MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE,

PAR

J.-N. NOËL,

PROFESSEUR ORDINAIRE A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE ET CHEVALIER DE L'ORDRE DE LÉOPOLD.

LIÉGE,

H. DESSAIN, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,

PLACE ST.-LAMBERT.

Novembre 1844.

Nota. Quelques considérations sur l'enseignement scientifique moyen, précèdent le premier mémoire, lequel traite de la méthode analogique en géométrie. Le second mémoire a pour objet un grand nombre de propositions de géométrie appliquée, et le troisième, les propriétés de l'ellipse, ainsi que l'étude de plusieurs lignes et surfaces courbes. Tous ont pour but spécial les méthodes, dans les théories et dans les applications; et tel est aussi le but des ouvrages suivants :

1° Mélanges d'algèbre (1827); 2° Notes complémentaires d'algèbre (1836); 3° Développements et recherches de mathématiques élémentaires (1838).

Le présent volume est terminé par le discours sur la méthode analogique, prononcé le 8 novembre 1843, lequel, outre plusieurs considérations importantes, sur l'analogie en général, démontre le *principe d'analogie directe* et en indique diverses applications remarquables.

RECUEIL DE DIFFÉRENTS MÉMOIRES.

Considérations sur l'enseignement scientifique moyen.

Les travaux de la *Société royale des sciences* de Liége, ayant pour but essentiel l'enseignement scientifique, même élémentaire, j'ai été conduit naturellement à examiner de plus près les méthodes employées dans les éléments et à indiquer, surtout pour la géométrie, celles de ces méthodes qu'une longue expérience m'a montré comme plus avantageuses. Il en est résulté les différents mémoires que je réunis dans ce volume, dont la lecture pourra, si je ne me trompe, être utile aux Professeurs, aussi bien qu'aux Élèves, et à tous ceux qui s'occupent de sciences.

Les considérations suivantes, appuyées sur quelques exemples choisis, mettront bien en évidence, je l'espère du moins, les théories qui doivent dominer dans l'*enseignement scientifique moyen*, et surtout les méthodes par lesquelles ces théories peuvent être présentées et étudiées avec le plus de succès.

ARITHMÉTIQUE I. La science des *grandeurs* représentées par des *nombres*, l'*Arithmétique*, en un mot, est l'une des plus utiles et des plus nécessaires aux hommes vivant en société. Aussi est-elle généralement étudiée; et elle est à la portée des intelligences les plus ordinaires, lorsque les notions en sont développées clairement et simplement. Mais c'est précisément cette clarté et cette exactitude, qu'il faut donner aux développements des premières notions de l'Arithmétique, qui font la difficulté de l'exposition de cette belle science et la difficulté plus grande encore de la bien enseigner, *par une analyse logique rigoureuse.* Car, sans des définitions claires, précises et complètes, sans des démonstrations exactes, l'arithmétique ne serait pas une science : ce serait une routine aveugle, un par mécanisme, bientôt usé et difficile à rétablir, puisqu'on n'en aurait pas l'intelligence.

Cette exactitude, si nécessaire aux définitions et aux raisonnements, ne se trouve pas toujours dans les livres d'arithmétique, dont plusieurs, sous le point de vue logique, sont écrits avec une négligence, vraiment impardonnable : ils renferment beaucoup de *règles*, beaucoup trop même (car plusieurs sont inutiles) ; mais les démonstrations complètes de ces règles ne s'y trouvent pas, et encore moins l'analyse logique, par laquelle les principes sont amenés, le plus simplement et le plus clairement possible. Quel fruit peut produire l'enseignement de l'arithmétique, d'après de tels ouvrages, où la mémoire est uniquement exercée? Si vous retenez complètement toutes les règles du calcul, quelque multipliées qu'elles soient ; vous ne connaîtrez pas encore la science des nombres : il se présentera des circonstances numériques, que vos règles n'auront pas prévues ; et alors vous serez arrêté : il vous faudra de nouvelles règles ; mais comment les trouverez-vous, si la logique du calcul ne vous est pas familière ?

II. Pour que l'étude de l'arithmétique soit complète et réellement profitable, il faut posséder entièrement les premières notions, résumées par de bonnes définitions ; il faut retenir, non les règles, d'ailleurs aussitôt oubliées qu'apprises, si l'on n'en fait un usage journalier ; mais les raisonnements analytiques par lesquels ces règles sont amenées ; il faut enfin se familiariser avec cette marche analytique, laquelle est indispensable pour se rendre compte des procédés du calcul, pour les simplifier et les ériger en *règles*, quand ces règles sont nécessaires à la rapidité du calcul et à l'exactitude de la solution du problème. C'est même là le seul moyen efficace de parvenir à des règles faciles : on les retiendra d'autant mieux que l'on connaîtra mieux la méthode analytique qui les a fait découvrir ; car le jugement est le guide le plus sûr de la mémoire.

III. Il est tout simple d'ailleurs de bien retenir les règles à suivre pour résoudre les problèmes numériques, qui dépendent de la profession que l'on exerce : les banquiers et les négociants ne pensent même pas aux énoncés des procédés ; mais ils les appliquent, avec d'autant plus de sureté et de rapidité, que chacun est devenu, pour eux, un mécanisme parfaitement connu, d'après l'usage journalier. Toutefois, pour la perfection de ce mécanisme, il a fallu généraliser, d'après l'analogie, l'énoncé de chaque genre de problème, et cela en observant qu'un raisonnement arithmétique, bien que fait sur des chiffres, n'en est pas moins *général*, si sa forme ne varie point en passant des nombres particuliers proposés à d'autres nombres analogues; ou bien ce qui est plus simple, en représentant chaque nombre, *connu* ou *inconnu*, par une lettre de l'alphabet; laquelle n'a aucune signification numérique particulière. Dans ce dernier cas, ayant la règle sous la forme la plus concise, on voit mieux les exceptions auxquelles cette règle est assujettie; et de là vient la grande utilité de l'*Arithmétique généralisée*, servant d'ailleurs à passer de la simple arithmétique à l'algèbre élémentaire. Mais remarquons-le bien, pour résoudre les problèmes d'arithmétique, les règles sont inutiles : il suffit de bien comprendre le raisonnement analytique qui a fourni la solution particulière; car ce raisonnement pouvant se répéter sur tous les problèmes analogues, est lui-même la règle la plus sure et la plus claire.

IV. En général, soit qu'il s'agisse de démontrer un principe de calcul ou de résoudre un problème numérique, on ne peut y parvenir, clairement et sûrement, que par une seule méthode, savoir l'*analyse logique* de l'énoncé, la *méthode analytique*, en un mot. La théorie des *proportions*, elle-même, que l'on s'obstine encore, dans quelques livres d'arithmétique, à faire servir à la résolution des problèmes, bien qu'on y ajoute ainsi une difficulté de plus, est essentiellement analytique. Cette théorie n'est vraiment utile qu'en géométrie, pour y énoncer différentes *propositions*, sous la forme la plus claire et la plus concise; mais elle n'en doit pas moins être établie dans l'Arithmétique généralisée.

Quant à la mise des problèmes en *proportions*, elle donne lieu à trois méthodes, et en définitive à une seule : la méthode analytique, essentiellement *analogique* ici. Par exemple, *si* 4^m *de drap ont coûté* 60 *fr.; combien coûteront* 5 *mètres de la même étoffe?* Il est évident que le prix x cherché se trouve avec 60 fr., absolument comme 5^m se trouvent avec 4^m; or, 5 est les 5 quarts de 4; donc aussi x est les 5 quarts de 60, et par conséquent $x=75$ francs. On voit que 5 quarts est à la fois le *rapport* de 5 à 4 et le *rapport* de x à 60; ce qui donne la *proportion* $x:60=5:4$. Mais cette proportion est un véritable détour, pour calculer x.

De même, 1200 *kilos de pain, suffisant pour nourrir* 600 *hommes pendant* 4 *jours, suffiront aussi pour nourrir, pendant* 6 *jours, un certain nombre* x *d'hommes, réduits à la même ration journalière; quel est ce nombre* x ? Puisque la ration journalière est la même, le nombre de rations doit être le même, dans les deux cas, pour faire chaque fois 1200 kilos ; or, il y a 600×4 rations dans le premier cas et $x \times 6$ dans le second ; par conséquent $x \times 6 = 600 \times 4 = 2400$ et $x = 400$ hommes. L'égalité $x \times 6 = 600 \times 4$ revient à la proportion $x : 600 :: 4 : 6$, absolument inutile pour calculer x. Il eût même été plus clair d'analyser ainsi : nourrir 600 hommes pendant 4 jours, c'est nourrir 4 fois 600 ou 2400 hommes pendant un jour ; donc par jour un homme mange 1200:2400 ou $\frac{1}{2}$ kilo de pain, et en 6 jours, 6 fois $\frac{1}{2}$ ou 3 kilos ; donc, pour manger 1200 kilos, en 6 jours, il faudra 1200:3 ou 400 hommes.

V. Ces deux exemples suffisent, sans doute, pour mettre en évidence les avantages de la méthode analytique ; la seule conséquemment qu'il faille employer en Arithmétique. Mais dans les traités et dans l'enseignement de cette science, non-seulement on n'est pas toujours guidé par l'analyse logique, rendue bien saillante, mais on ne montre pas assez complètement le rôle utile que les nombres jouent dans beaucoup d'usages de la vie sociale ; ces usages portant essentiellement sur les *grandeurs* des choses, et ces grandeurs ne pouvant y figurer que par les nombres qui les *représentent* exactement. Pour bien mettre en évidence l'utilité des nombres, il faut des développements et des exemples choisis, qu'on donne bien rarement ; et je pense qu'il n'est pas hors de propos de rappeler ici quelques-uns de ceux que j'ai indiqués en Arithmétique (8e édit., p. 83 et suiv.).

Si vous me dites que vous avez un gros ballot de drap bleu, première qualité ; si même vous me mettez ce ballot sous les yeux ; aurai-je, par cela seul, une idée exacte de la *grandeur* et de la *valeur* de ce ballot ? Et sans la connaissance parfaite de ces deux choses, puis-je me décider à l'achat de votre drap, bien que sa beauté me séduise ? Mais si vous me dites que le ballot contient 30 mètres de long sur 9 décimètres de large et que le mètre carré de ce drap bleu se vend 42 fr., *prix courant ;* un simple calcul me fera connaître, en unités monétaires, la valeur réelle du ballot. Je pourrai d'ailleurs mesurer le drap, moi-même, et savoir, par expérience, si le prix courant n'est pas trop élevé.

De même, pour renouveler la tapisserie de ma chambre et régler mon compte avec le tapissier, qui me doit 60 fr., il me faudrait mesurer l'étendue superficielle à tapisser ; mais, en consultant un ancien mémoire du tapissier, je vois qu'il a employé 16 pièces de papier, ayant chacune 5^{m} de long sur $0^{m}9$ de large. Sachant d'ailleurs que le papier à fournir coûtera, après qu'il sera posé, 4 fr.

la pièce, longue de 6^m et large de 0^m8, il me sera facile de calculer à l'avance si je redevrai au tapissier ou s'il me redevra, et combien.

VI. Non-seulement les nombres donnent fort exactement l'idée de chacune des grandeurs ou des valeurs qu'ils représentent ; mais cette idée est plus claire et plus complète que si la chose matérielle était sous les yeux. Celle-ci d'ailleurs pourrait ne pas être *visible* ni entièrement *accessible* : mais si sa grandeur ou sa valeur a été réduite en nombre, une fois pour toutes, les opérations s'exécuteront avec facilité sur ce nombre ; lequel représente partout et toujours la grandeur ou la valeur de la chose proposée, si d'ailleurs l'unité de mesure est restée invariable.

Par exemple, le détaillant sait que $4^f 50$ est le prix du kilo de certaine qualité de café ; il sait que son correspondant, à 20 lieues de là, lui fera une remise de 10 pour 100 ; que le transport de 100 kilos lui coûtera 50 centimes par lieue et que les 400 kilos, nécessaires à la consommation de ses pratiques, par mois, auront une enveloppe pesant 12 kilogrammes. Il peut donc calculer la somme qu'il aura à débourser, pour l'achat et le transport de ces 400 kilos, bien qu'il n'ait pas actuellement cette quantité sous les yeux : il peut même calculer d'avance combien il doit vendre le kilo pour gagner 100 fr. sur le tout.

VII. Lorsqu'on projète un ouvrage quelconque, il faut d'abord connaître la dépense en argent que l'exécution de cet ouvrage occasionnera ; et il est naturel alors de chercher les moyens de rendre cette dépense la plus petite possible, sans nuire à la solidité et aux autres qualités de l'ouvrage projeté. Ici le calcul est indispensable, aussi bien que les nombres propres à représenter exactement les valeurs et les grandeurs des choses ; lesquelles n'existent encore que dans l'imagination. De plus, il faut souvent le *mesurage*, pour réaliser les conceptions auxquelles on s'est arrêté, et il faut un *dessin*, propre à les *représenter* aux yeux, sur le papier, lorsque les grandeurs sont *continues ;* comme les *lignes*, les *surfaces* et les *volumes* de la géométrie.

Par exemple, dans une propriété, adjacente à ma maison, je veux établir un verger rectangulaire, d'un hectare de superficie, clos d'un mur ayant un mètre et demi de haut, à partir des fondations dans le terrain, et dont la construction me coûtera 80 centimes par mètre carré de surface intérieure. Après plusieurs essais, fondés sur ce que 10000 mètres carrés est le produit de plusieurs couples de facteurs, je reconnais que la confection du mur me coûtera le moins possible, si je fais du verger un carré, ayant 100^m de côté. De plus, je ferai planter 16 rangées d'arbres fruitiers, à 30 centimes la pièce, en mettant 6^m d'intervalle entre les rangées et les arbres successifs; ce qui nécessitera un intervalle de 2^m entre le mur et la rangée adjacente. Le jardinier, chargé de la plantation des arbres reçoit 4 fr. pour salaire journalier et ne peut creuser journellement que 60 trous. Il doit conduire une brouettée de terreau au pied de chaque arbre, et ne peut faire ainsi que 5 kilomètres de chemin tous les jours. Or, ce terreau, placé sur le verger, me revient à 2 fr. 70 la charettée de 12 brouettées; mais au lieu de le faire placer en un seul tas, je diminuerai de beaucoup le chemin du jardinier, en en plaçant une charettée un tiers au milieu de chaque rangée. De cette manière, je trouve que la moindre dépense totale, pour l'établissement du verger, se réduit à 641 fr. 31 centimes.

VIII. Dans le commerce et pour des achats quelconques, il faut toujours mesurer et compter, calculer et évaluer, pour avoir des nombres. De même, dans les arts et métiers, il faut souvent que les *grandeurs* soient réduites exactement en *nombres*, soit en *comptant* lorsque les parties égales à l'unité sont bien séparées et distinctes, comme pour les 80 arbres que le pépiniériste doit fournir à 40 centimes la pièce; soit en *mesurant* et *comptant* lorsque la quantité est *continue*, comme pour savoir combien coûte chacune des trois feuilles *rectangulaires* et inégales d'un même acajou, payées 48 fr. ensemble; soit enfin en *évaluant* en unités monétaires, quand l'unité de même nature que la grandeur proposée vient à manquer, comme pour la *beauté* d'une peinture ou la *perfection* d'un ouvrage quelconque, ou bien quand le *mesurage direct* est impossible, comme pour le *poids* du bœuf que le boucher veut acheter. Ne pouvant le *peser*, il doit, à la seule inspection de l'animal, pouvoir en estimer le *poids* et la *valeur* en argent; et il lui faut assez d'expérience, dans ces sortes de marchés, pour ne pas commettre d'erreur notable. Aussi le boucher, qui connaît son métier, se trompe-t-il rarement sur la valeur réelle, qu'il obtient ainsi par la comparaison *mentale* et ses souvenirs.

En général, quand le mesurage direct est impossible, on a recours à l'*évaluation*, faite, le plus souvent, *à dire d'expert*. Mais il est différentes sortes de mesurages, fort usités, que chacun peut exécuter. Par exemple, le fermier qui vend 2 fr. le boisseau d'un tas de blé sur son grenier, n'a d'autre moyen, pour savoir combien il recevra d'argent, que de mesurer ce tas en y remplissant les *sacs* de l'acheteur, contenant chacun 6 boisseaux, je suppose, et de compter ensuite les sacs remplis et les boisseaux contenus dans celui qui ne l'est pas, s'il y en a.

IX. De même, le vigneron qui vend 1 fr. 10 le *litre* du vin contenu dans une cuve, garnie d'un robinet, doit *mesurer* cette quantité de vin, d'abord avec le *décalitre*, pour aller plus vite, puis avec le *litre* et avec le *décilitre*, en versant dans les *tonneaux* de l'acheteur. Mais pour ne rien oublier, il doit marquer par un *trait*, fait sur une planche, avec la craie ou une pointe, chaque *décalitre* versé, puis par un trait plus petit chaque *litre* et par un trait plus petit encore chaque *décilitre*. Comptant les traits de chaque groupe, il connaîtra le nombre *décimal* de litres du vin vendu.

Telle est l'origine du *calcul avec les traits*, encore en usage chez quelques détaillants; et c'est la base du *calcul mental*, si rapide, si sûr et si nécessaire. On voit aussi l'utilité qu'il y a d'avoir plusieurs unités pour mesurer le même genre de grandeur.

X. De pareils développements et des applications, ainsi choisies, ne manquent guère de rendre plus claire, plus intéressante et conséquemment plus fructueuse, l'étude de la science des nombres; ils doivent donc figurer dans son enseignement, comme auxiliaires indispensables.

Algèbre I. L'algèbre élémentaire ayant pour but le calcul des nombres, représentés par des signes abréviatifs et généraux, savoir les lettres de l'Alphabet, n'est au fond que l'arithmétique généralisée : c'est toujours la science des nombres; mais c'est la science des nombres, énoncés d'une manière indéterminée. L'étude de l'algèbre est donc d'autant plus facile, que l'on connait mieux l'arithmétique; mais il faut, pour cela, que cette dernière science ait été traitée et enseignée convenablement; ce qui arrive parfois, mais plus rarement qu'on ne le croit d'ordinaire.

II. A en juger par les réponses aux questions proposées dans les concours généraux entre les établissements d'instruction moyenne, l'algèbre paraît bien enseignée dans plusieurs Colléges de Belgique. Cependant, chez les élèves qui se présentent pour la candidature en philosophie et lettres, les études mathématiques sont généralement faibles, aussi bien pour la géométrie que pour l'algèbre. On conçoit que ces deux branches n'étant considérées, bien à tort, sans doute, que comme accessoires, par les aspirants, ils n'en aient fait qu'une étude superficielle. Néanmoins, les interrogations ne décèlent pas seulement peu de travail, chez plusieurs; mais aussi, parfois, l'emploi de mauvaises méthodes. Ainsi, par exemple, bien peu connaissent les définitions, claires et précises, des opérations algébriques, non parce qu'ils les ont oubliées, mais parce qu'on ne leur en a point parlé, ni dans les leçons, ni même dans les livres.

Il est, en effet, plusieurs traités élémentaires d'algèbre où ces définitions, bases de la science, sont à peine mentionnées ; et on les regarde comme identiques avec les définitions des opérations de l'arithmétique. C'est une extension, inspirée par l'analogie; mais cette extension a besoin d'être légitimée, d'une manière quelconque. Car, à raison des signes, qui viennent compliquer les opérations de l'algèbre, l'analogie entre ces opérations et celles qui leur correspondent en arithmétique, est beaucoup trop éloignée, trop peu évidente, pour qu'on puisse négliger de la rendre complète, en généralisant les définitions et les démonstrations de l'arithmétique, pour les approprier à l'algèbre.

D'ailleurs, les définitions des opérations de l'arithmétique sont-elles toujours bien posées, elles-mêmes? y énonce-t-on, bien clairement, par exemple, ce que c'est que multiplier un nombre par une fraction? Il y a ici une extension d'idée, qu'on ne saurait passer sous silence, sans tomber dans le vague et l'obscur. Il est vrai que cette extension est assez naturelle, pour qu'on dise que, multiplier 5 par 3 quarts, c'est répéter 5 *trois quarts de fois;* et comme 3 quarts de fois 5, c'est les 3 quarts d'une fois 5, c'est les trois quarts de 5, on peut dire que multiplier 5 par 3 quarts, c'est prendre les 3 quarts de 5; et en général, que *multiplier un nombre quelconque par une fraction, c'est en prendre cette fraction.*

Cette définition suffit à l'arithmétique proprement dite: elle y est nécessaire; et pourtant elle n'y est pas énoncée, le plus souvent. Encore moins y trouve-t-on celle-ci, qui embrasse tous les systèmes de valeurs et qui s'applique immédiatement à l'algèbre, savoir : *le produit se trouve en opérant sur le multiplicande, comme le multiplicateur en opérant sur l'unité.* C'est là *le principe d'analogie directe;* car le produit est au multiplicande, ce que le multiplicateur est à l'unité.

III. Les démonstrations du calcul des fractions algébriques ne sauraient être les mêmes que celles du calcul des fractions arithmétiques; et cependant plusieurs auteurs, fort en vogue, le supposent, comme si la chose était vraie. Toute fraction algébrique n'étant que le quotient indiqué du numérateur par le dénominateur, est-il donc si difficile de démontrer le calcul des fractions littérales, en désignant la *valeur* de chacune par une lettre? Et ne faut-il pas ces démonstrations, si différentes des démonstrations correspondantes de l'arithmétique, et au moins aussi simples?

Sans de bonnes définitions et les démonstrations, qui en résultent immédiatement, il n'y a pas de science; il ne faut donc pas négliger ces deux choses essentielles, en algèbre, et faire ainsi de cette science une routine aveugle; car l'algèbre, où tout peut être défini et démontré, est une science importante, qui devient très-simple et très-claire, par le principe d'analogie directe.

IV. Le seul fait de l'emploi des lettres pour représenter des nombres *quelconques*, rend les règles et les formules de l'algèbre complètement *générales*, c'est-à-dire applicables à tous les problèmes analogues. Mais cette généralité complète, que l'on accorde volontairement aux règles et aux formules de l'algèbre, doit être démontrée pour chaque question générale, soit par extension des définitions ou par une convention immédiate, bien motivée, soit par *induction* ou par *analogie*, d'après ce fait évident que *la valeur particulière d'une lettre ne saurait changer aucunement les opérations indiquées dans la formule*. En un mot, chaque règle ou chaque formule n'est complètement générale que par le principe d'analogie directe, en vertu duquel *toutes les grandeurs, comprises dans la même définition, générale et complète, sont exprimées numériquement absolument de la même manière, au moyen des valeurs numériques de leurs éléments générateurs analogues* (éléments analogues nécessairement de même dénomination et représentés par la même lettre). La démonstration alors est bien facile; elle revient uniquement à établir clairement, d'après la définition, que les grandeurs, auxquelles on veut appliquer la formule trouvée pour l'une d'entre elles, ont le même mode de génération que cette dernière.

V. Maintenant, pour que les règles et les formules de l'algèbre soient complètement générales, il faut qu'elles puissent s'appliquer, quels que soient les nombres qui en sont l'objet; or, cela exige le calcul des *symboles*, tels que -4, 3 sur 0, 0 sur 0, $\sqrt{-9}$, etc. Ce calcul est absolument inévitable, en algèbre; car pour avoir la formule, qui a donné l'un de ces symboles, nous avons opéré sur celui-ci, à notre insu, en le traitant comme une véritable quantité numérique; de sorte que *nous l'avons soumis aux mêmes règles de calcul et aux mêmes principes que les nombres réels*. Or, une telle extension est-elle permise? c'est ce qu'il faut démontrer, et c'est ce qu'on fait rarement, d'une manière complète, dans les ouvrages élémentaires ; d'où résultent nécessairement plusieurs difficultés à expliquer.

Le calcul des symboles se réduit finalement à celui des *quantités négatives isolées ;* et ce dernier calcul peut s'établir en vertu de la généralité complète attribuée à chaque formule, où l'on peut par conséquent égaler à zéro la quantité qui est *censée* précéder chaque terme négatif, parce que cette quantité ne fait pas l'objet du calcul actuel et ne doit pas y être conservée : c'est alors une simple *auxiliaire*, pour faciliter les raisonnements. Par exemple, s'il faut multiplier a par $-c$, on multipliera d'abord a par $b-c$, ce qui donnera $ab-ac$; puis le nombre auxiliaire b n'étant pas l'objet du calcul proposé, doit disparaître du produit obtenu ; ce qui revient à y faire $b=0$: donc $a\times -b=-ab$.

On peut aussi établir, avec facilité, le calcul des quantités négatives isolées, lorsque les opérations algébriques sont clairement et complètement définies, et cela *en partant de ces définitions.* Ainsi, dans $a\times -c$, le multiplicateur $-c$ se trouve en multipliant l'unité par c et en changeant le signe du produit c ; donc le produit de a par $-c$ se trouvera en multipliant a par c et en changeant le signe du produit ac ou $+ac$; ce qui donne encore $-ac$, pour le produit de a par $-c$.

VI. Lorsqu'en résolvant un problème, on trouve un symbole pour l'inconnue, ce problème est impossible; mais on arrive à un autre problème en *interprétant* ce symbole, c'est-à-dire en cherchant quel changement l'énoncé proposé doit éprouver, pour qu'il soit possible, avec les mêmes nombres donnés, et pour qu'il soit résolu par les mêmes calculs généraux, qu'on est ainsi dispensé de recommencer. L'interprétation des symboles est importante; comment se fait-il donc qu'elle soit si négligée dans l'algèbre élémentaire et surtout dans son enseignement ? On n'y fait pas bien remarquer que quand le symbole provient d'une soustraction, son interprétation revient uniquement à remplacer, par une addition, la soustraction qui le produit ; ce qui revient enfin à changer simplement le signe d'une lettre ou de plusieurs. Je crois avoir établi complètement le premier, que l'*interprétation des symboles, même des symboles fractionnaires, se réduit finalement à changer la nature de l'inconnue ou de quelques données.* De sorte que le problème proposé étant impossible, il y a toujours un problème analogue, résolu avec les mêmes nombres donnés et par la formule modifiée.

C'est ce qu'il importe de rendre bien sensible, par des exemples choisis, afin de rendre claire et familière l'interprétation des symboles, base de la trigonométrie et de la géométrie analytique. Mais le zéro étant *absolu*, il faut bien se garder de dire, comme on le fait ordinairement, que 1 sur $0=\infty$, comme cela aurait lieu si le zéro était *relatif* ou un nombre *infiniment petit* : 1 sur 0 est un signe d'absurdité ; car dans $x=1$ sur 0, qui revient à $0\cdot x=1$, le quotient x est absolument impossible. Il importe de remarquer d'ailleurs qu'*une quantité variable ne peut devenir négative, de positive qu'elle était, qu'en passant par l'infiniment petit et le zéro absolu, ou par l'infiniment grand et l'absurde ;* comme la *tangente*, en *trigonométrie*.

VII. Presque toujours on définit une *équation* en disant que c'est l'expression de l'égalité de deux quantités ; mais cette définition est loin d'être complète et ne fait point connaître l'équation. Aussi demandez à l'élève quel rôle doit remplir la valeur de l'inconnue dans l'équation ? A quoi les équations sont-elles nécessaires ? Qu'est-ce que *résoudre* une équation ? Et pourquoi faut-il que chaque transformation ne détruise pas l'égalité des deux membres ? Ces quatre questions, bases de la théorie des équations, resteront le plus souvent sans réponses valables.

La *résolution* et la *discussion* sont très-faciles dans chacune des équations du premier degré, à une inconnue x, savoir :

$$\frac{a-c}{x+c}=\frac{a}{x},\ \frac{a^2}{x-c}=\frac{c^2}{x-a}\ \text{et}\ \frac{c}{a}-\frac{a}{x}=\frac{a}{c}+\frac{c}{x}.$$

La *discussion* des équations revient à l'interprétation des symboles : pour les équations générales du premier degré, à plusieurs inconnues, la discussion est fort compliquée et fort inutile, heureusement, puisqu'elle rentre dans la discussion des équations à une inconnue. D'ailleurs, les formules pour plusieurs inconnues, du premier degré, pouvant induire en erreur, comme donnant parfois un symbole pour un autre, et exigeant au moins autant d'opérations particulières, pour calculer les inconnues, que la résolution directe des équations proposées, numériques ou littérales ; ces formules sont inutiles, et l'on ne doit s'en occuper que pour appliquer les différentes méthodes d'élimination et savoir ainsi quelle est celle de ces méthodes que l'on doit préférer. Car il y a un choix à faire parmi elles, aussi bien que parmi les données et les inconnues du problème, pour en obtenir la solution la plus simple, et même pour la rendre possible, dans les équations de degrés supérieurs au premier. Voilà encore une partie importante sur laquelle on n'insiste pas assez dans les livres ni dans l'enseignement. Aussi, faute d'avoir été exercés sur les méthodes *particulières* d'élimination, les élèves sont-ils fort embarrassés pour résoudre des problèmes très-simples, tels que ceux-ci : 1° calculer les deux nombres dont on connait la différence des cubes et le produit de leur différence par leur produit ; 2° Calculer trois nombres en proportion continue, connaissant, soit la somme de ces trois nombres et la somme de leurs carrés ou de leurs cubes, soit la somme des carrés de ces trois nombres et la somme de leurs puissances quatrièmes.

VIII. Il est un point d'analyse, fort négligé dans les éléments, bien que fondamental en algèbre : c'est la *décomposition en facteurs*, d'après les résultats les plus saillants de la multiplication, résultats énoncés sous formes de théorèmes ; comme le produit de la somme par la différence, le carré ou le cube d'un binome, etc. Cette décomposition en facteurs, qui exige parfois l'*introduction de termes qui se détruisent*, et à laquelle on s'habitue bientôt, par des exemples choisis convenablement, est d'autant plus importante, qu'elle peut souvent abréger la division algébrique : c'est même le procédé le plus simple pour trouver le *plus grand commun diviseur* de deux polynomes, *rationnels et entiers ;* vu que ce p. g. c. d. est le produit de tous les facteurs *premiers*, communs aux polynomes.

Non-seulement la décomposition en facteurs est indispensable à la *construction des valeurs*, dans les problèmes *graphiques*, et aux applications du calcul *logarithmique*, où souvent, pour la rendre possible, il faut une *inconnue auxiliaire ;* mais cette décomposition, base de la *trigonométrie numérique*, facilite la résolution de certaines équations ; et c'est même alors le seul moyen que l'on puisse employer parfois, comme pour calculer la valeur en degrés de l'angle x, dans chacune des équations

$$2\sin x+\sin 2x=\sin\tfrac{1}{2}x \text{ et } 2\sin x-\sin 2x=\cos\tfrac{1}{2}x.$$

De même, la décomposition en facteurs abrège singulièrement la résolution de l'équation $x^3-ax^2-a^2x+a^3=0$.

Comment donc ce moyen d'abréviation peut-il être si négligé dans les éléments d'algèbre et surtout dans l'enseignement de cette science? Comment n'a-t-on pas vu encore que la théorie, la plus claire et la plus simple, des équations du second degré, à une inconnue x, est basée sur la décomposition en facteurs du trinome ax^2+bx+c?

Multipliant en effet, ce trinome par a, afin d'éviter des fractions littérales, puis introduisant $\frac{1}{4}b^2-\frac{1}{4}b^2$, il est clair qu'on aura successivement

$$(ax)^2+b(ax)+\tfrac{1}{4}b^2-\tfrac{1}{4}b^2+ac=(ax+\tfrac{1}{2}b)^2-(\tfrac{1}{4}b^2-ac)$$
$$=[ax+\tfrac{1}{2}b-\tfrac{1}{2}\sqrt{(b^2-4ac)}][ax+\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{2}\sqrt{(b^2-4ac)}].$$

Posant donc, pour abréger,

$$\left.\begin{array}{l} ax'=-\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{2}\sqrt{(b^2-4ac)}, \\ ax''=-\tfrac{1}{2}b-\tfrac{1}{2}\sqrt{(b^2-4ac)}\,; \end{array}\right\}\ldots(1)$$

puis substituant et réduisant, on trouvera

$$ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x'').$$

Ces deux expressions sont *identiques*, c'est-à-dire ne diffèrent que par la forme. Observant, en effet, qu'on a évidemment, d'après (1), les deux relations :

$$a(x'+x'')=-b \text{ et } ax'x''=c\,;\ \ldots(2)$$

on verra, en effectuant les multiplications, que $a(x-x')(x-x'')$ devient d'abord $ax^2-a(x'+x'')+ax'x''$, et ensuite ax^2+bx+c.

IX. Maintenant, résoudre l'équation $ax^2+bx+c=0$, où l'inconnue est x, c'est résoudre l'équation identique $a(x-x')(x-x'')=0$. Il s'agit donc de calculer les valeurs de x qui réduisent à zéro le premier membre de cette équation ; or un produit ne saurait être nul, évidemment, que par l'un au moins de ses facteurs : le facteur a n'étant pas nul, il faut que l'un des deux autres facteurs soit zéro; et comme il n'y a pas de raison pour que ce soit l'un plutôt que l'autre, on doit écrire simultanément

$$x-x'=0 \text{ et } x-x''=0\,;\ \text{d'où } x=x' \text{ et } x=x''.$$

A cause de $2ax=2ax'$ et de $2ax=2ax''$, il vient en substituant,

$$2ax=-b\pm\sqrt{(b^2-4ac)}\ \ldots.\ (3)$$

Telle est la double formule pour calculer les deux valeurs x' et x'' de x, dans $ax^2+bx+c=0$ ou dans $a(x-x')(x-x'')=0$. Si donc x pouvait avoir une troisième valeur v, différente des deux premières x' et x'', il faudrait qu'on eût $av^2+bv+c=0$, c'est-à-dire $a(v-x')(v-x'')=0$; chose évidemment impossible. Donc *toute équation du second degré, à une inconnue, a toujours deux racines et jamais plus.*

Il importe de remarquer les deux relations (2), parce qu'elles reçoivent plusieurs applications utiles et servent à faciliter la résolution des deux équations $xy=6$ et $x^3-y^3=19$, ou des deux

$$xy=a \text{ et } x^n+y^n=b.$$

La discussion de la formule (3) conduit à interpréter les solutions négatives et imaginaires; et il en résulte que *toute équation du second degré, à une inconnue, résout toujours deux problèmes analogues ou deux fois le même problème.* Si $a=0$, la formule (3) donne $x=0$ sur 0 et $x=-2b$ sur 0; valeurs que ne donne pas l'équation proposée, qui alors se réduit à $bx+c=0$. Mais cela tient au facteur *étranger* $2a$, introduit par la résolution, dans les deux membres de (3); et pour mettre ce facteur en évidence, il suffit de multiplier des deux côtés du signe $=$, dans (3), par $b\pm\sqrt{(b^2-4ac)}$. Supprimant alors ce facteur commun $2a$, puis faisant $a=0$, il vient les deux véritables racines $x=-c$ sur b et $x=-2c$ sur 0.

X. La discussion des équations du second degré, à une inconnue, est rarement complète, dans les ouvrages d'algèbre: le plus souvent on n'y interprète pas les *solutions imaginaires;* interprétation toute aussi importante cependant que celle des *solutions négatives*, elle-même souvent fort négligée. On ne fait pas voir non plus que l'*inconnue ne devient imaginaire, de réelle qu'elle était, qu'en passant par le maximum ou par le minimum d'un certain nombre variable;* bien que la chose soit très-facile. Car a, b, c pouvant varier successivement ou deux ensemble, dans la formule (3), il en résulte, avec évidence, que *chaque fois la plus grande et la plus petite valeur du nombre variable rendent nulle la quantité sous le radical du second degré*, et donnent simultanément

$$b^2-4ac=0 \text{ et } 2ax=-b.$$

Cette proposition est la base de la théorie importante de *maximums* et des *minimums du second degré;* lesquels sont fournis par la résolution d'une équation, que l'on peut ramener au second degré, par rapport à chacune des inconnues qu'elle renferme, et où se trouvent le nombre variable et les nombres donnés. Cette théorie que nous avons développée complètement en algèbre, comme partie essentielle des éléments, s'applique même aux équations de degrés supérieurs au second, pourvu chaque fois que l'équation soit *symétrique* par rapport aux deux inconnues x et y: on pose alors $x=v+u$ et $y=v-u$.

Il en résulte un grand nombre d'applications, aussi utiles que remarquables, en géométrie et en mécanique, comme nous en citerons plus bas quelques-unes; et en particulier, il en résulte le calcul le plus simple des *axes principaux*, dans les courbes et les surfaces du second ordre.

Cependant, ce n'est que dans les ouvrages modernes, depuis celui de Lhuillier, que l'on fait quelque mention des maximums et des minimums du second degré, et encore se borne-t-on à une seule inconnue. On renvoit la théorie complète au *calcul différentiel*, comme si cette théorie ne pouvait se traiter facilement en algèbre et ne devait pas y figurer, non-seulement pour compléter la discussion; mais surtout pour rendre les éléments d'algèbre d'une utilité plus étendue, sans les rendre d'une étude plus difficile. La théorie ci-dessus simplifie, d'une manière notable, celle du calcul différentiel, dans les recherches de même genre, et y supplée souvent avec avantage.

XI. Le calcul des radicaux, celui des exposants d'une nature quelconque, et la théorie des irrationnels, ne laissent à désirer, dans les éléments, que parce qu'on n'y applique pas assez immédiatement le principe d'analogie directe. Quant à la notation des lettres *numérotées*, analogue à celle des exposants, elle n'était guère employée, dans les éléments d'algèbre, avant que nous ne l'y eussions introduite nous-même. Cependant cette notation très-simple, servant à indiquer le *rang* que tient un *terme* dans une suite d'autres, représentés par une même lettre, et liés entre eux par une loi constante, connue ou inconnue, simplifie singulièrement la théorie des *arrangements* et des *combinaisons*, aussi bien que la théorie des *séries élémentaires*, où il faut calculer, soit l'expression du *terme général*, soit l'expression de la somme des n premiers termes de la série. Chaque fois il faut résoudre l'équation *à numéros*, qui exprime la loi de la série; ce à quoi l'on parvient souvent en éliminant, soit par voie de multiplication, soit par voie d'addition d'équations, comme dans la *série récurrente* du *second ordre* :

$$at_{\nu+2}=(a+b)t_{\nu+1}-bt_{\nu},$$

où a et b sont des nombres constants, positifs ou négatifs, et où t_{ν}, $t_{\nu+1}$, $t_{\nu+2}$ sont trois termes consécutifs quelconques de la série.

XII. Il est plusieurs séries importantes, en algèbre et en trigonométrie, propres à résoudre différents problèmes de mécanique appliquée, que l'on réserve ordinairement au calcul différentiel et au calcul intégral; quoiqu'elles puissent se traiter, avec facilité, en algèbre, d'après la *méthode infinitésimale*, dont les notions doivent y être développées avec soin, comme servant de base à diverses théories scientifiques, et en particulier à la *mécanique industrielle.* Cette dernière science, dont l'étude est désormais indispensable, doit être accessible au plus grand nombre de lecteurs et d'étudiants; or elle le devient par des éléments d'algèbre, de géométrie et de trigonométrie, convenablement traités et suffisamment complets.

XIII. Les conceptions géométriques établissent, avec l'évidence la plus entière, l'existence réelle des *infinis* du premier *ordre*, du second et du troisième; d'où résulte, avec la même évidence, l'existence réelle des *infiniment petits* du premier, du second et du troisième ordre. Les mêmes conceptions démontrent aussi, fort complètement, que *toute grandeur est comme nulle et doit se négliger vis-à-vis de celle qui la contient une infinité de fois* : c'est donc un *zéro relatif* à cette dernière. Tel est le principe de la méthode *infinitésimale*, c'est-à-dire de la méthode où l'on calcule des nombres *finis* à l'aide de nombres *infiniment grands* et de nombres *infiniment petits;* lesquels sont alors les *éléments générateurs auxiliaires* des grandeurs *finies* proposées.

Mais, sans considérer *explicitement* les grandeurs infinitésimales, on peut démontrer comme il suit le principe ci-dessus : Supposons que dans une recherche numérique quelconque, on soit parvenu à l'égalité $a=b\pm v$, a et b étant deux nombres *constants* et v un nombre *variable*, susceptible de devenir aussi petit qu'on voudra, sans que l'égalité proposée cesse d'exister; je dis que le nombre a ne dépend aucunement de v. Car si cela était; comme b est un nombre constant et que $b\pm v$ est nécessairement variable avec v, il s'ensuivrait que a, toujours égal à $b\pm v$, varierait aussi et ne serait point un nombre constant; contrairement à l'hypothèse : donc a ne dépend aucunement de v et par conséquent $a=b$, absolument comme si le nombre variable v était rigoureusement nul dans $a=b\pm v$. Or, v pouvant être supposé aussi petit qu'on voudra, sans que l'égalité $a=b\pm v$ cesse d'exister, on peut supposer v *infiniment petit;* et par conséquent v est comme nul vis-à-vis du nombre fini b, qui le contient une infinité de fois.

De même, si $a, b, c, d, \ldots, a', b', c', d', \ldots$, sont des nombres constants inconnus et x un nombre variable susceptible de devenir aussi petit qu'on le veut, sans que l'égalité que voici cesse d'exister :

$$a+bx+cx^2+dx^3+\text{etc.}=a'+b'x+c'x^2+d'x^3+\text{etc.};$$

on aura séparément $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$, etc. C'est à la fois le principe de la méthode infinitésimale et celui de la méthode des *coefficients indéterminés*, celle-ci étant, aussi bien que l'autre, une application du *principe d'analogie directe.*

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE I. De toutes les branches de mathématiques, la géométrie élémentaire est certainement la plus facile à étudier et à enseigner, quand elle est présentée convenablement et précédée par la connaissance de l'arithmétique généralisée ou des éléments d'algèbre; connaissance indispensable pour une étude approfondie de la géométrie. C'est qu'en géométrie les définitions peuvent recevoir la clarté et la simplicité les plus complètes; clarté et simplicité qui se répandent sur les théories, lorsqu'on sait les déduire immédiatement des définitions; celles-ci étant indispensables à la science, comme sources les plus claires des vérités qui la constituent.

II. S'il est vrai qu'une définition bien faite renferme toute une science, il s'ensuivra qu'en géométrie, un bon choix de définitions est de la plus haute importance pour les théories et l'étude la de grandeur définie. Car si la définition est incomplète et par conséquent obscure, les *propriétés* de la figure, qui sont conséquences immédiates de sa définition, ne pourront s'en déduire clairement; et même plusieurs de ces propriétés, peut-être les plus utiles, pourront rester inaperçues.

Cependant combien peu voyons-nous de bons livres élémentaires de géométrie, bien que cette science soit l'une des plus faciles à traiter. Non-seulement tous pèchent par l'ordre et la méthode, mais aussi par les définitions. Par exemple, dans l'un de ces livres, on appelle *droite*, la ligne dont toutes les parties ont la même direction. Or, n'est-ce pas ainsi définir le même par le même? Et d'ailleurs, pour être compris, ne faut-il pas encore définir le mot *direction?*

Toutes les bonnes définitions de la ligne droite reviennent à celle-ci : on appelle *droite*, la plus courte de toutes les lignes joignant un point à un autre; *et cette ligne la plus courte est nécessairement unique.* Cette définition n'est si généralement admise, que parce qu'elle donne, de la ligne droite, l'idée la plus claire et la plus complète, acquise par l'expérience journalière de chacun.

De même, si l'on appelle *angle*, la quantité plus ou moins grande dont deux droites qui se coupent sont écartées l'une de l'autre, quant à leur position, on ne fait pas connaître l'angle, tel qu'il est réellement. Car qu'est-ce que cette *quantité plus ou moins grande*, qui appartient nécessairement à la géométrie ? Est-ce une ligne, une surface ou un volume ? C'est ce que ne disent point les auteurs de cette définition ; laquelle par conséquent est fort obscure.

Est-il étonnant, d'après cela, que la théorie des parallèles, basée sur cette définition incomplète de l'angle, soit si difficile et si peu satisfaisante ? C'est à tel point, que plusieurs géomètres, du premier ordre, ont proposé d'introduire un nouvel axiome, pour simplifier cette théorie importante ; et chose remarquable, c'est qu'ils admettent la longueur illimitée de chacun des côtés de l'angle, sans vouloir le regarder tel qu'il est en effet, *une portion plane infinie* ; laquelle est précisément la *quantité plus ou moins grande*, mentionnée dans la définition, et cela comme ne pouvant être qu'une quantité géométrique, et parce que deux droites, qui se coupent, sont dans un seul et même plan.

III. On dit aussi que la *ligne courbe* n'est ni droite ni composée de lignes droites. Par cette définition négative, nous voyons bien ce que n'est pas la ligne courbe ; mais il serait bien plus utile de nous apprendre ce qu'elle est réellement ; chose d'ailleurs très-facile, en vertu de sa *description*.

Car, remarquons-le bien, toutes les bonnes définitions, en géométrie, sont *descriptives*, c'est-à-dire énoncent les *éléments générateurs* de la quantité définie. Donc mieux ces éléments générateurs seront mis en évidence, par la définition, complète et générale, plus sera facile l'étude des propriétés de la quantité proposée.

Pour décrire une ligne courbe, il faut que la *pointe* à tracer, pendant les instants successifs infiniment petits, s'avance infiniment peu successivement vers une suite de points fixes, infiniment voisins les uns des autres : elle décrit donc des droites successives infiniment petites, lesquelles sont les *éléments générateurs* de la courbe et chaque élément faisant un angle infiniment petit avec le prolongement de celui qui le précède immédiatement. C'est même la valeur de chacun de ces angles, infiniments petits, qui détermine la *courbure* de la ligne au point, sommet de cet angle. La *ligne courbe* est donc une *ligne brisée*, composée d'une infinité de *côtés* ou *éléments*, infiniment petits chacun.

IV. C'est ainsi que le développement des premières notions de la géométrie amène, inevitablement, un autre *ordre* de grandeurs, savoir les *quantités infinitésimales*. On peut bien ne pas en faire mention, dans les définitions et dans les raisonnements ; mais elles s'y présenteront toujours et n'y seront que mal déguisées. Et n'est-ce pas le soin que l'on met à ne point parler des quantités infinitésimales, chaque fois qu'elles se présentent inévitablement, qui rend si difficiles et si obscures certaines théories géométriques? Voyez par exemple, combien sont longs et incompréhensibles les raisonnements pour établir l'égalité des rapports de deux couples de quantités *incommensurables entre elles*, où l'on veut éviter les mesures communes *infiniment petites*, qu'on est cependant forcé d'employer implicitement, pour arriver à une conclusion, présentant un sens raisonnable.

Deux quantités, de même nature, sont dites *incommensurables entre elles*, non parce qu'elles n'ont absolument aucune mesure commune (car alors elles n'auraient aussi absolument aucun rapport); mais parce que leur mesure commune est *inassignable* ou *infiniment petite.* De sorte qu'il y a toujours commune mesure et qu'il n'existe aucun couple de quantités, que l'on puisse appeler *incommensurables*, comme n'ayant absolument aucune mesure commune; vu qu'alors aussi elles n'auraient absolument aucun *rapport;* et comment raisonner sur une chose, qui n'existe pas?

Non-seulement la distinction de l'*incommensurable* et du *commensurable* est contraire aux règles d'une saine logique; mais cette distinction a rendu moins accessible, aux diverses intelligences, l'étude de la géométrie, par les difficultés dont elle l'a compliquée, en la rendant moins exacte; et ce n'est pas une des conséquences les moins fâcheuses de l'emploi de mauvaises méthodes, dans l'exposition des théories de la belle et utile science de l'étendue.

V. On n'insiste pas assez, soit dans l'enseignement, soit dans les livres mêmes, sur la distinction importante de géométrie *graphique* et de géométrie *numérique :* aussi arrive-t-il souvent, faute de rendre cette distinction bien saillante, que les élèves, confondant ces deux genres de géométrie, n'ont en réalité que des notions vagues et fort incomplètes de l'un et de l'autre. Dans l'énoncé: *l'aire d'un rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur;* demandez à l'élève s'il pense que la base et la hauteur soient ici des droites réelles? il vous répondra, le plus souvent, affirmativement, et prouvera ainsi qu'il ne comprend pas cet énoncé. Et combien d'autres propositions, qu'il ne comprend pas davantage, faute de notions clairement développées!

La géométrie graphique, ayant pour but la construction des figures et leur dessin sur le papier ou sur le tableau, facilite singulièrement l'étude de leurs propriétés, en remplaçant ainsi ces figures par d'autres *semblables*, mises sous les yeux ; mais elle ne donne pas l'idée précise de leurs *grandeurs* ou *étendues*. La géométrie numérique, au contraire, ayant pour objet le *mesurage* de chaque figure ou sa réduction en *nombre*, donne partout et toujours l'idée complète de sa grandeur, en supposant toutefois que l'*unité*, bien connue, demeure invariable.

On a ainsi des *lignes numériques*, appelées *longueurs;* des *surfaces numériques*, nommées *aires*, et des *espaces numériques*, appelés *volumes* ou *corps géométriques*. C'est ainsi que *le parallélipipède numérique est toujours le produit de ses trois dimensions numériques :* c'est un rapport composé du produit de trois autres rapports ; les conséquents étant le *cube*, unité de volume, dans le premier rapport, et son côté, unité linéaire, dans les trois derniers.

VI. En trigonométrie, les définitions doivent être graphiques, pour la clarté ; et ainsi il y a une trigonométrie graphique et une trigonométrie numérique : il ne faut pas confondre ces deux genres distincts. Que gagnerait-on, par exemple, à nommer *sinus* d'un angle ou d'un arc, le *rapport* ayant pour antécédent la perpendiculaire abaissée d'une extrémité de cet arc sur le diamètre qui passe par l'autre extrémité, et pour conséquent le rayon même de l'arc proposé? La perpendiculaire, considérée en elle-même, n'aurait donc pas de dénomination ; ce qui serait, pour la clarté, un inconvénient très-grave : il est certainement préférable d'appeler *sinus*, cette perpendiculaire même, et de réserver le nom de *sinus numérique* à son rapport au rayon, pris pour unité linéaire.

VII. Pourquoi les théorèmes relatifs au *mesurage* et à l'évaluation numérique des grandeurs géométriques, ne sont-ils pas généralement bien compris par les élèves? C'est parce que, dans les démonstrations, on perd trop de vue l'opération *matérielle*, savoir la recherche de *la plus grande mesure commune*, qui doit fournir le nombre demandé ; c'est qu'on n'a pas montré clairement le but et l'importance de cette opération, où, pour avoir l'idée complète de l'étendue proposée, il faut la *mesurer*, l'exprimer exactement en *nombre* et enfin, trouver, du moins avec une approximation suffisante, son *rapport* à l'*unité* de même nature, celle-ci étant invariable et bien connue, comme le *mètre* pour les *longueurs*, le *mètre carré* pour les *aires* et le *mètre cube* pour les *volumes*. Or, ce rapport ne peut s'obtenir, par le mesurage *effectif*, que pour les droites tracées (ou pour les arcs circulaires de même rayon) ; et encore alors faut-il que les droites soient *visibles* et entièrement *accessibles*.

Pour les angles, les surfaces et les corps géométriques, le mesurage ne peut s'exécuter *directement*, c'est-à-dire en divisant *effectivement* l'étendue proposée en parties égales à l'*unité*, ou égales à une partie déterminée de cette unité : le mesurage alors ne peut être qu'*indirect*, en remplaçant le rapport cherché par un autre égal, simple ou composé, mais plus facile à trouver exactement.

Par exemple, comment mesurer sur le terrain, avec l'unité superficielle s, carré construit sur l'unité linéaire u, l'étendue ou l'aire du rectangle R, dont la base b et la hauteur h sont tracées? Ici on n'a pas *matériellement* l'unité s; et l'aurait-on d'ailleurs, il serait impossible de l'employer, même lorsque le terrain rectangulaire à réduire en nombre serait entièrement accessible et tous ses points de niveau, comme ceux d'un plancher. Il faut donc nécessairement ramener le mesurage de R avec s à d'autres que l'on puisse effectuer sur le terrain même.

Or, soit R' le rectangle, de même base b que R et de même hauteur u que s : puisque R' et s ont la même hauteur u, il est évident que porter s sur R' ou mesurer R' par s, c'est en même temps porter la base u de s sur la base b de R', c'est mesurer en même temps b par u; et réciproquement, mesurer b par u, c'est mesurer R' par s. On devra donc nécessairement trouver chaque fois le même rapport; et ainsi on aura toujours $R':s=b:u$; d'où $R'=s(b:u)$. On verra de même que $R=R'(h:u)$; donc

$$R=s(b:u)(h:u).$$

Cette manière, très-claire, très simple et complètement exacte, de parvenir à l'expression numérique de l'étendue d'un rectangle, s'applique au *prisme droit* quelconque P, de base B et de hauteur H : il en résulte que si v est le cube, *unité* de volume, construit sur l'*unité* linéaire u et dont chaque face, par suite, est le carré s, *unité* superficielle ; l'étendne de P sera numériquement

$$P=v(B:s)(H:u).$$

Et puisque, d'après la définition générale, le prisme *oblique* P' se trouve et se construit avec sa base quelconque B' et sa hauteur H', absolument comme P se trouve avec B et H, il s'ensuit nécessairement que

$$P'=v(B':s)(H':u).$$

Ces quelques développements suffisent, sans doute, pour montrer par quelles méthodes très-simples les théories du mesurage doivent être démontrées en géométrie et dans son enseignement. Aussi pensons-nous avoir fait chose utile en nous servant de ces méthodes, dans la 3^{me} édition de notre traité élémentaire.

VIII. La notion de *similitude*, ou celle de l'identité des *formes*, sans l'identité des *étendues*, est fondamentale : elle sert de base, non-seulement à la géométrie graphique, mais aussi à la géométrie numérique. Néanmoins, au lieu d'insister sur cette notion, dans l'enseignement et dans les livres élémentaires ; au lieu de la développer soigneusement, pour amener une définition claire et complète ; enfin, au lieu d'indiquer le rôle essentiel que les figures *semblables* remplissent dans les éléments de géométrie, et surtout dans les arts, où pour construire la figure imaginée, il en faut, soit le dessin, soit le modèle en *petit ;* on débute ordinairement par une brusque définition, résumant, quand elle est bien faite, les conditions en vertu desquelles la similitude existe ; mais ne montrant pas clairement que les deux figures ont absolument la même *forme*, parce que l'une est en *petit* ce que l'autre est en *grand ;* ne montrant pas que les parties de la première figure doivent *représenter* les parties correspondantes ou *homologues* de l'autre ; de telle sorte que les deux figures soient *semblables* en tout et que l'une *remplace* complètement l'autre et en tienne absolument lieu, pour l'étude des propriétés de cette dernière.

Aussi qu'arrive-t-il, faute de ces développements préliminaires? C'est que la brusque définition ne pouvant donner complètement l'idée de similitude, les élèves ne connaissent pas, en réalité, les figures semblables ; et après en avoir étudié péniblement la théorie, ils ignorent encore le but et l'importance de cette théorie. Avaient-ils une idée bien nette de la similitude, ceux des élèves, en grand nombre, qui, ayant terminé un cours de géométrie élémentaire, répondaient affirmativement à la question que voici ? *dans le cadre d'un tableau, la bordure a partout la même largeur ; le rectangle intérieur est-il semblable au rectangle extérieur ?* Ils ne voyaient pas que, dans ce cas, les côtés d'un rectangle ne sauraient aucunement *représenter* les côtés homologues de l'autre, comme ne leur étant pas *proportionnels*.

Ordinairement les théories des droites *proportionnelles* et des triangles *équiangles* sont mêlées avec celle de la similitude des figures planes ; mais il importe que les deux premières théories précèdent la dernière, tant pour l'ordre et la clarté, que pour donner les développements propres à amener la définition des figures semblables.

Et comme toutes les sciences se touchent, il est bon de faire remarquer la différence qui existe entre la *similitude* de deux choses et leur *resssemblance ;* celle-ci dépendant à la fois de la *forme* et des *couleurs.* On ne dira pas qu'un objet en *relief* est *semblable* à sa *copie* ou à son *portrait* sur la toile ; mais on dira que celui-ci *ressemble* à l'autre, s'il fait sur la vue la même impression que le premier ; ce qui exige une distribution de nuances de couleurs telle, que la forme *apparente* du portrait puisse remplacer la forme *réelle* de l'objet, comme si ce dernier était sous les yeux.

IX. Nous avons dit, et il est bien connu d'ailleurs, que de toutes les branches de mathématiques, la géométrie élémentaire est la plus facile à étudier et à bien enseigner. Cependant on a remarqué plusieurs fois, dans les concours généraux entre les établissements d'instruction moyenne, que les réponses aux questions d'algèbre l'emportent généralement sur les réponses aux questions de géométrie, bien que celles-ci soient plus faciles que les autres. A quoi peut-on attribuer ce fait, si ce n'est à la différence des méthodes d'enseignement dans les deux branches ? Ne tiendrait-il pas aussi à ce qu'en géométrie, outre l'emploi des mauvaises méthodes, que nous venons de signaler, le jugement des élèves est beaucoup moins exercé que leur mémoire ?

Retenir complètement les définitions et les énoncés des diverses propositions du livre, même les démonstrations et les solutions qui s'y trouvent, est chose fort utile, sans doute, mais qui est loin de suffire pour faire acquérir la science. L'élève ne connait bien la géométrie que par l'analyse logique des propositions successives et par l'usage qu'il en fait pour découvrir de nouvelles propositions, ou du moins pour démontrer les théorèmes et pour résoudre les problèmes choisis, que le professeur, sous peine de ne pas atteindre le but essentiel de son enseignement, doit préparer sur chaque leçon, comme exercices indispensables.

La difficulté, plus grande qu'on ne le croit d'ordinaire, est de trouver des questions, parmi les choses usuelles, qui soient de nature à intéresser et à faire naître la curiosité ; voilà sans doute pourquoi les traités élémentaires renferment si peu de ces questions.

On sait d'ailleurs que de fréquentes répétitions sont nécessaires à l'acquisition complète de la science, tant pour mieux approfondir les diverses théories, que pour bien saisir leur dépendance mutuelle, ou la génération des unes par les autres. Or, les développements de nouvelles propositions ne sont-ils pas les moyens les plus fructueux de faire ces répétitions, elles-mêmes? Car, on ne saurait trop le remarquer, des applications choisies convenablement, éclaircissent les théories, les fixent d'une manière plus durable dans la mémoire et développent, chez les élèves, l'esprit de recherche et le goût du travail. C'est ce que tous les professeurs expérimentés reconnaissent ; et c'est toujours par des applications qu'ils complètent leur enseignement, toutes les fois que des considérations étrangères, comme celles du temps et de trop de travail, ne viennent pas les arrêter, et borner ainsi les progrès des élèves, par des études superficielles, fort peu utiles à leur véritable instruction.

X. Nous avons indiqué ailleurs les méthodes qui nous paraissent les plus propres à simplifier l'étude de la géométrie, sans lui rien faire perdre de la rigoureuse exactitude par laquelle cette science est si éminemment caractérisée ; nous pensons même que ces méthodes ajoutent encore à la rigueur des démonstrations, sous le point de vue logique, en évitant le *cercle vicieux* que la réduction à l'absurde amenait toujours dans la théorie des incommensurables, pour les lignes proportionnelles et pour le mesurage.

La géométrie est une science de pures déductions logiques; mais il ne faut pas oublier que c'est aussi une science d'applications utiles, qui lui sont propres et que l'on doit indiquer dans l'enseignement.

Mécanique industrielle I. Il est peu de questions, vraiment utiles, de mécanique industrielle, dont les solutions ne soient pas accessibles à ceux qui possèdent bien les éléments d'algèbre, de géométrie et de trigonométrie, d'après la méthode infinitésimale et le principe d'analogie directe. Il faut toutefois que les premières notions de mécanique soient bien acquises et que par suite on connaisse bien l'état de la question et tous les éléments générateurs de la grandeur cherchée.

Pour mieux atteindre le but du présent mémoire, nous croyons utile d'y énoncer différents problèmes de *mécanique appliquée*, dont plusieurs nouveaux ou peu connus ; ce qui exigera quelques développements, que nous rendrons les plus courts possible. Nous regardons ces problèmes comme devant figurer dans l'enseignement de cette science, pour en augmenter à la fois la clarté et l'intérêt.

II. Dans la *mécanique industrielle*, il s'agit d'évaluer numériquement les effets utiles, soit des machines, soit des moteurs animés. Or, trois choses, bien distinctes, se présentent toujours dans l'exercice utile de la force : le *travail*, l'*ouvrage* et la *fatigue*. Tout le monde sait que *travailler*, c'est faire de l'*ouvrage* et se *fatiguer ;*

mais on n'a, en général, de ces trois choses, que des idées fort vagues, sous le point de vue mécanique. C'est qu'un même ouvrage varie et devient plus ou moins difficile à exécuter suivant les circonstances physiques et matérielles. La fatigue varie aussi par les mêmes causes, et de plus selon la perfection de la machine employée ou selon la force physique dont le moteur animé est capable, et surtout selon l'expérience qu'il a acquise et l'intelligence dont il est doué. Il n'y a donc, dans l'ouvrage et dans la fatigue qui en résulte, rien de fixe et de propre à servir d'*unité*, pour l'évaluation numérique de chacune de ces deux choses distinctes.

III. Il n'en est pas de même du *travail mécanique*, où l'unité est bien connue et constante, du moins pour un même pays. Néanmoins le travail mécanique n'a été bien connu que par les géomètres modernes; et sa véritable définition est celle-ci: *Travailler*, c'est vaincre, pour le besoin des arts, une *résistance*, constante ou variable, mais évaluée à chaque instant en *kilogrammes*, le long d'un *chemin*, évalué en *mètres*, parcouru par le point d'action de la *force*, celle-ci étant directement opposée à la résistance vaincue.

Peu importe d'ailleurs que le chemin soit vertical ou horizontal, pourvu que la résistance soit évaluée en kilogrammes: mais comme cette évaluation, suivant un chemin vertical, est plus facile et plus exacte, on a choisi, pour *unité* de travail mécanique, le *kilogrammètre*, c'est-à-dire le travail pour élever un kilogramme à un mètre de hauteur verticale. Cette unité nous est bien connue, par l'expérience, qui nous en donne le sentiment et l'idée complète; elle est d'ailleurs *constante*, du moins dans un même pays; car les variations de la *pesanteur*, d'un parallèle à l'autre et selon les hauteurs verticales à considérer, sont trop faibles pour qu'il soit nécessaire d'y avoir égard.

IV. Le travail mécanique étant ainsi ramené à celui où *il faut élever un corps, dont le poids* P *kilogrammes est connu, à la hauteur verticale* H *mètres;* il est évident que ce travail a pour mesure, pour expression complète, PH *kilogrammètres*. Car s'il faut le travail 1, pour élever le poids 1, à la hauteur 1; il est clair que pour élever le poids P, à la hauteur 1, il faut le travail P, et pour élever le poids P, à la hauteur H, il faudra le travail PH.

On suppose ici que la résistance soit constante le long de la hauteur H et l'on fait, par suite, abstraction de la résistance de l'air, en effet négligeable dans la plupart des circonstances du travail mécanique. Mais un corps tombant dans le vide, qu'elle est la résistance qu'il oppose à la pesanteur? Et comment évaluer le travail de cette force? La pesanteur agit sans cesse, mais travaille-t-elle toujours? L'*inertie* de la matière peut compter tour à tour parmi les *résistances* et parmi les *puissances;* parce que, pour acquérir une certaine *vitesse*, le corps matériel exige une force impulsive, qu'il *emmagasine* et conserve intacte, jusqu'à ce que des causes étangères viennent la modifier ou la détruire; et cette propriété de l'inertie de la matière, quand on sait l'employer convenablement, joue un rôle très-utile dans la mécanique industrielle; or, comment avoir égard à l'inertie, dans la recherche du travail mécanique?

Les réponses, à ces diverses questions, sont bien faciles; et la dernière conduit à exprimer le travail mécanique en fonction de la *force vive* et par conséquent de la vitesse. Plus généralement, soit un système quelconque de points matériels, soumis à des forces quelconques, et se mouvant d'une manière quelconque, dans l'espace: on démontre que *la somme des travaux des forces extérieures, plus la somme des travaux des forces moléculaires, équivaut à la somme des forces vives finales, diminuée de la somme des forces vives initiales* (ici la *force vive* est Pv^2 sur $2g$). Tel est le *principe de la transmission du travail*, appelé *équation du travail*, par M. Sonnet.

V. Lorsque la résistance est variable, il faut, pour calculer le travail mécanique, partager le chemin à parcourir, rectiligne ou curviligne, en éléments rectilignes infiniment petits, ou plutôt le supposer ainsi divisé; puis, regardant la résistance comme constante le long de chaque élément, on trouve, pour l'expression du travail cherché, *le produit de la résistance moyenne par la longueur du chemin parcouru*. C'est une *intégration* que l'on peut quelquefois effectuer par les *séries élémentaires*, résultantes de la méthode infinitésimale.

Par exemple, *s'il faut calculer le travail total de la came, soulevant le marteau de forge, en attaquant le manche au-delà de la tête;* on devra d'abord chercher quelles sont les *données* nécessaires à cet effet. Or, on connaît la distance d de l'axe de rotation au contact du manche sur la came; on connaît le coefficient f du *frottement* sur la came, aussi bien que celui du frottement sur les tourillons, lequel est ici très-petit et peut être considéré comme nul; on connaît l'arc circulaire, de rayon 1, qui mesure l'angle entre les deux positions extrêmes de d, et qui sera, je suppose, de $30^\circ = \frac{1}{6}\pi = nx$, n étant *infini*. D'ailleurs, la pression sur la came, bien que variable, est toujours *normale* au point de contact et *tangente* à l'arc de 30°; de plus, l'arc total d'*épicycloïde*, décrit sur la came, par le point de contact, peut se mesurer en l'enveloppant d'un fil flexible, et sera, je suppose, le 10^e de l'arc de 30°. Enfin, on connaît le poids P à soulever le long du premier élément de l'arc $\frac{1}{4}\pi d$, que décrit le point de contact.

Cela posé, la pression P', sur le v ième élément de la came, lorsque vx est l'arc circulaire qui mesure l'angle décrit, se trouve par la proportion $1 : \cos vx :: P : P' = P \cos vx$. Cette pression P' pouvant être regardée comme constante le long du v ième élément $0,1x$ de la came, aussi bien que la résistance $P'f$; le travail, pour décrire ce v ième élément, a pour mesure $0,1P'fx$ ou $0,1Pfx \cos vx$. Prenant successivement $v=1,2,3,4,\ldots,n$ et ajoutant, il est clair que le travail de la came, pour vaincre le frottement, est exprimé par $0,1Pfx\int\cos nx$. Ici le signe $\int$ désigne la somme des cosinus des arcs $x, 2x, 3x, 4x, \ldots, nx$, x étant infiniment petit; or, on sait, par la trigonométrie, que cette somme, multipliée par x, se réduit à $\sin nx = \sin 30° = \frac{1}{2}$; donc $\frac{1}{20}Pf$ est le travail de la came pour vaincre le frottement sur elle.

L'arc décrit par le point de contact du marteau, pour passer de la position horizontale à la position extrême, est rectifié par $\frac{1}{4}\pi d$; la résistance à vaincre le long du v ième élément de cet arc est $P \cos vx$. On peut regarder cette résistance comme constante le long du v ième élément dx; donc le travail *utile* de la came est $Pd\int x \cos nx$ ou $\frac{1}{2}Pd$. Par conséquent son travail total, pour soulever le marteau et l'amener à la position extrême, a pour mesure

$$\tfrac{1}{2}P(d+0,1f).$$

VI. Observons que si h désigne la distance verticale du contact extrême à l'horizontale d, on a $h=\frac{1}{2}d$; donc le travail Ph, pour élever le poids constant P à la hauteur verticale h, équivaut au travail $\frac{1}{2}Pd$ pour lui faire décrire l'arc vertical $\frac{1}{4}\pi d$, ou *tout autre courbe verticale de même hauteur* (lorsqu'on n'a pas égard au frottement, ni à aucune autre résistance étrangère).

On démontre aisément, par le calcul infinitésimal, que si l'on communique à un vase cylindrique, contenant un liquide homogène, un mouvement uniforme de rotation autour de son axe vertical, le creux qui se forme dans la masse liquide est un *paraboloïde* de *révolution* autour de l'axe du cylindre. C'est un effet de la *force centrifuge*, laquelle fait monter l'eau le long de la paroi latérale; et l'on trouve que le travail dépensé à cet effet est 12 fois plus grand que celui de la pesanteur pour descendre la même masse liquide de la hauteur à laquelle elle a été élevée.

Il est intéressant d'examiner si l'homme pourra jamais se frayer un chemin dans les airs et s'y mouvoir sous les mêmes conditions que les animaux organisés à cet effet. Or le calcul du travail mécanique donne le moyen de résoudre ce problème et de voir pourquoi tous ceux qui ont essayé de voler, comme les oiseaux, n'ont pas réussi.

VII. La détermination du travail n'exige, le plus souvent, que des calculs fort élémentaires; comme le prouvent une foule d'applications, et en particulier la suivante, où il s'agit de *calculer le travail de la came, pour soulever un pilon :*

Soit a la distance de l'axe du pilon au contact du mantonet avec la came et soit b la distance de ce contact au centre de gravité du pilon : sans les guides, b serait verticale, et la pression au point de contact serait précisément le poids P du pilon. Si donc on désigne par R la force parallèle à a, qui presse normalement sur la surface des guides, pour que l'axe du pilon soit vertical, on aura $P:R :: b:a$ ou $bR=aP$.

Soit f le coefficient du frottement, sur la came et sur les guides : bien que les recherches, fort remarquables, de M. Steichen, sur les *problèmes des pressions*, doivent rendre très-circonspect dans l'évaluation des résistances; cependant, si la distance du point d'application de R, à la guide supérieure, est double de la distance à la guide inférieure, et si la hauteur h, à laquelle le pilon doit s'élever, n'est que le quart de cette dernière distance; il est clair que la somme des frottements, du manche sur les guides, produits par les deux forces parallèles et contraires, composantes de la force R, sera exprimée par $3Rf$ au commencement du mouvement et par $2Rf$ à la fin. Or, comme d'ailleurs R et f sont constants, on peut supposer que la came doit vaincre la résistance *moyenne* $2,5Rf$ le long de la hauteur h et qu'ainsi son travail a pour mesure $2,5Rfh$. Mais outre ce travail, la came en produit un autre; car elle doit vaincre la résistance $P+2,5Rf$, normale à sa surface, au point de contact. Si donc c est la longueur du chemin que ce point décrit, lorsque le pilon s'élève à la hauteur h, il est clair que le travail total T de la came sera donné par l'équation :

$$bT=2,5afhP+(2,5af+b)cfP.$$

On doit donc faire que la distance b soit la plus grande possible, pour que T soit un minimum ; car d'ailleurs tous les autres nombres sont constants

VIII. Le travail mécanique, considéré en lui-même, est indépendant de sa durée ; mais dans l'appréciation des moteurs, il est nécessaire de faire entrer le temps en considération ; et l'on peut alors calculer la relation qui existe entre la force motrice F de la machine, le temps t que le point d'action de la résistance à vaincre met à parcourir le chemin c, et le travail θ de la force constante F pendant chaque unité de temps (la seconde). Il est facile de voir que cette relation est

$$t\theta = cF.$$

Donc, *ce que l'on gagne en durée on le perd en dépense de force, et réciproquement.*

En général, le but important de la mécanique industrielle n'est pas seulement d'indiquer la construction des machines, pour produire certains effets utiles ; mais de choisir ces machines telles, que les frais d'établissement soient les moindres qu'il se puisse et que cependant ces machines puissent servir le plus de temps possible ; ce qui exige la plus grande simplicité et un mouvement uniforme, dans chacune ; car les chocs détruisent les agents moteurs et font perdre une partie du travail utile, aussi bien que les variations de vitesse. C'est dans la supposition d'un mouvement uniforme que l'on détermine ordinairement la relation $t\theta = cF$. Mais remarquons-le bien, la force initiale est toujours plus grande que celle qui entretient le mouvement uniforme, parce qu'elle a, de plus que celle-ci, à vaincre l'inertie.

Par exemple, si un bloc de pierre, pesant 2000 kilogrammes, doit glisser sur un plancher horizontal et acquérir une vitesse d'un mètre, au bout de 5'', le coefficient du frottement étant alors 0,4 ; en supposant que ce frottement reste constant, la force horizontale, propre à entretenir le mouvement uniforme, a pour mesure 800 kil. ; tandis que la force initiale, aussi horizontale, la surpasse d'environ 41 kilogrammes. La force serait plus grande, si elle n'était pas horizontale et pressait obliquement au plancher ; mais elle serait la moindre possible, si, tendant à soulever le bloc, elle faisait, avec le plancher, un angle égal à celui du frottement.

IX. Il est souvent plusieurs machines propres à effectuer un même ouvrage ; ainsi pour tirer l'eau d'un puits, un homme peut employer simplement un seau et une corde ; il peut se servir d'une corde glissant avec frottement sur une poulie, fixe ou mobile ; il peut s'aider de deux seaux et d'une corde, s'enroulant sur le cylindre d'un treuil, celui-ci étant garni soit d'une manivelle simple ou double, soit d'une roue, à chevilles ou en tambour; etc. Il y a nécessairement un choix à faire parmi ces diverses machines; et si les moteurs sont animés, le choix doit être tel, qu'il en résulte, pour eux, la moindre fatigue possible. Mais d'autres considérations doivent encore guider dans le choix d'une machine; comme celles du temps, de l'espace, de la dépense pour l'établissement et les réparations, la répétition plus ou moins fréquente du travail, etc. Ainsi pour élever le tas de grain, pesant 2500 kilos, à 7 mètres de hauteur, on peut se servir d'une échelle, d'un escalier, d'une poulie, avec une corde, tirée par le moteur, d'une poulie et d'un treuil, etc. Or, si ce travail doit se répéter souvent, on préférera la poulie ou l'escalier, comme fatigant moins l'ouvrier que l'échelle; mais la construction et les réparations de celle-ci sont peu coûteuses, et elle peut se transporter aisément: on la préférera donc, quoique plus fatigante, si le travail ne doit se répéter qu'à de rares intervalles.

En général, lorsque pour exécuter un ouvrage déterminé, on doit s'aider d'une machine, il faut chercher, dans le choix de celle-ci, à économiser à la fois la force active et les frais d'établissement. Par exemple, si un tas de blé, pesant 2000 kilos, doit être transporté d'un grenier dans un autre, ayant entre eux la distance horizontale de 200 mètres, et étant élevés chacun de 6^m au-dessus de ce chemin; on pourrait bien, pour descendre et monter le tas, se servir d'un escalier, d'une *poulie* ou d'un *treuil*, et employer une *brouette* ou un *charriot*, pour le transporter sur le chemin horizontal; ce qui nécessiterait chaque fois la *force de traction* et les coefficients des frottements, dans les diverses machines, pour calculer le travail total dépensé; et tel serait le choix, si ce travail devait être journalier. Mais s'il ne doit se répéter qu'à de rares intervalles, il suffira d'une *échelle* et d'un *manœuvre*, pesant 65 kilos et pouvant porter aisément un sac de 50 kilos sur ses épaules; quel sera alors le *travail utile* à l'ouvrage proposé et quel sera le travail total? On suppose d'ailleurs que l'échelle soit solidement établie chaque fois; ce qui peut exiger le calcul des frottements sur le mur et sur le terrain, en amenant ainsi un autre problème remarquable.

Ici, pour exécuter l'ouvrage proposé, il y a deux genres de travaux: l'un *vertical* et l'autre *horizontal*, n'ayant pas la même *unité de mesure*. Le premier est bien défini; et pour connaître le second, il faut tâcher de le ramener au premier. Pour cet effet, on a remarqué que le *pas* du manœuvre est ordinairement de 0^m7 et qu'à chaque pas, il élève son centre de gravité et celui du système à la hauteur de 0^m03. D'après ces données, rien de plus facile que de calculer le travail cherché.

X. On sait ainsi calculer approximativement le *travail horizontal*, et par conséquent celui du *piéton ;* car le piéton travaille nécessairement, pour transporter son propre poids sur le chemin, même horizontal, et se *fatigue* d'autant plus que le chemin est plus *mauvais*, comme on dit ; ce qui a lieu par un temps de pluie et de boue, lorsque le chemin est un simple *sentier* et même lorsqu'il est une *route empierrée*. Non-seulement la fatigue du piéton est plus grande par un temps de pluie ; mais aussi par une température plus élevée, par un grand vent contraire et par un chemin montueux. Chaque fois aussi son travail est plus grand ; mais il serait difficile de faire entrer toutes ces circonstances dans le calcul, et c'est l'expérience seule qui peut faire apprécier leur influence sur le travail et sur la fatigue, qui en résulte : aussi le piéton expérimenté sait-il en tenir compte dans la rétribution de son *travail moyen*. Quant au calcul de celui-ci, on n'a pas ordinairement égard à la résistance de l'air ; mais cette résistance devrait entrer dans le calcul, ce qui est possible, si l'air était animé d'une grande vitesse opposée : il ne s'agirait que de connaître cette vitesse et la surface que le piéton lui oppose.

Sans le frottement des pieds sur le terrain, le piéton ne pourrait marcher ; car son travail devient très-grand et même impossible, dans un temps de *verglas*. S'il marche sur un terrain *mou*, il faudra connaître l'enfoncement *moyen* de ses pieds, pour calculer le travail qu'il dépense. C'est aussi en tenant compte de la *hauteur moyenne* des obstacles, dans la théorie, assez difficile, des *voitures*, que l'on peut calculer approximativement le travail qu'elles fournissent.

XI. De même, pour briser les *mottes* de terre, dans un champ labouré, on peut employer la *herse ;* mais on préfère parfois, comme plus efficace, un *rouleau cylindrique*. Supposons le terrain, qu'il s'agit d'aplanir, *rectangulaire*, ses deux dimensions étant 260 et 30 mètres ; supposons le rouleau cylindrique en bois de hêtre, dont le poids spécifique est 0,85, la hauteur du cylindre étant 1^m et 0^m3 le rayon de sa base ; supposons que son enfoncement dans le terrain soit, en moyenne, de 0^m04, chaque obstacle *résistant* étant supposé avoir une hauteur moitié moindre, savoir 0^m02 ; supposons enfin que la force de traction soit perpendiculaire au rayon du cylindre normal à l'obstacle. D'après ces données, il devient facile de calculer le travail pour exécuter l'ouvrage proposé, même en ayant égard au frottement sur les tourillons du cylindre.

Mais pour le travail dépensé par le cheval, il faudrait encore connaître la longueur de son pas, l'enfoncement moyen de ses pieds dans le terrain et l'élévation de son centre de gravité à chaque pas qu'il fait. Un tel calcul laisse beaucoup d'incertitude; et c'est ici qu'il faut évaluer le travail, d'après l'observation de celui que le cheval peut fournir, chaque jour de 8 ou 10 heures, pendant un grand nombre de jours consécutifs, sans altérer sa santé.

XII. Un problème analogue au précédent se présente lorsqu'à l'aide d'un cabestan, il s'agit d'amener peu à peu un gros bloc de pierre et de lui faire parcourir une certaine distance, sur le terrain horizontal. Le poids connu du bloc est trop considérable, pour que le *dynamomètre* puisse servir à évaluer la force horizontale de traction, même lorsque le bloc serait placé sur des rouleaux cylindriques égaux (opération déjà difficile et qui a nécessité l'emploi de *leviers*). Il faut donc, pour calculer le travail, calculer d'abord cette force, en évaluant les dimensions et le poids des rouleaux, et surtout leur enfoncement moyen dans le terrain ou la hauteur résistante des obstacles qu'ils doivent franchir. Comme d'ailleurs le coefficient du frottement des tourillons du cabestan est connu, on saura calculer le travail dépensé par quatre hommes, agissant aux extrémités des bras du cabestan

XIII. La mécanique industrielle a pour but essentiel de résoudre ces deux problèmes généraux : 1° *avec une puissance donnée produire le plus possible d'un bon ouvrage; 2° un ouvrage étant déterminé, quant à sa nature et à sa grandeur, l'exécuter avec la moindre dépense possible de puissance.* Or, dans ce dernier problème, le *minimum* cherché de travail mécanique dépend souvent de la manière d'exécuter l'ouvrage.

Par exemple, dans un champ se trouve une rangée de 200 gerbes, chacune à 4^m de celle qui la précède immédiatement et pesant chacune 10 kilos, poids moyen : si le laboureur va les prendre une à une, pour les réunir en tas autour de l'une d'elles; son travail total sera un *minimum*, s'il les réunit autour de la gerbe du milieu, d'où il partira d'abord.

Il faut ici établir, par les *minimums du second degré*, que la gerbe de départ doit être celle du milieu, pour un chemin total minimum, donnant le minimum de travail total; que l'on peut d'ailleurs calculer, si le laboureur pèse 60 kilos, et si à chaque pas de 0^m7, il élève son centre de gravité à 0^m03 de hauteur.

Mais le calcul apprend aussi que le travail total minimum serait beaucoup moindre encore, aussi bien que la fatigue, si le laboureur allait prendre les gerbes deux à deux. Et c'est-là un exemple remarquable de l'avantage de savoir travailler, pour se fatiguer le moins possible; et il est clair que si le laboureur pouvait prendre trois gerbes, chaque fois; non-seulement l'ouvrage serait terminé plutôt, mais il fatiguerait moins.

XIV. L'expérience suffit souvent pour indiquer le moyen d'obtenir un travail minimum; mais le calcul n'en est pas moins utile pour amener cette expérience. Comment l'ouvrier saurait-il diviser en deux portions équivalentes, et avec le moins de fatigue possible, un prisme triangulaire de cuivre ou un cylindre circulaire oblique d'ébène, si la géométrie ne le lui avait appris? Et comment, sans la géométrie et le calcul, saurait-il exécuter, avec le moins de fatigue possible, son travail dans le problème suivant? Un ouvrier part de la maison A avec deux seaux vides, pesant chacun 3 kilos, pour aller les remplir dans un canal rectiligne MN et les porter, ainsi remplis, dans la maison B, située du même côté que A, où il les vide et d'où il revient les remplir de nouveau dans le canal, pour porter l'eau en A. Comme chaque seau rempli contient 14 litres d'eau pure et que l'ouvrier, sans les seaux, pèse 60 kilos; en quel endroit du canal doit-il puiser l'eau, pour que son travail soit un minimum? On suppose que 120^m et 80^m soient les distances de A et de B au canal MN, ces distances interceptant sur celui-ci la longueur 150^m; on suppose de plus qu'à chaque pas de 0^m7, l'ouvrier élève son centre de gravité à la hauteur de 0^m03.

Observons que si le propriétaire des deux *fabriques* A et B veut les joindre, ainsi que le *pont* E, qui sera établi sur le canal rectiligne MN, au *magasin* C, qu'il doit faire bâtir; pour que la somme des trois *branches de routes*, nécessaires à cet effet, coûte le moins possible, il faudra que *les axes de ces trois branches divisent l'espace autour du centre de C en trois angles égaux;* car alors la somme des trois longueurs est un minimum. D'ailleurs, le magasin C, devant être un parallélipipède rectangle, de capacité donnée, la construction des murs coûtera le moins qu'il se puisse, lorsque le parallélipipède sera un cube.

On sait que la *statique* peut servir à découvrir et à démontrer plusieurs théorèmes importants de géométrie; c'est ainsi qu'en remplaçant les points par des *anneaux* infiniments petits et les lignes par des *fils* très-minces, parfaitement flexibles et inextensibles, les conditions d'équilibre fournissent différents *minimums* des sommes de longueurs; etc.

XV. Maintenant si un ouvrier doit transporter à 20 mètres de distance horizontale, le parallélipipède de fonte homogène, dont 7,20 est le poids spécifique, ayant la hauteur $2h=2^m$, la longueur $2a=0^m8$ et la largeur $2b=0^m6$; il saura vaguement, par expérience, que pour un travail minimum, il faut rouler le parallélipipède par ses faces latérales, et que s'il ne peut exécuter seul cet ouvrage, il peut s'aider du levier, et même d'un autre ouvrier, muni également de cette machine simple.

Mais le parallélipipède pouvant se transporter aussi en le culbutant par ses bases, soit autour de l'arête $2a$, soit autour de l'arête $2b$; le calcul du travail dépensé chaque fois, met complètement en évidence que le transport, en roulant par les faces latérales, est le plus facile.

Il y a même plus, c'est que le poids P du parallélipipède proposé restant le même; aussi bien que la hauteur $2h$; le travail total T, en roulant par les faces, est le moindre possible lorsque $2a=2b$: on a alors

$$T=(\sqrt{2}-1)CP.$$

Si c'était un cylindre circulaire droit, de fonte homogène, qu'il fallut transporter à 20 mètres de distance horizontale, on pourrait sans doute le culbuter par ses bases; mais le travail serait beaucoup plus petit en le roulant par sa surface latérale; et d'autant plus petit, que le cylindre s'enfoncerait moins dans le terrain. Comme ici on ne peut connaître le poids P du cylindre qu'en le calculant, il faudra mesurer, avec beaucoup de précision, la hauteur et le rayon de la base, lesquels seront, je suppose, 2^m et 0^m3. Il sera facile ensuite de calculer le travail dépensé en culbutant; et quant au travail en roulant, il faudra encore determiner, avec précision, la hauteur moyenne des obstacles résistants; laquelle sera 0^m02, je suppose.

XVI. Lorsqu'un corps, de poids connu, doit être élevé par un *plan incliné*, en glissant avec frottement, on sait que pour le minimum du travail et par conséquent pour le minimum de la force de traction, *il faut que celle-ci fasse, avec le plan incliné, un angle égal à celui du frottement* Mais si le plan incliné doit s'établir pour monter, à une hauteur donnée 4^m, un corps dont le poids constant

P soit connu, il importe que la force parallèle au plan soit la plus petite possible ; ce qui a lieu quand la longueur du plan est la plus grande possible, et par conséquent *infinie*. De sorte qu'il n'y a pas de minimum pour la force parallèle : seulement elle est d'autant plus petite que la longueur du plan est plus grande. Or, une plus grande longueur du plan exige une plus grande dépense de construction : on est donc conduit, pour compenser en quelque sorte, l'augmentation de dépense par la diminution de la force parallèle, *à chercher quelle doit être la longueur du plan, pour que la somme des mesures de cette longueur et de la force parallèle soit un minimum?* Ce problème est facile à résoudre, par une équation finale du second degré, où l'on fait abstraction du frottement ; mais on pourrait y avoir égard.

XVII. C'est par un plan incliné que l'on sort les tonneaux de vin de la cave : si 10^m,4^m et 500 kilos sont respectivement la longueur du plan, sa hauteur et le poids du tonneau ; deux hommes suffiront-ils pour le sortir et quel sera le travail de chacun? Pourraient-ils travailler sans le frottement? Sont-ils libres de choisir entre les frottements de glissement et de roulement? Et pourquoi ce dernier est-il nécessairement moindre que l'autre? Telles sont les questions auxquelles l'opération de la sortie du tonneau donne lieu ; et l'on est ainsi conduit à reconnaître les avantages et les inconvénients du frottement, dans les machines.

C'est aussi par un plan incliné que l'on descend les tonneaux de vin dans la cave. Deux cordes, attachées, par leurs extrémités, à deux rouleaux cylindriques fixes, embrassent chacune la demi-circonférence du tonneau, pesant, je suppose 500 kilos ; deux hommes tiennent les deux cordes, pour empêcher l'accélération de vitesse, très-dangereuse, et les laissent filer parallèlement au plan incliné, dont 10^m et 4^m sont la longueur et la hauteur. Souvent même, pour diminuer l'effort de chacun, les cordes embrassent chacune un quart de la circonférence des rouleaux. Dans ce dernier cas, on peut calculer la force employée par chaque homme et et la *tension* de la corde, depuis les rouleaux jusqu'au tonneau depuis celui-ci jusqu'aux rouleaux cylindriques ; mais il faut connaître le coefficient du frottement de la corde *et la formule de ce frottement sur un corps rond*. On n'a pas ici à considérer la résistance due à la *raideur* de la corde, bien qu'elle favorise l'opération.

Pour les tonneaux d'un faible poids, de 100 kilos, par exemple, on supprime les cordes ; mais alors deux hommes suffiront-ils pour empêcher l'accélération de vitesse, dans la descente ? Et quel sera alors l'effort de chacun ?

Pourquoi faut-il souvent empêcher l'accélération de vitesse, dans la descente d'une voiture ? Et comment alors l'empêcher ?

Quel est le travail dépensé, pour rouler un cylindre droit homogène, de poids connu P, à base elliptique, suivant la longueur 2C du plan incliné, dont H est la hauteur ? On connaît le grand axe $2a$, le petit axe $2b$ et le contour E de l'ellipse, que l'on peut mesurer d'ailleurs en l'enveloppant d'un fil flexible. Dans quel cas, le travail dépensé est-il un minimum, le poids P et la hauteur du cylindre restant invariables ? Ce roulement pourrait-il s'effectuer sans le frottement ?

XVIII. L'étude complète d'une machine conduit à reconnaître que les *chocs*, les *oscillations* et les *frottements*, des deux espèces, sont les causes par lesquelles le travail total est toujours plus grand que le travail utile. On ne saurait écarter entièrement ces causes de *pertes de travail;* mais on peut souvent en affaiblir l'influence. Les chocs d'ailleurs sont souvent nécessaires à l'exécution de l'ouvrage proposé ; comme dans les marteaux et les pilons. Or, quelles sont les conditions que l'enclume et le marteau doivent remplir, pour que l'effet du choc, sur la matière à comprimer, soit le plus grand possible ? *Et comment calculer le travail de la pesanteur, pour amener le marteau de forge, soulevé par une came, à choquer le corps, placé sur l'enclume ?*

Supposons que les deux positions extrêmes de l'axe du manche, long de 4 mètres, fassent un angle de 30°, ce manche étant fixé perpendiculairement à deux tourillons inébranlables, autour desquels il peut tourner, avec un faible frottement, que l'on peut négliger. Supposons de plus que le centre de gravité, de la tête du marteau, parallélipipède rectangle, du poids de 100 kilos, y compris celui du manche, coïncide avec le milieu de l'axe de celui-ci ; la face choquante étant un carré de 0^m2 de côté, et l'axe du manche étant perpendiculaire aux deux faces opposées de la tête. D'après ces données, on saura calculer le travail demandé, si l'on sait calculer les *moments d'inertie*, par rapport à l'axe des tourillons, en observant que celui du manche du marteau, ordinairement très-faible, peut se négliger ; or, le principe d'analogie directe ou des *fonctions*, d'après la méthode infinitésimale, conduit aisément aux moments d'inertie du parallélipipède rectangle ou du cylindre droit, circulaire ou elliptique. Remarquons d'ailleurs que la force du choc varie avec la pesanteur.

XIX. L'expression du moment d'inertie sert aussi à calculer la variation de vitesse angulaire, dans le mouvement de rotation, uniformément varié, d'un corps autour d'un axe : *elle a pour valeur la somme algébrique des moments des forces extérieures, par rapport à l'axe de rotation, divisée par le moment d'inertie du corps, par rapport au même axe.*

Pour appliquer cette proposition, M. Sonnet considère un treuil en bois de sapin à axe horizontal, dont l'arbre, long de 2^m, a 0^m2 de rayon; la roue, supposée massive, a 0^m8 de rayon et 0^m12 d'épaisseur; chaque tourillon a 0^m02 de rayon et 0^m1 de longueur. Tangentiellement à l'arbre est appliquée, au moyen d'une corde qui s'y enroule, un fardeau de 400 kilos, et tangentiellement à la roue est appliquée, en sens contraire, une force de 60 kilos. Et comme un mètre cube de sapin pèse 550 kilos, il trouve finalement que la vitesse angulaire s'accroît de 6,9654 ; ce qui équivaut à peu près à 1,108 tour par seconde ; c'est-à-dire que la vitesse angulaire s'accélérerait d'environ 10 neuvièmes de tour par seconde. Dans ce cas, le fardeau, s'il était abandonné à l'action des deux forces contraires, aurait après une seconde, une énorme *quantité de mouvement* et se briserait en choquant un obstacle résistant.

Bien que le choc soit nuisible, dans les machines, il est cependant plusieurs circonstances où il faut le préférer à la pression, du moins pour l'effet à produire ; car d'ailleurs le choc, ayant un *élément* de plus que la pression, savoir la vitesse, ne peut lui être comparé que sous le rapport de l'effet utile.

C'est le choc qui fait la base du jeu de *quilles ;* et celui-ci n'exigeant, de la part du joueur, qu'un faible travail, le fatigue peu. Ce jeu est donc une véritable *récréation ;* c'est un exercice gymnastique, utile à la santé et propre à développer l'adresse de la main et du coup-d'œil. Car il faut jeter la boule de telle sorte qu'il y ait, le plus possible, de quilles renversées par elle et les unes par les autres ; ce qui dépend de la manière dont la première quille est choquée. Or, si le joueur lance chacune de ses deux boules, à *demi-élastiques* et pesant chacune 2 kilos, avec une vitesse finale de 4^m par seconde, quel sera son travail après 20 parties? On fait ici abstraction de la résistance de l'air et du poids du bras; pourrait-on y avoir égard? Enfin, si la boule lancée rencontrait immédiatement l'autre en repos; quelle vitesse et quelle quantité de travail lui communiquerait-elle ?

XX. La définition du travail mécanique, par le grand nombre de vérités qui en découlent immédiatement, est destinée à changer la forme de la *mécanique rationnelle*, pour en simplifier l'étude ; et la *mécanique industrielle*, elle-même, n'en a pas encore tiré toutes les conséquences qui lui sont utiles. On vante, avec beaucoup de raison, la fécondité du *principe des vitesses virtuelles*, et l'on regrette, en même temps, de n'en avoir pas encore une démonstration générale, complète et satisfaisante, malgré les recherches profondes de Lagrange et des géomètres qui l'ont suivi. Mais comment ne voit-on pas que ce principe n'est au fond que celui *des travaux élémentaires?*

Dans mes éléments de mécanique, je pense avoir donné une démonstration, très-claire, très-simple et très-générale, de ce dernier principe; lequel rentre d'ailleurs dans celui de d'Alembert et dans celui de la *moindre action*.

PHYSIQUE I. La *physique*, comme on sait, est cette partie de la philosophie naturelle qui nous met en relation avec tous les corps de l'univers, dont les applications aux besoins de la société se reproduisent sans cesse et qui doit conséquemment faire partie de l'*enseignement moyen ;* du moins dans ce qu'elle a de plus usuel et de plus élémentaire. Mais pour que l'étude de la physique soit complètement profitable, il faut qu'elle soit précédée ou accompagnée de notions qui permettent de pénétrer plus avant dans cette partie importante des connaissances humaines, et de comprendre les belles et utiles théories qui, depuis Newton, ont enrichi son domaine.

Ces théories se composent d'une suite de propositions et de corollaires amenés ou vérifiés, soit par des expériences directes, soit par le raisonnement et différentes déductions logiques, qu'il serait parfois impossible de suivre, sans le secours de l'algèbre et de la géométrie. On sait, en effet, que ces deux sciences fournissent les moyens les plus commodes, tant pour représenter les lois de la nature et les étudier, que pour généraliser les conséquences d'un fait ou d'une vérité bien établie, et suppléer à la faiblesse de l'esprit dans la recherche des causes éloignées. Sans le calcul et la géométrie, que saurait-on en physique, où il s'agit d'observer les phénomènes, en quelque sorte *extérieurs*, pour les étudier, les expliquer et les lier entre eux par le raisonnement, afin d'en tirer des conséquences utiles?

II. Non-seulement la connaissance des mathématiques élémentaires est nécessaire à l'étude approfondie des éléments de physique ; mais aussi la connaissance des *lois* de l'*équilibre* et du *mouvement*, d'ailleurs partie essentielle et inséparable de la physique, elle-même. Il ne faut donc pas se contenter de vérifier, par quelques expériences, souvent fort incertaines, les principaux théorèmes sur la *composition* des *forces* et des *vitesses* ; mais il faut les démontrer complètement ; et on le peut, heureusement, sans sortir des notions élémentaires, à l'aide de la méthode infinitésimale, essentiellement analogique, et surtout à l'aide de la définition du travail mécanique, convenablement développée.

On vérifie les lois de la chute des corps, dans le vide, à l'aide du plan incliné et de la machine d'Atwood ; mais connaît-on ces lois, de cette manière, aussi clairement que par les *équations du mouvement* dans le vide, obtenues à l'aide de la méthode infinitésimale? De même, les expériences suffisent-elles pour faire connaître, aussi complètement que le travail mécanique, la théorie du *pendule composé*, de cette machine si simple et pourtant si utile en physique? Et n'est-ce pas à l'aide du travail mécanique et de la méthode infinitésimale, que l'on peut démontrer, de la manière la plus simple et la plus élémentaire, les théorèmes sur la composition des forces et des vitesses, concourantes et parallèles? Car ici encore les expériences, d'ailleurs difficiles à exécuter, sont insuffisantes.

Si l'étude de la physique doit être accessible au plus grand nombre de personnes, comme science utile dans toutes les circonstances de la vie et comme complément nécessaire à l'éducation ; habituant l'esprit à se rendre compte des phénomènes qui tombent chaque jour sous les yeux, et que l'on remarque souvent pendant sa vie tout entière, sans avoir cherché à se les expliquer ; il importe que la notion du travail mécanique soit développée et appliquée soigneusement dans les traités de physique, comme moyen le plus propre à rendre ces traités complètement élémentaires. La physique alors peut être enseignée dans les écoles moyennes et y compléter, de la manière la plus utile, l'étude des sciences préparatoires aux écoles spéciales et aux études universitaires.

III. L'importance de la physique et des mathématiques élémentaires, dans les sciences d'application et comme exercices logiques, devait en exiger l'étude pour la *candidature* en philosophie et lettres. Malheureusement, cette étude, si utile et si intéressante d'ailleurs, est fort négligée par plusieurs des jeunes gens, qui ont pu néanmoins suivre des cours scientifiques élémentaires complets. Ce fait, réellement fâcheux pour les aspirants, ne peut s'attribuer qu'au trop de hâte qu'ils mettent à terminer les études moyennes, pour commencer les études universitaires : ils pensent, en écartant les études préparatoires, regardées par eux comme inutiles, arriver plus vite au but ; tandis qu'ils s'en éloignent réellement.

Il serait d'ailleurs à désirer qu'un cours de physique, très-élémentaire, fût établi dans les universités mêmes, pour les jeunes gens qui se destinent à l'étude de la philosophie ou du droit, et même [de la médecine. Ce cours, essentiellement expérimental, devrait se borner aux développements des théories les plus usuelles de la physique, sans négliger toutefois les notions de mécanique et surtout la définition et les applications les plus utiles du travail. Un tel cours serait fait pendant le premier semestre, puis répété, quant aux théories, et complété pendant le restant de l'année.

Cette marche, dans l'enseignement de la physique, a déjà été suivie, et elle a produit de très-bons résultats ; d'autant qu'on ne se bornait pas à vérifier les faits, par des expériences; mais on les établissait complètement, par le raisonnement et le calcul, en les expliquant et en les rattachant à des vérités certaines, sources ou conséquences d'autres faits, bien établis. Avant tout, la physique doit-être logique, pour être une science positive; car si l'on se bornait aux seuls faits, sans les lier entre eux par les raisonnements, propres à les expliquer et à en tirer des conséquences utiles, que saurait-on en physique ? Connaîtrait-on mieux les phénomènes que le vulgaire, qui les a remarqués cent fois et qui ne peut cependant se les expliquer clairement ?

IV. On se contente ordinairement de vérifier expérimentalement le *principe d'Archimède* et le *paradoxe hydrostatique ;* mais on peut et l'on doit, même dans un cours de physique élémentaire, compléter la conviction et l'éclairer en démontrant ces deux faits et beaucoup d'autres, par des raisonnements, très-simples, empruntés à la mécanique des liquides et des fluides. Cela est d'autant plus nécessaire que la *perte de poids* et la *pression atmosphérique* servent à expliquer une foule de phénomènes importants, inappréciables sans ces deux faits, très-remarquables.

Par exemple, sans le principe d'Archimède, bien connu, comment résoudre le problème suivant ? une sphère, ayant un demi-décimètre cube de volume et pesant 2 kilogrammes, est plongée dans un vase cylindrique vertical, dont 1 décimètre est le rayon de la base. Ce cylindre contient de l'eau pure à 0^m8 de hauteur ; quelle est la pression sur le fond du vase, 1° avant que la sphère ne soit plongée dans le liquide ? 2° pendant quelle y tombe ? 3° enfin, après qu'elle y est tombée ?

Ce problème est très-simple ; et cependant, bien qu'on ajoutât à ses conditions que l'eau pure est à la température de la glace fondante, la solution n'a pu en être donnée, par plusieurs élèves, ayant terminé un cours de physique élémentaire. A la vérité, le calcul et la géométrie avaient été évités, autant que possible, dans ce cours, uniquement expérimental ; lequel par conséquent ne pouvait fournir les solutions d'une foule de questions intéressantes, essentielles à la physique.

V. On objectera peut-être que le précédent problème appartient, plus particulièrement, à la mécanique ; mais la physique n'est-elle pas essentiellement la mécanique, la plus élémentaire, puisqu'on doit y développer les notions des *forces* et des *vitesses*, ainsi que les *lois* du *mouvement* ? Réserver à la mécanique analytique, toutes les questions dont les solutions exigent les mathématiques supérieures, est chose utile et nécessaire ; mais si les *équations* du mouvement, dans le vide ou plutôt en faisant abstraction de tout obstacle étranger, peuvent s'établir par des calculs et des raisonnements fort élémentaires, on doit les considérer en physique, comme y étant les sources, les plus claires, de vérités utiles et d'applications intéressantes : on aura alors la *physique-mécanique*, la seule véritable physique.

Comment, par exemple, sans les équations du *choc* des corps, démontrer que si, une suite de sphères homogènes, parfaitement *élastiques*, se touchent suivant une ligne circulaire, passant par leurs centres, il faut que leurs masses croissent ou décroissent en progression géométrique, pour que la vitesse connue, imprimée à la première, communique à la dernière une vitesse maximum ? Et comment calculer alors cette plus grande vitesse ?

De même, connaissant la force avec laquelle une masse d'un kilogramme choque un obstacle, après une seconde de chute, dans le vide, il serait intéressant de savoir avec quelle force un homme, pesant 60 kilos et tombant de 20^m de hauteur, doit choquer le terrain (en observant qu'ici la résistance de l'air diminue de beaucoup la force du choc) ; or, comment calculer cette force, sans les équations de la chute des corps, dans le vide ?

Pareillement, sans les équations du mouvement, *constant* ou *uniformément accéléré*, et sans le parallélogramme des vitesses, il serait bien impossible de résoudre le curieux problème que voici :

Un nageur veut traverser une rivière, large de 64^{m}, par un mouvement uniformément accéléré, qui lui fasse décrire 0^{m}5 pendant la première minute de son mouvement, dans le sens de la largeur; quel sera le temps et à quel point plus bas de la rive opposée arrivera-t-il ? On suppose que le courant ait une vitesse constante de 12^{m} par minute, et l'on ne doit pas avoir égard à la résistance du liquide; vu qu'il ne s'agit pas de calculer le travail dépensé. Enfin, si la vitesse du nageur était uniforme et de 9^{m} par minute, quelle distance aurait-il réellement parcouru, pour atteindre l'autre rive ?

On peut calculer le temps du mouvement de deux mobiles, dans le même sens, suivant la même droite et ayant entre eux 300^{m} de distance, quand on veut que le second atteigne, avec une vitesse *minimum* uniforme, le premier ayant un mouvement uniformément accéléré, et 6^{m} de vitesse au bout de la première seconde.

VI. La théorie des *centres de gravité* fait partie essentielle de la physique, pour y apprécier plusieurs phénomènes importants et les expliquer; car la théorie des centres de gravité reçoit une foule d'applications utiles, dans les arts et dans toutes les circonstances où l'on considère les corps matériels. Ainsi cette théorie est appliquée dans le mouvement des hommes et des animaux, dans le jeu des équilibristes, dans l'architecture et dans la recherche de la *stabilité* des corps posés. On peut démontrer en physique, même élémentaire, qu'*une table rectangulaire, ou en forme de cercle, est d'autant plus stable, sur ses pieds égaux, que ceux-ci sont plus courts et plus nombreux.* On doit même calculer cette stabilité maximum; ce qui donne lieu à différents problèmes remarquables.

C'est par la théorie des forces et celle des centres de gravité que l'on résout aisément les questions suivantes : Pourquoi et comment certaines *portes* se ferment-elles, d'elles-mêmes, dès qu'elles sont ouvertes ? Et pourquoi alors se détériorent-elles plus facilement que quand elles sont verticales? — Un prisme régulier et une pyramyde régulière, composés d'une même matière homogène, ont bases égales et hauteurs égales; comment démontrer que la pyramide est plus stable sur sa base horizontale que le prisme ? Et comment savoir où il faut appliquer la force propre à culbuter chacun d'eux et la direction qu'elle doit recevoir, pour que cette force soit un minimum ? — Si l'on veut culbuter, le plus aisément possible, un prisme triangulaire droit ou un tétraèdre, autour d'une arête de sa base horizontale ; laquelle des trois arêtes faut-il choisir? — De deux prismes droits, de même base horizontale et dont la hauteur de l'un est double de celle de l'autre, quel est le plus stable sur sa base? (Même question pour deux prismes ou deux pyramides semblables). — Connaissant la *longueur* d'un *plan incliné*, ainsi que les dimensions du parallélipipède droit, posé par sa base sur ce plan; quelle hauteur doit-on donner à celui-ci pour que le corps homogène soit sur le point de culbuter? Cette hauteur dépend-elle de la position du corps sur le plan? Et si le parallélipipède homogène étant posé par une face latérale, sur le plan incliné, et que $\frac{1}{3}$ soit le coefficient du frottement; quelle doit être la hauteur du plan pour que le corps soit sur le point de glisser? Cette hauteur dépend-elle ici de la position du corps? — Peut-on expliquer pourquoi la diligence, ordinairement chargée à sa partie supérieure, verse si souvent, non-seulement sur une route ordinaire ou dans un chemin à ornières profondes; mais aussi, lorsqu'ayant une assez grande vitesse, elle suit une route à brusque détour? Et comment charger cette diligence, pour qu'elle ait la plus grande stabilité possible?

VII. La *résistance* des corps solides doit être considérée en physique; or, où faut-il placer les meubles, dans une chambre, pour que les poutres, qui supportent le plancher, ne se courbent pas sous le poids? Et quelle forme doit-on donner à celles-ci, pour qu'elles résistent le plus possible? Pourquoi faut-il y éviter les nœuds? — Lorsqu'on veut rompre un bâton, tenu par les deux bouts, où faut-il appliquer l'obstacle, pour que la rupture se fasse le plus aisément possible? Et comment diminuer encore la résistance à la rupture, dans une barre de fer? — Un cylindre plein et un cylindre creux ont la même *longueur* et la même quantité de matière homogène, lequel offre-t-il le plus de résistance à la flexion? Peut-on calculer la force perpendiculaire au milieu de la longueur, qui met chacun sur le point de se rompre? — Pourquoi la balle ne fait-elle qu'un trou dans la vitre, tandis que celle-ci est brisée par un choc très-faible? — La nature a réalisé une grande économie de matière dans les corps creux, tels que les *os*, les *plumes*, les *roseaux*, etc., lesquels néanmoins offrent une résistance suffisante. De même, les abeilles économisent à la fois leur cire et la quantité de travail, dans la confection des alvéoles; car de tous les corps de même capacité, compris dans la même définition générale, l'alvéole a la plus petite surface et présente une résistance, qui suffit à sa destination. Or, ces faits, bien remarquables, conduisent à différents problèmes, sur les *solides d'égale résistance*, où l'on économise la matière par la forme qu'on sait lui donner.

VIII. Voici encore plusieurs problèmes de *mécanique-physique* :

Si un vase cylindrique, de 0m8 de hauteur et de 0m2, de rayon de la base intérieure, est à demi-rempli d'eau pure et fermé hermétiquement par le couvercle, qu'un tube cylindrique, ouvert aux deux bouts, traverse, avec frottement sur *graissage ;* si de plus 0m01 est la différence des rayons des bases intérieure et extérieure du tube, le premier rayon étant de 0m02, et si enfin, on enfonce verticalement le tube de 0m2 dans l'eau ; quelles seront les élévations de celle-ci, dans le tube et dans le vase ? Et si un petit trou, pratiqué à la paroi latérale, à la distance de 0m3 du fond, est ensuite débouché, le liquide sortira-t-il du vase ? S'il en sort, à quelles distances du fond, les niveaux dans le tube et dans le vase s'arrêteront-ils ?

On connaît les conditions pour qu'un corps creux flotte en équilibre dynamique stable, et l'on sait que l'on peut toujours faire flotter ainsi tout corps matériel sur un liquide : on connaît même la forme que l'on doit donner au corps pour que, toujours en équilibre dynamique stable, il s'avance, le plus facilement possible, sur le liquide et puisse transporter ainsi une certaine charge. Or, si le corps flottant est un *paraboloïde* de révolution, décrit par $y^2 = 16x$, autour de son axe vertical ; le sommet, dans l'intérieur du liquide dont 1,2 est le poids spécifique, étant à 2m de distance du niveau, quel sera son enfoncement pour une nouvelle charge de 100 kilos ? Et quelle était la première charge, le poids du corps compris ? Pourrait-on calculer la *densité* du corps proposé ?

IX. C'est aussi par la géométrie et le calcul infinitésimal que l'on peut résoudre les problèmes que voici :

Quelles sont la direction et la valeur de la pression d'un liquide sur une aire plane qui y est plongée ? — Il importe surtout de connaître le centre de pression et la pression, elle-même ; comment calculer ces deux choses, 1° pour la vanne rectangulaire d'une écluse ? 2° pour un vase cylindrique, ou conique ? — Si un vase est le paraboloïde de révolution, décrit par $y^2 = 2x$, autour de son axe vertical, le rayon de la base intérieure étant de 2m, et que ce vase soit rempli d'eau pure, jusqu'à 1m5 de hauteur ; 1° quelle sera la pression sur la surface latérale ? 2° quelle sera la *circonférence de pression ?* — Lorsque le centre de pression est déterminé, il importe de connaître la résistance dont la matière du vase doit être capable en ce point, pour n'être pas rompue ; comment peut-on calculer cette résistance ?

X. Par le principe de la *moindre action*, qui n'est que celui des *moindres travaux*, on démontre, avec beaucoup de facilité, les *lois* de la *réflexion* et de la *réfraction* de la lumière, en admettant que *les phénomènes naturels sont produits par la plus petite quantité d'action ou de travail possible.*

On établit d'ailleurs ces lois par d'autres considérations et par des expériences précises. Mais dans les traités de physique, on n'insiste pas assez sur les applications des mêmes lois. Par exemple, pour les *miroirs plans* et *sphériques*, on n'y résout pas complètement les questions que voici : 1° y a-t-il une *ressemblance* parfaite entre l'objet et son image, même pour les miroirs plans ? 2° l'objet restant fixe, si l'on donne au miroir plan un mouvement *rectiligne* ou *angulaire ;* quel sera celui de l'image ? 3° L'image du soleil prouve-t-elle que chaque rayon réfléchi porte avec soi l'image du point, d'où il est parti ? Et n'est-ce pas sur cette proposition qu'est fondée l'explication de la manière dont les images se forment dans l'œil ?

XI. Les calculs nécessaires à l'appréciation du beau phénomène de l'*arc-en-ciel*, sont très-élémentaires, aussi bien que pour trouver l'*indice de réfraction*, lorsque l'angle de déviation est à son minimum. On peut aussi, à l'aide du calcul des maximums et des minimums, trouver le meilleur éclairage, d'abord avec une seule lumière, puis avec deux, avec quatre, sur une table rectangulaire ou elliptique. Il faut alors chercher les points du contour qui sont les plus ou les moins éclairés.

La théorie des verres *lenticulaires* dépend essentiellement du calcul et de la géométrie des trois dimensions : aussi est-elle fort incomplète dans presque tous les traités de physique, où souvent même on ne donne pas les formules pour calculer la position de l'image. Cependant la discussion de ces formules est nécessaire, non-seulement pour déterminer la position et la marche de l'image, par réfraction ; mais aussi pour en connaître les dimensions et surtout les conditions que le verre doit remplir, afin que cette image soit produite avec le plus de netteté possible. On démontre bien que, pour cet effet, les dimensions du verre doivent être très-petites, relativement à celles de l'objet et à la distance qui l'en sépare ; mais on ne démontre pas qu'alors *les images des objets, vus à travers les lentilles, sont semblables aux surfaces visibles de ces objets*, du moins à peu près ; d'où résulte le *grossissement*, etc.

Diverses applications du mesurage I. Nous ferons d'abord observer que si, dans ce qui précède, nous avons énoncé un grand nombre de problèmes numériques choisis, c'est qu'en physique, aussi bien qu'en mécanique et en géométrie, les théories ne peuvent s'approfondir qu'en les appliquant à des recherches numériques; toujours les plus propres à en faire ressortir tous les avantages. D'ailleurs ces théories sont le plus souvent numériques, elles-mêmes; comme cela doit-être, puisque le but final de toute science est d'avoir des nombres.

II. Nous pensons même que les premières notions du *mesurage* devraient être développées et appliquées, d'après le *calcul littéral*, dans l'arithmétique généralisée; non-seulement comme complément utile à la théorie des rapports et des proportions, mais surtout parce que ces notions, très-élémentaires, puisque tout le monde sait ce que c'est que la *ligne droite* et une *surface* ou un *volume rectangulaire*, fournissent les applications les plus propres à faire approfondir la science des nombres et à en rendre l'étude intéressante. D'ailleurs, il se présente, dans les arts et les métiers, une foule de questions numériques, dont les solutions supposent les premières notions du mesurage et du calcul. Et comme ces notions peuvent s'acquérir sans étudier complètement ni l'arithmétique ni la géométrie, on doit considérer, dans un cours *pratique*, fait à des ouvriers, des problèmes choisis, analogues à ceux-ci :

1° Deux chaudronniers ont donné, l'un 30 et l'autre 20 fr., pour l'achat d'une feuille *rectangulaire* de cuivre, ayant partout la même *épaisseur;* quelle portion de cette feuille chacun doit-il recevoir? comment la couper le plus aisément et de telle sorte qu'il y ait le moins possible de cuivre perdu?

2° Trois ébénistes achètent en commun, pour 120 fr., trois feuilles rectangulaires d'un même acajou; comment peuvent-ils calculer le prix de chacune, afin de savoir ce que doit payer celui qui la reçoit?

3° Les propriétaires de trois maisons, dont les milieux des portes sont les sommets d'un terrain *triangulaire*, dans lequel se trouvait un puits, veulent le faire restaurer et le joindre aux trois portes, par trois chemins pavés, coûtant chacun 1 fr. 20 le mètre de longueur. Le rétablissement du puits coûtera 150 fr., dont chacun paiera le tiers; mais pour compenser l'inconvénient d'avoir à faire, pour aller au puits, un chemin plus long, par l'avantage d'un moindre prix à payer, ils conviennent que celui qui aura un chemin deux fois plus long, paiera deux fois moins. Quelle sera, d'après cela, la dépense de chacun des trois propriétaires?

Si le puits était à construire, on pourrait demander en quel endroit du terrain il faudrait l'établir, pour que la somme des trois chemins fût la moindre possible, ou pour que le terrain fût divisé en trois portions *équivalentes*, par les trois chemins ?

4° Un fabricant porte à 360 fr. le prix de trois masses de fonte homogène, à faces rectangulaires, dont la plus petite pèse 90 kilos. Ne pouvant peser les deux autres, comment peut-il en calculer les rapports à la première, afin de connaître le prix de chacune ?

III. Dans le premier de ces problèmes, les deux ouvriers comprennent immédiatement que celui qui a payé 30 fr., ou les 3 cinquièmes du prix de la feuille de cuivre, doit en recevoir les trois cinquièmes; et que la *section*, la plus facile à pratiquer, doit l'être suivant une droite, dans le sens de la *largeur*, celle-ci étant moindre que la *longueur*. L'un d'eux prend donc un *fil* égal à la longueur de la feuille proposée ; puis, après quelques essais, il le *plie* en 5 parties égales, et marque sur deux *côtés* opposés, égaux chacune à cette longueur, les deux extrémités de la droite suivant laquelle il coupe les deux portions cherchées.

IV. C'est ainsi que des ouvriers peuvent résoudre les problèmes relatifs à leur métier, sans même connaître les principes de calcul et de géométrie, dont ils font usage : un peu d'expérience leur suffit. Mais pour le second problème ci-dessus, il faut des notions de calcul beaucoup plus étendues. Soient en effet, A, B, C, les trois feuilles rectangulaires inégales d'acajou : il faut d'abord déterminer les deux rapports A:C et B:C; chose bien difficile *directement*. Mais, a, b, c désignant les *longueurs* des trois feuilles A, B, C, et m, n, p, leurs *largeurs*; il est clair, par les raisonnements, très-simples et très-élémentaires, employés plus haut (p. 23), qu'on aura

$$A:C=(a:c)(m:p) \text{ et } B:C=(b:c)(n:p).$$

Voilà donc les deux rapports cherchés ramenés à d'autres, plus faciles à déterminer exactement. Chacun de ceux-ci se trouve, en effet, en cherchant *la plus grande mesure commune* de deux droites tracées, soit au moyen du *compas*, soit à l'aide de *fils*, ayant des longueurs égales à celles des droites successives : chaque fois on a une *fraction continue*, souvent *limitée*, faute de pouvoir continuer l'opération ; parce qu'on arrive à un *reste* échappant au compas, par sa petitesse ; d'où il faut estimer *à vue* le quotient que ce reste peut fournir.

Supposons donc qu'on ait trouvé $a:c=1,1,1,1=\frac{5}{3}$, $m:p=2,1,1,1,1=\frac{13}{5}$ et $b:c=n:p=1,2,2,2=\frac{17}{12}$. Il en résulte $A:C=\frac{13}{3}$ et $B:C=\frac{289}{144}$; d'où il est facile de voir que les prix des feuilles A,B,C, sont respectivement 70 fr. 84, 32 fr. 81 et 16 fr. 35.

Bien que ces prix soient approchés, à moins d'un demi-centime près, on ignore cependant le véritable degré d'approximation; vu que dans ces sortes de recherches, les quotients ne peuvent qu'être plus ou moins approchés. Il importe donc de vérifier les opérations, soit en doublant toutes les droites proposées, soit ici en observant que les premiers termes des fractions continues conduisent à supposer qu'elles sont *périodes;* ce qui donne $a:c=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, $m:p=\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$ et $b:c=n:p=\sqrt{2}$; d'où il vient $A:C=2+\sqrt{5}=4,24$ et $B:C=2$. Dans ces hypothèses, les prix de A,B,C, sont: 70 fr. 28, 33 fr. 15 et 16 fr. 57. Ces prix diffèrent peu des précédents; et en prenant les demi-sommes, on aura des prix plus approchés.

Il eût été tout aussi long, et probablement moins exact, de *mesurer* les *aires* des trois feuilles avec le décimètre, subdivisé en millimètres, et l'opération d'ailleurs se simplifierait de moitié, si les trois feuilles avaient la même largeur. Dans tous les cas, si elles ont la même épaisseur, il suffira de les *peser*, s'il est possible; opération à la portée de toutes les intelligences.

V. L'importance des fractions continues, comme méthodes d'approximation, dans les évaluations numériques, et comme moyens de représenter, plus clairement, les grandeurs ou les valeurs, exige que la théorie en soit développée complètement dans l'arithmétique généralisée, aussi bien que les premières notions du mesurage. Cette théorie est ordinairement réservée à l'algèbre; mais on n'y développe pas les applications les plus propres à en bien montrer la grande utilité.

Observons encore, dans la solution ci-dessus du second problème proposé, que les deux feuilles rectangulaires B et C sont *semblables;* parce qu'on a $b:c=n:p=\sqrt{2}$. Les trois feuilles A,B,C seraient *semblables*, si l'on trouvait les fractions continues *périodiques*, $a:c=m:p=3,6,6,6,6$, etc. $=\sqrt{10}$ et $b:c=n:p=2,1,1,1,4,1,1,1,4,1,1,1,4$, etc. $=\sqrt{7}$. Dans ce cas, on aurait $A:C=10$ et $B:C=7$; d'où les prix des trois feuilles seraient 66 fr. 67, 46 fr. 67 et 6 fr. 66.

C'est ainsi que le mesurage peut constater la *similitude* des grandeurs géométriques, et donner ainsi l'idée complète de leur *forme*, aussi bien que de leur *étendue* individuelle.

VI. Le mesurage n'est pas toujours possible, *avec l'unité de même nature que la chose à mesurer ;* et par exemple, si un voiturier doit recevoir 60 centimes par lieue et par 100 kilos, pour conduire à 20 lieues une belle statue de marbre blanc, entièrement massive, aussi bien que son piédestal, de même matière, il faudra connaître le poids total. Or, ce poids est beaucoup trop considérable. pour qu'il soit possible de le mesurer avec une *balance* ou un *peson ;* il faut donc *changer d'unité* et tâcher de mesurer le volume ; car sachant que le décimètre cube du marbre proposé pèse 2,5 de kilogramme, il est clair que dès que l'on connaîtra le nombre de décimètres cubes, mesure de l'espace occupé par la statue et son piédestal, une simple multiplication donnera le poids total cherché.

Mais comment mesurer le volume total ? Le seul procédé praticable ici est de plonger, avec les précautions nécessaires, la masse entière de marbre (ou séparément la statue et son piédestal) dans un bassin d'eau, à faces rectangulaires, et de mesurer, avec précision, la *hauteur* à laquelle le niveau se sera élevé, ainsi que la *longueur* et la *largeur* de ce niveau. Si donc on trouve 2 décimètres, 24 et 12, pour la hauteur, la longueur et la largeur ; le poids total sera $2,5 \cdot 24 \cdot 12 \cdot 2$ ou 1440 kilos. De sorte que le voiturier recevra 172 fr. 80 centimes.

VII. En général, le *volume* et le *poids* de toute masse matérielle sont tellement liés entre eux, que l'un étant donné, l'autre s'en déduit immédiatement, à l'aide de la *Table des Poids spécifiques*, donnée dans tous les traités de physique élémentaire. Cette table est d'autant plus utile, que tous les poids spécifiques sont rapportés ou peuvent se rapporter au *décimètre cube* d'eau distillée, à son maximum de densité ; lequel pèse précisément un kilogramme : cela réduit tous les nombres de la table, c'est-à-dire tous les poids spécifiques à des kilogrammes, pour l'unité de volume, savoir le *décimètre cube*, de chaque substance. On voit que si la géométrie est indispensable à la physique, celle-ci n'est pas moins utile au mesurage des volumes et à celui des aires.

VIII. Si le propriétaire d'une citerne, à faces rectangulaires, veut savoir combien il paiera pour la nétoyer et en revêtir l'intérieur d'une matière imperméable à l'eau, sachant que le mètre carré de cette matière lui coûtera 4 fr. et qu'il donnera un centime pour sortir de la citerne chaque seau d'eau, contenant 4 litres et demi : il devra nécessairement mesurer et calculer. Or, comme il n'a pas de mètre à sa disposition, il s'assure, au moyen d'une longue perche droite et d'un fil, 1° que la longueur est les 5 tiers de la largeur et celle-ci le quart de la profondeur, désignée par 120 p ; 2° que l'eau est au dixième de la profondeur, à partir de l'ouverture ; 3° enfin, qu'après avoir tiré 27 seaux d'eau, le niveau s'est abaissé du quarantième de la profondeur. D'après ces données, il peut établir ses calculs, et trouve, non-seulement qu'il aura à payer 84 fr. 24 ; mais que la citerne contient actuellement 4374 litres d'eau.

IX. Voici encore un exemple de la nécessité qu'il y a souvent de *mesurer* et de *compter*, pour avoir des *nombres :* un propriétaire veut faire creuser, dans la cour de sa maison, une citerne, à faces rectangulaires, qui ait 60 hectolitres de capacité, depuis la naissance de la voûte jusqu'au fond. Sachant qu'il paiera 6 fr. par mètre carré de surface, tant pour le pavé du fond et les quatre murs latéraux, que pour la projection horizontale de la voûte ; sachant de plus que, pour creuser la citerne, il paiera 8 fr. par mètre de profondeur (toujours à partir de la naissance de la voûte) ; il demande quelle doit être cette profondeur z, ainsi que les dimensions x et y du fond, pour que sa dépense totale m soit la plus petite possible ?

Il est visible, d'après la théorie du mesurage, et parce que 60 hectolitres font 6 mètres cubes, qu'on a ici les deux équations simultanées

$$xyz=6 \text{ et } 12(xy+xz+yz)+8z=m.$$

Éliminant z, puis résolvant l'équation finale successivement par rapport aux inconnues x et y, on verra que le *minimum* de m donne $x=y$ et

$$x^4-6x-4=0.$$

Les valeurs rationnelles de x, dans cette équation, sont des nombres entiers, diviseurs du dernier terme 4 ; et comme x doit être positif, les seuls diviseurs à essayer sont 1, 2 et 4. Or, il est évident que $x=2$ satisfait seul à l'équation proposée ; ainsi $x=y=2^m$ et $z=1^m5$. Donc la dépense minimum $m=132$ francs. Le quotient étant $x^3+2x^2+4x+2=0$; il n'y a qu'une racine positive.

Si l'on ne devait pas avoir égard au prix 8 fr. pour creuser la citerne, on trouverait que le minimum de m donne $x=y=z$; etc.

Enfin, si pour creuser, on payait aussi 6 fr. par mètre de profondeur, le minimum de la dépense totale m donnerait d'abord $x=y$, et ensuite

$$x^4-6x-3=0.$$

La seule racine positive est irrationnelle : sa valeur, à moins d'un demi-centième près, est $x=1,96$.

X. C'est ce qu'on trouve, fort simplement, par la méthode d'approximation de Lagrange, d'après les fractions continues.

Les calculs qu'exige cette méthode d'approximation, sont tellement simplifiés par le *tableau* des *divisions successives*, pour trouver les coefficients de la transformée en 1 sur *y*, que désormais les *dérivées* devront y être remplacées par le nouveau procédé des divisions, lequel d'ailleurs n'est que l'*algorithme* de M. Budan, rendu plus simple, ainsi que nous l'avons établi, dans notre traité de Haute algèbre. Nous pensons même que le procédé des divisions successives serait utilement placé à la suite des équations du second degré, dans les éléments d'algèbre, soit pour la recherche des racines entières, soit pour résoudre, par approximation, les équations numériques du troisième degré, et même du quatrième.

Remarques sur les démonstrations Bien que les remarques suivantes sur les définitions et sur les démonstrations, se trouvent, pour la plupart, dans la 8e édition de notre traité d'Arithmétique (note 3e), nous croyons utile au but du présent mémoire de les reproduire ici, où elles sont mieux placées.

I. L'arithmétique ne doit et ne peut considérer que les *quantités* dont les *grandeurs* soient susceptibles d'être exprimées exactement par des *nombres*. Ainsi toute chose qui ne saurait se réduire en nombre, bien qu'elle puisse augmenter ou diminuer, n'est pas une *quantité*, du ressort de l'arithmétique; et sa grandeur ne peut être soumise au calcul.

Cependant on définit ordinairement la *quantité* en disant que c'est *tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution*: c'est définition est donc trop générale, puisqu'il en résulte que le *courage*, la *vertu*, l'*intelligence*, etc., sont des quantités. Or, comment exprimer les grandeurs de ces quantités par des nombres? où trouver l'*unité*, terme invariable de comparaison, pour mesurer la grandeur de l'intelligence, par exemple? A la vérité, l'intelligence a toujours une *valeur*, que l'on peut estimer en unités monétaires et réduire en nombre : cette valeur est bien une quantité; mais elle ne représente pas la grandeur de l'intelligence, puisque celle-ci, bien que toujours la même, varie dans sa valeur, selon les individus qui en font l'estimation.

Ce n'est que quand on aura trouvé une *unité*, invariable et bien connue, propre à mesurer la grandeur de l'*intelligence*, du *courage*, de *la vertu*, de *la beauté* d'un tableau, etc., que ces diverses choses pourront s'appeler *quantités*; et voilà pourquoi nous avons nommé *quantité, tout ce qui est ou qui peut se concevoir divisé en portions égales entre elles;* parce que la quantité, ainsi définie, est non-seulement susceptible d'augmentation et de diminution ; mais sa grandeur peut se compter ou se mesurer, pour fournir un nombre, rationnel ou non, exact ou suffisamment approché.

II. Tels sont les caractères d'une bonne définition : être complète, claire et précise; être évidente par elle-même, c'est-à-dire par le seul énoncé, comme les *axiomes*. D'ailleurs, *définir* une chose, c'est la nommer et l'expliquer ou la décrire, de telle sorte qu'on puisse la distinguer de tout autre et que le nom seul suffise pour rappeler l'idée de la chose définie, ou plutôt de l'une de ses *propriétés caractéristiques;* car nous ne pouvons connaître les choses en elles-mêmes, et il ne saurait y avoir que des définitions de noms.

Quand une définition est bien faite (ce qui n'est pas toujours facile) les raisonnements et les déductions logiques, qui s'appuient sur elle, sont toujours très-simples. Il importe donc beaucoup, dans la science des nombres, de bien choisir les définitions, qui sont la source de toutes les vérités du calcul. On doit aussi consulter l'*analogie;* et même chaque définition est nécessairement *analogique*, puisqu'elle donne le même nom à toutes les choses ayant une propriété commune ou plutôt *analogue.*

III. La définition doit s'appliquer à tous les cas particuliers *semblables :* s'il en était autrement, elle serait *incomplète;* et pour étendre cette définition à des choses analogues, qui n'y sont pas renfermées, il faut une nouvelle définition. C'est ainsi que pour étendre la définition ordinaire de la multiplication, où le multiplicateur est entier, à la multiplication par une fraction, il faut admettre et expliquer les *fractions de fois.* C'est que la définition ordinaire de la multiplication est incomplète ; et il faut la *généraliser*, soit en se servant des *fractions de fois*, soit plutôt en disant que *le produit se trouve en opérant sur le multiplicande comme le multiplicateur en opérant sur l'unité;* ce qui rentre dans la définition posée en 1821, par M. Cauchy, Cours d'analyse, etc.

Par cette définition, on aura facilement le produit, pourvu que l'on voye bien comment il faut opérer sur l'unité pour avoir le multiplicateur. Or, dans $10\times\sqrt{2}$, si l'on disait que le multiplicateur s'obtient en prenant la racine carrée de 2 fois l'unité, on en conclurait que le produit se trouvera en prenant la racine carrée de deux fois le multiplicande 10 et qu'ainsi ce produit est $\sqrt{20}$; chose absurde. Mais 2 étant le carré de sa racine carrée, doit contenir le carré de l'unité de cette racine ; ainsi le multiplicateur $\sqrt{2}$ s'obtient réellement en prenant la racine carrée de 2 fois le carré de l'unité ; donc le produit s'obtiendra en prenant la racine carrée de 2 fois le carré du multiplicande 10 ; de sorte que $10\sqrt{2}=\sqrt{200}$; et en général, $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{(ab)}$; ce qui est exact et fournit un principe.

La définition ci-dessus est entièrement analogique et montre clairement comment toutes les grandeurs, de même nature, peuvent s'exprimer au moyen de l'une quelconque d'entre elles, prise pour terme invariable de comparaison : il faut alors calculer le multiplicateur, par le *mesurage*.

IV. Non-seulement les définitions, en Arithmétique et en Algèbre, sont basées sur l'analogie ; mais aussi les *règles*, les *formules* et les *démonstrations*. La plupart des règles ou des principes de calcul ne résultent pas immédiatement des définitions : on peut bien les découvrir par des applications numériques ; mais pour avoir une entière certitude, il faut des *démontrations* : ce sont des raisonnements, fondés toujours sur les définitions, sur des notions claires et des vérités bien établies, propres à fournir la certitude parfaite et à tenir lieu conséquemment d'une infinité de vérifications particulières. Or, pour qu'une démonstration produise cet effet et soit *complète*, il faut d'abord que les principes dont elle fait usage, soient évidents ou démontrés eux-mêmes et y soient rappelés ; il faut ensuite qu'elle ne dépende point des *valeurs particulières* des nombres employés et qu'elle reste la même lorsqu'on y remplace ces nombres par leurs *dénominations générales* ou par les lettres de l'alphabet ; ce qui est souvent plus simple.

Si la démonstration ne satisfait pas à toutes ces conditions, elle est incomplète et la *conclusion* n'est pas *certaine*, bien qu'elle puisse être *vraie* : c'est une conclusion *trop précipitée*, qui pourrait être *fausse*, sans qu'on s'en aperçût immédiatement, puisque rien n'en avertirait dans le raisonnement incomplet employé.

V. La plupart des livres élémentaires contiennent une foule de raisonnements de ce genre, particulièrement en Arithmétique et en Algèbre, pour la divisibilité, les fractions, les grandeurs irrationnelles, etc. De tels livres sont par-là peu convenables à l'instruction ; car s'il est toujours fort utile de penser juste, même sur des choses inutiles, et si pour apprendre à penser juste, il est nécessaire d'exercer la pensée d'abord sur des objets susceptibles d'exactitude ; on conçoit que rien n'est plus important que de prémunir la jeunesse contre les erreurs du raisonnement, en ne lui présentant que des démonstrations claires et complètes. Mais de là vient, pour le lecteur ou l'auditeur, la nécessité de revenir souvent sur les premières notions, afin de se les rendre entièrement claires et distinctes, par l'usage, et de ne point se contenter de démonstrations *tronquées*, qui faussent le jugement. Car les *énumérations* incomplètes, les conclusions trop précipitées et en un mot, les raisonnements *fautifs*, sont la source de toutes nos erreurs.

Du reste, celui qui n'est satisfait que de ce qu'il saisit bien distinctement, corrige de tels raisonnements ; mais il faut, pour cela, qu'il ait approfondi les notions premières, afin qu'il ne voie pas les choses à travers des nuages et ne tombe pas dans le vague ou l'absurde, quand il veut se les expliquer.

VI. Le choix des démonstrations est d'une grande importance, non-seulement pour la clarté et la simplicité ; mais aussi pour les conséquences que ces démonstrations peuvent suggérer. Elles doivent être complètes, comme les définitions ; sans quoi, fournissant des analogies fausses, des *inductions* trompeuses, elles auraient pour résultat d'égarer le jugement. On démontre par *analogie*, en liant les vérités par des raisonnements semblables, ce qui soulage la mémoire ; on démontre aussi par *induction*, en passant par les cas particuliers pour s'élever au cas général : l'induction est la source de presque toutes les vérités dans les sciences, a dit Laplace ; mais il faut prendre garde de *généraliser* trop promptement.

Quelquefois on part du cas le plus général, comme en algèbre, pour découvrir la formule cherchée : c'est la méthode d'induction, prise dans l'ordre inverse, en descendant aux cas particuliers. On se base alors sur ce que la formule étant complètement analogique, puisqu'on la suppose de la plus grande *généralité* : les valeurs particulières d'une lettre *ne sauraient aucunement changer le rôle que cette lettre joue dans la formule* : cela est évident. Si donc la formule est connue, pour plusieurs valeurs particulières de la lettre, *nombres* et *symboles*, elle sera connue pour toutes les valeurs imaginables de cette lettre.

C'est-là le *principe d'analogie directe*, applicable surtout en géométrie à la recherche des théorèmes sur les rapports et le mesurage. Car les grandeurs comprises dans la même définition générale, ont le même mode de *génération* ; elles ont leurs *éléments générateurs* analogues et par suite de mêmes dénominations respectives. Donc *les expressions numériques de ces grandeurs sont données par la même formule générale* : autrement, les valeurs particulières d'un élément générateur changeraient le rôle que cet élément joue dans la génération ; ce qui ne saurait être.

VII Par exemple, cherchons l'expression immédiate de u en x, dans l'équation identique

$$u=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2\cdot3}+\frac{x^4}{2\cdot3\cdot4}+\frac{x^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\text{etc.}\quad\text{(E)}$$

La *loi* de la *série* du second membre est évidente, jusqu'à l'infini; et il s'agit de calculer la valeur de u pour $x=1, -1$ et $\frac{1}{2}$. Or, $x=1$ donne, pour u, une série convergente, dont les onze premiers termes, réduits en 8 décimales chacun, fournissent 2,71828183. Cette valeur de u est exacte dans les 7 premières décimales, et on la représente ordinairement par la lettre e; de sorte que pour $x=1$, on a $u=e=e^1$. On verra, plus facilement encore que, pour $x=-1$, on a $u=1$ sur $e=e^{-1}$, et que $x=\frac{1}{2}$ donne $u=\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}$.

Or, comme les hypothèses successives $x=1, -1$ et $\frac{1}{2}$ n'ont pu changer, en aucune manière, la *composition immédiate* de u en e et x, et que chaque fois on a $u=e^x$, il s'ensuit qu'avant ces hypothèses, on avait aussi $u=e^x$. Ainsi, quel que soit x, nombre ou symbole, la série (E) sera toujours le développement de e^x : c'est la série *exponentielle* la plus usitée, comme étant complètement générale et la source de plusieurs conséquences utiles, faciles à en déduire.

De même, les exposants désignant des nombres ou des symboles quelconques, on démontre, avec facilité, que dans $u=a^n \times a^v$ et dans $u=(a^n)^v$, la fonction u n'est autre chose que a dont $n+v$ et nv sont les exposants. Cela fournit immédiatement les véritables significations des exposants fractionnaires ou irrationnels, *positifs* ou *négatifs*, et enfin le calcul des exposants, d'une *nature quelconque*.

VIII. Le même mode de recherche fournit très-simplement plusieurs autres *fonctions* importantes, telle que la *série binomiale*, et en démontre la généralité complète.

Il est vraiment remarquable que ce mode, si clair, si simple et si fécond, à la fois, ne soit pas généralement employé en algèbre. Il en est si peu question, dans les traités de cette science, les plus estimés, que je me suis demandé plusieurs fois si réellement cette manière de parvenir à la fonction, dont on a le développement, possède tous les avantages que je lui reconnais : j'avais la crainte d'être sous l'empire d'une illusion. Mais, observant d'une part qu'Euler a suivi une méthode à peu près semblable, bien que moins simple, pour démontrer la généralité de la formule du binome; et d'autre part, que la méthode des coefficients indéterminés, par laquelle on parvient ordinairement aux séries binomiales, exponentielles et logarithmiques, n'est au fond qu'une application du principe d'analogie directe; j'ai été pleinement rassuré sur l'exactitude logique de la méthode ci-dessus; laquelle conséquemment doit figurer parmi les méthodes élémentaires les plus utiles.

IX. Enfin, comme le principe d'analogie est très-simple, très-clair et rigoureusement exact, je pense que son emploi, bien entendu, simplifiera notablement les traités élémentaires de géométrie, sans leur rien faire perdre de la rigoureuse exactitude dont ils sont susceptibles : je pense même que ce principe est nécessaire pour bien mettre en évidence cette exactitude rigoureuse. Mais n'eût-il d'ailleurs que la propriété de faciliter l'étude de la géométrie et de rendre cette science importante accessible à un plus grand nombre de personnes, qu'on devrait l'y employer de préférence à d'autres méthodes, plus rigoureuses en apparence; bien qu'il n'en soit pas ainsi, en réalité.

Résolution des équations. Observons d'abord que si l'on veut diviser un polygone rationnel et entier, de degré quelconque en x, par le binome $x-a$, il faudra d'abord écrire, sur une même ligne, tous les coefficients de x et avec leurs signes, en mettant $+0$, à la place de ceux des puissances de x qui pourraient manquer, dans le polynome proposé; puis, au-dessous de cette première ligne, en écrire une seconde, ayant le même premier terme; de telle sorte que chacun des autres termes soit le terme immédiatement au-dessus ajouté au produit du terme immédiatement à gauche, de la seconde ligne, multiplié par a, c'est-à-dire par le second terme du diviseur, *pris en signe contraire :* les termes de la seconde ligne, ainsi formés, sont les coefficients des puissances successives de x, dans le quotient cherché, et le dernier terme est le *reste* de la division. C'est ce qu'on démontre bien aisément, comme il suit :

Prenons le polynome $nx^4+px^3+qx^2+rx+s$; si on le divise par $x-a$, le quotient sera de la forme $nx^3+p'x^2+q'x+r'$, avec le reste s'. Or en ajoutant ce reste au produit du quotient par le diviseur, on doit retrouver le dividende; lequel conséquemment est *représenté* par

$$nx^4+(p'-an)x^3+(q'-ap')x^2+(r'-aq')x+s'-ar'.$$

Il faut donc que $p'-an=p$, $q'-ap'=q$, $r'-aq'=r$ et $s'-ar'=s$. Ainsi, en écrivant les deux lignes ci-à-côté, on voit que dans la seconde, $p'=an+p$, $q'=ap'+q$, $r'=aq'+r$ et $s'=ar'+s$.

$$\left|\begin{array}{l} n,\ p,\ q,\ r,\ s, \\ n',\ p',\ q',\ r',\ s'. \end{array}\right.$$

Cela démontre complètement la règle énoncée.

II. Par cette règle, on évite l'appareil de la division, toujours plus compliqué, et l'on peut souvent effectuer *mentalement* les opérations; ce qui rend les calculs les plus simples possible. Ainsi, pour diviser le polynome x^4-6x-4 par $x-2$, on forme le *tableau* que voici :

Coefficients proposés . . . $1+0+0-6-4$;
Division par $x-2$ . . . . . $1+2+4+2+0$.

Donc, le dernier terme de la seconde ligne étant nul, le quotient cherché est exactement x^3+2x^2+4x+2.

III. Lorsque le polynome en x est le produit de plusieurs binomes $x-a$, $x+b$, $x-c$, etc, son dernier terme a nécessairement pour facteurs $-a$, $+b$, $-c$, etc. Par conséquent, pour le décomposer en facteurs binomes, du premier degré en x, il faudra prendre pour seconds termes des diviseurs successifs, les diviseurs, tant positifs que négatifs, du dernier terme du polynome proposé, du premier quotient exact, du second quotient, etc. De cette manière, on n'a qu'un seul tableau à former, pour les divisions successives ; ce qui abrége beaucoup.

IV. Considérons par exemple le polynome numérique $2x^4-2x^3-14x^2+2x+12$. Pour le décomposer en facteurs binomes, on forme ce tableau :

Coefficients proposés . . . . $2-2-14+2+12$;
Division par $x-1$ . . . . $2+0-14-12+0$;
Division par $x+1$ . . . . $2-2-12+0$;
Division par $x-3$ . . . . $2+4+0$.

Puisque tous les restes sont nuls et que le dernier quotient exact est $2x+4$, on voit que le polynome proposé revient à

$$(x-1)(x+1)(x-3)(2x+4).$$

S'il doit être nul, c'est-à-dire si l'on doit avoir

$$2x^4-2x^3-14x^2+2x+12=0;$$

comme un produit ne peut être nul que par l'un au moins de ses facteurs, on voit que les racines de cette équation sont : $x=1,-1,3$ et -2. Telle est la méthode la plus simple pour calculer les racines entières.

V. Quant aux racines irrationnelles, soit l'équation

$$X=nx^4+px^3+qx^2+rx+s=0.$$

Pour calculer, avec facilité, la transformée qui en résulte lorsqu'on y fait $x=a+y$, d'où $y=x-a$, on divise X par $x-a$, ce qui donne le quotient L, du troisième degré en x, avec le reste A, indépendant de x ; on divise L par $x-a$, et l'on trouve un quotient M, du second degré en x, avec le reste B, tout connu ; on divise M par $x-a$, et l'on obtient le quotient N, du premier degré en x, avec le reste connu C ; enfin, on divise N par $x-a$, et cela donne le quotient n, avec le reste D, tous les deux connus. Ainsi, à cause de $y=x-a$, on a

$$X=Ly+A, L=My+B, M=Ny+C \text{ et } N=ny+D.$$

Substituant donc, il vient la transformée :

$$X = ny^4 + Dy^3 + Cy^2 + By + A = 0.$$

VI. D'après cette méthode des *divisions successives*, soit à calculer, à moins d'un demi-centième près, la seule racine positive de l'équation

$$x^4 - 6x - 3 = 0.$$

On voit d'abord que cette racine est comprise entre 1 et 2, mais plus près de 2 que de 1. Posant donc $x = 1 + 1$ sur y, les divisions successives, pour calculer aisément la transformée en 1 sur y, donnent le premier tableau ci-dessous :

$1+0+0-6-3$;	$\frac{1}{y^4} + \frac{4}{y^3} + \frac{6}{y^2} - \frac{2}{y} - 8 = 0$;
$1+1+1-5-8$;	$8y^4 + 2y^3 - 6y^2 - 4y - 1 = 0$;
$1+2+3-2$;	$y > 1$ et $y < 2$; $y = 1 + 1$ sur z.
$1+3+6$;	
$1+4$.	

De même, la transformée en z sera

$$z^4 - 22z^3 - 48z^2 - 34z - 8 = 0 ;$$

d'où $z > 24$ et $z < 25$. Si donc on s'arrête à $z = 24$, on aura $x = 1,1,24 = \frac{49}{25} = 1,96$: l'erreur en moins est plus petite que 1 sur 625 ou $< 0,002$.

VII. Deux points A et B, situés de part et d'autre de la droite qui sépare deux terrains, sont aux distances $AC = 30^m$ et $BD = 40^m$ de cette droite, sur laquelle $CD = 70^m$. Le point A est le centre d'une fontaine et B celui d'un réservoir, que le propriétaire veut faire établir, aussi bien qu'un fossé, pour conduire l'eau de A en B. Mais le creusement du fossé est plus difficile dans le second terrain que dans le premier, de telle sorte que par mètre de longueur, les ouvriers exigent 1 fr. 20 dans le premier et 1 fr. 60 dans l'autre. En quel point P de CD faut-il faire aboutir les axes des deux parties du fossé, pour que le prix m à payer aux ouvriers soit un minimum ?

Prenant le décamètre pour *unité* et posant $AP = x$, on aura

$$m = 12\sqrt{(9 + x^2)} + 16\sqrt{(65 - 14x + x^2)}.$$

Dérivant par rapport à x et réduisant, il vient, pour calculer les valeurs positives de x, qui répondent au minimum de m, l'équation

$$x^4 - 14x^3 + 49x^2 - 288x + 1008 = 0.$$

Les racines réelles, sont positives; or, $x = 4 = 40^m$ satisfait à cette équation ; donc $m = 140$ francs.

Divisant par $x - 4$, on trouve $x^3 - 10x^2 + 9x - 252 = 0$. Cette équation a une racine positive entre 11,2 et 11,3, que l'on pourrait aisément calculer, à moins de 0,0005 près ; mais elle doit être rejetée, parce qu'elle donne, pour le minimum m, un prix plus grand que le précédent.

Enfin, soit a cette racine réelle, suffisamment approchée ; on devra donc regarder comme nul le reste de la division du premier membre par $x-a$; de sorte qu'on aura exactement

$$x^2+(a-10)x+a^2-10a+9=0\,;$$
$$\text{d'où } 2x=10-a\pm\sqrt{(20a+64-3a^2)}.$$

Donc, puisque $a>11$, les deux autres racines de l'équation proposée, du quatrième degré, sont *imaginaires*.

Le probleme précédent en fournit un autre ; car si le réservoir B doit être à faces rectangulaires et avoir 270 hectolitres de capacité ; si de plus, le creusement doit coûter 5 fr. par mètre cube, tandis que B devant avoir 1^m5 de profondeur, les quatre murs latéraux seront payés 6 fr. le mètre carré de surface intérieure ; comment calculer les dimensions x et y du fond, pour que le prix total p soit un minimum ?

Ici le calcul des *dérivées* n'est pas nécessaires ; mais ce calcul n'en est pas moins fort utile dans plusieurs recherches numériques ; et comme il se démontre par des considérations très-simples, je ne vois pas pourquoi on ne l'établirait pas complètement en algèbre.

VIII. Si l'on devait faire construire un réservoir d'eau, à faces rectangulaires, et payer 6 fr. par mètre carré de surface intérieure, tant pour le pavé du fond que pour les quatre murs latéraux ; si de plus on devait aussi payer 6 fr. par mètre de longueur, pour faire tailler les pierres, qui doivent revêtir les côtés du fond rectangulaire, et si d'ailleurs le réservoir doit avoir 480 hectolitres de capacité ; quelles devront être la profondeur z, la longueur x et la largeur y du fond, pour que le prix total de la construction soit un minimum $12m$?

Il est facile de voir qu'on a les deux équations

$$xyz=48 \text{ et } xy+2z(x+y)+2(x+y)=2m\,;$$

desquelles on tire, pour le minimum de $12m$, d'abord $x=y$, et ensuite

$$x^3+2x^2-96=0.$$

Cette équation n'a que la seule racine réelle 4 ; d'où $x=y=4^m, z=3^m$ et le minimum $12m=180$ francs.

Méthode élémentaire d'interpolation I. *Interpoler* une série, c'est placer un même nombre de nouveaux termes entre chaque couple de termes consécutifs, de telle sorte que la nouvelle série soit de même nature que la proposée.

L'*interpolation* des séries est utile, non-seulement pour la construction de certaines *tables*, comme celles des *Logarithmes* ; mais surtout dans l'observation des *phénomènes*, pour en découvrir la *loi* et suppléer à de nouvelles observations, qui ne seraient pas toujours praticables.

II. Par exemple, un vase reçoit de l'eau par un robinet et en perd par un autre. On a observé qu'après 1 minute, 5, 9, 13 et 17 minutes d'écoulement, les nombres de litres d'eau, versés par le second robinet, étaient 2, 30, 90, 182 et 306; combien d'eau fournissait-il pendant les minutes successives?

Ici l'écoulement a été observé de 4 en 4 minutes; par conséquent, pour avoir les nombres cherchés, il faut *interpoler* trois nouveaux termes entre chaque couple de termes consécutifs de la série 2, 30, 90, 182 et 306. Or, pour cela, il est nécessaire de trouver la *loi* de cette série, en la comparant à celles que nous connaissons, telles que les suites des n, premiers nombres entiers, *naturels*, *pairs* ou *impairs*, de leurs carrés ou de leurs cubes; les *progressions des divers ordres*; les *progressions* et les *séries géométriques*, que l'on peut *sommer* dans l'arithmétique généralisée; les *séries récurrentes*, etc., considérées en algèbre.

Comme les *différences secondes* de 2, 30, 90, 182, 306, sont toutes égales à 32; le $(n+1)$ ième terme se réduit à $2+12n+16n^2$: telle est la *loi* de la série 2, 30, 90, 182 et 306.

Cela posé, puisqu'on veut insérer 3 nouveaux termes entre chaque couple, il est clair que chaque terme de la série proposée sera suivi de 3 autres, pour former la série interpolée; celle-ci aura donc 4 fois autant de termes que l'autre. Soient donc n et z les nombres respectifs de termes de la série proposée et de la série interpolée; on aura $z=4n$ et $n=\frac{1}{4}z$. Si donc on substitue cette valeur de n dans l'expression du $(n+1)$ ième terme de la série proposée, savoir $2+12n+16n^2$, on aura $2+3z+z^2$, pour l'expression du $(z+1)$ ième terme de la série cherchée. Ces deux séries sont de même nature, puisque leurs termes généraux sont exprimés de la même manière, l'un en n et l'autre en z, et qu'ainsi elles ont des termes communs.

Si donc, dans $2+3z+z^2$, on pose successivement $z=0,1,2,3,4,5$, etc., on aura 2,6,12,20,30,42, etc., pour la série cherchée. De sorte que les nombres de litres d'eau versés pendant les minutes successives, forment la progression du premier ordre 2,4,6,8,10,12, etc. C'est la loi cherchée de l'écoulement : il eût été *uniforme*, si tous les nombres de litres avaient été égaux.

III. Si, en variant les époques des observations, on a vérifié cette loi, et si l'on a des motifs de croire qu'elle reste constante pendant plusieurs jours, on pourra calculer, sans aucune observation nouvelle, soit la quantité d'eau versée pendant 30 minutes, par exemple, soit le nombre de minutes qu'il faudrait pour verser 342 litres.

C'est ainsi que l'on peut suppléer à l'observation, toujours plus ou moins approximative, par des calculs rigoureux, en remontant, à l'aide des séries, à la loi exacte du mouvement qui a lieu, loi que les expériences ne pouvaient que faire pressentir.

Remarquons bien toutefois que l'interpolation n'est ici applicable que parce qu'il y a le même intervalle de temps entre les observations successives. On devra donc toujours satisfaire à cette condition, pour faciliter la détermination de la loi du phénomène, laquelle au fond est toujours celle d'un mouvement.

En général, l'observation des phénomènes a pour but de trouver des résultats numériques. Lorsqu'on est parvenu à un grand nombre de résultats, on en prend les *moyennes*, et l'on a ainsi plusieurs termes d'une série numérique, dont on cherche la loi, qui est aussi celle du phénomène observé, du moins dans les limites que les expériences comportent.

IV. Si l'intervalle entre les observations successives n'est pas constant, les nombres observés sont les sommes respectives d'autant de premiers termes d'une série inconnue, qu'il est marqué par les temps donnés. Il faudra donc, à l'aide de ces diverses sommes, découvrir la nature de cette série : le problème alors ne peut se résoudre qu'en tâtonnant, et pourrait être impossible ; ce qui arriverait si les nombres moyens appartenaient à une ou à plusieurs séries, dont les lois fussent encore inconnues.

Par exemple, dans le problème ci-dessus, supposons qu'après 1, 3, 6, 10 et 13 heures d'écoulement, les nombres de litres d'eau versés par le second robinet, soient 1,17,321,9217 et 98305 : quelle est la loi de l'écoulement du liquide ?

Ici, au moyen de quelques essais, sur la nature de la série, on finira par voir que $1=1+(1-1)\cdot 2^1$, $17=1+(3-1)\cdot 2^3$, $321=1+(6-1)\cdot 2^6$, etc.; d'où l'on conclura que $1+(n-1)2^n$ exprime la somme des n premiers termes de la série cherchée. Si donc on y change n en $n-1$ et qu'on en retranche le résultat, le reste $n\cdot 2^{n-1}$ sera le n ième terme ; par conséquent les termes successifs de cette série, ou les nombres de litres d'eau versés pendant les heures successives, sont : 1, 4, 12, 32, 80, 192, etc. Telle est la loi cherchée de l'écoulement du liquide.

V. Dans le précédent exemple, nous avons trouvé la série en observant que si, de la somme des n premiers termes, on soustrait la somme des $n-1$ premiers, il reste le n ième terme. D'après ce principe évident, étant donnée la somme des n premiers termes, en fonction rationnelle du nombre entier n, on saura toujours calculer la série ; de sorte que l'on peut ainsi découvrir une foule de *séries numériques*. Par exemple, un observateur exact a trouvé qu'après 2,5,7,11 et 16 minutes, un mobile était aux distances 5,55,140,506,1496 mètres de son point de départ ; quel chemin ce mobile parcourait-il pendant chaque minute successive ?

Ici les nombres observés sont les sommes respectives des 2, 5, 7, 11, 16 premiers termes d'une série inconnue ; or, comme 5,55,140, etc. doivent dépendre de 2,5,7, etc., on trouvera $5=\frac{1}{6}\cdot 2(2+1)(2\cdot 2+1)$, $55=\frac{1}{6}\cdot 5(5+1)(2\cdot 5+1)$, etc. On voit que la somme des n premiers termes de la série cherchée est $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$; d'où l'on déduit n^2 pour le n ième terme. La série est donc formée par les carrés des n premiers nombres entiers 1,4,9,16,25,36,49 , etc. Tels sont les nombres de mètres, que le mobile a parcourus pendant les minutes successives.

VI. L'interpolation des séries pouvant recevoir d'importantes applications, devrait être développée dans les éléments d'algèbre, à la suite des séries *numériques* ou *élémentaires*. On l'y indique bien, pour les progressions arithmétiques et géométriques ; mais pourquoi ne l'étendrait-on pas aux *progressions des divers ordres* et aux *séries géométriques*, dont on sait calculer les sommes, même dans la simple Arithmétique généralisée ? On indique les moyens de construire les *tables* de *logarithmes* et l'on démontre même les séries, que l'on regarde comme les plus propres à abréger les calculs ; mais on oublie l'*interpolation* dans les progressions du second ordre ou du troisième, qui fournit cependant les abréviations les plus notables, et dont la théorie est de première facilité, comme nous venons de le prouver à l'article II ci-dessus.

Divisibilité. Soient A et B deux *nombres* ou deux *polynomes entiers* : d'abord le produit AB a nécessairement pour facteurs *premiers* tous ceux de A et de B ; ensuite il ne saurait en avoir d'autres, évidemment. Car, si le produit de deux facteurs premiers n'est jamais premier, lui-même ; d'où viendraient ces autres facteurs premiers du produit AB, qui n'appartiendraient ni au multiplicande ni au multiplicateur ?

Cela posé, les lettres désignant toujours des nombres ou des polynomes entiers, je dis que *si* N *est premier avec chacun des facteurs du produit* ABCD, *il ne divisera jamais ce produit*. En effet, N étant premier avec chacun des facteurs du produit ABCD, aucun des facteurs premiers de N ne se trouve dans A ni B ni C ni D. Et comme le produit ABCD n'a d'autres facteurs premiers que ceux de ces propres facteurs, on voit qu'aucun des facteurs premiers de N ne se trouve dans ABCD ; donc N n'est pas facteur de ce produit et ne saurait le diviser.

On démontre aussi, avec beaucoup de facilité, que *si* N *divise le produit* ABCD *et qu'il soit premier avec chacun des facteurs de ce produit, sauf le premier* A, *il divise celui-ci*. Car tous les facteurs premiers de N devant se trouver dans le produit ABCD, se trouvent nécessairement dans A ; vu qu'aucun d'eux n'est dans B ni C ni D. Donc N divise A.

On voit que les démonstrations de ces principes ne sont ordinairement si compliquées, en Arithmétique et surtout en Algèbre, que parce quelles ne sont point basées sur les notions les plus élémentaires, que nous venons d'employer ; lesquelles fournissent la théorie, la plus claire et la plus simple, des grandeurs *irrationnelles* ou *inexprimables* en chiffres.

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

I. *De l'Analogie en Géométrie.*

Par J.-N. NOËL, Professeur à l'Université de Liége.

CONSIDÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

I. Les quantités *continues* et surtout les *figures* que la géométrie considère, sont d'un continuel usage dans les arts, où il faut les *construire*, d'après certaines conditions, et les *comparer* entre elles, pour avoir une idée précise de chacune. Il importe donc beaucoup alors de connaître parfaitement et la *forme* et l'*étendue* de la figure cherchée, aussi bien que de la figure donnée. Celle-ci pourrait limiter un corps matériel dont l'ensemble échapperait à la vue, bien qu'il fût mis sous les yeux; dans ce cas on n'aurait qu'une idée fort vague de la figure proposée; et c'est ici que le dessin devient d'un merveilleux secours pour *représenter* la figure et mettre toutes ses parties en évidence sur le papier.

Or, comme tout ce qui existe en *grand* peut se concevoir en *petit*, et réciproquement, il est clair que deux quantités géométriques peuvent avoir la même *forme*, sans avoir la même *étendue*; et dans ce cas on dit que les deux figures sont *semblables*, parce que l'une peut remplacer l'autre et en tenir absolument lieu, pour l'étude de leurs *propriétés* communes et pour les opérations que l'on aurait à exécuter sur cette dernière.

II. Pour que la figure F soit *semblable* à la figure F', il faut, si elles sont planes, que les angles de F soient respectivement égaux

aux angles de F' et disposés dans le même ordre ; il faut de plus que chaque ligne de F ait un *rapport* constant avec la ligne correspondante ou *homologue* de F' et la *représente* en *longueur* et en *position*. Alors en effet, toutes les *parties* de F *représentent* les parties homologues de F', en position et en grandeur ; de telle sorte que tout ce qu'on dira de F pourra se dire de F' et réciproquement. La figure F *représente* donc complétement la figure F' et jouit exactement des mêmes propriétés : elle lui est *semblable* en tout. Les deux figures ont d'ailleurs la même *forme* et ne diffèrent que par leurs grandeurs individuelles, puisque si le rapport constant était l'unité abstraite, c'est-à-dire si deux lignes homologues étaient égales, les deux figures pourraient se confondre en une seule.

La théorie des figures semblables ne consiste pas seulement à les définir clairement ; mais surtout à faire connaître les conditions *nécessaires* et *suffisantes* à la *similitude*, c'est-à-dire les *éléments générateurs* de chaque figure et l'emploi de ces éléments pour que, comme dans l'art du sculpteur, l'une des deux figures étant donnée, on puisse la *copier*, c'est-à-dire construire l'autre figure, avec une étendue plus petite ou plus grande ou parfaitement égale.

On voit l'importance de la notion de similitude, qui fournit à l'art du dessin les moyens de représenter sur le papier et de mettre sous les yeux, pour l'étudier et en avoir une idée claire, toute quantité géométrique, donnée comme *modèle* à copier et dont l'ensemble échapperait à la vue.

III. Il est évident que les théories de la géométrie ne portent que sur des figures semblables ou supposées telles. Mais la similitude, qui doit être parfaite quand il faut construire la figure cherchée, d'après un modèle donné, n'est toujours que plus ou moins approchée lorsqu'il s'agit d'étudier la figure. Dans ce dernier cas, la *copie* imparfaite, ou plutôt le *croquis*, suffit pour diriger les raisonnements ; lesquels ne portent que sur les *définitions* et non sur la figure particulière.

En général, on *devine* et l'on facilite la démonstration d'un théorème ou la solution d'un problème de géométrie, par la figure, mise sous les yeux ; mais lorsqu'on est familiarisé avec les combinaisons géométriques, il est parfois plus simple d'opérer sans aucune figure tracée : chaque figure alors est représentée par une lettre, ordinairement la lettre initiale du nom. On représente aussi par une lettre chaque partie à considérer.

La *régularité* et la *symétrie* d'une figure, soit par rapport à un *centre*, soit par rapport à un *axe*, en simplifient l'étude et le dessin. Deux figures peuvent être *égales* par *symétrie* ou être *inversement semblables* ;

et dans ces deux cas, l'une est la *copie inverse* de l'autre. Ces figures se présentent dans les arts, pour les ornements, aussi bien que les figures *égales* et *semblables*, et sont essentiellement du ressort de la géométrie, où elles jouent un rôle important.

IV. Le dessin ou la construction *graphique* de la figure donne bien la *forme* de celle-ci, c'est-à-dire la *disposition* de ses parties successives les unes à l'égard des autres; mais il n'en résulte pas l'idée précise de son *étendue*, que l'on ne peut connaître complètement que par le *mesurage*.

En général, il est essentiel d'exprimer exactement en nombres *concrets*, de même espèce, toutes les quantités continues de même nature; non-seulement pour faciliter leur *comparaison* ou la rendre possible; mais surtout parce que le nombre concret résultant *représente* la quantité proposée, ou plutôt sa *grandeur*, et en donne une idée plus complète que si cette quantité *matérialisée* était sous les yeux.

Par exemple, bien que j'aie sous les yeux la droite tracée D, je ne connais pas encore sa *longueur*; mais si je la *mesure* avec le mètre, en portant celui-ci sur D autant de fois successives qu'il est possible, puis en portant le décimètre sur le reste, le centimètre sur le second reste et que je trouve ainsi D = 54^{m}26 centimètres, sans reste; j'aurai la connaissance parfaite de la droite D, parce que je connais parfaitement le mètre et le centimètre que j'ai vus et maniés plusieurs fois.

C'est ainsi que l'on peut *mesurer* toute droite tracée et en avoir l'idée complète; mais cela demande des soins et des précautions pour trouver un nombre, sinon rigoureusement exact, ce qui est impossible, du moins suffisamment approché du véritable.

Si D est tracée sur le terrain et qu'on veuille trouver sur le papier la droite D', propre à *représenter* complètement la droite D, il faudra choisir l'unité linéaire u', qui représente l'unité linéaire u sur le terrain, assez petite pour qu'en prenant D' = 54,26 u', lorsque D = 54,26 u, la droite D' puisse se tracer sur le papier. Dans ce cas on dit que la droite D' est *semblable* à la droite D; car elle la représente et en tient absolument lieu, pour les opérations à exécuter sur D, lesquelles s'effectuent avec plus de facilité sur D'; et le résultat en u' est absolument le même que le résultat cherché en u.

V. En général, soit a une quantité continue quelconque, limitée de toutes parts, telle qu'une *ligne*, une *surface* ou un *volume* : cette quantité a nécessairement une *grandeur* ou une *valeur*, dont la connaissance précise est souvent indispensable. Or, cette grandeur n'est pas connue par la seule inspection de a, mise sous les yeux;

elle ne peut se déterminer complètement que par le mesurage, donnant le *rapport* de la grandeur cherchée à celle, bien connue, de l'*unité* u, de même nature que a.

Par l'usage fréquent que nous faisons de cette unité u, choisie d'ailleurs la plus simple parmi les quantités de son espèce, nous en acquérons le sentiment et l'idée la plus claire : voilà pourquoi nous connaissons bien la grandeur exprimée par un nombre de ces unités.

Ainsi le but qu'on se propose quand on veut *mesurer* a par u, c'est de trouver, le plus exactement possible, le nombre n tel qu'on ait $a = u \times n = nu$; en sorte que la quantité a soit exactement *représentée* par le nombre concret nu. Et comme $a = nu$ donne $a : u = n$, on voit que mesurer a par u, c'est chercher combien de fois a contient u; le quotient n, résultat du mesurage est dit la *mesure* ou la *valeur numérique* de a, parce que l'unité u étant le plus souvent *sous-entendue*, il vient simplement $a = n$. De cette manière, la lettre a représente à la fois la quantité proposée et sa mesure : donc si $a = 13$, cela signifie que $a = 13u$.

Une fois que l'on connaît exactement le nombre abstrait n, tout problème sur la grandeur a se résoudra sur le nombre nu; et cela avec plus de facilité et d'exactitude que si l'on opérait sur la quantité a elle-même, mise sous les yeux : cette quantité d'ailleurs pourrait ne pas être entièrement *visible*, ni entièrement *accessible*.

On voit l'importance du nombre abstrait n : aussi la détermination exacte de ce nombre, qui offre souvent de grandes difficultés *pratiques*, est-elle le but essentiel des sciences, telles que la *géométrie*, pour les *angles*, les *lignes*, les *surfaces* et les *volumes*; la *physique* et la *chimie*, pour différentes sortes de quantités continues; etc.

VI. Nous ne pouvons connaître les choses en elles-mêmes, c'est-à-dire sans les comparer à d'autres, de même nature, et il n'y a pas pour nous de *grandeur absolue*. Cela est si vrai, que si a est une longueur de 3 *pieds* et qu'à notre insu, cette longueur et celle du pied augmentent chacune de sa millième partie, nous ne pourrons nous apercevoir de cette double augmentation; car la longueur a sera toujours 3 pieds, comme auparavant. Ce n'est que par la comparaison des deux longueurs à une troisième, dont le changement ne serait pas sa millième partie, que nous pourrions soupçonner qu'il y a augmentation dans les deux longueurs; mais nous ne connaîtrions pas l'augmentation réelle de chacune; tant il est nécessaire, pour bien connaître les grandeurs, que le terme de comparaison demeure invariable.

Le meilleur système de mesures est donc celui où l'on peut les vérifier, pour les ramener à des grandeurs constantes; mais parmi les choses matérielles, en est-il qui soient absolument invariables? La chaleur, l'humidité, la sécheresse, le frottement et enfin la durée modifient les corps, bien qu'il en existe plusieurs, comme le marbre et les pierres dures, dont les changements soient forts petits. Pour avoir des *unités* de grandeurs invariables, il faudrait donc les rendre, en quelque sorte, indépendantes de la matière. C'est ce qu'on a voulu réaliser dans le nouveau système métrique : il faudrait un changement, bien extraordinaire, dans la forme de la terre, pour que la mesure du quart du méridien, qui passe par l'observatoire de Paris, pùt modifier la longueur du mètre, d'une manière notable. Et quand même la première mesure du méridien et celle que l'on ferait ensuite, pour vérifier le mètre, seraient fautives chacune d'un myriamètre; comme les erreurs ne peuvent avoir lieu précisément dans le même sens, l'erreur finale n'atteindrait pas le millimètre.

VII. On ne peut comparer entre elles que des choses de même nature, et encore souvent cette comparaison n'est possible que par *l'unité de valeur*, comme pour la beauté d'un *tableau* ou d'une *pierre*, dite précieuse. Chaque chose a nécessairement une *valeur*, constante ou variable, que l'on peut estimer en *unités monétaires;* et ainsi chaque chose a son *prix*, qui sera un *prix d'affection* pour le diamant, l'éméraude, la topaze, les peintures sur toile, etc. En un mot, toutes les grandeurs peuvent s'exprimer par des nombres, de la même unité monétaire, nombres indispensables, dans les usages de la vie sociale, et sans lesquels nos connaissances seraient fort bornées, relativement à ces grandeurs.

On appelle *rapport* ou *raison* le résultat de la comparaison de deux grandeurs a et b, de même nature. La différence $a-b$ est donc déjà un rapport; mais ce qu'on appelle essentiellement *rapport* ou *raison*, c'est le nombre abstrait n, par lequel il faut multiplier le *conséquent* b, pour avoir l'*antécédent* a; de telle sorte qu'on ait exactement $a=b \times n=bn$; d'où $a:b=n$. Ici les deux points verticaux représentent *divisé par;* mais il faut les énoncer *est à*, pour mieux rappeler que a est comparé à b et que n, *valeur* du rapport, est le résultat de cette comparaison.

Si $n=8$, on aura $a=8b$; et si $n=8$ onzièmes, a sera les 8 onzièmes de b; ainsi *le rapport indique toujours comment l'antécédent se trouve avec le conséquent*, ce qu'il faut bien remarquer. Cela résulte d'ailleurs de la définition de la multiplication, où l'on dit que *le produit se trouve en opérant sur le multiplicande, comme le multiplicateur en opérant sur l'unité.* Cette définition, la plus générale et conséquemment la plus utile, constitue le *principe d'analogie*, comme nous le développerons plus bas.

Les rapports sont d'un usage fréquent et nécessaire ; nous ne connaissons réellement que des rapports et ne pensons que par eux ; enfin, toutes nos études, du moins dans des sciences exactes, se réduisent à comparer et à mesurer, pour trouver des rapports et les exprimer. La relation $a = bn$ est donc fondamentale, par les conséquences, faciles à déduire, qu'elle fournit.

Cette relation est unique, c'est-à-dire que deux grandeurs, de même nature, ne peuvent avoir qu'un seul rapport, dont elles sont les *termes*. Car si elles en avaient deux n et r, d'où $a = bn = br$, on aurait $n = r$; contrairement à l'hypothèse.

De plus, la relation $a = bn$ existe nécessairement. Car si b restant de grandeur *constante*, on suppose que le nombre n *varie* et croisse depuis zéro, par *degrés insensibles*, il est clair que le produit $b \times n$ croîtra aussi par degrés insensibles et passera par tous les états imaginables de grandeur, depuis zéro ; on peut donc toujours supposer au nombre n une valeur telle, que le produit $b \times n$ donne exactement la quantité a.

A la vérité, si l'on avait $n^2 = 7$, le nombre n ne pourrait se déterminer exactement ; c'est-à-dire que les deux quantités a et b n'auraient point de plus grande mesure commune, *assignable* d'après les instruments les plus précis pour le mesurage de a par b. Dans ce cas, comme n est compris entre 2 et 3, on peut du moins toujours concevoir deux fractions, aussi peu différentes qu'on voudra, entre lesquelles le rapport cherché n soit compris : donc il existe et peut se calculer, avec une approximation suffisante.

On sait d'ailleurs que dans $n^2 = 7$, le nombre n est *inexprimable*, ou comme on dit, *irrationnel* ; n est une fraction dont les deux termes sont *infinis*, et par conséquent a et b n'ont d'autre *mesure commune* qu'une quantité *infiniment petite*.

Enfin, puisque deux quantités continues, de même nature, ont toujours un rapport, *exprimable* ou non, elles ont aussi toujours une mesure commune *assignable* ou *inassignable* ; et c'est dans ce dernier cas qu'il faut dire que les deux quantités proposées sont *incommensurables entre elles*.

Observons encore que le rapport le plus facile à déterminer est celui des grandeurs *semblables*, pouvant être parfaitement *égales* ; et si elles sont dissemblables, mais *équivalentes* entre elles, leur rapport est 1, le plus simple de tous les rapports. Le rapport entre deux choses, de même nature, est indépendant de leurs *formes* particulières et porte uniquement sur leurs *grandeurs relatives*. La *similitude* de deux quantités géométriques dépend à la fois des rapports de *grandeurs* et de *positions* de leurs parties correspondantes; lesquelles sont parfaitement *analogues* deux à deux. Aussi l'analogie joue-t-elle un rôle fort important, non-seulement dans la *similitude* de deux choses ; mais aussi dans leur *ressemblance*.

Les Proportions.

I. La mesure ou la comparaison des quantités rend souvent indispensable l'emploi des *proportions*, exprimant l'égalité de deux rapports. On sait que mesurer une quantité, c'est chercher le rapport de cette quantité à l'unité constante de même nature ; c'est diviser la chose à mesurer en parties égales à l'unité ou en une fraction déterminée de cette unité. Or, cette division est rarement praticable en opérant sur la quantité proposée ; et ce n'est par exemple, qu'*indirectement* que l'on peut trouver les valeurs numériques des longueurs curvilignes, des aires et des volumes, comme pour la circonférence, la surface d'un *bois* ou d'un *étang*, l'étendue d'une *salle*, etc.

Dans ces différents cas, on tâche de remplacer le rapport cherché par un autre égal, *simple* ou *composé*, plus facile à déterminer exactement. Pour les grandeurs continues, l'opération est ramenée, au moyen des théories géométriques, à la mesure *directe* des droites et des arcs circulaires, c'est-à-dire aux usages de la règle et du compas ou des instruments qui les remplacent sur le terrain.

II. Considérons les quatre quantités a, b, c, d, de même nature deux à deux, et supposons-les telles qu'en mesurant a par b, on mesure en même temps c par d, et réciproquement. Les deux nombres résultants seront donc absolument les mêmes ; et si $c = dn$, n étant un rapport, *exprimable* ou non, on aura aussi nécessairement $a = bn$. Donc si le rapport n de c à d est le plus facile à déterminer exactement, il faudra s'en servir pour calculer *indirectement* le rapport égal de a à b, et l'on aura ainsi $a = bn$; de sorte que a sera mesuré et exprimé par b, bien qu'on n'ait mesuré réellement que c par d. On voit l'utilité de la théorie des rapports égaux.

De là naissent les *proportions ;* car ayant ici $a : b = n$ et $c : d = n$, il en résulte $a : b = c : d$; c'est une *proportion*, qu'on écrit aussi $a : b :: c : d$, en énonçant a *est à* b *comme* c *est à* d. Cela signifie que a *s'obtient avec* b *absolument comme* c *se trouve avec* d ; vu que si le rapport commun n vaut 17 *onzièmes*, par exemple, a sera les 17 onzièmes de b absolument comme c est aussi les 17 onzièmes de d.

III. Réciproquement, si l'on sait que a s'obtient avec b absolument comme c se trouve au moyen de d, n'importe d'ailleurs par quelles opérations, *graphiques* ou *numériques*, pourvu qu'elles soient respectivement les mêmes, dans les deux cas, il s'ensuivra que si $a = bn$, n étant un rapport, rationnel ou non, on aura aussi nécessairement $c = dn$. Car si l'on pouvait avoir $c = dp$, p étant un nombre différent de n, il est clair, d'après la notion du rapport, que c ne s'obtiendrait point avec d absolument comme a avec b; contrairement à l'hypothèse. On a donc simultanément $a = bn$ et $c = dn$; d'où il vient $a : b :: c : d$.

Donc pour établir la proportion entre quatre quantités, nécessairement de mêmes natures et parfaitement *analogues* deux à deux, *il suffit de bien constater, d'après les définitions et les constructions, que la première grandeur se trouve à l'aide de la seconde absolument comme la troisième au moyen de la quatrième;* chose souvent très-facile.

IV. Telle est essentiellement la *méthode analogique*. Cette méthode est si simple et si naturelle, elle tient si immédiatement aux premières notions, qu'il faut s'étonner qu'on ne l'ait pas encore appliquée, bien explicitement, en géométrie. Cependant son emploi y présenterait les avantages de clarté, de facilité et de rigoureuse exactitude; non-seulement pour la *proportionnalité* des lignes, des surfaces et des volumes, limités de toutes parts; mais aussi pour leur *mesurage* et leur *construction*. C'est ce que nous allons développer, par divers exemples choisis.

V. Considérons d'abord les deux triangles quelconques ABC et A'B'C' et supposons qu'on ait à la fois l'angle $A = A'$ et la proportion $AB : A'B' :: AC : A'C'$. Il est clair que le côté $AB = AC \times n$ et le côté $A'B' = A'C' \times n$; de sorte que AB se trouve avec AC absolument comme A'B' avec A'C'. Mais AB s'obtient par les deux angles A et C, tracés aux extrémités de AC, tandis que A'B' se trouve par les deux angles A' et C', tracés aux extrémités de A'C'; donc puisque l'angle $A = A'$ et que AB se trouve au moyen de AC absolument comme A'B' au moyen de A'C', il faut que l'angle $C = C'$. On verra de même que l'angle $B = B'$; donc *deux triangles qui ont un angle égal compris entre côtés proportionnels, sont équiangles et les angles opposés aux côtés formant un rapport, sont égaux.*

Supposons maintenant l'angle $A = A'$ et l'angle $B = B'$: les deux angles A et B, qu'il faut tracer aux extrémités de AB, pour avoir AC ou BC, il faut donc aussi les tracer aux extrémités de A'B', pour avoir A'C' ou B'C'; donc A'C' ou B'C' se trouve avec A'B' absolument comme AC ou BC se trouve avec AB. Si donc $AC = AB \times n$ et $BC = AB \times p$, on aura aussi nécessairement $A'C' = A'B' \times n$ et $B'C' = A'B' \times p$; donc en divisant, il vient

$$AC : A'C' :: AB : A'B' :: BC : B'C';$$

et de plus, en vertu du cas précédent, l'angle $C = C'$. Ainsi, non-seulement *deux triangles sont équiangles dès qu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun*; mais de plus, *dans deux triangles équiangles les côtés opposés aux angles égaux sont proportionnels.* Réciproquement, *la proportionnalité des côtés de deux triangles entraine l'égalité des angles opposés.* Car alors AC se trouvant avec AB absolument comme $A'C'$ avec $A'B'$, il faut qu'on ait à la fois l'angle $A = A'$ et l'angle $B = B'$; d'où l'angle $C = C'$.

Ces quatre théorèmes suffisent pour établir complètement la théorie des *droites proportionnelles*; d'où résultent toutes les *relations numériques* dans les triangles. Mais l'analogie conduit immédiatement à la propriété de la droite divisant en deux parties égales, soit l'angle du sommet d'un triangle, soit l'angle extérieur supplémentaire. Ces deux bissectrices étant perpendiculaires entre elles, on en déduit les formules *logarithmiques* les plus simples pour résoudre les triangles, et toutes les formules de la trigonométrie rectiligne, d'après le théorème, auquel la méthode analogique, elle-même, conduit immédiatement, savoir: *la projection orthogonale de toute droite donnée est le produit de celle-ci par le cosinus numérique de l'angle compris.*

Considérons au moins trois parallèles coupant deux droites quelconques; soient a, b, c, d,..., les parties de la première droite qui répondent aux parties a', b', c', d',..., de la seconde: les angles internes-externes sur celle-ci étant égaux, il s'ensuit que a se trouve avec a' absolument comme b avec b', comme c avec c' et comme d avec d'; donc

$$a : a' = b : b' = c : c' = d : d' .... \quad (1)$$

Réciproquement, *cette suite étant vérifiée, les sécantes sont parallèles entre elles*, en vertu de l'analogie.

Supposons que la suite (1) subsiste lorsque, les deux droites proposées n'étant point parallèles, il y a au moins quatre sécantes non parallèles entre elles, ni deux à deux, et ne se coupant pas en un même point : la première sécante est donc divisée, par les autres, en parties b'', c'' et d'', lesquelles répondent aux parties b, c et d de la première droite proposée. Or, la suite (1) est indépendante de l'angle des deux droites; elle doit donc s'appliquer encore lorsque la seconde vient se placer sur la première sécante. Mais alors il y a une sécante de moins et b', c', d', deviennent respectivement b'', c'', d''; donc puisque les deux systèmes obtenus en supprimant successivement la première sécante et la seconde droite, sont complètement analogues, on a

$$b : b'' = c : c'' = d : d''.$$

Ce théorème, dû à M. Brasseur (*Applications des projections cotées* p. 6), cesserait d'exister, 1° si les sécantes étaient parallèles entre elles : 2° *si les deux droites proposées étaient parallèles;* car alors *les sécantes se couperaient en un même point*, toujours en vertu de l'analogie.

VI. Soient A et A′ deux angles au centre d'un même cercle, B et B′ les arcs compris par leurs côtés : mesurer B par B′, c'est mesurer en même temps A par A′, et réciproquement. Si donc $B = n\,B'$, on aura aussi $A = n\,A'$; d'où $A : A' = B : B'$.

Il est évident que la circonférence c se trouve avec son rayon r absolument comme la circonférence c' se trouve avec son rayon r'. Si donc $c' = r' \times n$, n étant le rapport des *longueurs* c' et r', on aura aussi nécessairement $c = r \times n$; d'où il vient $c : c' = r : r' = 2r : 2r'$.

De même, si les deux arcs a et a', de rayons r et r', sont terminés aux côtés d'un même angle au centre, leurs cordes étant c et c', leurs flèches f et f' ; il est évident que chacune des longueurs a, c, f, se trouve avec r absolument comme chacune des longueurs correspondantes a', c', f', se trouve avec r', et que par suite $a : a' = c : c' = f : f' = r : r'$.

Soient P et P′ deux parallélogrammes ayant un angle supplémentaire et par conséquent un angle égal ; soient a et b les côtés inégaux du premier parallélogramme, a' et b' les côtés du second : P et P′ étant équiangles, soit R le parallélogramme de même angle que celui commun à P et à P′, ayant ses deux côtés égaux l'un à a' et l'autre à b.

Cela posé, puisque P et R ont un même angle et le même côté b, il est clair que mesurer P par R, c'est mesurer en même temps a par a', et réciproquement ; donc $P : R = a : a'$; d'où $P = R\,(a : a')$. On verra de même que $R = P'\,(b : b')$; d'où en substituant et divisant par P′, il vient

$$P : P' = (a : a')\;(b : b').$$

Ainsi *le rapport de deux parallélogrammes, et par conséquent de deux triangles, ayant un angle égal ou supplémentaire, est le produit des rapports des côtés de cet angle qui se correspondent dans les deux figures.*

Ce théorème fournit plusieurs corollaires et immédiatement l'expression de l'*aire* du rectangle P, dont a et b sont les deux dimensions. Car soit s l'*unité superficielle*, carré fait sur l'*unité linéaire* u ; on aura

$$P = s\,(a : u)\;(b : u).$$

VII. Soit F une aire plane quelconque et F′ sa *projection* sur un plan non parallèle au premier. Imaginons un troisième plan perpendiculaire à leur intersection et coupant F et F′ suivant les droites *inscrites d* et *d′*, dont l'angle est celui x de F avec F′. Les perpendiculaires au second plan, abaissées des extrémités de d, déterminent d', tandis que les perpendiculaires à ce second plan, abaissées de tous les points du contour de F, déterminent F′; il est donc évident que F′ se trouve au moyen de F absolument comme d' se trouve au moyen de d, et ainsi $F' : F = d' : d = \cos x$; d'où $F' = F \cos x$.

Considérons les deux tétraèdres $SABC = t$ et $S'A'B'C' = t'$, dont S et S′ sont les sommets, ABC et A′B′C′ les bases. Les deux tétraèdres t et t' sont déterminés complètement dès que les deux trièdres A et A′ sont donnés, aussi bien que les arêtes qui les comprennent; et il en est de même des deux prismes triangulaires p et p', construits sur ces trièdres et leurs arêtes. Or, le prisme p se trouve en menant, par les points B et C, deux droites égales et parallèles à A S; de même, le prisme p' se trouve en menant, par les deux points B′ et C′, deux droites égales et parallèles à A′ S′. Il est donc évident que p' se trouve au moyen de t' absolument comme p se construit avec t. Si donc $p = t\,n$, on aura aussi $p' = t'\,n$ et par conséquent

$$t : t' :: p : p'.$$

Par cette proportion, ainsi démontrée clairement, simplement et rigoureusement, le rapport des volumes de deux tétraèdres quelconques est ramené à celui de deux prismes triangulaires.

La comparaison des aires et des volumes est conséquence du mesurage; mais il est parfois plus clair et plus direct d'opérer sur les deux termes du rapport. Par exemple, soit $SABC = t$ le tétraèdre dont S est le sommet et ABC la base; soit p le prisme triangulaire construit sur le trièdre A et ses trois arêtes; la seconde base de ce prisme étant SED, soit t' le tétraèdre ADSE : le tétraèdre t étant donné, il en résulte le prisme p en menant AD et CE égales et parallèles à BS; de même, t' étant donné, il en résulte le prisme p en menant EC et SB égales et parallèles à DA. Il est donc évident que le prisme p se trouve avec t' absolument comme avec t; donc si $p = t\,m$, on aura aussi nécessairement $p = t'\,m$, et ainsi t vaut t'.

Pour la pyramide quadrangulaire SACDE, dont S est le sommet et le parallélogramme ACDE la base, on verra encore, par la méthode analogique, que les deux tétraèdres $SADE = t'$ et $SACE = t''$ sont équivalents. Or, $p = t + t' + t''$; donc $p = 3\,t$ et $t = \frac{1}{3}\,p$.

La méthode analogique étant conséquence immédiate de la propriété fondamentale du rapport et de la définition des grandeurs, qu'il faut comparer entre elles, est complètement exacte; et il y aurait certainement plusieurs avantages à substituer cette méthode, dans diverses recherches géométriques, à la *réduction à l'absurde*, rigoureuse sans doute, mais qui souvent laisse beaucoup à désirer pour la clarté.

VIII. Il est en géométrie un grand nombre de proportions, que la méthode analogique fournit immédiatement; mais il en est aussi plusieurs où la *méthode infinitésimale*, alors la *méthode des parties égales*, est plus simple encore, ou du moins plus claire que la précédente. C'est que la méthode infinitésimale n'est au fond que l'analogie, rendue plus évidente; car décomposant la grandeur proposée dans ses parties les plus ténues, pour découvrir la *loi* qui les unit, la méthode infinitésimale peint, en quelque sorte, à la pensée, la *génération* de cette grandeur. Les éléments auxiliaires de cette génération sont des parties *infiniment petites*, propres à établir la *continuité*, et qui disparaissent nécessairement du résultat final des raisonnements. Voilà pourquoi la méthode infinitésimale, masquée souvent par de longues et inutiles réductions à l'absurde, domine dans les traités de géométrie; mais il serait plus simple et surtout plus clair d'y employer, bien explicitement, l'analogie ou les infiniment petits, selon la question à traiter et où il faut passer du *commensurable* à l'*incommensurable*.

Soient a et b deux quantités continues de même nature : elles ont nécessairement un rapport, rationnel ou non; elles ont donc aussi une mesure commune x, assignable ou non, finie ou infiniment petite, d'un ordre quelconque; de sorte qu'on a $a = mx$ et $b = nx$, m et n étant deux nombres entiers, connus ou inconnus, finis ou infinis. Divisant a par b, il est clair qu'on aura successivement

$$a : b = mx : nx = \left(nx \times \frac{m}{n}\right) : nx = \frac{m}{n} = m : n.$$

Le rapport reste donc absolument le même, soit qu'on supprime le facteur continu commun à ses deux termes, soit qu'on les divise par une quantité de même nature qu'eux; ce qui ramène le rapport de deux quantités continues à celui de deux nombres abstraits.

Cela posé, si les deux quantités c et d, aussi de même nature, sont liées aux deux premières a et b, de telle sorte qu'on ait aussi $c = my$ et $d = ny$, on aura de même $c : d = my : ny = m : n$. Et comme déjà $a : b = m : n$, il en résulte $a : b :: c : d$.

Donc *pour établir la proportion entre quatre grandeurs* a, b, c, d, *il* *faut seulement démontrer que si* a *et* b *sont divisées en* m *et* n *parties égales à* x, c *et* d *seront aussi divisées en* m *et* n *parties égales à* y; chose facile sans doute, mais qui exige souvent des propositions préliminaires.

Telle est la *méthode des parties égales*, par laquelle la proportion est rigoureusement démontrée; néanmoins on distingue ordinairement deux cas, savoir celui où les deux quantités a et b sont *commensurables* entre elles et celui où elles ne le sont pas. Mais on ne dit point ce qu'on entend par quantités *incommensurables entre elles :* n'ont-elles point de *mesure commune*? alors elles n'auront pas non plus de *rapport*; puisque, dès que a et b ont un rapport, elles ont aussi nécessairement une mesure commune, du moins infiniment petite, d'un certain ordre inconnu; et si a et b n'ont point de rapport, il n'y a pas à s'en occuper.

Si en disant que a et b sont incommensurables entre elles, on entend qu'elles n'ont d'autre mesure commune qu'une grandeur *inassignable*, on rentre dans le premier cas; et la réduction à l'absurde, employée pour n'opérer que sur des quantités *finies*, mises sous les yeux, est absolument inutile. Elle a d'ailleurs l'inconvénient d'être longue et fort obscure, puisqu'on n'a pas défini clairement les quantités incommensurables, et que si l'on avait cette définition, qui fait rentrer le second cas dans le premier, il n'y aurait plus rien à démontrer.

En général, le rapport $a : b$ existe nécessairement; mais il est exprimable ou inexprimable. De même, les deux quantités a et b ont une mesure commune, assignable ou non, finie ou infiniment petite d'un ordre quelconque. Or, cette mesure commune *inassignable*, toujours inconnue et indéterminée, toujours moindre que la plus petite partie imaginable de l'unité employée, existe aussi bien que le rapport irrationnel, auquel elle est liée.

IX. Maintenant pour donner une application remarquable de la méthode des parties égales, cherchons le rapport de deux prismes quelconques P et P', ayant leurs bases b et b' sur un même plan; deux arêtes latérales correspondantes a et a' étant sur la même droite.

Soit R le prisme dont b est la base et a' l'arête latérale sur a; soit x la mesure commune, assignable ou non, des deux bases b et b'; on aura donc $b = m\,x$ et $b' = n\,x$; d'où $b : b' = m : n$. Soit y le prisme dont x est la base et dont les arêtes latérales sont égales et parallèles à l'arête a', commune aux deux prismes R et P'. Il est clair que R et P' renferment m et n prismes, tous égaux à y, comme ayant bases égales à x et arêtes latérales égales et parallèles à a'; donc $R = my$ et $P' = ny$; d'où $R : P' = m : n$. Ainsi l'on a $R : P' = b : b'$ et $R = P'(b : b')$.

De même, les deux prismes P et R, ayant la base b commune et les arêtes latérales a et a' en ligne droite, on verra, comme dans le cas précédent, que $P = R\ (a : a')$. Substituant donc la valeur de R et divisant par P', il viendra, pour l'expression du rapport cherché,

$$P : P' = (a : a')\ (b : b').$$

Ce théorème fournit plusieurs conséquences utiles à la comparaison des volumes. Supposons d'abord que P et P' soient deux parallélipipèdes ou deux prismes triangulaires, ayant un trièdre commun : les deux bases b et b' auront donc aussi un angle commun, compris par les côtés c et d de b et par les côtés c' et d' de b'; d'où $b : b' = (c : c')\ (d : d')$. Dans ce cas donc on aura

$$P : P' = (a : a')\ (c : c')\ (d : d').$$

Cette expression du rapport $P : P'$, des deux parallélipipèdes ou des deux prismes triangulaires P et P', ne change aucunement lorsque les deux trièdres A et A', de P et de P', au lieu d'être égaux, sont symétriqûes ou valent ensemble un même coin. Pour les deux cubes ou les deux rhomboèdres P et P', dont les trièdres A et A' sont égaux, il vient $P : P' = (a : a')^3$.

Enfin, si P est le parallélipipède rectangle dont a est la hauteur, b la base, c et d les deux dimensions de celle-ci ; et si de plus, P' est le cube v fait sur l'unité linéaire u, chaque face de l'unité de volume v étant le carré s, unité superficielle, il est clair que la mesure de P aura les deux expressions :

$$P = v\,(a : u)\ (c : u)\ (d : u) \text{ et } P = v\,(b : s)\ (a : u)\ ;$$

et si l'on sous-entend les unités v, s et u, comme on le fait ordinairement, pour simplifier, il viendra $P = a\,c\,d$ et $P = b\,a$.

Principe d'analogie.

I. Rien ne paraît plus facile à concevoir que le *mesurage* des quantités continues; mais cette opération présente souvent de grandes difficultés : pour l'effectuer avec une exactitude suffisante, il faut *diviser* la quantité proposée en parties égales, de telle sorte qu'elle soit un *multiple* ou une *fraction* de l'unité invariable de même nature.

Or, lorsqu'on peut opérer *directement* sur la chose à mesurer, ce multiple et cette fraction ne s'obtiennent jamais que par approximation, et la difficulté est de bien connaître la *limite supérieure* de l'erreur commise, afin de savoir si elle peut se négliger. Mais parmi les grandeurs géométriques, il n'est guère que les longueurs rectilignes que l'on puisse ainsi mesurer; et encore faut-il que la droite soit abordable dans toute son étendue limitée : si elle est *inaccessible* ou si la grandeur à mesurer est un *arc circulaire*, une *surface* ou un *volume*, le mesurage ne peut se faire *qu'indirectement*, à l'aide de grandeurs *auxiliaires* dont on sache calculer les valeurs numériques, comme la *base* et la *hauteur* dans le parallélogramme, le triangle, le prisme ou le cylindre, la pyramide ou le cône.

Ces grandeurs auxiliaires devant fournir un nombre égal à celui que l'on cherche, mais plus facile à déterminer exactement, sont les *éléments générateurs* de ce nombre, ou plutôt de la chose à mesurer; car ils la déterminent complétement, puisqu'ils donnent exactement le nombre qui la représente. C'est ainsi que l'*ouvrier* et le *temps* sont les éléments générateurs de l'*ouvrage* et en déterminent la grandeur. Car a ouvriers, faisant chacun la quantité c de l'ouvrage proposé, en une journée, produisent nécessairement, en b journées, un ouvrage x, dont la grandeur est exprimée numériquement par $x = c \times a \times b$.

II. Deux quantités dont le mode de *génération* est le même, sont nécessairement comprises dans la même *définition générale*, puisque définir une chose, c'est la nommer et la décrire; et ainsi, par exemple, le parallélogramme et le rectangle, le prisme et le cylindre, la pyramide et le cône, ont à la fois même mode descriptif et même définition générale. Les deux quantités proposées ont donc leurs éléments générateurs parfaitement *analogues*; lesquels doivent recevoir les mêmes dénominations respectives, pour rendre l'*analogie* plus évidente et rappeler qu'ils jouent les mêmes rôles dans les deux générations. De là, par exemple, le nom de *base* donné à des choses de natures différentes, comme la base du triangle et la base du prisme, la base du parallélogramme et la base du cône, etc.

Puisque le mode descriptif est absolument le même, pour les deux grandeurs proposées, les modes de génération des deux nombres, qui les représentent complétement, doivent aussi être les mêmes, au moyen des mesures des éléments générateurs analogues; or, cela exige que la mesure de l'une des deux grandeurs se trouve, par ses éléments générateurs, absolument comme la mesure de l'autre grandeur se trouve par les siens. En un mot, *deux grandeurs comprises dans la même définition générale, se mesurent absolument de la même manière, d'après une règle constante.*

III. Tel est le *principe d'analogie*, dont l'emploi explicite rend la théorie du mesurage la plus simple et la plus claire possible. Ce principe est tellement fondamental que, sans lui, il n'y aurait en mathématique, ni définition, ni règle, ni formule générale: c'est au fond le *principe des fonctions*, puisque toutes les grandeurs comprises dans la même définition générale, sont fonctions *semblables* de leurs éléments générateurs. C'est aussi le *principe de généralisation* en Algèbre, où il étend la formule à tous les problèmes *analogues*, à toutes les grandeurs ayant le même mode de génération; car les valeurs particulières des éléments générateurs ne sauraient changer aucunement le rôle qu'ils jouent dans la génération et par conséquent dans la formule, expression numérique du résultat de cette génération. De sorte que la formule étant calculée pour les valeurs *entières* et *indéterminées* des lettres qui la composent, elle doit s'appliquer pour toutes les valeurs imaginables de ces lettres, *réelles* ou *imaginaires*, *positives* ou *négatives*.

C'est en effet, par extension et par analogie qu'on établit le calcul des *exposants*, d'une nature quelconque, aussi bien que toutes les *opérations* de l'Algèbre et la théorie des *symboles négatifs* ou *imaginaires*. C'est par analogie et à l'aide de la notation des fonctions qu'Euler étend la formule du binome à tous les cas réels de l'exposant; tandis que le principe d'analogie démontre immédiatement la généralité complète de cette formule. La méthode des *coefficients indéterminés* est-elle autre chose que le principe d'analogie? La méthode infinitésimale elle-même n'est-elle pas l'expression la plus claire de la génération de certaines grandeurs?

Tout le monde reconnaît le pouvoir de l'analogie et en fait usage, dans l'étude des sciences, pour la simplifier; tout le monde sait que c'est la définition et par conséquent la génération de chaque grandeur qui doit en fournir les propriétés et la mesure; et cependant on se sert de longues et pénibles réductions à l'absurde, fondées encore sur l'analogie, pour parvenir à certaines valeurs numériques, que le principe d'analogie fournit immédiatement. Par ce principe, en effet, la question du mesurage de chaque sorte de grandeur est ramenée à savoir mesurer la plus simple de toutes celles comprises dans la même définition générale, et cela au moyen des mesures des éléments générateurs de cette plus simple grandeur, comme nous en donnerons bientôt plusieurs exemples remarquables.

IV. C'est par la notation des fonctions et en se fondant sur l'*homogénéité*, pour ne conserver que les éléments générateurs dans l'expression du nombre cherché, que Legendre démontre les théorèmes fondamentaux de la géométrie. La méthode qu'il emploie à cet effet, quoique fort exacte et fort remarquable, a été l'objet de plusieurs objections très graves, qui n'auraient pas lieu, nous semble-t-il, si l'on procédait comme il suit:

Soient ABC et A'B'C' deux triangles quelconques: il est d'abord évident que l'angle C se trouve en traçant les deux angles A et B, absolument comme l'angle C' s'obtient en traçant les deux angles A' et B'; et cela quelles que soient les longueurs des côtés AB et A'B'. Si donc l'angle $A = A'$ et l'angle $B = B'$, il faudra nécessairement que le troisième angle C soit égal au troisième C'.

Ensuite l'expression inconnue de l'angle C, au moyen des deux A et B, est indépendante de la longueur A B. puisque la construction subsiste quelle que soit cette longueur; l'expression de C ne change donc point quand on suppose $AB = A'B'$. Mais alors les deux triangles A B C et A' B' C' peuvent se confondre en un seul, aussi bien que les deux angles C et C'; donc avant de supposer $AB = A'B'$, on avait $C = C'$.

V. De là résulte aisément $A + B + C = 2$ angles droits, et par suite la *théorie des parallèles*. Mais cette théorie elle-même laisse beaucoup à désirer, sous le rapport de la clarté et de la simplicité, comme toutes celles fondées sur la définition de l'angle, ordinairement en usage. On peut sans doute appeler *angle* la quantité plus ou moins grande, dont deux droites qui se coupent sont écartées l'une de l'autre, quant à leur position; mais cette quantité plus ou moins grande, quelle est-elle, si ce n'est la portion plane infinie comprise entre les deux droites, elles mêmes infinies? La définition en usage ne nous apprend donc pas clairement ce que c'est que l'angle; et delà vient la difficulté de la théorie des parallèles, basée sur cette définition.

Si l'on regarde l'angle tel qu'il est en effet: une *portion plane infinie*, non-seulement la théorie des parallèles sera simple, claire et complète; mais elle devra servir à démontrer les théorèmes fondamentaux, à l'aide de l'analogie et de la méthode infinitésimale, comme étant alors l'origine la plus claire de toutes les vérités géométriques. Cette théorie, fondée sur la nature infinie de l'angle, a pour base la proposition que voici et sa réciproque:

Deux droites finissent toujours par se rencontrer lorsqu'elles font avec une même troisième, deux angles A et B tels que l'externe A soit plus grand que l'interne B correspondant.

En effet, dire que l'angle A est plus grand que l'angle B, c'est dire que la portion plane infinie A est plus grande que la portion plane infinie B; l'angle A ne peut donc pas demeurer contenu dans l'angle B et en doit sortir, tôt ou tard. Or, l'angle A ne peut sortir de l'angle B, ni par la troisième droite, limite commune, ni dans le sens de l'*ouver-*

ture, puisque dans ce sens les deux angles vont à l'infini et l'un ne saurait dépasser l'autre ; donc l'angle A ne sort de l'angle B que par les seconds côtés, de directions différentes, lesquels se coupent nécessairement.

Cette démonstration ne doit rien laisser à désirer, si les définitions de la droite, du plan et de l'angle sont bien comprises.

VI. Voyons maintenant quelques applications du principe d'analogie à la théorie du mesurage des grandeurs. Et d'abord soit S l'aire du secteur circulaire, dont r est le rayon, a l'arc et c la corde. Soit T le triangle isocèle, ayant c pour base, le centre pour sommet et h pour hauteur : le pied de h est donc le milieu de c. Or, l'arc a étant tracé et par suite sa corde c, on trouve le centre, sommet commun à S et à T, en élevant sur c et par son milieu, la perpendiculaire passant aussi par le milieu de a, puis en portant sur elle, 1° à partir de c, la longueur h pour le triangle ; 2° à partir de a, la longueur r pour le secteur. Il est donc évident que S se trouve avec a et r absolument comme T s'obtient avec c et h ; donc puisque $T = \frac{1}{2} c\ h$, les unités s et u étant *sous-entendues*, on a aussi nécessairement $S = \frac{1}{2} a\ r$.

Cette expression, à laquelle on parvient aussi, avec facilité, en observant que S est la somme d'une infinité de triangles isocèles infiniment petits, conduit immédiatement à l'aire $\pi\ r^2$ du cercle dont r est le rayon.

L'aire E de l'*ellipse* est déterminée complètement quand on connaît ses deux demi-axes a et b, de longueur et de position ; et si $b = a$, l'aire E devient celle du cercle. Ainsi l'aire E de l'ellipse s'exprime par les mesures de ses demi-axes a et b, absolument comme l'aire E' du cercle, par les mesures de ses deux rayons a perpendiculaires. Or, $E' = \pi\ a\ a$; donc $E = \pi\ a\ b$.

D'ailleurs l'aire E étant nulle, soit par $a = o$, soit par $b = o$, on doit poser $E = k\ a\ b$, k étant un nombre abstrait indépendant de a et de b. Ce nombre ne change donc pas quand on fait $b = a$; mais alors l'aire E est celle E' du cercle de rayon a et l'on a simultanément $E' = k\ a^2$ et $E' = \pi\ a^2$; d'où $k = \pi$. Donc puisque le nombre k n'a pas changé, il était égal à π et l'on a $E = \pi\ a\ b$.

VII. Les coordonnées étant rectangulaires, soit A l'aire limitée par la courbe

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2 y^2.$$

1° Si $b = o$, d'où $x^2 + y^2 = \pm\ a\ x$, l'aire A est la somme de deux cercles, ayant chacun a pour diamètre ; donc $A = \frac{1}{2} \pi\ a^2$.

2° Si $a = o$, les deux cercles ont chacun b pour diamètre ; d'où $A = \frac{1}{2} \pi\ b^2$.

3° Si $b = a$, d'où $x^2 + y^2 = a^2$, il vient $A = \pi a^2$.

4° Pour satisfaire à ces trois cas particuliers, il faut nécessairement que la formule, expression de l'aire A cherchée, soit

$$A = \tfrac{1}{2} \pi (a^2 + b^2).$$

On parvient à cette formule remarquable, par la méthode infinitésimale et d'après l'*équation polaire* de la courbe proposée ; mais les calculs sont plus compliqués.

Observons toutefois que le principe d'analogie ou des fonctions ne suffirait pas pour faire découvrir l'expression de l'aire A limitée par la *lemniscate*

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 - b^2 y^2.$$

Dans ce cas, il faut recourir à l'équation polaire ; et désignant par ω l'arc numérique, de rayon 1, tel qu'on ait $c^2 = a^2 + b^2$ et $c \sin \omega = a$, d'où $c \cos \omega = b$, on trouve, par une *série trigonométrique*,

$$A = \omega (a^2 - b^2) + a\, b.$$

Cette expression remarquable devient $A = a^2$ ou bien $A = a^2 \sqrt{3} - \frac{1}{3} \pi a^2$, suivant que $b = a$ ou que $b^2 = 3\, a^2$.

VIII. Tout prisme ou tout cylindre, droit ou oblique, est déterminé complètement et son volume P peut se construire, dès que sa base b quelconque et sa hauteur h, menée d'un sommet, sont données de grandeur et de position fixe. De plus, en vertu de la définition générale, il est évident que P se trouve avec b et h absolument comme le parallélipipède rectangle P' s'obtient avec sa base b' et sa hauteur h' ; donc puisque $P' = b' h'$, on a aussi nécessairement $P = b\, h$; ce qui signifie que

$$P = v\ (b : s)\ (h : u).$$

De même, si P est le volume d'une pyramide ou d'un cône quelconque, droit ou oblique, de base b et de hauteur h ; tandis que P' serait l'une des six pyramides régulières et égales qui composent le cube de base b' et de hauteur $2\, h'$, d'où $P' = \frac{1}{3} b' h'$; on aura, en vertu de l'analogie,

$$P = \tfrac{1}{3} b\, h \text{ ou } P = v \times \tfrac{1}{3} (b : s)\, (h : u).$$

IX. Plus généralement, soit G une grandeur géométrique quelconque, aire ou volume ; soit h sa hauteur et b sa base, ligne ou aire plane limitée. Supposons la grandeur G telle qu'en la coupant par des lignes ou des plans parallèles à la base b, cette base et chaque section résultante soient entre elles comme les puisssances m ièmes de leurs distances au sommet, extrémité de h, et cherchons, d'après cette proportion, l'expression de la grandeur G.

On peut toujours supposer que les lignes ou les plans parallèles à la base b divisent G en *tranches*, toutes de même épaiseur très-petite; et comme G est la somme de ces tranches, il est clair, à cause de l'analogie complète, que si l'on sait calculer cette somme pour une valeur particulière de m, on saura la calculer pour une valeur quelconque. De plus, la grandeur G est déterminée complètement dès que la base b et la hauteur h étant données, de valeur et de position, on connaît l'exposant m; de sorte que b, h et m sont les éléments générateurs de G. Or, pour le triangle, où $m = 1$, on a

$$G = \tfrac{1}{2}\, b\, h = b\, h\ : 2 = b\, h : (1 + 1) = bh : (1 + m).$$

Pour le parallélipipède rectangle, où $m = 0$, on sait que

$$G = b\, h = b\, h : (1 + 0) = b\, h : (1 + m).$$

Et puisque les valeurs particulières de m ne sauraient changer aucunement le rôle que m joue dans la formule, expression de G, il s'ensuit que, quel que soit m, entier ou fractionnaire, on aura toujours

$$G = b\, h : (1 + m).$$

1° Cette formule, qu'on démontre aussi, moins simplement, par la méthode infinitésimale, fournit les théorèmes connus sur le mesurage des volumes de tous les cylindres et de tous les cônes, aussi bien que sur les surfaces latérales des cylindres, droits et obliques, et des cônes droits.

2° Pour le *segment* G dans la *parabole* $y = a\, x^m$, où $b = 2\, y$ et $h = x \sin \theta$, en désignant par θ l'angle entre les axes des x et des y, on a

$$G = 2x\, y \sin \theta : (1 + m).$$

De sorte que, dans la parabole *ordinaire*, représentée par $y^2 = 2px$ et où l'exposant m vaut $\frac{1}{2}$, le segment G, dont $2\, y$ est la corde donnée, est les deux tiers du parallélogramme *circonscrit*, et l'on a $G = \frac{4}{3}\, x\, y \sin \theta$.

3° Les coordonnées étant rectangulaires et G désignant le volume du *segment*, depuis $x = o$ jusqu'à $x = h$, dans le *paraboloïde elliptique* $M\, y^2 + N\, z^2 = R\, x$, on trouve $m = 1$ et

$$G = \tfrac{1}{2}\, \pi\, h^2\, R : \sqrt{(MN)};$$

c'est le demi-cylindre, de hauteur h et de base elliptique. Si donc $h = 4$ et $y^2 + 3\, z^2 = 16\, x$, il vient $G = 128\, \pi \sqrt{\frac{1}{3}}$.

4° Pour le *paraboloïde de révolution* autour de l'axe des y, dans y^2.

$= 2px$, on a $y = h$, $b = \pi h^4 : 4p^2$, $m = 4$ et $G = \frac{1}{5} b h$; c'est le cinquième du cylindre de même base et de même hauteur.

5° Si G désigne le volume du segment limité par le plan des yz, le plan $z = h$ et la surface $My^2 - Nz^2 = Rx$, on trouve, par des transformations fort simples,

$$MR\ b = \tfrac{2}{3} h^3 N \sqrt{(2\,MN)},\ m = 3 \text{ et } G = \tfrac{1}{4} bh;$$

c'est le quart du prisme de hauteur h et de base équivalente à b. Si donc $h = 6$, dans le *paraboloïde hyperbolique* $y^2 - z^2 = 8x$, il vient $G = 18\sqrt{2}$.

6° Pour le *conoïde droit*, b est la base perpendiculaire au plan directeur et h est la hauteur, distance de b à la droite D, perpendiculaire à ce plan; de sorte que le pied de D est le *sommet* de G. Or, si b est un triangle, on démontre aisément que $m = 1$; donc en vertu de la génération de G, qui reste la même, quelle que soit la base b, aire plane, rectiligne, mixte ou curviligne, on aura toujours $m = 1$ et $G = \frac{1}{2} b h$; c'est la moitié du prisme ou du cylindre, ayant même base b et même hauteur h que le conoïde proposé.

X. Considérons encore quelques *corps de révolution*. Soit d'abord S l'aire d'un secteur circulaire, r son rayon, a son arc et c sa corde, base du triangle isocèle T, de hauteur b et dont le sommet est le centre de S. Soit d la distance de ce centre à l'axe A extérieur à S et dans le même plan, et soit h la projection de a et de c sur cet axe.

Cela posé, on démontre aisément que S et T faisant une révolution autour de A, la surface décrite par c et le volume engendré par T ont pour mesures respectives

$$\text{surf. } c = c \times 2\pi d \pm h \times 2\pi b,$$

$$\text{vol. T} = \text{T} \times 2\pi d \pm \tfrac{2}{3} h \times \pi b^2;$$

le signe + ayant lieu lorsque c est situé hors de l'axe A et de sa parallèle menée par le sommet de T, et le signe — quand c tombe entre ces deux parallèles. (Voyez la 2ᵉ édit. du traité de géométrie.)

Or, les modes de génération étant les mêmes, il est évident que surf. a et vol. S s'obtiennent avec a, d, h, r et avec S, d, h, r, absolument comme surf. c et vol. T se trouvent avec c, d, h, b et avec T, d, h, b; ainsi l'on a nécessairement

$$\text{surf. } a = a \times 2\pi d \pm h \times 2\pi r,$$

$$\text{vol. S.} = \text{S} \times 2\pi d \pm \tfrac{2}{3} h \times \pi r^2;$$

le signe + ayant lieu lorsque l'arc a est *concave* vers l'axe A et le signe — quand il est *convexe*: s'il était en partie *concave* et en partie *convexe*, il faudrait considérer ces deux parties séparément.

C'est ainsi que pour le *tore* et la *gorge*, l'arc $a = \pi r$ est concave puis convexe vers A; et comme alors le diamètre $2r$, qui donne les deux arcs πr, est parallèle à A, d'où $h = 2r$ et $S = \frac{1}{2}\pi r^2$, il en résulte les mesures des deux surfaces et des deux volumes engendrés. De là, puisque la surfarce *annulaire ronde* est la somme des deux surfaces, elle a pour expression $4\pi^2 dr$, tandis que le volume de l'*anneau rond* est mesuré par $2\pi^2 dr^2$.

On pourrait considérer la surface et l'anneau engendrés par le contour et l'aire du segment circulaire, ainsi que la surface et la capacité de certain *vase*, engendré par la révolution, autour d'un axe extérieur, soit du *talon*, soit de la *doucine*. Et si $d = o$, dans les formules ci-dessus, il en résultera les expressions connues des zônes et des secteurs sphériques, de la surface et du volume de la sphère, etc.

De plus, si F est une aire plane quelconque, mais *symétrique* par rapport à un centre, et que, F pouvant d'ailleurs tourner autour de ce point, sur son plan, ce centre soit assujetti à glisser sur une ligne quelconque, brisée ou courbe, mais de longueur L connue; de telle sorte que le plan de F soit constamment perpendiculaire à chaque côté de la ligne L, si elle est brisée, et à la tangente en chaque point, si elle est courbe: en désignant par V le volume et par S la surface, engendrés respectivement par F et son périmètre P, les générations seront parfaitement analogues à celles du cylindre circulaire droit et de sa surface latérale; on aura donc toujours les mesures que voici:

$$S = LP \text{ et } V = FL;$$

lesquelles s'appliquent à un grand nombre d'anneaux, à certaines *colonnes torses*, etc.

Par exemple, si L est la circonférence $2\pi d$ et qu'en même temps F soit un hexagone régulier, de rayon r, F faisant deux révolutions autour de son centre dans son double mouvement uniforme, il en résultera un anneau remarquable, pour lequel on aura $S = 12\pi dr$ et $V = 3\pi dr^2 \sqrt{3}$; d devant être plus grand que $2r$.

La Similitude.

I. Nous avons déjà reconnu les conditions de *similitude*, dans les figures rectilignes planes; voyons quelles sont ces conditions, dans les polyèdres. Pour que le polyèdre P soit la *copie* exacte du polyèdre P' et puisse en tenir lieu pour l'étude de leurs propriétés communes et pour les opérations qu'on aurait à exécuter sur P', il faut que chaque coin de P soit *égal* au coin *homologue* de P' et disposé dans le même ordre; il faut que chaque face de P soit *semblable* à la face homologue de P' et semblablement disposée. Si ces conditions sont remplies, il est clair que chaque partie de P *représente*, en grandeur et en position, la partie correspondante de P'; donc P *représente* complètement P', et tout ce qu'on dira de P pourra se dire exactement de P', ou réciproquement. Les deux polyèdres P et P' peuvent donc être pris l'un pour l'autre : ils sont *semblables* en tout et ont absolument la même *forme*, puisqu'ils seraient *égaux*, si une face de P était égale à la face homologue de P'.

En un mot, les deux polyèdres P et P' ne diffèrent que par leurs grandeurs individuelles : ils sont représentés par les mêmes nombres d'unités de volume v et v', savoir v relative à la copie P et v' relative au modèle P'; car P et P' ayant évidemment le même mode de génération, il est clair que si $P' = n\,v'$, on aura aussi $P = n\,v$. Donc pour mesurer le polyèdre P', il suffira de mesurer sa copie P; chose plus facile.

II. Il résulte des conditions de similitude, que nous venons de reconnaître, qu'il faut appeler *polyèdres semblables* deux polyèdres limités par un même nombre de faces, semblables chacune à chacune, semblablement disposées et également inclinées deux à deux, en passant d'un polyèdre à l'autre. Plus brièvement, nous dirons que deux polyèdres sont *semblables* (*directement*), dès qu'ils ont les coins homologues égaux et compris par des faces homologues semblables, les parties homologues étant semblablement disposées.

Mais si les parties homologues, coins et faces, sont disposées dans l'ordre inverse, en passant d'un polyèdre à l'autre, nous dirons que les deux polyèdres sont *inversement semblables* : l'un est la *copie inverse* de l'autre et les deux polyèdres ne diffèrent qu'en ce que, les volumes étant inégaux, les angles solides homologues sont *symétriques*, tandis qu'ils sont *égaux* dans les polyèdres *directement semblables*. Mais P étant la copie inverse de P', on n'en aura pas moins $P = n\,v$, si $P' = n\,v'$; de sorte que P et P' sont encore représentés par le même nombre n des unités relatives v et v', cubes faits sur les unités linéaires u et u', dans P et dans P'. Si donc $u' = 100\,u$, par exemple, on aura $v' = 1000000\,v$ et $P' : P = 1000000$.

Enfin, si les faces semblables sont aussi égales, les deux polyèdres P et P', directement ou inversement semblables, seront *égaux* ou *symétriques entre eux*, et *équivalents*, dans ce dernier cas.

III. Ce que l'on remarque d'abord, dans tout polyèdre matériel, ce sont les *faces* et les *coins*, qui en déterminent essentiellement la *forme* et la *grandeur*; la comparaison de deux polyèdres porte donc, en premier lieu, sur ces diverses parties, *correspondantes* deux à deux; il est par suite fort naturel de définir *l'égalité* et la *symétrie*, la *similitude directe* et la *similitude inverse* de deux polyèdres, par leurs coins et leurs faces, ou si l'on veut, par les faces et les angles solides.

Nous préférons les définitions ci-dessus à d'autres, non parce qu'elles sont en usage depuis longtemps, ce qui est déjà un avantage; mais parce qu'elles résument clairement les conditions en vertu desquelles l'égalité et la symétrie, la similitude directe et la similitude inverse, existent dans les polyèdres, et parce que ces définitions nous paraissent exprimer mieux que d'autres les notions définies et qui nous viennent naturellement par le seul aspect des corps matériels (susceptibles d'ailleurs de recevoir une infinité de *formes* différentes.)

IV. Maintenant, un polyèdre P étant donné, voici comment on peut construire ou du moins concevoir sa *copie*. Soit O un point situé hors du polyèdre P; soient OA, OB, OC,..., les droites qui joignent ce point à tous les sommets de P; concevons sur ces droites et à partir de O, les longueurs $OA' = OA \times r$, $OB' = OB \times r$, $OC' = OC \times r$,..; les points A', B', C',..., ainsi déterminés, sont les sommets du polyèdre P', directement semblable à P. (Le point O pourrait être un sommet de P).

Appelons en effet, ABFI l'une des faces du polyèdre P; par construction, dans la pyramide OABFI, les arrêtes du sommet O sont divisées proportionnellement en A', B', F', I'; donc A' B' F' I' est un polygone plan, semblable et parallèle au polygone ABFI; et il en est de même de toutes les faces homologues des deux polyèdres P et P'. D'ailleurs à cause que deux faces adjacentes de P' sont respectivement parallèles aux faces homologues de P, et dirigées à la fois dans le même sens, les deux coins compris sont égaux et disposés dans le même ordre. Ainsi les deux polyèdres P et P' sont non-seulement semblables de *forme*; mais aussi de *position*, à raison du parallélisme des faces homologues. Et comme r est un rapport quelconque, exprimable ou non, il existe une infinité de polyèdres P', de toute grandeur, semblable directement au polyèdre P : si $r = 1$, on aura $P' = P$.

Observons maintenant qu'on aurait la *copie inverse* de P, si à partir du point O, on portait sur les prolongements de AO, BO, CO,..., les longueurs $OA'' = OA \times r$, $OB'' = OB \times r$, $OC'' = OC \times r$, etc. Les points A'', B'', C''..., sont alors, par les raisonnements ci-dessus, les sommets du polyèdre P'', *inversement semblable* à P et conséquemment *symétrique* de P', si le rapport r est le même dans les deux constructions; d'où il suit qu'*un polyèdre P' ne peut avoir qu'un seul symétrique P''.*

Cette dénomination vient surtout de ce que P′ et P″ sont deux parties *symétriques* d'un même quatrième polyèdre, dont O est le *centre de symétrie*, comme divisant en deux parties égales toute droite, telle que A′ A″, terminée de part et d'autre à la surface de ce quatrième polyèdre.

On voit, par les constructions précédentes, que les tétraèdres homologues, dans P, P′, P″, sont *directement semblables* pour P et P′, *inversement semblables* pour P et P″, et enfin *symétriques* pour P′ et P″.

Le point O, qui sert à construire deux des trois polyèdres au moyen de l'autre, est dit *pôle de similitude directe* de P et de P′, *pôle de similitude inverse* de P et de P″, et *centre de symétrie* de P′ et de P″.

Réciproquement, *deux polyèdres semblables ou inversement semblables P et Q peuvent toujours se disposer de manière à avoir un pôle O.* Car si en construisant, avec le polyèdre P et le pôle donné O, le polyèdre P′, on prend le rapport *r* égal à celui de deux droites homologues de P et de Q ; il est clair que toutes les parties homologues dans P′ et Q, seront égales entre elles et disposées dans le même ordre, en passant de Q à P′ ; donc ces deux polyèdres sont égaux, et P′ n'est que le polyèdre Q, mis dans la position demandée.

V. Soient P et P′ deux polyèdres, directement ou inversement semblables, ayant un pôle O ; soient C et C′ les cubes faits sur deux droites homologues a et a' de ces polyèdres : puisque O est aussi le pôle des cubes C et C′, il est évident que C′ se construit au moyen de C absolument comme P′ se trouve au moyen de P. Si donc $P' = Pn$, on aura aussi $C' = Cn$; d'où

$$P : P' = C : C' = (a : a')^3 .$$

Les deux corps P et P′ pourraient être limités par des surfaces *mixtes* ou *courbes* ; mais alors, pour les faire rentrer dans les définitions des polyèdres semblables, directement ou inversement, il faudrait, ce qui est permis, considérer ces deux corps comme *deux polyèdres terminés par un même nombre infini de faces homologues, infiniment petites et par suite planes, semblables chacune à chacune, comprenant des coins homologues égaux, semblablement ou inversement disposés.* On aurait toujours $P = P'(a : a')^3$; ce qui donne le moyen de calculer la valeur numérique de P, lorsque la mesure de P′ et le rapport $a : a'$ sont donnés.

On voit l'importance du théorème proposé, pour mesurer le corps P, dont une ou plusieurs parties seraient ou inaccessibles ou invisibles: il faudrait copier P et mesurer la copie P′.

Les deux corps inversement semblables P et P′ deviennent symétriques et équivalents entre eux, bien que toujours inégaux, dès que

$a = a'$; car alors $P : P' = 1$. Ils deviendraient absolument égaux, pour $a = a'$, s'ils étaient directement semblables. Et quant aux surfaces S et S' des deux corps semblables, directement ou inversement, on démontre, comme plus haut, que

$$S : S' = (a : a')^2.$$

VI. La coexistence de toutes les conditions de similitude, directe ou inverse, dans les polyèdres, ne saurait être douteuse, d'après la construction de ces polyèdres; mais plusieurs de ces conditions sont conséquences des autres et par suite superflues. Le nombre de conditions, *nécessaires* et *suffisantes*, à la similitude directe ou à la similitude inverse de deux polyèdres, à leur égalité ou à leur symétrie, est fourni par le théorème que voici:

Dans deux polyèdres de n *faces chacun, la proportionnalité des faces homologues, ayant un même nombre de côtés, entraîne l'égalité des coins qui se correspondent.*

Soient F et F' deux faces homologues, d'un même nombre de côtés; soient S et S' les sommes des faces adjacentes à F et à F': par hypothèse on a

$$S : S' = F : F' \text{ ; d'où } S = Fr \text{ et } S' = F'r,$$

r étant un rapport exprimable ou non. Or, d'après la propriété essentielle de ce rapport, on voit que S s'obtient avec F absolument comme S' se trouve avec F'; il faut donc, pour cela, que les coins adjacents à F soient respectivement égaux aux coins adjacents à F'. Ainsi les deux polyèdres ont les coins homologues égaux; ce qu'il fallait démontrer.

La proposition réciproque existe; et par exemple, dans deux tétraèdres, si les trois coins adjacents à la base de l'un sont respectivement égaux aux trois coins adjacents à la base de l'autre, il en résulte la proportionnalité des faces homologues et par suite l'égalité des autres coins, qui se correspondent dans les deux tétraèdres.

Il suit du précédent théorème, que *les deux polyèdres, de chacun* n *faces, sont directement ou inversement semblables, ils sont égaux ou symétriques entre eux, suivant que les faces homologues sont semblables ou égales et semblablement ou inversement disposées.* Chaque fois, en effet, les faces homologues sont proportionnelles et par suite les coins homologues sont égaux (ce théorème est remarquable).

Regardant donc comme condition unique l'égalité ou la similitude de deux faces homologues, il est clair que $n - 1$ sera le nombre de conditions nécessaires et suffisantes à l'égalité et à la symétrie des deux polyèdres, à leur similitude directe et à leur similitude inverse. Mais ce nombre de conditions se réduit toujours à 3 pour les pyramides et les prismes, parce que les $n - 4$ conditions restantes résultent de la définition de chacun de ces deux genres de corps géométriques.

VII. La notion de similitude conduit très-simplement à l'expression du volume d'un tétraèdre quelconque T. de base b et de hauteur h, d'après la mesure de tout prisme. En effet, pour l'ingénieuse décomposition du tétraèdre, employée par Euclide et Legendre, soit T′ le tétraèdre retranché par le plan joignant les milieux des trois arêtes du sommet de T, et soient P, P′ les deux prismes triangulaires construits sur les arêtes de deux trièdres égaux, dans T et T′: on démontre aisément que

$$P = 8\,P' \text{ et } T = 2\,P' + 2\,T'\,;\ \text{d'où } 4\,T = P + 8\,T'.$$

Or, les deux prismes P et P′ sont semblables, aussi bien que les deux tétraèdres T et T′; donc puisque $P = 8\,P'$, on voit que P n'est que P′, devenu 8 fois plus grand; donc les parties de P ne sont que les parties semblables de P′, devenues aussi chacune 8 fois plus grande; donc $T = 8\,T'$ (cela vient d'ailleurs de ce que la hauteur h de T est double de la hauteur h' homologue de T′ et qu'ainsi le rapport $T : T' = (h : h')^3 = 8$). On a donc enfin $4\,T = P + T$ et $T = \frac{1}{3}\,P$.

M. Suzanne, dans son traité de géométrie, regarde comme chose évidente, que si $P = r\,T$, on doit avoir aussi $P' = r\,T'$; mais cela résulte immédiatement de la méthode analogique.

Il est encore plusieurs autres démonstrations du théorème $P = 3\,T$; mais la plus simple et la plus directe est fournie par le principe d'analogie, comme on l'a vu plus haut (p. 11). Cette démonstration me paraît devoir être préférée à toute autre, comme remplissant à la fois les conditions de clarté et de rigoureuse exactitude.

VIII. La méthode analogique reçoit diverses formes pour exprimer les grandeurs géométriques et les mesurer les unes par les autres; en voici encore plusieurs applications.

D'abord le plan divisant le coin latéral de tout tétraèdre en deux parties égales, divise la base en deux triangles a' et c' proportionnels aux faces adjacentes a et c, comprenant le coin proposé; car il est évident que a' est déterminé par a absolument comme c' par c.

De même, si dans le tétraèdre SABC, la droite SO rencontrant en O la base ABC, fait des angles égaux, 1° avec les trois arêtes du sommet, 2° avec les trois faces latérales, il est clair, en vertu de l'analogie, qu'on aura, 1° $AO : AS = BO : BS = CO : CS$, 2° $ABO : ABS = ACO : ACS = BCO : BCS$.

Soient O et O′ deux onglets d'une même sphère, C et C′ les coins de ces onglets, F et F′ les fuseaux qui leur servent de bases, A et A′ les angles sphériques de ces fuseaux, B et B′ les angles de C et de C′, a et a' les arcs de grands cercles, interceptés par les côtés des angles B et B′, ces arcs joignant les milieux des côtés de F et de F′: le mesurage de a

par a' est évidemment le plus facile, au moyen du compas. Or, mesurer a par a', c'est mesurer en même temps B par B', C par C', A par A', F par F' et O par O'. On a donc simultanément

$$a = n\,a',\ B = n\,B',\ C = n\,C',\ A = n\,A',\ F = n\,F' \text{ et } O = n\,O'.$$

De là résultent les proportions connues; et de plus, r désignant le rayon de la sphère, il est clair que si $a' = \frac{1}{2}\pi r$, d'où $F' = \pi r^2$ et $O' = \frac{1}{3}\pi r^3$, on aura $F = a \times 2r$ et $O = F \times \frac{1}{3}r$.

Prenons le centre de la sphère dont r est le rayon pour le sommet commun aux deux angles solides opposés S et S' : ces deux angles sont *symétriques* et leurs faces interceptent les pyramides sphériques *symétriques* P et P', ayant pour bases les polygones sphériques *symétriques* Q et Q'. Plaçons au même centre les deux trièdres droits, opposés et égaux à D, déterminant les deux tétraèdres sphériques *trirectangles* égaux à T, ayant pour bases les deux triangles trirectangles égaux à T'. Or, mesurer S par D, c'est mesurer en même temps P par T, Q par T', S' par D, P' par T et Q' par T'; donc S vaut S', P vaut P' et Q vaut Q'. De plus, on a $S = D\,(Q : T')$ et $P = T\,(Q : T')$; d'où $P = Q \times \frac{1}{3}r$.

Pour la théorie des polygones et des pyramides sphériques, *directement* ou *inversement semblables*, il faudrait considérer deux sphères, de rayons différents r et r', ayant pour centre commun le sommet des angles solides opposés S et S'.

Ces diverses applications montrent bien le rôle important que l'analogie joue en géométrie, pour y déterminer les formules et les relations numériques. Aussi toutes les méthodes de calcul sont-elles plus ou moins analogiques; et nous avons déjà vu que souvent, pour rendre l'analogie plus évidente, il faut recourir à la *méthode infinitésimale*, basée elle-même sur le principe des *zéros relatifs*, que nous allons considérer.

Les zéros relatifs.

I. Il existe plusieurs quantités que l'on doit regarder comme absolument nulles vis-à-vis d'autres grandeurs, parce qu'on ne saurait en tenir compte, pour augmenter ou diminuer ces dernières. Par exemple, dans une somme à payer, on doit regarder un millième de franc comme absolument nul : c'est un *zéro relatif* à la somme proposée, parce que n'ayant pas de monnaie plus petite que le centime, on est forcé de négliger ce millième, comme s'il ne devait pas augmenter la somme à payer. Pareillement, une pincée du sable amassé pour bâtir, un grain d'un sac de blé, un brin d'un tas de foin, etc., sont autant de *zéros relatifs*. Car bien que ces diverses quantités ne soient pas nulles, ni même *infiniment petites*, on ne saurait cependant en tenir compte pour l'évaluation numérique des grandeurs dont elles font parties, puisque pour cela il faudrait dire quelle fraction la pincée de sable, par exemple, est du tas auquel elle apppartient ; chose impossible, aussi bien que pour le grain de blé, le brin de foin, etc. On doit donc négliger ces diverses choses et les regarder comme absolument nulles vis-à-vis des grandeurs qui les contiennent ; et c'est ce qu'on fait toujours dans toutes les approximations numériques, fournies par le mesurage et l'évaluation des quantités.

II. La théorie du mesurage a souvent besoin de la méthode infinitésimale, qui n'est au fond que la méthode des coefficients indéterminés ; or, toutes les applications de la méthode infinitésimale reposent sur le principe des *zéros relatifs*, que voici :

Toute quantité doit se négliger et être regardée comme absolument nulle à l'égard de celle qui la contient une infinité de fois : c'est un *zéro relatif* à cette dernière, bien que ce zéro ait une valeur et ne soit pas le *zéro absolu* ou le *rien*, marquant l'absence de toute grandeur.

En effet, tout nombre *infiniment grand* étant désigné par ∞, qui s'énonce l'*infini*, on conçoit que si a étant une quantité *finie*, on a $a = x \times \infty$, x sera une quantité *infiniment petite* et qu'on aura toujours $a \pm x = a$. Car x étant de a une fraction toujours inconnue et inexprimable, échappant aux sens et à l'imagination, par sa petitesse, il est impossible d'en tenir compte, pour augmenter ou diminuer a ; on doit donc écrire $a \pm x = a$, absolument comme si la quantité x était rigoureusement nulle.

Mais pour démontrer complètement le principe proposé, soit m l'aire du carré fait sur la longueur *finie*, interceptée par les deux perpendiculaires à une même droite illimitée; soit B l'aire du *biangle* compris entre la droite et ses deux perpendiculaires : celles-ci étant parallèles, l'aire B est infinie dans le sens de l'ouverture et l'on a nécessairement $B = m\infty$. Soient A et C les deux angles droits *correspondants* que la droite fait avec ses deux perpendiculaires : ces deux angles pouvant se confondre en un seul, sont parfaitement égaux, bien que A surpasse actuellement C du biangle B ; celui-ci est donc comme *nul* vis-à-vis de A et de C ; donc B est un *zéro relatif*. Or, on a évidemment $A = B\infty = m\infty^2$ et $C = B(\infty - 1) = m(\infty^2 - \infty)$; donc puisque $A = C$, il vient successivement.

$$\infty^2 = \infty^2 - \infty,\ \infty = \infty - 1,\ 1 = 1 - (1 \text{ sur } \infty),\ \text{etc.}$$

Ces diverses égalités étant exactes, il faut que ∞ soit nul vis-à-vis de ∞^2, 1 vis-à-vis de ∞, 1 sur ∞ vis-à-vis de 1, etc.

Par ce principe, puisque l'aire de tout triangle est nulle vis-à-vis de chacun de ses angles, surfaces planes infinies, on voit que *l'angle ex-*

térieur d'un triangle vaut toujours la somme des deux angles intérieurs opposés. De sorte que les trois angles valent ensemble deux droits.

III. Ce n'est que par le principe des zéros relatifs que la méthode infinitésimale devient complètement analogique, pour passer du connu à l'inconnu, c'est-à-dire pour représenter les lignes *courbes* par des lignes *brisées*, les aires *curvilignes* par des aires *rectilignes*, les surfaces *courbes* par des surfaces *polyédrales* et les *corps ronds* par des *polyèdres* (compris sous une infinité de faces planes rectilignes infiniment petites).

De plus, pour obtenir l'expression de la grandeur géométrique cherchée, on décompose cette grandeur en parties infiniment petites et analogues, termes d'une série dont la *loi* soit connue, puis on calcule la somme de cette série. Or, la série proposée est souvent la somme des puissances m ièmes des n premiers nombres entiers, n étant infini et m un exposant quelconque ; il faut donc chercher l'expression de cette somme, désignée par $\int n^m$; et l'on y parvient aisément comme il suit : il est évident que

$$\tfrac{1}{2} n (n + 1) - \tfrac{1}{2} (n - 1) n = \tfrac{1}{2} n (n + 1 - n + 1) = n,$$
$$\tfrac{1}{6} n (n + 1) (2n + 1) - \tfrac{1}{6} (n - 1) n (2n - 1) = n^2,$$

et ainsi pour d'autres identités analogues. Le premier terme de chaque différence exprimant la somme des n premiers termes d'une série, il est clair que le second terme, provenant de la substitution de $n - 1$ à n dans le premier, sera la somme des $n - 1$ premiers termes de cette série ; donc le reste n ou n^2 en sera le n ième terme. Par conséquent n étant un nombre entier, aussi grand qu'on voudra, on aura toujours

$$\int n = \tfrac{1}{2} n (n + 1), \int n^2 = \tfrac{1}{6} n (n + 1) (2n + 1), \text{ etc.}$$

L'unité finie est nulle vis-à-vis de n infini ; donc alors $\int n = \frac{1}{2} n^2$, $\int n^2 = \frac{1}{3} n^3$, $\int n^3 = \frac{1}{4} n^4$, etc.

En général, m étant un exposant quelconque, entier ou fractionnaire, même négatif, pourvu qu'alors il soit différent de -1, on aura toujours, en vertu du principe d'analogie et n étant entier infini,

$$(1 + m) \int n^m = n\, n^m.$$

IV. Outre cette formule importante, le principe des zéros relatifs en fournit plusieurs autres à la méthode infinitésimale, pour l'évaluation numérique des grandeurs *finies*. On démontre aisément en effet, que :

1° *Toute courbe plane n'est au fond qu'une ligne brisée, composée d'une infinité de côtés infiniment petits*, appelés *éléments* de la courbe. Ce principe est nécessaire à l'étude des courbes, à leur *similitude*, à leur *rectification*, etc.

2° *Une surface courbe est la somme d'une infinité de portions planes, rectilignes et infiniment petites*, nommées *éléments* de la surface; d'où l'on déduit la *similitude* des surfaces courbes et des corps ronds.

3° *Le segment de toute courbe plane est la somme d'une infinité de parallélogrammes rectilignes, de bases parallèles à la corde du segment et tous de même hauteur infiniment petite.* Ce principe et l'expression de $\int n^m$ conduisent à la *quadrature* des paraboles $y^2 = 2px$, $y = ax^m$; des hyperboles $xy = H^2$, $xy^2 = a^3$, $xy^3 = a^4$, $x^2y - x + y = 0$, etc.; de la folium $ay^2 = x(a-x)^2$ et de $a^2y = x^2(a \pm \sqrt{ax})$.

4° *Le secteur de toute courbe plane est la somme d'une infinité de triangles isocèles rectilignes, ayant l'angle du sommet égal et mesuré par un arc circulaire infiniment petit, de rayon* 1. Ce principe et l'expression de $\int n^m$ ou certaines séries trigonométriques, fournissent la quadrature des spirales, des lemniscates et de certaines courbes planes, dont on a les équations polaires.

5° Enfin, *tout corps géométrique fini est la somme d'une infinité de tranches, à bases parallèles et toutes de même épaisseur infiniment petite, ces tranches pouvant conséquemment être regardées comme des prismes ou des cylindres.* Par exemple, dans la grandeur géométrique G, considérée plus haut (p. 19), si t désigne la v ième des n tranches, à partir du sommet, d'où $h = nz$, on aura, n étant infini,

$$h^m t = bzz^m v^m \text{ et } h^m G = bzz^m \int n^m;$$

d'où il vient, comme plus haut, $(1+m)G = bh$.

V. La décomposition en *tranches* infiniment minces est le procédé le plus général pour mesurer les aires et les volumes, à l'aide du calcul. On cherche l'expression de la v ième de ces tranches et l'on somme la série dont cette expression est le v ième terme. En voici plusieurs exemples remarquables.

1° L'origine des coordonnées rectangulaires étant le sommet de la courbe $y^2 = 2px + qx^2$, soit 2 S l'aire du segment qui répond à $x = h$ et à $y = k$; ce segment aura $2k$ pour corde. Considérons un axe extérieur parallèle à celui des x, $d > k$ désignant la distance entre les deux axes et cherchons le volume engendré par la révolution du demi-segment S autour de l'axe extérieur. Il est clair, par l'expression de la v ième tranche, à bases circulaires parallèles et d'épaisseur infiniment petite, qu'on aura

$$\text{vol. S} = S \times 2\pi d \pm \pi h^2 (p + \tfrac{1}{3} qh).$$

De sorte que si $d = 0$, $p = r$ et $q = -1$, il viendra, pour le volume du *segment de la sphère*, de rayon r, vol. $S = \pi h^2 (r - \frac{1}{3} h)$. Le volume de la sphère est donc $\frac{4}{3}\pi r^3$; tandis que le *secteur sphérique* S', somme du segment proposé et du cône $\frac{1}{3}\pi k^2 (r - h)$, a pour expression $S' = 2\pi rh \times \frac{1}{3} r$, en observant que $k^2 = 2rh - h^2$.

2° Soit Z la *zône*, base de S' : cette zône est la somme d'un nombre infini de triangles sphériques infiniment petits et se confondant chacun avec la portion de contact du plan tangent; donc S' est la somme du même nombre infini de tétraèdres, tous de même hauteur r; donc $S' = Z \times \frac{1}{3} r$ et $Z = h \times 2 \pi r$.

3° Concevons un cylindre droit tel, que sa base et toute section parallèle soit le segment 2 S : Si par l'axe h de ce segment nous menons deux plans quelconques, ces plans détacheront du cylindre un *onglet* O', ayant h pour *hauteur* et pour *base* le triangle T, intercepté sur la face plane du cylindre droit proposé. On trouve aisément, par la v ième *tranche*, à bases parallèles et semblables à T, la relation

$$k^2 O' = T h^2 (p + \tfrac{1}{3} q h).$$

Il en résulte le moyen de mesurer le volume de toute *voûte*, composée de plusieurs onglets O'. De plus, si S est le quart du cercle πr^2, d'où $h = k = r = p$ et $q = -1$, on aura $O' = \frac{2}{3} r T$, expression remarquable surtout parce qu'elle ne dépend point du nombre π, contrairement à ce qu'on pouvait supposer d'abord.

4° Soit C la portion courbe de la surface du dernier onglet O', quand $S = \frac{1}{4} \pi r^2$; on démontre aisément alors que $O' = C \times \frac{1}{3} r$; d'où $C = 2 T$, expression tout aussi remarquable que celle de O'.

5° Soit T' la capacité du *tonneau* qui résulte du volume engendré par la demi-ellipse autour de son grand axe $2a$, moins les deux volumes égaux à celui qu'engendre le demi-segment S autour du même axe. On a donc $d = o$, $a p = b^2$ et $a^2 q = - b^2$. De plus, si l'ellipse est très-allongée et qu'on ait, par exemple, $a = 6 b$, $k = 3 b$ et $b = 3$ décimètres, on trouvera $T' = \frac{11}{2} \pi b^3 = 933$ litres, environ.

6° Soit h la hauteur du segment S, dans *l'ellipsoïde* et les deux *hyperboloïdes*, rapportés à leurs axes principaux $2a$, $2b$ et $2c$: d'après l'expression de la v ième tranche, que l'on peut regarder comme un cylindre droit, à bases elliptiques, sa hauteur u étant infiniment petite et donnée par $h = nu$, on trouve, pour l'ellipsoïde, l'hyperboloïde à deux nappes et l'hyperboloïde à une nappe, les relations

$$a^2 S = \pi b c h^2 (a \mp \tfrac{1}{3} h) \text{ et } c^2 S = \pi a b h (c^2 + \tfrac{1}{3} h^2).$$

7° Si $h = {}^{2}a$ dans l'ellipsoïde $h = a$ dans l'hyperboloïde à deux nappes et $h = c$ pour l'hyperboloïde à une nappe, on trouve chaque fois $S = \frac{4}{3} abc$: C'est le volume de l'ellipsoïde dont abc, sont les demi-axes principaux. Cette valeur met bien en évidence la grande analogie qui existe entre les surfaces du second ordre : elle se tire de celle du volume de la sphère en observant que si k désigne le rapport du volume E de l'ellipsoïde au volume abc, on aura $E = k\, abc$. Le rapport k est nécessairement indépendant de a, de b et de c; ce nombre ne change donc point quand $a = b = c$; mais alors $k = \frac{4}{3}\pi$ et $E = \frac{4}{3}\pi abc$; ce qu'il fallait trouver.

VI. On voit avec quelle facilité la méthode infinitésimale conduit aux expressions des aires et des volumes, en certains cas. On peut même éviter l'emploi explicite des grandeurs infinitésimales et de la réduction à l'absurde, sans que les calculs en soient beaucoup plus compliqués.

Par exemple, soit P le volume de la pyramide, de hauteur h et de base b quelconque, mixte ou curviligne, convexe ou concave. Concevons que la hauteur h soit divisée en n parties égales à x, par des plans parallèles à la base b, d'où $h = nx$: ces plans divisent P en n tranches toutes de même épaisseur x. Soit T la v ième de ces tranches, à partir du sommet extrémité de h; soient p et q ses deux bases, aux distances vx et $(v - 1)\,x$ du même sommet. On sait que $b : p :: h^2 : v^2 x^2$; d'où posant $b = ch^2$, il vient $p = c\,v^2 x^2$. De même, $q = c\,(v - 1)^2 x^2$. La v ième tranche T est moindre que le prisme px, comme y étant contenue ; elle est plus grande que le prisme qx, comme le renfermant; par conséquent on a $T = px - < (p - q)\,x$ ou

$$T = cx^3 v^2 - < 2\,cx^3 v.$$

D'ailleurs il est clair que $v^2 = \frac{1}{3}\,[v^3 - (v - 1)^3] + < 2\,v$. Substituant cette valeur dans T, il est clair que la différence de deux quantités, moindre chacune que $2cx^3 v$, est moindre elle-même que $2cx^3 v$, et à plus forte raison que $2cx^3 n$ ou $2chx^2$, puisque v ne surpassera jamais n; on aura donc

$$T = \tfrac{1}{3}\,cx^3\,[v^3 - (v - 1)^3] \pm < 2chx^2.$$

Prenant successivement $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$, puis ajoutant entre elles les n expressions résultantes, la somme sera la valeur de P; réduisant donc, d'après $h = nx$ et $b = ch^2$, on trouvera

$$P = \tfrac{1}{3}\,bh \pm < 2bx.$$

La différence $P - \frac{1}{3}\,bh$ est constante, aussi bien que P, b et h ; néanmoins elle est toujours moindre que le prisme $2\,bx$, essentiellement variable avec x et qui peut lui-même devenir moindre que le plus petit volume assigné, en prenant la partie x suffisamment petite. Il faut donc, pour satisfaire à ces deux conditions, que la différence $P - \frac{1}{3}\,bh$ soit *nulle* et qu'on ait $P = \frac{1}{3}\,bh$.

On trouverait, par des raisonnements absolument semblables, le volume de tout segment sphérique. On devrait donc préférer ce procédé, même à celui de M. *Querret*, pour l'équivalence des tétraèdres, si mieux on n'aimait se servir du principe d'analogie, tout aussi clair et aussi exact, mais beaucoup plus simple, comme n'exigeant aucun calcul. En général, c'est par la méthode analogique, comprenant la mét hode infinitésimale, que l'on trouve le plus simplement et le plus clairement possible les relations entre les grandeurs qui sont comparables les unes aux autres.

Rectification de la circonférence.

I. La méthode infinitésimale étant complètement analogique, conduit souvent, avec facilité, aux expressions des aires et des volumes finis; mais elle est beaucoup plus compliquée pour les longueurs *curvilignes*, considérées comme lignes *brisées*; tellement qu'il est peu de courbes dont on sache opérer la *rectification* suffisamment approchée.

Rectifier une courbe C tracée et limitée, c'est en mesurer la longueur et l'exprimer en unités *rectilignes*, en mètres, par exemple, comme si la courbe était redressée et étendue en ligne droite.

Mais comment opérer cette rectification? Le moyen *mécanique*, qui s'offre d'abord, est de tendre sur C un *fil* flexible, puis de placer ce fil sur une droite, avec le même degré de *tension*, et de prendre la longueur du fil, dans sa nouvelle position, pour celle rectifiée de la courbe C. Mais il faut que cette courbe, limite d'un corps matériel, soit *convexe*: si elle était *concave* et tracée sur le plan du papier, il faudrait remplacer le fil par une *lame* très-mince, à bords rectilignes et parfaitement *élastique*. On aura ainsi la longueur C en ligne droite; mais l'approximation, bien qu'elle puisse être suffisante, sera toujours fort incertaine, par l'impossibilité de réaliser toutes les conditions d'exactitude qu'exige l'opération. D'ailleurs cette opération mécanique, d'une approximation dont le degré reste inconnu, devrait se répéter sur chaque courbe tracée; tandis que si la courbe peut se rectifier, par la méthode infinitésimale, il en résultera une *formule*, applicable à toutes les courbes de même *genre*, et qui fera connaître chaque fois la limite supérieure de l'erreur commise sur la longueur mesurée. On voit l'importance des formules de rectification, toujours préférables aux procédés mécaniques indiqués ci-dessus et à tout autre analogue.

II. Si l'on connaissait exactement le rapport π de la circonférence C à son diamètre $2r$, d'où $C = 2\pi r$, la rectification de C serait bien facile, puisqu'elle se réduirait à mesurer, le plus exactement possible, le rayon r. Et comme le nombre π se présente dans une foule d'évaluations numériques, on avait ainsi de sérieux motifs pour le déterminer exactement. Or, par l'un des procédés mécaniques, exécuté le plus exactement possible, on trouve, avec un bon compas, $\pi = 3\frac{1}{7}$ environ; mais ce n'est-là qu'une approximation fort médiocre, et jusqu'à présent on n'a pu calculer le nombre π que d'une manière très-approchée.

On conçoit bien que la circonférence C, *ligne courbe*, et son diamètre, *ligne droite*, ne peuvent avoir d'autre mesure commune qu'une quantité *infiniment petite*, et qu'ainsi le nombre π est *inexprimable*. Mais le rapport de la diagonale du carré à son côté, savoir $\sqrt{2}$, est aussi inexprimable; et cependant on a des procédés rigoureux pour construire tous les radicaux du second degré; on pouvait donc penser que peut-être il serait possible aussi de construire rigoureusement le nombre π. C'est de là que proviennent les nombreux essais inutiles faits pour *carrer* le cercle, ou ce qui revient au même, pour rectifier la circonférence.

De pareils essais ne sont plus tentés maintenant que par ceux dont les connaissances en géométrie ne vont pas jusqu'aux méthodes élémentaires pour résoudre les deux problèmes que voici :

Etant donné numériquement le rayon, calculer la longueur de la circonférence en unités rectilignes?

Connaissant numériquement la longueur rectiligne de la circonférence, calculer son rayon?

Dans ces deux problèmes, l'analogie entre le cercle et les polygones réguliers conduit à calculer, soit le périmètre d'un polygone régulier, d'un très grand nombre de côtés, ayant le rayon ou l'apothème égal au rayon du cercle proposé, soit le rayon et l'apothème du polygone régulier dont le périmètre ait même longueur que la circonférence donnée. Dans les deux cas, il faut passer par une suite de polygones réguliers, de deux en deux fois plus de sommets, jusqu'à ce que le rayon et l'apothème du dernier polygone soient égaux dans les décimales conservées. Car ce dernier polygone régulier serait un cercle, si son apothème et son rayon étaient rigoureusement égaux; ce qui n'arrivera jamais, puisque son côté devrait se réduire à un infiniment petit de l'ordre infinième. Mais on voit néanmoins que *le cercle n'est au fond qu'un polygone régulier d'une infinité de sommets, dont le rayon et l'apothème coïncident*; c'est le polygone régulier du plus grand nombre de côtés, en vertu de l'analogie.

III. Le second problème ci-dessus est celui dont la solution offre les calculs les plus simples pour déterminer la valeur approchée de π, et donne lieu à des considérations utiles, que nous allons développer, bien que plusieurs de ces développements se trouvent déjà dans la 2e édition de notre traité de géométrie.

Soit d'abord A B C un triangle rectangle en A, dans lequel A B est le demi-côté d'un polygone régulier de n sommets, C A$=a$ l'apothème et C B $= r$ le rayon de ce polygone. Soient D et E les milieux respectifs de C B et C A, d'où D E $= \frac{1}{2}$ A B; du point D menons D B' $=$

$\frac{1}{2}r$ perpendiculaire à B A, et du point B', B'A' perpendiculaire à C A prolongé : il est clair que $B'A' = DE = \frac{1}{2}AB$ et que l'angle $B'CA' = B'CB$, vu que $BDB' = 2BCB' = BCA$, d'où $B'CA' = \frac{1}{2}BCA$. Donc $CA' = a'$ et $CB' = r'$ sont l'apothème et le rayon du polygone régulier de $2n$ sommets, *isopérimètre* avec le proposé. Soit I le milieu de la base CB' du triangle isocèle CDB' : les deux triangles équiangles CB'A' et CDI donnent $a' : \frac{1}{2}r' = r' : \frac{1}{2}r$; ainsi à cause de $CA' = CE + DB'$, on a les deux relations très-simples et fort remarquables :

$$r' = \sqrt{(r a')} \text{ et } a' = \tfrac{1}{2}(a + r) \ldots. (1)$$

Il est évident que $a' > a$ et $r' < r$; si donc on passe par une suite de polygones réguliers isopérimètres, de deux en deux fois plus de sommets, les apothèmes iront en augmentant et les rayons en diminuant ; il est donc possible de parvenir à un polygone régulier dont le rayon et l'apothème soient égaux dans les sept premières décimales, par exemple.

IV. Pour calculer ce rayon et cet apothème, partons de l'exagone régulier dont le périmètre $6c$ soit donné numériquement avec le côté c, que nous prendrons d'abord pour *unité linéaire* : nous aurons donc $r = c = 1$ et $a = \frac{1}{2}c\sqrt{3} = 0,\ 8660254$. Avec ces valeurs les formules (1) feront connaître le rayon et l'apothème du polygone régulier de 12 côtés, dont $6c$ est le périmètre ; puis l'apothème et le rayon du polygone régulier de 24 côtés, de 48, 96,..., ayant tous le même périmètre $6c$. Calculant chaque fois sept décimales exactes, on formera le tableau (p. 114 de la géométrie, où $x = c$).

L'apothème et le rayon du polygone, régulier de 12288 côtés étant égaux chacun à $0,9549296\,c$, chacun peut être pris pour le rayon du cercle dont la circonférence est égale en longueur au périmètre constant $6c$; par conséquent on a $\pi = 6c : 2$ fois $0,9549296c$ ou bien $\pi = 3 : 0,9549296$; d'où

$$\pi = 3,1415926 \text{ et } 1 : \pi = 0,3183099.$$

La seconde de ces valeurs est exacte dans les sept premières décimales, aussi bien que celle de π ; mais il pourrait se faire que le dernier chiffre 6 de π ne fût pas exact, vu que la valeur du rayon n'est qu'approchée. Or, la différence des circonférences, dont r et $r + d$ sont les rayons, est $2\pi d$; donc puisque d est moindre que la demi-décimale du 7^e^ ordre, l'erreur sur la valeur de π n'est pas de 3 de ces décimales. On sait d'ailleurs, en en calculant vingt, que les sept décimales de π sont exactes.

V. Voyons maintenant les moyens d'abréger les calculs que nous venons d'indiquer. *Premièrement*, si l'on ne veut pas employer les *logarithmes* pour calculer les rayons le plus simplement et le plus sûrement possible, à l'aide des *tables*, ayant au moins 10 décimales, on peut toujours achever les extractions de racines carrées par de simples divisions, après avoir abrégé la multiplication des deux nombres ayant chacun sept décimales exactes, comme il est prescrit en arithmétique.

Secondement, il n'y aura que six extractions de racines carrées à effectuer ; car pour la septième $r' = \sqrt{(r\,a')}$, on a $r = 0{,}9549723$ et $a' = 0{,}9549088$; d'où $r - a' < \sqrt{a'}$ ou $(\sqrt{r} + \sqrt{a'})(\sqrt{r} - \sqrt{a'}) < \sqrt{a'}$. Et comme $\sqrt{a'} < \sqrt{r}$, donne $2\sqrt{a'} < \sqrt{r} + \sqrt{a'}$, il vient, à plus forte raison, $2(\sqrt{r} - \sqrt{a'}) < 1$. Cela donne

$$\tfrac{1}{2}(r + a') - \sqrt{(a'r)} < \tfrac{1}{8}.$$

Cette différence étant donc moindre que le 8ᵉ de l'unité décimale du 7ᵉ ordre, on pourra désormais substituer la demi-somme à la racine carrée.

Troisièmement, cette abréviation est déjà très-grande ; mais il existe une formule pour calculer immédiatement le dernier rayon et le dernier apothème. En effet, la demi-somme remplaçant la racine carrée, on a

$$2a' = a + r \text{ et } 2r' = a' + r;$$

$$\text{d'où } a' + 2r' = a + 2r \text{ et } 4(r' - a') = r - a.$$

Ces deux équations, pour le v ième et le $(v+1)$ième polygone, sont représentées par celles-ci :

$$\left.\begin{array}{l} a_{v+1} + 2r_{v+1} = a_v + 2r_v, \\ 4(r_{v+1} - a_{v+1}) = r_v - a_v. \end{array}\right\} \ldots (2)$$

La première de ces équations *à numéros* peut se représenter par

$$x_{v+1} = x_v;$$

si donc on y fait successivement $v = 6, 7, 8, 9, \ldots, n-1$, la somme des équations résultantes donnera, réductions faites,

$$x_n = x_6 \text{ ou } a_n + 2r_n = a_6 + 2r_6.$$

Comme on finira toujours par trouver le polygone régulier dont le rayon et l'apothème sont égaux, dans les décimales conservées, on aura

$$a_n = r_n = \tfrac{1}{3}(a_6 + 2r_6) = 0{,}9549296.$$

Plus généralement, la formule demandée est

$$a_n = r_n = \tfrac{1}{3}(a_v + 2r_v).$$

Cette formule abrége singulièrement les calculs quand on veut avoir un grand nombre de décimales exactes ; chose nécessaire dans les nombreux usages du nombre π, pour obtenir des approximations suffisantes et bien connues.

Quatrièmement, on peut aussi trouver le nombre v de tous les polygones réguliers isopérimètres, pour que le rayon et l'apothème du dernier ne diffèrent pas de la demi-décimale du n ième ordre.

A cet effet, observons que la seconde équation (2) peut se représenter par celle-ci :

$$4\,\mathrm{d}_{v+1} = \mathrm{d}_v.$$

Prenant $v = 1, 2, 3, 4 \ldots, v - 1$ et multipliant membre à membre les $v - 1$ équations résultantes, on trouvera

$$4^{v-1}\mathrm{d}_v = \mathrm{d}_1 \text{ ou } 4^{v-1}(\mathrm{r}_v - \mathrm{a}_v) = \mathrm{r}_1 - \mathrm{a}_1.$$

Or, on veut que la plus grande valeur de $\mathrm{r}_v - \mathrm{a}_v$ soit $\frac{1}{2}(10^{-n})$; et de plus, on a évidemment $\mathrm{r}_1 - \mathrm{a}_1 < 0{,}2$ et $> 0{,}1$. Il vient donc simultanément

$$4^{v-1} < 0{,}4 \times 10^n \text{ et } 4^{v-1} > 0{,}2 \times 10^n.$$

Prenant les logarithmes ordinaires de part et d'autre, on a

$$(v-1)\,2l2 < 2l2 + n - 1 \text{ et } > l2 + n - 1.$$

Comme $l2 = 0{,}3010300$, on peut s'arrêter à $l2 = 0{,}3$; donc

$$v < 2 + \tfrac{5}{3}(n-1) \text{ et } v > 1{,}5 + \tfrac{5}{3}(n-1).$$

Par ces deux formules, si l'on veut avoir sept décimales exactes, d'où $n = 7$, on aura $v < 12$ et $v > 11{,}5$. Mais comme v doit toujours être entier, il faudra prendre $v = 12$; donc comme on le voit par le tableau, on devra considérer 12 polygones réguliers, pour que le rayon et l'apothème du dernier soient égaux dans les sept premières décimales.

Pour $n = 4$, il vient $v = 7$; pour $n = 5$ ou 6, on a $v = 10$; pour $n = 15$, 100 ou 150, il vient $v = 25$, 167 ou 251.

VI. Le rayon de la circonférence $6c$ étant exprimé par pc, quel que soit le nombre de décimales de p, valeur de l'apothème et du rayon du dernier polygone régulier isopérimètre, il est clair que le rapport $\pi = 6c : 2pc$ ne dépend point de c, puisqu'il se réduit à $\pi = 3 : p$; donc quelle que soit la conférence $6c$, son rapport à son diamètre $2pc$ est un nombre constant π, que nous venons de calculer avec sept décimales exactes. Ainsi comme on l'a déjà démontré par la méthode analogique, *les circonférences des cercles sont entre elles comme leurs diamètres*; ce sont deux lignes *semblables*, représentées par leurs rayons, pour les opérations graphiques; tandis que les aires des deux cercles sont représentées par les carrés faits sur leurs rayons ou sur leurs diamètres.

Il résulte d'ailleurs, des calculs indiqués plus haut, que le nombre π exige une infinité de racines carrées successives, inexprimables chacune, pour en déterminer tous les chiffres décimaux, en nombre infini. De sorte que la longueur rectiligne de la circonférence est composée d'une infinité de radicaux *irréductibles* du second degré, et ne peut se construire que par approximation. Donc la *quadrature* du cercle est impossible; c'est à-dire qu'il n'existe aucun procédé rigoureux qui donne le côté du carré équivalent au cercle.

Enfin, puisque le cercle coïncide avec le polygone régulier d'une infinité de sommets, inscrit ou circonscrits, on voit que *tout arc circulaire infiniment petit se confond numériquement avec sa corde et avec sa tangente, limitée aux prolongements des rayons joignant les extrémités de cet arc.*

VII. Soit r la valeur numérique du rayon de l'arc circulaire a, à *rectifier*, et soit v le nombre de *degrés* contenus dans a; on aura évidemment $90 : v = \frac{1}{2} \pi r : a$; d'où

$$a = \pi r (v : 180).$$

La rectification de l'arc est donc plus compliquée que celle de la circonférence; non-seulement il faut mesurer le rayon, mais aussi trouver le nombre v de degrés de cet arc ou de son *angle au centre*, si l'arc est tracé sur le terrain.

Or, si l'arc a est seul donné et tracé sur le papier, il faudra, avec un bon compas, en déterminer le centre, le rayon r et la circonférence dont a fait partie. Divisant cette circonférence C en six parties égales, chose facile; puis à partir du premier point de division, portant, avec le compas, l'arc a sur C, en faisant un tour, deux tours, trois tours, etc., jusqu'à ce que la pointe du compas tombe exactement sur l'une des six divisions de C (ce qui arrivera toujours si a et C ont une mesure commune *finie*), ou du moins jusqu'à ce que la pointe soit assez voisine de l'une des six divisions, pour qu'on puisse les regarder comme se confondant en un seul point : examinant alors quel est le *rang* de ce point sur C, lequel sera, par exemple, le troisième et donnera le tiers de C; comptant le nombre de fois que a a dû être porté sur C et le nombre de révolutions qu'il a fallu opérer, pour arriver à ce premier tiers de C, on calculera aisément la valeur v du nombre de degrés de l'arc proposé a. Car s'il a fallu 3 tours et que a ait été porté 21 fois, on aura $21\,a = 3\,\mathrm{C} + \frac{1}{3}\,\mathrm{C} = 1200°$; d'où $v = \frac{1}{7}$ de 400 et $63\,a = 20\,\pi\,r$.

On vérifierait la valeur trouvée pour v en cherchant la *plus grande mesure commune* à C et à a : dans ce cas, comme les *restes* vont en diminuant, il arrive souvent que le dernier ne peut plus se saisir avec le compas; on le compare alors au reste précédent, pour estimer *à vue* s'il en est la moitié, le tiers, etc. Mais ce procédé est moins simple que celui qu'on vient d'indiquer, et pourrait être moins exact, bien que, par la *fraction continue* résultante, on puisse calculer la *limite supérieure* de l'erreur commise.

On voit comment la rectification de tout arc tracé, sur le papier, peut s'opérer avec le compas, à l'aide de l'*échelle de dixmes* et du *vernier*, pour mesurer le rayon r.

Si l'arc circulaire était tracé sur le terrain, c'est-à-dire sur un plan de *grandes dimensions*, le centre et le rayon étant inconnus, il faudrait en mesurer la corde c, la flèche f et calculer le rayon r par

$$f : \tfrac{1}{2} c :: \tfrac{1}{2} c : 2r - f.$$

On mesurerait ensuite le nombre v' de degrés contenus dans l'angle du sommet du triangle isocèle de base c et de hauteur f, ou plutôt on calculerait ce nombre v', au moyen des *tables trigonométriques*; d'où l'on aurait $v = 360 - 2v'$. Par exemple, si $c = 100$ mètres, $f = 25^m$ et $v = 120°$, on aura $3a = 125\pi$ et $a = 392^m,70$ environ. Par ces valeurs, on calcule l'aire enfermée par l'arc a et sa corde c.

Les cinq quantités a, v, c, f et r sont telles, que si deux d'entre elles, a et v, a et r, v et r, v et c, c et f, c et r, f et v, f et r, sont données numériquement, on pourra calculer les trois autres, en observant que a désigne la longueur rectiligne de l'arc proposé. Il faudrait d'autres principes, pour résoudre le problème, si l'on ne connaissait que a et c ou a et f. Enfin, si $r + v = 60$, le *maximum* de a répond à $r = v = 30$ et vaut 5π.

VIII. Rien de plus facile que de calculer, d'une manière aussi approchée qu'on voudra, le côté c du carré équivalent, soit au cercle, soit au secteur circulaire, dont on connaît numériquement le rayon r. Et si l'on observe que $\pi < 4$ et $\pi > 3$, on démontrera aisément les propositions que voici :

1° *Le périmètre du carré équivalent au cercle est plus grand que la circonférence.* Réciproquement, *le carré est plus petit que le cercle isopérimètre.*

2° *Le contour du carré est moindre que celui du demi-cercle équivalent.* Réciproquement, *le carré est plus grand que le demi-cercle isopérimètre.*

3° Si un cercle vaut la somme ou la différence de deux autres, sa circonférence sera moindre ou plus grande que la somme ou la différence des deux autres circonférences.

4° *Le carré est plus grand que tout secteur circulaire isopérimètre.* Réciproquement, *le carré équivalent au secteur circulaire a toujours un périmètre moindre.*

5° *La somme des mesures de l'arc en degrés et du rayon en mètres étant donnée, le secteur circulaire est un maximum quand ces deux mesures sont égales.* Réciproquement, *la somme est un minimum quand l'aire du secteur est constante.*

6° *Parmi les secteurs circulaires isopérimètres ou équivalents entre eux, le plus grand ou celui de moindre contour a son arc numériquement égal au diamètre.* Chaque fois son aire est mesurée par le carré du rayon, et son angle au centre vaut $360° : \pi$.

7° *Le cercle est plus grand que tout secteur isopérimètre, et réciproquement.*

8° *Le trapèze circulaire, différence de deux secteurs circulaires semblables, est un maximum lorsque la différence des deux rayons vaut la somme des deux arcs.* La réciproque est vraie.

IX. Soit S l'aire du segment circulaire, dont a est l'arc, c la corde, f la flèche, r le rayon et d la distance de la corde au centre, d'où $r = d + f$. La décomposition de S en tranches, toutes de même hauteur x infiniment petite, donne, pour les expressions du volume et de la surface engendrés respectivement par S et a, tournant autour de la corde c,

$$\text{vol. } S = \tfrac{1}{6}\pi c^3 - S \times 2\pi d \text{ et surf. } a = c \times 2\pi r - a \times 2\pi d.$$

Nous avons supposé $r = f + d$; mais si l'on avait $r = f - d$, il est clair qu'il faudrait changer d en $-d$, dans les expressions de vol. S et de surf. a, en vertu de l'analogie complète; car ces expressions subsistent, quelles que soient les valeurs particulières des éléments générateurs; de sorte qu'on peut avoir $f < r$, aussi bien que $f > r$; c'est-à-dire $r = f - d$, aussi bien que $r = f + d$.

Soit $F = S + R$, R désignant le rectangle de hauteur b et de base égale et parallèle à la corde c de a, à la distance z du centre, d'où $d = b + z$ et $r = f + b + z$. Si F fait une révolution autour de la base égale et parallèle à c, on trouvera

$$\text{vol. } F = c\,(b^2 + \tfrac{1}{6} c^2)\,\pi - F \times 2\pi z.$$

Cette expression est celle de la capacité d'un *tonneau*; or, on peut mesurer, sur ce tonneau, le rayon b de ses deux bases, la corde c et la flèche f de l'arc a. On en déduira donc r et z, puis l'angle A au centre, en degrés, la longueur rectiligne de l'arc a et l'aire S du segment; d'où il viendra l'aire F et tout ce qu'il faut pour calculer vol. F, ainsi que la surface courbe intérieure du tonneau, laquelle est exprimée par $c \times 2\pi r - a \times 2\pi z$.

Les distances négatives.

I. C'est par les proportions que la géométrie *construit* les figures *semblables* et qu'elle *mesure* les différentes sortes d'étendues limitées, savoir: les *longueurs rectilignes*, les *aires* et les *volumes*, dont le mesurage *direct* serait impossible. La géométrie est donc à la fois *graphique* et *numérique*: elle suppose souvent la connaissance des calculs *arithmétiques* et *algébriques*, lesquels sont nécessaires pour construire la valeur cherchée, de la manière la plus simple, et en général pour déterminer les grandeurs inconnues.

Ces grandeurs sont toujours exprimées par des nombres abstraits, que l'on peut regarder comme les *rapports* de certaines droites *données* à la même unité linéaire *u*; chaque droite étant représentée par une lettre, censée divisée par *u*, pour plus de simplicité, et les inconnues elles-mêmes étant désignées chacune par une lettre, également divisée par l'unité de même nature, *sous-entendue*. Fort souvent la formule se traduit par des proportions, tour-à-tour entre quantités continues et entre nombres abstraits, suivant qu'on supprime et qu'on introduit l'unité diviseur de chaque lettre; ce qui ne détruit point les proportions.

Les proportions entre nombres abstraits, représentés par des lettres ou des chiffres, ne sont que des *équations*, à *résoudre*, d'après les principes de l'algèbre. La résolution des équations conduit à des *formules*, qu'il faut *discuter* et *interpréter* géométriquement, quand il s'agit de la construction des figures. Ces formules présentent aussi des *valeurs singulières*, des *symboles*, à interpréter.

II. Les lettres représentant des nombres abstraits *quelconques*, la formule qui les renferme est, par cela seul, absolument *générale*, c'est-à-dire applicable pour toutes les valeurs numériques de ces lettres. Car la formule exprime la mesure de toutes les grandeurs comprises dans la même définition générale et dont le mode de génération est identique; la valeur particulière d'une lettre ne saurait donc changer aucunement le rôle que cette lettre joue dans la formule, expression numérique du résultat de la génération.

Or, les valeurs particulières des lettres sont parfois telles, qu'en déterminant la formule demandée, nous opérons, à notre insu, sur un ou plusieurs des *symboles* -3, $\sqrt{-4}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{1}{0}$,..., *soumis alors aux mêmes règles de calcul que les nombres absolus et réels.* Le calcul des symboles est donc absolument inévitable en algèbre, par suite de la généralité des formules et pour leur conserver cette généralité si importante.

Non-seulement on opère souvent sur des symboles en algèbre; mais cela arrive toutes les fois qu'en raisonnant sur des grandeurs, on fait abstraction de leurs valeurs numériques individuelles : en particulier, c'est ce qui arrive, dans la géométrie, lorsque la figure se complique ou que les rapports qui en lient les parties se multiplient; parce qu'il n'est plus possible alors de discerner au simple coup-d'œil, l'ordre de grandeur et de situation de ces parties. C'est encore ce qui a lieu quand certaines parties proposées sont l'objet d'une recherche faite sur la figure et qu'on les suppose inconnues à la fois de grandeur et de situation. Enfin c'est surtout ce qui arrive quand on fait abstraction de la figure et qu'on se dispense de la décrire; de là cette généralité de conceptions et cette grande extension de la géométrie, où l'on considère les objets dans l'espace; et de là aussi la géométrie *analytique* et l'interprétation des symboles.

III. Comme il n'y a point de quantité plus petite que le *rien*, le *zéro absolu*, et que plus une quantité a d'unités plus elle est grande ; il semble d'abord que les *inégalités* $-4 < 0$ et $-9 < -2$ soient absurdes. Mais elles sont vraies, par extension d'idée et en appelant encore *quantité* le *reste* de la soustraction, lorsque celle-ci est impossible et donne un *terme soustractif*. Or, -4 n'est pas une *quantité*; c'est simplement une soustraction indiquée, dont le plus grand nombre ω est *sous-entendu*, comme n'étant pas l'objet du calcul actuel. Mais si l'on fait reparaître ce nombre, que l'on peut toujours supposer propre à rendre possible chaque soustraction, il est clair qu'au lieu de $-4 < 0$ et $-9 < -2$, on aura les deux *inégalités* évidentes $\omega - 4 < \omega$ et $\omega - 9 < \omega - 2$. Ainsi désormais toute quantité négative isolée ne sera, pour nous, *qu'une soustraction indiquée, dont le plus grand nombre ω sera sous-entendu, comme ne devant pas être soumis au calcul.*

IV. La généralité complète qu'il faut accorder aux règles et aux formules numériques, en vertu du principe d'analogie et pour simplifier l'étude de l'Algèbre, ne conduit pas seulement au calcul des quantités négatives isolées; mais de plus, elle fournit immédiatement les règles de ce calcul. *Il suffit de faire reparaître le plus grand nombre ω, sous-entendu dans chaque soustraction indiquée.*

Observons toutefois que, pour la clarté, chaque règle doit se tirer de la définition de l'opération dont elle fournit le résultat; mais alors, pour que l'analogie complète soit maintenue, il faut que la définition ait la plus grande extension possible et soit absolument générale. Ainsi pour le *calcul algébrique*, il faut poser les définitions que voici :

1° L'*addition* est une opération par laquelle on réunit plusieurs quantités, de même nature, affectées des signes $+$ et $-$, pour en faire une seule, appelée *somme*.

2° La *soustraction* est une opération par laquelle, connaissant la somme de deux quantités et l'une de celles-ci, on trouve l'autre, appelée *reste*, *excès* ou *différence*.

3° Dans la *multiplication*, le *produit* se trouve en opérant sur le *multiplicande*, comme le *multiplicateur* en opérant sur l'unité.

4° Dans la *division*, on trouve le *quotient* second facteur du *dividende* donné, connaissant le premier facteur, appelé *diviseur*.

5° Enfin, vous donnez à la définition de l'exposant x la plus grande extension possible et vous procédez par analogie, en disant que, dans a^x, il y a x facteurs a, lorsque l'exposant x est un nombre ou un symbole quelconque. Il est bien facile ensuite d'en tirer la signification précise de l'exposant fractionnaire, positif ou négatif, de l'exposant irrationnel ou imaginaire. et par suite le calcul des exposants d'une nature quelconque.

V. Le calcul des symboles étant démontré, il est facile de procéder à leur *interprétation*, dans les problèmes numériques. Et d'abord x étant la grandeur inconnue, si l'on trouve $x = -a$ ou $-x = a$, il s'ensuivra qu'on aura désigné par x ce qu'on aurait dù représenter par $-x$; donc x devra diminuer ce qu'il augmentait ou augmenter ce qu'il diminuait; c'est-à-dire que le nombre inconnu x devra être pris dans une *acception opposée*.

En général, *toute quantité négative isolée doit être prise dans une acception opposée, pour avoir le problème résolu par elle*. Ainsi — 4 jours *à venir*, — 4 francs de *bien*, — 4 degrés *au-dessus* du zéro,..., signifient respectivement 4 jours *passés*, 4 francs de *dette*, 4 degrés *au-dessous* du zéro, etc. C'est ce qu'on vérifie aisément par divers problèmes algébriques, où $-a$ n'est au fond que $\omega - a$, le nombre ω n'étant pas l'objet des calculs effectués; mais étant *sous-entendu* dans le problème proposé.

Si l'inconnue était un nombre *absolu*, n'ayant point de signification opposée, le signe — de la valeur de x proviendrait du changement de signes de quelques-uns des nombres donnés; *et pour savoir quels sont ces nombres, il suffirait de changer* x *en* — x *dans les équations proposées*. Car si l'on a trouvé $x = -4$, d'où $-x = 4$, c'est qu'on désignait par x ce qu'il eût fallu représenter par $-x$; on doit donc substituer $-x$ à x, pour avoir les équations du problème dont 4 est la solution.

Telle est l'*interprétation des solutions négatives*; d'où résulte immédiatement celle de tout *symbole*, *en remplaçant la soustraction qui produit l'absurdité, par une addition, et interprétant le changement de signe du nombre à soustraire, au moyen des nouvelles équations*.

Quant aux symboles *fractionnaires* ou *inexprimables*, ils ne désignent des *impossibilités* que parce que la quantité cherchée doit être un *nombre entier*; il faut donc, pour l'interprétation, écarter cette condition particulière, en changeant la nature de l'inconnue, de telle sorte qu'elle puisse être fractionnaire ou un nombre inexprimable.

VI. L'interprétation des symboles se présente dans *l'application de l'algèbre à la géométrie* et porte essentiellement sur les *distances négatives*: il en résulte la démonstration complète du double principe fondamental, que nous allons considérer.

Dans tous les problèmes sur les droites *numériques*, la distance

A P $= x$ d'un point P au point A de la droite quelconque B C, *mobile* ou non autour de ce point A, est toujours liée à deux autres distances, sur la même droite, et aussi grandes qu'on voudra, savoir A B $= m$ et B P $= v$. De plus, cette *relation* dépend uniquement de la *position* du point P à l'égard de A ; car suivant que P est situé *à droite* ou *à gauche* de A, on a nécessairement

$$v = m + x \text{ ou } v = m - x, \ldots \text{ (1)}$$

et cela quel que soit le problème où x se trouve. Si donc on part toujours du cas où P est *à droite* du point A et où $v = m + x$, la longueur x sera toujours *positive* de A vers C et conséquemment *négative* de A vers B, *dans le sens directement opposé*, puisqu'alors P sera *à gauche* de A et qu'on aura $v = m - x$. Ainsi *la distance* x *doit recevoir le signe — quand elle est mesurée en sens directement contraire ;* et réciproquement, *si elle reçoit le signe —, par le calcul, on doit supprimer ce signe et porter le nombre résultant en sens directement opposé. sur la même droite B C et à partir du même point A.* Ce *double principe* subsiste même lorsque la droite a tourné autour de A ou ce point glissé sur BC, *axe des distances x ;* car on a toujours les deux relations (1).

En résumé, pour que le principe d'analogie ait lieu, dans toute son étendue, et que la formule soit absolument générale, il faut qu'elle puisse s'appliquer à la fois à toutes les valeurs numériques de chaque droite limitée qu'elle renferme et à toutes les positions de cette droite x autour de son *origine* A. Or, on réalise ces propriétés importantes de la formule, 1° *en y changeant* x *en* — x *lorsque la droite* x *doit se porter en sens directement opposé sur l'axe, pour une autre circonstance du même problème* (dont on trouve immédiatement ainsi la solution) ; 2° *en portant la droite* x *en sens directement opposé lorsque le calcul lui donne une valeur négative, celle-ci ne pouvant que se rapporter à une autre circonstance du problème proposé* (ainsi résolue sans aucun nouveau calcul).

Tel est le *double principe des distances négatives*, également applicable à des *aires* et à des *volumes :* il en résulte la *règle des signes*, dans la multiplication et dans la division, par quatre rectangles égaux à R $= bh$, assemblés autour d'un point sur le plan ; on passe du premier R ou bh au second, de celui-ci au troisième et de ce troisième au quatrième. Ce double principe est indispensable à la *géométrie analytique*, pour la *discussion* des équations et la construction des *lignes* et des *surfaces*, que ces équations *représentent* : c'est le principe d'analogie appliqué à la *forme* et à *l'étendue* des figures géométriques.

VII. Soit $BC = a$ la droite joignant les milieux fixes des deux bases $2b$ et $2c$ du trapèze T : Si les longueurs $2b$ et $2c$ parallèles restent constantes, les sommets du trapèze T décriront les circonférences B′ et C′ dont B et C sont les centres, b et c les rayons; et si de plus on a $b > c$, les deux côtés latéraux de T iront couper le *prolongement* de BC en un même point P, *pôle de similitude directe* des circonférences B′ et C′, tandis que les diagonales de T se couperont en un même point Q′, *pôle de similitude inverse* de B′ et C′, sur BC.

C'est ce qu'on démontre chaque fois par deux couples de triangles semblables; car les quatre proportions résultantes se réduisent aux deux BP : CP :: $b:c$ et BQ : CQ :: $b:c$; d'où il vient BP : CP :: BQ : CQ. Si donc, par P et Q, on mène des *tangentes* à B′, elles seront aussi tangentes à C, et réciproquement: il y aura 4, 3, 2, 1 ou aucune tangente commune, suivant la *position relative* des circonférences B′ et C′, et selon les longueurs des rayons b et c.

Posant $CQ = x$, d'où $BQ = a - x$, on aura, pour calculer la position du point Q, la formule $(b + c)\,x = ac$; d'où en changeant c en $-c$ et x en $-x$, il vient, pour calculer la position du point P,

$$(b - c)\,x = ac.$$

Lorsque les longueurs a et b restent constantes, dans cette équation, et que c varie en augmentant, depuis $c < b$ jusqu'à $c > b$, et cela par degrés insensibles; il est clair que le point P s'éloigne de plus en plus; qu'il est *infiniment éloigné* lorsque la différence $b - c$ est *infiniment petite*, et qu'il cesse d'exister quand cette différence est rigoureusement *nulle*; vu qu'alors le *zéro* étant *absolu*, la distance x est donnée par l'équation impossible $0x = ac$ ou $x = ac : 0$.

Or, bien que l'inconnue x cesse d'exister quand $c = b$, les deux tangentes, *extérieures* à B′ et à C′, ont toujours lieu, aussi bien que le trapèze T : seulement T est devenu un parallélogramme. D'ailleurs pour *interpréter* le symbole $ac : 0$ et résoudre un problème analogue, avec les mêmes nombres donnés, il suffit de remplacer la soustraction $b - c$, qui produit l'absurdité, par l'addition $b + c$, en changeant c en $-c$: cela donne $(b + c)\,x = -ac$; donc x est *négatif* et détermine le point Q ; et ce point est le milieu de BC, dès que $b = c$. Enfin si $c > b$, x et $b - c$ sont négatifs et mesurés en sens respectivement opposés, sur les axes; les parallèles $2b$ et $2c$ ayant tourné au tour de leurs milieux fixes B et C.

On voit que toute quantité *variable* ne peut devenir *négative*, de *positive* qu'elle était, qu'en passant, soit par l'*infiniment petit* et le *zéro absolu*, soit par l'*infiniment grand* et l'*absurde* ou la non existence.

Pareillement, la *fonction* d'une *variable* ne peut dévenir *imaginaire*, de *réelle* qu'elle était, qu'en passant par le *maximum* ou par le *minimum* de la variable proposée.

La théorie des *maximums* et des *minimums du second degré* fait partie de la discussion des problèmes de ce degré et doit entrer dans les éléments d'algèbre, comme fournissant un grand nombre d'applications utiles et remarquables : elle repose sur ce que le problème est impossible, ou plutôt la fonction inconnue, lorsque le radical est imaginaire. Mais on peut résoudre un problème analogue, avec les mêmes nombres donnés, en *interprétant* le symbole imaginaire ; ce qui se fait toujours en remplaçant la soustraction sous le radical par une addition.

Par exemple, considérons les trois points A, B, C en ligne droite, les longueurs $AB = a$ et $AC = b$ étant données, et cherchons la distance x du point A à un point P de la même droite, de telle sorte que x soit *moyenne proportionnelle* entre les distances BP et CP.

Il est clair que B étant entre A et C, le point P pourra tomber hors des trois points, ou entre A et B, ou entre B et C : dans ce dernier cas, on a $x^2 = (x - a)(b - x)$. Discutant la formule, on verra que les deux solutions seront *positives* et *rationnelles* pour $a = 2n$ et $b = 12n$; *imaginaires* à interpréter, pour $(a + b)^2 > 8ab$; et que si a est constant, la variable b atteint son *maximum* et son *minimum*, pour $(a+b)^2 = 8ab$, qui est aussi la condition du maximum et du minimum de a lorsque b est donné invariable.

On pourrait examiner le cas où le point P tombant sur le prolongement de AC, la longueur $BP = y$ désigne la distance cherchée. Si alors $AB = a$ et $BC = c$, on aura $y^2 = (a + y)(y - c)$.

On voit, par les discussions précédentes, que l'interprétation des symboles, *dûs à la soustraction*, se fait toujours par celle des distances négatives ; en sorte que la discussion des problèmes de *géométrie numérique* est ramenée au double principe démontré plus haut ; lequel devient celui des *aires négatives*, dans la discussion du problème où, connaissant l'aire a enfermée par trois droites indéfinies, il faut mener à l'une d'elles la parallèle terminée aux deux autres, de telle sorte que le trapèze résultant ait une aire connue t.

Enfin, puisqu'il est évident que si, de la somme des n premiers termes d'une série, on soustrait la somme des $n - 1$ premiers, le reste sera le n ième terme ; le calcul des quantités *négatives isolées* fournit immédiatement les sommations :

$$\int \pm n = \pm \tfrac{1}{2} n + \tfrac{1}{4}(1 \pm 1), \int \pm (2n-1) = \pm n,$$
$$\int \pm n^2 = \pm \tfrac{1}{2} n (n+1), \int \pm (2n-1)^2 = \pm 2n^2 - \tfrac{1}{2}(1 \pm 1).$$

et ainsi pour d'autres séries analogues ; le signe supérieur de $\pm$ ayant lieu chaque fois pour n impair.

D'après cela, si un promeneur va et vient dans une longue avenue et s'astreint à parcourir, en sens directement opposés, les chemins successifs 1 mètre, 3, 5, 7, 9, 11,…, on saura calculer sa distance x au premier point de départ, après le n ième chemin ; on pourra aussi calculer le chemin total parcouru y et le temps z de la promenade, si le promeneur fait 40 mètres par minute et qu'il emploie 6 secondes pour se retourner.

Les chemins successifs pourraient devenir de 2 en 2 fois plus grands, ou bien encore croître, soit comme les nombres entiers, soit comme leurs carrés ou leurs cubes, soit comme les carrés ou les cubes des nombres impairs, etc.

Le temps z de la promenade pourrait être donné, dans les hypothèses ci-dessus ; mais alors comme n doit être un nombre entier et que z est arbitraire, il faudrait lui donner la valeur propre à rendre n entier positif.

C'est-là un exemple où l'inconnue doit être un nombre *rationnel*, dans une équation du second degré. La géométrie en fournit plusieurs autres remarquables, comme quand on veut *assigner aux côtés d'un triangle, des valeurs entières quelconques, ou bien en progression arithmétique, et telles que l'aire soit chaque fois un nombre rationnel.*

Ce problème est susceptible d'un grand nombre de solutions, comme on sait, et fournit trois suites de valeurs entières correspondantes, soit pour les côtés du triangle rectangle, soit pour ceux du triangle acutangle ou du triangle obtusangle : il en résulte chaque fois des valeurs *rationnelles* pour chacun des *sinus* des angles.

On en déduit aussi plusieurs quadrilatères, dans chacun desquels les côtés étant des nombres entiers, l'aire et les diagonales sont des nombres exprimables.

II. *Propositions de Géométrie appliquée ;*

Par J.-N. NOËL, Professeur à l'Université de Liége.

Parmi les *propositions*, en grand nombre, que nous allons considérer, quelques-unes sont peu connues, et les autres, bien qu'elles puissent se trouver dans les traités élémentaires ou dans les recueils scientifiques, sont ici rapprochées, pour en déduire des conséquences utiles : toutes sont considérées sous le point de vue *pratique*, trop négligé dans les traités de géométrie, ordinairement en usage.

Les figures employées nous paraissent suffisamment indiquées par de grandes lettres ; mais le lecteur est prié de les tracer, s'il les juge nécessaires à la clarté des démonstrations.

Les longueurs sur le terrain.

1. Instruments. Le *mesurage* des grandeurs géométriques se réduit toujours à celui des droites, qui en sont les *éléments générateurs*. Sur le terrain, supposé *plan*, le mesurage des droites, visibles et accessibles, peut se faire, avec une approximation suffisante, au moyen de la *chaîne* ; surtout quand on mesure la droite au moins deux fois en sens opposés et qu'on prend la demi-somme des deux nombres résultants. Mais il arrive souvent que la droite à mesurer est *inaccessible*, du moins en partie, bien que ses extrémités soient *visibles :* dans ce cas, on en calcule la longueur, à l'aide des triangles, soit *rectangles*, soit *obliquangles*, soit *semblables.*

Or, le tracé de ces triangles sur le terrain, exige divers *instruments*, savoir : des *jalons* pour y tracer des droites et marquer leurs intersections ; la *chaîne*, accompagnée de *fiches*, pour mesurer les droites accessibles ; l'*équerre* pour former l'angle droit ; enfin la *fausse équerre*, pour tracer deux angles obliques supplémentaires. Assez ordinairement l'équerre est subdivisée en demi-angles droits : il serait même commode, pour certaines opérations, que l'angle droit fût divisé en deux autres de 30 et de 60 *degrés.* C'est ce qu'on réalise au moyen d'un cordeau *sans fin*, long de 18 mètres, par exemple, après qu'il est lié à quatre piquets, les trois premiers le divisant en trois parties de 6^m chacune et le quatrième piquet étant le milieu de l'une d'elles ; car le cordeau tendu et les piquets fixés sur le terrain, on y trouve les angles de 90, 60 et 30°.

4

Dans l'*arpentage*, l'équerre et la fausse équerre peuvent suffire, et on les préfère au *graphomètre*, comme plus faciles à se procurer ; mais le graphomètre est plus exact et d'un usage plus étendu : aussi remplace-t-il les deux autres instruments, quand il faut de plus grandes approximations.

2. Usages des jalons. On peut toujours tracer au moyen des jalons (accompagnés parfois de la fausse équerre), des droites ou *alignements*, avec exactitude et célérité ; tandis que le mesurage des droites et des angles exige beaucoup de temps et de soin : il demande des instruments de prix, souvent difficiles à acquérir et à transporter. C'est pourquoi, dans la *géométrie pratique*, on tâche de remplacer, par des alignements, les mesures à prendre avec des instruments gradués; et tel est spécialement le but de la théorie des *transversales rectilignes*. Par cette théorie, en effet, on résout aisément, sur le terrain *horizontal*, les problèmes que voici :

I. *Par un point donné, mener une droite qui passe par le concours invisible de deux droites tracées* ; comme pour percer, dans un bois, une allée qui aboutisse au point de jonction invisible de deux chemins, déjà pratiqués ; etc.

II. *Prolonger une droite au-delà d'un obstacle qui borne la vue.* Cet obstacle pourrait être un bois ou une montagne, qu'il faudrait percer par un chemin ou un *tunnel*; chaque fois il faudrait attaquer l'obstacle des deux côtés, pour aller plus vite ; et chaque fois aussi on pourrait avoir besoin de connaître, à l'avance, la longueur de la percée. Or, la construction, pour le prolongement, conduirait au calcul de cette longueur, à l'aide de deux autres, qu'il faudrait mesurer le plus exactement possible. (Voyez la Géométrie, 2e édit.)

Observez d'ailleurs que les jalons sont indispensables, dans toutes les opérations sur le terrain.

3. Usages de la chaîne. La chaîne d'arpenteur, accompagnée de *fiches* et de jalons, n'est pas seulement nécessaire pour évaluer numériquement toute droite accessible *jalonnée;* mais à l'aide des propriétés des triangles rectangles, obliquangles et semblables, elle peut suppléer à l'équerre et à la fausse équerre pour résoudre les problèmes que voici :

I. Par un point donné tracer une parallèle à une droite, accessible seulement par ses extrémités et calculer la longueur de cette droite.

II. Par un point donné sur une droite jalonnée, élever une perpendiculaire à cette droite.

III. D'un point situé hors d'une droite, abaisser une perpendiculaire à cette droite et calculer la longueur de cette perpendiculaire, quand son pied est inaccessible.

IV. Enfin calculer la hauteur d'un édifice dont le pied est inaccessible.

Dans ce problème, comme dans les précédents, les erreurs se multiplient, et il importe que les tracés et les nombres, fournis par le mesurage direct, soient les plus approchés qu'il se puisse.

4. Usages de la fausse équerre. Voici plusieurs des usages nombreux de la fausse équerre, toujours accompagnée de jalons et souvent de la chaîne :

I. Prolonger une droite au-delà d'un obstacle qui borne la vue sur le terrain ; 1° en prenant deux longueurs égales; 2° sans mesurer aucune longueur.

II. Prolonger une droite donnée d'un certain multiple de cette droite, sans mesurer aucune longueur.

III. Avec la seule fausse équerre et des jalons, abaisser d'un point donné, qui pourrait être inaccessible, une perpendiculaire à une droite donnée.

IV. Par un point donné sur une droite jalonnée, élever une perpendiculaire à cette droite, avec la seule fausse équerre et des jalons.

V. La seule fausse équerre et des jalons suffisent pour marquer, sur le terrain, la bissectrice de l'angle dont le sommet est inaccessible et même invisible.

VI. On peut calculer la longueur d'une droite dont les deux extrémités sont visibles et une seule accessible, à l'aide des deux angles supplémentaires de la fausse équerre, faits aux extrémités d'une droite passant par l'extrémité accessible proposée : il y aura trois longueurs à mesurer directement sur le terrain. La même construction servirait à calculer la longueur d'une droite visible et entièrement inaccessible; mais alors il y aurait quatre droites à mesurer directement.

VII. Il faut la fausse équerre, des jalons et la chaîne, pour mesurer trois droites, dans chacun des trois problèmes que voici : 1° Calculer la position de la parallèle menée par un point inaccessible à une droite entièrement abordable; 2° calculer la longueur d'une droite dont une seule extrémité soit accessible ; 3° enfin, calculer la longueur d'une droite entièrement inaccessible.

Dans les deux derniers problèmes, on détermine une parallèle accessible à la droite inaccessible qu'il faut mesurer. Bien que les solutions soient fort simples et puissent donner des résultats suffisamment approchés, moyennant les soins convenables, le degré de l'approximation reste toutefois inconnu. On préfère, dans ce cas, se servir du graphomètre et recourir au *calcul trigonométrique*, où les causes d'erreurs sont moins nombreuses, parce que les données de la question y sont réduites au plus petit nombre possible.

De la Résolution numérique des triangles rectilignes.

5. Lorsque deux angles du triangle *scalène* sont donnés, le troisième est connu ; les trois angles ne peuvent donc compter que pour deux *données*, et pour une seule ou pour aucune, si le triangle est *rectangle* ou *isocèle*, ou s'il est *équilatéral*. Les *éléments générateurs* du triangle scalène sont : deux angles, les trois côtés, le périmètre, les trois hauteurs, le rayon du cercle inscrit, celui du cercle circonscrit et ceux des trois cercles exinscrits ; ce qui fait déjà 14 éléments générateurs ou *descriptifs* du triangle. Et comme, en général, la connaissance de trois éléments distincts suffit pour déterminer le triangle scalène, on voit qu'*étant donnés trois quelconques des 14 éléments ci-dessus, la détermination graphique ou numérique du triangle fournit 354 problèmes différents*, du moins en apparence ; car plusieurs de ces problèmes peuvent *rentrer les uns dans les autres*, ou être *indéterminés* ou *impossibles*, suivant les valeurs particulières des données.

Ce nombre de problèmes serait bien plus élevé, si l'on faisait intervenir, comme éléments générateurs du triangle, les droites qui joignent les sommets aux milieux des côtés opposés, les bissectrices des trois angles, les segments qu'elles déterminent sur les côtés, etc. Mais, remarquons-le bien, il y a toujours plusieurs de ces problèmes qui rentrent les uns dans les autres ; et c'est ainsi qu'en se bornant aux cinq éléments générateurs, savoir : les trois côtés et deux angles, comme on le fait ordinairement en trigonométrie ; les dix problèmes généraux, pour la résolution numérique du triangle scalène, se réduisent à quatre, essentiellements différents.

Observons encore que plusieurs des 354 problèmes ci-dessus, bien que déterminés et possibles, ne peuvent se résoudre avec la règle et le compas, même en s'aidant du calcul, pour parvenir à la construction. Tel est, par exemple, le problème où, connaissant l'aire et les rayons des cercles inscrit et circonscrit, on cherche les côtés ; tel est aussi le problème où, le rayon du cercle inscrit et deux côtés étant donnés, on cherche le troisième côté. Mais le triangle se construit aisément quand on connaît un côté, le contact sur lui et le rayon du cercle inscrit, ou bien deux côtés et les contacts sur eux, etc.

Observons enfin que tous les problèmes, sur la résolution numérique des triangles rectilignes, dépendent plus ou moins immédiatement de celui-ci : *Connaissant numériquement deux côtés et l'angle compris, résoudre le triangle.*

On a plusieurs solutions de ce problème, où il faut rendre les formules calculables par logarithmes ; mais comme les deux plus simples ne sont pas aussi généralement connues qu'elles méritent de l'être, nous allons les développer ici, d'après le *principe des projections ;* lequel peut fournir toutes les relations de la trigonométrie.

I. Nous désignerons toujours par les grandes lettres A, B, C, les trois angles du triangle ABC, et par les petites lettres a, b, c, les côtés respectivement opposés à ces angles. Ainsi A, B, C, sont les valeurs numériques en degrés, minutes et secondes, des angles proposés; tandis que a, b, c, sont les rapports des côtés à l'unité linéaire, au mètre, par exemple.

La résolution des triangles, où les angles sont représentés par les *lignes trigonométriques*, a pour but de trouver des relations entre quatre des six nombres A, B, C, a, b, c, et surtout de rendre ces relations *calculables par logarithmes*, si elles ne le sont pas.

Ces relations sont nécessairement *homogènes*, puisqu'elles se composent uniquement de droites censées divisées par l'unité linéaire u et par le rayon R des tables, pour les lignes trigonométriques. Le rayon R vaut 10^{10}; mais pour simplifier, on suppose ordinairement $R = 1 = u$. De cette manière, les relations ne sont plus toutes homogènes, du moins en apparence; mais comme chaque ligne trigonométrique est toujours censée divisée par R, il suffit, pour établir l'homogénéité, de faire reparaître ce diviseur R, ou plutôt de l'introduire un nombre de fois suffisant, comme facteur, dans chaque terme de degré inférieur.

II. Cela posé, soit h la hauteur menée du sommet A sur la base a, et t l'aire du triangle ABC, d'où $t = \frac{1}{2} ah$; soient b' et c' les projections des côtés b et c, déterminées sur a par la droite projetante h : b' et c' sont adjacentes aux angles C et B; et suivant que l'angle B est aigu ou obtus, on a $a = c' + b'$ ou $a = b' - c'$. Dans le premier cas, $b' = b \cos C$ et $c' = c \cos B$, d'où $a = b \cos C + c \cos B$; dans le second cas, $b' = b \cos C$ et $c' = c \cos (180° - B)$, d'où $a = b \cos C - c \cos (180° - B)$. Le premier cas fournit le second en changeant cos B en $-\cos (180° - B)$; de sorte qu'il nous suffira de considérer la relation

$$a = b \cos C + c \cos B, \ldots \quad (1)$$

pourvu que quand l'angle B est obtus on y change cos B en $-\cos (180° - B)$.

Comme h est aussi la projection de b ou de c sur sa direction, on a simultanément $h = b \sin C = c \sin B$, et cela quand même l'angle B serait obtus. On aurait de même, $b \sin A = a \sin B$; donc

$$a : \sin A = b : \sin B = c : \sin C \ldots \quad (2)$$

De plus, il est clair qu'on a, pour le double de l'aire t,

$$2t = ab \sin C = ac \sin B = bc \sin A \ldots \quad (3)$$

III. Si le triangle ABC est rectangle en A, d'où $\sin A = 1$, on aura simultanément

$$b' = b \cos C,\ c' = c \cos B,\ b = a \cos C,$$

$$c = a \cos B, \; h = b \cos B \text{ et } h = c \cos C.$$

Eliminant donc les cosinus et observant que $b' + c' = a$, il vient

$$b^2 = ab', \; c^2 = ac', \; h^2 = b'c' \text{ et } b^2 + c^2 = a^2 \ldots \quad (4)$$

Par ces relations et $ah = bc$, étant données deux quelconques des six droites numériques a, b, c, b', c', h, on peut toujours calculer les quatre autres.

On conçoit que ce problème général peut en fournir un grand nombre d'autres, selon les conditions particulières; ainsi d'après les choix des inconnues et des méthodes d'élimination, on peut calculer les trois côtés a, b, c, dans les huit systèmes particuliers que voici, où $p = a + b + c$:

$b' = 20$ et $c' = 5$;	$a + h = 31,72$ et $p = 56$;
$a = 25$ et $b + c + h = 37,72$;	$bc = 120$ et $p = 40$;
$b + c = 7$ et $h = 2,4$;	$a - h = 16,28$ et $b - c = 17$;
$a = 13$ et $ah = 60$;	$h = 4,8$ et $p = 24$.

On peut aussi chaque fois calculer les angles B et C; car on a les deux relations

$$\left.\begin{array}{l} b = a \sin B = a \cos C, \\ b = c \operatorname{tang} B = c \cot C. \end{array}\right\} \ldots \quad (5)$$

Enfin si a était donné numériquement, aussi bien que m dans $m^2 = bh$, le côté c serait racine de l'équation

$$c^3 - a^2 c + am^2 = 0;$$

laquelle, pour $a = 5$ et $m^2 = 9,6$, devient $(c-3)(c^2 + 3c - 16) = 0$.

IV. Reprenons les relations (1) et (2), que l'on peut écrire ainsi :

$$c \cos B = a - b \cos C \text{ et } c \sin B = b \sin C.$$

Elevant de part et d'autre au carré, puis ajoutant membre à membre, et réduisant d'après $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, il vient

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \ldots \quad (6)$$

Cette relation s'applique au cas où l'angle C est obtus en y changeant $\cos C$ en $-\cos(180° - C)$. D'ailleurs $b' = b \cos C$; donc

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab' :$$

c'est la relation que l'on démontre ordinairement par la simple géométrie, et une seconde expression du théorème (6). Ce théorème fournissant trois équations entre les six parties du triangle, suffit pour calculer trois quelconques de ces parties, les trois autres étant données numériquement. Mais les formules résultantes ne sont pas toujours *logarithmiques* ni les plus simples, même en se servant d'*inconnues auxiliaires*, comme pour calculer c lorsque a, b, C sont donnés. D'ailleurs la connaissance des trois angles ne peut compter que pour deux choses données; mais si alors le problème doit être indéterminé, on peut toujours du moins calculer les rapports x et y, dans $a = cx$ et $b = cy$. Substituant en effet dans l'équation (1) et ses deux analogues, il en résulte

$$y \cos A + x \cos B = 1,$$
$$y - x \cos C = \cos A,$$
$$x - y \cos C = \cos B.$$

Ces trois équations du premier degré donnent aisément

$$x \sin^2 C = \cos A \cos C + \cos B,$$
$$y \sin^2 C = \cos B \cos C + \cos A,$$
$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1 \ldots (7')$$

De plus, $x = a : c = \sin A : \sin C$ et $y = b : c = \sin B : \sin C$. D'ailleurs $-\cos B = \cos (A + C)$; donc

$$\cos (A + C) = \cos A \cos C - \sin A \sin C \ldots (7)$$

On est donc ainsi conduit à l'une des quatre formules fondamentales de la trigonométrie. Il est facile d'en déduire les trois autres en y changeant A en $90° - A$, d'où

$$\sin (A - C) = \sin A \cos C - \sin C \cos A;$$

puis en changeant C en $-$ C dans cette formule et la première (7).

V. Cherchons maintenant les formules *logarithmiques* qui se présentent d'abord pour résoudre le triangle dont on connaît numériquement les deux côtés a et b, avec l'angle compris C.

Menant du sommet A la hauteur h et désignant par b' et c' les projections des côtés b et c sur la base a, on aura évidemment

$$c' = a - b',\ b' = b \cos C,\ h = b \sin C,$$
$$h = c' \operatorname{tang} B,\ a \sin B = b \sin A \text{ et } t = \tfrac{1}{2} ab \sin C.$$

Ainsi en faisant reparaître le diviseur R, on aura

$$\left.\begin{array}{l} c' = a - b',\ \mathrm{R}b' = b \cos C,\ \mathrm{R}h = b \sin C, \\ \mathrm{R}h = c' \operatorname{tang} B \text{ et } 2\mathrm{R}t = ab \sin C. \end{array}\right\} \ldots (8)$$

Toutes ces formules homogènes sont calculables par logarithmes : la première $c' = a - b'$, qui devient $c' = a + b'$ quand l'angle C est obtus, fait connaître c' au moyen de b', déterminé par la seconde; la troisième fait connaître h; la quatrième, tang B et par suite l'angle B; d'où il vient l'angle $A = 180° - B - C$; enfin, la dernière détermine l'aire t. Ainsi sans compter l'aire t, déjà donnée par $t = \frac{1}{2} ah$, *il ne faut ouvrir les tables que six fois*, pour résoudre le triangle, dans ce cas. La vérification des calculs peut se faire par $b^2 = b'^2 + h^2$, ou par $a \sin B = b \sin A$, etc.

Cette solution, directe et très-simple, n'est pas indiquée dans les traités de trigonométrie : elle a été donnée par les élèves couronnés à Bruxelles au concours général des colléges, en 1841. Quoique cette marche soit la plus naturelle, elle n'est cependant pas la plus simple pour résoudre le problème proposé : il existe, pour cet effet, des formules logarithmiques, *dont le calcul exige qu'on ouvre seulement les tables cinq fois*. Il est surprenant que ces formules, indiquées, sans démonstrations, dans le *Bulletin des sciences mathématiques*, etc., mars 1831, ne soient pas généralement enseignées. Déjà nous les avions indiquées en 1830, puis appliquées en 1835, dans la 2e édition du traité de géométrie. Mais on peut les démontrer plus simplement, à l'aide du principe des projections, comme il suit :

VI. Considérons le triangle quelconque ABC (fig. à tracer ; chose facile). Les deux côtés a et b, avec l'angle compris C, étant donnés numériquement, soient d et e les longueurs des bissectrices de l'angle C et de l'angle extérieur supplémentaire, depuis le sommet C jusqu'aux points D et E où elles coupent BA ou c et son prolongement ; de sorte que $CD = d$ et $CE = e$. Il est clair que ces deux bissectrices sont perpendiculaires entre elles et qu'ainsi l'angle E est complément de l'angle $CDE = x$, et l'angle $ACE = 90° - \frac{1}{2}C$. De plus, projeter le côté AB ou c sur la direction CD, c'est en même temps y projeter les côtés b et a ; si donc l'angle $A > B$, d'où le côté $a > b$, il est clair que la projection du côté c sur CD, savoir $c \cos x$, est la différence des projections des côtés a et b sur CD, savoir $a \cos \frac{1}{2}C$ et $b \cos \frac{1}{2}C$. On a donc

$$c \cos x = (a - b) \cos \tfrac{1}{2}C \ldots \quad (9)$$

La projection du côté c sur la direction EC est $c \cos E$ ou $c \sin x$, tandis que les projections des côtés a et b sur EC sont $a \cos (90° - \frac{1}{2}C)$ et $b \cos (90° - \frac{1}{2}C)$ ou $a \sin \frac{1}{2}C$ et $b \sin \frac{1}{2}C$. Il est clair d'ailleurs que la projection de c est la somme des deux autres ; donc

$$c \sin x = (a + b) \sin \tfrac{1}{2}C \ldots \quad (10)$$

L'angle x étant extérieur au triangle CBD, on a $x = B + \frac{1}{2}C$; et puisque l'angle x est aigu, il en est de même de l'angle B. Substituant cette valeur de x, puis divisant (9) par (10), il vient les formules cherchées :

$$\left.\begin{aligned} c \cos (B + \tfrac{1}{2}C) &= (a - b) \cos \tfrac{1}{2}C, \\ c \sin (B + \tfrac{1}{2}C) &= (a + b) \sin \tfrac{1}{2}C, \\ (a + b) \cot (B + \tfrac{1}{2}C) &= (a - b) \cot \tfrac{1}{2}C. \end{aligned}\right\} \ldots \quad (11)$$

Toutes ces formules homogènes sont logarithmiques : la troisième fait connaître l'angle $B + \frac{1}{2}C = x$ et par suite l'angle $B = x - \frac{1}{2}C$; d'où l'angle $A = 180° - B - C$. Et comme les logarithmes du sinus, du cosinus, de la tangente et de la cotangente se trouvent dans la même page des tables, il aura fallu ouvrir celles-ci 4 fois, pour avoir x ; et il ne faudra plus les ouvrir qu'une fois, pour avoir c, par l'une des deux premières formules (11); lesquelles fournissent un moyen de vérification, puisqu'elles doivent donner la même valeur à c.

Cette solution étant la plus simple et par conséquent la plus exacte, doit être préférée à toutes les autres, où il faut ouvrir les tables 7 ou 8 fois. Prenons par exemple, le principe ordinairement employé, et pour établir ce principe, observons que $\frac{1}{2}C = 90° - \frac{1}{2}(A + B)$; d'où $B + \frac{1}{2}C = 90° - \frac{1}{2}(A - B)$ et $\cot(B + \frac{1}{2}C) = \text{tang}\,\frac{1}{2}(A - B)$. La troisième formule (11) devient donc

$$a + b : a - b :: \cot \tfrac{1}{2} C : \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A - B).$$

Par cette proportion, les tables font connaître la demi-différence n des angles A et B, d'où $\frac{1}{2}(A - B) = n$: on connaît déjà leur demi-somme $s = 90° - \frac{1}{2}C$, d'où $\frac{1}{2}(A + B) = s$; on aura donc $A = s + n$ et $B = s - n$.

Connaissant ainsi les trois angles, on trouvera le troisième côté c par la proportion $\sin A : \sin C :: a : c$; ainsi il faudra ouvrir 8 fois les tables.

Ce procédé est donc le plus compliqué et celui où les causes d'erreurs sont les plus nombreuses. Si la détermination de n était inexacte, l'erreur se détruirait en ajoutant les trois angles ; mais les proportions des sinus donneraient deux valeurs différentes au côté c. Cette vérification exigerait qu'on ouvrît les tables onze fois en tout ; tandis que par les deux bissectrices, la vérification de c demande seulement 6 fois l'ouverture des tables.

VII. On peut aussi calculer les deux bissectrices d et e ; car il existe deux couples de triangles rectangles semblables, dont la comparaison des côtés homologues fournit

$$a \sin \tfrac{1}{2} C : b \sin \tfrac{1}{2} C :: a \cos \tfrac{1}{2} C - d : d - b \cos \tfrac{1}{2} C,$$
$$a \cos \tfrac{1}{2} C : b \cos \tfrac{1}{2} C :: e + a \sin \tfrac{1}{2} C : e - b \sin \tfrac{1}{2} C.$$

De là résultent les deux formules logarithmiques

$$\left.\begin{aligned} (a + b)\, d &= 2ab \cos \tfrac{1}{2} C, \\ (a - b)\, e &= 2ab \sin \tfrac{1}{2} C. \end{aligned}\right\} \dots (12)$$

Ces formules conduisent à résoudre le triangle, connaissant les deux côtés a et b, avec l'une des deux bissectrices d ou e. Mais si l'on connaissait numériquement les deux bissectrices d et e, avec l'angle C, on pourrait aussi résoudre le triangle ; car outre $d\ \text{tang}\, x = eR$, on aurait $b \sin(x + \frac{1}{2} C) = d \sin x$, etc.

VIII. Ajoutant membre à membre les carrés des équations (9) et (10), on trouve

$$c^2 = (a - b)^2 \cos^2 \tfrac{1}{2} C + (a + b)^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} C.$$

Cette relation, comparée au théorème (6), donne

$$\cos C = \cos^2 \tfrac{1}{2} C - \sin^2 \tfrac{1}{2} C \dots (13)$$

Substituant successivement, dans l'expression de c^2, les valeurs $1 - \cos^2 \frac{1}{2} C$ et $1 - \sin^2 \frac{1}{2} C$ de $\sin^2 \frac{1}{2} C$ et $\cos^2 \frac{1}{2} C$; réduisant, transposant et décomposant en facteurs ; posant d'ailleurs $a + b + c = 2p$ et faisant reparaître le diviseur R, on aura les formules logarithmiques connues :

$$\left.\begin{aligned} ab\sin^2\tfrac{1}{2}C &= R^2(p-a)(p-b),\\ ab\cos^2\tfrac{1}{2}C &= R^2p(p-c);\\ p(p-c)\,\mathrm{tang}^2\tfrac{1}{2}C &= R^2(p-a)(p-b). \end{aligned}\right\}\ \ldots\ (14)$$

Ces formules et la dernière, de préférence, servent à calculer les trois angles, connaissant numériquement les trois côtés. Et comme alors $\sin C = 2\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C$, il vient, pour l'aire t du triangle et pour les bissectrices d et e,

$$\left.\begin{aligned} t^2 &= p(p-a)(p-b)(p-c),\\ (a+b)^2d^2 &= abp(p-c),\\ (a-b)^2e^2 &= ab(p-a)(p-b). \end{aligned}\right\}\ \ldots\ (15)$$

Combinant par multiplication et par division les valeurs de $\mathrm{tang}^2\frac{1}{2}A$ et $\mathrm{tang}^2\frac{1}{2}B$, on trouve, réductions faites,

$$\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}A = \frac{a+b-c}{a+b+c}\cot\tfrac{1}{2}B = \frac{c+(a-b)}{c-(a-b)}\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}B.$$

Connaissant donc numériquement l'angle B, le côté c et la somme ou la différence des deux autres côtés, cette double formule servira à résoudre le triangle proposé.

Problèmes déterminés.

6. La trigonométrie et l'emploi des tables fournissent, de la manière la plus simple et la plus exacte, la solution de tout *problème déterminé* de géométrie numérique, en diminuant les causes d'erreurs, et en réduisant au plus petit nombre possible les *données* de la question. C'est ce qu'on peut remarquer *dans le calcul de la distance entre deux objets inaccessibles*, problème qui reçoit divers énoncés et où les formules (11) jouent un rôle important; c'est aussi ce qu'on remarque dans les problèmes déterminés que nous allons indiquer.

I. *Quatre objets inaccessibles* A, B, C, D, *sont en ligne droite et ne peuvent être vus que du seul point* O, *où l'on se trouve; comment calculer la distance* BC = z, *connaissant les longueurs* AB = a *et* CD = b?

Tel est le *problème des cinq points*, où l'inconnue z est donnée par une équation du second degré et où il faut une inconnue auxiliaire, pour appliquer le calcul logarithmique.

II. *Réduire à un seul terme la somme algébrique de quatre sinus ou de quatre cosinus.* Ce problème, déjà traité par M. *Cauchy*, fournit quatre formules entre les trois angles quelconques a, b, c. On peut y parvenir par les quatre formules fondamentales de la trigonométrie; et si l'on pose $a+b+c=s$, on trouvera

$$\begin{aligned} &\sin(s-2c)+\sin(s-2b)+\sin s-\sin(s-2a) = 4\sin a\cos b\cos c,\\ &\sin(s-2c)+\sin(s-2b)+\sin(s-2a)-\sin s = 4\sin a\sin b\sin c,\\ &\cos(s-2c)+\cos(s-2b)+\cos(s-2a)-\cos s = 4\cos a\cos b\cos c,\\ &\cos(s-2c)+\cos(s-2b)-\cos(s-2a)-\cos s = 4\cos a\sin b\sin c. \end{aligned}$$

Ces formules s'appliquent aux trois angles d'un triangle; à leurs doubles et à leurs moitiés; mais on peut vérifier directement les systèmes de formules qui en résultent et en déduire d'autres remarquables.

III. *Développer tang* S *et cot* S *ou les exprimer au moyen des tangentes et des cotangentes des trois angles* a, b, c. Les développements s'appliquant aux trois angles d'un triangle; à leurs doubles et à leurs moitiés, à leurs triples et à leurs tiers, etc. Il en résulte plusieurs formules remarquables et utiles à certaines réductions analytiques.

IV. *On peut trouver quelle est la ligne trigonométrique* x *dans chacune des équations :*

$(\tang a + \cot a - 2 \sin 2a)\, x = 2 \cos 2a$;
$9x^2 = 9 + 4 \cos^2 a$; $(1 - \tang^2 a)\, x^2 = \cos 2a$;
$(\text{séc}^2 a - \text{coséc}^2 a + 4 \,\text{coséc}^2 2a)\, x = 2 \,\text{séc}\, a$;
$x \cos 2a = \cot a - \tang a - \cot 2a$; $4x^2 = 3 + \text{séc}^2 a$;
$2x = \tang a + \cot a - 2 \cos 2a$; $\sin 30^\circ + x \cos 30^\circ = 1$;
$x \cos a - \sin a = 1$; $x \tang a - 1 = \text{séc}\, a$;
$x^2 \cot a - \tang a = \cot a$; $3x \cos a - \text{coséc}\, a = \cos a \,\text{séc}\, 2a$.

V. *On peut résoudre le triangle dont on connait les trois angles et le rayon* r *du cercle circonscrit ou l'un des rayons des cercles inscrit et exinscrits.* Dans le premier cas, on a simultanément

$$a = 2r \sin A,\ b = 2r \sin B,\ c = 2r \sin C;$$
$$t = 2r^2 \sin A \sin B \sin C \text{ et } 4rt = abc.$$

Soit r' le rayon du cercle inscrit : on a d'abord

$$a = r'(\cot \tfrac{1}{2} B + \cot \tfrac{1}{2} C);$$

et ensuite

$$r' \cos \tfrac{1}{2} A = a \sin \tfrac{1}{2} B \sin \tfrac{1}{2} C.$$

Cela donne

$$r' \cos \tfrac{1}{2} B = b \sin \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} C,$$
$$r' \cos \tfrac{1}{2} C = c \sin \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} B,$$
$$r' = 4r \sin \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} B \sin \tfrac{1}{2} C.$$

Soient a', b', c', les rayons des cercles exinscrits aboutissant respectivement aux trois côtés a, b, c. Il est aisé de voir que

$$a = a'(\tang \tfrac{1}{2} B + \tang \tfrac{1}{2} C).$$

De là et de ce qui précède, on tire les quatre systèmes :

$a' \cos \frac{1}{2} A = a \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C$	$a' = 4r \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C$
$b' \cos \frac{1}{2} B = b \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} C$	$b' = 4r \sin \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} C$
$c' \cos \frac{1}{2} C = c \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B$	$c' = 4r \sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B$
$a' = r' \cot \frac{1}{2} B \cot \frac{1}{2} C$	$t = r'^2 \cot \frac{1}{2} A \cot \frac{1}{2} B \cot \frac{1}{2} C$
$b' = r' \cot \frac{1}{2} A \cot \frac{1}{2} C$	$t = a'^2 \cot \frac{1}{2} A \tang \frac{1}{2} B \tang \frac{1}{2} C$
$c' = r' \cot \frac{1}{2} A \cot \frac{1}{2} B$	$t = b'^2 \cot \frac{1}{2} B \tang \frac{1}{2} A \tang \frac{1}{2} C$.

Connaissant b', c' et r, on aura les trois angles par

$$2r \cos A = b' + c' - 2r \text{ et } 4r \cos \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2}(B - C) = c' - b'.$$

Connaissant a, r et r', on aura les trois angles par

$a=2r\sin A$, $a\cot v=2r'$ et $\sin v\cos\frac{1}{2}(B-C)=\cos(v+\frac{1}{2}A)$.

La bissectrice d de l'angle C est donnée par

$$\cos\tfrac{1}{2}(A-B)\,d=r\sin A\sin B.$$

VI. On a des formules pour calculer la somme algébrique des sinus et des cosinus, soit des trois angles du triangle, soit de leurs doubles ou de leurs moitiés. Par ces formules, si f, g, h sont les distances du centre du cercle circonscrit aux trois côtés a, b, c, d'où

$$f=r\cos A\ ,\ g=r\cos B \text{ et } h=r\cos C\ ;\ \ldots\ (16)$$

on trouve les dix relations que voici, expressions d'autant de théorèmes, faciles à énoncer :

$$f+g+h=r+r'\ ,\ g+h-f=a'-r,$$
$$f+h-g=b'-r\ ,\ f+g-h=c'-r,$$
$$a'+b'+c'=r'+4r,\ a'+b'-c'=4h-r',$$
$$a'+c'-b'=4g-r',\ b'+c'-a'=4f-r',$$
$$1:a'+1:b'+1:c'=1:r' \text{ et } t^2=a'b'c'r'.$$

Substituant dans la formule (7′) les valeurs des trois cosinus, tirées de (16), il vient pour calculer le rayon r, l'équation

$$r^3-(f^2+g^2+h^2)\,r-2fgh=0.\ \ldots\ (17)$$

Cette équation n'ayant qu'une seule racine réelle positive, il n'existe qu'un seul triangle, dans lequel les distances f, g, h soient données et positives ; mais le rayon r et par suite le triangle ne peut se construire que quand deux des trois distances sont égales entre elles, ou bien pour les valeurs particulières de ces distances, qui rendent le rayon r rationnel.

VII. Soient k, m, n les distances du centre du cercle inscrit aux sommets A, B, C ; on aura

$$r'=k\sin\tfrac{1}{2}A,\ r'=m\sin\tfrac{1}{2}B \text{ et } r'=n\sin\tfrac{1}{2}C\ldots\ (18)$$

mais $\cos A+\cos B+\cos C-1=4\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C$ donne

$$\sin^2\tfrac{1}{2}A+\sin^2\tfrac{1}{2}B+\sin^2\tfrac{1}{2}C+2\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C=1.$$

Substituant donc les valeurs des sinus des demi-angles, tirées de (18), et posant 1 sur $r'=x$, 1 sur $k=K$, 1 sur $m=M$ et 1 sur $n=N$, il vient

$$x^3-(K^2+M^2+N^2)\,x-2\,KMN=0\ldots(19)$$

Cette équation, complétement analogue à l'équation (17), ne peut se résoudre généralement que quand $m=n$, par exemple. On a d'ailleurs

$$4rr'^2=kmn.$$

Ce qui est remarquable, c'est que l'équation (19) s'applique exactement aux distances k, m, n de l'un des centres des trois cercles exinscrits.

VIII. On aurait encore une équation du 3ᵉ degré pour calculer la corde x du tiers de l'arc dont $2q$ est la corde, dans le cercle de rayon r. Les triangles semblables donnent, en effet,

$$x^3-3r^2x+2qr^2=0.$$

Cette équation peut se résoudre généralement, 1° lorsque $q = 0$, 2° quand $q = r$. Dans tous les autres cas, l'équation ne peut se résoudre que par approximation ; mais avec un bon compas, x peut toujours se trouver *en tâtonnant*, et donner une approximation suffisante.

Soit x le côté du polygone régulier de 14 côtés inscrit dans le cercle dont r est le rayon : par des triangles isocèles et semblables, on trouve, pour calculer x, l'équation

$$x^3 - rx^2 - 2r^2 x + r^3 = 0.$$

Ici encore il est préférable de tâtonner avec le compas, comme pour le polygone régulier inscrit de 18 côtés, dont le côté x est donné par

$$x^4 + rx^3 - 2r^2 x^2 - 2r^3 x + r^4 = 0.$$

IX. La connaissance des trois angles et du rayon r du cercle circonscrit au triangle t, suffit pour résoudre les quatre triangles qui joignent les centres des quatre cercles inscrit et exinscrits à t. Il en résulte que, 1° le rayon de l'une quelconque des circonférences circonscrites à ces quatre triangles est égal à $2r$; 2° si des centres des cercles exinscrits, on abaisse des perpendiculaires sur les côtés de t et non sur leurs prolongements, ces perpendiculaires vont se couper au centre du cercle circonscrit au triangle t' joignant les trois centres proposés ; 3° les centres des trois cercles circonscrits aux trois autres triangles sont les intersections, deux à deux, des perpendiculaires abaissées des sommets de t' sur les prolongements des côtés de t ; 4° ces six perpendiculaires sont côtés, égaux à $2r$, d'un hexagone symétrique équivalent à $2t'$; 5° si p désigne le demi-périmètre du triangle t', on aura $t' = 2pr$; 6° la somme des distances du centre du cercle inscrit dans t aux sommets de t' est double de la somme des rayons des cercles inscrit et circonscrit à t' ; et il existe encore plusieurs autres relations remarquables, faciles à découvrir, d'après ce qui précède.

X. Il arrive parfois qu'une équation, contenant plusieurs lignes trigonométriques d'un même arc, suffit pour déterminer cet arc et l'exprimer en degrés ; d'où résulte sa longueur en unités rectilignes lorsque son rayon r est donné numériquement. Il faut pouvoir alors transformer l'équation de telle sorte qu'elle se réduise à une seule ligne trigonométrique et des nombres connus ; et si l'on se rappelle la valeur de cette ligne pour les angles de 30, 60 et 45°, on trouvera, sans le secours des tables, la valeur de l'angle a, dans chacune des équations que voici :

$\text{tang}\, a \,\text{tang}\, \frac{1}{2} a = 1$	$\cot a \cot \frac{1}{2} a = 1$
$2 \sin a \,\text{tang}\, \frac{1}{2} a = 1$	$2 \sin a \cot \frac{1}{2} a = 1$
$2 \sin a \,\text{séc}\, \frac{1}{2} a = 3$	$2 \sin a \,\text{coséc}\, \frac{1}{2} a = 3$
$2 \sin a \pm 2 \cos a = \sqrt{2}$	$2 \sin a + 2 \,\text{coséc}\, a = 5$
$2 \cos a + 2 \,\text{séc}\, a = 5$	$\text{séc}\, a + \text{coséc}\, a = 2\sqrt{2}$
$\text{tang}\, a + \cot a = 2\sqrt{2}$	$\text{coséc}^2 a - \text{séc}^2 a = 2\sqrt{2}$

$\text{séc}^2 a + \text{coséc}^2 a = 8$	$2 \sin^2 a - 2 \cos^2 a = -\sqrt{3}$
$2 \sin a \text{ tang } a - 2 \text{ séc } a = \sqrt{3}$	$2 \text{ coséc } a - 2 \cos a \cot a = 1$
$\text{tang } a - \sin a \cos a = \sin^2 a$	$\cot a - \sin a \cos a = \cos^2 a.$

XI. Non seulement on peut construire l'arc x dans l'équation

$$\text{séc}^2 x + \text{coséc}^2 x - 4 = 4 \cot 2x \sqrt{3} ;$$

mais de plus x est indépendant de a, b, c, dans le système :

$$2 \text{ tang } a = \text{tang } b, \ \sin a = \sin b \sin c,$$

$$[\sin b \cos a \pm \sqrt{(\sin^2 b - \sin^2 a)}] \text{ tang } x = \sin a \cos b.$$

On trouve, en effet, $2 \sin 2x = 1$; d'où $2x = 30^\circ$ et $2x = 150^\circ$.

La seconde des trois équations proposées serait l'équation *auxiliaire*, qu'il faudrait poser pour calculer x, au moyen des deux autres. En général, *c'est par des équations auxiliaires que l'on peut calculer les binomes dont les termes ne sont donnés que par leurs logarithmes*, comme dans

$$x = \sin A \pm n \cos B \sin A \ldots (20)$$

Il faudra, pour le signe $+$, prendre $\text{tang}^2 v = n \cos B$, et pour le signe $-$, on posera $\cos^2 v = n \cos B$, si le second membre est plus petit que l'unité. Mais si $n \cos B > 1$, on fera $1 + \text{tang}^2 z = n \cos B$; et alors x sera négatif : cela revient à poser $n \cos B = \text{séc}^2 z$.

Dans $x = \sin A \pm n \cos A$, l'équation auxiliaire est $\text{tang } v = n$. Mais si $x = \text{tang } A \pm n \cot A$, il y aura, pour le signe $-$, deux cas à distinguer, comme pour (20). On peut aussi traiter $x = \text{séc } A \pm n \text{ coséc} A$.

Dans chacun de ces derniers exemples, si x est donné numériquement, aussi bien que le coefficient n, on pourra calculer l'angle A, aussi bien que dans $x = \text{tang } A \pm n \text{ tang } B$, si l'angle B est connu.

XII. Lorsqu'un angle est déterminé par son sinus, son cosinus, sa tangente ou sa cotangente, il a toujours deux valeurs, s'il ne doit pas surpasser 360°. Si donc un problème doit avoir deux ou quatre solutions, lorsque les données et les inconnues sont des droites numériques, ce qui suppose une équation finale du second ou du quatrième degré ; il sera avantageux de se servir des angles, comme choses données et inconnues, non seulement parce que l'équation finale s'abaissera alors au premier ou au second degré ; mais surtout parce que le calcul de l'inconnue sera plus simple et plus exact, en recourant s'il est nécessaire à des angles auxiliaires.

Par exemple, *un point étant donné sur la bissectrice de l'un des angles* 2a, *formés par deux droites qui se coupent, et à la distance* d *de leur intersection, sommet de* 2a ; *si l'on veut mener par ce point, une droite telle que sa portion entre les deux droites proposées, ait la longueur connue* c ; on reconnaît d'abord que le problème est susceptible de quatre solutions.

Prenant donc pour inconnue l'angle x, compris entre d et la première partie de c, on trouve aisément

$$\frac{d \sin a}{\sin (x + a)} + \frac{d \sin a}{\sin (x - a)} = c.$$

Posant $d = cn$ et $\cot v = n \cos a$, l'équation proposée, du second degré en $\sin x$, donne, réductions faites,

$$\sin x = \sin a \cot \tfrac{1}{2} v \text{ et } \sin x = - \sin a \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v.$$

Il est donc facile de calculer et d'interpréter les quatre valeurs de x qui donnent les quatre solutions cherchées.

L'angle $2a$ peut valoir 60° ou 90° et tout autre nombre, moindre que 360°. Dans tous les cas, le *minimum* de c répond à $x = 90°$.

XIII. Les principes de la *géométrie analytique plane* conduisent aisément aux équations du problème proposé; mais alors l'équation finale est du quatrième degré et complète. Prenant en effet, les deux droites proposées pour axes des x et des y obliques; les coordonnées du point donné seront connues et égales à b; l'équation de la droite cherchée, passant par ce point, sera donc $y - b = n(x - b)$. Posant $v = \cos 2a$ et $c^2 = b^2 k$, l'équation finale en n sera

$$n^4 - 2(1 - v)n^3 - (k + 4v - 2)n^2 - 2(1 - v)n + 1 = 0.$$

C'est une *équation réciproque*, que l'on peut résoudre en divisant ses deux membres par n^2 et en posant $1 + 1$ sur $n = z$; etc.

Enfin, si x est la portion de l'axe des x entre c et l'ordonnée b, l'équation finale en x est

$$x^4 + 2b(1 - v)x^3 - (c^2 + 4b^2 v - 2b^2)x^2 + 2b^3(1 - v)x + b^4 = 0.$$

On voit la grande influence que peuvent exercer l'inconnue finale et la méthode d'élimination, sur le plus ou moins de facilité, et même sur la possibilité, de résoudre le problème de géométrie numérique proposé. Car si dans celui qui nous occupe, on prend pour inconnue la seconde partie y de c, troisième côté du triangle dont b et x sont les deux autres côtés, comprenant l'angle $2a$; l'équation finale, du 4e degré en y, se résoudra par *extraction de racine carrée.*

Si le point donné n'était pas situé sur la bissectrice de l'angle des deux axes obliques, mais que son abscisse k fût différente de son ordonnée b; l'équation finale, du 4me degré en n, ne serait plus réciproque. Dans ce cas, le *minimum* de la somme m des deux segments x' et y' interceptés sur les axes des x et des y, par la droite $y - b = n(x - k)$, répond à $x' - k = \sqrt{(kb)}$

XIV. Soit $AB = a$ une tangente en B à la circonférence de rayon r; on peut construire sur AB les points par lesquels menant des tangentes à la même circonférence, elles divisent en n parties égales à p la perpendiculaire AH sur AB. Si P est le point de AB, d'où la tangente va intercepter sur AH, la partie $AH' = pv$, on trouve

$$(2r - pv)\,AP = av - apv + r\sqrt{(a^2 - 2pvr + p^2v^2)}.$$

Si donc $AH = a = r = np$, il vient $(2n - v)\,AP = 2n(n - v)p$.

XV. Connaissant les trois angles A, B, C d'un triangle et le rayon du cercle inscrit, calculer, 1° l'aire du triangle qui joint les points de contact; 2° le rayon du cercle circonscrit au triangle proposé et l'aire de celui-ci; 3° l'aire du triangle formé en menant, par les sommets du proposé, des tangentes au cercle circonscrit et le rayon du cercle circonscrit à ce troisième triangle; 4° l'aire du triangle formé en menant, par les sommets du troisième triangle, des tangentes au cercle qui lui est circonscrit et le rayon du cercle circonscrit à ce quatrième triangle; ainsi de suite. On peut aussi calculer les périmètres successifs; et si le triangle proposé est isocèle ou équilatéral, il en sera de même tous les autres triangles.

XVI. Étant donnés trois cercles égaux se touchant extérieurement deux à deux, décrire 1° la circonférence qui les enveloppe en les touchant (ou qui est enveloppée); 2° les trois cercles égaux qui touchent extérieurement cette circonférence enveloppante, en se touchant deux à deux; 3° la circonférence qui enveloppe ces trois derniers cercles, en les touchant; et ainsi de suite. (même problème pour quatre ou six cercles égaux).

XVII. On peut décrire le triangle dont on connaît le côté c, le rayon r du cercle circonscrit et celui r' du cercle inscrit ou celui a' du cercle exinscrit, touchant le prolongement de c. (Chaque fois en supposant le problème résolu, on arrive aisément à sa construction).

Ce qui est remarquable, c'est que la relation géométrique entre les côtés numériques et une projection, dans les triangles obliquangles, étant appliquée à la figure proposée, fournit deux relations indépendantes des angles et des côtés du triangle cherché. Désignant en effet, par M et N les distances du centre du cercle circonscrit à ceux des cercles inscrit et exinscrits proposés, on trouve

$$M^2 = r(r - 2r) \text{ et } N^2 = r(r + 2a').$$

Donc si l'un des triangles cherchés existe, il y en aura une infinité à la fois inscrits et circonscrits ou excirconscrits aux deux cercles proposés, de rayon r et r' ou a'. Il est aisé de voir aussi, par ce qui précède, qu'on a

$$a^2 = (a' - r')(4r + r' - a').$$

XVIII. Calculer l'aire du décagone régulier *étoilé*, que forment les diagonales d'un pentagone régulier, dont le côté vaut 100 mètres. On sait que les deux diagonales, partant d'un même sommet, divisent l'angle 108° du pentagone en trois parties égales et que chacune partage une autre diagonale en moyenne extrême raison, la plus grande partie étant longue de 100ᵐ et la plus petite étant le côté du décagone régulier étoilé. On sait de plus que les deux premières diagonales interceptent sur la 3ᵉ, le côté du pentagone régulier, de même centre que les deux autres polygones réguliers (à démontrer chaque fois).

Longueurs maximums et minimums.

7. La recherche des *maximums* et des *minimums* de certaines gran-

deurs géométriques, est la plus importante de la comparaison des longueurs, des aires et des volumes : elle peut fournir aux arts des principes d'économie et de meilleur emploi des matériaux. Aussi cette recherche a-t-elle occupé plusieurs géomètres : les uns à l'aide de considérations purement géométriques et les autres par l'analyse transcendante, sont parvenus à des résultats fort remarquables. Mais, dans la géométrie élémentaire, les problèmes de maximums et de minimums, se résolvent très-simplement par l'emploi simultané des considérations géométriques et du calcul : souvent même la plus grande ou la plus petite valeur cherchée est donnée par une équation résoluble comme celles du second degré.

Le tome I des annales de mathématiques contient les solutions, purement géométriques, des problèmes que voici : trouver le point donnant un minimum pour la somme de ses distances, 1° à trois points donnés sur le même plan ; 2° à deux points et une droite ; 3° à deux points et une circonférence ; 4° à deux droites ou deux circonférences et un point ; 5° à trois droites ou trois circonférences. etc. Tous ces problèmes dépendent, plus ou moins immédiatement de celui-ci :

8. Problème. *Deux points* A *et* B *étant situés d'un même côté du canal rectiligne* MN ; *en quel point* I *de ce canal, l'ouvrier partant du point* B, *doit-il prendre de l'eau, la porter en* A *et revenir en* B, *pour qu'il ait à faire le moindre chemin total possible ?*

Menant avec l'équerre, les perpendiculaires AC et BE sur MN, on pourra mesurer directement $AC = a$ mètres, $BE = b$ et $CE = c$. Il est facile de voir que le *chemin* AIB *sera le plus court possible quand* AC *et* BI *prolongés iront se couper en un point* D, *donnant* $CD = CA$; c'est-à-dire *quand les deux angles* AIC *et* BIE *seront égaux*.

Mais comment déterminer le point D, puisqu'il est évident qu'on ne saurait mesurer $CD = CA$? Le seul moyen est de chercher, avec la fausse équerre, le sommet O sur MN, des deux angles égaux AOC et COD ; et encore alors faut-il qu'un aide aille placer un jalon en D et passe le canal (ce qui pourrait ne pas être praticable) : plaçant un jalon I à l'intersection des alignements MN et BD, ce qui est encore une difficulté, on aura sur le terrain la position du plus court chemin AIB, et l'on pourra mesurer AB, BI et IA.

De plus, *dans le projet, il faut calculer le moindre prix de la construction du chemin total* $AB + BI + IA = m$. Car avant de procéder à des constructions quelconques, il importe de connaître les dépenses en argent qu'elles peuvent occasionner, et de faire que ces dépenses soient les moindres qu'il se puisse, sans nuire à la solidité et aux autres qualités de l'ouvrage demandé. Ici donc, pour l'exactitude et la facilité des opérations sur le terrain, il faut y calculer la position du point I et la longueur m du moindre chemin total.

Or, soit CI $= x$; il est clair, par deux triangles semblables et par deux triangles rectangles, qu'on aura simultanément

$$(a+b)\,x = ac \text{ et } m = \sqrt{[(a+b)^2 + c^2]} + \sqrt{[(a-b)^2+c^2]}.$$

Si les mesures directes ont donné $a = 240$, $b = 360$ et $c = 800$, on aura $x = 320$ et $m = 1808^m95$, environ. De plus, si le *sentier* le plus court m doit coûter 10 centimes par mètre de longueur, le moindre prix total sera 180 fr. 90, environ.

Corollaire I. Le triangle ABI a le moindre contour, parmi tous ceux ayant la même base AB et leurs sommets sur la même droite MN.

II. De tous les triangles, de même base et de hauteur de même longueur, celui de moindre périmètre est isocèle.

Scholie I. Il est clair que A et B pourraient être les ouvertures de deux réservoirs, dans lesquels l'eau serait amenée par des tuyaux de conduite, aboutissant à un autre réservoir, qu'il faudrait établir sur le bord MN. Et il est clair aussi que, pour l'économie, les tuyaux et les réservoirs devraient être *cylindriques*.

II. Quelles que soient les conditions d'économie, exigées par le plus court chemin AIB $= v$, non seulement le problème est toujours possible; mais le *minimum* de v et son *maximum* sont donnés par l'équation unique :

$$\sqrt{(a^2 + x^2)} + \sqrt{[b^2 + (c-x)^2]} = v.$$

On verra que pour le maximum de v, a et x sont négatifs ; de sorte qu'alors v est une différence.

9. Problème. *Soit* K *un point donné dans l'angle aigu* CAB, *dont les côtés sont l'un* AB *le bord d'un canal et l'autre* AC *le bord d'un parterre : en quel point* I *de* AB, *l'ouvrier partant du point* K, *doit-il prendre de l'eau et la porter dans un réservoir* H, *à établir sur* AC, *pour que le chemin* KIH *soit un minimum ?*

Menant sur AB la perpendiculaire KE, que l'on prolongera de EF = KE et menant FH perpendiculaire à AC ; cette perpendiculaire coupera AB au point I demandé (facile à démontrer). Il faut que l'angle CAB soit aigu ; sans quoi le pied H ne tomberait pas sur AC.

Ici pour déterminer les deux points I et H, *sans sortir de l'angle* CAB, on mène, par le point K, la perpendiculaire KG sur AC ; on marque le point N où GK va couper AB; on prend EI = EN et l'on cherche avec l'équerre, le pied H de la perpendiculaire IH à AC : on a ainsi les points I et H du plus court chemin demandé KIH, que l'on peut mesurer directement.

Scholie I. Si l'on veut trouver, dans l'intérieur d'un triangle, le point dont la somme des distances aux trois côtés soit un minimum; tant que le triangle ne sera pas équilatéral, le problème sera impossible; et il sera indéterminé, si les trois côtés sont égaux. Car la condition du minimum est que les trois distances fassent trois angles égaux autour du point cherché.

II. Si les portes de quatre habitations sont aux sommets d'un quadrilatère convexe et que les propriétaires veuillent établir un puits, dans l'intérieur de la figure, et le joindre aux quatre portes par quatre chemins pavés, coûtant chacun 60 centimes le mètre de longueur; si d'ailleurs chaque propriétaire doit payer le quart du prix de la construction du puits (qui leur sera commun) et une partie de celui des quatre chemins, en *raison inverse* de la longueur du chemin partiel aboutissant à sa porte; on demande où il faudra placer le puits, pour que le prix total des quatre chemins soient un minimum? (R. A l'intersection des deux diagonales, qu'il faudra mesurer et il faudra connaître en outre le prix de la construction du puits, pour pouvoir calculer ce que chacun doit payer.)

10. Problème. *Deux points* A et B *étant situés d'un même côté du canal rectiligne* MN, *sur lequel on veut établir un pont; en quel endroit ce pont doit-il se trouver et où faut-il que les trois branches de route, qui joignent le pont aux deux points* A et B, *se réunissent, pour que la somme de ces trois branches soit un minimum?*

Appelons O le point de réunion des trois branches $OA=x$, $OB=y$ et $OC=z$, OC étant perpendiculaire à MN; de telle sorte que la somme $v=x+y+z$ soit un *minimum*. D'abord si la distance z demeure invariable et qu'on suppose la droite EOF parallèle à MN, il faudra, pour que v et par conséquent $x+y$ soit un minimum, que les deux angles AOE et BOF soient égaux entre eux (nº 8), aussi bien que les deux AOC et BOC.

Ensuite la longueur x demeurant constante, sera le rayon et A le centre de l'arc circulaire, touchant la droite D au point cherché O; donc pour que v et par conséquent $y+z$ soit un minimum, il faut que B soit dans l'angle aigu de D avec MN et qu'en outre les deux angles de BO et CO avec D soient égaux entre eux (nº 9), aussi bien par suite que les deux AOC et AOB.

La somme v ne peut donc être un minimum que quand les trois angles AOC, BOC et AOB valent 120° chacun.

Cela posé, si l'on avait sur le papier la figure *semblable* à celle du terrain, on décrirait sur la corde AB et du côté de MN, le segment capable de l'angle 120°; puis menant par le milieu du restant de la circonférence, une perpendiculaire à MN, cette perpendiculaire couperait l'arc du segment au point cherché O. On voit d'ailleurs que le problème est impossible quand la perpendiculaire ne passe point entre A et B, ou lorsque l'arc coupe MN. Dans chacun de ces cas, la moindre route ne doit avoir que deux branches (n° 8).

Mais il est plus exact et plus simple de procéder sur le terrain même et d'employer le calcul pour déterminer les grandeurs inconnues. On mènera donc avec l'équerre, les perpendiculaires AP et BQ sur MN, puis on les mesurera exactement, aussi bien que PQ. Supposons qu'on ait trouvé $AP = a = 600$ mètres, $BQ = b = 720$ et $PQ = c = 420$.

Imaginant par O la parallèle à MN, coupant AP et BQ en E et F, puis faisant $OE = CP = n$ d'où $OF = c - n$, les deux triangles semblables AOE et BOF donneront :

$\frac{1}{2} x = a - z$, $x = \frac{2}{3} n \sqrt{3}$, $\frac{1}{2} y = b - z$, $y = \frac{2}{3} (c - n) \sqrt{3}$;
$v = x + y + z = \frac{1}{2} (a + b + c\sqrt{3}) = 1023^m\ 73$;
$z = \frac{1}{2} (a + b) - \frac{1}{6} c \sqrt{3} = 538^m\ 76$; $x = 2a - 2z = 122^m\ 48$
et $n = \frac{1}{2} x \sqrt{3} = 106^m\ 07$.

Ces valeurs déterminent les points C et O. Si d'ailleurs la construction des trois branches coûte 1 fr. 20 par mètre de longueur, le moindre prix total de la construction sera 1228 fr. 48. Mais si la route ne devait avoir que deux branches aboutissant au pont C, sa plus petite longueur serait $1385^m 21$ et coûterait 1662 fr. 25; ce qui serait 433 fr. 77 de plus que la moindre route à trois branches. Celle-ci est donc préférable.

11. Théorème. *Un triangle* ABC *étant donné, la somme des distances de ses trois sommets à un point* O *de son intérieur est un minimum, lorsque les trois angles compris autour de* O *sont égaux chacun à* 120°.

C'est ce qu'on démontre aisément, d'après le n° 8 et en raisonnant comme dans l'article précédent.

La construction du point O est bien facile quand on a sur le papier la figure semblable à celle du terrain : il reste ensuite à trouver, sur le terrain, le point O homologue à celui obtenu sur le papier. Ici encore, pour l'exactitude et la possibilité des opérations, il faut procéder sur le terrain lui-même et y calculer la position du point O.

Or, soient a, b, c, les valeurs numériques des côtés du triangle ABC, respectivement opposés aux angles A, B, C; soit v la somme des longueurs inconnues $OA = x$, $OB = y$ et $OC = z$. Comme la distance du sommet O de l'angle de 120°, dans chaque triangle partiel, au pied de la hauteur, est *négative* et moitié du côté adjacent, il est clair qu'on a, pour le minimum de la somme v, les quatre équations simultanées :

$$v = x + y + z,\ x^2 + y^2 + xy = c^2,$$
$$x^2 + z^2 + xz = b^2,\ y^2 + z^2 + yz = a^2.$$

La *symétrie* de ces équations permet de les résoudre par des *éliminations particulières*. D'abord soustrayant la seconde équation hors de la somme des deux dernières, puis élevant au carré de part et d'autre, et soustrayant l'équation résultante hors de 4 fois le produit des deux dernières équations proposées, on trouve

$$3\,(xy + xz + yz)^2 = 4\,a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2.$$

Le second membre est connu et peut se calculer par *logarithmes*, après la décomposition en facteurs ; car posant, pour abréger, $2\,p = a + b + c$, il devient $16\,p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)$. Si donc on désigne par $3m^2$ cette valeur, m sera connu et il viendra *l'équation auxiliaire* :

$$xy + xz + yz = m.$$

L'élimination par addition et soustraction est maintenant bien facile, à l'aide de cette équation : on trouve, en posant

$$n = a^2 + b^2 + c^2 \text{ et } 2\,q = m + n\,;$$
$$2\,v^2 = 3\,m + n,\ vx = q - a^2,$$
$$vy = q - b^2 \text{ et } vz = q - c^2.$$

Soient A', B', C' les points où les droites AO, BO, CO vont couper les côtés opposés a, b, c. La droite OA' étant bissectrice de l'angle BOC, on a $z : y :: \text{CA}' : a - \text{CA}'$; d'où $vy + vz : vz :: a : \text{CA}'$. Substituant donc et procédant de même pour AB' et BC', on trouvera

$$(a^2 + m)\,\text{CA}' = a\,(q - c^2),$$
$$(b^2 + m)\,\text{AB}' = b\,(q - a^2),$$
$$(c^2 + m)\,\text{BC}' = c\,(q - b^2).$$

Par ces relations, les longueurs CA', AB', BC' étant connues, les points A', B', C', seront déterminés, aussi bien que les trois droites AA', BB', CC' et leur intersection O.

Ce problème est remarquable, non-seulement comme une belle application de l'algèbre à la géométrie ; mais surtout par la manière dont on y élude les difficultés de l'élimination et la complication de l'équation finale, qui devrait naturellement s'élever au 8^e^ degré. L'équation auxiliaire se trouve d'ailleurs par la double expression de l'aire ABC.

12. THÉORÈME. *Parmi tous les triangles de même angle au sommet et dans lesquels le produit des côtés latéraux est un nombre constant ; 1° celui de moindre base et de moindre périmètre est isocèle ; 2° ces deux minimums sont d'autant plus petits, que l'angle aigu ou obtus est plus petit lui-même.*

Soient a, b, c les valeurs numériques des côtés respectivement opposés aux angles A, B, C; supposons ces trois côtés *variables*, mais l'angle A *constant*, aussi bien que le produit bc : suivant que l'angle A est aigu ou obtus, on a, comme on sait,

$$a^2 = b^2 + c^2 \mp 2\,cb',$$

b' désignant la projection de b sur c. Soit n la projection sur c de la longueur 1, prise sur b, à partir du sommet A; on aura $1 : b :: n : b' = bn$ et

$$a^2 = b^2 + c^2 \mp 2\,bcn\text{ ; d'où}$$
$$a^2 = (b - c)^2 + 2\,bc\,(1 \mp n).$$

On a toujours $b' < b$ et $n < 1$; d'ailleurs le produit bc est constant et tout est *positif* dans les deux membres ; il est donc évident que le minimum de la base a répond à $b = c$. Ce minimum est donné par

$$a^2 = 2\,bc\,(1 \mp n).$$

Soit posé $b = m + x$ et $c = m - x$, d'où $b + c = 2\,m$; on aura donc $m^2 - x^2 = bc$ ou $m^2 = bc + x^2$. Comme bc est invariable, le minimum de m et celui de $2\,m$ ou $b + c$ répondent à $x = o$ ou à $b = c$. Ainsi quand $b = c$, la base a et le périmètre $a + b + c$ sont des minimums. Or, ces minimums diminuent avec l'angle A ; car A étant aigu, d'où $a^2 = 2\,bc\,(1 - n)$, la projection n augmente et $1 - n$ diminue avec A ; tandis que si l'angle obtus A diminue, n diminue, aussi bien que $1 + n$.

Scholie. Ces deux propriétés subsistent également lorsque la somme $2\,m$ est seule constante, avec l'angle A. Si donc on veut couper, dans un triangle donné d'ébène, ayant partout la même épaisseur, un triangle dont $2m$ soit la somme donnée des deux côtés latéraux, il faudra, pour que la section soit un minimum et se fasse le plus aisément possible, choisir le plus petit A des trois angles du triangle d'ébène et prendre, sur les côtés qui le comprennent, à partir du sommet, les longueurs égales à m : on aura les extrémités de la section minimum cherchée.

13. Théorème. *La somme des distances de tout point de l'arc aux extrémités de la corde, croît, depuis une extrémité de cet arc, où la somme est la moindre, jusqu'au milieu du même arc, où elle est la plus grande.*

C'est ce qu'on démontre, d'après les propriétés des angles inscrits dans un même segment et au moyen de la circonférence, ayant pour centre le milieu de l'arc et passant par les extrémités de celui-ci.

Corollaire I. De tous les triangles de même base et de même angle au sommet, celui de hauteur et de périmètre maximums est isocèle.

II. Réciproquement, le triangle isocèle, parmi tous les triangles de même base et de même hauteur, est celui de moindre contour et de plus grand angle au sommet (à démontrer).

14. Théorème. *Parmi tous les polygones d'un même nombre de côtés et inscrits dans le même cercle, celui de périmètre maximum est régulier.*

Soit p le périmètre maximum : si deux côtés consécutifs n'étaient pas égaux, leur point commun ne serait pas le milieu de l'arc total sous-tendu par ces deux côtés; il existerait donc un autre polygone inscrit, dont un sommet serait le milieu de l'arc total proposé et dont par suite le contour serait plus grand que p (n° 13) ; celui-ci, parmi tous les périmètres inscrits et du même nombre de côtés, ne serait donc pas un maximum; contrairement à l'hypothèse. Donc deux côtés consécutifs quelconques et par suite tous les côtés de p sont égaux entre eux; donc aussi tous les angles du polygone inscrit, de périmètre p maximum, sont égaux entre eux; donc ce polygone est régulier.

15. Réciproque. *De tous les polygones de* n *côtés, isopérimètres et inscrits dans des cercles différents, le régulier est celui pour lequel la circonférence circonscrite est un minimum.*

Soit p le périmètre commun à deux polygones, dont un seul régulier; soit r le rayon du cercle circonscrit à celui-ci et r' le rayon du cercle circonscrit à l'autre; soit enfin p' le périmètre du polygone régulier de n côtés inscrit dans ce dernier cercle : il est clair qu'on aura simultanément $p < p'$ et $p : p' :: r : r'$; donc $r < r'$ et $2\pi r < 2\pi r'$. Ce qu'il fallait démontrer.

16. Théorème. *De toutes les lignes brisées, formées chacune par trois tangentes, dont deux aux extrémités d'un arc tracé, la plus courte a son troisième contact au milieu de l'arc proposé.*

Soient a et b les longueurs que les deux tangentes, aux extrémités de l'arc proposé, interceptent sur deux troisièmes tangentes, a touchant l'arc au milieu : $2a$ et $2b$ seront donc deux lignes brisées *circonscrites*. Or, menant des extrémités de b des perpendiculaires sur a, on verra, par deux couples de triangles rectangles semblables, que $a < b$ et que $2a < 2b$. Ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire I. De tous les triangles de même angle au sommet et circonscrits au même cercle, le triangle isocèle est celui de moindre base et de moindre périmètre.

II. Lorsque le cercle est *exinscrit* à une suite de triangles de même angle au sommet, tous ces triangles sont isopérimètres; mais celui de moindre base est isocèle.

III. Parmi tous les triangles, de même hauteur et de même angle au sommet, le triangle isocèle est celui de base et de contour minimums.

IV. On démontrerait de même que, *de toutes les droites passant par* *un point de l'intérieur d'un angle tracé et terminées à ses deux côtés, la plus courte en retranche un triangle isocèle.*

Comme cette droite, perpendiculaire à la bissectrice de l'angle, est d'autant plus petite que l'angle est plus petit lui-même; on voit que si un *nœud* se trouve dans un triangle d'ébène, ayant partout la même épaisseur, on veut scier ce triangle suivant la plus petite droite possible passant par ce nœud, la section devra être la base du triangle isocèle dont le sommet est celui du plus petit des trois angles du triangle d'ébène.

17. Théorème. *Parmi tous les polygones de chacun* n *côtés et circonscrits à un même cercle, celui de moindre contour est régulier.*

Soit p le périmètre minimum circonscrit : d'après le précédent théorème (n° 16), on verra que tous les côtés du minimum p doivent toucher le cercle au milieu de chacun ; donc le minimum p est le contour d'un polygone régulier de n côtés.

18. Réciproque. *De tous les polygones réguliers isopérimètres, de chacun* n *côtés et circonscrits à des cercles différents, le régulier est celui pour lequel la circonférence inscrite est un maximum* (Démonstration analogue à celle du n° 15).

19. Théorème. *Parmi tous les polygones réguliers, de même apothème* a, *celui du plus grand nombre de côtés a le moindre périmètre.*

D'abord tous ces polygones sont circonscrits au cercle dont a est le rayon. Soient C et C' les contours de deux polygones réguliers circonscrits : si nous supposons que le premier ait plus de côtés que le second, il est clair que son angle au centre, son côté et son rayon, sont respectivement moindres que l'angle au centre, le côté et le rayon du second; donc le contour C est plus près de la circonférence $2\pi a$ que le contour C', vu d'ailleurs qu'il a plus de points communs avec elle : il en diffère donc moins que C' et l'on a $C - 2\pi a < C' - 2\pi a$; donc $C < C'$.

20 Réciproque. *De deux polygones réguliers isopérimètres, celui du plus grand nombre de côtés a aussi le plus grand apothème.*

Soit p le périmètre commun; soient a et a' les apothèmes des deux polygones réguliers dont le premier a le plus de côtés : si nous appelons p' le périmètre d'un troisième polygone régulier, ayant autant de côtés que le premier et même apothème a' que le second, dont p' est le périmètre, il suit du théorème précédent (n° 19) qu'on aura $p' < p$. Mais $p : p' :: a : a'$; donc puisque $p > p'$, on a aussi $a > a'$ et $2\pi a > 2\pi a'$.

Scholie I. *De deux polygones réguliers, de même rayon* r, *celui qui a le plus grand nombre de côtés a aussi le plus grand périmètre* ; comme approchant plus que l'autre de la circonférence circonscrite.

II. Réciproquement, *de deux polygones réguliers isopérimètres, celui du plus grand nombre de côtés a le moindre rayon.* Il aurait le plus grand périmètre, s'il avait le même rayon que l'autre ; il faut donc que son rayon diminue.

21. Propositions. Voici plusieurs propositions à démontrer :

I. De tous les parallélogrammes, de même base et de même hauteur, le rectangle est celui de moindre périmètre. Réciproquement, de tous les parallélogrammes isopérimètres, de même base, celui de plus grande hauteur est le rectangle.

II. La flèche est à la fois le maximum des distances de tous les points de l'arc à la corde, et le maximun de toutes les parties des rayons, situées dans le segment.

III. Si du centre on abaisse une perpendiculaire à la droite hors du cercle, les parties de cette perpendiculaire entre la circonférence et la droite, sont la plus petite et la plus grande distance entre ces deux lignes.

IV. De toutes les droites terminées à deux circonférences, l'une hors de l'autre, la plus grande passe par les deux centres et la plus petite fait partie de la plus grande.

V. Lorsque deux cercles se coupent, de toutes les droites menées par l'un des points d'intersection et terminées aux deux circonférences, la plus courte est la corde commune et la plus longue est parallèle à la droite des centres.

VI. Une droite étant donnée à volonté sur un côté d'un angle tracé, quel est sur l'autre côté le point où l'on voit la droite proposée sous un angle maximum et où elle paraît la plus longue possible ?

VII. A un triangle donné *circonscrire* le triangle de périmètre maximum, ce triangle étant équilatéral ou semblable à un triangle donné. (Cela revient à décrire des segments capables, en ayant égard à V.)

VIII. *Inscrire* dans un parallélogramme donné, le quadrilatère de périmètre minimum. (La figure inscrite est un parallélogramme (n° 8), qui se réduit à un losange ou à un carré, suivant que la figure proposée est un rectangle ou un carré elle-même.)

IX. Parmi tous les polygones réguliers *inscrits* dans un polygone régulier donné, c'est-à-dire ayant leurs sommets sur ses côtés, celui de contour minimum joint les milieux des côtés du proposé.

X. De tous les polygones réguliers *circonscrits* à un polygone régulier donné, celui de périmètre maximum a ses côtés perpendiculaires aux rayons adjacents du proposé.

XI. Parmi tous les quadrilatères de même somme donnée des deux diagonales, celui de moindre somme des carrés numériques des côtés est un rectangle, dans lequel on peut incliner les diagonales à volonté, sans que la somme minimum change ; mais alors le carré aura un périmètre maximum.

De la Transformation des figures.

22. La *transformation des figures* consiste à leur donner une forme plus simple et mieux appropriée à certains usages utiles, sans altérer leur étendue; en sorte que la nouvelle figure soit équivalente à la proposée, du moins avec une approximation suffisante. Le plus souvent la nouvelle figure doit être un rectangle ou carré, un parallélipipède rectangle ou un cube.

La transformation peut souvent s'opérer *par transposition de parties*, ce qui rend l'équivalence complètement évidente. C'est ainsi que l'on procède parfois dans les arts et métiers, comme pour l'étoffe qui doit faire un habit, comme pour la feuille d'acajou que l'ébéniste doit couper en morceaux dont le rapprochement fasse un rectangle, etc.

23. Transposition de parties. Voici plusieurs exemples remarquables de cette sorte de transformation. (Ce sont des théorèmes faciles à démontrer) :

I. Tout parallélogramme ou triangle ou trapèze peut se changer en un rectangle équivalent, mais de moindre contour.

II. Les quatre triangles égaux, composant un triangle quelconque, peuvent former trois parallélogrammes équivalents à ce dernier et dont deux ont chacun un périmètre moindre que le sien.

III. Tout quadrilatère se change, par simple transposition de parties, en un rectangle équivalent; mais dont le périmètre n'est moindre, du moins avec évidence, que pour le quadrilatère concave.

IV. Les carrés faits sur les côtés de l'angle droit de tout triangle rectangle, se divisent en parties formant le carré construit sur l'hypoténuse. (Pour la démonstration, les deux premiers carrés doivent être hors du triangle et le troisième carré doit le renfermer).

V. Tout carré se compose de deux carrés, plus ou moins le double rectangle compris sous les côtés de ces derniers. Et si dans le trapèze isocèle, les diagonales sont perpendiculaires entre elles, ce trapèze peut se diviser en trois parties dont l'arrangement donne le carré fait sur la hauteur (ce carré ayant un contour moindre).

VI. Deux carrés inégaux et concentriques ont pour différence quatre triangles rectangles égaux, formant, par leur rapprochement, un seul rectangle. (De là, si a, b, c, sont l'hypoténuse et les côtés de l'un des quatre triangles rectangles, il vient $a^2 = b^2 + c^2$).

VII. De deux carrés égaux on peut faire un rectangle ou un carré équivalent, de contour moindre. Réciproquement, les parties de ce dernier peuvent former les deux premiers carrés.

VIII. Avec un hexagone H *symétrique*, on compose aisément un parallélogramme équivalent, ayant pour base la diagonale a qui retranche un triangle de H et pour hauteur la distance d de cette diagonale au sommet le plus éloigné du pentagone restant ; d'où l'aire $H = ad$.

IX. Avec un octogone symétrique on peut faire un hexagone symétrique et un parallélogramme, en transposant les parties.

X. On peut de même, avec cinq parallélogrammes ou cinq carrés égaux, mis en *croix*, faire un parallélogramme ou un carré équivalent. (Les sommets de la croix sont ceux d'un octogone symétrique équivalent aux 7 cinquièmes du parallélogramme). Réciproquement, tout parallélogramme ou tout carré peut se diviser en parties formant cinq parallélogrammes ou cinq carrés égaux.

XI. Une simple transposition de parties donne un carré équivalent, pourvu que la base soit moitié de la hauteur ou égale à elle dans le triangle ou le parallélogramme et le losange, que la hauteur vaille la demi-somme des bases dans le trapèze et que, dans le quadrilatère, une diagonale soit la demi-somme de ses distances aux deux sommets opposés.

XII. Tout polygone régulier peut se diviser, de plusieurs manières, en parties dont le rapprochement forme un rectangle équivalent, et celui-ci peut se changer en un autre, de hauteur double ou triple, et même en un carré, si le rapport de ses deux dimensions est un carré numérique. Quand ce rapport est $6\sqrt{3}$, il en résulte un hexagone régulier.

XIII. Avec sept hexagones réguliers égaux, on peut en composer un seul, par simple transposition ; et réciproquement, on peut diviser tout hexagone régulier en parties dont les rapprochements donnent sept hexagones réguliers égaux.

XIV. Soit P un prisme *oblique* (pouvant être un cylindre) ; soit b sa base, h sa hauteur, a une arête latérale et b' la section plane perpendiculaire à cette arête : les deux parties de P, qui en résultent, peuvent se réunir en un prisme *droit* P', équivalent à P, de base b' et de hauteur a, ayant une surface totale moindre que celle de P et moindre somme d'arêtes.

Corollaire. Il est clair que les deux angles (ah) et (bb') sont égaux et qu'ainsi $h = a \cos (ah)$ et $b' = b \cos (ah)$: donc $bh = ab'$. Mais on sait que $P' = ab' = bh$; donc aussi $P = bh$. Tel est donc un moyen, également très-simple, de parvenir aux expressions des volumes de tout prisme et de tout cylindre.

Scholie. Si P est un parallélipipède oblique, P' sera un parallélipipède *droit* équivalent, et celui-ci peut se changer, par simple transposition, en un parallélipipède *rectangle* P'', de surface totale moindre que celle de P' et de moindre somme d'arêtes. De sorte que *la surface totale et la somme des douze arêtes vont en diminuant, en passant de* P *à son équivalent* P', *de* P' *à son équivalent* P'' *et même de* P'' *au cube équivalent* ; ce qui est remarquable.

XV. Soit P un prisme *tronqué* (pouvant être un cylindre); soit b sa base, ayant un *centre de symétrie*, aussi bien que la section b', non parallèle à b. Soit a la droite qui joint les deux centres de symétrie et n le nombre des arêtes latérales, celles-ci ayant par conséquent na pour somme : si par le centre de b' on mène un plan parallèle à b, il en résultera un prisme P′ équivalent à P ; car la portion ajoutée à P est *symétrique* et équivalente à la portion retranchée. Et de même, les surfaces latérales de P et de P′ sont équivalentes.

24. Simplification des figures I. La *simplification des figures* se présente dans les arts et surtout dans l'agriculture, soit pour faciliter le labourage des terres, soit pour diminuer les frais de clôture, d'un pré, d'un jardin, etc. Car sous la même étendue superficielle, une figure plus simple peut avoir un contour plus petit, comme on l'a déjà vu pour le rectangle équivalent au triangle et au trapèze.

II. Pour que l'emploi de la charrue soit le plus commode possible, dans la culture des terrains, il faut que le *champ* soit un rectangle, un parallélogramme, un trapèze ou composé de plusieurs trapèzes de même hauteur, mis bout à bout, par des côtés latéraux communs. Mais divers obstacles, qu'on ne saurait écarter, empêchent souvent qu'il en soit ainsi.

III. Lorsque rien ne limite les opérations à effectuer sur le terrain et que toutes les conditions de la simplification peuvent se réaliser, il sera utile à deux propriétaires de remplacer, par un rectangle ou du moins un parallélogramme équivalent, le champ polygonal de l'un, enclavé dans le terrain de l'autre. La base du parallélogramme cherché devant se trouver sur le chemin adjacent au terrain, on pourra, d'après le mesurage des aires, avoir égard à la différence des *rapports annuels*, si elle existe, d'après des estimations exactes.

IV. Si le terrain polygonal est un quadrilatère quelconque, on le change en un triangle équivalent, ayant pour base une diagonale et pour sommet le point obtenu en prolongeant, hors la figure, la première partie de l'autre diagonale, d'une longueur égale à la seconde partie. Tel est le procédé le plus simple et le plus exact, pour transformer le quadrilatère en un triangle équivalent.

Mais si l'on veut avoir un parallélogramme équivalent au quadrilatère, il faudra d'abord se donner la longueur de la base, si elle n'est pas déterminée par des conditions particulières; puis la hauteur sera quatrième proportionnelle à la base, une diagonale du quadrilatère et la demi-somme des distances de cette diagonale aux deux sommets opposés.

V. Si le terrain est polygonal, d'au moins cinq côtés, on pourra en mesurer d'abord l'étendue superficielle et calculer ensuite la hauteur du parallélogramme équivalent. Et si des obstacles empêchent le mesurage, sur le terrain même, on lèvera le *plan* de celui-ci : on transformera le polygone résultant sur le papier, en un triangle, puis en un rectangle équivalent, que l'on transportera sur le terrain, par un rectangle *semblable*. Mais ici les causes d'erreurs sont bien plus multipliées que sur le terrain; et il faut des précautions pour avoir une approximation suffisante qui reste d'ailleurs inconnue.

VI. On démontre que les parallèles aux deux droites joignant les milieux des côtés opposés de tout quadrilatère, menées des extrémités de celles-ci, déterminent le parallélogramme équivalent à ce quadrilatère. Ce moyen de simplification est remarquable et il existe un moyen analogue pour changer tout prisme quadrangulaire en un parallélipipède équivalent.

25. Maximums et minimums I. La recherche des *maximums* et des *minimums* de certaines grandeurs géométriques, qui peuvent *varier* d'après des conditions énoncées, se présente dans la transformation des figures. Par exemple, *il sera utile de transformer un verger triangulaire ou quadrangulaire, demi-cercle ou secteur circulaire, en un carré équivalent*; parce que le contour de ce carré étant toujours moindre que celui du verger proposé, la dépense, pour clôre le carré ou pour entretenir cette clôture, sera toujours plus petite.

II. De même, si une somme d'argent est destinée à payer le mur qui doit entourer le verger à établir dans une propriété; ce verger ne devra être ni un triangle, ni un secteur circulaire, ni un demi-cercle, ni un parallélogramme, ni un trapèze, ni enfin un quadrilatère quelconque, pour le meilleur emploi de la dépense proposée; mais il devra être un carré. C'est que *le carré est plus grand que toute figure plane isopérimètre, de deux, trois ou quatre côtés* (en observant que le demi-cercle et le secteur circulaire sont des figures planes *mixtes*, de deux et trois côtés).

C'est ce qu'on démontre aisément, par le calcul, à l'aide des expressions des aires, pour le demi-cercle, le secteur circulaire, le triangle, le rectangle, le parallélogramme, le losange et le trapèze.

Quant au quadrilatère, observons d'abord que *de tous les triangles de même base et de hauteur constante, celui de moindre périmètre est isocèle*, en vertu du nº 8. Ainsi donc, pour que ce triangle isocèle devienne isopérimètre avec tout autre triangle, de même base, c'est-à-dire pour que son périmètre devienne plus grand, il faut que sa hauteur augmente, et par suite son aire, puisque sa base reste constante. Donc *le triangle isocèle est plus grand que tout triangle isopérimètre, de même base.*

Cela posé, parmi tous les quadrilatères dont le contour C est constant, soit Q celui de plus grande étendue superficielle : si deux côtés consécutifs n'étaient pas égaux entre eux, ils seraient côtés latéraux d'un triangle, ayant pour base une diagonale de Q, et ce triangle serait moindre que le triangle isocèle isopérimètre, de même base; il existerait donc un quadrilatère, de contour C et plus grand que Q; chose absurde. Donc deux côtés consécutifs quelconques et par conséquent les quatre côtés du quadrilatère maximum Q sont égaux entre eux : déjà ses angles sont droits, puisque le carré est plus grand que tout losange isopérimètre; donc Q est un carré.

III. Réciproquement, *parmi toutes les figures planes équivalentes, de deux, trois ou quatre côtés, le carré a le moindre contour.* Ce carré serait le plus grand, s'il était isopérimètre avec chacune : donc pour lui devenir équivalent, son périmètre doit diminuer. (Ce théorème est appliqué dans le premier exemple ci-dessus, où pour avoir le côté du carré, il faut extraire la racine carrée de la valeur numérique de la figure plane proposée).

IV. Bien que le contour du rectangle soit moindre que celui de tout triangle, trapèze, parallélogramme et losange équivalent, et réciproquement; il existe néanmoins *un losange équivalent à un rectangle donné et de contour moindre :* c'est le losange ayant une diagonale commune avec le rectangle.

V. *Parmi tous les quadrilatères formés avec quatre côtés donnés, dont deux opposés sont égaux, le plus grand est le trapèze isocèle.*

Soient a et b les deux côtés opposés inégaux et c la valeur de chacun des deux côtés égaux et opposés. Supposons $a > b$; soient x et y les prolongements des côtés c jusqu'à leur rencontre; soient t et t' les deux triangles résultants, ayant un angle commun compris par les côtés x et y, dans le premier t et par les côtés $c+x$, $c+y$, dans le second t'. On a

$$t' : t :: (c+x)(c+y) : xy.$$

Soit Q le quadrilatère formé avec les quatre côtés donnés : il est clair que $Q = t' - t$ et qu'ainsi la proportion précédente fournit

$$Q : t = c\,[c+x+y] : xy.$$

D'ailleurs on sait que pour l'aire t en fonction de ses côtés b, x et y, on a

$$16\,t^2 = 4x^2y^2 - (x^2+y^2-b^2)^2.$$

Eliminant t et posant $x = u + v$, $y = u - v$, on trouve

$$Q = \tfrac{1}{4}(c^2+2cu)\sqrt{\left\{4 - \frac{(2u^2+2v^2-b^2)^2}{(u^2-v^2)^2}\right\}}.$$

On voit que le maximum de Q répond à $v=0$, c'est-à-dire à $x=y$, d'où $c+x=c+y$. Les deux triangles t et t' sont donc alors isocèles; b est parallèle à a, et par suite le maximum Q est un trapèze isocèle. Ce qu'il fallait démontrer.

D'ailleurs soient A et B les deux angles du quadrilatère Q, adjacents au côté a : ce quadrilatère étant décomposé en deux triangles rectangles, dont les hypoténuses sont les côtés c, et en un trapèze rectangle, on trouve aisément, pour l'aire Q,

$$2\,Q = ac\,(\sin A + \sin B) - c^2 \sin (A + B).$$

Les deux angles A et B étant variables, soit posé $A = v + x$ et $B = v - x$: il est clair qu'on aura

$$2\,Q = 2ac \sin v \cos x - c^2 \sin 2v.$$

Si donc v a la valeur qui convient au maximum de Q, on voit que ce maximum aura lieu dès que $\cos x$ aura sa plus grande valeur 1, c'est-à-dire dès qu'on aura $x = 0$; d'où $A = B = v$; par suite le quadrilatère maximum est le trapèze isocèle. On a, en effet alors

$$Q = (a - c \cos v)\, c \sin v = \tfrac{1}{2}\,(a + a - 2c \cos v)\, c \sin v = \tfrac{1}{2}\,(a+b) c \sin v.$$

VI. *Le polygone régulier est plus grand que tout polygone isopérimètre, d'un même nombre* n *de côtés.*

Soit P le polygone maximum parmi tous ceux de chacun n côtés et de contour invariable C : en vertu de ce qu'on a vu (II), P doit être *équilatéral*, et d'après ce qu'on vient de démontrer (V), P doit être *équiangle :* donc le polygone maximum P est *régulier.*

VII. Réciproquement, *parmi les polygones équivalents, d'un même nombre* n *de côtés, le polygone régulier* P *a le moindre périmètre.* Car si le périmètre C était le même pour tous les polygones de n côtés, le régulier P serait le plus grand ; et P doit diminuer, pour devenir équivalent à chacun d'eux. Or, cela exige que le contour de P diminue; donc, etc.

VIII. *De deux polygones réguliers de même apothème, le plus petit est celui qui a le plus de côtés* ; car il a le moindre périmètre (n° 19).

IX. Réciproquement, *si deux polygones réguliers sont équivalents, celui de plus de côtés a le moindre contour et le plus grand apothème.* Car si l'apothème était le même, le polygone de plus de côtés serait le plus petit ; cet apothème doit donc augmenter, etc.

X. *De deux polygones réguliers isopérimètres, celui qui a le plus de côtés est le plus grand.* Il serait le plus petit, si l'apothème était le même ; il faut donc que son apothème augmente, non-seulement jusqu'à ce que ce polygone régulier, de plus de côtés, soit équivalent à l'autre, auquel cas son périmètre serait moindre que celui du second ; mais jusqu'à ce que les deux périmètres soient égaux.

XI. *Le cercle est plus grand que tout polygone régulier isopérimètre, et réciproquement.* Car le cercle est le polygone régulier du plus grand nombre de côtés.

Plus généralement, une figure plane, *mixte* ou *curviligne*, pouvant être regardée comme un polygone rectiligne, d'un nombre infini n de côtés, infiniment petits, et le polygone régulier du nombre infini *n* de côtés étant un cercle ; il suit de (VI et VII), 1° que *le cercle est plus grand que toute figure plane isopérimètre ; 2°* que *la circonférence est moindre que le contour de toute figure plane équivalente au cercle.*

Ainsi la plus grande aire plane enfermée par un contour de 1000 metres, est l'aire du cercle dont le rayon vaut 1000 : 2π.

XII. Les propriétés de maximums et de minimums, dans les figures planes, s'appliquent évidemment aux prismes et aux cylindres, dont ces figures sont les bases. C'est donc pour économiser, le plus possible, la matière, que l'on fait *cylindriques*, plutôt que *prismatiques*, soit les puits ou les réservoirs d'eau, soit les tuyaux destinés à l'écoulement des eaux, au passage de la fumée des poêles, etc. Si donc on veut établir un réservoir d'eau, ayant 1 mètre de profondeur et 30 mètres carrés de surface du fond, dont le pavage coûtera 20 centimes le décimètre carré, tandis que le mur latéral sera payé 10 centimes ; il faudra, pour diminuer le plus possible la dépense, non-seulement que le fond soit une figure régulière, mais qu'il soit un cercle et le réservoir, un *cylindre droit.*

XIII. *De tous les polygones de* n *côtés chacun et inscrits dans le même cercle, le plus grand est régulier* (n° 14). Réciproquement, *de tous les polygones de* n *cotés chacun et équivalents entre eux, tous inscriptibles à différents cercles, le polygone régulier a le moindre cercle circonscrit.* Car la circonférence de ce cercle est la plus petite (n° 15).

XIV. *Parmi tous les polygones, de chacun* n *côtés et circonscrits à un même cercle, le plus petit est régulier* (n° 17). Réciproquement, *parmi les polygones, de chacun* n *côtés, équivalents entre eux et tous circonscriptibles à différents cercles, celui du plus grand cercle inscrit est régulier.* Car la circonférence de ce cercle est la plus grande (n° 18).

COROLLAIRE. De là et d'après la *méthode des projections*, on démontre que la plus grande table *elliptique* que l'on puisse couper dans une feuille triangulaire d'acajou, touche les côtés du triangle chacun à son milieu ; son centre coïncidant avec le centre de gravité du triangle. (voyez d'ailleurs p. 241, tome VIII de la correspondance mathématique, etc.)

XV. Dans les arts de construction, on emploie souvent les *anses de paniers* à trois centres (demi-ovale), pour les profils soit des *voûtes* soit des *arches* des ponts. Ces courbes devant présenter des formes agréables à la vue, on est conduit naturellement à *chercher quel doit être le rapport* m *du rayon de l'arc moyen à celui de l'un des deux arcs extrêmes, pour que l'anse de panier, dont on connaît la base et la montée, soit la plus uniforme possible ?* Cela aura lieu évidemment quand le rapport *m* sera un minimum ; or, on calcule ce minimum et l'on construit l'anse de panier cherchée, par la résolution d'une équation du second degré.

XVI. C'est aussi par une équation du second degré que l'on résout le problème des *alvéoles* des abeilles et que l'on reconnaît l'instinct admirable de ces insectes utiles, qui leur fait économiser la cire, de la manière la plus avantageuse.

XVII. Parmi tous les corps géométriques de même surface, la sphère est la plus grande, et réciproquement. Ces deux propriétés peuvent recevoir d'utiles applications : elles sont démontrées, aussi bien que XV et XVI, dans la géométrie, 2e édition.

XVIII. On démontre que, 1° le plus grand de tous les quadrilatères, ayant les mêmes diagonales respectives D et D′, est celui où l'angle (DD′) est droit; 2° il existe une infinité de ces quadrilatères maximums, dont un seul losange, ayant le périmètre minimum; 3° le carré est le plus grand de tous les quadrilatères de même somme $2m$ des diagonales, et réciproquement; 4° le plus petit polygone régulier, inscrit dans un polygone régulier semblable, joint les milieux des côtés de celui-ci; 5° le plus grand polygone régulier, circonscrit à un polygone régulier semblable, a chaque côté perpendiculaire au rayon adjacent; 6° le plus grand de tous les quadrilatères, formés avec trois côtés a, b, c, donnés numériquement, est inscrit dans le cercle dont le diamètre est le quatrième côté inconnu x, et celui-ci se calcule par l'équation homogène

$$x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)\,x - 2abc = 0,$$

facile à résoudre, lorsque deux côtés sont donnés égaux.

20. Comparaison des figures. C'est par le mesurage que l'on facilite la comparaison et la transformation des figures; mais le mesurage n'est pas toujours nécessaire, comme on le voit par ce qui précède. Voici une suite de propositions, plus ou moins remarquables, à établir sur la comparaison et la transformation des figures :

I. Si l'on a une suite de quadrilatères, dont chacun ait pour sommets les milieux des côtés de celui qui le précède immédiatement; 1° leurs aires deviennent de deux en deux fois plus petites; 2° si le premier est quadrilatère quelconque, convexe ou concave, tous les autres seront des parallélogrammes; 3° si le premier est un rectangle, le second sera un losange, le troisième un rectangle semblable au premier, le quatrième un losange semblable au second, et ainsi alternativement; 4° si le premier est un losange, le second sera un rectangle, le troisième un losange semblable au premier, le quatrième un rectangle semblable au second, et ainsi alternativement; 5° enfin, toutes les figures sont des carrés, si la première en est un.

II. Lorsqu'une suite de quadrilatères est formée en menant par les sommets de chacun des perpendiculaires à ses diagonales adjacentes; 1° si le premier est un quadrilatère quelconque, convexe ou concave, tous les autres sont des parallélogrammes, devenant de deux en deux fois plus grands que lui (de sorte que si deux quadrilatères étaient semblables, il en serait de même des deux parallélogrammes doubles) ; 2° si le premier est un rectangle, le second sera un losange, le troisième un rectangle semblable au premier, le quatrième un losange semblable au second, et ainsi alternativement ; 3° si le premier est un losange, le second sera un rectangle, le troisième un losange semblable au premier, le quatrième un rectangle semblable au second, et ainsi alternativement ; 4° enfin, dans chaque série, les figures deviennent de deux en deux fois plus grandes (1). On aurait aussi un losange, si l'on menait les perpendiculaires sur les diagonales non adjacentes du rectangle.

III. Soit T un triangle rectangle quelconque : si la somme des deux côtés de l'angle droit et la moyenne proportionnelle entre eux, sont l'hypoténuse et un côté d'un second triangle rectangle ; la diagonale du carré fait sur le troisième côté de ce second triangle sera le côté du carré équivalent à l'hexagone formé en joignant, par trois droites extérieures, les sommets des carrés construits extérieurement sur les côtés du premier triangle T.

Si T est équilatéral, l'hexagone vaudra le rectangle dont les dimensions sont le côté de T et son périmètre augmenté du côté du triangle équilatéral 3 T.

Pour le losange, de côté c et de hauteur h, l'octogone résultant est symétrique et équivalent au rectangle $c\,(4c + 3h)$. Suivant que le plus petit angle du losange vaut 30° ou 90°, l'octogone symétrique vaut $\frac{11}{2}c^2$ ou $7c^2$.

IV. Connaissant numériquement, dans un quadrilatère, une diagonale, les projections sur elle des deux parties de l'autre diagonale et l'une des deux droites projetantes, calculer l'aire du quadrilatère.

V. Dans tout parallélipipède P, le plan qui joint les milieux de trois arêtes contiguës, retranche le tétraèdre, quarante-huitième de P.

VI. Les milieux des douze arêtes de tout parallélipipède sont les sommets d'un polyèdre *symétrique*, qui en est les 5 sixièmes et qui se trouve compris sous huit triangles et six parallélogrammes, lesquels sont *réguliers* pour le cube.

VII. L'octaèdre dont les sommets sont les centres des six faces de tout parallélipipède P, en est le sixième. Dans le cube, l'octaèdre est *régulier*, et symétrique dans tous les cas.

VIII. Les milieux des arêtes de tout prisme triangulaire sont les 9 sommets d'un polyèdre de onze faces, équivalent aux 3 quarts du prisme.

IX. Les centres de gravité des faces de tout prisme triangulaire sont les sommets d'un hexaèdre, douzième du prisme.

X. Le tétraèdre ayant pour base le triangle qui joint les centres de gravité de trois faces adjacentes, dans tout prisme triangulaire, et pour sommet le point commun à ces trois faces, est la dix-huitième partie du prisme. (Théorème analogue pour le parallélipipède).

XI. Dans tout prisme régulier hexagonal, les centres des huit faces sont les sommets d'un dodécaèdre symétrique *inscrit*, quart du prisme et terminé par douze triangles réguliers égaux, quand la hauteur du prisme est double de l'apothème de la base.

XII. Dans tout tétraèdre, les milieux des six côtés sont les sommets d'un octaèdre sous double, lequel est *régulier* avec le tétraèdre.

XIII. Dans tout tétraèdre, les centres de gravité des quatre faces sont les sommets du tétraèdre *inversement semblable* et 27 fois plus petit, mais régulier avec lui. On a donc ainsi une suite décroissante de tétraèdres, alternativement semblables, *inversement* et *directement*, ayant tous le même centre de gravité, vers lequel ils tendent sans cesse.

XIV. Dans toute pyramide régulière, les centres de gravité des faces sont les sommets d'une seconde pyramide régulière, inversement semblable à la première et équivalente au vingt-septième de cette première. On a donc ainsi une suite décroissante de pyramides régulières, alternativement semblables, inversement et directement, ayant toutes le même centre de gravité et devenant de 27 fois en 27 fois plus petites.

XV. Construisant un prisme triangulaire sur la plus petite face d'un tétraèdre quelconque, prise pour base, et sur le tiers de l'arête latérale adjacente; ce prisme vaudra le tétraèdre et aura une surface totale moindre.

XVI. Sur le trièdre opposé à la plus grande face latérale de tout prisme triangulaire, on peut construire le parallélipidède équivalent, mais de surface totale plus petite.

XVII. Soit P le volume, S la surface et $12a$ la somme des douze arêtes, dans tout parallélipipède; l'une quelconque de ces trois choses étant donnée invariable, il y a maximum ou minimum *absolu* pour chacune des deux autres, quand P est un cube. (Théorèmes analogues, pour le tétraèdre rectangle.)

Ces théorèmes reçoivent plusieurs applications utiles; et par exemple, on peut construire le coffre de fer, ayant un mètre cube de capacité, dont le poids et le prix soient les moindres possible, quand le paroi a partout 2 millimètres d'épaisseur.

XVIII. L'octaèdre compris sous un hexagone régulier, trois carrés et quatre triangles équilatéraux, toutes ces figures ayant le même côté, est décuple du tétraèdre régulier fait sur ce côté.

XIX. Connaissant numériquement le rayon de la base et le côté latéral d'un cylindre ou d'un cône droit, on peut calculer le rayon de la sphère dont la surface vaut celle du cylindre ou du cône, et vérifier que son volume est plus grand que celui de chacun de ces derniers.

XX. Les faces latérales d'un cube, dont le côté c est donné, sont d'une substance parfaitement flexible et inextensible, pouvant se séparer librement par les côtés latéraux. On fait glisser parallèlement à elle-même, l'une des bases, suivant l'axe immobile, jusqu'à ce que chaque face latérale devienne une demi-surface cylindrique circulaire, droite et extérieure, puis l'on ferme la figure par quatre fuseaux sphériques égaux. Quelles seront les expressions de la surface et du volume du corps géométrique ou *vase* résultant?

Même problème lorsque les deux bases coïncident et que la figure est fermée par quatre portions de surfaces sphériques égales, comprises chacune par deux petits cercles égaux, bases des cylindres droits résultants. (Mêmes problèmes pour le prisme triangulaire régulier et équilatéral).

XXI. Si les diagonales $2d$ d'un carré C limitent deux segments égaux d'ellipse, d'hyperbole ou de parabole, se coupant suivant la droite h perpendiculaire au plan de C, et si de plus chacun des côtés du carré se meut parallèlement à lui-même, sur les deux courbes adjacentes; non-seulement le volume G, limité par C et les quatre surfaces courbes résultantes, peut se mesurer et s'exprimer au moyen des valeurs numériques de C, d et h; mais si $h = d$, on aura, pour les deux segments égaux de parabole, $G = \frac{1}{2}\,C\,d$; et $G = \frac{2}{3}\,C\,d$ pour les deux demi-cercles égaux. ($h = d$ peut être le rayon du triangle équilatéral C et de trois quadrants. *Voyez* à la p. 32).

Addition et Soustraction des figures.

27. Lorsque les figures, aires planes ou volumes, sont mesurées et évaluées numériquement; on peut les ajouter et les soustraire immédiatement entre elles; ce qui se fait par l'addition et la soustraction des nombres concrets, de même nature, qui les *représentent* respectivement. On peut même, par l'extraction de la racine carrée ou de la racine cubique du nombre résultant, obtenir le côté du carré ou du cube équivalent, soit à la somme soit à la différence des deux aires ou des deux volumes proposés.

Mais si les aires ne sont pas mesurées et que pour cela il faille en lever le plan; au lieu d'effectuer les mesurages, d'après l'échelle de ce plan, il sera plus simple et même plus exact d'opérer, par des tracés, faits sur le plan lui-même, les transformations des figures par voie d'addition, de soustraction, de multiplication, de division ou d'extraction de racine carrée; et cela au moyen de la règle et du compas seuls. Voici plusieurs exemples de l'addition ou de la soustraction graphiques des figures planes, les plus simples.

I. *Si l'on veut construire le parallélogramme* P *équivalent à la somme des deux parallélogrammes tracés* Q *et* R; on prend les bases inférieures de Q et de R pour côtés latéraux d'un triangle T et l'on prolonge les bases supérieures jusqu'à leur intersection : la base de T et la droite, prise égale et parallèle à celle qui joint l'intersection au sommet de T, sont les deux côtés contigus du parallélogramme cherché P, valant Q + R. C'est ce qu'on démontre aisément.

Il est clair que Q et R pourraient être deux rectangles ou deux losanges : s'ils sont deux carrés, T étant rectangle au sommet, P sera le carré fait sur l'hypoténuse de T, *et ce carré* P *vaudra la somme des carrés* Q *et* R, *faits sur les deux autres côtés.*

Tel est le moyen le plus simple de parvenir à la relation des trois carrés, faits sur les côtés du triangle rectangle. Cette relation importante et les expressions des aires des carrés fournissent toutes les relations entre les droites numériques dans les triangles, rectangles ou non.

II. *Si l'on veut construire le parallélogramme* P *équivalent à la différence des deux parallélogrammes donnés* Q *et* R, il sera plus exact d'opérer sur leurs dimensions. Désignant donc par a et b, c et d, les dimensions connues de Q et de R, celles inconnues de P étant désignées par x et y, puis sous-entendant les unités s et u, la relation P=Q—R devient $xy = ab - cd = a\,(b - cd : a) = a\,(b - z)$, en posant $z = cd : a$ ou $a : c :: d : z$.

On sait construire la droite z, quatrième proportionnelle aux trois droites données a, c, d, (car il faut bien remarquer que le diviseur u disparaît et que les termes de la proportion numérique $a : c :: d : z$ sont devenus des droites réelles); on sait aussi construire la droite $h = b - z$; d'où $xy = ah$.

Ainsi il existe une infinité de parallélogrammes P équivalents à Q — R ou à ah. Mais si l'on se donne la base x de P, sa hauteur y sera déterminée par $x : a :: h : y$ et P pourra se construire, *avec une forme entièrement arbitraire*; P pourra donc être un rectangle, ce qui est plus simple, ou être *semblable* à un parallélogramme donné, Q par exemple. Dans ce dernier cas, on aura d'abord $x : a :: y : b$, et x ne sera plus arbitraire.

III. On sait tracer le triangle équivalent à tout polygone rectiligne tracé ; on sait aussi, par la moyenne proportionnelle entre les deux dimensions du triangle, décrire le carré équivalent au polygone. On peut donc, avec le compas et la règle, *trouver le côté du carré équivalent à la somme ou à la différence de deux figures planes rectilignes quelconques.* Cela revient, en effet, à construire le triangle rectangle dont deux côtés soient ceux des carrés équivalents aux deux figures données.

IV. Et puisque les figures semblables sont représentées par les carrés faits sur leurs côtés homologues, on voit que, *deux figures* *semblables étant données, on sait en construire une troisième, semblable à elles et équivalente, soit à leur somme soit à leur différence.* Chaque fois les côtés homologues des trois figures semblables sont ceux d'un triangle rectangle ; bien facile à tracer, puisque l'on connait deux de ses côtés et que l'on cherche le troisième, sur lequel on sait décrire la figure demandée. On voit même que l'hypoténuse et les deux projections sur elle *représentent* respectivement les trois figures semblables proposées.

V. En général, on peut tracer la figure semblable à autant de figures planes semblables qu'on voudra et équivalente à leur somme ou à leur différence. Car la construction qui réduit deux figures à une seule, en réduit trois à deux, quatre à trois, etc. Les figures semblables pourraient être des cercles, des demi-cercles, des secteurs ou des segments circulaires, etc.

De pareilles transformations sont utiles ; car au lieu de faire construire deux réservoirs d'eau, à bases circulaires inégales et de même profondeur, il y aura économie de n'en faire établir qu'un seul, de capacité équivalente à la somme de celles des deux premières et de même profondeur.

VI. Avec plusieurs figures planes données, rectilignes ou non, on peut en construire une autre équivalente à leur somme ou à leur différence ; la figure cherchée étant un rectangle de base donnée, un triangle équilatéral, un carré, un polygone régulier ou un cercle. Le compas et la règle suffisent à cet effet ; mais on n'a ainsi que des approximations dont le degré reste inconnu ; et pour peu que les constructions, avec ces deux instruments, ne soient pas très-simples, le calcul est toujours préférable ; parce que son exactitude est certaine et que les erreurs ne proviennent que du mesurage des *données* de la question.

VII. Si a et b sont deux côtés adjacents d'un parallélogramme quelconque P ; les bissectrices de ses angles, tant intérieurs qu'extérieurs déterminent deux rectangles R′ et R, concentriques avec P, ayant les côtés respectivement parallèles et les diagonales égales à $a - b$ et à $a + b$. De plus, la différence $R - R' $ vaut $2P$.

Suivant que P est un rectangle, un losange ou un carré, R et R′ sont deux carrés ; et dans les deux derniers cas, $R' = 0$.

De là résulte le moyen de construire le parallélogramme $\frac{1}{2}P$ équivalent à la différence des deux rectangles proposés R et R′.

VIII. Enfin, si a, b, c, d, sont des valeurs numériques, d'après la même unité superficielle s, de l'hypoténuse et des trois autres faces d'un tétraèdre rectangle, et que an, bn, cn, dn, soient les hauteurs des prismes ou des tétraèdres P, Q, R, S, dont a, b, c, d, sont les bases ; le premier P vaudra la somme des trois autres Q , R , S. On peut donc ainsi trouver la pyramide ou le prisme ou le cylindre ou le cône équivalent à la somme de trois autres, donnés.

Multiplication des aires.

27. Il s'agit ici de construire le produit, connaissant le multiplicateur, nombre abstrait, et le multiplicande, figure plane qu'on peut toujours remplacer par le carré équivalent ; de sorte qu'on n'aura, le plus souvent, à considérer que des carrés.

I. C'est ainsi que pour doubler un carré, il suffit d'en faire un sur sa diagonale. Mais si l'on considère une suite de triangles rectangles tels, qu'ayant tous un côté commun, le second côté de chacun soit égal à l'hypoténuse de celui qui le précède immédiatement ; les hypoténuses successives, si le premier triangle est isocèle, seront respectivement les côtés des carrés double, triple, quadruple, quintuple, ..., du carré fait sur le côté commun.

De cette manière, on construit le produit d'une aire plane donnée par un nombre entier quelconque n ; ce qui exige le tracé de $n - 1$ hypoténuses. Mais on abrège et l'on diminue les causes d'erreurs en observant que *tout nombre entier, s'il n'est pas un carré, est la somme algébrique de trois carrés, au plus.* Ainsi $29 = 25 + 4$, $31 = 36 - 4 - 1 = 25 + 4 + 4 - 1$, $87 = 81 + 4 + 1 + 1 = 100 - 9 - 4$, etc. On peut donc tracer la droite égale à la racine carrée de tout nombre entier, tel que 512, etc. Il y aura, tout au plus, à construire deux triangles rectangles chaque fois.

II. Le multiple trouvé est un carré ; mais il pourrait être une figure *semblable*, soit à la figure proposée soit à une autre figure, puisque les polygones semblables, rectilignes ou non, sont représentés par les carrés faits sur leurs côtés homologues.

Par exemple, *si la figure* X *cherchée doit être semblable à la figure* P *et valoir* m *fois la figure* Q ; il faudra, a et b étant les côtés des carrés équivalents à P et à Q, construire c et x, dans

$$c^2 = mb^2 \text{ et } a : c :: d : x,$$

d et x désignant les côtés homologues de P et de X. Connaissant x, on sait construire X. On pourrait avoir $m = 1$ et P peut être un rectangle, un parallélogramme, un quadrilatère, un triangle, un cercle, un secteur circulaire, etc.

De plus, P, Q, R, étant trois figures semblables, on sait construire, 1° P, si Q et R sont données dans $Q : P :: R : R$; 2° Q et R, si P et les droites m et n sont données dans $Q + R = P$ et $Q : R = m : n$, ou $Q : P = P : R$; 3° enfin, Y étant semblable aux trois P, Q, R, se construit d'après la proportion $P : Q :: R : Y$.

III. Le multiple demandé peut être une figure *dissemblable* à la proposée, mais d'un même nombre de côtés. Ainsi pour m fois l'aire d'un triangle, d'un parallélogramme ou d'un trapèze, il suffit de prolonger la base de $m - 1$ fois sa longueur, et une diagonale de $m - 1$ fois, pour le quadrilatère. Quant au cercle de rayon r, le rayon x du cercle m fois plus grand est donné par $x = r\sqrt{m}$.

IV. Pour démontrer que *les droites, joignant les sommets* A, B, C, *d'un triangle aux milieux* M, N, P *des côtés opposés, se coupent en un même point*; il suffit de prolonger, hors du triangle, les droites AM et BN (se coupant en O) des longueurs MD = MO et NE = NO : on verra aisément que CP passe par O. Prolongeant aussi CP de PF = PO, on verra que 3OM = AM, 3ON = BN et 3OP = CP : c'est là un moyen de *diviser en trois parties égales toute droite* AM, *tracée sur le papier.* On reconnaît de plus, que *les six points* A, B, C, D, E, F, *sont les sommets et* O *le centre d'un hexagone symétrique, double du triangle* ABC *et de contour égal aux 4 tiers de la somme des trois droites* AM, BN *et* CP. Le triangle et l'hexagone sont *réguliers* ensemble.

Connaissant les trois côtés, on peut aisément construire ou calculer les trois droites AM, BN et CP. Mais réciproquement, *ces trois droites étant données, il en résulte les côtés et le triangle.* On a, en effet, en posant $AM = m$, $BN = n$ et $CP = p$,

$$\begin{array}{l|l} 4m^2 = 2AB^2 + 2AC^2 - BC^2, & 9AB^2 = 4\,(2m^2 + 2n^2 - p^2), \\ 4n^2 = 2AB^2 + 2BC^2 - AC^2, & 9AC^2 = 4\,(2m^2 + 2p^2 - n^2), \\ 4p^2 = 2AC^2 + 2BC^2 - AB^2; & 9BC^2 = 4\,(2n^2 + 2p^2 - m^2); \end{array}$$

$$3\,(AB^2 + AC^2 + BC^2) = 4\,(m^2 + n^2 + p^2).$$

Le point O, *centre* de l'hexagone, est dit le *centre de gravité* et mieux le *centre des moyennes distances* du triangle ABC ; parce que *la distance de* O *à une droite ou à un plan quelconque est toujours le tiers de la somme algébrique des distances de* A, B *et* C.

Il est clair d'ailleurs que les trois droites AM, BN et CP divisent à la fois le triangle en trois autres ou en trois quadrilatères, équivalents entre eux, et l'hexagone en trois parallélogrammes équivalents.

V. Si d, e, f, sont des droites qui joignent les sommets du triangle t aux milieux des côtés opposés et que ces droites soient les côtés d'un autre triangle t', on démontre aisément que $t' = \frac{3}{4}\,t$. Si donc $d + e + f = 2n$, on trouve

$$9t^2 = 16\,n\,(n - d)\,(n - e)\,(n - f).$$

De plus, d étant la base de t', son sommet se trouve en prolongeant, d'une longueur égale à la sienne, la droite qui joint les pieds de e et f. Il y a donc deux triangles t', de même base d, et conséquemment six triangles t', formant trois parallélogrammes différents, bien que ceux-ci valent chacun $\frac{3}{2}\,t$.

On aurait le triangle triple du proposé t et de même sommet, en prolongeant la base de celui-ci et la droite qui joint le sommet au milieu, chacune d'une longueur égale à la sienne.

Enfin, si l'on construit le parallélogramme ABCD tel que le côté $AB=2d$, le côté $BC=2e$ et la diagonale $AC=2f$; les droites joignant le point A aux milieux des côtés opposés BC et CD, interceptent, sur la seconde diagonale BD, la base du triangle t, dont A est le sommet; et de plus l'aire $ABCD=6t$.

V. Si en suivant le contour d'un triangle t ou d'un quadrilatère q, on prolonge chaque côté de n fois sa longueur, n étant entier ou fractionnaire, il en résultera les sommets d'un second triangle t' ou d'un second quadrilatère q', pour lesquels on aura

$$t'=t+3n(n+1)\,t \text{ et } q'=q+2n(n+1)\,q.$$

Ce qu'il faut bien remarquer, c'est que si t et q sont *réguliers* et de même côté c, t' et q' sont aussi réguliers, mais de côtés inégaux x et y. De plus, on trouve alors

$$x^2=c^2+3n(n+1)\,c^2 \text{ et } y^2=c^2+2n(n+1)\,c^2.$$

Si donc c^2 est pris pour *unité*, ou plutôt s'il est *sous-entendu*, il est clair que $n=1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, donne

$$x^2=7, 19, 37, 61, 91, \ldots, \text{ et } y^2=5, 13, 25, 41, 61, \text{ etc.}$$

Il est donc facile de construire x et y. On peut supposer n fractionnaire; ce qui donnera plusieurs nombres premiers pour les numérateurs de x^2 et de y^2.

VI. Soit H l'hexagone régulier de côté c : si en suivant le contour, on prolonge chaque côté c de n fois sa longueur, on aura les sommets d'un second hexagone régulier H', de côté x; d'où il viendra simultanément

$$H'=H+n(n+1)\,H \text{ et } x^2=c^2+n(n+1)\,c^2.$$

Pour $n=1, 2, 3, 4, 5\ 6, 7, \ldots$, le rapport $H' : H$ ou $x^2 : c^2$ devient 3, 7, 13, 21, 31, 43, 57, 73, etc. On peut aussi prendre n fractionnaire.

La construction de l'hexagone régulier étant très-simple et très-précise, aussi bien que celles du carré et du triangle équilatéral, on voit comment à l'aide de la règle et du compas, on peut multiplier, par des nombres donnés, tout carré et par conséquent l'aire plane que ce carré représente; d'où résulte aussi la multiplication des volumes (prismes ou cylindres, pyramides ou cônes).

De la Division des figures.

28. La *division des figures* consiste à les partager chacune en parties équivalentes entre elles ou proportionnelles, soit à des droites données, soit à des nombres connus.

De telles opérations se présentent dans les arts et métiers, comme dans la division et la limitation des terrains, où souvent les lignes de division doivent satisfaire à certaines conditions d'utilité et de convenance, ou d'économie; telles que d'être les plus courtes possible, soit que les unes passent par des points donnés, que d'autres soient parallèles ou perpendiculaires à des droites données de position, etc. Voici plusieurs curieux exemples, pour les arts et métiers :

I. On peut scier un morceau triangulaire d'ébène en plusieurs quadrilatères équivalents entre eux. Les portions sont au fond des prismes quadrangulaires équivalents, puisque le morceau triangulaire a toujours une certaine épaisseur, partout la même.

II. On peut couper un quadrilatère d'acajou en cinq morceaux, dont un parallélogramme, moitié du quadrilatère, et les quatre autres formant deux nouveaux quadrilatères, chacun équivalent au quart du proposé. Si celui-ci est un parallélogramme, il en sera de même des trois autres : s'il est un rectangle ou un losange, il en résultera deux losanges ou deux rectangles égaux.

III. On peut toujours couper dans un carré d'acajou, de côté c, le carré x^2 qui en soit la $(1+n^2)$ ième partie, n désignant un nombre entier. Il suffit de construire quatre triangles rectangles égaux, sur les hypoténuses c, divisées chacune en $1+n^2$ parties égales à y : la première de ces parties sera la projection du premier côté x de l'angle droit, l'autre côté valant nx. Ayant ainsi le côté x du carré cherché, le problème se résoudra avec la règle, le compas et la scie. De plus, les 4 triangles rectangles étant sciés, il reste le carré fait sur $(n-1)x$: ce carré restant est donc 0, x^2, $4x^2$, $9x^2$, $16x^2$,..., suivant que n vaut 1, 2, 3, 4, 5, etc.

IV. Deux menuisiers devant se partager en deux portions équivalentes, un morceau triangulaire d'ébène (prisme droit), qu'ils ont acheté en commun et qui a partout la même épaisseur, on saura leur indiquer comment ils doivent le scier, pour que l'ouvrage soit le plus facile possible; même lorsque les deux portions doivent être entre elles comme les sommes inégales qu'ils ont déboursées pour faire le prix de l'achat.

V. On sait aussi couper, par une section minimum, dans un tétraèdre rectangle de cuivre massif, un autre tétraèdre rectangle, moitié du premier. (Même problème pour un parallélipipède tronqué.)

VI. Dans une pierre quadrangulaire (prisme droit) d'agate précieuse, on peut couper, de deux manières, un rectangle, pour le dessus d'une boîte. Il faudra naturellement le plus grand des deux rectangles qui peuvent s'en tirer.

Si la pierre est triangulaire, les trois plus grands rectangles qu'elle puisse fournir, pour le dessus de la boîte à construire, sont équivalents chacun à la moitié du triangle. Mais celui des trois où la base approchera le plus du double de sa hauteur, donnera la plus petite somme des trois *sections* à pratiquer pour l'obtenir.

Si le dessus devait être un *ovale*, il faudrait chaque fois tracer le contour de la plus grande aire *elliptique inscrite.*

VII. Dans le cas de la pierre triangulaire d'agate, si le dessus de la boîte doit être un carré, le problème aura une seule solution, deux ou trois, suivant que le triangle sera obtusangle, rectangle ou acutangle. Pour les deux derniers, on prendra le plus grand des *carrés inscrits*, lequel aura sa base sur le plus petit côté du triangle.

Il existe des carrés *exinscrits*, dont on sait reconnaître le plus grand et le plus petit. On peut voir ce que deviennent les trois carrés, soit inscrits soit exinscrits, lorsqu'une hauteur du triangle est égale à la base correspondante, ou lorsque le triangle se change en un *biangle*, par le parallélisme de deux côtés.

VIII. Dans les opérations sur le terrain, on pourrait avoir à *diviser en trois portions équivalentes, tout polygone plan ;* soit par deux droites tirées de deux points opposés, pris sur le contour, soit par trois droites menées d'un point intérieur, l'une joignant un point donné sur le contour, ou bien étant parallèle ou perpendiculaire à une droite donnée de position.

Quelles que soient les conditions particulières auxquelles les droites de division doivent satisfaire, il faut d'abord mesurer l'aire P du polygone proposé; puis, si les droites de division doivent partir d'un point intérieur, l'une devant être perpendiculaire à un côté de P, on mènera celle-ci. On tracera ensuite une seconde droite, à partir du point, de telle sorte que la figure résultante avec la première droite, *paraisse* valoir $\frac{1}{3}$ P. On mesurera donc l'aire A de cette figure; et s'il arrive qu'on ait $A > \frac{1}{3} P$, il faudra retrancher de A le triangle $T = A - \frac{1}{3} P$; chose facile, puisqu'on pourra mener et mesurer la hauteur h de T et calculer sa base x par $\frac{1}{2} hx = A - \frac{1}{3} P$. Ayant ainsi la seconde ligne de division, on trouvera de même la troisième.

IX. C'est ainsi qu'on peut résoudre les problèmes suivants :

1° Un particulier possède une maison et un verger adjacent, clos d'un mur; il veut percer, dans ce mur, une porte telle que le sentier qui la joindra à celle de la maison, divise le verger en deux portions équivalentes; en quel endroit du mur faut-il percer la porte?

2° En quel endroit d'un terrain triangulaire faut-il creuser une citerne pour que les droites joignant les milieux des côtés au centre de l'ouverture circulaire, le divisent en trois quadrilatères équivalents?

3° Deux héritiers doivent se partager également un champ en forme de trapèze, par une droite parallèle aux deux bases; comment tracer cette droite? (La chose est facile, par le mesurage et le calcul, surtout quand on connaît le point où vont se couper les deux côtés latéraux).

4° Il est deux manières de diviser le trapèze T, dont a et c sont les deux bases, en deux parties proportionnelles aux deux droites connues m et n, sans prolonger les côtés latéraux : ou la droite de division aboutit aux deux bases, ou bien elle leur est parallèle. Dans le premier cas, elle est un minimum, si $a > c > h$, h désignant la hauteur du trapèze T; dans le second cas, sa longueur x peut se construire ou se calculer par

$$(m + n)\, x^2 = a^2 n + c^2 m.$$

Sur le terrain, où la règle et le compas ne sauraient s'employer; si l'on désigne par y la longueur que a et x interceptent sur h, il faut encore calculer y par la proportion $a - c : x - c :: h : y$. Les instruments nécessaires pour réaliser la solution, dans ce cas, sont l'équerre et la chaîne d'arpenteur (décamètre).

On peut avoir $m = n$, c peut être nul; et si l'on projète sur un côté latéral de T, les deux parties de l'autre côté, déterminées par x, il en résultera deux trapèzes rectangles, dont les aires sont comme m est à n.

X. Il existe beaucoup de questions utiles auxquelles la *division des champs* peut donner lieu : toutes se résolvent, à peu près, par les méthodes précédentes. Mais l'exactitude des résultats exige des précautions dans les mesures à prendre, avec les instruments, pour avoir des approximations suffisantes et bien connues. Ces approximations dépendent toujours de l'adresse de celui qui opère; lequel, toutes choses égales d'ailleurs, réussira d'autant mieux qu'il sera plus familiarisé avec les principes de la géométrie.

La difficulté relative à l'exactitude sur le terrain, ne tient pas seulement au mesurage des droites; mais aussi à la détermination de leur véritable intersection, aux tracés des parallèles, des perpendiculaires, etc.

Au lieu d'opérer immédiatement sur le terrain, ce qui est plus direct et parfois plus simple et plus exact, il est quelquefois préférable d'en lever le plan; surtout quand certaines opérations directes ne pourraient s'exécuter, à raison de quelques obstacles qui borneraient la vue, ou de droites inaccessibles qu'on ne pourrait mesurer. Mais à cet égard, la seule chose à recommander est l'exactitude; et pour l'obtenir, on voit qu'il faut souvent l'emploi simultané des opérations graphiques et numériques : les unes et les autres sont indispensables pour atteindre complètement le but général de la géométrie.

Comme le calcul est susceptible d'une exactitude complète, on le substitue, autant que possible, aux procédés graphiques : on ne mesure, sur le terrain ou sur le papier, que les données, strictement nécessaires et suffisantes, puis l'on détermine les inconnues par des équations. On tâche alors, par un choix convenable dans les éliminations, que l'équation finale soit du degré le moins élevé possible.

Par exemple, *connaissant numériquement l'aire* a *d'un triangle, ainsi que les rayons* b *et* c *des cercles inscrit et circonscrit, calculer les trois côtés* x, y, z.

D'après les diverses expressions de l'aire a, on a

$$b(x + y + z) = 2a\ ,\ xyz = 4ac \text{ et}$$
$$(x + y + z)(x + y - z)(x + z - y)(y + z - x) = 16a^2.$$

Posant $bd = a$, ces trois équations symétriques deviennent

$$x + y + z = 2d,\ xyz = 4bcd \text{ et}$$
$$xy + xz + yz = b^2 + d^2 + 4\,bc.$$

Or, d'après la composition des coefficients, on voit que les inconnues x, y, z sont racines de la même équation finale

$$v^3 - 2dv^2 + (b^2 + d^2 + 4bc)\,v - 4bcd = 0.$$

Si le triangle existe, les trois racines de cette équation seront des nombres positifs (vu d'ailleurs qu'il y a trois *variations*) ; mais on ne saurait les obtenir, sous formes réelles et finies, que pour des valeurs particulières de a, b, c. Si donc $a = 84$, $b = 4$ et $c = 8,125$, la méthode des diviseurs commensurables donne $x = 15$, $y = 14$ et $z = 13$.

L'équation générale en v se décompose en facteurs inconnus, si $d = b + 2c$: il vient alors $v = x = 2c$. Cela revient à établir entre les racines x, y, z, la relation $x^2 = y^2 + z^2$.

Il y aurait encore *abaissement* au second degré, si l'on devait avoir $z = y$ ou $z = 2y$, etc. On pourrait calculer l'aire a, si l'on se donnait $b = 4, 8c = 65$ et $y = 14$.

On peut aussi calculer le troisième côté x *du triangle dont on connaît numériquement les deux côtés* a *et* b, *avec le rayon* r *du cercle inscrit.* Posant $a + b = m$ et $a - b = n$, l'équation finale sera

$$x^3 - mx^2 - (n^2 - 4r^2)\,x + m\,(n^2 + 4r^2) = 0.$$

Si $a = 61$, $b = 60$ et $r = 5$, on aura $x = 11$, d'où $a^2 = b^2 + x^2$. Les deux autres valeurs de x sont irrationnelles et absolument insignifiantes ; de sorte qu'alors le triangle est unique et rectangle.

XI. *Un verger quadrangulaire, clos d'un mur, doit se diviser en deux portions équivalentes par un autre mur, de même hauteur que le premier; quelle direction doit-on donner à ce mur de division, pour que sa longueur et par suite le prix de sa construction soient les moindres possible ?*

Comme cette longueur, droite minimum, sera d'autant plus petite que l'angle des deux côtés du quadrilatère, auxquels elle aboutira, sera plus petit lui-même, la première difficulté est de reconnaître ce plus petit angle, qui n'appartient pas à la figure. La seconde difficulté est de tracer le plus petit angle, avec exactitude, par une parallèle au second des côtés proposés, tirée d'une extrémité de l'autre côté. La troisième difficulté est de tracer exactement la bissectrice de ce plus petit angle, ainsi construit. Enfin, la quatrième difficulté est de mener, à cette bissectrice, la perpendiculaire, droite de division cherchée.

On mènera donc une perpendiculaire à la bissectrice, de telle sorte que cette perpendiculaire *paraisse* diviser le quadrilatère proposé en deux portions équivalentes. On mesurera les aires A et B de ces portions; et si $A > B$, mais que la différence $A - B$ ne surpasse pas le 100e de $A + B$, on regardera $A - B$ comme un rectangle, à diviser en deux parties égales, par une perpendiculaire à la bissectrice proposée. Or, cela est facile, puisque la base du rectangle $A - B$ est déjà connue.

Si l'on peut sortir du verger et aller marquer, avec précision l'intersection des côtés, qui comprennent le plus petit angle; si de plus, on peut mesurer les aires des deux triangles résultants; ce qui fera connaître l'aire du triangle, à retrancher, par une droite minimum; celle-ci se trouvera aisément.

XII. On pourrait d'abord lever le plan du quadrilatère; et c'est ce qu'il faudrait faire, *pour un étang ou un bois*, *à diviser en deux portions équivalentes*, *par une droite*, *qu'il faudrait encore rendre minimum*. Or, quand même la figure semblable, obtenue sur le papier, ne serait pas un quadrilatère, il ne serait pas difficile d'y tracer, d'après ce qui précède, la droite minimum cherchée: pour l'obtenir sur le terrain, il faudra, si la figure est un bois, y déterminer, sur chacun des prolongements de cette droite, au moins deux points respectivement homologues à ceux de la ligne du plan. On pourra alors pratiquer la percée demandée, laquelle étant un minimum, exigera le plus petit ouvrage; et l'on pourra accélérer la besogne en attaquant le bois des deux côtés à la fois.

XIII. Dans une propriété, ayant un jet d'eau, on veut établir un parterre hexagonal d'un hectare d'étendue, et le diviser en six portions équivalentes par les *axes* de six allées, aboutissant au jet d'eau et divisant l'espace autour de lui en six angles égaux. Quelles doivent être les longueurs de ces six allées, pour que le prix total de leur construction et de celle du mur, qui doit entourer le parterre, soit un minimum? (Même problème si le parterre devait être triangulaire ou quadrangulaire).

XIV. S'il y a *n* allées, dont les axes divisent l'espace angulaire autour du jet d'eau en *n* parties égales, et que l'on connaisse le prix total de la construction des n allées, ainsi que le prix de chaque mètre de longueur ; le calcul apprend que les allées doivent avoir la même longueur chacune pour que le polygone, dont elles joignent les sommets, soit un maximum. Ce polygone étant régulier, aura en même temps le moindre contour, parmi tous ceux d'un même nombre n de sommets et de même étendue.

XV. Le diamètre AB d'un cercle tracé étant divisé en n parties égales à x ; les demi-circonférences décrites d'un côté de AB, sur les diamètres x, $2x$, $3x$, ..., $(n-1)x$, partant du point A, et les demi-circonférences décrites de l'autre côté de AB, sur les diamètres x, $2x$, $3x$, ... $(n-1)x$, partant du point B, divisent le cercle proposé en n portions équivalentes en surface et en contour.

La figure est fort remarquable, et l'on peut diviser ainsi le cercle en deux parties dont le rapport soit donné. On peut aussi diviser le cercle proposé en n portions équivalentes, par des circonférences concentriques, et faire de ces portions des cercles égaux. On peut enfin changer toute *couronne circulaire* donnée en deux cercles égaux entre eux.

Propositions diverses.

I. Lorsqu'un point mobile, se mouvant en ligne droite, part du côté BC d'un rectangle donné ABCD, pour aller frapper successivement et continuellement les côtés CD, DA, AB et BC, en faisant avec chacun l'angle d'*incidence* égal à l'angle de *réflexion* ; 1° si l'on mène DZ parallèle aux chemins de BC à CD, Z étant sur BC, la somme des quatre chemins décrits par le point mobile, pour revenir sur BC, sera 2DZ chaque fois ; 2° le *maximum* de cette somme sera le double de la diagonale BD du rectangle ; 3° les distances successives du mobile sur BC, à l'extrémité C, forment une *progression arithmétique* ; et il en résulte le moyen de calculer la *position* du mobile, sur chaque côté, après l'avoir rencontré v fois ; 4° le *sens* du mouvement changera dès que le mobile devra rencontrer le prolongement d'un côté, c'est-à-dire dès que la distance sur ce côté sera *négative* ; et il en sera de même si cette distance est *nulle* ; 5° dès que le point mobile rencontre les milieux de deux côtés consécutifs, il rencontre perpétuellement tous les côtés chacun à son milieu ; et la somme des quatre chemins est chaque fois le *maximum* 2BD, tandis que c'est le contour *minimum* de tous les parallélogrammes *inscrits* dans le rectangle proposé. (Ces propriétés et celles analogues, pour le triangle équilatéral, se démontrent aisément, par le calcul, à l'aide de triangles rectangles semblables, dont l'un ait un côté égal à l'unité linéaire).

II. On a une table rectangulaire, dont $2a$ et $2b$ sont les côtés adjacents ; on veut placer à la hauteur connue c au dessus de cette table, deux corps lumineux égaux, fournissant la lumière 1, à la distance 1, de telle sorte que les projections des centres de ces corps sur la table, tombent sur la droite qui joint les milieux des petits côtés $2b$, de part et d'autre et à la même distance x du milieu de cette droite. Quelle doit être cette distance x, pour qu'un point du côté $2a$, à la distance donnée d de son milieu, soit le plus éclairé qu'il est possible? (Même problème pour quatre corps lumineux égaux, ou pour une table *elliptique*, les corps étant chaque fois placés *symétriquement*).

Il faut ici construire les valeurs; mais on doit d'abord les obtenir par le calcul ; et pour cela il est nécessaire de se rappeler que la lumière se propage en raison inverse du carré des distances. (On voit comment on peut disposer les lumières pour avoir chaque fois le meilleur système possible d'éclairage).

III. Le plancher d'une salle a 14 mètres de long sur 10 de large ; comme les planches sont déformées, par l'effet de l'humidité, on veut remplacer ce plancher par un pavé de marbre, composé de trois sortes de polygones réguliers, ayant tous leurs côtés de la même longueur 0^m2. Or, parmi les dix systèmes possibles, on s'arrête aux deux où l'on réunit, 1° un carré et deux octogones réguliers; 2° un carré, un hexagone et un dodécagone. Comme après qu'ils sont posés, les carrés, les hexagones, les octogones et les dodécagones coûtent respectivement chacun 30 centimes, 80, 95 et 100, on demande lequel des deux systèmes coûtera le moins?

IV. Considérons un pré en forme de trapèze rectangle, dont les valeurs de la hauteur et des deux bases parallèles sont respectivement 200 mètres, 120 et 60. Supposons que la hauteur de l'herbe, sur la plus grande base, soit toujours double de la hauteur de l'herbe, sur la plus petite ; ensorte que le niveau soit un plan, comme le terrain. Supposons d'ailleurs que les brins d'herbe soient uniformément repartis sur le pré et qu'il s'agisse de le diviser, par une perpendiculaire à la hauteur, en deux autres prés, fournissant chacun la même quantité d'herbe : comment calculer, sur la hauteur, le pied de la perpendiculaire demandée? Réponse : c'est en considérant la totalité de l'herbe, fournie par le pré, comme le tronc d'un prisme droit, ayant ce pré pour base. (Ce tronc peut se diviser en deux autres, *semblables* entre eux; quel est le rapport de leurs volumes?)

V. Si l'on veut diviser la sphère, de rayon r donné, en deux segments dont n soit le rapport connu du plus petit à la sphère, il faudra calculer la hauteur du plus petit des deux segments cherchés ; et en la désignant par vr, v étant un nombre inconnu, on aura

$$v^3 - 3v^2 + 4n = 0.$$

Le nombre v sera *rationnel* pour $n = 1 : 2, 2 : 27, 7 : 27, 11 : 32, 13 : 125$, etc. (même problème pour les surfaces).

On ne sait pas résoudre le problème pour deux segments circulaires; mais si la corde commune est $c = vr$, v étant donné numériquement, aussi bien que r, il est facile de calculer le plus petit des deux segments cherchés, ainsi que le rapport n, après avoir évalué l'arc en degrés (avec le compas, si cet arc est tracé sur le papier).

VI. Dans une citerne, remplie d'eau, l'intérieur est un tronc de cône droit à bases circulaires parallèles, dont la hauteur verticale ou plutôt la profondeur a 3 mètres, tandis que le rayon de l'ouverture (plus petite base horizontale) est long de 0^m8 et fait un angle de 30^o avec le prolongement du côté générateur adjacent. L'ouverture du tuyau de pompe, qui sert à en tirer l'eau, est à 0^m6 du fond; et comme dans les grandes sécheresses, le niveau de l'eau s'abaisse à 0^m1 au-dessous de cette ouverture, quel volume de sable faut-il jeter dans la citerne, pour que le plus grand abaissement du niveau reste à 0^m2 au-dessus de l'ouverture du tuyau? Combien la citerne peut-elle renfermer d'hectolitres d'eau, abstraction du volume de la pompe? Quelles seraient les dimensions d'une citerne semblable et d'une capacité 8 fois plus petite? Combien a dû coûter la surface latérale de la surface proposée, pour la revêtir de zinc, payé à raison de 40 centimes le décimètre carré? Quels sont enfin les rayons et l'angle commun des deux secteurs circulaires concentriques, dont cette surface latérale est la différence?

VII. Le *chapeau* d'un quinquet est la surface latérale d'un tronc de cône droit, à bases circulaires parallèles; lequel a respectivement 0^m18, 0^m1 et 0^m025 de côté et de rayons des bases. Comment a-t-on pu tracer sur la feuille de cuivre, les deux secteurs circulaires concentriques, dont la surface latérale proposée est la différence? Quelle serait la capacité du vase formé par cette surface latérale et deux cercles du même cuivre? Quel serait enfin le prix de la confection de ce vase, payé à raison de 1 fr. 20 le décimètre carré de surface intérieure?

VIII. Tracer sur un plan le cercle équivalent à un fuseau sphérique donné, ou à une zône connue, ou qui soit dans le rapport n donné avec la surface de la sphère, de rayon connu. (La surface totale du cube, équivalent au quart du volume de la sphère, est moindre que la surface totale de ce quart).

IX. La surface sphérique peut se partager en polygones réguliers, égaux et finis, de cinq manières différentes, savoir : en 4, 8 et 20 triangles; en 6 quadrilatères et en 12 pentagones réguliers (de sorte qu'il ne peut exister que 5 polyèdres réguliers); mais en outre, le volume de la sphère est, sous trois points de vue différents, un polyèdre régulier composé d'une infinité de faces, égales et infiniment petites, ces faces étant ou des triangles réguliers, réunis 6 à 6 autour d'un même sommet, ou des carrés réunis 4 à 4, ou enfin des hexagones réguliers réunis 3 à 3.

C'est ce qu'on démontre aisément par les procédés de l'*analyse indéterminée*. Et comme le polygone sphérique, dont les côtés sont infiniment petits, n'est que la portion du plan tangent, autour du contact, on voit non seulement que le volume de la sphère a pour mesure le produit des mesures de sa surface S et du tiers de son rayon r; mais de plus, que si O désigne l'onglet dont le fuseau F est la base, on a $O = \frac{1}{3} F r$. Et de même, pour le secteur et la pyramide sphériques. On voit aussi que deux sphères sont toujours *semblables*, comme polyèdres réguliers d'un même nombre infini de faces semblables.

X. Une citerne est formée d'un cylindre droit surmonté d'une voûte hémisphérique, percée d'un trou circulaire, dont le centre et ceux des bases du cylindre sont sur une même verticale. L'impossibilité de mesurer *directement* les dimensions intérieures fait employer une longue perche, par laquelle on s'assure que le centre de l'ouverture est verticalement à 8 mètres au-dessus du fond, à $4^{m}5$ du niveau de l'eau et à 10^{m} de la circonférence de la base inférieure. Peut-on, d'après cela, calculer combien il y a d'hectolitres d'eau dans la citerne et combien a dû coûter sa construction, payée à raison de 8 fr. par mètre carré de surface intérieure, celle du fond exceptée?

VI. Si dans une citerne, de même forme que la précédente, on ne pouvait prendre aucune mesure, mais que l'on sût, par le mémoire de l'entrepreneur, que sa capacité est 12π mètres cubes, tandis que la surface, celle du fond exceptée, vaut 14π mètres carrés; le rayon x de chaque base serait donné par l'équation

$$x^3 - 21x + 36 = 0.$$

Mais si la capacité étant toujours 12π mètres cubes, on voulait faire construire la citerne, de telle sorte que la surface intérieure $2m\pi$, celle du fond exceptée, coûtât le moins possible, le mètre carré étant payé à raison de 8 francs; il est clair que x désignant le rayon de chaque base, on aurait à calculer, par la méthode des *dérivées*, le *minimum* de m dans

$$x^3 - 3mx + 36 = 0.$$

XII. Dans le caveau d'une église, on a trouvé un cercueil de plomb, en forme de tronc de pyramide à bases parallèles ABCDE et A'B'C'D'E'. La plus grande est le rectangle ABDE joint au triangle isocèle BCD. La face AA'E'E est un trapèze isocèle, perpendiculaire aux deux bases et dont la hauteur vaut $2^{m}40$, d'après le mesurage direct. De même, $AE = 0^m64$, $AB = 0^m40$, $BC = CD = 0^m40$ et $A'E' = 0^m40$. D'ailleurs, on s'est assuré que le vide intérieur est un tronc T', *semblable* au premier T, et dont le côté homologue à AB vaut 0^m39. Quel est le prix du cercueil vide, vendu à raison de 80 centimes le kilogramme, le poids spécifique du plomb étant 11,35? (On trouverait aussi le volume du plomb, par l'immersion du cercueil vide dans un bassin d'eau, à faces rectangulaires, et en mesurant exactement les dimensions du parallélipipède d'eau équivalent; mais la difficulté serait de placer le cercueil vide dans le bassin).

XIII. Pour que la somme des projections d'une aire plane donnée a, sur trois plans perpendiculaires entre eux, soit la plus grande possible, il faut que le plan de a coupe les arêtes du trièdre droit aux distances du sommet égales chacune à $\sqrt{(2a)}$.

XIV. Connaissant les aires de plusieurs figures planes, non parallèles entre elles, si on les projète sur un même plan P (à trouver), la somme s des projections sera un maximum lorsque les projections de s, sur trois plans rectangulaires, seront les projections respectives des sommes des projections de toutes les aires proposées sur ces trois plans. (On peut calculer la position du plan P).

XV. De tous les troncs de prismes triangulaires, de même volume, comme ayant les mêmes arêtes latérales respectives et la même section a perpendiculaires à ces arêtes, celui dans lequel la section a joint les milieux des mêmes arêtes, a la moindre somme possible des aires de ses deux bases.

C'est ce qu'on démontre, en désignant par m la somme variable des aires x et y des deux bases et en cherchant le minimum de m, dans les trois équations $x + y = m$, $x = a \cos (ax)$ et $y = a \cos (ay)$; etc.

Corollaires. De là résultent immédiatement les corollaires, que voici : 1° Entre tous les corps de même volume, la sphère est celui de moindre surface; et réciproquement. 2° De toutes les surfaces courbes qui, se terminant à une même circonférence, renferment le même volume terminé par le cercle, la calotte sphérique est celle de moindre étendue; et réciproquement. 3° De tous les segments sphériques, terminés par des calottes de même étendue, mais de rayons différents, le plus grand est une demi-sphère; et réciproquement. (Ces corollaires sont démontrés tome XIII des annales de mathématiques).

XVI. De tous les tétraèdres équivalents entre eux, le régulier est celui de moindre surface et de moindre somme d'arêtes (les réciproques sont vraies). De même, parmi tous les tétraèdres de même somme d'arêtes, le régulier est celui de plus grande surface; et réciproquement. (C'est ce qu'on démontre aisément d'après le théorème XV, énoncé ci-dessus).

XVII. On a un *anneau rond* d'argent massif, dont le diamètre intérieur vaut 0^m2 et le diamètre extérieur 0^m28 ; on veut le fondre en un vase ouvert par le haut, en forme de cylindre droit, dont la paroi ait partout 0^m005 d'épaisseur. Quelles doivent être les dimensions intérieures de ce vase pour que sa capacité soit un maximum ? (Comme le titre de l'argent employé est 900 millièmes, ou celui de l'argent monnayé, dont la pièce d'un franc pèse 5 grammes, on peut calculer la valeur intrinsèque du vase, en supposant que le poids spécifique du métal soit 10,30).

Sa capacité maximum serait-elle différente, si l'intérieur du vase devait être un parallélipipède rectangle, et quelle serait-elle alors?

XVIII. Si par un point de la bissectrice d'un angle tracé, on mène sur cette droite une perpendiculaire et différentes obliques, toutes terminées aux deux côtés de l'angle ; 1° la perpendiculaire est plus courte que toute oblique ; 2° elle intercepte le moindre triangle possible; 3° la somme des segments que la perpendiculaire détermine sur les côtés de l'angle est un minimum, de même que leur produit et la somme de leurs carrés.

XIX. De tous les triangles circonscrits à un même cercle, l'équilatéral est celui qui a le moindre contour, la moindre surface, le moindre cercle circonscrit, la moindre somme des cercles exinscrits et le moindre triangle joignant les centres de ces trois cercles.

XX. Parmi tous les triangles isopérimètres, l'équilatéral est celui qui a la plus grande surface, le plus grand cercle inscrit, le moindre cercle circonscrit, la moindre somme des cercles exinscrits et le moindre triangle joignant leurs centres.

XXI. Si du sommet de la parabole $y^2 = 2px$, rapportée à ses axes principaux, on abaisse des perpendiculaires sur les tangentes à cette courbe, ces perpendiculaires iront couper chacune l'ordonnée du contact sur la parabole *semi-cubique* $py^2 = 2x^3$. Réciproquement, si la courbe donnée est $py^2 = 2x^3$, la courbe cherchée sera $y^2 = 2px$. On peut calculer les aires A et A' des demi-segments limités par chaque courbe et par les coordonnées $x = k$ et $y = h$; d'où $h^2 = 2pk$ dans l'une et $ph^2 = 2k^3$ dans l'autre. On peut aussi calculer les expressions des volumes décrits par A autour de l'axe des x et par A' autour de l'axe des y. Enfin, si la courbe donnée est $a^2y = x^3$, quelle sera la courbe cherchée ?

XXII. Le lieu géométrique de tous les pieds des perpendiculaires abaissées, sur les plans qui passent par l'origine des coordonnées rectangulaires, du point de l'axe des x, pour lequel $x = 2a$, est la surface sphérique dont a est le rayon.

XXIII. Les coordonnées étant rectangulaires, l'équation

$$5y^2 + 4z^2 = 20x\,,$$

représente, comme on sait, le *paraboloïde elliptique*, dont 5 et 4 sont les paramètres principaux. Calculer l'aire de l'une des sections circulaires, faites par la sphère dont le centre, sur l'axe des x, est à la distance 6 de l'origine. Et si, par le point de l'axe des x, pour lequel $x=10$, on mène un plan parallèle à l'axe des y ; quelle doit être la position de ce plan, pour que la projection de l'aire elliptique résultante, sur le plan des xy, soit un cercle? Quelles seront les expressions des aires du cercle et de l'ellipse en fonctions du nombre π? (Mêmes problèmes pour l'*ellipsoïde* $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$).

XXIV. Le lieu géométrique du pied de la perpendiculaire abaissée sur tout rayon a du cercle, du pied de l'ordonnée de l'extrémité de ce rayon, est une *lemniscate* dont l'aire est les trois huitièmes de celle du cercle proposé. Ici l'origine des coordonnées rectangulaires est au centre du cercle; mais si elle est à l'extrémité d'un diamètre $2a$, sur l'axe des x, et que, sur la corde qui joint l'origine à un point quelconque (x', y') de la circonférence, on abaisse une perpendiculaire, tirée du pied de y', le pied de cette perpendiculaire est sur une demi-lemniscate, dont l'aire est les cinq huitièmes de celle du cercle.

XXV. L'origine des coordonnées rectangulaires étant au centre de la sphère, le lieu géométrique du pied de la perpendiculaire, abaissée sur tout rayon a, du pied du z' de l'extrémité (x', y', z') de ce rayon, est la surface algébrique

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2\,(x^2 + y^2)^2\,;$$

c'est la surface de révolution décrite par la première lemniscate du précédent théorème, tournant ici autour de l'axe des z. Le volume engendré, par une demi-révolution, a pour mesure $\frac{5}{24}\,\pi^2\,a^3$. (On aurait encore une surface de révolution, si les perpendiculaires étaient abaissées, sur les plans tangents, du point de l'axe des x, pour lequel $x = a$: alors la courbe génératrice, tournant autour de l'axe de x, limite l'aire mesurée par $1/5\,\pi\,a^2$).

III. — *Mémoire sur les propriétés de l'Ellipse;*

Par J.-N. NOEL,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

Préliminaires.

I. Les lignes du second ordre, dont l'étude est l'objet de la géométrie analytique plane, possèdent, comme on sait, un grand nombre de propriétés importantes. On sait aussi que, parmi ces propriétés, les plus utiles sont celles de l'ellipse et de la circonférence, lesquelles se déduisent souvent les unes des autres, à raison de la grande analogie entre les deux courbes.

II. La possibilité de représenter les lignes planes par des équations, entre les coordonnées variables x et y de chacun de leurs points, en facilite singulièrement l'étude complète; et d'abord l'équation étant donnée, on en déduit la nature et la forme de la ligne, lesquelles dépendent essentiellement du degré de l'équation; et celle-ci fournit toujours quelques propriétés *caractéristiques* de la ligne proposée, d'où l'on peut la définir et la décrire ensuite.

III. LIGNE DROITE. On démontre aisément que *toute équation du premier degré, ramenée à la forme*

$$y=nx+h,$$

représente une ligne droite, et réciproquement. Pour que la droite soit déterminée de *position* sur le plan, il faut que les deux *constantes arbitraires* n et h soient des nombres connus, *positifs* ou *négatifs.* Or, $x=0$ donne $y=h$; ainsi h est la distance numérique de l'origine au point où la droite coupe l'axe des y. De même, $x=1$ donne $n=y'-h$; de sorte que n est la différence des ordonnées qui répondent à $x=0$ et à $x=1$. Or, si h est connue, $x=0$ donne un premier point de la droite proposée; tandis que si n est donnée numériquement, $x=1$ fait connaître y' et par suite un second point de la droite: celui-ci en détermine donc la *direction.* Voilà pourquoi il convient d'appeler *direction* de la droite, le coefficient n de x dans son équation. La direction n a donc $y'-h$ pour valeur analytique; et quant à son expression trigonométrique, c'est le rapport des sinus des angles α et β que la droite fait avec les axes des x et des y. De sorte que si les coordonnées sont rectangulaires, on a $n = \tan\alpha$.

Observons d'ailleurs que si k désigne la distance de l'origine au point où la droite coupe l'axe des x; la droite est alors représentée par l'équation *homogène*

$$\frac{x}{k} + \frac{y}{h} = 1\text{; d'où } n = \frac{h}{k}.$$

Cette équation l'emporte sur l'autre pour résoudre certains problèmes, et particulièrement dans la théorie des *transversales* rectilignes; mais généralement l'équation $y = nx + h$ est préférée dans la *combinaison* des droites et des points.

IV. Par exemple, connaissant les extrémités (x,y) et (x',y') d'une droite donnée d; si l'on veut calculer le point (X,Y), divisant d en deux parties p et q, dans le rapport connu R, d'où $p = q\mathrm{R}$, il faudra employer l'équation $y = nx + h$, avec les expressions des distances p et q, l'angle θ des coordonnées étant quelconque : on trouvera

$$(1+\mathrm{R})\mathrm{X} = x + \mathrm{R}x' \text{ et } (1+\mathrm{R})\mathrm{Y} = \mathrm{Y} + \mathrm{R}y'.$$

Si $p = q = \frac{1}{2}d$, ou $\mathrm{R} = 1$, il vient $2\mathrm{X} = x + x'$ et $2\mathrm{Y} = y + y'$. D'ailleurs $2\mathrm{X} = x + x'$ revient à $x' - \mathrm{X} = \mathrm{X} - x$; de sorte que le pied de Y divise $x' - \mathrm{X}$ en deux parties égales. Ainsi *dans tout trapèze, la droite* Y *qui joint les milieux des côtés latéraux* d *et* x'—X, *est parallèle aux deux bases* y' *et* y, *et vaut leur demi-somme*. Si d'ailleurs $x = y = 0$, d'où $2\mathrm{Y} = y'$, on en conclut que *la droite joignant les milieux des côtés latéraux de tout triangle, est parallèle à la base* y' *et en vaut la moitié.*

De plus, pour R quelconque, on a $p : q = x' - \mathrm{X} : \mathrm{X} - x = y' - \mathrm{Y} : \mathrm{Y} - y$. On retrouve donc ainsi la propriété des triangles équiangles, d'où l'on est parti pour démontrer que $y = nx + h$ représente une suite de points en ligne droite.

V. Soient $y = nx + h$ et $y = n'x + h'$ deux droites données, et (x',y') un point connu de la seconde : si l'on veut calculer le point (x,y) d'intersection de ces deux droites, on posera $a = y' - nx' - h$ et l'on trouvera

$$(n - n')(x - x') = a \text{ et } (n - n')(y - y') = an'.$$

Si les deux droites proposées sont parallèles, leur intersection (x,y) n'existe pas; les deux valeurs de $x - x'$ et $y - y'$ sont donc impossibles. Or, cela exige que a n'étant pas nul, on ait $n - n' = 0$

ou $n=n'$. Réciproquement, si $n=n'$, a n'étant pas nul, *les deux droites sont parallèles.*

Si l'intersection (x,y) existe, soit d sa distance au point (x',y'); soit $c=\cos\theta$ et $s=\sin\theta$: on aura, pour calculer d,

$$(n-n')^2d^2=a^2(1+n'^2+2cn').$$

Si n' est variable avec d seule, cette équation, résolue par rapport à n', donne, pour le *minimum* de d,

$$d\sqrt{(1+2cn+n^2)}=as=(y'-nx'-h)s.$$
$$\text{et } (d^2-a^2)n'=d^2n+a\ c.$$

Puisque d est la plus courte distance du point (x',y') à la droite $y=nx+h$, d est nécessairement perpendiculaire à cette droite. Éliminant donc d^2, d'où $(c+n)(1+nn'+cn+cn')=0$, on aura, pour la condition de *perpendicularité* des deux droites $y=nx+h$ et $y=n'x+h'$, la relation

$$1+nn'+(n+n')\cos\theta=0.$$

Telle est la condition, nécessaire et suffisante, pour que les deux droites, dont n et n' sont les directions, soient perpendiculaires entre elles. Et comme cette condition est indépendante de h et de h', on voit que toute droite perpendiculaire à l'une des parallèles (de direction n commune) est perpendiculaire à toutes les autres.

VI. La condition ci-dessus et l'expression du minimum d se simplifient beaucoup lorsque $\theta=90°$, d'où $\cos\theta=0$ et $\sin\theta=1$. Aussi lorsqu'il s'agit de calculer les angles et les distances, faut-il prendre l'angle $\theta=90°$, comme dans les propositions que voici, à établir :

1° Tous les points chacun à égales distances de deux droites qui se coupent appartiennent à deux droites rectangulaires, bissectrices des angles de ces deux droites. Mais ces droites ne seraient pas rectangulaires, si l'une des distances de chaque point devait être double de l'autre.

2° Si du point $(a,0)$ de l'axe des x rectangulaires, on mène une oblique quelconque à l'axe des y, l'extrémité de la perpendiculaire à l'oblique, de même longueur et menée par son pied, se trouve sur l'une des deux droites rectangulaires $y=x+a$ et $y=-x-a$. (Cela conduit à une propriété, assez remarquable, du carré).

3° Une droite et un point au-dehors étant donnés ; quel est le lieu géométrique des points divisant chacun toute droite, menée du point à la droite, en deux parties, dans le rapport connu de a à b ?

4° Chaque point du plan d'un rectangle donné est tel, que la somme des carrés faits sur les distances de ce point à deux sommets opposés vaut la somme des carrés construits sur ces distances aux deux autres sommets. Mais si la différence des deux premiers carrés doit être équivalente à la différence des deux derniers, ou si les quatre carrés doivent être proportionnels, ou enfin si la somme de deux premières distances doit être égale à la somme des deux autres; chaque fois les points, dont chacun jouit de la propriété énoncée, se trouvent sur deux droites rectangulaires.

VII. Les axes rectangulaire simplifient les calculs; cependant il est parfois préférable de les rendre obliques ; comme dans les propositions que voici :

1° Trois parallèles, de longueurs données inégales, étant deux à bases de trois trapèzes, les trois intersections des trois couples de côtés latéraux appartiennent à une même droite. (Ici l'axe des x obliques étant sur l'une des parallèles, celui des y doit passer par deux des trois intersections).

2° Soit O un point du parallélogramme donné MNPQ : si O est l'origine des coordonnées obliques dont les axes soient respectivement parallèles aux côtés du parallélogramme, savoir l'axe des x rencontrant en A et C les côtés opposés NP et MQ, tandis que celui des y rencontre en B et D les côtés opposés PQ et MN ; il y aura, dans l'ensemble des cinq parallélogrammes, six systèmes de trois diagonales se coupant en un même point, savoir : 1° QA, BN et MO; 2° MB, CP et NO; 3° MA, DP et QO; 4° QD, CN et PO; 5° CB, DA et PM; 6° enfin, CD, BA et QN.

3° Les trois intersections 1°, 4° et 5° ne seraient-elles pas en ligne droite, de même que 2°, 3° et 6° ? Ce qui le ferait penser, c'est que quand l'origine O est le centre de MNPQ, 5° et 6° cessent d'exister, tandis que 1°, 2°, 3° et 4° sont les sommets d'un parallélogramme, semblable et concentrique à MNPQ.

4° Soit le triangle quelconque ABC : par les sommets B et C, on mène, aux côtés opposés AC et AB, les parallèles BD et CE, de longueurs données arbitraires, d'où les droites BE et CD se coupent en un point O; si de plus, par D et E, on mène à AB et à AC, deux parallèles se coupant en P ; les trois points O, A, P sont en ligne droite.

VIII. Circonférence. L'équation de la circonférence prend diverses formes, pour exprimer que tous les points de cette ligne plane sont à la même distance du centre fixe. Cette équation conduit, avec facilité, à toutes les propriétés de la ligne circulaire ; mais les coordonnées doivent être rectangulaires, comme dans les propositions que voici :

1° Le lieu géométrique de tous les points tels, que la somme des carrés des distances de chacun aux sommets du triangle T, dont a, b, c, sont les côtés donnés, soit le carré constant m^2, est la circonférence ayant pour centre celui de gravité de T. Le *minimum* de m^2 est $3m^2=a^2+b^2+c^2$; et alors la circonférence se réduit à son centre.

Il existe un théorème analogue pour le parallélogramme et pour tant de points, qu'on voudra donner sur un plan.

2° La circonférence à décrire est telle, que le carré fait sur la distance de l'un quelconque de ces points à l'extrémité de la base d'un triangle isocèle tracé, vaut la somme des carrés construits sur les distances de ce points aux deux autres sommets.

3° Calculer le rayon de la circonférence, lieu géométrique de tous les points tels, qu'en menant de l'un quelconque O de ces points les droites OA, OB, OC et OD aux quatre points A, B, C, D, donnés sur une droite, on ait l'angle AOB=COD. On suppose AB=2, AC=5 et AD=8.

4° Le point (4,0) est le sommet fixe d'un angle droit mobile, dont un côté s'arrête constamment à l'axe des y rectangulaires; quel est le lieu géométrique du point (x,y) de l'autre côté tel, 1° que la longueur de ce côté soit égal à l'abscisse x de ce point? 2° que le triangle résultant soit constamment isocèle? 3° que l'aire du triangle variable résultant soit toujours équivalente au carré 36?

5° Si l'espace plan autour d'un point O est divisé en m parties égales, par m droites; le point dont la somme des carrés de ces distances à ces n droites vaut le carré donné c^2, appartient à la circonférence ayant O pour centre et $2c^2$ sur m pour carré numérique du rayon.

6° Un polygone régulier de m sommets et son apothème a étant donnés; chaque point, dont la somme des carrés des distances aux m côtés, vaut le carré donné c^2, appartient à la circonférence, de même centre que le polygone et de rayon r tel, qu'on a $\frac{1}{2}mr^2=c^2-\frac{1}{2}ma^2$. Pour le minimum de c^2, cette circonférence se réduit à un seul point.

7° Deux circonférences concentriques, dont les rayons a et b sont donnés, sont toujours telles, que la somme des carrés des distances de chaque point de la plus petite aux m points, qui divisent la plus grande en m parties égales, vaut constamment $m(a^2+b^2)$.

(Ces trois derniers théorèmes exigent la sommation de certaines séries trigonométriques).

IX. LIGNES DU SECOND ORDRE. L'équation la plus générale du second degré, à deux variables x et y, peut toujours se ramener à la forme

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0\ ;\ .\ .\ .\ (a)$$

A étant positif et les autres coefficients, donnés numériquement, aussi bien que A, ayant des signes et des valeurs quelconques. Si cette équation est *possible*, elle détermine chacun des points (x,y) d'une ligne nécessairement courbe, dite *ligne du second ordre* ou *courbe du second degré.* Comme la *forme* et le *genre* de cette courbe dépendent essentiellement des valeurs et des signes des coefficients et que l'équation, supposée toujours possible, représente toutes les courbes imaginables du second degré, pour une même valeur de l'angle θ des coordonnées, il est naturel d'en déduire toutes les *propriétés* de ces courbes, comme d'une source commune, qui les rend parfaitement *analogues*, en passant d'une courbe à une autre, et étend ainsi la théorie, développée pour un genre, à tous les autres genres, moyennant certaines modifications, très-simples et faciles à prévoir. Mais l'étude des lignes du second ordre, d'après l'équation complète ci-dessus, serait fort difficile, à raison de la complication des calculs, qui masqueraient souvent les conséquences. Il faut donc *représenter* les lignes du second ordre par leurs équations les plus simples; et il existe, à cet effet, plusieurs méthodes. La suivante, indiquée dans mon traité de géométrie analytique et dont mon collègue, M. Brasseur, avait fait usage de son côté, dans son traité lithographié, est la plus directe; car il en résulte immédiatement la *forme* générale des courbes de même genre, cette forme étant caractérisée par le binome B^2-4AC.

Coupons en effet, la courbe (a) par la sécante $y=nx+h$, n et h étant deux constantes entièrement arbitraires : comme aux points d'intersection les x et les y ont mêmes valeurs respectives, dans les équations des deux lignes, on peut éliminer y; et alors on a

$$(An^2+Bn+C)x^2+(2Ahn+Bh+Dn+E)x$$
$$+Ah^2+Dh+F=0.$$

Cette équation finale en x étant du second degré, il y aura généralement deux abscisses, deux ordonnées et deux points d'intersection, au plus. Or, n et h étant complément arbitraires, l'équation en x fournit les conditions pour que, 1° *la droite ne coupe la courbe qu'en un seul point ;* 2° *ne la coupe pas ;* 3° *lui soit tangente ;* 4° *lui soit asymptote*, c'est-à-dire s'en approche continuellement, sans jamais la rencontrer. Développons la première de ces conditions.

Pour que la droite $y=nx+h$ ne coupe la courbe (a) qu'en un seul point, il faut que l'équation finale en x n'ait qu'une seule racine et soit par conséquent du premier degré ; il faut donc qu'on ait rigoureusement

$$An^2+Bn+C=0\text{ ; d'où }2An=-B\pm\sqrt{(B^2-4AC)}.$$

Or, le binome B^2-4AC ne peut être que *nul*, *négatif* ou *positif*; il ne peut donc exister que *trois genres distincts de courbes du second degré;* et la forme de chaque courbe dépend essentiellement de la valeur du binome *caractéristique* B^2-4AC.

X. Parabole. Supposons $B^2-4AC=0$; nous aurons $2An=-B$. Dans ce cas, la direction n est constante ; elle est toujours réelle et unique, pour une même valeur arbitraire de h. Il existe donc, depuis $h=0$ jusqu'à $h=\pm\infty$, une infinité de droites *parallèles* ne coupant la courbe (a) qu'en un seul point chacune. Cette propriété caractérise essentiellement la ligne du second ordre, appelée *parabole;* car cette courbe est évidemment *infinie* et *ouverte* dans un seul sens : elle peut toujours se représenter par l'équation très-simple

$$y^2=2px\,;$$

vu qu'ayant ici $A=1$, $B=0$ et $C=0$, la condition caractéristique $B^2-4AC=0$ est satisfaite.

XI. Ellipse. Si le binome B^2-4AC est *négatif*, les deux valeurs de n sont *imaginaires ;* la droite $y=nx+h$ ne peut donc jamais couper la courbe (a) en un seul point : elle la coupe en deux points ou pas du tout. La courbe, dans ce cas, est nécessairement *fermée*, *convexe*, *finie* et *rentrante sur elle même :* on l'appelle *ellipse* et peut toujours se représenter par chacune des équations, où les signes sont en évidence :

$$My^2+Nx^2=P \text{ et } y^2=2px-qx^2\,;$$

car chaque fois la condition caractéristique B^2-4AC *négatif* est satisfaite. Ce binome se réduit, en effet, à $-4MN$ ou à $-4q$.

XII. Hyperbole. Enfin, si B^2-4AC est *positif*, les deux valeurs de n sont réelles, inégales et constantes, quel que soit h ; il existe donc, deux systèmes, composés chacun d'une infinité de droites *parallèles*, ne coupant chacune la courbe (a) qu'en un seul point. De plus, les 2 valeurs de n, qui satisfont à l'équation $(2An+B)h+Dn+E=i$, i étant un *infiniment petit* d'un *ordre* quelconque, donnent à h deux valeurs *finies* et *réelles* : ces valeurs de h, substituées dans

$$ix+Ah^2+Dh+F=0 \text{ et } y=nx+h,$$

donnent à x deux valeurs *infinies* et à y quatre valeurs, aussi *infinies;* les deux valeurs proposées de h fournissent donc deux sécantes qui se coupent (vu que les deux valeurs de n sont différentes) et coupent chacune la courbe (a) en deux points situés à l'*infini*. Cette courbe, bien différente de la parabole, a nécessairement deux *ouvertures* et deux *branches*, *séparées* et *infinies*, contenues dans deux angles opposés des deux droites d et d', qui répondent à i rigoureusement nul; car alors, pour les deux valeurs finies de h, les deux de x et les quatre de y cessent d'exister; donc les deux droites d et d' ne rencontrent point la courbe (a); tandis que pour i infiniment petit, les deux droites résultantes rencontraient chacune la courbe en deux points, situés à l'infini. Cette courbe, nommée *Hyperbole*, est donc composée de deux branches, séparées, égales, infinies et contenues dans les deux angles opposés de deux droites d et d', qui se coupent. D'ailleurs celles-ci s'approchent continuellement des deux branches, sans jamais les rencontrer; elles en sont donc les *asymptotes*.

L'hyperbole peut se représenter par chacune des trois équations

$$My^2-Nx^2=-P,\ y^2=2px+qx^2 \text{ et } xy=H^2;$$

car chaque fois la condition caractéristique, savoir B^2-4AC *positif*, est satisfaite. Ce binome, en effet, se réduit à $+4MN$ dans la première équation, à $+4q$ dans la seconde et à $+1$ dans la troisième. Celle-ci représente l'hyperbole, rapportée à ses *asymptotes*, axes des x et des y, qu'elle ne rencontre jamais.

Par exemple, *si toutes les droites, partant du point donné* (8,6) *sont terminées, de part et d'autre, aux deux axes des coordonnées; le lieu géométrique de tous leurs milieux est une hyperbole, rapportée à ses asymptotes.* Ce lieu est, en effet, représenté par

$$xy=3x+4y, \text{ ou par } xy=12,$$

en passant à un système de coordonnées parallèles, pour faire disparaître les premières puissances de x et de y.

XIII. Il existe un grand nombre de problèmes, sur les *lieux géométriques* d'une infinité de points, fournissant les courbes du second degré. Par exemple, on trouve que la *parabole* est le lieu géométrique de tous les points tels, que la distance de chacun à l'axe des y soit égal à sa distance au point (2,0), donné sur l'axe des x. Le lieu serait une *ellipse*, si la seconde distance devait être double de la première, ou si la somme des carrés des deux distances devait valoir le carré donné 36. Le lieu serait une *hyperbole*, si la première distance devait être double de la seconde, ou si le produit des deux distances devait être triple de celui des coordonnées du point.

On peut chaque fois calculer l'équation numérique de la courbe, 1° lorsque l'angle θ des coordonnées est droit, 2° lorsqu'il est de 60°. Chaque fois aussi, en résolvant l'équation proposée, par rapport à y, on peut construire la courbe, *par points successifs ;* mais il est souvent plus simple et plus exact, à cet effet, de *rapporter* la courbe à ses *axes conjugués*, ou à ses *axes principaux*.

XIV. Axes conjugués. Si l'équation d'une ligne du second ordre conserve la même forme, quel que soit l'angle θ des coordonnées, moindre que 180°, on dit que la courbe est rapportée à ses *axes principaux* ou à ses *axes conjugués*, suivant que l'angle θ est droit ou non. Or, *une même ligne du second ordre admet une infinité de systèmes d'axes conjugués et un seul système d'axes principaux;* et c'est ce qu'il faut d'abord démontrer, pour les trois courbes. On y parviendrait par la *transformation des coordonnées ;* mais il est bien plus clair et plus simple de procéder comme il suit.

XV. Parabole. Cherchons l'équation de la courbe plane telle, que la distance d de chacun de ses points (x,y) à l'axe des x soit moyenne proportionnelle entre l'abscisse x de ce point et le nombre donné $2p$.

Supposons d'abord l'angle θ des coordonnées, compris entre 0 et 90°; la distance d sera opposée à l'angle θ du triangle rectangle dont l'ordonnée y est l'hypoténuse; et ainsi $d=y\sin\theta$. Par l'énoncé, on doit avoir $x:d::d:2p$ ou $d^2=2px$; donc $y^2\sin^2\theta=2px$. Posant donc $2p=2p'\sin^2\theta$, d'où $2p'>2p$, on aura, pour l'équation du lieu cherché,

$$y^2=2p'x \quad . \; . \; . \quad (b)$$

Si l'on fait croître, *par degrés insensibles*, l'abscisse positive x, depuis zéro jusqu'à l'infini ; comme $2p'$ est un nombre constant et donné, essentiellement positif, il est clair que l'ordonnée y croîtra, positivement et négativement, depuis $y=\pm 0$ jusqu'à $y=\pm\infty$: d'ailleurs x ne saurait avoir le signe $-$; la courbe (b) est donc *infinie* et *ouverte*, dans le sens des x positifs; c'est par conséquent une *parabole*, quel que soit l'angle θ ; et c'est une parabole, rapportée à ses *axes conjugués* des x et des y.

On voit d'ailleurs que celui-ci *est tangent à la courbe, à l'origine* O ; car $x=0$ donne $y=\pm 0$. De plus, comme $x=k$ donne $y=\pm h$; la *corde* $2h$, parallèle à l'axe des y, est divisée en deux parties égales par l'axe *conjugué* des x. Celui-ci est un *diamètre* de la courbe ; parce que, dans les lignes du second ordre, on appelle *diamètre*, la droite *bisectrice* d'un système de cordes parallèles.

Le point M ou (x,y) restant invariable, aussi bien que $2p$, il est clair que la distance d augmente avec l'angle θ ; l'axe des x, toujours perpendiculaire à la droite sur laquelle d se trouvait, s'éloigne de plus en plus de sa position primitive, sans cesser de lui être parallèle, ni d'être *bisecteur* du système de cordes parallèles à son conjugué, axes des y, toujours tangent à la courbe. Car on a toujours $y^2=2p'x$, bien que $2p'$ diminue de plus en plus, depuis $\theta=0$ sur ∞ jusqu'à $\theta=90°$. Or $\theta=90°$ donne $2p'=2p$ et $y^2=2px$; l'équation (b) conserve donc toujours la même forme, quel que soit l'angle θ des coordonnées. Ainsi non-seulement la parabole admet une infinité de systèmes d'axes conjugués et un seul système d'axes principaux ; mais de plus, tous les axes des y touchent la courbe en chaque origine et tous les axes conjugués des x, *diamètres* de la parabole, sont parallèles à son axe principal des abscisses. Celui-ci d'ailleurs est le seul *axe de symétrie* de la courbe, comme bisecteur de toute corde $2h$ qui lui est perpendiculaire. La *forme* de la parabole est d'autant plus *ouverte*, que les coefficients constants $2p'$ et $2p$ sont plus grands : c'est pourquoi ces deux coefficients sont appelés *paramètres* de la courbe : $2p'$ est dit le *paramètre diamétral* et $2p$ le *paramètre principal* ou simplement le *paramètre*.

Puisque l'axe principal des x est déjà tracé et contient le pied P de la nouvelle ordonnée $MP=y=d$, il est clair que si l'on prend, sur cet axe et du côté des x positifs, la longueur $PN=2p$; la perpendiculaire à MN, élevée par le point M, ira couper le même axe au point S ; et comme alors $MP^2=2p.\ SP$, le point S, origine des axes principaux, appartient à la courbe : c'est le *sommet* de la parabole. Prenant sur l'axe principal des x et à partir de S, la longueur arbitraire SQ, qu'on prolongera de $2p$; la circonférence décrite sur le diamètre $SQ+2p$, coupera la perpendiculaire, menée par le point Q, sur QS, aux deux points G et G', appartenant à la parabole ; laquelle se décrit ainsi très-simplement, *par points successifs*.

Prenons sur l'axe principal des x, et de part et d'autre de l'origine S, les longueurs égales à $\frac{1}{2}p$, savoir SF et SK, F étant du côté des x positifs ; par le point K élevons sur FK la perpendiculaire indéfinie KE, appelée *directrice* de la parabole : il est facile de démontrer, d'après l'équation $y^2=2px$, que *la parabole est une courbe plane telle, que les distances de chacun de ses points* M, *à la directrice et au point fixe* F, *sont égales entre elles* et à $x+\frac{1}{2}p$. Chaque distance r, de M à F, est appelée *rayon vecteur* du point M de la courbe, dont F est dit le *foyer*. Cette égalité des distances est tellement *caractéristique* de la parabole, qu'en cherchant le lieu géométrique de tous les points M, à égale distance du point F et de la droite EK, on retrouve l'équation $y^2=2px$. Cette équation fournit, comme on sait, la *description* de la parabole, soit d'*un mouvement continu*, soit *par points successifs;* mais pour ce dernier cas, le procédé indiqué ci-dessus est le plus simple, quoique peu connu.

Réciproquement, *la parabole étant tracée, voyons comment on trouve son équation aux axes conjugués et aux axes principaux*! Menant la droite D', par le milieu de deux cordes parallèles quelconques; puis par le point O, où D' coupe la parabole, menant la parallèle P' aux deux cordes; il est clair que P' *touche* la courbe au point O, vu que O est le milieu de la corde *nulle* sur P'. Or, D' et P' étant les axes conjugués des x et des y, dont O est l'origine, les coordonnées x et y du point M sont connue; on connaîtra donc le paramètre diamétral $2p'$, par $y^2=2p'x$ ou par $x:y::y:2p'$.

Menant ensuite à D', par le point M, la perpendiculaire, que l'on prolongera en P, de telle sorte qu'on ait $MP=y$; la parallèle à D', menée par P, sera l'axe principal des x, coupant la courbe au sommet S. Menant enfin à SM, la perpendiculaire, coupant en N le prolongement de SP, la longueur PN sera le paramètre $2p$, ainsi déterminé; car $MP^2=PN\cdot SP$. L'équation aux axes principaux sera donc $y^2=2px$.

Les autres propriétés de la parabole sont maintenant bien faciles à démontrer, d'après ses équations aux axes conjugués et aux axes principaux, et d'après $2p=2p'\sin^2\theta$. Il en résulte que, 1° les droites, menées du point de tangence, au foyer et parallèlement à l'axe principal, font avec la tangente et d'un même côté, deux angles égaux; 2° le milieu de la portion OT de la tangente, entre le point de contact O, et l'axe principal des x, est à la fois sur l'axe principal des y et sur la perpendiculaire à OT, menée du foyer F, cette perpendiculaire et le diamètre en O se coupant sur la directrice; 3° l'ordonnée du milieu de OT étant moitié de l'ordonnée du point O, il est facile de tracer la tangente en ce point; 4° le rayon vecteur r du point quelconque O, origine d'un diamètre, est le quart du paramètre $2p'$, relatif à ce diamètre; 5° connaissant donc les deux axes conjugués et le paramètre diamétral $2p'$, il en résulte le foyer, la directrice et le paramètre principal ; 6° la distance du foyer à la tangente est moyenne proportionnelle entre le quart du paramètre $2p$ et le rayon vecteur du point de contact ; 7° soit d la distance au foyer du point d'où partent deux tangentes à la parabole, de longueurs t et t', depuis ce point jusqu'aux deux contacts, dont r et r' sont les rayons vecteurs : on aura $rt'^2=r't^2$, $d^2=rr'$ et par suite d est bisectrice de l'angle (rr') ; 9° si l'angle $(rr')=180°$, $r+r'$ est une corde, à laquelle d est perpendiculaire ; les deux tangentes aux extrémités de cette corde se coupent donc à angle droit sur la directrice ; d'où résultent plusieurs propriétés réciproques ; 10° enfin, quel est le lieu de tous les points tels, que la distance de chacun à l'origine soit l'abscisse de ce point augmentée de la longueur p donnée ?

Observons encore que, S étant le sommet de la parabole $y^2=2px$; si l'on prolonge l'abscisse SP du point M, de la longueur $PN=2p$ et NM de la longueur MN' telle qu'on ait $MN'=MN\cdot v$, v étant un rapport constant ; le lieu géométrique de tous les points N' est une seconde parabole. Mais si par chaque point M de la parabole proposée, on mène à l'axe principal des x, la parallèle égale au paramètre $2p$, puis du pied de l'ordonnée de l'extrémité de cette parallèle, une perpendiculaire à la corde SM; suivant que la parallèle $2p$ sera dirigée vers les x positifs ou vers les x négatifs, le lieu du pied de la perpendiculaire sera la parabole proposée elle-même ou bien sera la courbe $(y^2+x^2)y^2=2px(x^2-y^2)$. La parallèle pourrait être SP ou MP, etc.

XVI. Ellipse. — Cherchons l'équation de la ligne décrite par les intersections successives de deux droites, mobiles autour de deux points fixes, de telle sorte que le produit de leurs directions variables n et n' soit un nombre donné k, constamment négatif.

Soit $2d$ la longueur connue de la droite joignant les deux points fixes ; plaçons au milieu l'origine des coordonnées *obliques*, comprenant l'angle θ, et soient (x',y') une extrémité de $2d$; l'autre extrémité sera $(-x',-y')$, puisque l'origine (0,0) est le milieu de $2d$. Les équations des droites, mobiles autour de ces deux points, sont donc

$$y-y'=n(x-x') \text{ et } y+y'=n'(x+x').$$

Au point quelconque (x,y), où les deux droites se coupent, les x et les y ont mêmes valeurs respectives dans leurs équations. On peut donc multiplier celles-ci membre à membre, et à cause de $nn'=-k$, par hypothèse, il vient

$$y^2-y'^2=-k(x^2-x'^2) \text{ ou } y^2+kx^2=y'^2+kx'^2 \quad . \; . \; . \; (c)$$

Tout est positif, dans cette équation, évidemment de la forme $My^2+Nx^2=P$; donc *elle représente une ellipse.*

Le point quelconque (x,y) de la courbe restant fixe, aussi bien que l'origine, milieu de $2d$, on peut, en déplaçant les axes autour de l'origine fixe, faire varier l'angle θ, depuis θ infiniment petit jusqu'à $\theta=180°$, k restant constant : il est clair que x' et y' varieront, en restant constants, pour une même valeur de θ; l'équation (c) conservera toujours la même forme, sans cesser de représenter les mêmes points, et par conséquent la même ellipse; laquelle est ainsi *rapportée à ses axes conjugués* des x et des y. De sorte que l'*ellipse admet une infinité de systèmes d'axes conjugués, des* x *et des* y, *et un seul système d'axes principaux, pour lequel l'angle θ est droit*. Dans ce cas, ayant $y'=0$ et $x'=d$, l'équation (c) devient $y^2+kx^2=kd^2$: elle représente la *circonférence*, si $k=1$; car alors $nn'+1=0$.

XVII. Hyperbole. Lorsque le produit $nn'=k$ est donné constant, mais toujours *positif*, l'équation (c) devient

$$y^2-kx^2=y'^2-kx'^2 \text{ ou } My^2-Nx^2=-P.$$

C'est donc l'*hyperbole, rapportée à ses axes conjugués,* des x et des y ; car cette équation conserve toujours la même forme, sans cesser de représenter les mêmes points M ou (x,y) et conséquemment la même courbe, lorsque l'angle θ varie, depuis 0 jusqu'à 180°. *Une même Hyperbole admet donc une infinité de systèmes d'axes conjugués des* x *et des* y, *et un seul système d'axes principaux, pour lequel l'angle θ est droit.* Dans ce cas, l'équation devient $y^2-kx^2=-kd^2$; et les axes principaux, des x et des y, sont en même temps *axes de symétrie* de la courbe, comme bisecteur chacun de toute *corde* qui lui est perpendiculaire.

De plus, si alors a et b sont les distances de l'origine aux points où la courbe rencontre ses axes de symétrie des x et des y, on aura $a^2=d^2$ et $b^2=-kd^2$. L'hyperbole rencontre donc l'axe principal des x aux deux points, extrémités fixes de $2d$; et voilà pourquoi $2a$ est dit le *premier axe*, l'*axe réel* ou l'*axe transverse* de l'hyperbole : elle ne rencontre point l'axe de symétrie des y, car $b=\pm d\sqrt{-k}$; la longueur *réelle* $2b=d\sqrt{k}$, sur l'axe principal des y, et dont le milieu est à l'origine, est dite le *second axe*, l'*axe imaginaire* ou *non transverse* de la courbe. Si $k=1$, d'où $2a=2b$, l'hyperbole est dite *équilatère* et son équation devient $y^2-x^2=-a^2$.

L'équation de l'hyperbole, aux *axes conjugués* ou aux *axes principaux*, conduit très-simplement, comme on sait, à toutes les propriétés, *descriptives* et autres, de la courbe; en observant que, quand l'hyperbole est équilatère, *ses asymptotes sont perpendiculaires entre elles, et réciproquement.*

Posons $\cos\theta = c$ et $\sin\theta = s$: si du point $(a,0)$, donné sur l'axe des x, on mène une oblique quelconque L à l'axe des y, puis du pied de celle-ci, la parallèle à l'axe des x, de longueur égale à L ; l'extrémité (x,y) de cette parallèle appartient à l'hyperbole

$$y^2-x^2+2acy+a^2=0.$$

Prenant les valeurs de y, puis développant la racine carrée du binome $x^2-a^2s^2$ ou x^2-m, pour abréger, on aura

$$y=-ac\pm x\mp\left(\frac{m}{2x}+\frac{m^2}{8x^3}+\frac{m^3}{16x^5}+\text{etc.}\right).$$

Les équations des asymptotes de cette hyperbole sont donc

$$Y=-ac\pm x;$$

car x ayant la même valeur, croissante depuis 0 jusqu'à $\pm\infty$, dans les deux systèmes d'équations, la différence $Y-y$ diminue continuellement et devient infiniment petite, sans jamais devenir rigoureusement nulle. Ici l'hyperbole est *équilatère*, puisque ses deux asymptotes sont *perpendiculaires entre elles.* On voit d'ailleurs comment cette courbe peut se décrire, par points successifs. On aurait pu d'abord faire disparaître la première puissance de y. On peut examiner les deux cas de $\theta=90°$ et $60°$, lorsque $a=10$.

Enfin, lorsque par le point donné (a,a), on mène une suite illimitée de droites, dont on considère les portions entre les axes des x et des y rectangulaires ; si l'on cherche le lieu géométrique de tous les points tels, que chacun divise la portion de droite en deux parties dont celle adjacente à l'axe des x soit double de l'autre, on trouve encore une hyperbole équilatère ; mais l'équation est compliquée de facteurs étrangers, qu'il faut d'abord faire disparaître.

XVIII. SIMILITUDE DES COURBES DU SECOND DEGRÉ. *Deux lignes du second ordre, du même genre et rapportées à un même système de coordonnées, sont semblables dès que les coefficients des termes du second degré, dans leurs équations, sont respectivement égaux.*

Pour démontrer ce théorème, on pourrait prendre les deux équations

$$Ay^2+Bxy+Cx^2=Hx \text{ et } Ay'^2+Bx'y'+Cx'^2=H'x'.$$

Mais il est plus simple de considérer les deux courbes, de même genre, représentées par les équations, aux *axes conjugués :*

$$y^2=2px+qx^2 \text{ et } y'^2=2p'x'+qx'^2.$$

Soit d'abord posé $2p'=2pr$: on peut toujours choisir, sur les deux courbes, les deux points (x,y) et (x',y') tels qu'on ait $x'=rx$; et alors, en vertu des deux équations, on aura $y'=ry$. Les deux points (x,y) et (x',y') se *correspondent* sur les courbes et sont dits *homologues*, parce que l'un étant donné, l'autre s'en déduit immédiatement ; vu que le rapport r de p' à p (dit *rapport de similitude*) est connu, aussi bien que p' et p. D'ailleurs la droite $y=nx$, menée de l'origine au premier point, passe par le second ; car ayant $y:x=y':x'$, il est clair qu'en désignant par n le rapport commun, on aura simultanément $y=nx$ et $y'=nx'$.

Soient d et d' les distances de l'origine, point homologue commun aux deux courbes, à chacun des deux points (x,y) et (x',y') : on trouve $d'^2=d^2r^2$ ou $d'=dr$. De sorte que les droites *homologues* d' et d sont dans le rapport r de similitude ; et il en est de même de tous les couples de droites homologues, menées de l'origine, telles que D' et D ; car on trouve aussi D'=Dr. Soient a et a' les arcs des deux courbes, interceptés par les deux couples d et D, d' et D' : si l'angle commun, entre d et D ou d' et D', est *infiniment petit*, les deux arcs a et a' seront infiniment petits eux-mêmes et conséquemment *rectilignes ;* les deux triangles résultants sont donc semblables ; et ainsi a' est parallèle à a et de plus $a'=ar$.

On voit que, dans les deux courbes proposées, des arcs *homologues*, c'est-à-dire terminés à des points homologues chacun à chacun, sont *semblables ;* comme lignes brisées composées du même nombre infini de côtés ou éléments homologues proportionnels, respectivement parallèles et comprenant des angles homologues égaux. Non-seulement ces deux arcs, dans le rapport r de similitude, sont semblables de *forme*, mais aussi de *position*, à raison du parallélisme des éléments homologues. Donc aussi les deux courbes proposées sont semblables, de forme et de position. Ce qu'il fallait démontrer.

Observons que les deux paraboles $y^2=2px$ et $y'^2=2p'x'$ sont toujours *semblables*, même lorsque les angles ne sont pas égaux dans les deux systèmes de coordonnées. Car la seconde peut toujours se rapporter au système de la première. Mais pour les deux autres genres, les deux courbes, de même nature, sont semblables dès que les coefficients des termes du second degré étant égaux chacun à chacun, les angles des deux systèmes de coordonnées sont égaux, quoique séparés.

Scholie. Lorsque deux courbes sont semblables, l'une *représente* complètement l'autre, pour l'étude de leurs propriétés communes et pour les opérations *descriptives* ou de *mesurage*, qu'il serait impossible d'effectuer directement sur celle-ci, soit à cause de son étendue, soit à raison de divers obstacles sur le terrain, qui borneraient la vue ou qui empêcheraient d'agir; comme un bois, une rivière, etc. Le tracé d'une figure *semblable* à une autre a donc pour but de mettre celle-ci sous les yeux sur le papier, afin de l'étudier avec plus de facilité et plus complètement. Aussi les théories de la géométrie n'ont-elles lieu que sur des figures semblables ou supposées telles; mais dans la géométrie analytique, on simplifie encore en représentant les points et les lignes par des équations; ce qui dispense de tracer la figure et conduit à ses propriétés, par de simples transformations analytiques, beaucoup plus sûrement que si elle était sous les yeux. C'est ce que Descartes a mis en évidence le premier, comme on sait; et c'est ce que l'on reconnaîtra, pensons-nous, dans ce qui va suivre, où nous ne considérerons aucune figure tracée.

Enfin, comme l'étude de chaque ligne du second ordre porte toujours sur une ligne semblable, pouvant se tracer sur le papier, d'après différents procédés, que cette étude fait connaître; le théorème de la similitude des courbes du second degré doit suivre immédiatement leur distribution en trois genres distincts, pour l'ordre et la clarté des idées.

XIX. Les Coniques. Les trois courbes du second degré peuvent s'obtenir en coupant, par des plans différemment inclinés, toute surface conique circulaire, droite ou oblique, composée de deux *nappes;* et c'est pourquoi, la *parabole*, l'*ellipse* et l'*hyperbole* sont appelées *sections coniques* ou simplement *coniques*. Or, l'angle θ des coordonnées étant quelconque, on trouve aisément, d'après la trigonométrie, pour représenter les trois courbes

$$y^2=2px+qx^2 \quad . \; . \; . \quad (d)$$

Dans cette équation aux *axes conjugués* des x et des y, le premier étant un *diamètre* et le second, *tangent* à l'origine, les nombres p et q sont connus; et suivant que le coefficient q est *nul*, *négatif* ou *positif*, l'équation (d) représente une *parabole*, une *ellipse* ou une *hyperbole*, comme on l'a déjà démontré.

Soit a la distance de l'origine aux points où la courbe rencontre l'axe des x: on trouve $a=0$ et $qa=-2p$. La seconde distance n'existe pas, pour la parabole, où $q=0$; elle est positive ou négative, mais réelle, pour l'ellipse ou l'hyperbole; vu qu'alors q est un nombre donné, négatif ou positif. Multipliant les deux membres par a, il vient l'équation *homogène*

$$ay^2=2p(ax-x^2).$$

L'équation (d), très-simple, faisant ressortir la grande analogie qui règne entre les trois courbes, peut servir utilement à l'étude de leurs propriétés ; puisque moyennant les modifications dues à la valeur et aux signes du coefficient q, les propriétés de l'une des trois courbes étant connues, on en déduit celles des deux autres. On pourrait commencer par la parabole ; mais, le coefficient q ayant disparu et ne se trouvant point dans les propriétés de cette courbe, il serait parfois assez difficile de bien connaître les modifications que la présence de ce coefficient doit amener dans ces propriétés, pour les deux autres courbes. Il est donc préférable de commencer par l'ellipse, parce que ses propriétés sont parfaitement *analogues* à celles de la circonférence, déjà connues.

Au surplus, l'équation (d), dans son état général, conduit immédiatement aux propriétés, communes aux trois courbes. D'abord cette équation fournit la propriété *caractéristique* de chaque courbe, ou propre à la *définir* et à la *décrire, en calculant le point* (x',y') *dont la distance* r, *à un point quelconque* (x,y) *de la courbe, soit* FONCTION RATIONNELLE *de l'abscisse* x *de ce point.* (Les coordonnées ici doivent être rectangulaires, pour plus de simplicité).

Calculant, d'après l'équation (d), *le lieu géométrique des milieux d'une suite de cordes parallèles, dans la courbe*, il en résulte les définitions de son *centre* et de ses *diamètres*. Il en résulte aussi l'équation de toute *tangente*, et cette équation, avec l'équation (d), sert à démontrer que *le sommet d'un angle droit mobile, dont les côtés sont tangents à une conique, décrit une circonférence*, qui devient la *directrice*, dans la parabole.

Pour ce théorème, l'angle θ doit être droit, de même que pour la recherche des *directrices* de toute conique : chaque directrice est une droite et le foyer voisin un point tels, qu'*en cherchant le lieu géométrique de tous les points, dont les distances de chacun au foyer et à la directrice soient dans un rapport constant,* on retrouve l'équation (d). Il en résulte une propriété, propre à décrire la courbe, quand on connaît trois de ses points, un foyer et la directrice voisine. De plus, *si un angle droit a pour sommet, l'un des foyers de toute conique; la tangente au point où l'un des côtés coupe la courbe, va couper l'autre côté sur une directrice.*

Observons encore que les deux droites, menées des extrémités du diamètre, sur l'axe des x, aux extrémités de toute corde parallèle à l'axe conjugué des y, se coupent sur une autre conique.

Enfin, l'équation (d) servirait encore à établir les propriétés des *polaires* et des *pôles*, dans les coniques; mais, en général, l'étude des courbes du second degré se fait plus simplement, d'après l'équation aux axes conjugués, quand l'origine est au centre.

XX. Projections orthogonales. Soit D la longueur d'une droite donnée dans l'espace et soit D' la *projection orthogonale* ou simplement la *projection* de D sur une autre droite, située ou non dans le même plan : si v désigne la mesure de l'angle compris, on démontre aisément que $D'=D \cos v$.

Soit F une aire plane quelconque, rectiligne, mixte ou curviligne, et soit F' sa projection sur un autre plan : si par un point de l'intersection des deux plans, on mène à celle-ci un plan perpendiculaire, il coupera F et F' suivant les deux droites *inscrites* D et D', dont l'angle v mesure le coin des deux plans proposés, et l'on a $D'=D \cos v$. Or, d'après la définition, la projection F' se trouve avec F absolument comme la projection D' se trouve avec D; donc puisque $D'=D \cos v$, on a aussi nécessairement $F'=F \cos v$.

Menant d'ailleurs un second plan perpendiculaire à l'intersection de deux plans de F et de F', et infiniment proche du premier, ce second plan coupera F et F' suivant les deux droites inscrites E et E', respectivement parallèles à D et à D'. Il est clair que D et E sont les bases d'un trapèze T, de hauteur h infiniment petite, lequel conséquemment est rectiligne; d'où $2T=h(D+E)$. De même, D' et E' sont les bases et h la hauteur du trapèze rectiligne T', projection de T; d'où $2T'=h(D'+E')=h(D+E)\cos v=2T\cos v$ et $T'=T\cos v$. Or, F est la somme de tous les T et F' celle de tous les T'; donc puisque $\cos v$ est constant, il vient $F'=F \cos v$.

On voit que *la projection est toujours le produit de la grandeur projetée multipliée par le cosinus numérique de l'angle compris.*

XX. But de ce mémoire. Les propriétés de la circonférence, qui n'est qu'une *particularité* de l'ellipse, conduisent immédiatement aux propriétés de cette dernière courbe, ou du moins les font prévoir; surtout quand on regarde l'ellipse comme la *projection* de la circonférence, ainsi que plusieurs géomètres l'ont pratiqué, pour quelques propriétés faciles. Dans le tome VIII de la *correspondance* Mathématique et Physique, dans les notes de géométrie, 2me édition et dans le traité de géométrie analytique (en

1837), les projections nous ont servi à établir plusieurs beaux théorèmes sur l'ellipse ; mais notre travail était incomplet. Le but spécial du présent Mémoire est de démontrer un grand nombre de propriétés de l'ellipse, d'après les méthodes les plus élémentaires.

Propriétés de l'Ellipse.

I. Axes principaux. Considérons la circonférence dont a est le rayon. Si nous faisons tourner le cercle autour de son diamètre horizontal fixe $2a$, pris pour axe des x rectangulaires, jusqu'à ce que le nouveau plan fasse avec le premier un angle v, moindre que $90°$; les pieds des perpendiculaires abaissées de tous les points de la circonférence, fixée dans la seconde position, déterminent, sur le premier plan, une courbe fermée et rentrante sur elle-même, *projection* de la circonférence proposée C. D'abord cette projection E a le même *centre* que C, puisque chaque diamètre $2a$ de C a pour projection une *corde* $2d$ de E, divisée en deux parties égales par le centre de C; de sorte que $2d$ est un *diamètre* de la courbe E. Ensuite, si b est la projection du rayon a, perpendiculaire à l'axe des x communs ; les axes des y rectangulaires, dans les deux courbes, sont dirigés suivant le rayon a et sa projection b. Or, v est nécesssairement l'angle compris entre a et b ; donc $b=a\cos v$. De même, si Y et y' sont les ordonnées de C et de E, pour la même abscisse x,y sera la projection de Y et v l'angle compris : donc $y=Y\cos v$. D'ailleurs $Y^2+x^2=a^2$; ainsi $y^2+x^2\cos^2 v=a^2\cos^2 v$, d'où à cause de $b=a\cos v$, il vient

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2 \quad . \; . \; . \; (1)$$

Cette équation ayant lieu, quel que soit le point (x,y) de la projection E, la *représente* complètement et peut servir à la décrire. D'abord $x=0$ donne $y=\pm b$, et $y=0$ fournit $x=\pm a$; de sorte que $2a$ et $2b$ sont deux diamètres rectangulaires, situés sur les *axes de symétrie* des x et des y : ce sont les *axes principaux* ou simplement les *axes* de la courbe E. De plus, à cause de $b=a\cos v$ et de $\cos v<1$, on a $b<a$ ou $2b<2a$; ainsi $2a$ est le *grand axe* et $2b$ le *petit axe* de la courbe.

Rien n'empêche de poser $c^2=a^2-b^2$: le nombre c aura deux valeurs réelles, égales et de signes contraires, mais chacune $<a$. Prenant alors sur l'axe des x, de part et d'autre de l'origine O, centre de C et de E, deux longueurs égales à c ; les deux points

résultants F et F′ tomberont sur le grand axe $2a$. Si donc r et r' sont les droites joignant F et F′ à un point quelconque (x,y) de la courbe E ; les deux triangles rectangles donnent

$$r^2=y^2+(x-c)^2 \text{ et } r'^2=y^2+(x+c)^2.$$

Dans ces deux équations (1), les x et les y ont mêmes valeurs respectives ; il en résulte donc

$$r=a-\frac{cx}{a} \text{ et } r'=a+\frac{cx}{a} \text{ ; d'où } r+r'=2a.$$

On appelle *ellipse* une courbe plane telle, que la somme des distances de chacun de ses points à deux points fixes F et F′ est constamment égale à une droite donnée $2a$; donc la projection E est une ellipse, dont F et F′ sont les *foyers*, c l'*excentricité*, r et r' les *rayons vecteurs* d'un point quelconque (x,y) de la courbe. Connaissant donc les deux axes $2a$ et $2b$, de longueur et de position, il en résulte les deux foyers et la description de l'ellipse E, soit par *points* soit d'un *mouvement continu*.

2. DIAMÈTRES. Deux droites parallèles et leurs milieux, ayant pour projections respectives deux parallèles et leurs milieux ; on voit que tout diamètre $2a$ du cercle, évidemment *bissecteur* d'une suite de *cordes* parallèles entre elles et aux *tangentes* à ses extrémités, a pour projection un diamètre $2d$ de l'ellipse, lui-même *bissecteur d'une suite de cordes parallèles entre elles et aux tangentes à ses extrémités.* Car le contact et la tangente au cercle ont nécessairement pour projections le contact et la tangente à l'ellipse. Or, on a $2d=2a\cos v'$; et comme le maximum ou le minimum de l'angle v' est v ou 0, il est clair au contraire que le minimum ou le maximum du diamètre $2d$ est $2b$ ou $2a$. Ainsi *les deux axes de l'ellipse sont l'un le plus petit et l'autre le plus grand de tous ses diamètres.*

3. ÉQUATIONS AUX AXES CONJUGUÉS. Prenons deux diamètres rectangulaires de la circonférence C pour axes des coordonnées X et Y ; ils auront pour projections deux diamètres $2a'$ et $2b'$, axes des x et des y *obliques*, de l'ellipse E. Soit (X,Y) un point quelconque de C, d'où $X^2+Y^2=a^2$; ce point a pour projection le point (x,y) de E. Or, a et X, sur une même droite, ont pour projections a' et x, sur une même droite ; donc $a:a'=X:x$. De même, Y et sa projection y sont respectivement parallèles au rayon a et à sa projection b' ; donc $a:b'=Y:y$. Prenant dans ces proportions, les

valeurs de X et de Y, puis substituant dans $X^2+Y^2=a^2$, on trouve

$$a'^2y^2+b'^2x^2=a'^2b'^2 \quad \ldots \quad (2)$$

Comme le point (x,y) de E est ici quelconque, les équations (1) et (2) *représentent* chacune l'ellipse E. Ces équations ont absolument la même forme, quel que soit, dans la seconde, l'angle θ; et dans celle-ci les axes des coordonnées sont dits *conjugués*, parce qu'ils vont toujours ensemble et que l'un étant tracé, l'autre s'en déduit immédiatement. De plus, dans l'équation (2), les diamètres $2a'$ et $2b'$, sur les axes conjugués des x et des y, sont dits eux-mêmes *diamètres conjugués;* ainsi *deux diamètres rectangulaires quelconques de la circonférence C ont toujours pour projections deux diamètres conjugués de l'ellipse E.* Celle-ci admet donc une infinité de systèmes de diamètres conjugués, dont un seul rectangulaire, celui des deux axes $2a$ et $2b$.

4. Paramètres. En général, l'angle θ des coordonnées étant quelconque, toute équation de la forme $My^2+Nx^2=P$ représente une ellipse, rapportée à ses diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$; car $y=0$ dans cette équation donne $Na'^2=P$ et $x=0$ fournit $Mb'^2=P$; d'où en substituant dans cette équation les valeurs de M et de N, savoir P sur b'^2 et P sur a'^2, il vient l'équation (2). Celle-ci, en y changeant x en $x-a'$, et posant $a'p=b'^2, a'^2q=b'^2$, devient

$$y^2=2px-qx^2=px(2a'-x) \quad \ldots \quad (3)$$

C'est l'équation au *paramètre diamétral* $2p$, donné par la proportion $2a':2b'::2b':2p$. Dans l'équation (1) de l'ellipse, le *paramètre* $2p$ est la double ordonnée dont le pied tombe au foyer F; c'est une troisième proportionnelle aux deux axes $2a$ et $2b$.

5. Cordes supplémentaires I. Dans les lignes du second ordre, les cordes menées des extrémités d'un même diamètre à un point quelconque de la courbe, sont dites *cordes supplémentaires.* Or, il est évident que les deux diamètres rectangulaires de C sont bissecteurs de deux cordes supplémentaires, respectivement parallèles à eux et aux tangentes à leurs extrémités; donc aussi *les deux diamètres conjugués* 2a' *et* 2b' *sont bissecteurs des deux cordes supplémentaires de l'ellipse* E, *respectivement parallèles à eux et aux tangentes à leurs extrémités.* Les deux cordes comprennent donc un angle égal et opposé à celui des deux diamètres. Si donc l'ellipse E et un diamètre sont tracés; en décrivant sur celui-ci un segment capable de l'angle donné α, les deux diamètres respectivement

parallèles aux deux cordes supplémentaires menées à l'un des points d'intersection de l'arc du segment avec l'ellipse, sont conjugués et comprennent l'angle donné α. Si cet angle est droit, on a les deux axes $2a$ et $2b$.

II. L'angle des deux cordes supplémentaires du cercle, menées des extrémités du grand axe $2a$, étant droit, sa projection, angle des deux cordes supplémentaires de l'ellipse, menées des deux mêmes extrémités, est nécessairement obtus et le plus grand possible lorsque les deux cordes se coupent à une extrémité de $2b$; car l'axe du segment capable du premier angle obtus, arc décrit sur la corde $2a$, rencontre le prolongement de b. On verra de même que l'angle compris entre les deux cordes supplémentaires menées des extrémités du petit axe $2b$, est toujours aigu et le moindre possible lorsque les deux cordes se coupent à une extrémité de $2a$. Or, les extrémités des deux axes $2a$ et $2b$, s'appellent les *sommets* de l'ellipse E : il y a donc quatre sommets de la courbe, en même temps sommets d'un *losange inscrit*, dont les côtés sont les *cordes* des sommets de l'ellipse. Ce *losange des sommets*, ayant les deux axes $2a$ et $2b$ pour diagonales, est la moitié du *rectangle circonscrit*, touchant la courbe aux quatre sommets. Celui-ci ayant ses côtés respectivement égaux et parallèles à $2a$ et $2b$, est dit le *rectangle des axes*, et son aire a pour mesure $4ab$. Il est clair d'ailleurs que le rectangle des axes et le losange des sommets sont les projections respectives du carré circonscrit, touchant le cercle aux extrémités du grand axe $2a$, et du carré inscrit, joignant les contacts du premier.

III. Les diagonales du rectangle des axes, étant respectivement parallèles aux cordes supplémentaires des sommets et les divisant en deux parties égales chacune, ont sur elles deux diamètres conjugués, égaux évidemment et comprenant l'angle obtus maximum ou l'angle aigu minimum. Car ces deux diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$, projections des deux diamètres rectangulaires du cercle (dirigés suivant les diagonales du carré circonscrit, dont le rectangle $4ab$ est la projection) font avec ces diamètres, deux angles égaux à v'; d'où $a'=a\cos v'$ et $b'=a\cos v'$. Cela donne $2a'=2b'$ et l'équation (2) de l'ellipse E devient $y^2+x^2=a'^2$.

IV. Soient d'ailleurs n et n' les directions des cordes supplémentaires menées des extrémités du grand axe de l'ellipse E : on trouve aisément $a^2nn'+b^2=0$. Il est clair que n et n' sont aussi les directions des deux diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$, respectivement parallèles à ces deux cordes ; le produit nn' est donc constant et négatif. Et comme la relation $a^2nn'+b^2=0$ est unique, on voit que *tout diamètre de l'ellipse a son conjugué et n'en a qu'un seul*, ce diamètre étant bissecteur d'un seul système de cordes parallèles. De sorte que le centre et les milieux d'une suite de cordes parallèles sont en ligne droite. Donc l'ellipse E étant tracée, *les droites passant par les milieux de deux couples de cordes parallèles, se coupent au centre*. De plus, dans un système de cordes parallèles, les cordes à égales distances du centre de part et d'autre, sont égales entre elles ; et plus une corde est éloignée du centre, plus elle est petite.

V. Observons encore que tout diamètre divise l'ellipse en deux parties *superposables* et *symétriques* par rapport au centre ; tandis que deux diamètres quelconques de la courbe divisent toute corde, parallèle à celle qui joint leurs extrémités, en trois parties dont les deux extrêmes sont égales entre elles. Observons enfin que la plus petite corde, menée par un point donné dans l'intérieur de l'ellipse, est parallèle au conjugué du diamètre passant par ce point ; ce dernier diamètre étant lui-même la plus grande corde en ce point donné.

6. Relations des diamètres avec les axes. Soient n et n' les directions de deux diamètres quelconques $2a'$ et $2b'$ de l'ellipse E, dont $2a$ et $2b$ sont les axes, sur ceux de symétrie des x et des y. Pour l'extrémité (x,y) de a', on a les trois équations simultanées

$$y=nx,\ a'^2=x^2+y^2 \text{ et } a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2.$$

Éliminant x et y de ces équations et opérant de même pour b', on trouve

$$\left.\begin{array}{l}(a^2n^2+b^2)a'^2=a^2b^2(1+n^2),\\ (a^2n'^2+b^2)b'^2=a^2b^2(1+n'^2).\end{array}\right\}\ \ldots\ (4)$$

Ces deux relations remarquables serviront à calculer les diamètres $2a'$ et $2b'$, dès que leurs directions n et n' seront données, avec les axes, et réciproquement, en observant qu'on ne saurait avoir $n=n'$.

7. Diamètres égaux. Si $n'=-n$, il est clair qu'on aura $a'=b'$; réciproquement, si $a'=b'$, les relations (4), divisées l'une par l'autre, donneront ensuite

$$(a^2-b^2)(n'-n)(n'+n)=0\ ;\ \text{d'où } n'=-n.$$

Comme la direction n reste encore tout-à-fait arbitraire, on voit que *l'ellipse admet une infinité de couples de diamètres égaux, également inclinés sur le grand axe, de part et d'autre du petit.* Il existe par conséquent une infinité de *rectangles inscrits*, dont les côtés sont parallèles aux deux axes ; et parmi ces rectangles, un seul *carré inscrit*, ayant ses diagonales égales et perpendiculaires entre elles, leurs directions étant par suite $n=1$ et $n'=-1$.

8. Diamètres rectangulaires. Pour que les diamètres $2a'$ et $2b'$ soient perpendiculaires l'un à l'autre, il faut que leurs directions n et n' satisfassent à la relation $nn'+1=0$. Cette relation est unique et laisse entièrement indéterminée n' ou n, vu que les relations (4) ne donnent a' et b' que quand n et n' sont connues ; ainsi l'*ellipse admet une infinité de couples de diamètres rectangulaires, diagonales d'une infinité de losanges incrits, concentriques.*

De plus, soit z l'hypoténuse du triangle dont a' et b' sont les deux autres côtés, et soit h la hauteur menée de l'angle droit : on aura simultanément $hz=a'b'$ et $z^2=a'^2+b'^2$. Par ces deux relations, on voit d'abord que 1 sur h^2 vaut 1 sur a'^2+1 sur b'^2 ; mais cette dernière somme vaut 1 sur a^2+1 sur b^2, en vertu des relations (4), où l'on substitue, au lieu de n' sa valeur -1 sur n ; donc

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

Cette double relation est indépendante de n et s'applique encore au losange des sommets ; de sorte que *h est le rayon du cercle inscrit dans tous les losanges, inscrits eux-mêmes dans l'ellipse proposée* E *et tous concentriques avec elle, dont un seul carré.*

9. Diamètres conjugués I. Si n et n' sont les directions de deux diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$, on aura la relation unique $a^2nn'+b^2=0$; et alors les relations (4) deviendront, en éliminant $b^2=-a^2nn'$:

$$(n'-n)a'^2=a^2n'(1+n^2),$$
$$(n'-n)b'^2=-a^2n(1+n'^2).$$

Combinant ces deux égalités par addition et multiplication, puis désignant par s le sinus de l'angle θ entre les deux diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$, d'où $(1+n^2)(1+n'^2)s^2=(n'-n)^2$, ainsi qu'on le vérifie par $s=\sin(\alpha'-\alpha)$, $n=\text{tang }\alpha$ et $n'=\text{tang }\alpha'$; il est clair qu'on trouvera

$$a'^2+b'^2=a^2+b^2 \text{ et } a'b's=ab \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

II. Ces relations sont importantes et la première, qui revient à $4a'^2+4b'^2=4a^2+4b^2$, nous apprend que, *dans l'ellipse, la somme des carrés faits sur deux diamètres conjugués quelconques, vaut la* *somme des carrés faits sur les deux axes et se réduit au carré construit sur la double corde* $2z$ *des sommets.*

III. Quant à la seconde relation $4a'b's=4ab$, comme les tangentes aux extrémités d'un diamètre sont parallèles à son conjugué (5), les quatre tangentes aux extrémités de $2a'$ et $2b'$ forment un parallélogramme P *circonscrit*, dont les côtés sont respectivement égaux et parallèles à $2a'$ et $2b'$; ils comprennent donc l'angle dont s est le sinus ; de sorte que l'aire $P=4a'b's=4ab$. On voit que, *dans l'ellipse, le parallélogramme circonscrit, ayant ses côtés respectivement égaux et parallèles à deux diamètres conjugués quelconques, vaut le rectangle des deux axes.*

IV. Le parallélogramme P circonscrit est dit *conjugué*, pour le distinguer de tout autre parallélogramme circonscrit, formé par les quatre tangentes aux extrémités de deux diamètres quelconques; lequel ne jouit pas des mêmes propriétés que P. D'ailleurs, tout carré $4a^2$ circonscrit au cercle C a évidemment pour projection un parallélogramme conjugué P ; donc $P=4a^2 \cos v=4ab$. De plus, tout parallélogramme P′ circonscrit au cercle C a pour projection un parallélogramme P circonscrit à l'ellipse, d'où $P=P' \cos v$. Or, P′ est le moindre possible dès qu'il est le carré $4a^2$; donc P sera aussi le moindre possible et vaudra $4ab$. *Le parallélogramme conjugué est donc le plus petit de tous les parallélogrammes circonscrits à l'ellipse*, ce parallélogramme conjugué pouvant être le rectangle des deux axes.

V. Observez d'ailleurs que la somme des carrés faits sur les diagonales de tout parallélogramme conjugué vaut le double carré fait sur la double corde des sommets ; tandis que si les deux diamètres conjugués sont égaux, le carré fait sur l'un est double du carré fait sur la corde des sommets. D'ailleurs les directions n et n' des deux diamètres conjugués égaux sont données par $an=b$ et $an'=-b$; elles sont donc respectivement les mêmes que les directions des diagonales du rectangle des deux axes.

VI. Soit z la corde des sommets, d'où $z^2=a^2+b^2$; les relations (5) deviennent donc

$$(a'+b')^2=z^2+2ab:s \text{ et } 2ab:s=z^2-(a'-b')^2.$$

Les nombres a, b, z, sont constants, tandis que les nombres s, a', b' sont variables ; donc si $a'=b'$, s est un *minimum* et $a'+b'$ un *maximum* égal à $z\sqrt{2}$. De plus, on voit que les deux diamètres conjugués égaux comprennent le plus petit angle aigu ou le plus grand angle obtus. Enfin, le *maximum* du sinus s étant le rayon 1, on voit au contraire que le *minimum* de $a'+b'$ est $a+b$.

VII. Soient (X,Y) et (X′,Y′) les extrémités de deux diamètres rectangulaires de la circonférence C ; elles ont pour projections les extrémités (x,y) et (x',y') des deux demi-diamètres conjugués a' et b' de l'ellipse E. Or, il est aisé de voir que $X=Y'$, et $Y=X'$; donc les deux rectangles XY et X′Y′ sont égaux : ils ont pour projections les parallélogrammes faits sur x et y, sur x' et y' ; donc *ces deux parallélogrammes sont équivalents.* De plus, les coordonnées étant rectangulaires, dans C et E, on a $x=X$, $x'=X'$, $y=Y\cos v=X'\cos v$ et $y'=Y'\cos v=X\cos v$. D'ailleurs $a^2=X^2+Y^2=X^2+X'^2$; donc $a^2=x^2+x'^2$, et par suite $b^2=y^2+y'^2$. Ces deux théorèmes remarquables fournissent la relation $a'^2+b'^2=a^2+b^2$.

10. ÉQUATIONS DE LA TANGENTE A L'ELLIPSE. L'angle des coordonnées étant quelconque, dans l'ellipse E, rapportée à ses diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$, il est bien facile de calculer l'équation de sa tangente, d'après celle de la tangente au point (X′,Y′) de la circonférence C. D'abord en ce point, il n'y a que la seule tangente $YY'+XX'=a^2$; donc au point (x',y') de l'ellipse, il n'y a que la seule tangente $y=nx+h$. D'ailleurs a et X′, situés en ligne droite, ont pour projections a' et x', aussi en ligne droite ; donc $a:a'=X':x'$. De même, Y′ et sa projection y' sont respectivement parallèles à a et à sa projection b' ; donc $a:b'=Y':y'$. On a donc les quatre relations simultanées :

$$ax'=a'X',\ ay'=b'Y',\ ax=a'X \text{ et } ay=b'Y.$$

Par ces relations et en substituant dans $YY'+XX'=a^2$, l'équation de la tangente à l'ellipse, au point (x',y'), devient

$$a'^2yy'+b'^2xx'=a'^2b'^2 \quad . \ . \ . \quad (6)$$

C'est d'ailleurs ce qu'on trouverait en éliminant y' des deux équations simultanées $a'^2y'^2+b'^2x'^2=a'^2b'^2$ et $y'=nx'+h$, puis en observant que les deux valeurs de x', dans l'équation finale, sont égales entre elles, comme devant se réduire à une seule. Cette condition fournit les deux relations

$$a'^2n^2+b'^2=h^2 \text{ et } a'^2ny'=-b'^2x' ;$$

lesquelles réduisent à (6) l'équation de la tangente $y=nx+h$, mise sous la forme $y-y'=n(x-x')$. Si les cordonnées sont rectangulaires, a' et b' se changent en a et b.

Enfin, comme d'un point donné hors de la circonférence, on peut mener deux tangentes à cette courbe ; de même, il y a deux tangentes à l'ellipse qui partent d'un point donné au-dehors. Il est clair d'ailleurs que les tangentes à l'ellipse et au cercle, étant la première projection de la seconde, rencontrent au même point T l'axe des x rectangulaires ; elles ont donc la même *soutangente* TP, P étant le pied commun des deux ordonnées y' et Y' ; d'où $x' \cdot TP = a^2 - x'^2$. Delà *le moyen de mener la tangente à l'ellipse* E, *par un point donné sur cette courbe ;* mais le suivant est préférable.

11. Construction de la tangente. Les deux foyers F et F' sont utiles, non-seulement pour décrire l'ellipse E, dont on connait le grand axe $2a$; mais aussi pour lui mener une tangente GT, par un point donné M sur cette courbe. En effet, le point M étant sur l'ellipse, on a, d'après la définition, $MF + MF' = 2a$; tandis que le point G de la tangente GT étant hors de l'ellipse, on a $GF + GF' > 2a$. Le point M de GT est donc tel que la somme de ses distances aux deux foyers F et F' est la moindre possible ; donc (géométrie) l'angle $FMT = F'MG$. Soient d'ailleurs v et v' les deux angles FMT et F'MT : on trouve $cy' \operatorname{tang} v = b^2$ et $cy' \operatorname{tang} v' = -b^2$; donc $v = 180° - v' = F'MG$. Ainsi *dans l'ellipse, les rayons vecteurs du point* M *de contact font avec la tangente* GT *et d'un même côté, deux angles égaux* (delà vient la dénomination de *foyer* donné à chacun des points F et F'). Donc *pour tracer la tangente au point* M, *il suffit de mener la bisectrice du supplément de l'angle* FMF'.

Cette construction montre aussi comment on peut mener les deux tangentes à l'ellipse, soit par un point donné au-dehors, soit parallèles ou perpendiculaires à une droite donnée ; et il en résulte les théorèmes, faciles à démontrer, que voici :

I. La circonférence décrite sur le grand axe $2a$, comme diamètre, coupe la tangente aux pieds des perpendiculaires P et P', abaissées sur elle des deux foyers F et F'.

II. Le demi-second axe b est moyen proportionnel entre ces deux perpendiculaires ; de sorte que $PP' = b^2$.

III. La droite, passant par le foyer et partant du point de contact M, extrémité d'un diamètre MOM', est égale au grand axe $2a$, quand on la termine à la tangente en M', les deux tangentes en M et en M' étant d'ailleurs parallèles entre elles. Il y a toujours quatre de ces deux droites, se coupant deux à deux aux foyers F et F'.

IV. On peut toujours décrire l'ellipse dont on connaît un diamètre et la longueur du grand axe, si l'on a la tangente à une extrémité de ce diamètre.

V. On peut sans connaître les axes d'une ellipse tracée, lui mener une tangente, soit en un point donné, soit parallèle ou perpendiculaire à une droite donnée.

VI. La portion de toute tangente à l'ellipse, entre les deux tangentes aux extrémités du grand axe $2a$, est le diamètre de la circonférence passant par les deux foyers. De plus, Y et Y' désignant les ordonnées de la première tangente, qui ont leurs pieds aux extrémités de $2a$, on a $b^2 = YY'$. Et si d et d' sont les distances d'un foyer aux extrémités de $2a$, on aura $b^2 = dd'$.

12. Description de l'ellipse. I. On peut toujours décrire, *par points successifs*, l'ellipse dont on a l'équation numérique ; mais le calcul des coordonnées successives est beaucoup plus compliqué que quand la courbe est rapportée à ses axes principaux, où alors on a les deux foyers et où d'ailleurs la description peut se faire par un mouvement continu. Pour décrire l'ellipse, dont on a l'équation numérique, il faut donc calculer d'abord ses deux axes ou les construire. La chose est facile quand l'ellipse est rapportée à ses deux diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$, donnés et tracés ; et il y a, pour cet effet, deux procédés, également très-simples.

1° Les relations (5), combinées par addition et soustraction, après avoir doublé la seconde, donnent celles-ci :

$$(a+b)^2 = a'^2 + b'^2 + 2a'b's = d^2,$$
$$(a-b)^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b's = d'^2.$$

Les seconds membres seront toujours positifs, vu que le sinus $s<1$ et que $a'^2+b'^2>2a'b'$; dont les deux droites d et d' seront toujours réelles. Soit v le complément de l'angle θ des deux diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$, d'où $s = \cos v$; d et d' sont donc les troisièmes côtés des deux triangles t et t', dont a' et b' sont les deux autres côtés donnés, les angles compris étant $180°-v$ dans t et v dans t'. D'après la trigonométrie, les côtés d et d' se calculent aisément par logarithmes; mais on peut construire immédiatement d et d'.

Soit O le centre de l'ellipse E, où $OA = a'$ et $OB = b'$. Menons BK perpendiculaire à OA, d'où $BK = b's$; sur les prolongements de BK, prenons $BD = BC = a'$: il en résulte $OD = d = a+b$ et $OC = d' = a-b$; donc $2a = OD + OC$ et $2b = OD - OC$.

2° Soient X et Y les distances du centre O aux points où la tangente $a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2$ rencontre les deux axes prolongés, d'où $Xx' = a^2$ et $Yy' = b^2$; soient s et s' les distances de ces deux points au contact (x',y'), extrémité du diamètre $2a'$, son conjugué $2b'$ étant parallèle à la tangente. On a donc simultanément

$$a'^2+b'^2=a^2+b^2,\ (s+s')^2=X^2+Y^2,\ s^2=y'^2+(X-x')^2.$$
$$\text{et } s'^2=x'^2+(Y-y')^2\ ;\ \text{d'où } ss'=b'^2.$$

La circonférence décrite sur $s+s'$, comme diamètre, passe par le centre O ; et si d désigne le prolongement de a' jusqu'à la circonférence, on aura $da'=ss'=b'^2$. La longueur d étant ainsi connue, aussi bien que la droite $d+a'$, il est clair que la perpendiculaire au milieu de celle-ci va couper la parallèle à $2b'$, menée par l'extrémité (x',y') de a', au centre H de la circonférence proposée, ayant HO pour rayon et interceptant $s+s'$ sur la parallèle tangente. De sorte que les distances X et Y, directions des deux axes $2a$ et $2b$, sont déterminées entièrement, aussi bien par suite que x' et y'. Ayant ainsi les directions des deux axes, on calculera ou construira leurs longueurs par $a^2=Xx'$ et $b^2=Yy'$. On aura donc aussi les deux foyers F et F' et l'on pourra décrire ensuite l'ellipse E. (Ce second procédé très-simple est peu connu : il s'applique à la description de l'*hyperbole*).

II. L'ellipse E étant la projection de la circonférence, il en résulte, pour *décrire l'ellipse circonscrite à un pentagone convexe donné*, ce théorème : Si dans l'ellipse, deux sécantes, qui se coupent, sont respectivement parallèles à deux autres sécantes qui se coupent, et si l'on multiplie entre eux les deux segments d'une même sécante, depuis le point commun jusqu'à la courbe ; les produits fournis par les deux premières sécantes sont proportionnels aux produits fournis par les deux dernières.

Cette propriété fait connaître, de longueurs et de position, deux diamètres conjugués de l'ellipse circonscrite cherchée.

En général, l'équation complète du second degré n'ayant au fond que cinq coefficients arbitraires ; ceux-ci étant connus, déterminent la courbe complètement. *La construction d'une ligne du second ordre exige donc, au plus, cinq données ou cinq conditions distinctes ;* et ainsi l'on peut décrire l'ellipse inscrite dans un pantagone convexe tracé, laquelle est unique.

III. Lorsque l'ellipse E est rapportée à deux diamètres quelconques, son équation est de la forme

$$Ay^2+Bxy+Cx^2=1\ ,\ .\ .\ .\ (7)$$

A, B, C étant des nombres donnés, le premier et le dernier positifs. Soit d un demi-diamètre quelconque, p le cosinus et s le sinus de l'angle des coordonnées ; on a donc

$$y=nx \text{ et } d^2=x^2+y^2+2pxy.$$

Ici x et y sont les coordonnées de l'extrémité de d et leurs valeurs sont respectivement les mêmes, dans les trois équations. Éliminant donc x et y, on aura une équation finale du second degré, ne contenant plus que les deux variables n et d. Or, les deux axes de l'ellipse sont l'un le plus grand et l'autre le plus petit de tous ses diamètres (2); pour calculer les deux axes $2a$ et $2b$, il faut donc résoudre l'équation finale par rapport à n. Observant alors que le maximum et le minimum de d rendent nulle la quantité sous le radical de n, on aura, pour calculer ce maximum a et ce minimum b, l'équation

$$(4AC-B^2)d^4-4(A+C-Bp)d^2+4s^2=0.$$

Donc puisque a^2 et b^2 sont les deux racines de cette équation, on a

$$(4AC-B^2)(a^2+b^2)=4(A+C-Bp) \text{ et } (4AC-B^2)a^2b^2=4s^2 \; . \; . \; . \; (8)$$

Ces deux relations serviront à calculer $2a$ et $2b$; lesquels sont nécessairement les deux axes, puisque leurs directions n et n' satisfont à la condition de perpendicularité, savoir $1+nn'+(n+n')p=0$. On sait d'ailleurs que ces deux axes sont ceux de l'*ellipse* ou de l'*hyperbole*, suivant que $4AC-B^2$ est positif ou négatif; et si les coordonnées sont rectangulaires, on aura $p=0$ et $s=1$. Si $B=0$, les deux diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$ seront donnés par $Ca'^2=1$ et $Ab'^2=1$; d'où $a'^2+b'^2=a^2+b^2$ et $a'b's=ab$.

IV. Lorsque l'ellipse est représentée par l'équation complète, du second degré entre les deux variables x et y; on la ramène d'abord à la forme (7), en passant du système proposé à un autre parallèle, pour faire disparaître les premières puissances de x et de y. Par exemple, proposons-nous de *décrire la courbe passant par les cinq points donnés* $(0,1)$, $(0,2)$, $(2,0)$, $(3,0)$ et $(1,\frac{1}{3})$, *les coordonnées étant rectangulaires.*

Substituant dans l'équation du second degré complète

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0;$$

on aura cinq équations, du premier degré chacune, pour calculer les six coefficients inconnus A, B, C, D, E, F; et la courbe cherchée sera représentée par

$$3y^2+2xy+x^2-9y-5x+6=0.$$

Faisant disparaître les premières puissances de x et de y, la même courbe est représentée par

$$12y^2+8xy+4x^2=9.$$

Ici $A=\frac{13}{9}$, $B=\frac{4}{9}$, $C=\frac{4}{9}$, $p=0$ et $s=1$; donc les relations (8) deviennent

$$2(a^2+b^2)=9 \text{ et } 32a^2b^2=81.$$

Il en résulte, d'une manière aussi rapprochée qu'on veut, les deux axes $2a$ et $2b$ de l'ellipse cherchée. On connaît d'ailleurs le centre à la nouvelle origine, et les directions des deux axes ; on peut donc aisément décrire l'ellipse demandée. Les longueurs des demi-diamètres rectangulaires d et d', auxquels elle est rapportée, sont données par $4d^2=9$ et $12d'^2=9$.

V. Observons enfin que, dans l'équation complète, on peut, en la résolvant par rapport à y, en déduire l'équation $6Y=-2x+9$ d'un diamètre $2a'$, facile à construire, par $x=0$ et $Y=0$. Les extrémités de $2a'$ sont données par les valeurs de x, qui rendent nul le radical de y, savoir $4x=6\pm\sqrt{6}$; d'où $12y=12\mp\sqrt{6}$. Aux extrémités de $2a'$, ainsi déterminées, les deux ordonnées sont tangentes à la courbe ; donc la parallèle à l'axe des ordonnées, menée par le milieu de $2a'$; c'est-à-dire par le *centre* de l'ellipse, est la direction du diamètre $2b'$, conjugué de $2a'$. Substituant dans l'équation complète la valeur de l'abscisse du centre, savoir $x=\frac{3}{2}$, on aura les ordonnées des extrémités de $2b'$, savoir $y=1\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$. On connaît donc, de position et de longueur, chacun des deux diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$; et ainsi l'on peut décrire l'ellipse. Les longueurs sont $2a'=\frac{1}{3}\sqrt{15}$ et $2b'=\sqrt{3}$; vu que les coordonnées étant rectangulaires, $2a'$ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dont $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ et $\frac{1}{6}\sqrt{6}$ sont les autres côtés ; tandis que $2b'$ est la différence des ordonnées de ses extrémités.

VI. Tels sont les divers procédés pour décrire l'ellipse, dont l'équation est donnée numériquement. Mais on peut quelquefois simplifier les calculs, comme dans le problème : *Les coordonnées rectangulaires de chaque point du plan sont les dimensions d'un rectangle variable* R ; *quel est le lieu géométrique de tous ces points,* 1° *lorsque le carré de la diagonale de* R, *plus l'aire du rectangle, donne le carré* 36 ? 2° *lorsque le carré de la diagonale, plus ou moins le double rectangle, donne* 64 ? 3° *enfin, lorsque* 4 *fois l'aire du rectangle, moins le carré de sa diagonale, fournit le carré* 100 ?

Dans le premier cas, on a $x^2+y^2+xy=36$ et $x^2+y^2=d^2$. On trouve aisément, pour le maximum de d^2, $y=-x$ et $a^2=72$; pour le minimum de d^2, $y=x$ et $b^2=24$. Le lieu cherché est donc une ellipse, facile à décrire, puisque l'on connaît ses deux axes $2a$ et $2b$, bissecteurs des angles droits des axes des coordonnées.

13. Normale I. Toute *normale* à l'ellipse est perpendiculaire à la tangente, au point de contact ; *la normale est donc bissectrice de l'angle compris par les deux rayons vecteurs, menés au point de tangence*, et rencontre, par suite, le grand axe entre les deux foyers. Connaissant donc les deux foyers et un point de l'ellipse, il est facile de lui mener, par ce point, la normale et par suite la tangente.

II. Soit n' la direction de la normale et n celle de la tangente à l'ellipse, au point (x',y'), les coordonnées étant rectangulaires ; on aura donc simultanément

$$nn'+1=0 \text{ et } a^2ny'+b^2x'=0 \text{ ; d'où } b^2n'x'=a^2y'.$$

L'équation de la normale, savoir $y-y'=n'(x-x')$, devient donc

$$y-y'=\frac{a^2y'}{b^2x'}(x-x') \quad . \quad . \quad (9)$$

La *sounormale* est $x-x'$; elle répond à $y=0$, dans (9), et elle est fournie par

$$a^2(x-x')=-b^2x'.$$

La sounormale ne dépend point de l'ordonnée y' du contact et a toujours un signe contraire à celui de x' ; d'où $x<x'$.

III. Soit Y l'ordonnée qui répond à l'abscisse x', pour la circonférence décrite sur $2a$, comme diamètre, et dans le plan de l'ellipse ; on aura $Y:y'::a:b$ ou $bY=ay'$. Soit d la distance de l'origine au point où la normale (9) va couper la droite $y=px$, passant par le point (x',Y) ; d'où $d^2=x^2+y^2$, $Y=px'$ et $bpx'=ay'$. L'équation $y=px$ devient donc $y-Y=p(x-x')$ et $bx'y-ax'y'=ay'(x-x')$.

Les x et les y ont mêmes valeurs respectives dans cette équation, celle de la normale et $d^2=x^2+y^2$, pour l'intersection (x,y) de la droite $y=px$ avec la normale (9) ; éliminant donc x et y de ces équations et ayant égard à $a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2$, on trouve

$$d=a+b.$$

(Ce théorème remarquable m'a été communiqué par mon collègue M. Brasseur).

IV. Soit $(X,0)$ un point donné sur l'axe des x rectangulaires et z la distance de ce point au point quelconque (x,y) de l'ellipse. Pour calculer le minimum de z, on a les deux équations simultanées

$$z^2=y^2+(x-X)^2 \quad \text{et} \quad a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2.$$

Éliminant y^2, on verra que le minimum de z répond à

$$c^2x=a^2X\text{, d'où } c^4y^2=b^2(c^4-a^2X^2)\text{ ;}$$

et que ce minimum est donné par la relation

$$c^2z^2=b^2(c^2-X^2).$$

Le plus grand minimum de z répond à $X=0$ et se réduit à b; tandis que le moindre minimum de z répond au maximum de X, savoir c^2 sur a; il est donc donné par $az=b^2$; d'où $y=0$ et $x=\pm a$. Le maximum de X est moindre que c, comme on le sait déjà (1).

Soit n' la direction de la droite minimum z; on aura $y=n'(x-X)$. La direction n de la tangente au point (x,y) de l'ellipse, est donnée par $a^2ny=-b^2x$; donc puisque $c^2x=a^2X$, il vient $nn'+1=0$. Ainsi *un point étant donné sur le grand axe, entre les deux foyers; la plus courte distance de ce point à l'ellipse est la normale à cette courbe.*

V. On verrait semblablement que *la plus grande distance z, d'un point* (0,Y) *du second axe* 2b, *à l'ellipse, est la normale menée de ce point.* On trouve en effet, pour le maximum de z, les relations $c^2y=-b^2Y$, $c^4x^2=a^2(c^4-b^2Y^2)$ et $c^2z^2=a^2(c^2+Y^2)$.

Comme on le pouvait prévoir, les ordonnées y et Y sont toujours de signes contraires. Cela résulte d'ailleurs de ce que le maximum et le minimum de Y étant c^2 sur b et 0, le plus grand et le moindre maximum de z sont a^2 sur b et a, répondant à $y=-b$ et à $x=\pm a$.

14. Des courbures dans l'ellipse I. Toute courbe plane pouvant être considérée comme formée d'un nombre infini d'*éléments rectilignes*, chacun infiniment petit, on appelle *courbure* de la courbe en un point donné, l'angle *infiniment petit*, ayant pour sommet ce point donné et pour côtés un élément et le prolongement de celui qui le précède immédiatement.

Il suit de là que *la circonférence est une courbe uniforme, ayant la même courbure en chaque point.* On sait, en effet, que le cercle n'est au fond qu'un polygone régulier, d'un nombre infini n de côtés, égaux à x et infiniment petits; de sorte que la circonférence a nx pour longueur rectiligne. Dans ce polygone régulier, tous les angles *extérieurs*, formés dans le sens du périmètre, c'est-à-dire tous les *angles de courbure*, sont égaux à l'angle au centre ω et valent ensemble 360°, d'où $n\omega=360°$. De sorte que la courbure ω est un angle constant infiniment petit.

II. Considérons la droite nx, composée du nombre infini n d'éléments égaux à x, et courbons-là en *arc circulaire*, de rayon r. Soit α l'arc, de rayon 1, qui mesure la courbure, égale alors à l'angle au centre : les deux arcs α et x étant semblables, on a

$1:r=\alpha:x$; d'où $x=r\alpha$. Si $r=1$ et que α' mesure la nouvelle courbure, on aura alors $x=\alpha'$; d'où $r\alpha=\alpha'$. Prenant pour *unité* invariable la courbure α', dans le cercle dont 1 est le rayon, d'où $r\alpha=1$; *la courbure α de toute circonférence aura pour mesure la valeur inverse de son rayon*. Et si ce dernier est *infini*, ou plutôt s'il est 1 sur 0, on aura $\alpha=0$. Il n'y a donc point de courbure quand l'arc circulaire n'a point de rayon, c'est-à-dire devient une droite.

III. La courbure de toute circonférence étant ainsi bien connue, peut servir à évaluer numériquement la courbure de toute ligne plane en un point donné, commun à deux éléments consécutifs de cette courbe. Car si par les milieux de ces deux éléments, on conçoit deux normales, infiniment voisines, se coupant en un point O, ce point est le centre du cercle, dont la circonférence contient sur elle les deux éléments proposés, évidemment; la courbure au point donné est donc la même que celle de la circonférence, en ce point (nommé *contact du second ordre* de la courbe avec la circonférence, dite *osculatrice* de la courbe au point donné) ; et cette *courbure est mesurée par la valeur inverse du rayon du cercle*. Voilà pourquoi le centre O, le rayon r et le cercle sont dits *centre*, *rayon* et *cercle de courbure* au point donné. De plus, ce point donné est un point d'*inflexion* ou de *rebroussement* de la courbe proposée, quand le rayon r change de signe ou devient infiniment petit.

15. DÉVELOPPÉE ET DÉVELOPPANTE. Les centres de tous les cercles *osculateurs* d'une courbe plane donnée C, étant infiniment voisins les uns des autres, déterminent une autre courbe C' telle, que *chaque tangente à celle-ci est normale à la première, et réciproquement ;* car les éléments successifs de C' sont les prolongements des rayons de courbure consécutifs de C. De plus, concevons C' enveloppée d'un *fil* inextensible et flexible, ce fil étant prolongé tangentiellement au-delà de la première extrémité de C', d'une longueur égale au premier rayon de courbure de C ; il est clair que si, tenant toujours ce fil tendu, on le fait mouvoir de manière à le détacher successivement des divers points de C', l'extrémité mobile décrira la courbe C, et chaque point intermédiaire, une courbe parallèle à C. A raison de cette propriété, fort remarquable, propre à *rectifier* la courbe C', celle-ci est dite la *développée* de C, et C la *développante* de C'. C'est ainsi que, dans le triangle équilatéral dont a est le côté, le contour ou la ligne brisée $3a$ est la développée de la ligne *discontinue* composée de trois arcs circulaires, de chacun 120°, dont les centres (de courbure) sont les trois sommets du triangle et dont a $2a$ et $3a$ sont les rayons.

On voit qu'une développante ne peut avoir qu'une seule développée (le centre pour la circonférence), mais qu'une développée peut avoir une infinité de développantes. Aussi la développée est-elle à l'égard de la développante, ce que le centre est à l'égard de la circonférence.

16. Développée de l'ellipse. Cherchons la développée de l'ellipse, rapportée à ses axes $2a$ et $2b$. Soient $x=k$ et $y=h$, $x=k+u$ et $y=h+v$, deux points de l'ellipse, *infiniment voisins;* de telle sorte que les longueurs numériques u et v soient infiniment petites. Les normales à ces deux points sont représentées par

$$Y-h=\frac{a^2h}{b^2k}(X-k),$$
$$Y-h-v=\frac{a^2(h+v)}{b^2(k+u)}(X-k-u).$$

Ces équations de deux normales infiniment voisines admettent les mêmes valeurs respectives pour les coordonnées X et Y du centre de courbure, et l'on en tire d'abord

$$a^2(kv-hu)X=c^2kv(k+u).$$

Or, les deux points (k,h) et $(k+u,h+v)$ étant sur l'ellipse, il en résulte

$$v:u=-b^2(2k+u):a^2(2h+v).$$

Substituant ce rapport dans l'équation en X, puis observant que u et v sont nuls à l'égard des nombres finis, on aura

$$a^4X=c^2k^3;\ \text{d'où}\ b^4Y=-c^2h^3.\ .\ .\ .\ (10)$$

Soient A et B les racines cubiques de a^2c^2 et b^2c^2; il est clair qu'on aura

$$c^2k^2=Aa^2\sqrt[3]{X^2}\ \text{et}\ c^2h^2=Bb^2\sqrt[3]{Y^2}.$$

D'ailleurs $a^2h^2+b^2k^2=a^2b^2$; substituant donc, il vient

$$B\sqrt[3]{Y^2}+A\sqrt[3]{X^2}=c^2.\ .\ .\ .\ .\ (11)$$

Dans cette équation, (X,Y) est un centre quelconque de courbure; elle représente donc la *développée* cherchée. Celle-ci a même centre que l'ellipse; elle a ses deux axes de symétrie sur $2a$ et $2b$, dont le plus grand sur $2b$; et enfin ses quatre *sommets* sont quatre *points de rebroussement*, où se terminent ses quatre *branches*, égales entre elles et tangentes aux deux axes.

17. Rayon de courbure. Soit r le rayon de courbure au point (k,h) de l'ellipse : comme (X,Y) est le centre de courbure en ce point, on a

$$r^2=(h-Y)^2+(k-X)^2.$$

Or, par les valeurs ci-dessus de X et de Y, on a

$$a^4(k-X)=a^4k-c^2k^3 \text{ et } b^4(h-Y)=b^4h+c^2h^3.$$

Soit N la longueur de la normale, depuis le point (k,h) jusqu'à l'axe des x rectangulaires : on trouve aisément $a^4N^2=b^2(a^4-c^2k^2)$; d'où

$$b^2(k-X)=N^2k \text{ et } b^4(h-Y)=a^2N^2h.$$

A cause de $ap=b^2$, il vient, pour calculer r,

$$b^4r^2=a^4N^6 \text{ et } p^2r=N^3. \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Soit d'ailleurs i l'angle de N avec chacun des rayons vecteurs du point (k,h) ; on sait que $ch \cot i=b^2$; d'où $(b^4+c^2h^2)\cos^2 i=b^4$. Or, $b^4+c^2h^2=a^2N^2$, donne $aN\cos i=b^2$ ou $N\cos i=p$. Éliminant N, il vient

$$p=r\cos^3 i, \text{ ou } r=p\,\text{séc}^3 i. \quad . \quad . \quad (13)$$

L'équation $p=r\cos^3 i$ servira à calculer le rayon de courbure en chaque point de l'ellipse. On peut aussi construire ce rayon r, pour le point M : on élève trois perpendiculaires successives, l'une sur MF, à la distance p de M ; la seconde sur MC, au point où la première coupe la normale MC en M ; la troisième sur le rayon vecteur FM, au point où il est coupé par la seconde : cette troisième perpendiculaire coupe la normale en M au centre C de courbure.

Soit d'ailleurs α la courbure de l'ellipse au point quelconque M, d'où $r\alpha=1$; on aura donc

$$p\alpha=\cos^3 i.$$

Aux extrémités de $2a$, $\cos i$ est à son maximum 1, aussi bien par suite que la courbure α ; donc au contraire le rayon r de courbure est alors à son minimum p. Aux extrémités de $2b$, l'angle obtus $2i$ est à son maximum, aussi bien que i ; donc $\cos i$ est à son minimum, donné par $a\cos i=b$, et par suite r est à son maximum, donné par $br=a^2$. De même la courbure α est à son minimum, fourni par $a^2\alpha=b$.

Observons que la théorie des courbures, dans les lignes du second ordre, étant très-élémentaire, devrait faire partie de la géométrie analytique plane, comme conduisant immédiatement aux *lois de la gravitation ;* ainsi que nous l'avons établi, p. 220 de la 2^{me} édition de notre Mécanique élémentaire. (Voyez d'ailleurs le tome I du Journal de Mathématique, publié par M. *Liouville*).

THÉORÈMES. La méthode précédente ne fournit pas seulement les *développées* de l'hyperbole et de la parabole, mais aussi les expressions (12) et (13) du rayon de courbure dans chacune ; et il en résulte que *dans les lignes du second ordre, le rayon de courbure a pour valeur, soit le cube de la normale divisé par le carré du demi-paramètre, soit le produit du demi-paramètre par le cube de la sécante de l'angle que la normale fait avec un rayon vecteur, mené au point de contact.*

Ces deux théorèmes généraux étaient faciles à prévoir; car les trois courbes étant représentées par l'équation $y^2=2px+qx^2$, et les relations (12) et (13), pour l'ellipse, étant indépendantes du coefficient q, par lequel chaque genre de courbe est caractérisé; ces relations doivent s'appliquer aux trois genres, nécessairement. On démontre aussi que, *si deux courbes du second degré sont semblables, il en est de même de leurs développées.*

18. DES AIRES DANS L'ELLIPSE. Les deux axes $2a$ et $2b$, d'une ellipse, étant donnés, on sait que cette courbe est la projection d'une circonférence, et réciproquement; a étant le rayon de la circonférence, et l'angle v des deux plans étant donné par $b=a\cos v$, dans le premier cas. Or, on sait mesurer l'aire S' du *secteur* quelconque du cercle; donc si S désigne le *secteur elliptique*, projection de S', on aura $S=S'\cos v$ ou $aS=bS'$. Ainsi l'on sait calculer l'aire de tout secteur elliptique ; et la même relation subsiste lorsque S' et S sont deux *segments*, circulaire et elliptique.

Deux diamètres rectangulaires du cercle ont pour projections respectives deux diamètres conjugués de l'ellipse; or, les deux premiers divisent le cercle πa^2 en quatre secteurs égaux à $S'=\frac{1}{4}\pi a^2$; donc les deux derniers *divisent l'aire elliptique* E *en quatre secteurs équivalents à* S, d'où $S=\frac{1}{4}E$. La relation $aS=bS'$ devient donc $E=\pi ab$.

Soit d'ailleurs k le rapport rationnel ou non, de l'aire E au rectangle ab ; d'où $E=kab$. Le nombre abstrait k étant indépendant de a et b, ne change point quand on pose $b=a$; mais alors l'aire E devient le cercle πaa ; donc $\pi aa=kaa$. Et puisque k n'a point changé, on avait d'abord $k=\pi$; donc encore $E=\pi ab$. On voit que l'*aire de l'ellipse équivaut au cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre les deux demi-axes.*

On peut donc décrire le cercle qui soit dans un rapport connu avec une aire elliptique donnée, ou qui soit équivalent à la somme algébrique de tant d'aires elliptiques données qu'on voudra. Mais ce dernier problème est bien plus simple lorsque toutes les ellipses sont *semblables*.

19. ELLIPSES SEMBLABLES. *Deux ellipses sont semblables dès que les grands axes sont proportionnels aux petits.* Supposons les deux ellipses concentriques et les axes homologues en ligne droite ; de telle sorte que les deux courbes soient rapportées au même système de coordonnées rectangulaires. Soient $2a$ et $2b$ les deux axes de la première, $2a'$ et $2b'$ ceux de la seconde : par hypothèse $2a':2a$ $:: 2b':2b$. Soit r le rapport commun, de *similitude*, d'où $a'=ar$ et $b'=br$: si (x,y) et (x',y') sont deux points homologues, il est facile de voir que les coefficients des termes du second degré en x et y, x' et y', sont respectivement égaux, dans les équations des deux courbes ; donc ces deux ellipses sont *semblables*, de forme et de position (7), et l'une *représente* l'autre.

Soient donc L et L' les *longueurs* des deux ellipses, E et E' leurs *aires ;* il est clair qu'on aura $L'=Lr$ et $E'=Er^2$. La première ellipse servira donc à déterminer aisément la seconde et la représente complètement ; mais la difficulté est de mesurer L, parce que l'expression de cette longueur ne saurait s'obtenir par des procédés élémentaires rigoureux : il faut se résoudre à *tendre*, sur l'ellipse matérielle, un *fil* flexible et à prendre, pour L, la longueur du fil ainsi tendu, ayant ses deux bouts réunis. Sur le papier, on emploie une lame *élastique*, à bords rectilignes ; mais une fois que L est déterminée numériquement, il en résulte la longueur $L'=Lr$. Cela montre l'importance de la similitude, pour le mesurage, comme pour la recherche des propriétés des figures.

COROLLAIRES. Dans deux ellipses semblables, les courbures sont égales pour chaque couple de points homologues. Si deux ellipses sont représentées par des équations complètes, rapportées à un même système quelconque de coordonnées, ces deux ellipses sont semblables dès que les trois termes du second degré en x et y sont respectivement égaux. Enfin, on peut construire l'ellipse semblable à une ellipse donnée, connaissant le rapport, soit des deux longueurs ou des deux aires, soit de deux arcs ou de deux secteurs semblables ; etc.

20. POLYGONES CIRCONSCRITS A L'ELLIPSE. Soit P un polygone quelconque de n sommets, *circonscrit* au cercle ; sa projection P'

est donc un polygone de n sommets *circonscrit* à l'aire elliptique E, projection du cercle, et l'on a $P'=P \cos v$ ou $aP'=bP$.

Comme a et b sont constants, P et P' variables, il est clair que P et P' seront à la fois les moindres possibles; or P est un minimum *absolu* dès qu'il est régulier; donc alors P' est aussi un minimum absolu. D'ailleurs, il y a une infinité de polygones réguliers égaux à P circonscrits au cercle, tous concentriques, les contacts étant les milieux des côtés; donc il y a une infinité de polygones, équivalents au minimum P', circonscrits à l'ellipse, les contacts étant les milieux des côtés et le centre de la courbe étant chaque fois celui de *gravité* ou de *symétrie* du minimum P', suivant que le nombre n de ses côtés est *impair* ou *pair*.

1° Si $n=3$, les minimums P' valent chacun le triangle isocèle dont la base $2b\sqrt{3}$ touche l'ellipse à une extrémité du grand axe $2a$, le sommet étant sur le prolongement du même axe. Et comme le centre de gravité de ce triangle minimum coïncide avec le centre de l'ellipse, la hauteur du triangle est $3a$; donc l'aire minimum a pour mesure $3ab\sqrt{3}$.

Les sommets de tous les triangles minimums circonscrits P' apppartiennent à une seconde ellipse, semblable à la première, de forme et de position; car cette nouvelle ellipse est la projection de la circonférence, de rayon $2a$, circonscrite au triangle équilatéral minimum, lui-même circonscrit au cercle proposé : donc $4a$ et $4b$ sont les axes de la seconde ellipse, dont par suite l'aire est quadruple de celle de la première. On peut donc ainsi passer par une suite d'ellipses concentriques semblables, dont les aires deviennent de 4 en 4 fois plus grandes.

2° Si $n=4$, tous les quadrilatères minimums P', circonscrits à l'ellipse, sont des parallélogrammes conjugués, équivalents entre eux et aux rectangles des axes. Les sommets de tous les P' se trouvent sur une ellipse, semblable, de forme et de position, à la première, et d'une aire d'ouble; car ses axes sont $2a\sqrt{2}$ et $2b\sqrt{2}$.

3° En général, si n est pair, tous les polygones minimums P', circonscrits à l'ellipse, sont symétriques chacun, équivalents entre eux et concentriques à la courbe; ils sont tous inscrits dans une ellipse, concentrique et semblable à la première. Ainsi pour $n=6$, par exemple, les hexagones minimums sont chacun symétrique et tous ont la même mesure $2ab\sqrt{3}$; ils sont inscrits dans une seconde ellipse, semblable à la première et dont l'aire est les quatre tiers de celle de la première.

21. ELLIPSES INSCRITES. On a vu en géométrie que, parmi tous les polygones équivalents, de chacun n côtés et circonscriptibles à différents cercles, celui de plus grand cercle inscrit est régulier. Soient donc P et P′ deux polygones de chacun n côtés, le premier circonscrit au cercle de rayon a variable, et le second P′, projection du premier, circonscrit à l'aire elliptique E, projection de l'aire πa^2 du cercle; et soit v l'angle invariable des deux plans: on aura

$$P'=P\cos v \text{ et } E=\pi a^2\cos v.$$

L'angle v étant donné constant, aussi bien que l'aire P, il en résulte l'aire P′, aussi constante. Or, le cercle variable πa^2 est le plus grand possible dès que P est un polygone régulier; donc alors l'aire E est aussi la plus grande possible : elle touche chacun des côtés de P′ à son milieu et a pour centre celui de gravité de P′. Ce dernier polygone, qui doit être *symétrique*, si n est pair, étant donc tracé, et connaissant l'angle v, qui rend P un polygone régulier, P sera aussi tracé; d'où l'on aura le rayon a du cercle maximum inscrit, et par suite le grand axe $2a$ de l'aire elliptique E maximum, inscrite dans P′. Quant au second axe $2b$, il sera donné par $b=a\cos v$; on peut donc décrire l'ellipse maximum, inscrite dans P′, ou du moins une ellipse égale; mais la difficulté, même lorsque $\cos v=\frac{1}{2}$, est de tracer, *dans l'intérieur de* P′, *l'ellipse maximum, qui doit avoir pour centre celui de gravité de* P′ *et toucher chacun de ses côtés au milieu.*

1° Supposons que P′ soit un triangle quelconque tracé, pris pour base d'un prisme triangulaire droit : on peut toujours couper ce prisme par un plan, de telle sorte que la section soit un triangle équilatéral P; on peut même calculer l'aire P, aussi bien que $\cos v$, v désignant l'angle des deux plans. Observons que la description de l'ellipse exige cinq conditions distinctes, comme de passer par cinq points donnés; il existe donc une infinité d'ellipses inscrites dans le triangle donné P′. Or, en faisant tourner ce triangle dans son plan, il est la projection d'une suite de triangles P, équivalents entre eux; donc la circonférence inscrite dans chacun de ceux-ci, a pour projection une ellipse inscrite dans P′. Et puisque quand P est équilatéral, le cercle inscrit est le plus grand possible, on voit qu'alors l'aire elliptique E, inscrite dans P′, est la plus grande possible : elle touche chacun des côtés de P′, dans sa nouvelle position, au point milieu de ce côté, et son centre est celui de gravité de P'. Soit donc $3d$ la droite qui joint un sommet de P' au milieu du côté opposé $2m$; $2b'=2d$ sera un diamètre de l'ellipse maximum inscrite ; tandis que son conjugué $2a'$, pris pour axe des x obliques, est parallèle à la tangente $2m$. D'ailleurs le milieu d'un autre côté, appartenant à l'ellipse maximum, a pour coordonnées $x=m$ et $y=\frac{1}{2}d$; donc l'équation $a'^2y^2+b'^2x^2=a'^2b'^2$ fournit $a'=\frac{2}{3}m\sqrt{3}$. Connaissant donc ainsi les deux diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$, de longueur et de position, il en résulte le tracé des deux axes et la description de l'ellipse maximum, inscrite dans le triangle quelconque donné P'.

L'aire de cette ellipse est $E=\frac{1}{9}\pi P'\sqrt{3}$; d'où $E>\frac{1}{2}P'$. Si donc *on veut, dans un morceau triangulaire* P' *d'acajou, couper la plus grande table possible*, il faudra prendre cette table *elliptique* plutôt que *rectangulaire* ($\frac{1}{2}P'$ étant le plus grand rectangle *inscrit* dans P'); et nous venons de voir comment on peut résoudre le problème.

2° Lorsque P' est un quadrilatère convexe quelconque tracé, il existe encore une infinité d'ellipses inscrites dans ce quadrilatère. Menant par les milieux des côtés de P' des droites respectivement parallèles et par suite égales aux deux droites $2d$ et $2m$ qui joignent ces milieux, on formera le parallélogramme R, équivalent à $P'=P\cos v$. Comme R est la projection du carré équivalent à P ; d'où $P=4a^2$, a désignant le rayon du cercle maximum inscrit dans les quadrilatères équivalents à P ; l'aire elliptique E, projection du cercle maximum, est celle de l'ellipse maximum inscrite dans R, ayant $2d$ et $2m$ pour diamètres conjugués et pour aire maximum $E=\frac{1}{4}\pi P$; elle est donc facile à décrire. Mais elle n'est pas inscrite dans P', bien qu'elle passe par les milieux de ses côtés : la plus grande ellipse, inscrite dans le quadrilatère convexe donné P', ne saurait se trouver par la méthode élémentaire des projections ; car pour cela, P' étant la base d'un prisme quadrangulaire droit, il faudrait qu'il fût possible de couper ce prisme par un plan tel, que la section résultante fût un carré.

22. Polygones inscrits. Considérons les polygones de n côtés, en nombre illimité, inscrits dans une ellipse, donnée par ses axes $2a$ et $2b$; son aire E étant la projection du cercle dont a est le rayon. Procédant comme plus haut, nous verrons qu'il existe une infinité de polygones *maximums* inscrits, tous équivalents à P' et chacun *symétrique*, si n est pair ; tous circonscrits à une même ellipse dont l'aire E' est semblable, de forme et de position, à la proposée E. Ainsi pour $n=3$, le triangle maximum $P'=\frac{3}{4}ab\sqrt{3}$ et

$E'=\frac{1}{2}E$; pour $n=4$, le quadrilatère maximum est un parallélogramme P', variable de forme et pouvant devenir un losange ou un rectangle, sans qu'il cesse d'être équivalent au demi-rectangle des axes, et l'on a $E'=\frac{2}{\pi}E$; enfin, pour $n=6$, tous les hexagones symétriques maximums inscrits sont équivalents à $\frac{3}{2}ab\sqrt{3}$, et l'on a $E'=\frac{3}{4}E$.

23. ELLIPSES CIRCONSCRITES. On a vu en géométrie que le plus petit de tous les cercles, circonscrit à des polygones de chacun n côtés et tous équivalents à P, répond au polygone régulier. Soit A le rayon du cercle minimum ; en raisonnant comme plus haut, on verra que parmi toutes les aires des ellipses circonscrites aux polygones équivalents à P', projections des polygones P, la plus petite de toutes a pour *centre* celui de *gravité* ou de *symétrie* du polygone $P'=P\cos v$, suivant que n est *impair* ou *pair*, et que de plus, 2B désignant le second axe de l'aire elliptique minimum E, d'où $B=A\cos v$, on aura toujours $E'=\pi A^2\cos v=\pi AB$; et si E désigne l'aire elliptique maximum inscrite dans P', d'où $E=\pi ab$, $b=a\cos v$ et $A:a=B:b$; les deux ellipses maximum E et minimum E' sont semblables, de forme et de position. Et puisqu'on sait décrire la première, pour le triangle et le quadrilatère P', il sera facile d'en déduire la description de la seconde, chaque fois. Pour le triangle P' quelconque, on a $E'=\frac{4}{9}\pi P'\sqrt{3}=4E$, et pour le quadrilatère P', il vient $E'=\frac{1}{2}\pi P'=2E$.

24. THÉORÈMES. Ce qui précède conduit à démontrer, avec facilité, les théorèmes que voici, sur les quadrilatères maximums et minimums inscrits et circonscrits à l'ellipse, dont $2a$ et $2b$ sont les axes tracés :

I. Le rectangle inscrit, d'aire et de contour maximums, est le carré dont les diagonales sont bissectrices des angles droits des deux axes ; c'est le seul carré inscrit, ayant le côté égal à la hauteur du losange des sommets.

Scholie I. Les maximums ci-dessus sont relatifs aux diamètres égaux ; mais le plus grand de tous les rectangles inscrits est semblable, de forme et de position, au rectangle des axes et en vaut la moitié ; il est donc plus grand que le seul carré inscrit.

Scholie II. Le rectangle inscrit, de contour maximum, égal au contour du losange des sommets, a ses diagonales égales telles, que la direction n de l'une est donnée par $a^2n=b^2$. Le contour maximum de ce rectangle inscrit est plus grand que celui du seul carré inscrit.

II. Parmi tous les losanges inscrits dans l'ellipse, le seul carré est celui dont l'aire, le contour et la somme des diagonales sont les moindres qu'il se puisse.

III. L'ellipse admet une infinité de losanges circonscrits, dont un seul carré, ayant ses contacts aux extrémités de deux diamètres égaux, non rectangulaires, et chaque diagonale double de la corde des sommets. De plus, les sommets de tous ces losanges se trouvent sur les prolongements des deux axes.

IV. De tous les losanges circonscrits, le plus petit équivaut au rectangle des axes et ses côtés sont parallèles aux diagonales de ce rectangle. (Il est moindre que le carré circonscrit, comme cela doit être).

V. Parmi tous les losanges circonscrits, celui de moindre périmètre a son côté égal à la somme des deux demi-axes; les demi-diagonales h et k sur les axes des y et des x étant données par $h^2=b(a+b)$ et $k^2=a(a+b)$. Le côté du losange proposé est moindre que celui du seul carré circonscrit, comme cela doit être.

VI. Entre tous les parallélogrammes circonscrits à l'ellipse, les plus petits sont les parallélogrammes conjugués, tous équivalents à $4ab$; dont un seul *rectangle*, ayant le plus petit contour $4(a+b)$, et un seul *losange*, ayant le plus grand périmètre $4\sqrt{2}\sqrt{(a^2+b^2)}$, parmi les parallélogrammes conjugués. Ce losange conjugué est le minimum de tous les losanges circonscrits à l'ellipse (IV).

VII. Si le produit des directions des deux côtés adjacents est un nombre constant et négatif, les sommets de tous les parallélogrammes circonscrits, en nombre infini, décrivent une ellipse concentrique et semblable, de forme et de position, à la première, si tous les parallélogrammes sont conjugués. Dans ce cas, l'aire de la seconde ellipse est double de celle de la première.

Scholie I. On peut ainsi obtenir une suite d'ellipses semblables, de 2 en deux fois plus grandes; et si R désigne le rayon du cercle équivalent à la somme des m premières, on aura $R^2=ab(2^m-1)$.

Scholie II. La propriété ci-dessus, *descriptive* de la seconde ellipse, est celles des cordes supplémentaires. Mais tous les sommets se trouveraient sur les prolongements des deux diamètres conjugués égaux, si le produit constant était toujours positif.

VIII. Les sommets de tous les rectangles circonscrits à l'ellipse décrivent une circonférence concentrique, de rayon égal à la corde des sommets; et le plus grand de tous ces rectangles circonscrits est le seul carré circonscrit: c'est aussi le rectangle de périmètre maximum.

IX. Deux ellipses concentriques semblables, étant les projections de deux cercles concentriques; non-seulement toute corde de la plus grande ellipse, tangente à la plus petite, est divisée en deux parties égales, par le contact; mais v désignant l'angle des deux plans et C la demi-corde de la plus grande, tangente à la plus petite et parallèle à son grand axe; la *couronne elliptique* a pour mesure $\pi C^2 \cos v = \pi R^2$, en posant $C:R::R:C \cos v$.

25. Théorèmes descriptifs. Voici encore plusieurs théorèmes, propres à décrire l'ellipse et d'autres lignes, qui en dépendent, plus ou moins immédiatement.

I. Si l'on cherche le lieu géométrique du contact de toute tangente à l'ellipse et des milieux des cordes parallèles, on trouve, non-seulement un diamètre, mais l'équation de celui-ci et celle de la tangente proposée.

II. Le lieu géométrique des milieux d'une suite de cordes, partant d'un point P du plan de l'ellipse, dont O est le centre, n'est pas une droite, mais une ellipse semblable, de forme et de position, à la première, son centre étant le milieu de OP.

III. Le rayon du cercle moyen proportionnel entre les aires des deux ellipses précédentes, est lui-même moyen proportionnel entre le demi-grand axe de la première et le demi-petit axe de la seconde. On peut aisément calculer ce rayon, lorsque 160 et 120 étant les axes de la première ellipse, les coordonnées du point P valent 100 chacune.

IV. Le lieu géométrique des points qui divisent en trois parties égales chaque corde parallèle à un axe d'une ellipse tracée, est une seconde ellipse concentrique, d'une aire six fois plus petite.

V. Le lieu géométrique de tous les points où les perpendiculaires, menées du centre sur les tangentes à l'ellipse, coupent les ordonnées des contacts, prolongées, est une seconde ellipse, semblable à la première, mais inversement située, comme ayant son petit axe sur le grand de l'autre.

VI. Si pour une même abscisse, l'ordonnée d'une courbe est moitié de celle de la circonférence, l'aire de cette courbe, à trouver, est moitié de l'aire du cercle.

VII. Si (x',y') étant un point quelconque de la circonférence donnée, (x,y) est un autre point tel, qu'on ait toujours $xy=x'y'$; le lieu géométrique de tous ces autres points est une ellipse *indéterminée*, mais dont l'aire est toujours équivalente à celle du cercle.

VIII. Dans l'ellipse, rapportée à ses axes $2a$ et $2b$, la somme des deux cordes parallèles à deux diamètres conjugués quelconques, passant par un foyer, a pour expression $2a \times 2p$, $2p$ désignant le paramètre. (Cette propriété remarquable n'est pas descriptive de l'ellipse).

IX. Pour décrire une ellipse, dont les axes sont donnés, ou pour décrire une ellipse semblable, *d'un mouvement continu*, on a le *triangle* *variable*, qui revient au *losange variable*. Voici encore, pour cet effet, un *instrument* très-simple : la pointe fixée en un point quelconque d'une règle mobile, décrit une ellipse, pendant que la règle se meut de telle sorte que ses extrémités glissent sur deux droites perpendiculaires entre elles.

X. La pointe fixée sur le cercle roulant intérieurement sur la circonférence d'un cercle fixe, de rayon double, décrit une ellipse dont les demi-axes a et b sont la plus grande et la plus petite distance de la pointe à la circonférence mobile ; et suivant que la pointe est à la circonférence ou au centre, elle décrit une droite ou un cercle égal au cercle mobile. Voilà donc encore un instrument propre à décrire l'ellipse, d'un mouvement continu.

XI. Peut-on diviser l'aire elliptique donnée en deux portions équivalentes, soit par une circonférence, soit par une ellipse semblable ? décrire ces deux courbes et calculer le rayon du cercle équivalent à la différence de deux aires elliptiques concentriques semblables, connaissant les axes 200 et 120, et 100 et 60 des deux ellipses.

XII. Décrire l'ellipse dont chaque ordonnée, pour une abscisse commune, soit la somme de l'abscisse et de l'ordonnée correspondantes de la circonférence, des rayon 10, rapportée au même système de coordonnées rectangulaires.

XIII. Les deux côtés $CA=b$ et $CB=a$ du triangle tracé T, étant chacun divisé en n parties égales : si l'on joint, par deux droites, le point A au v ième point de division de a, à partir de C, et le point B au v ième point de division de b, à partir de A ; ces deux droites se coupent sur l'ellipse *maximum*, inscrite dans 4T (triangle obtenu en prolongeant chacun des côtés CA et CB d'une longueur égale à lui-même). L'ellipse maximum devient une circonférence, si $b=a$ et l'angle $C=30°$.

XIV. Deux ellipses, rapportées au même système de coordonnées rectangulaires, étant tracées ; le lieu géométrique des intersections des cordes de contact de deux couples de tangentes à la plus petite, menée de deux points infiniment voisins de la plus grande, est une troisième ellipse ; et l'aire de la plus petite ellipse proposée est moyenne proportionnelle entre les aires des deux autres.

Réciproquement, les deux tangentes à la plus grande des deux ellipses proposées, menées par les extrémités de chaque corde touchant la plus petite, se coupent sur une troisième ellipse.

XV. Connaissant numériquement les deux côtés a et b de l'angle droit d'un triangle rectangle mobile, dont l'un a s'appuie constamment sur deux axes rectangulaires, calculer l'aire de l'ellipse décrite par le sommet opposé à ce côté. Il existe un problème analogue pour le triangle équilatéral mobile, de côté donné a.

XVI. L'angle des coordonnées étant de 60°, quel est le lieu géométrique de tous les points tels, 1° que la somme des carrés des distances de chacun aux deux axes des coordonnées soit équivalente au carré donné R^2 ? 2° que R^2 soit la somme des carrés des diagonales du parallélogramme P variable, construit sur les coordonnées de chaque point ; ou bien cette somme, plus ou moins l'aire du parallélogramme? (Réponse : chaque fois une ellipse, dont on sait calculer les axes, de longueur et de position, aussi bien que l'aire ; et l'on sait aussi décrire la courbe).

Scholie. Le lieu serait une *hyperbole*, si le carré donné R^2 devait être équivalent, soit au rectangle des distances de chaque point aux deux axes, soit à la différence des carrés de ces distances, soit enfin à 4 fois l'aire du parallélogramme P, moins le carré de la diagonale opposée à l'angle de 60°. Mais le lieu serait une *parabole*, facile à décrire, si la distance de chaque point à l'axe des abscisses devait être moyenne proportionnelle entre 12 et l'x de ce point.

XVII. Soit d la longueur de la perpendiculaire élevée au milieu de la droite donnée $2a$: si le système se meut de telle sorte que les extrémités de $2a$ glissent, l'une sur l'axe des x rectangulaires et l'autre sur l'axe des y ; l'extrémité de d décrit une ellipse ou deux droites perpendiculaires entre elles, suivant que d n'est pas ou est égale à la demi-droite a ; et si $d=2a$, l'aire elliptique est triple du cercle décrit par le milieu de $2a$.

XVIII. Deux cercles, de rayons a et b, étant tracés sur un plan ; le lieu géométrique des centres de tous les cercles tangents aux deux proposés, est une ellipse ou une hyperbole, dont les deux centres donnés sont les foyers, suivant que l'un des deux cercles est *intérieur* ou *extérieur* à l'autre, même quand il le toucherait. Le lieu serait une parabole, si l'un des deux cercles devenait une droite hors de l'autre cercle. (Calculer l'aire elliptique lorsque la distance des centres étant 10, les rayons a et b valent 30 et 20).

XIX. Lorsque la circonférence de rayon a donné, est tracée ; si l'on prolonge chacune de ses ordonnées rectangulaires de la longueur constante b, le lieu géométrique de tous les points, ainsi obtenus, est une circonférence égale à la proposée, sans coïncider avec elle. Mais si chaque ordonnée est prolongée d'une longueur égale à cette ordonnée ou égale à l'abscisse correspondante ; le lieu géométrique est chaque fois une ellipse, d'une aire double à celle du cercle, dans le premier cas, et équivalente au cercle proposé, dans le second cas.

Scholie. Ce triple théorème, remarquable en lui-même, l'est aussi parce qu'en réalité chaque ordonnée est prolongée *extérieurement* au cercle; ce qui donne séparément les moitiés respectives de chacune des trois courbes ci-dessus, lorsque la circonférence proposée est rapportée à son diamètre $2a$. Mais si l'origine était au centre et qu'on portât la longueur b sur chaque corde perpendiculaire à l'axe des x rectangulaires, à partir de chacune de ses deux extrémités, on aurait séparément les quarts de la courbe cherchée. (C'est ainsi que procédait M. Noël, professeur de mathématiques en ville; lequel, de cette manière, m'a conduit au théorème proposé).

XX. Lorsque l'hypoténuse d'un triangle rectangle variable est sur l'axe des x rectangulaires, à partir de l'origine, et que le côté opposé à celle-ci est double du côté adjacent; non-seulement le lieu géométrique du sommet de l'angle droit est le système de deux droites; mais ces deux droites sont les asymptotes de l'hyperbole $y^2-4x^2=-4$. Et si l'angle à l'origine était double de l'autre, le lieu géométrique serait les asymptotes de l'hyperbole équilatère $y^2-x^2=-1$.

26. Pôles et Polaires dans l'ellipse. Les propriétés des *pôles* et de leurs *polaires*, dans les trois courbes du second degré, se démontrent, avec facilité, soit d'après l'équation générale et complète, soit plutôt d'après l'équation commune et aux axes conjugués. Mais pour l'ellipse, la théorie des pôles et des polaires est conséquence immédiate de cette théorie, dans la circonférence, à l'aide des projections orthogonales; ainsi qu'on peut le voir dans la 2e édition de notre traité de géométrie. Il en résulte les belles propriétés des *hexagones incrits* et *circonscrits* à l'ellipse, et ainsi que différents corollaires, faciles à déduire. Nous ne parlons ici des pôles et des polaires, dans l'ellipse, que pour rappeler l'une des belles applications de la méthode des projections orthogonales, dans la recherche des propriétés de cette courbe. Voici encore d'autres applications.

27. Tangentes communes. Deux ellipses E et E', semblables de forme et de position, étant données sur un plan; les circonférences C et C', dont elles sont les projections, se trouvent sur le plan faisant, avec le premier, un angle v dont le cosinus est égal au rapport (de similitude) des deux axes homologues de E et de E'. Or, il y a généralement quatre tangentes communes aux deux circonférences; donc *il y a aussi quatre tangentes communes aux deux ellipses, entièrement l'une hors de l'autre*. Et ces quatre tangentes se réduisent à trois, à deux, à une seule et à aucune, suivant que les deux ellipses E et E' se touchent extérieurement, se coupent (en deux points et jamais plus), se touchent intérieurement ou sont l'une dans l'autre.

De plus, les tangentes communes vont se couper deux à deux aux *pôles de similitude* de deux ellipses et *divisent* (*harmoniquement*) *la distance des centres de ces deux courbes en quatre segments, proportionnels aux axes homologues*. Il est donc facile de construire ces deux pôles, par chacun desquels menant deux tangentes à l'une des ellipses, elles sont aussi tangentes à l'autre.

28. Axe radical. On sait que l'*axe radical* de deux cercles C et C' est la droite qui passe par les milieux des deux tangentes communes extérieures. Cette droite, perpendiculaire à la distance des centres, est telle

que les quatre tangentes ou les deux moindres cordes, menées par l'un quelconque de ses points, sont égales entre elles. Or, on peut toujours prendre les deux plans, comprenant l'angle v, tels que leur intersection soit parallèle à la distance des centres de C et de C'; et alors les grands axes des ellipses E et E' sont en ligne droite. Dans ce cas, l'*axe radical* des deux courbes, étant la droite qui joint les milieux des deux tangentes communes extérieures, est non-seulement perpendiculaire à la distance des centres, mais de plus, les quatre tangentes ou les deux moindres cordes, menées de l'un quelconque de ses points, sont égales entre elles.

Si les deux ellipses se coupent, l'axe radical est sur la corde commune; et il coïncide avec la tangente commune, si elles se touchent extérieurement ou intérieurement. Or, cela a toujours lieu, pour deux ellipses quelconques, lorsque la distance des centres est égale à la somme ou à la différence des demi-diamètres sur cette distance.

29. Centre radical. On sait que le *centre radical* de trois cercles quelconques est le point où se coupent les trois axes radicaux de ces trois cercles, pris deux à deux; donc le *centre radical* de trois ellipses semblables est le point où vont se couper les trois axes radicaux de ces ellipses, prises deux à deux.

30. Cercles tangents I. Les propriétés des *pôles* et *polaires*, des *centres* et *axes radicaux*, des *pôles* et *axes de similitude*, des *points* et *cercles réciproques*, etc., ont été employées, par différents géomètres modernes, pour résoudre les problèmes sur les contacts des droites et des cercles. Mais les solutions, bien que très-simples en théorie, ne nous paraissent point préférables à celles que nous avons indiquées, sous formes de théorèmes, p. 330 de la troisième édition de notre traité de géométrie élémentaire; parce qu'elles exigent le tracé d'au moins autant de lignes que les nôtres, et que celles-ci ont l'avantage de se baser sur les propriétés les plus élémentaires de la circonférence et de se déduire immédiatement de l'analyse de l'énoncé.

II. Les problèmes sur les cercles tangents sont nombreux et plusieurs passent pour difficiles; bien que les relations dans le cercle conduisent aisément aux procédés graphiques, propres à résoudre ces problèmes. Mais la difficulté vient principalement de la multitude de lignes dont la solution exige le tracé. Or, quand on doit décrire un grand nombre de lignes, pour avoir la quantité inconnue, il est impossible de l'obtenir d'une manière suffisamment approchée, à cause des erreurs inévitables dans l'emploi des instruments: il est non-seulement plus court alors, mais souvent aussi beaucoup plus exact de résoudre le problème par des *essais* ou des *tâtonnements*, d'autant moins nombreux et moins fautifs, qu'on est plus exercé aux constructions avec le compas et la règle. Il arrive même souvent qu'un ou deux essais suffisent pour obtenir la figure cherchée, avec toute la précision que peuvent comporter les opérations descriptives. C'est donc ce moyen de solution qu'il faut d'abord employer, soit pour avoir la solution elle-même, soit pour découvrir les procédés géométriques rigoureux, propres à la vérifier.

III. La solution par *tâtonnements* est souvent la seule praticable; mais elle peut avoir l'inconvénient de faire regarder comme vrai ce qui ne l'est qu'à peu près ou dans des circonstances très-particulières; tandis que l'analyse de l'énoncé, d'après des principes certains, décomposant la question en plusieurs autres, plus simples et qu'on sait résoudre par des procédés rigoureux, conduit directement au but, montre d'où proviennent les erreurs pratiques et donne le moyen de les corriger, ou du moins d'en affaiblir l'influence sur les résultats. Il est clair que plus on sait traiter de ces problèmes élémentaires, plus il est facile d'en trouver parmi eux qui soient propres à résoudre les nouveaux qu'on pourrait se proposer; et il y aura chaque fois un choix à faire parmi les *données* et les *inconnues*, qu'il faut toujours réduire au plus petit nombre possible, par une analyse logique rigoureuse, et à l'aide parfois de grandeurs *auxiliaires*, connues ou inconnues, choisies convenablement. Mais on serait souvent arrêté dans la solution, si l'on ne voulait faire usage que des ressources qu'offre la géométrie pure : l'algèbre, lorsqu'elle est applicable, donne les inconnues avec beaucoup plus de précision que les opérations graphiques; souvent même elle est indispensable pour découvrir les solutions les plus simples, avec la règle et le compas, non seulement pour les problèmes *déterminés* de géométrie; mais aussi pour les problèmes *indéterminés*. Que serait, en effet, l'étude des courbes, sans la grande et belle idée de Descartes de *représenter* les *points* et les *lignes* par des *équations* ?

C'est particulièrement dans les problèmes sur les contacts des droites et des circonférences, que la solution par *tâtonnements* doit s'employer, sauf à la vérifier ensuite, par le calcul; lequel est indispensable, à cause du grand nombre de lignes qu'il faut décrire pour avoir la figure demandée et parce que les dimensions de cette figure dépasseraient souvent l'ouverture du plus grand compas possible et la longueur de la règle.

31. PROBLÈME I. *Calculer le rayon* x *et le centre* O *de la circonférence tangente à la droite* D *et aux deux cercles extérieurs, de centres* A *et* B, *situés d'un même côté de la droite.* Ici les données numériques sont les rayons a et b des deux cercles tracés, les distances h et k des centres A et B à la droite D, avec la portion d que h et k interceptent sur D; tandis que les inconnues sont le rayon x et la distance y du pied de h au contact du cercle cherché avec D. Pour calculer ces deux inconnues, on a les deux équations simultanées :

$$(a+x)^2=y^2+(h-x)^2,$$
$$(b+x)^2=(k-x)^2+(d-y)^2.$$

Éliminant x, l'équation finale sera du second degré en y; le problème aura donc généralement quatre solutions, lesquelles peuvent se réduire à trois, à deux, à une ou à aucune, suivant la position relative et les valeurs particulières des données. Les deux cercles A et B peuvent toucher D d'un même côté; d'où $h=a$ et $k=b$. Le cercle B se réduit à son centre B, si $b=0$; et alors il faut *décrire la circonférence, passant par le point* B *et touchant les deux lignes* D *et* A, *droite et circulaire*. Ce problème admet deux solutions : a et b pourraient être *nuls*.

32. PROBLÈME II. *Trois cercles extérieurs, de centre* A, B, C *et de rayons* a, b, c, *étant tracés sur un plan, calculer le rayon* x *du cercle* O *qui les touche tous les trois*. Les données numériques sont a, b, c, la distance $AB=d$, la distance $CK=h$ du centre C à AB et le segment $AK=k$. Les inconnues sont x, y et z, savoir y distance de O à AB et z distance de A au pied de y. Or, en supposant $a>b>c$, on a les trois équations simultanées, le cercle O étant intérieur :

$$(a+x)^2=y^2+z^2,\ (b+x)^2=y^2+(d-z)^2$$
$$\text{et } (c+x)^2=(h-y)^2+(z-k)^2.$$

L'équation finale en x est du second degré; il en résulte les rayons et les centres des deux cercles touchant les trois proposés *intérieurement* et *extérieurement*. Changeant c en $-c$, puis b en $-b$ et à la fois b et c en $-b$ et $-c$, on aura les rayons et les centres de six autres cercles tangents aux trois proposés. De sorte que le problème a généralement huit solutions; lesquelles, à raisons des positions et des valeurs particulières, peuvent se réduire à beaucoup moins et même à aucune.

Si $c=0$, le problème revient à *calculer le rayon et le centre de la circonférence, passant par un point donné* C *et touchant les deux cercles tracés* A *et* B. Mais si $b=0$ et $c=0$, il faudra *calculer le rayon et le centre de la circonférence, tangente au cercle tracé* A *et passant par les deux points* B *et* C, *donnés hors de ce cercle*.

Scholie. Pour tracer les huit circonférences, d'après les procédés purement géométriques, il nous paraît qu'il faudrait employer au moins cent-onze lignes; ainsi le tracé par tâtonnements et le calcul sont ici les seuls praticables : ils sont à la fois les plus simples et les plus exacts, savoir les tâtonnements sur le papier et le calcul sur le terrain.

33. PROBLÈMES. Calculer le rayon et le centre de la circonférence, 1° tangente à deux droites tracées et à un cercle donné (qui pourrait se réduire à un point donné); 2° passant par un point donné, touchant un cercle tracé et ayant son centre sur une droite donnée; 3° enfin, touchant deux cercles tracés et ayant son centre sur une droite donnée.

34. ELLIPSES TANGENTES. Les problèmes, fort nombreux, sur les contacts des droites et des circonférences, conduisent, à l'aide des projections, à résoudre les mêmes problèmes sur les contacts des droites et des

ellipses *semblables*. C'est ainsi que trois ellipses semblables étant tracées sur un plan, il existe généralement huit ellipses semblables, touchant chacune les trois proposées ; et il est possible de calculer le centre et les axes principaux de chacune, de longueur et de position.

Scholie. On peut aussi résoudre, par une équation du second degré, le problème que voici : *Étant données trois sphères, tangentes à un plan et d'un même côté, trouver le centre et le rayon de la sphère qui touchent les trois premières et le plan.* (Voyez d'ailleurs à la page 389, 2e édition de la géométrie).

35. Quadrature des Coniques. C'est en vertu de l'analogie qui existe entre les trois courbes du second degré, que leur *quadrature* se tire immédiatement de l'expression du *secteur circulaire*, à l'aide de certaines séries. Pour cet effet, M. *Bary* (Tome XIX des Annales de Mathématiques) indique une méthode que nous modifions comme il suit :

I. Soit S l'aire du *secteur elliptique*, dont le sommet est au centre et dont a est un côté ; le point (x,y), donné sur la courbe, étant l'extrémité du second côté. Soit α' l'arc du secteur circulaire concentrique, de rayon a, répondant à la même abscisse x, et dont l'aire, par suite, est $\frac{1}{2}a\alpha'$: on a vu que $aS=\frac{1}{2}ab\alpha'$. Soit d'ailleurs α l'arc numérique, du rayon 1, qui mesure l'angle du secteur circulaire; on aura $\alpha'=a\alpha$ et

$$S=\tfrac{1}{2}ab\alpha.$$

II. Soit (x,y') l'extrémité de l'arc α' : on sait que

$$1:\sin\alpha::a:y'::b:y\text{ ; d'où } b\sin\alpha=y.$$

Substituant donc l'expression connue de l'arc α en fonction de son sinus y sur b, on aura

$$S=\tfrac{1}{2}ab\left(\frac{y}{b}+\frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{3b^3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{y^5}{5b^5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{y^7}{7b^7}+\text{etc.}\right).$$

Or, $b^2=ap$, p désignant le demi-paramètre : substituant cette valeur de b^2, réduisant et observant que pour passer à la *parabole* $y^2=2px$, il suffit de poser $a=\infty$; ce qui rend *infiniment petits*, et conséquemment *nuls*, les termes divisés par les puissances de a ; il vient

$$S=\tfrac{1}{2}a+y\tfrac{1}{6}xy.$$

Ici le centre, sommet du secteur S, est situé à l'infini; donc ce secteur et le triangle $\frac{1}{2}ay$ sont infiniment grands ; mais leur différence $\frac{1}{6}xy$, *segment* de la parabole, entre la courbe et la corde menée du sommet au point connu (x,y) de celle-ci, est un nombre *fini* et donné. Ajoutant l'aire du triangle rectangle, dont x et y sont les côtés de l'angle droit, savoir $\frac{1}{2}xy$, on aura l'aire de la moitié du *segment* S', limité par la courbe et la double ordonnée y : donc

$$S'=\tfrac{2}{3}xy.$$

III. Soit tang $\alpha = t$; on a $1 : t :: x : y$ et $t = y$ sur x. Substituant la valeur de l'arc α en fonction de sa tangente t, savoir $t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 +$ etc. ; observant ensuite que, pour passer du secteur elliptique $S = \frac{1}{2}ab\alpha$ au *secteur hyperbolique*, il faut y changer b et y en $b\sqrt{-1}$ et $y\sqrt{-1}$, on aura

$$S = -\tfrac{1}{2}ab(t + \tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{1}{5}t^5 + \tfrac{1}{7}t^7 + \text{etc.}).$$

Or, la série entre parenthèses a pour valeur, comme on sait, la différence des logarithmes ordinaires de $1+t$ et de $1-t$, divisée par 2 fois celui du nombre $e = 2,7182818$ etc. Donc, comme ce quotient est *négatif*, il vient

$$S = \frac{ab}{4le} \times l\left(\frac{x+y}{x-y}\right).$$

Telle est donc l'expression numérique du secteur hyperbolique, dont le sommet est au centre et dont les extrémités de l'arc sont le sommet de la courbe et le point (x,y), donné sur elle.

Retranchant cette expression hors de l'aire du triangle rectangle, dont x et y sont les côtés de l'angle droit, il reste la moitié de l'aire S' du *segment* compris entre la courbe et la double ordonnée y : donc

$$S' = xy - 2S.$$

Enfin, si l'hyperbole est équilatère, d'où $x^2 - y^2 = a^2$, il est clair que pour la rapporter à ses asymptotes, nouveaux axes des x et des y rectangulaires, le point (x,y) sera désigné par (x',y') et qu'on aura

$$x\sqrt{2} = x' + y' \text{ et } y\sqrt{2} = x' - y' \text{ ; d'où}$$
$$x + y = x'\sqrt{2},\ x - y = y'\sqrt{2} \text{ et } x'y' = \tfrac{1}{2}a^2 = h^2.$$

Soit T la tranche comprise entre la courbe, une asymptote, l'ordonnée y' du point donné (x',y') et l'ordonnée h du sommet : il est clair que T vaut le secteur S ; car on a $T = S + \frac{1}{2}x'y' - \frac{1}{2}h^2$. Donc

$$T = \frac{h^2}{2e} \times l\left(\frac{x'}{y'}\right) = \frac{h^2}{le} \times l\left(\frac{x'}{h}\right).$$

Différents lieux géométriques.

Nous terminerons ce Mémoire par différentes propositions, assez remarquables, sur les lieux géométriques plans et des trois dimensions ; c'est-à-dire sur les *courbes planes* et les *surfaces courbes*.

COURBES I. Dans toute circonférence $y^2 = 2ax - x^2$, le lieu du pied (x,y) de la perpendiculaire à toute corde, partant de l'origine, menée du pied de l'ordonnée de l'extrémité de cette corde, est la courbe du quatrième degré

$$(y^2 + x^2)^2 = 2ax^3.$$

Cette courbe se discutera plus facilement à l'aide de son *équation polaire ;* or, le *pôle* étant à l'origine, et ω désignant l'arc de rayon 1, qui mesure l'angle décrit par le *rayon vecteur* r, depuis l'axe des x, d'où $y=r\sin\omega$ et $x=r\cos\omega$, on a

$$r=2a\cos^2\omega.$$

Cette courbe n'a donc que le seul *axe de symétrie* $2a$: elle limite une sorte de *feuille*, fermée à l'origine, dont l'*aire est les 5 seizièmes du cercle proposé*. L'expression de l'aire A cherchée est, en effet, $A=4a^2z\Sigma\cos^8 nz$; la somme devant être prise, depuis $\omega=0$ jusqu'à $\omega=nz=180°=\pi$, n étant un nombre entier *infini*.

II. La circonférence $y^2+x^2=a^2$ étant tracée, le lieu du pied $(x.y)$ de la perpendiculaire à chaque rayon, abaissée du pied de l'ordonnée de l'extrémité de ce rayon, est la courbe du 6^{me} degré

$$(y^2+x^2)^3=a^2x^4 \text{ ou } r^2=a^2\cos^4\omega.$$

L'aire limitée est les 3 quarts du cercle proposé ; et cette courbe est une *lemniscate*. On appelle ainsi toute courbe plane, en forme du chiffre 8, dans différentes positions, ayant un *centre*, deux *axes de symétrie*, dont un seul *réel* ou terminé à la courbe. La lemniscate a toujours un *point double* et une double *inflexion* en ce point, qui est le centre. Les lemniscates sont fort nombreuses, et plusieurs sont fournies par les propriétés du triangle rectangle.

Scholie. L'aire limitée par une *courbe polaire* donnée se calcule aisément lorsque le rayon *vecteur* r est fonction, monome ou binome, soit de l'arc ω, de rayon 1, qui mesure l'angle décrit, soit du sinus ou du cosinus de cet angle, pourvu, dans ces derniers cas, que r^2 soit une fonction rationnelle de chacune de ces lignes trigonométriques. Telles seraient les différentes courbes :

$$r^2=a^2\omega=a^2\omega^3=a^2\sqrt{\omega}-b^2\sqrt[3]{\omega^2}=a^2\sin\omega=a^2\cos^2 2\omega=a^2\sin\tfrac{1}{3}\omega=a^2$$
$$\pm a^2\cos\omega=a^2\pm b^2\cos^2 2\omega=a^2\sin\omega\pm b^2\cos\omega=\sin^3\tfrac{1}{2}\omega+\cos\omega=\text{etc.}$$

III. Le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la droite donnée a, dont les extrémités glissent, l'une sur l'axe des x et l'autre sur l'axe des y rectangulaires, est une *double lemniscate*, dont l'aire est le quart du cercle de rayon a. Ce lieu serait une lemniscate simple, si a variable était l'hypoténuse du triangle rectangle équivalent au carré C donné ; et alors $\frac{1}{2}$C exprime l'aire limitée par la courbe, laquelle par suite est une *courbe carrable*. Enfin, si la somme des côtés de l'angle droit du triangle rectangle, dont a est l'hypoténuse variable, est constante et représentée par m ; le lieu du pied est encore une lemniscate, dont l'aire est la moitié du cercle de rayon m.

IV. Le point $(2a,0)$ étant donné sur l'axe des x rectangulaires, on mène, de ce point une oblique quelconque L à l'axe des y, et de l'origine on mène sur L, la perpendiculaire P, dont le pied (x',y') est sur une circonférence : si l'on prolonge P de $2a$; l'extrémité (x,y) de la longueur $P+2a$ appartient à la courbe

$$(y^2+x^2-2ax)^2=4a^2(y^2+x^2) \text{ ou } r=4a\cos^2\tfrac{1}{2}\omega.$$

L'aire limitée par cette courbe est triple du cercle de rayon a.

Scholie I. On peut calculer l'aire de chacune des deux *lemniscates*, obtenues en prolongeant P, soit de x', soit de y'.

Scholie II. Par le pied (x',y') de P, si l'on mène une parallèle à l'axe des x positifs et si du pied de l'ordonnée y' de l'extrémité de cette parallèle $2a$ ou x' ou y', on mène une perpendiculaire à P ; le pied (x,y) de cette perpendiculaire appartient chaque fois à une lemniscate, dont on sait calculer l'aire.

Scholie III. Observons encore que si, par le point donné $(2a,0)$, on mène a l'oblique L, la perpendiculaire égale à y' ; l'extrémité (x,y) de celle-ci appartient à la double lemniscate $r^2=a^2\sin^2 2\omega$. (La perpendiculaire pourrait être égale soit à x', soit à $2a$).

V. Si du point $(k,0)$ de l'axe des x rectangulaires d'une ellipse, dont $2a$ et $2b$ sont les axes, on abaisse des perpendiculaires sur ses tangentes : le lieu de tous les pieds (x,y) de ces perpendiculaires est représenté par l'équation

$$(y^2+x^2-kx)^2=b^2y^2+a^2(x-k)^2.$$

C'est donc une courbe algébrique du quatrième degré, que l'on peut discuter et en calculer l'aire A, pour différentes valeurs particulières de k.

1° Si $k=c$; comme $c^2=a^2-b^2$, l'équation devient

$$(y^2+x^2-a^2)[y^2+(x-c)^2]=0\,;$$

elle représente donc à la fois le foyer positif et la circonférence décrite sur le grand axe, comme diamètre.

2° Si $k=0$, l'équation se simplifie et devient

$$(y^2+x^2)^2=b^2y^2+a^2x^2.$$

Cette courbe, circonscrite à l'ellipse proposée, la touche aux quatre sommets et a plusieurs points d'inflexion. Ce qui est remarquable ici, c'est que l'aire A, limitée par la courbe, s'obtient immédiatement à l'aide de l'*analogie*, comme il suit : si $b=0$, l'aire se réduit aux deux cercles, ayant chacun $\frac{1}{2}a$ pour rayon, et l'on a $A=\frac{1}{2}\pi a^2$. Mais si $b=a$, il vient $A=\pi a^2$. Il faut donc, pour satisfaire à ces deux conditions particulières, qu'on écrive $A=\frac{1}{2}\pi(a^2+b^2)$. De sorte que la somme et la différence des aires, limitées par la courbe et par l'ellipse, équivalent respectivement aux demi-cercles, de rayons $a+b$ et $a-b$.

3° Si $k=-a$, il est clair, en changeant x en $x+a$, que la courbe devient

$$(y^2+x^2-ax)^2=b^2y^2+a^2x^2.$$

Si $b=0$, l'aire A devient $A=\pi a^2$; si $a=0$, on a $A=\frac{1}{2}\pi b^2$; et si $b=a$, l'équation polaire donne $A=\frac{3}{2}\pi a^2$. Pour que l'aire A cherchée satisfasse à ces trois conditions particulières, il faut donc qu'on ait $A=\pi(a^2+\frac{1}{2}b^2)$. Et si l'on posait $k=-b$, on trouverait de même l'expression de l'aire A.

4° Pour l'hyperbole, b^2 devient $-b^2$; donc si alors $k=0$, il vient

$$(y^2+x^2)^2=a^2x^2-b^2y^2.$$

Dans ce cas, $c^2=a^2+b^2$; et le lieu des pieds est la *lemniscate* représentée par l'équation polaire

$$r^2=a^2-c^2\sin^2\omega.$$

Ici, pour calculer l'aire A, depuis $\omega=0$ jusqu'à $c\sin\omega=\pm a$, la méthode précédente ne pourrait point s'employer: il faut poser $\omega=nz$, n étant un nombre entier *infini*; chercher ensuite l'expression du v ième *secteur* élémentaire, savoir $\frac{1}{2}a^2z-\frac{1}{2}c\,z\sin^2 vz$, d'où

$$A=2a^2nz-2a^2z\int\sin^2 nz;$$

et l'on trouvera, d'après l'expression de la somme $\int\sin^2 nz$, où $nz=\omega$,

$$A=(a^2-b^2)\omega+ab.$$

VI. Soit (x',y') un point quelconque de la circonférence $x^2+y^2=a^2$: si l'on prolonge le rayon en ce point de la longueur x', le lieu géométrique de tous les points, ainsi obtenus, est la courbe composée de quatre branches, égales et opposées deux à deux, chacune en forme de *cœur* et représentée par la quadruple équation polaire $r=\pm a\pm a\cos\omega$. L'aire de chaque branche est les 3 moitiés du cercle proposé.

Scholie I. On aurait la même courbe, si l'on prolongeait le rayon a de l'y' de son extrémité. On pourrait le prolonger d'une longueur égale à la moyenne proportionnelle entre a et x' ou entre a et y'.

Scholie II. Et si le sommet d'un angle droit mobile est au centre de la circonférence proposée, (x',y') étant le point où elle est rencontrée par le premier côté de l'angle; quelle est l'aire de la courbe décrite par le point (x,y), situé sur le second côté, à la distance $a+y'$ ou $a+x'$ du centre?

Scholie III. Si la circonférence est $y^2+x^2=2ax$ et qu'on prolonge chaque corde, menée de l'origine, d'une longueur égale à l'x' ou à l'y' de son extrémité; le lieu de tous les points ainsi obtenus, est la courbe polaire $r=2a(\cos\omega+\cos^2\omega)$, où ω croît depuis 0 jusqu'à $\pm 90°$. On peut calculer l'aire limitée.

SURFACES DU SECOND ORDRE I. Toutes les *surfaces du second ordre*, ayant un *centre*, sont représentées par l'équation

$$Ax^2+By^2+Cz^2=1 \ , \ . \ . \ . \ (1)$$

laquelle est aux *axes principaux* ou aux *axes conjugués*, suivant que le trièdre des coordonnées est droit ou non. On sait que cette équation représente l'*ellipsoïde*, l'*hyperboloïde* à une nappe ou l'*hyperboloïde* à deux nappes, suivant que les trois coefficients donnés A, B, C sont *positifs*, ou que C est seul *négatif*, ou enfin que A est seul *positif*. De plus, si $2a$, $2b$ et $2c$ désignent les trois *axes principaux* ou les trois *diamètres conjugués*, sur les axes des x, des y et des z respectifs, on aura

$$Aa^2=1 \ , \ Bb^2=1 \ \text{et} \ Cc^2=1 .$$

Il importe souvent de calculer les longueurs des trois axes principaux $2a$, $2b$, $2c$; ce à quoi l'on parvient, par les relations précédentes, si le trièdre des coordonnées est *droit*. Mais s'il est *oblique*, soient p, q, r les *cosinus* des angles (xy), (xz) et (yz); soient p', q', r' leurs *sinus*. Si d est un demi-diamètre de l'une quelconque des trois surfaces proposées et qu'on pose $d^2=u$, on trouve, pour calculer les trois demi-axes principaux a, b, c, c'est-à-dire les trois valeurs de $\sqrt{u}$, l'une *maximum*, l'autre *minimum* et la troisième entre ces deux-là, l'équation

$$\begin{aligned} ABCu^3-(AB+AC+BC)u^2+(Ar'^2+Bq'^2+Cp'^2)u \\ -(1-p^2-q^2-r^2+2pqr)=0 \ . \ . \ . \ . \ (2) \end{aligned}$$

Cette équation fournit immédiatement les trois relations connues entre les diamètres conjugués et les axes principaux.

II. Pour appliquer cette équation, soient α, β, γ les inclinaisons respectives des trois axes des z, des y et des x sur les plans des xy, des xz et des yz; soient d'ailleurs z', y', x' les distances à ces plans d'un point quelconque de l'espace : on aura $z'=z \sin \alpha$, $y'=y \sin \beta$ et $x'=x \sin \gamma$. Cela posé, si l'on cherche le lieu géométrique de tous les points (x,y,z) tels, que le carré donné R^2 soit, 1° la somme des carrés des distances de chacun aux trois plans coordonnés, 2° l'excès de la somme des carrés des distances aux plans des yz et des xz, sur le carré de la distance au plan des xy, 3° enfin, l'excès du dernier carré sur la somme des deux autres; il est clair qu'on aura chaque fois, pour représenter le lieu cherché, une équation de la forme (1), dans laquelle les coefficients A, B, C seront les rapports de $\sin^2\gamma$, $\sin^2\beta$ et $\sin^2\alpha$ à R^2.

Si les angles plans (xy), (xz) et (yz) sont égaux à 60°, d'où $p=q=r=\frac{1}{2}$ et $p'=q'=r'=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, on aura $\sin^2\alpha=\sin^2\beta=\sin^2\gamma=\frac{3}{4}$: donc, pour l'ellipsoïde proposé, $a=2R$, $b=c=R$; pour l'hyperboloïde à une nappe, $2a=R\sqrt{(1+\sqrt{17})}$, $2b=2R$ et $2c=R\sqrt{(1-\sqrt{17})}$; enfin pour l'hyperboloïde à deux nappes, on a $2a=R\sqrt{(-1+\sqrt{17})}$, $2b=2R\sqrt{-1}$ et $2c=R\sqrt{(-1-\sqrt{17})}$.

On peut encore calculer les axes principaux des trois surfaces, 1° lorsque l'angle $(xy)=90°$ et l'angle $(xz)=(yz)=60°$, 2° lorsque $(xy)=60°$ et $(xz)=(yz)=90°$. Dans chacun de ces cas, quel serait le lieu géométrique, si l'on devait avoir $x'y'+x'z'+y'z'=R^2$? ou $R^2=x'y'+x'z'-y'z'$? ou enfin, $R^2=x'y'-x'z'-y'z'$?

III. Pour connaître le genre de la surface représentée par l'équation

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz=G\,, \quad . \; . \; . \quad (3)$$

dans laquelle les coordonnées sont rectangulaires ; soit d un demi-diamètre quelconque de la surface proposée et soit $d^2v=G$: il faut donc calculer ses axes principaux, en cherchant le *maximum* et le *minimum* de d^2 ; or, en éliminant d'abord G entre (3) et $vx^2+vy^2+vz^2=G$, ce maximum et ce minimum répondent aux valeurs de v dans l'équation

$$\begin{aligned} &v^3-(A+B+C)v^2+(AB+AC+BC-D^2-E^2-F^2)v \\ &\quad -(ABC+2DEF-CD^2-BE^2-AF^2)=0 \quad . \; . \; . \quad (4) \end{aligned}$$

Cette équation symétrique est facile à retenir : pour l'appliquer à la recherche des axes principaux de la surface

$$4x^2-y^2-z^2+4yz-16x+2y-4z=21\,,$$

les coordonnées étant rectangulaires, il faudra d'abord faire disparaître les termes affectées des premières puissances des variables x, y, z. Or, pour cela, il faut, comme on sait, dériver l'équation successivement par rapport à chacune des coordonnées x, y, z, considérée comme seule variable, et égaler chaque dérivée à zéro ; ce qui donne les trois équations simultanées :

$$8x-16=0\,, \quad -2y+4z+2=0 \text{ et } -2z+4y-4=0.$$

Ces équations donnent, pour les coordonnées de la nouvelle origine du système parallèle, $x=2$, $y=1$ et $z=0$: ce sont les coordonnées du *centre* de la surface ; de sorte que ces valeurs réduisent $4x^2-y^2-z^2+4yz-16x+2y-4z-21$ à -36, et que par suite on a, pour l'équation de la surface, *rapportée à son centre*,

$$4x^2-y^2-z^2+4yz=36.$$

L'équation (4) devient par conséquent

$$v^3-2v^2-11v+12=0\,;$$

d'où $v=1$, $v=4$ et $v=-3$, puis $a^2=36$, $b^2=9$ et $c^2=-12$. La surface est donc l'hyperboloïde à une nappe $x^2+4y^2-3z^2=36$. Et l'on peut calculer l'aire de la section faite par le plan $z=x-2$.

Propositions. Voici d'autres applications de l'équation (4) au calcul des axes principaux : Les coordonnées rectangulaires de chaque point d'une surface algébrique sont les trois dimensions d'un parallélipipède rectangle P, nécessairement variable, et l'on a cette suite de propositions :

1° Si le carré numérique donné R^2 équivaut à la surface totale de P, tous les points proposés appartiennent à l'hyperboloïde à deux nappes de révolution ; car $2a=2R$ et $2b=2c=2R\sqrt{-1}$.

2° Si R^2 est l'excès de la surface latérale de P sur la somme de ses deux bases, ou réciproquement, on aura chaque fois un hyperboloïde.

3° Si R^2 équivaut au carré fait sur la diagonale de P, plus ou moins la surface totale, tous les points proposés constituent le système de deux plans ou l'hyperboloïde de révolution.

4° Quelle serait la surface, si R^2 devait valoir le carré de la diagonale de P, plus ou moins la double somme des deux bases? Ou cette double somme moins le carré? ou bien le carré fait sur la diagonale de P, plus ou moins la surface latérale, ou réciproquement? ou bien encore la somme des carrés des quatre diagonales de P, plus ou moins la surface totale? Quelle serait aussi la surface, lieu de tous les points proposés, si l'on devait avoir $z^2+2xy=36$? ou $z^2-2xy=64$? ou enfin, si P devait toujours être équivalent au cube donné 125?

Remarquons d'ailleurs que les coordonnées étant rectangulaires dans les deux surfaces concentriques

$$2xy+4xz-2yz=h^2 \text{ et } 4xy+8xz-4yz=k^2\,;$$

on peut calculer les trois axes principaux de chacune et prouver ainsi que ce sont deux hyperboloïdes *semblables*, à une nappe. De plus, si on les coupe par le plan $z=x-y$; non-seulement les deux sections sont semblables, mais de plus l'aire de la projection de la première, sur le plan des xy, est équivalente au cercle de rayon h; d'où résultent ensuite les aires des deux sections.

Remarquons enfin que, *dans les surfaces du second ordre ayant un centre, la somme algébrique des inverses des carrés de trois diamètres rectangulaires quelconques est une grandeur constante.* On peut même calculer numériquement cette somme dans chacune des surfaces représentées par la double équation

$$x^2+y^2+8z^2-14xy+2x-14y+16z=63=-81.$$

Mais il faudra d'abord écrire les équations aux axes principaux.

IV. Les coordonnées étant rectangulaires, dans les cinq surfaces du second ordre, soit S le *segment* et h sa *hauteur*, à partir de l'origine, la *base* étant parallèle à l'un des plans coordonnés et l'origine étant au *sommet* de la surface. Les plans parallèles à la base de S divisent h en un nombre *infini* n de parties égales à u, d'où $h=nu$, et ils divisent S en n *tranches*, toutes de même épaisseur u infiniment petite; la v ième de ces tranches, à partir du sommet, n'est donc au fond qu'un *cylindre* droit, dont la mesure est le produit de sa base par u. Cherchant donc la mesure de cette base, d'après l'équation de la surface, on aura l'expression de la v ième tranche T de S; dans laquelle faisant successivement $v=1$, 2, 3, 4, ..., n, puis prenant la somme et observant que

$$\int n=\tfrac{1}{2}n^2,\ \int n^2=\tfrac{1}{3}n^3,\ \int n^3=\tfrac{1}{4}n^4,\ \text{etc.},$$

on aura l'expression du volume S, indépendante de n et de u. Appliquons cette méthode aux cinq surfaces, du second ordre, rapportées à leurs axes principaux :

1° Pour l'*ellipsoïde*, où l'on change d'abord x en $x-a$, afin de placer l'origine, qui était au centre, à l'extrémité négative du grand axe $2a$, et où h se mesure sur $2a$, à partir de ce sommet, on trouve

$$a^2T=\pi bc(au^2v-u^2v^2) \text{ et } a^2S=\pi bch^2(a-\tfrac{1}{3}h).$$

2° Pour l'*hyperboloïde* à une nappe, où h se trouve sur le demi-axe imaginaire c, à partir de l'ellipse de gorge, il vient

$$c^2T=\pi ab(c^2u+u^2v^2) \text{ et } c^2S=\pi abh(c^2+\tfrac{1}{3}h^2).$$

3° Pour l'*hyperboloïde* à deux nappes, h étant le prolongement du demi-axe a réel, on trouve

$$a^2T=\pi bc(au^2v+u^2v^2) \text{ et } a^2S=\pi bch^2(a+\tfrac{1}{3}h).$$

4° Pour le *paraboloïde elliptique* $ay^2+bz^2=abx$, où $x=h$, on a

$$T=\pi u^2v\sqrt{(ab)} \text{ et } S=\tfrac{1}{2}\pi h^2\sqrt{(ab)}.$$

5° Enfin, pour le *paraboloïde hyperbolique* $ay^2-bz^2=abx$, où le segment S est limité par la surface, le plan des yz et le plan $z=h$, on trouve

$$3a^2T=4u^4v^2\sqrt{(2ab)} \text{ et } 3a^2S=h^4\sqrt{(2ab)}.$$

Observons que si $h=c$, dans l'hyperboloïde à une nappe, et si $h=a$, dans l'hyperboloïde à deux nappes, il vient chaque fois $S=\frac{4}{3}\pi abc$, c'est-à dire *le volume de l'ellipsoïde*, pour lequel $h=2a$.

6° On voit que, pour calculer le volume du segment S, dans les cinq surfaces du second ordre, ce qui est parfois nécessaire, il faut d'abord calculer les *axes* ou les *paramètres principaux*, comme dans les différentes questions sur les lieux géométriques, que nous allons énoncer. Mais avant, observons que, les coordonnées étant rectangulaires, dans la conique $y^2=2px+qx^2$, si S désigne le segment de cette courbe, intercepté par la double ordonnée qui répond à $x=h$, et si d est la distance de l'origine à la droite D, parallèle à l'axe des y et placée hors du segment ; le volume engendré par la révolution de S autour de D, a pour expression

$$\text{vol. } S=S\cdot 2\pi d\pm\pi h^2(p+\tfrac{1}{3}qh),$$

le signe + ayant lieu lorsque l'arc de S est *concave* et le signe — quand il est *convexe* vers D.

Ce théorème fournit plusieurs conséquences utiles, faciles à prévoir. Il en résulte le moyen de calculer le *minimum* de l'argent fin employé à la confection d'un vase cylindrique droit, dont la paroi doit avoir partout un millimètre d'épaisseur, tant pour la base elliptique (ou circulaire) et la surface latérale, que pour le couvercle, demi-ellipsoïde allongé, décrit par la demi-base; le vase devant avoir un litre de capacité intérieure. La base pourrait être un segment de parabole, terminé par la double ordonnée, le couvercle étant le demi-paraboloïde de révolution : etc.

7° En général, le couvercle est une sorte de *voûte*, dont on sait calculer la capacité, d'après le volume de chacun des *onglets cylindriques* qui la composent. Supposons que la *base* de la voûte soit un rectangle donné $4cd$, la *hauteur* étant désignée par h : la voûte est donc composée de quatre onglets cylindriques, de hauteur h commune et de *bases* équivalentes à cd. Soit O l'un de ces onglets, ayant pour *base directrice* le demi-segment de la conique $y^2=2px+qx^2$, pour lequel $x=h$ et $y=c$: on trouve

$$c\cdot O=dh^2(p+\tfrac{1}{3}qh).$$

Pour la parabole, où $c^2=2ph$ et $q=0$, le volume de la voûte est $2cdh$ et se réduit à $\frac{1}{4}m^3$, si $c=d=h=\frac{1}{2}m$. Pour l'ellipse, où $ap=b^2$ et $a^2q=-b^2$; si $d=a$, $c=b$ et $h=a$, le volume de la voûte devient $\frac{8}{3}a^2b$ et se réduit à $\frac{1}{3}m^3$, si $c=d=h=\frac{1}{2}m$. On peut encore examiner le cas de l'hyperbole; et voici maintenant différentes propositions sur les surfaces du second degré.

V. Les coordonnées étant rectangulaires, 1° le plan est le lieu de tous les points tels, que la somme des carrés des distances de chacun aux deux points $(2,1,1)$ et $(3,-1,-2)$ vaut la somme des carrés des distances de ce point aux deux $(3,2,1)$ et $(1,1,-1)$; 2° si la somme des quatre carrés doit valoir 100 ou être un *minimum*, le lieu cherché est une surface sphérique ou son centre.

VI. Si un plan se meut dans l'espace de telle sorte que deux sphères fixes interceptent constamment sur lui deux cercles égaux, ce plan, dans son mouvement, est toujours tangent au paraboloïde de révolution, décrit par la parabole dont l'axe passe par les centres des deux sphères et dont le foyer est le milieu de la droite qui joint ces deux centres. Cette courbe elle-même touche constamment la droite se mouvant de telle sorte que, rencontrant deux grands cercles fixes, dans le plan des xy, ceux-ci interceptent sur la droite mobile deux cordes égales. Et si l'on cherche à quelle surface sont tangents la suite de plans tels, que la somme algébrique des distances de chacun aux m sommets d'un polyèdre donné soit la longueur constante m fois a, on trouve la surface sphérique, ayant a pour rayon et pour centre celui des moyennes distances des m sommets proposés.

Scholie. Ce dernier théorème et son analogue sur un plan sont conséquences immédiates de la théorie des *centres des moyennes distances*, en géométrie. Mais pour démontrer analytiquement ces quatre théorèmes, il nous suffira de considérer le dernier, la méthode étant analogue pour les trois autres. Soit (x',y') le contact de la droite $y-y'=n(x-x')$ avec la courbe cherchée ; soient k et h les sommes algébriques des ordonnées et des abscisses rectangulaires des m sommets du polygone donné dans le plan des xy : on aura d'abord $k-my'-n(h-mx')=ma\sqrt{(1+n^2)}$. Comme n est inconnu, on observe que, pour la tangente immédiatement consécutive, n se change en $n+v$, v étant infiniment petit, et que par suite le contact (x',y') ne change point ; d'où résulte la valeur de n, etc. (Voyez le tome XX des Annales de Mathématiques, p. 59 et 307).

VII. Les milieux des cordes, interceptées par une surface du second degré, sur toutes les droites menées d'un point donné, appartiennent à une autre surface du second degré, passant par le point donné. Ainsi ce point étant (2,2,0) et les coordonnées rectangulaires, l'hyperboloïde à une nappe $x^2+y^2+3z^2-4xy=18$, fournit l'hyperboloïde à deux nappes $x^2+y^2+3z^2-4xy+2x+2y=0$; l'ellipsoïde $2x^2+y^2+z^2-2xy=36$, fournit l'ellipsoïde *semblable* $2x^2+y^2+z^2-2xy-10x-8x=0$; le cylindre à base elliptique $x^2+y^2+z^2+2xy=18$, fournit le paraboloïde elliptique $x^2+y^2+z^2+2xy-4x-4y=0$; etc.

VIII. La surface sphérique, de rayon a donné, étant rapportée à ses axes principaux ; si l'on prolonge extérieurement le z de chaque point, de la longueur constante p, ou d'une longueur égale, soit au z soit à l'x ou à l'y du même point ; le lieu géométrique de tous les points, ainsi obtenus, est une sphère égale à la proposée, dans le premier cas, et un ellipsoïde, dans chacun des trois derniers. Le volume de l'ellipsoïde est les trois demies de celui de la sphère, dans le second cas ; tandis que dans le 3^e^ et le 4^e^ cas, il en est les trois quarts. Et si, à partir de son pied, on prolongeait l'y et le z de chaque point du double de l'x du même point, on aurait encore un ellipsoïde, dont le volume serait les 3 quarts de celui de la sphère. (On pourrait d'abord considérer la surface $x^2+y^2-z^2=a^2$, etc.).

IX. Dans toute surface du second ordre, ayant un centre, le triangle qui joint les extrémités de trois demi-diamètres rectangulaires quelconques, est tangent à la surface sphérique concentrique. Et si $Ax^2+By^2+Cz^2=D$ désigne la surface proposée, rapportée à ses axes principaux ; en passant du système proposé à un autre, aussi rectangulaire, de même origine, le rayon r de la sphère sera donné par $(A+B+C)r^2=D$.

Scholie. Les mêmes calculs prouvent que la somme des carrés inverses de trois diamètres rectangulaires quelconques est une grandeur constante.

X. Le lieu géométrique du sommet d'un trièdre droit mobile, dont les arêtes touchent constamment l'ellipsoïde $16x^2+4y^2+z^2=16$, est un autre ellipsoïde, savoir $20x^2\,17y^2+5z^2=84$.

C'est ce qu'on démontre en passant du système proposé à un autre, aussi rectangulaire, d'une autre origine. On peut aisément calculer la différence des deux volumes.

Scholie. On démontre de même que le lieu géométrique du sommet d'un trièdre droit mobile, dont les arêtes s'appuient constamment sur la circonférence $x^2+y^2=36$, est l'ellipsoïde de révolution $x^2+y^2+2z^2=36$; tandis que pour l'hyperbole $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$, le lieu géométrique est $a^2y^2-b^2x^2+(a^2-b^2)z^2=-a^2b^2$. On peut avoir $a>b$, $a<b$ ou $a=b$. On peut aussi considérer la parabole $y^2=2px$; et alors on aura le paraboloïde de révolution. (Annales de Mathématiques, tome XVIII, p. 250 et suiv.).

XI. Les angles plans du trièdre des coordonnées étant chacun de 60°, peut-on calculer le maximum et le minimum du demi-diamètre d, dans la surface $x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz=24$? Ou dans celle-ci : $xy+xz+yz=64$?

Scholie. Dans la première, on simplifie les calculs en posant $d^2v=24$ et $2k(v-1)=v+2$; alors on trouve, pour les axes principaux, $2a=2b=2\sqrt{6}$ et $2c=2\sqrt{(-48)}$. On procède de même pour la seconde surface; mais le calcul des axes principaux est généralement fort compliqué, lorsque les coordonnées ne sont pas rectangulaires.

XII. Un point $(2a,0,0)$ étant donné sur l'axe des x rectangulaires; si de ce point on mène l'oblique quelconque L au plan des yz et par le pied (y,z) de cette oblique, la parallèle à l'axe des x, égale, soit à L, soit à $L+y$ ou à $L+y+z$; l'extrémité (x,y,z) de cette parallèle, appartient chaque fois à l'hyperboloïde à deux nappes, dont on sait calculer les axes principaux et le volume d'un segment S, de hauteur donnée h, sur l'axe des x, contenant l'axe réel. Dans le premier cas, l'hyperboloïde est de révolution et l'on trouve $S=\pi h^2(2a+\frac{1}{3}h)$.

XIII. Par le point $(2a,0,0)$ de l'axe des x rectangulaires, on mène l'oblique quelconque L au plan des yz; puis de l'origine, la perpendiculaire P à L, la rencontrant en un point (x',y',z') d'une surface sphérique; enfin, de ce point, on mène, à l'axe des x, la parallèle R égale, soit à $2a$, soit à x', à y' ou à z' : le lieu géométrique de l'extrémité (x,y,z) de cette parallèle est la surface sphérique de rayon a, dans le premier cas; l'ellipsoïde de révolution, dont le volume est double de celui de cette sphère, dans le second; etc. Enfin, si du milieu (a,y,z) de L, on mène à l'axe des x la parallèle $\frac{1}{2}L+y$ ou $\frac{1}{2}L+z$ ou simplement $\frac{1}{2}L$; quels seront chaque fois les trois axes principaux de la surface, lieu géométrique de l'extrémité (x,y,z) de cette parallèle? (Sa longueur pourrait être $\frac{1}{2}L+y+z$).

XIV. Une perpendiculaire à un plan et un point sur celui-ci étant donnés; quel est le lieu géométrique de tous les points tels, que les distances de chacun, à la droite et au point donnés, soient égales entre elles? (Ici, pour mieux voir le genre de la surface cherchée et simplifier en même temps, il faut prendre la perpendiculaire pour axe des z, le plan pour celui des xy et diriger l'axe des x rectangulaires sur le point donné, qui sera, je suppose, $(3,0,0)$; et alors on verra que le lieu demandé est la surface latérale du *cylindre droit*, à base *parabolique* $z^2=10x$, et dont le volume, pour $x=10$ et $y=12$, est 1600).

Scholie. Si la somme des carrés des distances devait valoir un carré donné, le lieu géométrique serait un *ellipsoïde de révolution ;* tandis que ce serait un *cylindre parabolique*, si 36 était la différence des deux carrés des distances. Mais si l'une de ces deux distances devait être double de l'autre, on aurait un *ellipsoïde* ou un *hyperboloïde de révolution.*

XV. Quel est le lieu géométrique de tous les points tels, que la distance de chacun à l'axe des x rectangulaires, soit moyenne proportionnelle entre la longueur 10 et l'x de cette distance ? Quel est le volume limité par la surface résultante et le plan $x=40$? Enfin, quelle est l'aire de la section faite par le plan $2y+2z-x+4=0$?

XVI. Si chaque point d'une surface est tel, que sa distance à l'axe des x rectangulaires, augmentée de 4, soit double de l'x du pied de cette distance ; quel est le volume numérique, limité par la surface, le plan des yz et le plan $x=10$? Calculer aussi l'aire d'un segment de la section faite par le plan $2x-z-3=0$.

XVII. Les coordonnées étant rectangulaires, quel est le genre de surface représentée par $yz=20x$? Peut-on calculer le volume limité par la surface, le plan des yz et le plan $z=10$? Peut-on calculer aussi l'aire de la section faite par le plan des xy, aire comprise entre la courbe résultante et la parallèle $x=12$? Quelle est la surface $x^2=2yz$? ou $x^2=4yz+a^2$?

XVIII. Un plan et un point extérieur étant donnés, quel est le lieu géométrique de tous les points tels, 1° que la distance de chacun au point proposé soit égale à la distance au plan ? 2° que la distance au point soit double de la distance au plan ? 3° que la distance au plan soit double de la distance au point ? 4° que la somme des carrés des deux distances soit équivalente au carré donné 64 ? 5° Enfin, que la différence des deux carrés, prise des deux manières, soit équivalente au carré donné 36 ? Peut-on chaque fois calculer l'aire d'un segment de la section faite par le plan $x-y+z=0$?

XIX. Si l'on cherche le lieu géométrique de tous les points tels, que le z de chacun soit la hauteur menée de l'angle droit du triangle rectangle variable, dont l'hypoténuse, partant de l'origine des coordonnées rectangulaires, se trouve sur le plan des xy, et dont le côté opposé à l'origine est constamment double du côté adjacent ; on trouve le cône asymptote de l'hyperboloïde $x^2+y^2-\frac{1}{4}z^2=1$. On aurait encore un cône asymptote, si l'angle à l'origine était double de son complément, ou si l'on prolongeait au-delà du sommet de l'angle droit, le côté double d'une longueur égale à la sienne ou égale à sa moitié. Mais si le second segment de l'hypoténuse doit valoir constamment 4, on aura la surface de révolution $z^4=16(x^2+y^2)$, dont le volume, depuis $z=0$ jusqu'à $z=10$, est 125π.

SURFACES ALGÉBRIQUES. Voici plusieurs propositions sur la génération des surfaces Algébriques, de différents ordres :

I. L'oblique quelconque L au plan des yz étant menée par le point $(2a,0,0)$ de l'axe des x rectangulaires; si par ce point, on mène à l'oblique et dans le plan Lx, la perpendiculaire N (parallèle à la perpendiculaire P à L, menée de l'origine, (x',y',z') étant le pied de P); l'extrémité (x,y,z) de N appartient à la surface sphérique, dont $2a$ est le rayon, si $N=2a$; et si $N=x'$, l'extrémité de N appartient, par le changement de $x-2a$ en x, à la surface du 6^{me} degré :

$$(z^2+y^2+x^2)^3=4a^2x^4.$$

C'est une surface de révolution, autour de l'axe des x, décrite par la demi-courbe polaire $r^2=4a^2\cos^4\omega$; et c'est aussi le lieu du pied de la perpendiculaire, à chaque rayon $2a$ de la sphère, abaissée du pied du z de l'extrémité de ce rayon. Le volume limité est les 4 cinquièmes de celui de la sphère de rayon a.

Scholie. On peut aussi calculer l'équation de la surface qui répond aux hypothèses de $N=y', z'$ ou L, etc.

II. Si l'on prolonge de $2a$ la perpendiculaire P, menée de l'origine, sur l'oblique quelconque L, au plan des yz, tirée du point donné $(2a,0,0)$, les coordonnées étant rectangulaires; le point (x,y,z), ainsi obtenu, appartient à la surface

$$(z^2+y^2+x^2-2ax)^2=4a^2(z^2+y^2+x^2).$$

C'est une surface de révolution, autour de l'axe des x, décrite par la courbe polaire $r=4a\cos^2\frac{1}{2}\omega$, depuis $\omega=0$ jusqu'à $\omega=180°$.

Scholie. Si P est prolongée de x', l'extrémite (x,y,z) de $P+x'$ appartient à la surface

$$(z^2+y^2+x^2)(z^2+y^2+x^2-2ax)^2=4a^2x^4.$$

C'est encore une surface de révolution, décrite autour de l'axe des x par la demi-courbe polaire $r=2a(\cos\omega+\cos^2\omega)$; et l'on peut calculer l'aire limitée par cette courbe. (On pourrait prolonger P de y', de z', de L, etc.).

III. Observons encore que si du pied du z' de l'extrémité de P, on abaisse une perpendiculaire à P; le pied (x,y,z) de cette perpendiculaire appartient à la surface

$$(x^2+y^2+z^2)^2=2ax(x^2+y^2).$$

Elle touche à l'origine le plan des yz; elle est coupée, par les plans des xy et des xz, suivant une circonférence et suivant la courbe polaire $r=2a\cos^3\omega$, dont on sait calculer l'aire; etc.

Scholie. Par le pied de l'oblique L et dans le plan Lx, si l'on mène, à cette oblique, la perpendiculaire égale, soit à $2a$, soit à L, à x', à y' ou à z';

on peut chaque fois calculer l'équation du lieu de l'extrémité de cette perpendiculaire.

IV. Si par chaque point (x',y',z') de la surface sphérique, dont a est le rayon, on mène la parallèle b à l'axe des x rectangulaires ; quel sera le lieu géométrique de l'extrémité (x,y,z) de cette parallèle, quand on supposera b égale à a, à x', à y' ou à z' ? La parallèle étant égale à a ou à x' ; si du pied du z de son extrémité on abaisse, sur le rayon a, aboutissant en (x',y',z'), une perpendiculaire ; le pied (x,y,z) de celle-ci appartient à la surface

$$(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2-ax)^2=a^2(2x^2+y^2)^2,$$
ou bien à $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(2x^2+y^2)^2$.

V. Calculer le rayon de la surface sphérique, lieu des pieds de toutes les perpendiculaires abaissées, de l'origine des coordonnées rectangulaires, sur les droites menées par le point $(2,2,4)$. De plus, si par le pied (x',y',z') de chaque rayon, on mène au plan des xy, la parallèle 8, quel sera le lieu géométrique de l'extrémité (x,y,z) de cette parallèle telle, qu'on ait toujours $x'=y$?

Scholie. Les propriétés des plans tangents aux surfaces du second ordre fournissent plusieurs problèmes remarquables, sur la génération de certaines surfaces algébriques, problèmes que nous avons considérés, p. 356 et suiv. du traité de géométrie analytique.

VI. La sphère étant rapportée à ses axes principaux ; si l'on prolonge chaque rayon a d'une longueur égale à l'x' de son extrémité (x',y',z'), le lieu géométrique de tous les points (x,y,z), ainsi obtenus, est la surface

$$(x^2+y^2+z^2-ax)^2=a^2(x^2+y^2+z^2).$$

C'est la surface de révolution, autour de l'axe des x, décrite par la demi-courbe polaire $r=2a\cos^2\frac{1}{2}\omega$, ayant le seul axe de symétrie $2a$, sur l'axe des x. L'aire A, limitée par cette courbe, peut aisément se calculer : et l'on peut aussi calculer le volume limité par la surface proposée, laquelle est *semblable* à la surface, déjà considérée plus haut.

Mais observons que la courbe polaire a réellement pour équation $r=\pm a\pm a\cos\omega$; elle est donc composée de quatre branches, égales entre elles et opposées deux à deux ; et elle est inscrite dans le carré construit sur $4a$. (On peut calculer l'aire limitée par les parties extérieures des quatre branches : ce calcul donne $\frac{3}{2}\pi a^2+9a^2$).

Courbes polaires. Voici diverses courbes remarquables, que l'on peut représenter par des *équations polaires*, pour les discuter et pour calculer plus aisément les *aires* limitées par ces courbes.

1. Les coordonnées étant rectangulaires et l'origine au centre, soit (X,Y) un point quelconque de la circonférence, dont a est le rayon : si, à partir de l'origine, on porte sur la droite qui la joint au point (X,Y), la longueur X, ou Y, ou $X+Y$, ou $a+X$, ou $a+Y$, ou $a-X$, ou $a+X$

$+Y$, ou $a+X-Y$, etc. ; quel est chaque fois le lieu géométrique du point (x,y), ainsi obtenu ?

L'une des courbes cherchées a pour équation

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x+y)^2 ;$$

d'où résulte l'équation polaire

$$r^2=a^2(\cos\omega+\sin\omega)^2.$$

C'est le système de quatre circonférences, ayant chacune $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$ pour rayon, et passant toutes par le centre de la proposée. Mais si l'on *ajoute* toujours entre elles les valeurs absolues de $\cos\omega$ et de $\sin\omega$, l'équation polaire représente uniquement la courbe plane extérieure, composée des quatre demi-circonférences égales, s'arrêtant à la circonférence proposée, où elles forment quatre points de *rebroussement*. La longueur de cette courbe est donc $2\pi a\sqrt{2}$; et quant a l'aire limitée, il est facile de voir, soit directement, soit par l'équation polaire, que cette aire a pour mesure πa^2+2a^2.

Pareillement, en ne considérant que les valeurs absolues de $\sin\omega$ et des $\cos\omega$, l'équation polaire

$$r^2=a^2(\cos\omega-\sin\omega)^2,$$

représente la courbe intérieure composée des quatre demi-circonférences restantes : c'est une sorte de double lemniscate, dont l'aire a pour mesure πa^2-2a^2.

11. Les coordonnées étant rectangulaires et l'origine au centre, soit (X,Y) un point quelconque de la circonférence, dont a est le rayon : si, à partir du centre, on porte sur l'axe des y successivement chacune des longueurs $X, Y, X+Y, X-Y, a+X, a-X, a+X+Y, a+X-Y$, etc. ; quel est chaque fois le lieu géométrique du pied (x,y) de la perpendiculaire abaissée, du point ainsi obtenu, sur la droite passant par le point (X,Y) et l'origine ?

L'une des courbes cherchées a pour équation

$$(x^2+y^2)^3=a^2y^2(x+y)^2 ;$$

d'où résulte l'équation polaire

$$r^2=a^2\sin^2\omega(\cos\omega+\sin\omega)^2.$$

Si donc on a égard seulement aux valeurs absolues de $\sin\omega$ et de $\cos\omega$, la courbe est composée de deux branches égales, en forme de *cœur*, opposées au centre du cercle et de la courbe, où celle-ci a une double *inflexion*. Mais si l'on a égard aux valeurs négatives de $\cos\omega$, il en résulte la double lemniscate, représentée par l'équation polaire proposée.

Une autre courbe est représentée par l'équation polaire

$$r^2=a^2\sin^2\omega(\sin\omega-\cos\omega)^2.$$

On sait calculer les aires limitées par ces deux courbes remarquables.

III. Si, à partir du point (X,Y) ci-dessus, on porte sur le prolongement de l'ordonnée Y, dans l'un ou l'autre sens, successivement chacune des longueurs indiquées dans le premier problème précédent; quel est chaque fois le lieu du pied (x,y) de la perpendiculaire abaissée, du point ainsi obtenu, sur la droite passant par le point (X,Y) et l'origine?

Scholie. Dans les trois problèmes ci-dessus, l'origine pourrait être l'extrémité d'un diamètre $2a$, suivant lequel l'axe des x rectangulaires serait dirigé.

Surfaces polaires. Voici plusieurs surfaces courbes, bien remarquables, que l'on peut aussi représenter par des équations polaires; et l'on peut aisément calculer les volumes limités par celles de ces surfaces engendrées par les révolutions de courbes planes:

Les coordonnées étant rectangulaires et l'origine au centre, soit (X,Y,Z) un point quelconque de la surface sphérique, dont a est le rayon:

1° Si, à partir de l'origine, on porte sur la droite qui la joint au point (X,Y,Z), successivement les longueurs $X, Y, Z, X+Y, X-Y, X+Y+Z, X+Y-Z, a+X, a-Z, a+X+Y, a+X-Y, a+X+Y+Z$, etc.; quel est chaque fois le lieu géométrique de tous les points (x,y,z), ainsi obtenus?

2° Si, à partir de l'origine, on porte sur l'axe des z rectangulaires, successivement chacune des longueurs ci-dessus; quel est chaque fois le lieu géométrique du pied (x,y,z) de la perpendiculaire abaissée, du point ainsi obtenu, sur la droite passant par (X,Y,Z) et l'origine?

3° Si, à partir du point (X,Y,Z) on porte sur le prolongement de son Z, dans l'un ou l'autre sens, successivement chacune des longueurs indiquées (1°); quel est chaque fois le lieu du pied (x,y,z) de la perpendiculaire, abaissée du point ainsi obtenu, sur la droite passant par (X,Y,Z) et l'origine?

Scholie. Dans les trois problèmes ci-dessus, l'origine pourrait être à l'extrémité d'un diamètre $2a$, suivant lequel l'axe des x rectangulaires serait dirigé.

La discussion de ces surfaces, bien que facile et analogue à celle des courbes précédentes, demande cependant quelqu'attention pour en découvrir les différentes *nappes* et la *forme* de chacune.

Notes sur les méthodes.

Dans ce mémoire et dans les deux précédents, nous avons tâché de rendre bien sensible, par différentes applications, non-seulement la *méthode analogique*, mais surtout le *principe d'analogie directe*, lesquels dominent la science du calcul, aussi bien que la science de l'étendue.

La *méthode infinitésimale* ne diffère pas de la méthode analogique et simplifie celle des *limites* : c'est par analogie que l'on est conduit à regarder toute ligne courbe comme une ligne brisée, composée d'une infinité de côtés, infiniment petits. Telle est, par exemple, la circonférence ; car, plus est grand le nombre de sommets du polygone régulier circonscrit au cercle, plus son périmètre a de points communs avec la circonférence ; plus il approche de coïncider avec cette courbe ; et la coïncidence serait complète, évidemment, si le nombre de sommets était le plus grand possible. L'analogie conduit donc à *regarder le cercle comme le polygone régulier du plus grand nombre de sommets, dont le rayon et l'apothème sont égaux et dont les propriétés sont, par suite, absolument les mêmes que celles de tout polygone régulier.* Il en résulte immédiatement que 1° les circonférences des cercles sont entre elles comme leurs diamètres ; et partant le rapport π de la circonférence à son diamètre est un nombre *constant* et *irrationnel* ; 2° tous les cercles sont des figures *semblables* ; l'aire de chacun étant le produit du nombre π par le carré numérique de son rayon.

Ces propositions sont conséquences si immédiates, si claires et si rigoureuses du principe d'analogie directe, qu'il y a lieu de s'étonner de ce que ce moyen de recherche ne soit pas encore généralement adopté dans les traités élémentaires de géométrie, à l'exclusion de tout autre, nécessairement plus compliqué et toujours très-obscur, faute de définitions complètes.

Croit-on, par hasard, que les longues et inutiles *réductions à l'absurde*, employées à démontrer ces propositions, puissent apprendre quelque chose aux élèves, qui n'ont pas clairement la notion des grandeurs *incommensurables* entre elles ? Ne faut-il pas d'abord la définition de ces grandeurs ? Et si l'on possède cette définition, à quoi bon la réduction à l'absurde ?

La véritable définition est : deux grandeurs de même nature sont dites *incommensurables* entre elles, lorsqu'elles n'ont d'autre *commune mesure* qu'une quantité infiniment petite x, d'un ordre quelconque. Cette quantité x, toujours inconnue, n'en existe pas moins certainement, puisque deux grandeurs a et b, de même nature ont toujours un *rapport exprimable* ou *inexprimable* exactement en chiffres ; chose incontestable et admise par tout les géomètres.

Si l'on disait que les grandeurs a et b sont *incommensurables*, parce qu'elles n'ont absolument aucune mesure commune, il s'ensuivrait qu'elles n'ont absolument aussi aucun rapport ; car dès qu'il y a rapport, il y a aussi mesure commune, *assignable*, *inassignable* ou *infiniment petite* ; et l'on conçoit que le rapport $a:b$ n'existant pas, il est inutile de s'en occuper.

On est donc forcé, pour être clair et logique, d'admettre la définition ci-dessus des grandeurs incommensurables ; ce qui ramène inévitablement à la méthode infinitésimale, et par conséquent à celles des *parties égales*, dans les proportions. Si, en effet, m et n étant deux nombres entiers, *finis* ou *infinis*, on a $A=mx$ et $B=nx$, d'où $A:B=mx:nx=m:n$; et si l'on démontre ensuite que $C=my$ et $D=ny$, d'où $C:D=my:ny=m:n$; on verra que $A:B=C:D$.

Cette méthode des proportions, très-simple et très-claire, est d'ailleurs complètement exacte, bien qu'on y raisonne sur des communes mesures inconnues : elle devrait seule figurer en géométrie, si elle n'était pas suppléée souvent par le principe d'analogie directe, tout aussi clair et aussi rigoureux, mais plus simple, en certains cas. Cependant, plusieurs auteurs de géométrie, rejetant la réduction à l'absurde, comme inutile et parfaitement incompréhensible, lorsqu'il s'agit de passer du *commensurable* à l'*incommensurable*, distinguent encore néanmoins ce dernier cas : ils pensent éviter les *infinis* en prouvant que les deux rapports cherchés sont compris tous les deux entre deux rapports, ne différant que du nombre 1 sur n, moindre que tout nombre assigné, si petit qu'il soit ; vu que n est un nombre entier, aussi grand qu'on veut : ils en concluent que ces deux derniers rapports sont égaux rigoureusement, et par suite les deux derniers.

Mais admettre que les deux derniers rapports sont rigoureusement égaux, c'est supposer leur différence 1 sur n *infiniment petite* et conséquemment *nulle*, comme elle l'est, en effet, vis-à-vis des grandeurs finies : c'est supposer une commune mesure ; c'est répéter, en le compliquant, le raisonnement fait pour une mesure commune *assignable*. La distinction des deux cas, commensurable et incommensurable, complique donc, fort inutilement, les éléments de géométrie.

La théorie des parallèles, où l'on veut éviter les *infinis*, est tout aussi incompréhensible que la réduction à l'absurde, dans le passage du *rationnel* à l'*irrationnel* ; parce que la définition de l'angle, sur laquelle on se base, ne le fait pas connaître tel qu'il est en effet, une *portion plane infinie*. Aussi cette théorie est-elle fort compliquée et fort obscure, lorsqu'on veut se passer du *postulatum* d'Euclide, comme dans diverses éditions de la géométrie de Legendre et notamment la 12^{me}, où il ne parvient qu'à masquer, par de longs raisonnements, les *grandeurs indéfinitésimales*. Est-il possible, par exemple, que l'élève, même le plus intelligent, qui n'a pas la notion de ces grandeurs, comprenne la démonstration, fort compliquée, du théorème sur les trois angles de tout triangle rectiligne, donnée dans cette dernière édition ? Car cette démonstration, fort ingénieuse sans doute, n'en suppose pas moins implicitement que tout angle *infiniment petit* est comme *nul* vis-à-vis de l'angle droit ; ce qui est vrai : mais elle suppose aussi que les côtés d'un angle infiniment petit coïncident ; ce qui ne saurait être ; et ainsi le théorème n'est réellement pas démontré : il ne peut l'être, clairement et complètement, qu'en se fondant sur la théorie des parallèles ; elle-même devant être basée sur la nature infinie de l'angle, pour être simple, claire et complète.

Considérons l'angle droit D et l'angle aigu A extérieur, situés d'un même côté de la droite fixe MN et ayant deux côtés opposés sur cette droite : si l'on fait glisser l'angle droit D sur MN, de telle sorte que l'un de ses côtés glisse sur un côté de A, il est évident, d'après la notion de la ligne droite, que les second côtés de A et de D se couperont toujours, bien que leur intersection unique s'éloigne de plus en plus du sommet, d'abord commun. On est donc ainsi amené au postulatum d'Euclide, savoir que *toute perpendiculaire à un côté d'un angle aigu finit toujours par rencontrer l'autre côté.*

Ce postulatum, ainsi amené, me paraît d'une évidence assez complète et je n'hésiterais pas à le ranger parmi les axiomes, si la nature infinie de l'angle ne permettait de le démontrer rigoureusement. Cependant des géomètres du premier ordre, et Legendre en particulier, pour réduire le plus possible le nombre des axiomes en géométrie, ont voulu démontrer le postulatum ci-dessus ; mais ils n'y ont pas réussi, parce qu'ils n'ont pas voulu non plus considérer *explicitement* les grandeurs infinitésimales, réellement inévitables dans la science de l'étendue.

Je terminerai par les observations, fort judicieuses, que voici (elles sont consignées, tome XX des annales de Mathématiques, p. 288) : « En examinant avec attention la plupart des Traités de Géométrie élémentaire, il semble souvent que leurs auteurs aient pris à tâche de rendre, à dessein, difficile une étude qu'ils auraient dû s'efforcer, au contraire, de mettre à la portée du plus grand nombre. Indépendamment de ces continuelles réductions à l'absurde, dont on pourrait, tout au plus, donner un ou deux exemples en notes, par forme d'échantillon, et dont le moindre inconvénient est de faire perdre tout-à-fait de vue la marche des inventeurs, dans l'investigation des vérités inconnues ; combien n'est-il pas d'autres parties des éléments qui pourraient être traitées d'une manière beaucoup plus naturelle et en même temps beaucoup plus simple? On dit, en faveur de la pratique contraire, qu'elle est plus propre à développer et à exercer l'intelligence ; mais c'est-là, ce me semble, une erreur manifeste ; et cette pratique ne me paraît propre qu'à faire briller l'adresse des auteurs qui devraient, au contraire, dans la composition de leurs ouvrages, s'oublier constamment, pour ne songer qu'à ceux qu'ils ont dessein d'instruire. Ce qui peut réellement développer et exercer l'intelligence des élèves (leur faire acquérir la science), ce sont des théorèmes et des problèmes que, par forme d'exercice, on leur donne à démontrer et à résoudre (et ajoutons que c'est le véritable moyen de leur inspirer le goût de l'étude). Leur application à retenir exactement des raisonnements et des procédés qu'ils trouvent dans un livre n'exerce uniquement que leur mémoire. Ne vaudrait-il pas beaucoup mieux, d'ailleurs, leur présenter simplement ce qui est simple de sa nature, et réserver les forces de leur intelligence pour beaucoup d'importantes recherches qu'on ne fait point d'ordinaire figurer dans les éléments, et qui néanmoins devraient y trouver place, parce qu'elles sont, pour la plupart, fondamentales dans la science. »

Le même auteur, assignant la place que la géométrie doit occuper, dans l'enseignement scientifique moyen, ajoute : « quel peut être d'ailleurs le motif de cette gothique et inconcevable obstination, qui fait précéder, dans les écoles, l'étude de l'algèbre par celle de la géométrie? Outre que l'étude de la géométrie exige la connaissance de l'Arithmétique, que l'on ne possède parfaitement que quand on a appris un peu d'algèbre ; comment ne voit-on pas que l'algèbre n'est qu'une langue, un pur instrument, qu'il est fort inutile d'apprendre à manier, lorsqu'on possède déjà les connaissances dont son emploi aurait pu faciliter l'acquisition ? Qu'on fasse de la géométrie à la manière de Monge et de ses disciples, sans aucune sorte de calcul ; qu'on pousse cette géométrie aussi loin qu'on le pourra, j'y souscris de très-grand cœur ; mais qu'on cesse enfin de nous donner pour *géométrie pure* une géomètre tout encombrée de proportions, de *componendo* et de *dividendo*, dans lesquels je ne saurais voir que des équations et des éliminations, sous un déguisement suranné. »

Ces observations et d'autres non moins justes, nous les avions faites nous-mêmes, depuis longtemps : elles résument les vues par lesquelles nous avons été guidés dans la composition de nos traités élémentaires, où, par un choix de méthodes, nous avons voulu faciliter l'étude de la science, la rendre plus complète et épargner aux jeunes élèves, par des applications propres à les intéresser, le découragement qu'ils éprouvent à l'aspect d'une longue suite de théories dont ils n'aperçoivent pas le but et dont souvent ils n'ont que des idées confuses, faute de bonnes définitions.

Les meilleurs ouvrages synthétiques de géométrie ne sont pas et ne sauraient être indépendants des signes et des opérations du calcul ; vu que la géométrie n'est pas seulement *graphique*, mais aussi *numérique*, nécessairement. L'expérience prouve d'ailleurs que l'emploi des premiers principes de l'algèbre, lorsqu'il se présente naturellement en géométrie ; non-seulement facilite l'étude de cette science, mais il complète la conviction des élèves, accélère leurs progrès et les prépare, de la manière la plus efficace, aux études supérieures. Car ils se familiarisent ainsi avec la langue des sciences physiques et mathématiques, dont la géométrie est comme la base. On ne doit donc pas se priver du secours de l'algèbre élémentaire, où souvent elle est nécessaire, dans le développement des théories géométriques.

On dira peut-être qu'en agissant ainsi, on fait de l'algèbre et non de la géométrie. Mais qu'importe, pourvu que les vérités géométriques soient démontrées clairement et simplement ? Si vous refusez le secours de l'algèbre, dans les questions de géométrie où il faut combiner entre elles les *grandeurs numériques*, vous serez obligé d'employer, au lieu de signes algébriques, ceux beaucoup plus longs et beaucoup plus compliqués du langage ordinaire ; et vous ferez, malgré vous, de l'algèbre : seulement ce sera de l'algèbre *parlée ;* elle ne différera de la véritable que par plus de longueur, pas moins de clarté et de facilité.