour eux comme pour tous ceux qui veulent se familiariser de bonne heure avec l'esprit et les formes rigoureuses de l'analyse logique, indispensables dans les relations sociales, aussi bien que dans les affaires.

Plusieurs personnes pensent qu'il serait fort désirable de pouvoir diminuer le nombre des matières sur lesquelles les élèves sont interrogés devant le jurys; mais, en considérant la chose avec une sérieuse attention, elles se convaincront que, pour des études complètes, telles que doivent l'être des études universitaires, toutes les matières indiquées au programme sont nécessaires. La seule amélioration qu'il serait peut-être possible d'introduire serait de scinder quelques examens et d'en faire deux, au lieu d'un seul, pour l'obtention du même diplôme.

Dans l'intérêt de la société tout entière, l'État ne peut confier qu'à des hommes intruits et capables la santé et la vie des individus, l'honneur et la fortune des familles, l'instruction de la jeunesse et la direction des travaux importants. Il est donc essentiel que le diplôme de docteur ne soit délivré qu'à des capacités bien reconnues par de sévères épreuves, des examens difficiles. Or, pour cela, il faut que les études universitaires, qui préparent à ces examens, soient complètes et mises à la hauteur de la science.

Sous ce point de vue, nous pensons que les universités de Belgique ne le cèdent à aucune de celles des autres nations.

Je viens maintenant aux concours universitaires. Ces concours ont cela d'avantageux pour les élèves qu'ils résument, en quelque sorte, toutes les études faites sur une spécialité scientifique ou littéraire : ils ont pour résultats immédiats de développer, chez les concurrents, l'esprit de recherche ou d'analyse et de synthèse, et de leur faire approfondir les points les plus difficiles de la science. Ils les signalent d'ailleurs à l'estime de leurs concitoyens et à la sollicitude du gouvernement, à laquelle ils acquièrent ainsi de nouveaux titres. Les recherches auxquelles ils doivent se livrer les préparent d'autant mieux à subir les épreuves finales; et ce serait bien à tort que quelques-uns d'entre eux craindraient de retarder l'achèvement de leurs études, par celles que les concours exigent plus spécialement.

Nous devons donc, Messieurs, féliciter les trois élèves de notre université, qui se sont présentés cette année aux concours. Tous les trois ont développé des connaissances acquises par de sérieuses études, et font honneur à l'enseignement qui leur est donné. Deux d'entre eux, plus heureux, ont mérité et obtenu des médailles; ils ont été proclamés *premiers*, M. Marcotty en histoire et M. Van Scherpenzeel-Thim en sciences physiques et mathématiques, dans la belle et imposante solennité du 26 septembre dernier, dont l'éclat et l'intérêt ont été rehaussés par la présence de leurs majestés le roi et la reine.

Je suis heureux d'être ici l'organe du conseil académique pour féliciter nos lauréats de cette glorieuse récompense, et d'avoir à leur remettre les diplômes qui en perpétuent le souvenir.

De telles distinctions et la joie que nous en éprouvons tous, Messieurs, engageront sans doute d'autres élèves à se présenter aux concours prochains; et nous en connaissons de bien capables d'y figurer avec des succès non moins éclatants.

Je vous ai dit, Messieurs, qu'il entrait dans les obligations du recteur sortant de traiter une question relative à la science qu'il professe; le temps m'ayant fait défaut pour en approfondir une qui fût entièrement nouvelle, je dois me contenter de résumer ici le mémoire que j'ai publié l'année dernière, dans le premier volume de la Société royale des sciences de Liége. Ce mémoire a pour objet une méthode que nous employons tous, plus ou moins explicitement, pour faciliter nos études, en posant des règles et des définitions générales; il traite de la *méthode analogique*, dont le rôle utile, dans la science des grandeurs, n'avait pas encore été, que je sache, bien nettement indiqué.

Le seul aspect d'une quantité ne suffit pas toujours pour en faire bien connaître la *grandeur* ou la *valeur;* tandis que le *nombre*, qui exprime cette grandeur ou cette valeur, en donne toujours et partout l'idée complète, même lorsque la quantité est *inaccessible* ou *invisible;* comme dans les relations commerciales, dans les arts et métiers, dans les relations journalières de travail, de production et de consommation, où il faut toujours compter, mesurer, évaluer et calculer, pour trouver des nombres *représentant* les grandeurs ou les valeurs dont on a besoin, et qui sont d'abord inconnues.

La science des grandeurs n'est donc au fond que la science des nombres, qui les représentent exactement, pour tout usage de ces grandeurs. Or, comment trouver ces nombres? Ce ne peut être qu'en *mesurant* ou en *évaluant*.

En général, nous ne pouvons bien connaître les grandeurs ou les valeurs des choses que par leurs *rapports* à une autre quantité fixe, prise pour *unité* ou pour terme invariable de comparaison. Il est nécessaire que l'unité nous soit bien connue, pour que nous puissions avoir une idée complète de la grandeur exprimée par le nombre; et il faut de plus que cette unité demeure invariable, afin que le nombre représente la grandeur à toutes les époques et dans tous les pays. De là vient l'importance d'un système *uniforme* de poids et mesures, et de là vient surtout la nécessité de leur *vérification*, pour les ramener à des grandeurs constantes. Car les différentes unités dépendent des corps matériels, qui changent par diverses causes que nous ne pouvons écarter.

L'évaluation d'après l'unité monétaire devient indispensable lorsque le mesurage direct est impossible, c'est-à-dire quand l'unité, de même nature que la chose à mesurer, vient à manquer ; comme pour la *beauté* d'un tableau, les *qualités*, plus ou moins utiles, d'une marchandise, la *perfection* d'un ouvrage quelconque, etc. Sans les nombres, fournis par l'évaluation, nous n'aurions que des idées fort imparfaites de ces différentes choses, pour lesquelles il n'y a pas de terme de comparaison invariable et bien connu. Ces nombres sont alors des prix d'*affection* ou d'*utilité ;* et ces prix sont nécessairement *variables*, selon l'abondance ou la rareté dans un même lieu, selon les impressions que les choses font sur les différents acheteurs et selon les moyens pécuniaires de chacun.

Il n'est point pour nous de grandeur *absolue*, si ce n'est peut-être celle de l'unité dont nous nous servons habituellement, et dont, par suite, nous avons le sentiment et l'idée la plus claire. Mais cette unité était d'abord arbitraire ; et d'ailleurs elle aurait pu varier à notre insu. La toise de France paraît avoir été prise d'après la stature de Charlemagne ; mais nous ignorons si cette unité de longueur ne s'est pas altérée depuis l'époque de son adoption comme mesure. Le pied de St.-Lambert a-t-il conservé sa longueur primitive ? Il est donc vrai de dire que nous ne connaissons que des grandeurs relatives à l'unité employée pour les réduire en nombres.

Si, en vertu de l'*analogie*, nous généralisons ces considérations préliminaires, où il est manifeste que nous ne pouvons connaître les choses en elles-mêmes, mais seulement par la comparaison, nous acquérons la certitude que toutes nos études se réduisent finalement à mesurer et à comparer les choses entre elles, afin de trouver des rapports et de les exprimer : nous ne connaissons réellement que des rapports et ne pensons que par eux.

Pour prouver ce fait, un géomètre très-distingué, dont la France s'honore, M. Gergonne, a posé une question analogue à celle-ci : Pendant notre sommeil, si tous les objets de l'univers, notre corps compris, devenaient tout-à-coup 100 fois plus grands, dans chacune de leurs dimensions, aussi bien que les intervalles qui séparent actuellement ces corps; aurions-nous, à notre réveil, quelque moyen de reconnaître ce changement aussi subit qu'étrange?

La réponse est certainement négative; car tous les rapports de grandeurs et de positions étant restés les mêmes, rien n'indiquerait que les choses ont changé, pas même le souvenir. Le changement d'une longueur ne peut, en effet, s'apercevoir que par son rapport à une autre, demeurée fixe ou n'ayant point varié de la même manière; or, ici les longueurs sont devenues chacune 100 fois plus grandes.

Pourrions-nous affirmer avec certitude, d'après cela, que l'univers ne change point à chaque instant, en demeurant *semblable* à lui-même? Et si le miope, qui voit les objets amplifiés, assure-t-on, en a cependant les mêmes idées que tous ceux dont la vue est bonne, n'est-ce point parce que les rapports ne changent pas en passant de ses yeux aux leurs?

Après ce coup d'œil jeté sur l'utilité des nombres ou des rapports, considérons la théorie du *mesurage*, pour montrer où elle peut encore se simplifier, en vertu de l'*analogie*.

Cette théorie, base de l'étude des sciences physiques et mathématiques, a spécialement pour but de remplacer un rapport par un autre égal, simple ou composé, mais plus facile à déterminer exactement. C'est ainsi qu'en mécanique, on remplace le rapport de deux forces constantes par celui des vitesses qu'elles engendrent dans le même corps, placé dans les mêmes circonstances et pendant le même temps. Il est évident que ces deux rapports sont égaux, en vertu de l'analogie complète entre les deux phénomènes, qui sont identiques en quelque sorte.

Pour nous élever au principe de la méthode analogique dans le mesurage, prenons d'abord un exemple. La pyramide (ou le cône) est déterminée complétement dès que sa base et sa hauteur sont données, de grandeur chacune et de position fixe, l'une à l'égard de l'autre. De plus, en vertu de la définition, toute pyramide ou tout cône se trouve avec sa base et sa hauteur absolument comme la pyramide régulière, sixième d'un cube, s'obtient avec sa hauteur et sa base. Or, celle-ci a pour mesure le tiers du produit des valeurs numériques de sa base et de sa hauteur; donc aussi *toute pyramide ou tout cône a pour mesure le tiers du produit des valeurs numériques de sa hauteur et de sa base;* s'il en était autrement, toutes les pyramides et tous les cônes ne s'obtiendraient pas absolument de la même manière, au moyen de la base et de la hauteur; contrairement à la définition.

Maintenant, observons que deux quantités, comprises dans la même définition générale, ont nécessairement le même mode descriptif; elles ont leurs *éléments générateurs* parfaitement *analogues* deux à deux, lesquels doivent recevoir les mêmes dénominations respectives deux à deux, afin de rappeler que les éléments analogues jouent les mêmes rôles dans les deux générations. Les éléments générateurs sont toujours faciles à reconnaître d'après les définitions; et c'est ainsi que la *base* et la *hauteur* sont les éléments générateurs du parallélogramme, du triangle, du prisme ou du cylindre, de la pyramide ou du cône : le rayon engendre la circonférence; les éléments générateurs du cercle sont la circonférence et le rayon, etc.

De même, les éléments générateurs de la vitesse du corps en mouvement, dans le vide, sont la masse du corps et la force impulsive. Pareillement, l'*ouvrage* est produit par le *travail*, et le *travail mécanique* a pour éléments générateurs la force musculaire de l'ouvrier et le chemin décrit par le point d'action.

D'après cela, puisque les deux quantités, comprises dans la même définition générale, sont engendrées absolument de la même manière, par leurs éléments générateurs analogues, il doit en être de même des deux nombres qui représentent complétement les grandeurs de ces deux quantités; car les valeurs particulières d'un élément générateur ne sauraient aucunement changer le rôle qu'il remplit dans la génération. Ainsi les deux nombres proposés sont exprimés, de la même manière absolument, par les valeurs numériques des éléments générateurs analogues. Donc *le procédé pour évaluer numériquement la plus simple de toutes les grandeurs, comprises dans la même définition générale, est exactement celui qu'il faut employer pour mesurer chacune des autres grandeurs ;* et tel est le principe d'*analogie directe*, dans le mesurage.

Ce principe est tellement fondamental que, sans lui, il n'y aurait, en mathématiques, ni définition, ni règle, ni formule générale : il se confond, en arithmétique et en algèbre, avec le principe de *généralisation*. C'est, en effet, par extension et par analogie, que l'on établit le calcul des *fractions*, le calcul des nombres *irrationnels*, celui des *exposants* quelconques, aussi bien que toutes les *opérations* sur les *symboles* négatifs, réels et imaginaires.

La *méthode infinitésimale* elle-même, si féconde en applications utiles, est l'expression la plus claire de la génération de certaines grandeurs, à l'aide d'éléments générateurs auxiliaires *infiniment petits*, et que le calcul emploie pour établir la *continuité*: c'est toujours le principe d'analogie directe. Il n'est donc pas surprenant que ce principe puisse simplifier, avec tant de succès, l'étude de la géométrie, de la mécanique et de toute science où il faut comparer et mesurer pour trouver des nombres.

C'est ce que prouvent complétement les développements et les applications ci-dessous, faisant suite au présent Résumé, mais que je me dispense de lire, pour ne pas abuser de l'attention que vous voulez bien, Messieurs, prêter à ce discours.

En conclusion : c'est par l'analogie que nous posons des définitions générales et que nous établissons des propositions renfermant une infinité de circonstances particulières, qui sont ainsi groupées et reproduites par un seul énoncé. Ces propositions, d'autant plus claires que les notions élémentaires sont mieux approfondies, constituent réellement la science, et chacune est d'autant plus utile qu'elle est plus générale, comme étant alors la source de toutes les vérités analogues.

Je devrais peut-être, Messieurs, vous parler de la perte douloureuse que l'université a fait cette année par une catastrophe aussi subite que déplorable. Mais pourquoi raviver de pénibles souvenirs? Les qualités brillantes qui distinguaient l'infortuné Vottem et lui attiraient l'estime et l'affection générales sont présentes à nos pensées et nous laisseront longtemps des regrets bien amers. J'ai hâte, Messieurs, pour y échapper un instant, de porter mes souvenirs sur l'agrément de mes relations avec M. l'administrateur-inspecteur et avec tous mes collègues, et de les remercier du bienveillant appui qu'ils m'ont prêté dans l'exercice des fonctions de recteur. Aussi honorables qu'importantes, ces fonctions ont parfois des moments assez pénibles : j'aime à dire hautement que le concours des professeurs et la bonne conduite de nos élèves me les ont rendues faciles.

J'ai la confiance que ces jeunes gens, toujours studieux et irréprochables, donneront à mon respectacle successeur, M. Raikem, la même satisfaction que celle qu'ils m'ont fait éprouver l'année dernière, et qu'ils continueront ainsi à être dignes de l'établissement où ils viennent puiser les connaissances, qui font les hommes utiles.

Suite du Résumé, avec quelques développements nouveaux.

En géométrie, le principe d'analogie directe fournit immédiatement toutes les proportions et notamment la *constance* du rapport de la circonférence au diamètre ; car toutes les circonférences se décrivent et s'obtiennent absolument de la même manière, chacune avec son rayon, qui la détermine complétement. Le même principe facilite la comparaison des figures *semblables*, aires ou volumes, et montre que, pour les *étendues* et pour la détermination du *rapport*, ces figures sont toujours *représentées* par les carrés ou les cubes faits sur les droites homologues ; et cela, sans avoir besoin des expressions des aires et des volumes, auxquelles il conduit le plus directement possible, à l'aide des expressions du carré et du cube.

Le principe d'analogie directe, employé bien explicitement, en géométrie, peut donc en simplifier beaucoup les théories, sans lui rien faire perdre de la clarté et de la rigoureuse exactitude qui la distinguent si éminemment. Et comme on ne saurait trop faciliter, l'acquisition de cette belle et utile science, ce principe finira sans doute par y remplacer les longues et inutiles *réductions à l'absurde* dont on fait encore usage, pour passer du *commensurable* à l'*incommensurable;* bien que ces démonstrations ne soient au fond que des pétitions de principes. Car supposer l'existence d'un rapport, c'est supposer nécessairement l'existence d'une mesure commune, *assignable* ou *inassignable.*

On peut d'ailleurs y suppléer, avec beaucoup d'avantage, sous le rapport de la clarté et de la brièveté, par la méthode *infinitésimale.* Il suffit, à cet effet, d'observer que deux grandeurs de même nature, ayant toujours un rapport *exprimable* ou *inexprimable*, ont nécessairement aussi une mesure commune, assignable ou non, *finie* ou *infiniment petite*, d'un *ordre* quelconque. De cette manière, on n'aura plus à distinguer si les deux grandeurs sont ou non commensurables : il ne faudra plus qu'une seule démonstration, très-claire et très-simple, au lieu de deux, dont l'une, la réduction à l'absurde, est d'autant moins compréhensible aux élèves, que n'ayant pas alors la définition du rapport de deux grandeurs, dites *incommensurables* entre elles, ils passent réellement de l'*inconnu* à l'*inconnu.* Et si l'on veut définir le rapport cherché, il faudra dire que les deux grandeurs incommensurables proposées ont une mesure commune *inassignable*, et rentrer ainsi dans le premier cas.

Les géomètres, qui font usage de la réduction à l'absurde, pour passer du commensurable à l'incommensurable, connaissent ces difficultés; ils savent très-bien qu'au fond ils emploient les infiniment petits. Mais comme tout ce que nous savons d'un nombre *infiniment grand* ou *infiniment petit,* c'est qu'il est plus grand ou moindre que le plus grand ou le plus petit nombre imaginable, ils pensent éviter cet inconvénient en ne raisonnant que sur des grandeurs, mises sous les yeux.

Le principe d'analogie directe fait donc passer du connu à l'inconnu, par le chemin le plus court; et c'est, en géométrie, un puissant moyen de recherche. Il fournit très-simplement, par exemple, le volume et la surface engendrés par l'aire et le contour de toute figure plane, *symétrique* par rapport à un centre (qui pourrait être le centre de gravité), se mouvant de telle sorte que ce centre glisse sur une ligne quelconque, *droite, courbe* ou *sinueuse*, mais de longueur connue, et que le plan de la figure reste constamment *normal* à cette ligne, en chaque point. Le plan pourrait même avoir un second mouvement autour du centre; car chaque fois le mode de génération est le même que celui du cylindre droit à base circulaire. Les deux expressions résultantes s'appliquent à certaines *colonnes torses* et à divers genres d'*anneaux*.

Pareillement, le même principe suffit pour démontrer, en quelques mots, ce théorème remarquable : *Dans deux polyèdres, ayant un même nombre de sommets, la proportionnalité des faces homologues, ayant le même nombre de côtés, entraîne l'égalité des dièdres qui se correspondent.*

Ce théorème fournit les conditions, nécessaires et suffisantes, à l'*égalité*, à la *symétrie* et à la *similitude directe* ou *inverse* des deux polyèdres proposés.

Une remarque importante doit être faite ici : il nous a toujours paru que, dans les traités élémentaires, aussi bien que dans l'enseignement moyen, on n'insiste pas assez sur la notion de similitude, ni sur le rôle utile que les figures semblables jouent en géométrie : on ne fait pas assez remarquer aux élèves que les applications et les théories de cette science portent sur des figures *représentant*, exactement ou non, quoiqu'en *petit*, celles qui existent sur le terrain.

Voici, croyons-nous, comment on pourrait amener les *véritables* définitions des figures semblables :

Il arrive souvent que la figure à étudier est d'une telle étendue que l'œil ne saurait en saisir l'ensemble, ou que, limitant un corps matériel, elle a des parties *visibles*, mais *inaccessibles;* il arrive même que, comme pour un *projet* de construction, la figure n'existe que dans l'imagination du géomètre; et c'est alors que le *dessin* est d'un merveilleux secours pour *représenter* aux yeux la figure, et mettre toutes ses parties en évidence sur le papier. Mais le dessin ne suffit pas toujours pour donner à la seule vue une idée complète de la figure cherchée, surtout quand elle a trois dimensions, comme tout objet matériel qu'il faut construire. A la vérité, le dessin, d'après la géométrie descriptive, montre bien cet objet aux yeux de l'intelligence et donne les procédés pour réaliser, le plus simplement possible, sa construction; mais cette construction doit être effectuée pour connaître complétement la figure imaginée. Il faut donc *copier* en relief l'objet matériel, c'est-à-dire en produire un autre, exactement de même *forme*, mais de dimensions assez petites, pour que cette copie puisse être *touchée* et *maniée;* et cela est toujours possible, puisque tout ce qui existe en *grand* peut se concevoir en *petit*, et réciproquement. Il est clair d'ailleurs que la *copie* de la figure devient le *modèle* pour la construction en grand; et c'est ainsi, par exemple, que dans l'art du sculpteur, le *dessin* sert de modèle à la *statuette* et celle-ci à la *statue*.

Si donc chaque *angle* ou chaque *coin* de la copie est égal à l'angle ou au coin du modèle, qui lui répond et qui est placé dans le même ordre; et si de plus les lignes qui se correspondent sont dans le rapport constant des unités linéaires, relatives à la copie et au modèle, et dont la première *représente* la seconde; il est clair que toutes les parties de la copie représenteront, en grandeurs et en positions, les parties homologues du modèle; donc la copie représentera complétement le modèle, non-seulement en *grandeur*, mais aussi en *forme*, puisque ces deux figures se confondraient en une seule, si les deux unités linéaires étaient égales, et qu'alors les conditions ci-dessus seraient toujours remplies.

Observons d'ailleurs qu'une grandeur géométrique ne peut en *représenter* une autre que quand elles sont exprimées toutes les deux par le même nombre d'unités, relatives à la copie et au modèle; ainsi il faut que les angles homologues soient égaux et les droites homologues, proportionnelles.

On voit que pour l'étude et pour les opérations à exécuter, l'une des deux figures peut remplacer l'autre et en tient absolument lieu; de sorte que ces deux figures sont *semblables* en tout; et ce qui se dira de la première, se dira exactement de la seconde, ou réciproquement. Ces deux figures ont absolument la même génération; vu que les éléments générateurs analogues, angles ou coins, droites ou faces, sont égaux ou sont proportionnels. On voit d'ailleurs que l'*égalité* n'est qu'une particularité de la *similitude* ou identité des *formes*, abstraction faite des *couleurs*.

On peut observer que la *ressemblance* fournie ordinairement par le peintre, dépend de la *similitude*, produite par le sculpteur : c'est l'*image* fidèle d'un objet ou d'un ensemble quelconque, avec sa forme *apparente* et ses couleurs, tenant lieu de l'objet lui-même et le représentant si complétement qu'on pourrait souvent les confondre, si l'on ne savait d'avance que l'objet n'est pas sous les yeux.

Ces notions, complétement analogiques, tiennent au phénomène de la *vision*, où l'on admet que tous les points de la surface visible d'un objet quelconque envoient chacun à notre œil un rayon lumineux, qui porte avec soi la couleur, c'est-à-dire l'image du point d'où il est parti. L'ensemble de tous les rayons forme donc un cône lumineux, dont le sommet produit au fond de l'œil la sensation, c'est-à-dire l'image du corps proposé. C'est par ce cône lumineux que nous voyons le corps matériel et que nous avons la notion de sa forme apparente ; d'où résulte la ressemblance, *directe* ou *inverse*. Il en résulte aussi la symétrie et les deux sortes de similitude.

C'est encore le principe d'analogie directe qui fait trouver, le plus immédiatement possible, certaines *fonctions* dont on a les *développements*, comme pour la généralité complète de la formule du binome, etc. Il sert aussi à développer, avec facilité, plusieurs fonctions en *séries ;* et si, pour cet effet, on trouve parfois plus commode la méthode des *coefficients indéterminés*, c'est parce que cette méthode n'est au fond que le principe d'analogie directe, exprimé analytiquement par des coefficients inconnus. La méthode des coefficients indéterminés rentre d'ailleurs dans la méthode *infinitésimale*, quant au principe sur lequel elle est basée, savoir que *toute quantité est comme nulle et doit se négliger vis-à-vis de celle qui la contient une infinité de fois*.

La méthode infinitésimale n'est que l'analogie, rendue plus évidente, en certains cas. Décomposant alors la grandeur dans ses parties les plus ténues, pour découvrir la *loi* qui les unit, cette méthode peint, en quelque sorte, à la pensée, la génération de cette grandeur. Les éléments *auxiliaires* de la génération sont donc alors des parties *infiniment petites*, propres à établir la *continuité*, et qui disparaissent nécessairement du résultat final des calculs et des raisonnements ; d'abord comme *auxiliaires*, et ensuite parce qu'il est impossible de tenir compte d'une quantité *infiniment petite* vis-à-vis d'une quantité *finie*, soit pour l'augmenter, soit pour la diminuer ; elle est donc comme *nulle* à l'égard de la quantité finie : c'est un *zéro*, *relatif* à cette dernière.

Bien que l'existence des quantités *infinitésimales* soit certaine par plusieurs faits évidents, la notion que nous en avons est fort imparfaite, puisque leurs grandeurs nous seront toujours inconnues. Or, si le calcul de ces grandeurs numériques inconnues est tout aussi clair et même souvent plus simple que celui des nombres *indéterminés* ou représentés par des signes généraux; s'il est beaucoup moins obscure que le calcul des *symboles* qu'on n'hésite pas d'employer, même dans les traités élémentaires, en vertu de l'analogie et pour rendre celle-ci plus complète; faut-il, parce que les définitions des grandeurs infinitésimales les laissent inconnues, se priver du secours puissant qu'elles offrent dans une foule de recherches numériques, où les infiniment petits sont inévitables et où l'on ne parvient même pas à les masquer entièrement par de longues réductions à l'absurde ou par d'autres moyens de démonstration?

D'ailleurs, appeler *infiniment petite* toute quantité moindre que la plus petite quantité imaginable; c'est clairement désigner un autre *ordre* de grandeurs *indéterminées*. Cependant, comme tout ce qui est extrême échappe aux sens et à l'imagination, Carnot a posé une définition, qui rentre dans la précédente, mais qui paraît d'abord écarter quelques difficultés. « Qu'est-ce, suivant lui, qu'une quantité infiniment petite? Rien autre chose qu'une quantité pouvant être supposée aussi petite qu'on veut, sans que pour cela on soit obligé de faire varier celles dont on cherche la relation. » Une quantité sera donc infiniment petite, non pas comme étant extrêmement petite, ce qui est fort indifférent; mais comme pouvant devenir encore plus petite, de quelque petitesse qu'on l'ait supposée, sans qu'il y ait rien à changer aux grandeurs *constantes* dont on cherche la relation et qui entrent avec elle dans une équation, *toujours exacte*.

Cette définition indique clairement les usages des infiniment petits; car si a et b sont des nombres *constants* et x un nombre *variable*, pouvant se supposer aussi petit qu'on voudra, sans que l'égalité $a = b + x$ cesse d'exister, on en conclura que a ne dépend aucunement de x et qu'on a rigoureusement $a = b$. Il implique, en effet, que la différence x des deux nombres constants a et b soit variable; et ainsi x n'a pu entrer dans l'équation $a = b + x$ que comme *auxiliaire* et doit en disparaitre ou y être regardé comme nul. Or, dire que le nombre variable x peut devenir aussi petit qu'on voudra, c'est dire qu'on peut le supposer moindre que le plus petit nombre imaginable, c'est dire enfin que x est *infiniment petit*; donc puisque $x = 0$, dans $a = b + x$, on voit que *tout nombre doit se négliger ou être regardé comme nul vis-à-vis de celui qui le contient une infinité de fois.* Tel est le principe fondamental de la méthode de Leibnitz.

Les infiniment petits n'étant que les éléments auxiliaires de la génération de certaines grandeurs, on conçoit que la méthode infinitésimale puisse simplifier diverses applications du principe d'analogie directe, dans le mesurage, soit du *cercle*, qui n'est au fond qu'un *polygone régulier* d'un infinité de côtés infiniment petits, soit des *corps ronds*, *polyèdres* d'une infinité de faces infiniment étroites. Mais le principe d'analogie directe, dans le mesurage des corps ronds et du cercle, n'a aucunement besoin de la méthode infinitésimale, et peut même y suppléer avec avantage, par la comparaison des éléments générateurs anologues de deux grandeurs, comprises dans la même définition générale.

Car n'oublions pas que le calcul infinitésimal, comme tout calcul, n'est qu'un auxiliaire à la logique ordinaire du discours, pour assurer notre marche dans la recherche des vérités mathématiques : il ne nous dispense point de considérer les choses en elles-mêmes, pour nous en faire une idée claire et pour bien voir la génération de chacune : c'est un instrument que l'esprit doit diriger et c'est un instrument précieux, puisque par lui nous pouvons analyser plus complétement les grandeurs, en exprimer plus clairement les rapports et combiner plus sûrement ces rapports entre eux, pour en tirer des conséquences certaines.

La méthode infinitésimale, quand elle n'est pas guidée par l'analogie complète, peut sans doute conduire à des absurdités, comme toute méthode mal appliquée ; mais est-ce à l'instrument ou à celui qui l'emploie, qu'on doit en attribuer la faute? Toutes les fois qu'on aura posé de bonnes définitions, d'après l'analogie, et que, sans les perdre de vue, aussi bien que l'*homogénéité*, essentiellement analogique, on raisonnera exactement sur *tous* les éléments de la question à résoudre, on n'aura pas à craindre que la méthode infinitésimale induise en erreur; et si malgré le secours puissant des infinis et du principe d'analogie directe, la question reste insoluble, il sera fort probable que l'emploi d'autres moyens d'investigation ne serait pas plus efficace. D'ailleurs, en existe-t-il d'autres qui ne dépendent pas, du moins implicitement, de l'analogie et de la méthode infinitésimale? La méthode des *limites* est-elle autre chose que cette dernière, sous une forme moins commode pour le calcul?

Pour découvrir la relation de certaines grandeurs, par la méthode des limites, on admet que la *limite* jouit exactement des propriétés de la *variable* limitée par elle et qui s'en approche indéfiniment; on remplace donc la limite par cette variable, bien qu'elle puisse en différer d'une quantité aussi petite qu'on voudra et conséquemment d'une quantité infiniment petite. Ainsi l'on admet que *cette différence est nulle par rapport aux deux grandeurs finies proposées*, savoir la variable et sa limite fixe ; ce qui est précisément le principe établi plus haut. La méthode des limites n'est donc que l'application du principe d'analogie directe, compliquée par des considérations étrangères : c'est la méthode infinitésimale, présentée sous une autre forme, *moins commode pour le calcul;* puisqu'au lieu de considérer un seul terme, reste d'une soustraction, sur lequel on opère dans la méthode infinitésimale, la méthode des limites doit employer les deux termes de cette soustraction.

La généralité complète de la formule du binome fournit, très-simplement et très-clairement, à l'aide de la méthode infinitésimale, les séries exponentielles et logarithmiques. De plus, cette formule conduit à l'expression de la somme des puissances m ièmes des n premiers nombres entiers, n étant infini et m un exposant quelconque ; d'où l'on calcule, avec facilité, par la méthode infinitésimale, les volumes de certains *segments*, dans les cinq surfaces du *second ordre.*

On sait d'ailleurs combien la méthode infinitésimale est utile, dans le calcul différentiel et dans le calcul intégral, non-seulement pour simplifier diverses théories, mais aussi pour faciliter la *rectification* des courbes, la *quadrature* des aires et la *cubature* des volumes. Plusieurs des sommes données à cet effet, et notamment les sommes de certaines séries trigonométriques, peuvent se calculer par des moyens fort élémentaires, comme on le verra plus bas.

L'analyse mathématique est essentiellement analogique, d'abord par ses *notations*, si propres à la simplifier et à l'étendre, et ensuite comme ayant pour but essentiel de faire connaître la génération de certaines grandeurs, par d'autres, abstraction faite des valeurs particulières de celles-ci ; d'où résultent des formules générales.

On connait les notations, si simples et si expressives, de l'algèbre, du calcul différentiel et du calcul intégral; telles que les notations des *exposants*, celles des lettres *numérotées* ou à *indices* et des *fonctions implicites* (soit d'une variable soit de plusieurs). Les deux dernières notations rentrent souvent l'une dans l'autre ; mais la notation des *numéros*, analogue à celle des exposants, est souvent plus commode et plus expressive que la notation des fonctions, surtout dans *l'analyse combinatoire* et par suite dans les *facultés numériques*.

L'emploi simultané des fonctions et des numéros, conduit aisément à une formule très-générale, indiquée par M. *Crelle*, tome VII de son journal, publié à Berlin, où il l'applique sous une forme moins simple et l'appelle *série générale de Taylor*, parce qu'il en résulte immédiatement le beau théorème dû à ce dernier géomètre. Il en résulte aussi le théorème de M. de *Stainville* et d'autres formules, non moins remarquables, ainsi que je l'ai établi dans les *Développements et recherches de mathématiques élémentaires*, p. 141 et suivantes.

Le théorème de Taylor, essentiellement analogique, n'est si utile et si commode, pour les applications nombreuses que l'on peut en faire, que parce que chaque terme est engendré par celui qui le précède immédiatement, d'après une loi générale constante, indiquée de la manière la plus expressive, par une notation très-simple. D'où résultent, selon la nature de la fonction développée, plusieurs autres séries, ayant chacune sa loi particulière de génération ; comme les séries binomiales, exponentielles ou logarithmiques, les séries des sinus et des cosinus, etc.

La généralité complète des formules, que fournit le principe d'analogie, en algèbre, en géométrie et en mécanique, conduit à *interpréter* les symboles, par des circonstances *analogues*, mais *opposées*, quant à la position ou à la nature de l'inconnue. D'ailleurs cette grandeur inconnue x pourrait cesser d'exister pour certaines valeurs ou certaines positions de ses éléments générateurs ; et c'est ce que la formule indique en donnant, par exemple, $0 \times x = 1$, le zéro étant *absolu*. Ici le nombre x est absolument impossible ; et c'est bien à tort que parfois le symbole 1 *sur* 0 est interprété en disant qu'il représente une *grandeur infinie* : cela n'arrive que quand le zéro est *relatif*, c'est-à-dire quand il désigne une quantité *infiniment petite*.

Le plus souvent l'interprétation d'un symbole se réduit à remplacer la *soustraction*, qui le produit, par une *addition* ; mais pour les radicaux *imaginaires*, il faut que les valeurs de tous les éléments générateurs soient en évidence ; et comme cela n'arrive pas toujours, le radical alors indique la non existence de la grandeur cherchée. On voit l'importance du calcul des symboles ; et ce calcul est inévitable dans les applications du principe d'analogie directe, pour avoir des formules générales ; car alors nous opérons, souvent à notre insu, sur des symboles de non existence. Il arrive même parfois que la combinaison des symboles, donnant des résultats réels ou immédiatement réalisables, leur existence, comme symboles, demeure inaperçue.

La fonction d'un variable, sous un radical de degré pair, ne peut devenir *imaginaire*, de *réelle* qu'elle était, qu'en passant par le *maximum* ou le *minimum* de la variable, *lesquels anéantissent la quantité sous le radical, chaque fois*; et c'est ainsi que l'on supplée souvent, même avec avantage, au théorème de Taylor, pour calculer la plus grande ou la plus petite valeur d'un nombre variable : l'algèbre, la mécanique et la géométrie analytique en offrent beaucoup d'exemples, fort remarquables.

Enfin, dans les sciences, toutes nos démonstrations, d'abord *particulières*, pour plus de clarté, ne sont complètement *générales* que par le principe d'analogie directe.

Résumé et extension des applications du principe d'analogie directe.

GÉOMÉTRIE. L'analogie conduit aux deux principes fondamentaux de la géométrie, à l'aide des seules définitions et sans aucune autre proposition préliminaire. Considérons d'abord les deux triangles ABC et A'B'C' : pour avoir l'angle C, il suffit de tracer les deux angles A et B aux extrémités du côté AB, et cela quelle que soit la longueur AB ; de sorte que l'angle C ne dépend aucunement de cette longueur (pourvu toutefois que le triangle existe). Ainsi les angles A et B sont les seuls éléments générateurs de l'angle C : de même, les angles A' et B' sont les seuls éléments générateurs de l'angle C'. Or, il est évident que l'angle C' se trouve avec A' et B' absolument comme l'angle C s'obtient avec A et B ; si donc $A = A'$ et $B = B'$, on aura aussi nécessairement l'angle $C = C'$.

Tel est le premier principe fondamental de la géométrie ; d'où résulterait la théorie des parallèles, si cette théorie n'était démontrée, plus clairement et plus simplement, d'après la nature infinie de l'angle, absolument inévitable.

Pour établir le second principe fondamental, supposons toujours l'angle $A = A'$ et l'angle $B = B'$: les deux angles A et B, qu'il faut tracer aux extrémités de AB, pour avoir AC, il faut donc aussi les tracer aux extrémités du côté A'B', pour avoir A'C' ; donc A'C' se trouve avec A'B' absolument comme AC s'obtient avec AB. Donc puisque le rapport indique toujours comment l'antécédent s'obtient au moyen du conséquent, on voit que si $AC = AB \times n$, n étant un rapport exprimable ou inexprimable en nombre, on aura aussi nécessairement $A'C' = A'B' \times n$. De là donc

$$AC : A'C' = AB : A'B' = BC : B'C'.$$

Tel est le second principe fondamental de la géométrie ; fourni, comme on le voit, aussi bien que le premier, par le principe d'analogie directe, dont voici d'autres applications.

I. Soient d'abord P et P' deux prismes ou deux cylindres, à bases quelconques b et b' sur le même plan, les arêtes latérales a et a' étant sur la même droite ; soit R le prisme ou cylindre de base b et dont a' est l'arête latérale : si l'on fait glisser b' sur b, il est clair que la base supérieure de P' glissera sur la base supérieure de R ; vu que ces deux volumes ayant l'arête latérale a' commune, ont nécessairement la même hauteur. Donc mesurer b par b', c'est mesurer en même temps R par P', et réciproquement; ces deux opérations simultanées doivent donc donner, en comptant, deux nombres égaux, et ainsi $R : P' = b : b'$; d'où $R = P' (b : b')$. On verra de même que $P = R (a : a')$; donc

$$P = P' (b : b') (a : a').$$

De là résulteraient plusieurs corollaires remarquables sur la comparaison des prismes. Si d'ailleurs P est un prisme droit et que P' soit l'unité v de volume, cube fait sur l'unité linéaire u, d'où $a' = u$ et dont chaque face est l'unité superficielle s, d'où $b' = s$; il est clair que a sera la hauteur h de P et qu'on aura $P = v (b : s) (h : u)$. *Sous-entendant* les trois unités v, s et u, il viendra simplement $P = bh$.

Il est clair que tout prisme ou cylindre *oblique* N se trouve avec sa base B et sa hauteur H, absolument comme le prisme ou cylindre droit P s'obtient avec sa base b et sa hauteur h; par conséquent on a $N = v (B : s) (H : u)$ ou $N = BH$.

Et puisque l'expression du volume de tout cube conduit, comme plus haut, à l'expression du volume de toute pyramide ou de tout cône, on voit combien le principe d'analogie directe peut simplifier la théorie du mesurage des volumes.

II. L'aire de tout secteur circulaire S se trouve avec son arc a et son rayon r absolument comme l'aire du triangle isocèle, qui en fait partie, se trouve avec sa base et sa hauteur : donc $S = \frac{1}{2} ar$. De même, les volumes de révolution, décrits par le secteur circulaire et le triangle isocèle, ont le même mode de génération et leurs éléments générateurs parfaitement analogues deux à deux : on en dira autant de l'aire courbe décrite par l'arc circulaire et de l'aire courbe décrite par sa corde; de l'aire du cercle et de celle de l'ellipse; du volume de la sphère et du volume de l'ellipsoïde; de la projection d'une aire plane et de la projection de l'une de ses droites; etc.

III. Soient P et P' deux polyèdres *semblables*, C et C' les cubes faits sur deux côtés homologues de deux faces semblables et semblablement placés extérieurement sur ces deux faces : il est évident que $P + C$ se trouve avec P absolument comme $P' + C'$ se trouve avec P'. Si donc $P' + C' = nP'$, n étant un rapport quelconque, on aura aussi $P + C = nP$; d'où $(n - 1) P = C$, $(n - 1) P' = C'$ et $P : P' = C : C'$.

Mais v et v' désignant les unités de volumes, cubes faits sur les unités linéaires u et u', relatives au *modèle* P et à sa *copie* P', d'où $C : C' = v : v'$ et $P : P' = v : v'$ on aura simultanément $P = mv$ et $P' = mv'$. Donc pour mesurer P, il suffit de mesurer sa copie P', chose plus facile. On voit que P' *représente* P, non-seulement en *forme*, mais aussi en *étendue*.

IV. Le principe d'analogie directe produit une formule, expression d'un grand nombre d'aires et de volumes; et cela, de la manière la plus directe et la plus simple. Soit G une grandeur géométrique, aire ou volume, de base b et de hauteur h; soit x la section parallèle à b et y sa distance au sommet, extrémité de h. Supposons que m étant un exposant quelconque, mais donné, on ait toujours

$$b : x :: h^m : y^m.$$

La grandeur G peut désigner un parallélogramme ou un prisme quelconque, pour lesquels $m = 0$; G peut désigner un triangle, un conoïde droit ou la surface latérale d'un cône droit circulaire, et chaque fois $m = 1$; G peut désigner une pyramide ou un cône quelconque, d'où $m = 2$; G peut désigner le segment de parabole, depuis l'axe jusqu'à la courbe, d'où $m = \frac{1}{2}$, depuis la courbe jusqu'à l'axe des ordonnées, d'où $m = 2$, et successivement les volumes décrits par ces deux segments autour des axes des x et des y, d'où $m = 1$ et $m = 4$; etc.

Les éléments générateurs des quantités géométriques que nous venons de mentionner, sont donc b, h et m ; car chaque fois la proportion générale est satisfaite. De plus, ces quantités ont toutes le même mode de génération, en vertu de cette proportion, et sont par suite exprimées absolument de la même manière, au moyen de b, h et m. Si donc cette expression est connue, pour une valeur particulière de m, elle le sera pour toutes; vu que les valeurs particulières d'un élément générateur ne sauraient changer aucunement son rôle dans la génération.

Or, on sait que pour le parallélogramme G, où $m = 0$, on a $G = bh = bh : (1 + 0) = bh : (1 + m)$; et pour le triangle G, où $m = 1$, il vient $G = \frac{1}{2} bh = bh : (1 + 1) = bh : (1 + m)$. Donc on aura toujours

$$G = bh : (1 + m).$$

MÉCANIQUE. Le principe d'analogie directe peut aussi faciliter beaucoup la théorie des forces et des vitesses, soit parallèles soit concourantes, en mécanique. Par exemple, si les deux forces P et Q sont appliquées à un même point et comprennent un angle moindre que deux droits, on sait que leur résultante R est dirigée dans cet angle et que cette direction, aussi bien que la valeur de R, dépendent essentiellement des intensités de deux composantes P et Q, ainsi que de l'angle compris A. Donc A, P et Q sont les éléments générateurs de R et de sa direction; si donc ces deux dernières sont connues, pour des valeurs particulières de A, P et Q, elles le seront pour toutes. Or, quand $P = Q$ et $A = 120^{\circ}$, la résultante R est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélogramme construit sur les droites qui représentent, en direction et en grandeur, les deux forces P et Q; donc il en sera toujours ainsi, quelles que soient les valeurs de A, P et Q : c'est le beau théorème, connu sous la dénomination de *parallélogramme des forces*, qui est ainsi démontré, de la manière la plus simple, et d'où résulte immédiatement la théorie des forces parallèles.

Le principe d'analogie n'est pas moins utile pour simplifier la recherche des *centres de gravité*, celle des *moments d'inertie*, etc. La définition du *travail mécanique*, si utile pour apprécier les effets des machines, est complétement analogique; et il n'est pas surprenant que cette définition fournisse, le plus directement possible, les grands principes de mécanique, à l'aide du calcul infinitésimal, et notamment le principe des *vitesses virtuelles*, qui n'est que le principe des *travaux élémentaires*. (C'est ce que nous avons développé dans les *éléments de mécanique*, 2e édition.)

La *transmission* des forces, par les corps solides, étant bien étudiée, d'après l'analogie, répand beaucoup de jour sur les théories et les applications de la mécanique. Par exemple, si le milieu de l'axe d'un cylindre droit, matériel et homogène, est fixé invariablement, le cylindre demeure en équilibre autour de ce milieu M, dans toutes les positions qu'on lui donne (c'est un fait d'expérience, que l'on étend, par analogie, à tous les cylindres droits homogènes). Il faut donc que les poids égaux des molécules égales, situées de part et d'autre et à égales distances du milieu M, soient transmis à ce point, par les molécules intermédiaires, absolument comme si chacun des poids égaux lui était immédiatement appliqué, dans le même sens parallèle ou vertical; car en vertu de l'équilibre, le point fixe M détruit le poids vertical du cylindre. Or, puisque toutes les forces de pressions constantes peuvent être assimilées à des poids, on voit déjà que *la résultante de deux forces égales, parallèles et de même sens, est égale à leur somme, leur est parallèle et divise la droite rigide d'application en deux parties égales.*

Ce principe, dû à la transmission des forces, suffit pour expliquer complétement l'espèce de paradoxe que présente la *balance de Roberval* : il y a équilibre dans le système, quel que soit le point de suspension de chacun des deux poids égaux, parce que les actions de ces poids se transmettent, suivant les côtés verticaux du parallélogramme articulé, aux extrémités du côté supérieur; et bien que celui-ci soit, par hypothèse, parfaitement mobile autour de son point milieu fixe, la résultante de ces deux poids égaux, égale à leur somme, est appliquée à ce point fixe; lequel, par sa résistance indéfinie, la détruit complétement et maintient l'équilibre.

Considérons deux forces parallèles et de même sens P et Q, appliquées aux points A et B, extrémités de la droite matérielle AB, rigide et inflexible, dont le point C est fixé invariablement, et supposons le système en équilibre. Chacune des forces constantes P et Q est donc transmise au point C, par les molécules intermédiaires, absolument comme si elle lui était immédiatement appliquée, dans le même sens parallèle; car les forces P et Q, de pressions constantes, produisent des effets identiques à ceux de deux poids. La résultante R des deux forces parallèles P et Q, de même sens, est donc égale à leur somme $P + Q$, leur est parallèle et détruite par le point invariable C, où elle est appliquée.

Soit $AC = mx$ et $BC = nx$, m et n étant les nombres de molécules égales contenues dans AC et BC, tandis que x est la dimension de chacune, dans le sens AB. Les actions, parallèles et de même sens, de la force P sur chacune des m molécules de AC, étant continuellement détruites et reproduites, on voit qu'on peut regarder chacune des m molécules comme sollicitée par une force égale à P, parallèle et de même sens : d'alleurs, les m molécules étant liées entre elles, d'une manière invariable, les m forces P ont une résultante mP, appliquée au milieu de AC. L'effet de la force mP est de faire tourner AC autour de C et par conséquent de faire tourner CB en sens contraire, absolument comme si la force—mP était appliquée immédiatement sur CB. Et puisqu'il y a équilibre, il faut que la force nQ, appliquée au milieu de BC, détruise la force — mP ; or, cela ne saurait arriver que quand les deux forces — mP et nQ sont égales et directement opposées : donc $mP = nQ$, $mx \times P = nx \times Q$ et $AC \times P = BC \times Q$.

Cette relation et $R = P + Q$ suffisent pour établir la théorie des forces parallèles et par suite celle des forces concourantes ; d'où résulte immédiatement le parallélogramme des forces et des vitesses.

Non-seulement la transmission des forces, par l'intermédiaire des corps matériels solides, rend plus simples et plus claires certaines théories de la mécanique; mais l'étude des machines consiste à bien voir où et comment les forces se transmettent. Il est clair d'ailleurs qu'à raison de diverses causes étrangères, qu'on ne saurait écarter, les forces actives ne sont jamais transmises complétement aux points sur lesquels elles doivent agir, pour produire leur effet utile. C'est même par une transmission incomplète de force que l'on peut résoudre le problème suivant :

Un vase cylindrique rempli d'eau, placé sur l'un des plateaux d'une balance, très-exacte et très-sensible, contient une balle suspendue par un fil à l'extrémité du bras de la balance ; si le système étant en équilibre, on vient à couper ce fil, sans déranger aucunement les autres parties du système, y aura-t-il encore équilibre, pendant la chute de la balle dans l'eau ?

Haute Algèbre. I. Les lettres n et x désignant des nombres ou des symboles quelconques, cherchons l'expression *immédiate*, en n et x, de la *fonction* y, dans

$$y = 1 + n\,x + \frac{n\,(n-1)}{1.2}\,x^2 + \frac{n(n-1)\,(n-2)}{1.2.3}\,x^3 + \text{etc., à l'infini.}$$

Il est clair que n et x sont les seuls éléments générateurs de y ; et comme les valeurs particulières d'un élément générateur n'en changent aucunement le rôle dans la génération, on voit que si l'expression immédiate de y, en n et x, est connue pour une valeur de n, elle le sera également pour toutes. Or, pour $n = 3$, on a $y = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 = (1+x)^3 = (1+x)^n$; et si $n = -1$, il vient $y = 1 - x + x^2 - x^3 +$ etc., à l'infini; d'où $y = 1 : (1+x) = (1+x)^{-1} = (1+x)^n$. Donc quel que soit n, nombre ou symbole, on aura toujours $y = (1 + x)^n$; et ainsi la *formule du binome* est complétement générale.

II. Soit $S\ n^m$ la somme des puissances m ièmes des n premiers nombres entiers, n étant *infini* et m un exposant quelconque : si tous les termes de cette somme étaient égaux au dernier n^m, elle serait nn^m ; par conséquent on doit poser $S\ n^m = ann^m$, a étant un nombre abstrait indépendant de n, mais évidemment *fonction* de m. Donc si a est connu pour une valeur particulière de m, il le sera pour toutes. Or, pour $m = 1$, on a $S\ n^m = S\ n = \frac{1}{2}\ n\ (n + 1) = \frac{1}{2}\ n^2 = nn : (1 + 1) = nn^m : (1 + m)$; donc quel que soit l'exposant m, on aura toujours

$$S\ n^m = \frac{1}{1+m}\ \underline{n^{m+1}}\ .$$

Observez d'ailleurs que, quel que soit m, on doit poser

$$S\ n^m = an^{m+1} + bn^m + cn^{m-1} + \text{etc.},$$

a, b, c,..., étant des coefficients inconnus et *finis*, comme indépendants de n. D'ailleurs, puisque tout nombre doit se négliger vis-à-vis de celui qui le contient une infinité de fois, on a simplement $S\ n^m = ann^m$; d'où il vient

$S\ n^m - S\ (n - 1)^m$ ou $n^m = an^{m+1} - a\ (n - 1)^{m+1} = a\ (m + 1)\ n^m$.

III. Considérons l'équation de degré m pair et dont le dernier terme soit négatif, savoir

$$x^m + Px^{m-1} + \cdots + Tx - U = 0.$$

On sait que cette équation a au moins deux racines réelles, dont les seuls éléments générateurs sont les coefficients, P, Q,..., T et — U ; de sorte qu'en mettant — U seul en évidence, l'une des deux racines réelles sera $x = F\,(-U)$: c'est la forme finale *inconnue* de l'équation proposée. Or, en changeant U en — U, cette équation et sa forme finale deviennent

$$x^m + Px^{m-1} + \cdots + Tx + U = 0 \text{ et } x = F\,(+U).$$

Et puisque $x = F\,(-U)$ satisfait à la première équation, il faut que $x = F\,(+U)$ satisfasse à la seconde ; et c'est ce qui est en effet, puisque $x = F\,(+U)$ n'est que cette seconde équation écrite sous une autre forme. Par le changement de U en — U, on a pu trouver une expression imaginaire $x = F\,(+U)$; mais cette expression, satisfaisant à la seconde équation, n'en est pas moins l'une de ses racines. Donc *toute équation numérique a une racine, réelle ou imaginaire, au moins.*

IV. C'est en vertu du principe d'analogie directe qu'on s'élève du calcul des exposants entiers à celui des exposants d'une nature quelconque, et par suite au calcul *logarithmique*, dont le but est de faire connaître, le plus simplement possible, le nombre inconnu, et surtout d'*en assurer l'approximation* (ce qui n'est pas le moindre des services réels que rendent les logarithmes).

Or, b étant la *base* positive et plus grande que l'unité, la courbe $x = ly$ ou $y = b^x$, appelée *logarithmique*, n'a qu'une seule branche, infinie dans les deux sens et dont l'axe des x est l'*asymptote*. De plus, a désignant la direction de la tangente et e la base du système de logarithmes népériens, il est clair que $y - y' = a\,(x - x')$, et qu'en faisant $b = 1 + c$, $x - x' = u$, on a $au = y'\,(1 + c)^u - y'$. Développant donc, d'après la formule du binome et posant $u = 0$, après avoir divisé par u; la plus simple des *séries logarithmiques* donnera $ale = y'lb$; d'où il vient, pour calculer la *soutangente* T, $Tlb = le$, et ainsi T est *constante*.

Soit A l'aire comprise entre la courbe, l'axe des x et les ordonnées qui répondent à $x = 0$ et à $x = m$: les ordonnées, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = m$, divisent m en un nombre infini n de parties égales à z, d'où $m = nz$, et l'aire A en n tranches infiniment petites, que l'on peut regarder comme des rectangles. Le v ième de ces rectangles étant zb^{vz-z}, il vient $A = T\,(b^m - 1)$.

Du côté des x négatifs, si $m = -\infty$, on trouve $A = T \times 1 = T$. Dans ce cas, bien que l'aire A s'étende à l'infini, du côté des x négatifs, elle a cependant une mesure finie, égale à celle du rectangle dont les dimensions sont l'unité linéaire et la soutangente.

On trouve aussi que le volume engendré autour de l'axe des x, par l'aire asymptotique, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = -\infty$, a pour mesure $\frac{1}{2}\,\pi T$; nombre *fini*.

Ce résultat et le précédent, quelque singuliers qu'ils paraissent, n'ont rien qui doivent faire douter de leur exactitude. On sait, en effet, par les progressions géométriques décroissantes et continuées à l'infini, qu'il existe des nombres dont chacun est la somme d'une infinité d'autres, devenant de plus en plus petits, sans qu'aucun d'eux soit rigoureusement *nul*; et il en est ainsi de la génératrice de toute série convergente, pour laquelle le *terme complémentaire* est nul vis-à-vis des nombres finis.

Séries trigonométriques. Voici plusieurs *sommations* de séries trigonométriques, faites par des moyens *analogiques* fort élémentaires, et qui sont utiles dans une foule d'applications du *calcul infinitésimal.*

I. Considérons d'abord les deux équations identiques

$$2\sin\tfrac{1}{2}x\sin(a+vx)=\cos(a+vx-\tfrac{1}{2}x)-\cos(a+vx+\tfrac{1}{2}x),$$
$$2\sin\tfrac{1}{2}x\cos(a+vx)=\sin(a+vx+\tfrac{1}{2}x)-\sin(a+vx-\tfrac{1}{2}x).$$

Si dans chacune on fait successivement $v=0,1,2,3,4,\ldots,n$, et qu'on ajoute entre elles les équations qui résultent de chacune des deux proposées, on trouvera

$$\sin\tfrac{1}{2}x\,S\sin(a+nx)=\sin\tfrac{1}{2}(n+1)x\sin(a+\tfrac{1}{2}nx),$$
$$\sin\tfrac{1}{2}x\,S\cos(a+nx)=\sin\tfrac{1}{2}(n+1)x\cos(a+\tfrac{1}{2}nx).$$

Ici la somme des sinus des arcs a, $a+x$, $a+2x,\ldots,a+nx$ est désignée par $S\sin(a+nx)$; et si $a=0$, il vient

$$\sin\tfrac{1}{2}x\,S\sin nx=\sin\tfrac{1}{2}(n+1)x\sin\tfrac{1}{2}nx,$$
$$\sin\tfrac{1}{2}x\,S\cos nx=\sin\tfrac{1}{2}(n+1)x\cos\tfrac{1}{2}nx.$$

On peut supposer n infini, dans l'arc fini ou limité nx; et alors x sera un arc infiniment petit, donnant $\sin\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}x$, $\cos\frac{1}{2}x=1$ et $\sin\frac{1}{2}(n+1)x=\sin\frac{1}{2}nx$. On trouve alors

$$x\,S\sin nx=2\sin^2\tfrac{1}{2}nx \text{ et } x\,S\cos nx=\sin nx\ldots(1)$$

II. Les deux équations $2\sin^2 vx=1-\cos 2vx$ et $2\cos^2 vx=1+\cos 2vx$, donnent de même, pour n infini et x infiniment petit,

$$\left.\begin{aligned}4x\,S\sin^2 nx&=2nx-\sin 2nx,\\4x\,S\cos^2 nx&=2nx+\sin 2nx.\end{aligned}\right\}\ldots(2)$$

Dans les mêmes hypothèses, les carrés des deux équations proposées fournissent

$$\left.\begin{aligned}16x\,S\sin^4 nx&=6nx-\sin 2nx\,(2-\cos 2nx),\\16x\,S\cos^4 nx&=6nx+\sin 2nx\,(2+\cos 2nx).\end{aligned}\right\}\ldots(3)$$

III. Partant des formules $4\sin^3 vx=3\sin vx-\sin 3vx$ et $4\cos^3 vx=3\cos vx+\cos 3vx$, on trouve

$$\left.\begin{aligned}12x\,S\sin^3 2nx&=9\sin^2 nx-\sin 3nx,\\12x\,S\cos^3 nx&=9\sin nx+\sin 3nx.\end{aligned}\right\}\ldots(4)$$

Par cette méthode, on trouve aussi

$$\left.\begin{aligned}16x\,S\sin^5 nx&=\tfrac{2}{5}\sin^2\tfrac{5}{2}nx+20\sin^2\tfrac{1}{2}nx-\tfrac{10}{3}\sin\tfrac{3}{2}nx,\\16x\,S\cos^5 nx&=\tfrac{1}{5}\sin 5nx+10\sin nx+\tfrac{5}{3}\sin 3nx.\end{aligned}\right\}\ldots(5$$

IV. L'arc fini nx, compris entre 0 et 360°, peut valoir la moitié, le tiers, le quart, le 5ᵉ, le 6ᵉ et le 8ᵉ de la circonférence 2π. C'est ainsi que dans la *sinusoïde* $y=\sin x$, r étant le rayon; si l'on veut calculer l'aire 2A comprise entre sa base πr, on remarquera que les ordonnées y divisent la demi-aire A en un nombre infini n de tranches, que l'on peut regarder comme des rectangles, de même base b infiniment petite ; d'où $nb = \frac{1}{2}\pi r = 90°$. L'aire du v ième de ces rectangles étant $b \sin vb$, on a $A = b\, S \sin nb$; et ainsi, d'après (1), $2A = 2r^2$. On trouve de même, d'après (2), vol. $2A = \frac{1}{2}\pi^2 r^3$.

Considérons la *lemniscate* $(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 - b^2 y^2$. En posant $c^2 = a^2 + b^2$, *l'équation polaire* de cette courbe devient $r^2 = a^2 - c^2 \sin^2 \omega$, r étant le *rayon vecteur* et ω l'arc de rayon 1 qui mesure *l'angle décrit*. Soit A l'aire comprise, depuis $r = a$, répondant à $\omega = 0$, jusqu'à $r = 0$, répondant à $c \sin \omega = b$. Les rayons vecteurs divisent l'aire A en un nombre infini n de *secteurs* ou triangles isocèles élémentaires, ayant tous le même angle au sommet, mesuré par l'arc infiniment petit z, d'où $\omega = nz$. L'aire du v ième de ces triangles est $\frac{1}{2} r^2 \sin z$ ou $\frac{1}{2} r^2 z = \frac{1}{2} a^2 z - \frac{1}{2} c^2 z \sin^2 vz$; donc l'aire totale 4 A de la lemniscate est

$$4A = 2a^2 nz - 2\, c^2 z \int \sin^2 nz\,;$$

$$\text{d'où } 4A = (a^2 - b^2)\,\omega + ab.$$

Pour la lemniscate $r^2 = a^2 \sin^3 \omega$; si A désigne l'aire, depuis $\omega = 0$ et $r = 0$, jusqu'à $\omega = 90° = \frac{1}{2}\pi$ et $r = a$; il est clair que l'aire totale de la courbe sera $4A = 2a^2 z\ S \sin^3 2\,nz = \frac{2}{3}\, a^2$. Cette courbe *carrable* est aussi représentée par l'équation polaire $r^2 = a^2 \cos^3 \omega$.

L'aire de la courbe $r^2 = a^2\,(1 - \sin^3 \omega)$, depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = 180° = \pi$, se réduit à $\pi a^2 + \frac{1}{4} a^2$; tandis que si la courbe est représentée par $(x^2 + y^2)^3 = a^2 x^4$ ou par $r^2 = a^2 \cos^4 \omega$, l'aire limitée par elle est les 3 huitièmes du cercle ayant a pour rayon.

Si l'on avait $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$ ou $r = 2a \cos^3 \omega$; ce serait une *demi-lemniscate*, inscrite dans le cercle ayant a pour rayon, et dont l'aire est les 5 huitièmes de ce cercle.

VI. Par des calculs analogues, on trouve que le *centre de gravité* d'une feuille de la lemniscate $r^2 = a^2 \cos^4 \omega$, est situé sur son axe a de symétrie, à la distance du centre de la courbe marquée par les 5 neuvièmes de a. D'après cela, on peut calculer le volume limité par la surface algébrique

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2\,(x^2 + y^2)^2, \text{ ou } r^2 = a^2 \cos^4 \omega,$$

r étant le rayon vecteur et $r \cos \omega$ sa projection sur le plan des xy. C'est donc la surface de révolution décrite par une feuille de la lemniscate $r^2 = a^2 \cos^4 \omega$ autour de l'axe des z rectangulaires, son centre étant le même que celui de la sphère, ayant a pour rayon ; d'où l'on trouve que le volume cherché a pour mesure $\frac{1}{12} \pi^2 a^3$.

VII. Nous indiquerons encore, comme applications faciles de nos formules et de la méthode infinitésimale, la rectification de la *cycloïde*, sa quadrature et même la cubature du volume engendré par la révolution de l'aire de la courbe autour de sa base. Il en résulte les théorèmes connus, savoir : 1° la longueur de chaque branche de la cycloïde est quadruple du diamètre du cercle générateur ; 2° l'aire de toute cycloïde est triple du cercle mobile qui l'engendre ; 3° etc., Mais ce qui précède doit suffire pour bien faire voir le rôle important que l'analogie remplit dans l'étude des sciences.

VIII. Les coordonnées étant rectangulaires, on sait que si, du centre de l'ellipse ou de l'hyperbole, on abaisse des perpendiculaires sur toutes les tangentes à cette courbe, les pieds de ces perpendiculaires décriront les deux courbes respectives

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2 y^2 \text{ et } (x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2.$$

Ce qui précède conduit à calculer, fort simplement, les aires de ces courbes et les volumes qu'elles décrivent autour des axes.

Considérons seulement la première : elle touche l'ellipse, qui l'a produite, aux extrémités des deux axes communs $2a$ et $2b$, en l'enveloppant ; car elle a des diamètres plus grands que $2b$; mais plus petits que $2a$, quoique surpassant toujours ceux qui ont mêmes directions dans l'ellipse.

La différence des aires des deux courbes et la somme de ces aires, valent respectivement les demi-cercles dont $a - b$ et $a + b$ sont les rayons ; ce qui est remarquable.

On peut calculer le maximum de l'ordonnée y, aussi bien que l'équation de la tangente et chercher des procédés descriptifs.

Observons encore que la sphère dont a est le rayon, étant rapportée à son centre et à ses axes rectangulaires ; si du point $(-a, b, 0)$ de l'axe des x, on abaisse des perpendiculaires sur tous les plans tangents à la surface sphérique, les pieds de ces perpendiculaires décriront la surface algébrique

$$(x^2 + y^2 + z^2 + ax)^2 = a^2 [(x + a)^2 + y^2 + z^2] ;$$

laquelle, en y changeant x en $x - a$, devient

$$(x^2 + y^2 + z^2 - ax)^2 = a^2 (x^2 + y^2 + z^2).$$

C'est la *surface de révolution*, décrite autour de l'axe des x, par la courbe $(y^2 + x^2 - ax)^2 = a^2 (y^2 + x^2)$, dont l'équation polaire est $r = 2a \cos^2 \frac{1}{2} \omega$ et dont par suite l'*aire est triple du demi-cercle*, de rayon a.

Voici trois problèmes généraux, qui ont de l'analogie : une courbe ou une surface du second degré étant rapportée à des coordonnées rectangulaires, quel est le lieu géométrique des pieds de toutes les perpendiculaires abaissées d'un point donné sur les tangentes ou sur les plans tangents? Quel est le lieu géométrique des pieds de toutes les perpendiculaires abaissées, sur les cordes partant d'un point donné, du pied de l'y ou du z de l'extrémité de chaque corde, suivant qu'il s'agit d'une courbe ou d'une surface du second ordre? Quel est, pour la courbe du second degré, le lieu géométrique des points où vont couper les ordonnées des contacts, les perpendiculaires aux tangentes, abaissées d'un point donné ?

Ovale de Cassini. Il est une autre courbe, peu étudiée et qui mérite de l'être ; c'est l'*ovale de Cassini*, lieu géométrique de tous les points tels, que le produit des distances de chacun à deux points fixes F et F′ est constamment égal au carré donné c^2.

Si l'on place l'origine des coordonnées rectangulaires au milieu de la droite $FF' = 2d$ et l'axe des x sur cette droite, l'équation de la courbe sera

$$(y^2 + x^2)^2 + 2(y^2d^2 - x^2) = c^4 - d^4 \ldots (1)$$

observons d'abord que si $d = c$, la courbe sera la *lemniscate* que fournit l'hyperbole équilatère, et dont l'aire est c^2. Observons ensuite que le *centre* de la courbe (1) est à l'origine et que ses deux *axes de symétrie*, savoir $2a$ et $2b$, répondant aux hypothèses successives $y=0$ et $x=0$, sont donnés par les deux relations $a^2 = c^2 + d^2$ et $b^2 = c^2 - d^2$.

L'axe $2b$ n'a donc qu'une seule valeur, *réelle*, *nulle* ou *imaginaire*, suivant que $c > d$, $c = d$ ou $c < d$. Aussi la courbe est-elle fermée et en *ovale* dans le premier cas, fermée et en forme du chiffre 8 dans le second, et enfin, dans le troisième, la courbe est composée de deux *branches*, séparées et fermées chacune, nommées *ovoïdes*.

Résolvant l'équation par rapport à x^2, on verra que le *maximum* de y est donné par $4d^2 y^2 = c^4$ et répond à $x^2 + y^2 = d^2$. La circonférence C, de centre O et de rayon d, coupe donc la courbe (1) en quatre points, symétriques par rapport à l'axe des x et les plus éloignés de cet axe. On peut avoir $d = c$, d'où $2y = \pm c$; mais si l'on avait $c^2 > 2d^2$, d'où $y^2 > d^2$, C ne couperait pas la courbe, laquelle serait un véritable *ovale*, comme pour $c^2 = 2d^2$, où $y = \pm d = \pm b$. Si $c^2 > d^2$ et $< 2d^2$, d'où $y^2 > b^2$, la courbe ne sera plus un ovale, quoique fermée, et C la coupera en quatre *inflexions*.

Dans tous les cas, si d'une extrémité E de $2a$, on mène une sécante coupant C aux points P et Q, et que des centres F, F', avec les rayons EP, EQ, on décrive quatre circonférences, elles se couperont en quatre points de la courbe (1), *qu'on peut ainsi décrire par points*.

Pour lui *mener une tangente au point donné* M, on observe que les deux points M et N, *infiniment voisins*, de la courbe (1), appartiennent à la tangente cherchée. Si donc on prolonge FM de MS = FM, les perpendiculaires élevées en S sur FM et en F' sur MF', se couperont en R, sur la tangente au point donné M de la courbe.

On voit comment la méthode infinitésimale, aidée de la théorie des *maximums* et des *minimums* du second degré, peut faciliter l'étude des courbes planes.

On voit aussi la grande analogie entre l'ellipse et l'ovale de Cassini.

Ellipse. L'analogie est si grande entre le cercle et l'ellipse, que toutes les propriétés de celle-ci se déduisent des propriétés du cercle; et cela, de la manière la plus simple et la plus immédiate, à l'aide des *projections orthogonales*, d'après le principe que la projection de toute grandeur est le produit de celle-ci par le cosinus numérique de l'angle compris.

Il en résulte non-seulement les équations de l'ellipse, son plus grand et son plus petit diamètre, son aire et l'équation de la tangente; mais aussi le *maximum* constant des triangles ou des quadrilatères *inscrits* et le *minimum* constant des triangles ou des quadrilatères *circonscrits*. Ce qui donne les moyens, 1° de circonscrire la plus petite ellipse possible à un triangle ou à un quadrilatère convexe donné ; 2° d'inscrire la plus grande ellipse possible dans un triangle ou dans un quadrilatère convexe tracé.

Ces problèmes se résoudraient difficilement par le calcul ; et l'on remarque d'ailleurs que la plus grande ellipse inscrite et la plus petite circonscrite, sont semblables ; et l'une peut servir à tracer l'autre.

En général, le plus grand polygone de n sommets que l'on peut inscrire dans une ellipse tracée, est toujours convexe et *symétrique*, si n est pair : on en dira autant du plus petit polygone circonscrit de n sommets.

On peut toujours trouver le plan sur lequel une ellipse étant projetée, la projection soit un cercle ; et l'on peut calculer l'une des deux aires, lorsque l'autre est donnée.

Cherchons, par exemple, la plus grande ellipse E, inscrite dans un triangle donné T. Soit T′ le triangle projection du triangle T et v l'angle des deux plans : on aura d'abord $T' = T \cos v$. Soit C le cercle inscrit dans T′ et a son rayon, nécessairement variable avec la forme de T′ ; C sera la projection de l'aire E, et l'on aura $C = E \cos v$. Or, on peut toujours faire tourner T dans son plan, de telle sorte que sa projection T′ ait les trois côtés égaux : dans ce cas, T′ n'aura changé que de forme et non de grandeur, mais le cercle inscrit C sera alors le plus grand possible ; donc aussi l'aire E de l'ellipse inscrite dans T sera la plus grande possible, en vertu de la relation $C = E \cos v$. De plus, le cercle maximum C a pour centre celui des moyennes distances du triangle équilatéral T′, dont il touche les côtés en leurs milieux ; donc aussi l'aire E maximum a pour centre celui de gravité du triangle T, dont elle touche les côtés en leurs milieux.

Rien n'empêche de supposer l'angle v de 60°, d'où $\cos v = \frac{1}{2}$ et $T' = \frac{1}{2} T$; et alors le rayon a du cercle maximum inscrit sera donné par la relation $6a^2 \sqrt{3} = T$, et l'aire maximum de l'ellipse inscrite dans T, sera $E = \frac{1}{9} \pi T \sqrt{3}$.

D'ailleurs le petit axe de l'ellipse maximum est égal et parallèle au diamètre $2a$, lui-même parallèle à l'intersection des deux plans, tandis que le grand axe vaut $4a$; le centre et les deux axes étant ainsi connus, on peut décrire l'ellipse maximum : elle est plus grande que le rectangle maximum, inscrit dans T.

Soit E′ l'aire minimum de l'ellipse circonscrite au triangle T : on trouve $E' = 4E$. Pour un quadrilatère convexe donné, l'aire minimum de l'ellipse circonscrite est double de l'aire maximum de l'ellipse inscrite.

Moindre action. Le *principe de la moindre action*, tel que plusieurs philosophes l'on considéré, n'est qu'une application, peut-être trop généralisée, du principe d'analogie directe. Voici comment ils y ont été conduits : l'instinct de certains animaux, tels que les *abeilles*, dont les alvéoles sont toujours construites avec la moindre dépense de cire et par conséquent avec le plus petit *travail* possible ; la chute des corps suivant des lignes droites ; la forme des plumes des oiseaux et celle des os des animaux, qui leur donne une résistance suffisante en diminuant la quantité de matière ; enfin, les phénomènes que nous pouvons étudier complètement, nous conduisent à penser que les productions de la nature résultent généralement de la plus grande économie possible de moyens : en sorte, par exemple, que le mouvement de la lumière proviendra d'un travail minimum.

En remontant à la cause de ces productions admirables, on la reconnaît essentiellement intelligente, et l'on conçoit par suite qu'elle a dû produire les phénomènes, que nous observons, par les voies les plus simples et les plus économiques, bien que ces voies nous restent souvent inconnues ; de sorte que tous les ouvrages, dûs à cette cause suprême, doivent résulter de la moindre quantité d'*action* ou de *travail* possible.

C'est ainsi que l'analogie nous conduit à admettre, comme loi de la nature, que *s'il arrive quelque changement ou phénomène dans l'univers, la quantité d'action ou de travail, qui le produit, est un minimum.*

Tel est exactement le principe de *la moindre action*, en observant qu'ici, par *quantité d'action*, il faut entendre le produit de la force motrice par le chemin que décrit son point d'action ; c'est une quantité de *travail mécanique* ; et le principe ci-dessus n'est au fond que le principe *du moindre ou du plus grand travail ;* car les causes naturelles produisent toujours des effets qui, envisagés sous certains rapports, sont les plus grands ou les moindres possibles.

Le principe des moindres travaux est un de ceux qui plaisent à l'imagination, comme pouvant conduire à la vérité ou la faire deviner, dans la recherche des lois naturelles et dans plusieurs applications importantes. Mais, parce que ce principe très-général ne saurait se démontrer, vu que les moyens que la nature emploie nous restent souvent inconnus, du moins plusieurs d'entre eux, il est nécessaire de vérifier expérimentalement les lois qu'il peut faire découvrir, comme celles du choc des corps et du mouvement de la lumière.

Par exemple, si un rayon lumineux, partant d'un point A, doit se *réfléchir* sur le miroir plan MN, pour passer par un point B, situé du même côté que A, il faudra que le point I de MN, où la réflexion s'opère, soit tel que le travail, pour faire décrire le chemin AIB à la molécule lumineuse, soit un minimum, en vertu du principe de la moindre action ; et comme la résistance est supposée constante, il faudra que, le chemin AIB soit le plus court possible. Cela exige, 1° que le rayon incident AI et le rayon réfléchi IB soient dans un même plan, normal à la surface MN du miroir (celui-ci pouvant être courbe); 2° que l'angle d'incidence soit égal à l'angle de réflexion. Telles sont les lois de la réflexion de la lumière.

De même, le principe de la moindre action, aidé de la méthode des minimums et des maximums, démontre que, quand la lumière passe d'un milieu dans un autre, les résistances étant constantes dans les deux milieux, 1° le rayon incident et le rayon réfracté sont dans un même plan normal à la surface séparatrice; 2° les sinus des angles d'incidence et de réfraction sont dans un rapport constant, quel que soit d'ailleurs l'angle d'incidence. Ces deux lois de la réfraction de la lumière se vérifient de plusieurs manières, comme les deux lois de la réflexion.

Les calculs pour les lois de la réfraction résolvent le problème suivant : Une voiture chargée doit être conduite du point A au point B, situés de part et d'autre de la droite MN qui sépare deux plaines ; les distances de ces points à MN étant $AC = 3$ lieues $BD = 4$ et la longueur $CD = 7$. Supposons que dans ces plaines, les résistances moyennes au mouvement de la voiture soient 300 et 400 kilogrammes; quel doit être le chemin AIB qu'il faut suivre (I étant un point de MN, entre C et D), pour que le travail total des chevaux, et par suite leur fatigue, soit un minimum? Réponse : $CI = 4$ lieues.