MÉLANGES D'ALGÈBRE, OU RECUEIL D'UN GRAND NOMBRE DE PROBLÈMES ET D'APPLICATIONS ALGÉBRIQUES.

Par J. N. Noël,

PROFESSEUR DES SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES, PRINCIPAL DE L'ATHÉNÉE DE LUXEMBOURG, CORRESPONDANT DE LA SOCIÉTÉ DES LETTRES, SCIENCES ET ARTS, DE METZ, ETC.

LUXEMBOURG,

DE L'IMPRIMERIE DE J. LAMORT, PLACE D'ARMES.

1827.

Ouvrages du même Auteur qui se trouvent à Luxembourg et chez les principaux Libraires du Royaume :

1° Arithmétique à l'usage des Ecoles primaires, 2me édition, 1826;

2° Arithmétique élémentaire, raisonnée et appliquée, 3e édit. 1825;

3° Algèbre élémentaire, raisonnée et appliquée, 1821;

4° Mélanges de Mathématiques, ou Application de l'Algèbre à la géométrie élémentaire, suivie de plusieurs propositions de Statique, et précédée d'un Recueil de Théorèmes et de Problèmes de géométrie, 1822.

5° Note sur la géométrie élémentaire, 1825;

6° Supplément d'Arithmétique, 1825.

Les nombres placés entre parenthèses, indiquent l'article sur lequel s'appuie celui dont on s'occupe.

MÉLANGES D'ALGÈBRE,

OU RECUEIL

D'UN GRAND NOMBRE DE PROBLÈMES ET D'APPLICATIONS ALGÉBRIQUES.

J'ai réuni, dans le présent ouvrage, les matières qui ne sont pas parties essentielles des traités d'Arithmétique et d'Algèbre, ce qui me permettra de rendre ces ouvrages moins volumineux et moins chers, même en y comprenant le prix de celui-ci.

Tous les Professeurs savent que, pour éclaircir les théories et les mieux fixer dans la mémoire, il faut les faire suivre de quelques applications; ils savent que les problèmes, en excitant la curiosité, font naître le désir de les résoudre; ce qui procure aux élèves le double avantage de développer leur intelligence et de les familiariser avec les combinaisons du langage analytique. Sous ce point de vue, quel que soit d'ailleurs l'ouvrage qu'ils auront à suivre, celui-ci leur sera toujours très-utile, tant pour appliquer les principes et les règles du calcul analytique, que pour se familiariser avec les moyens de simplifier ce calcul et d'en éluder les difficultés; ce qui est l'objet le plus important de l'étude de l'algèbre.

De l'Arithmétique devinatoire.

1. L'Arithmétique *devinatoire* proprement dite, n'est autre chose que la manière de *deviner* le nombre qu'une personne a pensé, en lui faisant effectuer certaines opérations numériques propres à découvrir ce nombre. Rien n'est donç plus facile que de se créer des méthodes pour trouver le nombre pensé : aussi les faiseurs de tours ont-ils toujours bonne provision de ces méthodes. Voici un exemple bien remarquable de la manière de deviner des nombres :

2. Un joueur de gobelets promet de nommer la personne qui aura pris une bague en secret, et de déterminer la main, le doigt et la jointure où cette bague sera, à condition qu'on fera les cinq choses, qu'il va prescrire, dans l'ordre suivant :

1° Doublez, dit-il, le nombre qui marque le rang de la personne qui a pris la bague, et ajoutez 5 à ce nombre;

2° Multipliez la somme par 5 et ajoutez-y 10;

3° Ajoutez à la dernière somme, 1 pour la main droite, et 2 si c'est la gauche, et multipliez le tout par 10;

4° Joignez-y le rang du doigt, en commençant par le pouce, et multipliez le tout par 10;

5° Enfin, joignez à cela le rang de la jointure et 35, et donnez cette dernière somme.

De cette somme, le joueur de gobelets soustrait 3535, et le reste est composé de 4 chiffres, dont le 1er indique le rang de la personne, le 2^e le rang de la main, le 3^e celui du doigt, et le 4^e celui de la jointure.

Par exemple, si c'est la 4^e personne de la compagnie, suivant le rang, qui ait pris la bague; qu'elle l'ait mise à la main gauche, désignée par 2; que ce soit au 4^e doigt et à la 2^e jointure; en faisant les cinq opérations prescrites, on trouvera 7777.

Soustrayant 3535, on aura 4242, dont le 1er chiffre 4 est effectivement le rang de la personne, le 2^e 2 la main gauche, le 3^e 4 le rang du doigt et le 4^e 2 celui de la jointure.

Pour voir comment on est ainsi conduit à trouver ces quatre nombres, soit p le rang de la personne, m la main, d le rang du doigt et f celui de la phalange; en exécutant les cinq opérations prescrites, on obtient $1000p + 100m + 10d + f + 3535$; et comme ce nombre est égal à 7777, il vient, en retranchant 3535 de part et d'autre,

$$1000p + 100m + 10d + f = 4242.$$

Cette égalité ne peut subsister que quand on a $p = 4$, $m = 2$, $d = 4$ et $f = 2$.

3. Cet exemple suffit bien pour montrer que l'arithmétique devinatoire n'est qu'une espèce de jeu, dont la subtilité consiste à faire dire aux spectateurs la chose qu'on demande, en l'enveloppant dans différentes opérations, afin de leur en dérober la connaissance. C'est aussi à cette arithmétique qu'on peut rapporter divers tours de cartes, tel que le suivant :

4. On prend un jeu de m cartes, où les as et les figures comptent pour 10 points; on en forme p paquets contenant chacun n points, de manière que la première carte de chaque

paquet compte pour le nombre de points qu'elle indique, et toutes les autres pour un point chacune. Trouver le moyen de deviner le nombre total de points indiqués par les premières cartes de tous les paquets.

Soient a, b, c, d, ..., les nombres de points respectifs des 1res cartes des p paquets; il est clair que les nombres de cartes qu'il aura fallu ajouter aux p premières, pour former tous les paquets, sont respectivement : $n-a$, $n-b$, $n-c$, $n-d$, ...; le nombre de cartes employé est donc $p+pn-a-b-c-d-\cdots$; par conséquent le nombre de cartes restantes est $m-p-pn+a+b+c+d+\cdots$ Si donc à ce nombre de cartes restantes, on ajoute le nombre connu $(1+n)p-m$, la somme $a+b+c+d+\cdots$ sera égale au nombre de tous les points indiqués par les p premières cartes des p paquets.

Soit donc x le nombre total de points indiqués par les 1res cartes des p paquets et k le nombre de cartes non employées, on aura, pour résoudre le problème proposé, la formule

$$x=k+(1+n)p-m.$$

5. A *parie avec* B *qu'il devinera, dans un jeu de* 27 *cartes, celle que* B *aura pensée. Comment* A *pourra-t-il gagner le pari?*

A gagnera le pari, en opérant comme il suit : 1° après avoir mêlé à volonté les 27 cartes, A fera trois paquets de 9 cartes chacun, en posant d'abord de gauche à droite, la première carte de chaque paquet, la couleur en dessous, puis la seconde sur la première, toujours de gauche à droite, puis la troisième, et ainsi de suite, ayant soin, avant de poser chaque carte, de la montrer à B, de manière qu'il ne puisse la voir lui-même : et cela fait A placera les paquets les uns sur les autres, sans les mêler. 2° A recommencera à faire trois nouveaux paquets, exactement comme la première fois, avec les mêmes attentions, et les relevera encore sans les mêler. 3° A fera de nouveau trois paquets, comme dans le premier cas, et les relevera de la même manière. Alors, les rangs étant comptés du dessus vers le dessous, B dira que le paquet contenant la carte pensée, occupait dans le jeu, le rang a après la première opération, le rang b après la seconde, et le rang c après la troisième; et au moyen de ces seules données, A connaîtra le rang x de la carte pensée, dans le jeu, et pourra par conséquent la deviner.

En effet, 1° après la première opération, la carte pensée ne peut occuper dans son paquet que le rang 1 au moins, et le rang 9 au plus. Mais puisqu'on n'assigne à ce paquet que le rang a, on met donc $(a-1)$ autres paquets de 9 cartes chacun, au-dessus de lui; il s'ensuit, qu'après les cartes relevées, la carte pensée se trouve occuper dans le jeu, au moins le rang $9(a-1)+1=9a-8$, et au plus le rang $9(a-1)+9=9a$.

2° En formant de nouveau les paquets, on pose d'abord au moins $9(a-1)$ cartes distribuées en trois paquets de chacun $3(a-1)$ cartes, dont aucune ne sera la carte pensée, laquelle, conséquemment, en aura au moins $3(a-1)$ sous elle, dans son paquet; tandis qu'on ne pourra pas en poser $9a$, et conséquemment, $3a$ dans chaque paquet, sans faire passer la carte pensée qui, en conséquence, en aura au moins $3a-1$ sous elle, dans son paquet; donc puisque chaque paquet contient 9 cartes, il s'ensuit que la carte pensée occupera, dans son paquet, au moins le rang $9-(3a-1)=10-3a$, et au plus le rang $9-3(a-1)=12-3a$.

Mais puisqu'on n'assigne à ce paquet que le rang b, on met donc au-dessus de lui $(b-1)$ autres paquets de 9 cartes chacun; d'où il suit qu'après la seconde opération, la carte pensée occupera dans le jeu, au moins le rang $9(b-1)+10-3a=9b-3a+1$, et au plus le rang $9(b-1)+12-3a=9b-3a+3$.

3° Il suit de là qu'en reformant les paquets, on pose au moins dans chacun, $3b-a$ cartes, sans avoir employé la carte pensée, mais qu'on ne peut en poser dans chacun, $3b-a+1$, sans avoir fait passer cette carte; elle aura donc, dans son paquet, au moins $3b-a$ et au plus $3b-a$ cartes sous elle; elle y occupera donc au moins le rang $9-3b+a$, et au plus le rang $9-3b+a$; c'est-à-dire qu'elle y occupera précisément le rang $9-3b+a$.

Mais puisqu'on n'assigne à ce paquet que le rang c, on place donc au-dessus de lui $(c-1)$ autres paquets de 9 cartes chacun; d'où il suit qu'après la 3^{me} opération, la carte pensée occupera dans le jeu, le rang $x=9(c-1)+9-3b+a$, ou

$$x=a-3b+9c.$$

Ainsi, *après la 3^e opération, la carte pensée occupe dans le jeu, et du dessus vers le dessous, un rang égal au premier rang du paquet contenant cette carte, moins 3 fois le second rang de ce paquet, plus 9 fois le 3^{me}.*

6. Ce tour est généralisé dans le tome 4^{me} des *Annales de Mathématiques*, par M. Gergonne. Consultez cet excellent Recueil, ainsi que les *Récréations physiques et mathématiques d'Ozanam, refondues par M.* de M***, où l'on donne plusieurs applications de l'Arithmétique devinatoire. En voici encore un exemple :

Dans un jeu de c *cartes, on en tire* b, *dont on vous demande de deviner la somme* p *des points, le valet étant de* 11 *points, la dame de* 12 *et le roi de* 13.

Pour cela, vous prenez un nombre a qui surpasse le nombre de points de la plus haute carte; vous dites à une personne de compter en secret le nombre p de points des b cartes tirées; de prendre à part, dans le restant du jeu, autant de cartes qu'il y a d'unités dans $ab-p$ et de faire connaître le nombre d de cartes qui restent; alors vous aurez

$$p = d + b(a+1) - c.$$

De quelques séries périodiques, fournies par la division numérique.

7. J'appellerai *série périodique*, toute suite infinie de fractions dont les dénominateurs sont les puissances successives d'un même nombre entier, et dont un ou plusieurs numérateurs reviennent sans cesse dans le même ordre. L'ensemble des fractions dont les numérateurs reviennent, forme une *période* de la série périodique. Par exemple, la suite

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{1}{27}+\frac{2}{81}+\frac{1}{243}+\frac{2}{729}+\text{etc. à l'infini},$$

est une série périodique, dont $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}$ est la première période.

8. Voyons d'abord comment on peut réduire une fraction en série périodique. Proposons-nous, par exemple, de réduire $\frac{1}{3}$ en parties de 4 en 4 fois plus petites. Pour cet effet, nous dirons: $\frac{1}{3}=$ le tiers de $1=$ le tiers de $\frac{4}{4}$. Or le tiers de $\frac{4}{4}$ est $\frac{1}{4}$, pour $\frac{3}{4}$, et il reste $\frac{1}{4}$, qui vaut $\frac{4}{16}$: le tiers de $\frac{4}{16}$ est $\frac{1}{16}$, pour $\frac{3}{16}$, et il reste $\frac{1}{16}$, qui vaut $\frac{4}{64}$: le tiers de $\frac{4}{64}$ est $\frac{1}{64}$, pour $\frac{3}{64}$, et il reste $\frac{1}{64}$, qui vaut $\frac{4}{256}$: ainsi de suite, à l'infini. On a par conséquent

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\text{etc., à l'infini.}$$

Il résulte de ces calculs, que *pour convertir une fraction en une suite d'autres dont les dénominateurs deviennent de* c *en* c *fois plus grands, il faut diviser par le dénominateur proposé, le* 1$^{\text{er}}$ *numérateur et ceux des fractions que l'on trouve en convertissant chaque reste en parties* c *fois plus petites.*

9. D'après cette règle, si l'on réduit $\frac{637}{729}$ en parties de 3 en 3 fois plus petites, et $\frac{3}{7}$ en parties de 4 en 4 fois moindres, on trouvera

$$\frac{637}{729}=\frac{2}{3}+\frac{1}{9}+\frac{2}{27}+\frac{1}{81}+\frac{2}{243}+\frac{1}{729},\ \text{et}$$

$$\frac{3}{7}=\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{2}{4^5}+\frac{3}{4^6}+\text{etc., à l'infini.}$$

La 1$^{\text{re}}$ de ces fractions se réduit exactement en parties de 3 en 3 fois plus petites, parce que son dénominateur 729 est une puissance de 3; mais la 2$^{\text{e}}$ fraction $\frac{3}{7}$ ne peut se réduire exactement en parties de 4 en 4 fois plus petites, et donne lieu à une série périodique, parce que son dénominateur est 1$^{\text{er}}$ avec 4.

10. En général, *lorsque le dénominateur d'une fraction irréductible est premier avec* c, *cette fraction ne peut jamais se convertir exactement en parties de* c *en* c *fois plus petites.* En effet, soit $\frac{a}{bd}$ la fraction irréductible proposée, dans laquelle b est premier avec a et c. Si cette fraction pouvait se réduire exactement en parties de c en c fois plus petites, c'est-à-dire en une suite de fractions dont les dénominateurs successifs fussent c, c^2, c^3, ..., c^m; la somme de ces fractions prendrait la forme $\frac{k}{c^m}$, et l'on aurait

$$\frac{a}{bd}=\frac{k}{c^m};\ \text{d'où}\ \frac{ac^m}{b}=dk.$$

Or, b est premier avec chacun des facteurs du produit ac^m; donc b ne divise pas ce produit; donc dk n'est pas un nombre entier. Mais d en est un; donc k ne serait pas un nombre entier; ce qui est absurde, puisque k est la somme de plusieurs nombres entiers: donc réellement la fraction proposée ne saurait se réduire exactement en parties de c en c fois plus petites.

11. Si le dénominateur bd n'avait d'autres facteurs premiers que ceux de c, élevés chacun à une certaine puissance, on pourrait toujours prendre m assez grand pour que c^m fût divisible par bd; donc k serait un nombre entier, et la fraction proposée

pourrait se réduire exactement en parties de c en c fois plus petites.

12. Voyons maintenant ce qui arrive quand on veut exprimer en parties de c en c fois plus petites, une fraction irréductible dont le dénominateur est premier avec c. D'abord si cette fraction est plus grande que l'unité, on en extraira les entiers, et on n'aura plus à considérer qu'une fraction moindre que l'unité.

Soit donc $\frac{a}{b}$ une fraction irréductible < 1, dont le dénominateur b est premier avec a et c. Pour réduire cette fraction en parties de c en c fois plus petites, appliquons la règle du n° 8. Soient $q, q', q'', q''', \ldots$, les quotiens successifs, et $r, r', r'', r''', \ldots$ les restes correspondans; les dividendes successifs seront $ac, cr, cr', cr'', \ldots$; on aura par conséquent

$$\begin{aligned} ac &= bq + r \\ cr &= bq' + r' \\ cr' &= bq'' + r'' \\ cr'' &= bq''' + r''' \\ &\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Comme $\frac{a}{b}$ ne saurait se réduire exactement en parties de c en c fois plus petites (10), les divisions se continueront sans jamais donner un reste nul; et comme chaque reste est moindre que le diviseur b, il y aura tout au plus $b-1$ restes différens : donc on retrouvera nécessairement l'un des restes déja obtenus, et la série sera périodique.

Soit r''' le 1er reste égal à l'un de ceux qui le précèdent : on n'aura pas $r''' = r''$; car si cela était, on aurait aussi

$$c(r' - r'') = b(q'' - q''') \ldots (1)$$

Or, r' et r'' étant chacun moindre que b, $r' - r''$ est aussi moindre que b. D'ailleurs le second membre de l'équation (1) étant divisible par b, il en est de même du premier. Mais b est premier avec c; il faut donc que b divise $r' - r''$, nombre moindre que lui; ce qui ne saurait arriver que dans le seul cas de $r' - r'' = 0$ ou de $r'' = r'$. Ainsi r''' ne serait pas le premier reste égal à l'un de ceux qui le précèdent; ce qui est contre l'hypothèse : donc on n'aura pas $r''' = r''$. On verra de même qu'on ne saurait avoir $r''' = r'$, ni $r''' = r$; et si l'on n'avait pas $r''' = a$, r''' ne serait égal à aucun des restes précédens; ce qui est contre la supposition. Donc il faut que $r''' = a$; ce qui donne $cr''' = ac$. Mais puisque les dividendes ac et cr''' sont les mêmes, les quotiens q et q^{IV} seront aussi les mêmes, ainsi que les restes r et r^{IV}. D'où il suit que la valeur cherchée de $\frac{a}{b}$ est une série périodique, commençant par la fraction $\frac{q}{c}$, et dont les numérateurs, dans chaque période, sont q, q', q'' et q'''. De plus, la division qui donne le dernier numérateur q''', dans chaque période, laisse un reste r''' égal au numérateur a de la fraction proposée.

13. En général donc, *si l'on réduit en parties de* c *en* c *fois plus petites une fraction irréductible, dont le dénominateur est premier avec* c, *on trouvera une série périodique, commençant par la* 1*re fraction de la* 1*re période; et le reste obtenu, après avoir calculé le numérateur de la dernière fraction de chaque période, sera égal au numérateur de la fraction proposée.* C'est par exemple, ce qu'on verrait, en réduisant la fraction $\frac{13}{24}$ en une suite d'autres, dont les dénominateurs soient les puissances successives de 5 (8).

14. Supposons maintenant que b et c aient des facteurs communs et qu'on ait, par exemple, $b = kd^5e^3$ et $c = k'd^3e^2$. Il est clair que dans la 1re division, le dividende et le diviseur sont $ak'd^3e^2$ et kd^5e^3; ils donnent donc un quotient q avec un reste de la forme rd^3e^2. Dans la 2e division, le dividende et le diviseur sont rd^6e^4 et kd^5e^3; ils fournissent par conséquent un quotient q' et un reste de la forme $r'd^5e^3$. De sorte que

$$\frac{a}{b} = \frac{q}{c} + \frac{q'}{c^2} + \frac{r'd^5e^3}{c^2kd^5e^3}, \text{ ou } \frac{a}{b} = \frac{q}{c} + \frac{q'}{c^2} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{r'}{k}.$$

Si la fraction $\frac{r'}{k}$ n'était pas irréductible, on la rendrait telle en supprimant le facteur commun à ses deux termes. Et comme le dénominateur k était premier avec c, avant cette suppression, il est clair qu'il le sera encore après. De sorte qu'on peut toujours admettre que $\frac{r'}{k}$ est une fraction dont le dénominateur est premier avec r' et c. Si donc on réduit cette fraction en parties de c en c fois plus petites, on aura une série périodique, commençant à la première fraction *partielle*; donc $\frac{a}{b}$ sera égale à une série périodique *mixte*, dont la période commence immédiatement après les deux premières fractions partielles.

On verra de même que si $b = kd^7e^6$ et $c = k'd^4e^2$, la fraction $\frac{a}{b}$ sera égale à une série périodique mixte, dont la période commence après les trois ou $\frac{6}{2}$ premières fractions partielles. Si $b = kd^4e$ et $c = k'd^6e^4$, la période commencera après la 1re fraction partielle; et il en sera de même pour $b = kd^3e^2$ et $c = k'd^7e^4$.

15. De là et de ce que le quotient *en dehors* de 7 par 4, par exemple, est $\frac{7+1}{4}$ ou 2 (*), il résulte, que *toutes les fois que le dénominateur* b *a des facteurs communs avec* c, *la fraction proposée est égale à une série périodique mixte, dont la période commence immédiatement après autant de fractions partielles qu'il y a d'unités dans le plus grand quotient en dehors qu'on obtient en divisant l'exposant de chacun des facteurs dans* b *par l'exposant du même facteur dans* c. C'est d'ailleurs ce que l'on peut vérifier en réduisant $\frac{153}{160}$ en parties de 6 en 6 fois plus petites et $\frac{17}{24}$ en parties de 20 en 20 fois moindres.

16. Cherchons actuellement à déterminer la génératrice d'une série périodique donnée. Supposons d'abord cette série périodique *simple*, et prenons, par exemple,

$$\frac{n}{d} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \frac{2}{5^5} + \frac{3}{5^6} + \text{etc., à l'infini} \ldots (2)$$

Cette égalité fait voir qu'en réduisant $\frac{n}{d}$ en parties de 5 en 5 fois plus petites, on a divisé $5n$ par d, ce qui a donné 1 au quotient avec le reste r; on a divisé $5r$ par d, et on a trouvé 2 au quotient avec le reste r'; enfin on a divisé $5r'$ par d, et il est venu 3 au quotient avec le reste r'', qui doit être égal à n (13). On a par conséquent les équations

$$\left.\begin{aligned} 5n &= d + r \\ 5r &= 2d + r' \\ 5r' &= 3d + n \end{aligned}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{aligned} 25n &= 7d + r' \\ 125n &= 38d + n \\ \text{et } 124n &= 38d. \end{aligned}\right.$$

Cette dernière équation fournit $\frac{n}{d} = \frac{38}{124} = \frac{19}{62} = \frac{38}{5^3 - 1}$.

(*) On appelle *quotient en dehors*, celui qu'on trouve en ajoutant au dividende assez d'unités pour qu'il contienne exactement le diviseur. Ainsi les quotiens en dehors de 17, 18, 19 par 4, sont tous égaux à 5.

On aurait trouvé la valeur précédente en multipliant les deux membres de (2) par 5^3, puis en observant que tout ce qui suit les trois premiers termes dans le nouveau second membre, est une série périodique simple parfaitement égale à la proposée, et doit être remplacé par $\frac{n}{d}$.

17. On voit, par le résultat précédent, que *pour trouver la génératrice d'une série périodique simple, il faut prendre la somme des fractions partielles qui composent la* 1re *période et diminuer de* 1 *le dénominateur de la fraction qui en résulte.* C'est ainsi que

$$\frac{2}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{2}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\text{etc., à l'infini}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5},$$

$$\text{et}\quad \frac{4}{5}-\frac{2}{5^2}+\frac{4}{5^3}-\frac{2}{5^4}+\text{etc., à l'infini}=\frac{18}{24}=\frac{3}{4}.$$

On vérifie aisément cette dernière valeur, d'après la règle du n° 8 et en prenant tous les quotiens en dehors.

18. Si la série périodique est mixte, il suffira de remplacer la série périodique simple qui suit les 1res fractions partielles par sa valeur, trouvée au moyen de la règle précédente (17). Ainsi

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{7^2}+\frac{3}{7^3}+\frac{3}{7^4}+\text{etc.}=\frac{2}{7}+\frac{3}{7}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\text{etc.}\right)$$
$$=\frac{2}{7}+\frac{3}{7}\times\frac{1}{6}=\frac{2}{7}+\frac{1}{14}=\frac{5}{14}.$$

19. Il est évident que tout ce qui vient d'être dit sur la réduction des fractions ordinaires en séries périodiques, et réciproquement, s'applique de point en point à la conversion des fractions ordinaires en décimales, et des fractions décimales périodiques en fractions ordinaires.

De la divisibilité des nombres.

20. Soit k un nombre entier quelconque. Concevons qu'on ait partagé ce nombre en tranches de m chiffres chacune, en allant de droite à gauche, sauf la première tranche à gauche, qui peut avoir moins de m chiffres; et soient, en allant aussi de droite à gauche, a, b, c, d, e, etc., ces tranches, considérées comme autant de nombres isolés : puisque 1 *suivi de* m *zéros* $=10^m$, 1 *suivi de* 2m *zéros* $=10^{2m}$, etc., on aura évidemment

$$k = a + b\,10^m + c\,10^{2m} + d\,10^{3m} + e\,10^{4m} + \text{etc.}$$

Faisant $10^m = x$; d'où $10^{2m} = x^2$, $10^{3m} = x^3$, etc., il viendra

$$k = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \text{etc.}$$

Cette équation peut être mise sous l'une des trois formes que voici :

$$k = a + [b + cx + dx^2 + ex^3 + fx^4 + \text{etc.}]\,x,$$

$$k = [b(x-1) + c(x^2-1) + d(x^3-1) + \text{etc.}] + (a + b + c + d + e + f + \text{etc.}),$$

$$k = [b(x+1) + c(x^2-1) + d(x^3+1) + e(x^4-1) + \text{etc.}] + (a + c + e + \cdots) - (b + d + f + \cdots).$$

Les premières parties des deux dernières expressions de k sont divisibles, l'une par $x-1$ et l'autre par $x+1$ (Algèbre). Donc, si l'on désigne par p et q les quotiens respectifs et par r le multiplicateur de x, dans la première expression de k, il est clair que p, q, r seront des nombres entiers, et il viendra, en remplaçant x par 10^m,

(1) ... $k = a + r \,.\, 10^m$,

(2) ... $k = p(10^m - 1) + (a + b + c + d + e + f + \text{etc.})$,

(3) ... $k = q(10^m + 1) + (a + c + e + \cdots) - (b + d + f + \cdots)$.

Ces équations fournissent un grand nombre de conséquences. D'abord, à cause de $10^m = 2^m . 5^m$, l'équation (1) prouve que, tout nombre, dont les m premiers chiffres a à droite forment un multiple de 2^m ou de 5^m, et divisible exactement par 2^m ou par 5^m.

Si $m = 1$, a sera le premier chiffre à droite du nombre k, et l'équation (1) montre, 1° que si a est ou n'est pas l'un des chiffres 0, 2, 4, 6, 8, le nombre k sera ou ne sera pas divisible par 2; 2° que si a est ou n'est pas 0 ou 5, le nombre k sera ou ne sera pas divisible par 5; 3° enfin, que si a est ou n'est pas 0, le nombre k sera ou ne sera pas divisible par 10. Donc il en résulte trois principes démontrés en arithmétique.

Lorsque $m=1$, on a $10^m - 1 = 9$, et $a+b+c+d+f+\text{etc.}$ est la somme de tous les chiffres du nombre k. L'équation (2) montre que si cette somme est ou n'est pas multiple de 3 ou de 9, le nombre k sera ou ne sera pas divisible par 3 ou par 9. Ce qui est encore un principe démontré en arithmétique.

Quand $m=1$, il vient $10^m+1=11$; et alors $a+c+e+\ldots$ est la somme des chiffres de rangs impairs du nombre k; $b+d+f+\ldots$ est la somme des chiffres de rangs pairs. L'équation (3) montre que, dans ce cas, *tout nombre est ou n'est pas divisible par* 11, *lorsque la somme de ses chiffres de rangs impairs, moins la somme de ses chiffres de rangs pairs, donne un reste multiple ou non de* 11. Par exemple, 11 divise 2134 et 31537.

En posant $m=2$, $10^m-1=99=11.9$ et $a+b+c+d+$ etc., désigne la somme des tranches de deux chiffres du nombre k, et l'équation (2) fait voir que si cette somme est ou n'est pas divisible par 11 ou 99, le nombre k sera ou ne sera pas divisible par 11 ou 99.

Si $m=3$, on aura $10^m-1=999=27.37$; et l'équation (2) prouve que tout nombre k est ou n'est pas divisible par 27 ou 37, lorsque la somme de ses tranches de trois chiffres est ou n'est pas un multiple de 27 ou de 37.

La même hypothèse de $m=3$, donne $10^m+1=1001=7.11.13$; et l'équation (3) fait voir que *tout nombre est ou n'est pas divisible par* 7, *par* 11 *ou par* 13, *lorsque la somme de ses tranches de trois chiffres de rangs impairs, moins la somme de ses tranches de trois chiffres de rangs pairs, donne un reste multiple ou non de* 7, *de* 11 *ou de* 13. Ainsi les deux nombres 34168897 et 567123889356 74 sont divisibles, le 1er par 7 et le 2e par 13.

Il existe des principes analogues aux précédens pour tous les systèmes de numération.

21. Après avoir trouvé les diviseurs *premiers* du nombre entier N (Arithmétique), et l'avoir ramené à la forme $N=a^m b^n c^p\ldots$, si l'on veut obtenir tous ses diviseurs *composés*, on formera d'abord les *séries*

$$1, a, a^2, a^3, \ldots, a^m;\ 1, b, b^2, b^3, \ldots, b^n;\ 1, c, c^2, c^3, \ldots, c^p;\ \text{etc.}$$

Ensuite, on multipliera chaque terme de la 1re série par chaque terme de la 2e; puis chaque terme de la série résultante par chaque terme de la 3e, et ainsi de suite. En effet, de cette manière, on a tous les produits des diviseurs simples a, b, c, etc., multipliés 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, etc.; et dans tous ces produits, les exposans de a, b, c, ..., ne surpassent pas m, n, p, etc.

Donc tous ces produits sont diviseurs de $a^m b^n c^p$ etc. ou de N, et il n'y en a pas d'autres.

22. La 1re série a $m+1$ termes, la 2^e $n+1$, la 3^e $p+1$, etc. Or, en multipliant les $m+1$ termes de la 1re série par un terme quelconque de la 2^e, on a évidemment $m+1$ produits : donc en multipliant chaque terme de la 1re série par chaque terme de la 2^e, on aura $(m+1)(n+1)$ produits; en multipliant chaque terme de la série qui en résulte par chaque terme de la 3^e série, on aura $(m+1)(n+1)(p+1)$ produits; et ainsi de suite. Et comme ces produits sont tous les diviseurs de N, il s'ensuit que *pour savoir combien un nombre entier a de diviseurs, il faut le décomposer dans ses facteurs simples, puis ajouter l'unité à l'exposant de chacun de ces facteurs, et le produit des sommes résultantes sera le nombre de diviseurs demandé.*

Par exemple, le nombre $360 = 2^3 . 3^2 . 5^1$; donc le nombre de diviseurs de 360 est $(3+1)(2+1)(1+1)$ ou 24. En effet, si l'on forme les trois séries : 1, 2, 4, 8; 1, 3, 9 et 1, 5; qu'ensuite on opère comme il est dit plus haut (21), on verra que les diviseurs de 360, sont : 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72, 5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180 et 360.

On reconnaîtra de même que 144 a 15 diviseurs, savoir : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72 et 144. On peut chercher tous les diviseurs de 5821200 et de 4370265900.

23. On appelle nombre *parfait* tout nombre égal à la somme de ses diviseurs, excepté lui-même. Cherchons un nombre N qui satisfasse à cette condition. D'abord N ne saurait être un nombre premier, car la somme de ses diviseurs, hors lui-même, ne serait que l'unité. Supposons donc que N soit de la forme $a^m b$, a et b étant premiers. Puisque $a^m b$ doit être égal à la somme de ses diviseurs, excepté lui-même, on a (22)

$$a^m b = (1+a+a^2+a^3+\cdots+a^m)(1+b) - a^m b;$$

$$\text{d'où } b = \frac{a^m + (1+a+a^2+a^3+\cdots+a^{m-1})}{a^m - (1+a+a^2+a^3+\cdots+a^{m-1})}.$$

Or, b doit être un nombre entier; il faut donc que le dénominateur soit égal à l'unité, car si cela n'était pas, le reste de la division du numérateur de b par le dénominateur, serait $2(1+a+a^2+a^3+\cdots+a^{m-1})$, et a étant positif, ce reste ne se réduirait pas à zéro; on doit donc avoir

$$a^m-(1+a+a^2+a^3+\cdots+a^{m-1})=1.$$

Cette équation détermine a, car elle revient à

$$a^m-\frac{a^m-1}{a-1}=1, \text{ ou à } \frac{1+(a-2)a^m}{a-1}=1;$$

et on voit que l'hypothèse $a=2$ satisfait seule à la dernière égalité. La valeur 2 de a, donne

$$b=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{m-1}+2^m,$$
$$N=(1+2+2^2+2^3+\cdots+2^m)\times 2^m;$$

et pourvu que b soit premier, a l'étant déjà, cette valeur de N jouira de la propriété demandée. Ainsi, *pour avoir le nombre* N, *on additionnera les nombres* 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, *etc., jusqu'à ce qu'on obtienne une somme égale à un nombre premier; on multipliera cette somme par la dernière puissance de* 2, *à laquelle on s'est arrêté, et le produit satisfera à la question.* Par exemple, $1+2$, $1+2+4$, $1+2+4+8+16$, etc. donnent des nombres premiers; et en appliquant la règle précédente, on trouvera les nombres parfaits que voici :

6, 28, 496, 8128, 33550336, 8589869056, etc.

24. Il y a des nombres qu'on nomme *amiables* entre eux, à cause d'une propriété qui leur donne une sorte d'affinité. Elle consiste en ce que les parties aliquotes de l'un sont ensemble égales à l'autre, et que réciproquement, les parties aliquotes de celui-ci donnent une somme égale au premier. Par exemple, les deux nombres 220, et 284 sont amiables entre eux; car les parties aliquotes du 1er sont 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 et celles du 2me, 1, 2, 4, 71, 142; or, la somme des premières parties aliquotes donne 284, et la somme des dernières fournit 220. De même, 17296 et 18416 sont amiables, ainsi que 9363584 et 9437056. Nous ne pouvons démontrer ici la méthode pour trouver deux nombres amiables entre eux.

25. On sait que $2n$ exprime le n^{me} nombre pair et $2n-1$ le n^{me} nombre impair; car en faisant successivement $n=1$, 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc., $2n$ fournit la suite des nombres pairs 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, etc., et $2n-1$ la suite des nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, etc. On place 0 parmi les nombres pairs.

26. *Suivant que le nombre* x *des diviseurs d'un nombre entier* N *est impair ou pair, ce nombre* N *est ou n'est pas un*

carré parfait. Car $N = a^m b^n c^p$ etc. et $x = (m+1)(n+1)(p+1)$ etc. (22); or, x ne saurait être impair que quand $m+1$, $n+1$, $p+1$, etc. sont des nombres impairs eux-mêmes; ce qui exige que m, n, p, etc. soient des nombres pairs, et que par suite, N soit un carré parfait. Ainsi 144 ayant 15 diviseurs est un carré parfait.

27. *La différence des carrés de deux nombres impairs est divisible par* 8; car on a $(2a-1)^2 - (2b-1)^2 = 4(a-b)(a+b-1)$.

La différence entre le cube d'un nombre et ce nombre même est toujours divisible par 6; comme on le voit par $a^3 - a = a(a+1)(a-1)$.

28. *Tout nombre premier, excepté* 2 *et* 3, *augmenté ou diminué de l'unité, donne un résultat divisible par* 6; car tout nombre entier est compris dans l'une des 6 expressions $6n+1$, $6n+2$, $6n+3$, $6n+4$, $6n+5$ et $6n+6$. Mais les deux expressions $6n+1$ et $6n+5$ peuvent seules renfermer les nombres premiers; de sorte que si elles ne contenaient pas d'autres nombres, on en déduirait facilement tous les nombres premiers.

On n'a pas de formule qui renferme tous les nombres premiers seuls.

29. Voici encore plusieurs principes de divisibilité, faciles à démontrer par les premières règles de l'algèbre :

Tout nombre carré est divisible par 3, ou le devient étant diminué de l'unité.

Tout carré est divisible par 4, ou le devient dès qu'on le diminue de l'unité.

Tout carré est divisible par 5, ou le devient étant augmenté ou diminué de l'unité.

Tout carré impair, divisé par 8, donne 1 pour reste.

Si on prend au hasard deux nombres entiers, l'un des deux, ou leur somme, ou leur différence, est nécessairement divisible par 3.

Si deux nombres diffèrent de 2, leur produit augmenté de l'unité sera divisible par le nombre intermédiaire.

Le produit de deux nombres, augmenté du carré de leur demi-différence, est divisible par leur demi-somme.

Tout produit multiplié par la somme de ses deux facteurs augmentée de l'unité, donne un nombre divisible par 2.

La somme de trois nombres entiers consécutifs quelconques est toujours divisible par 3, ainsi que leur produit.

Soit un nombre quelconque de cinq chiffres ; soit posée une addition en écrivant les uns sous les autres et en avançant chaque fois d'un rang vers la droite, le premier chiffre à gauche du nombre de cinq chiffres, la somme des deux premiers, des 3 et des 4 premiers, v fois successives la somme des 5 chiffres, puis les sommes des 4, des 3, des 2 derniers chiffres et le dernier lui-même ; je dis que la somme des nombres ainsi disposés sera divisible par le nombre proposé de 5 chiffres, et donnera un quotient composé de $v + 4$ chiffres 1. Le nombre v peut être 0, 1, 2, 3, 4, ..., n.

Le principe précédent est vrai pour un nombre entier quelconque, quel que soit le nombre de chiffres.

De quelques équations résolubles comme celles du premier degré.

30. Il existe plusieurs méthodes particulières d'élimination, qu'il est utile de connaître, d'abord parce qu'elles rendent possible la résolution de certaines équations, et qu'ensuite elles font souvent trouver des simplifications qu'on ne saurait indiquer à l'avance. Voici par exemple, quatre équations où, en modifiant un peu la méthode par addition et soustraction, l'élimination devient très-facile :

$$\begin{aligned} x + y + z + u &= a \\ 2x + 2^2y + 2^3z + 2^4u &= b \\ 3x + 3^2y + 3^3z + 3^4u &= c \\ 4x + 4^2y + 4^3z + 4^4u &= d. \end{aligned}$$

En effet, si l'on prend la somme des produits respectifs de ces équations par -4, $+6$, -4 et $+1$, on aura

$$24u = 6b + d - 4(a + c);$$

d'où l'on tire la valeur de u. De même, la somme des produits respectifs des trois premières équations par -3, $+3$ et -1, donnera z au moyen de u ; la somme des produits des deux premières par -2 et $+1$, donnera y à l'aide de z et u, et l'on aura ensuite x.

Pour cinq équations pareilles aux précédentes, on prendrait la somme des produits par -5, $+10$, -10, $+5$ et -1, puis le reste s'achèverait comme on vient de l'indiquer.

31. Les équations suivantes se résoudront de la même manière :

$$\begin{aligned} ax + by + cz + du &= h \\ a^2x + b^2y + c^2z + d^2u &= h^2 \\ a^3x + b^3y + c^3z + d^3u &= h^3 \\ a^4x + b^4y + c^4z + d^4u &= h^4. \end{aligned}$$

Prenons, en effet, la somme des produits respectifs de ces équations par $-bcd$, $+(bc+bd+cd)$, $-(b+c+d)$ et $+1$, réduisons et observons que $a(a-b)(a-c)(a-d)$ donne $a^4-(b+c+d)a^3+(bc+bd+cd)a^2-abcd$; nous trouverons

$$x = \frac{h(h-b)(h-c)(h-d)}{a(a-b)(a-c)(a-d)}.$$

Cette valeur de x fournira celles de y, z, u, en y changeant a en b et b en a, a en c et c en a, a en d et d en a. On résoudrait semblablement un plus grand nombre d'équations de même forme.

32. Voici deux systèmes d'équations qu'on ne saurait résoudre que par la substitution des valeurs :

$$axy = mx + a - m \text{ et } bxy = my + b - m;$$
$$xy = a(x+y),\ xz = b(x+z) \text{ et } yz = c(y+z).$$

Considérons seulement le 1er système, et substituons dans la 2me équation, la valeur de y tirée de la 1re; alors, après avoir chassé le dénominateur, transposé dans le 1er membre, et réuni les multiplicateurs de $x-1$, nous aurons

$$(x-1)(bx+a-m)=0.$$

On satisfait à cette équation finale de deux manières, ou par $x-1=0$, qui donne $x=1$ et $y=1$; ou bien par $bx+a-m=0$, qui fournit

$$x = \frac{m-a}{b} \text{ et } y = \frac{m-b}{a}.$$

Ces deux couples de valeurs satisfont effectivement aux deux équations proposées.

33. Généralement, lorsque les deux membres d'une équation ont des facteurs communs en x, cette équation est satisfaite en égalant chaque facteur à zéro, et sa résolution peut se trouver ainsi ramenée à celle d'équations du premier degré. Il est donc utile de chercher à décomposer les équations en facteurs inconnus; et c'est ce qu'on peut faire dans les deux systèmes d'équations que voici :

$$\begin{array}{l|l} axyz = m(xy+x)+a+m & x+y^2+yz^2 = a(xyz-1) \\ bxyz = m(yz+y)+b+m & y+z^2+zx^2 = b(xyz-1) \\ cxyz = m(xz+z)+c+m & z+x^2+xy^2 = c(xyz-1) \end{array}$$

Ces deux systèmes se traitant absolument par la même méthode, nous considérerons seulement le 1^er. Retranchant donc successivement la 1^re équation de la 2^me multipliée par x, la 2^me de la 3^me multipliée par y et la 3^me de la 1^re multipliée par z; réduisant, transposant et réunissant les multiplicateurs de $xyz - 1$, on aura

$$\left.\begin{array}{l} (xyz-1)(bx-a-m)=0 \\ (xyz-1)(cy-b-m)=0 \\ (xyz-1)(az-c-m)=0. \end{array}\right\} \cdots (1)$$

Ces équations donnent d'abord

$$bx-a-m=0,\ cy-b-m=0,\ az-c-m=0;$$

et les valeurs qui en résultent pour x, y, z, satisfont en effet aux équations proposées.

Les équations (1) donnent aussi $xyz-1=0$, ou $xyz=1$, valeur qui réduit les équations proposées aux trois

$$xy+x+1=0,\ yz+y+1=0 \text{ et } xz+z+1=0.$$

Mais ces trois équations n'en font qu'une; car à cause de $xyz = 1$, les produits de la 1^re par z et par yz donnent les deux autres équations. On n'a donc réellement, pour déterminer les trois inconnues x, y, z, que les deux équations

$$xyz=1 \text{ et } xy+x+1=0;$$

ces inconnues ont donc une infinité de valeurs différentes. Par exemple, si $x=\frac{1}{2}$, on aura $y=-3$ et $z=-\frac{2}{3}$; valeurs qui rendent effectivement égaux les deux membres de chacune des équations proposées : si $x=1$, il viendra $y=-2$ et $z=-\frac{1}{2}$; et ainsi de suite.

34. On résoudrait semblablement les trois groupes d'équations :

$$x+y^2=a(xy-1) \text{ et } y+x^2=b(xy-1);$$

$$\begin{array}{l} axyzu = m(xyz-xy+x)+a-m \\ bxyzu = m(yzu-yz+y)+b-m \\ cxyzu = m(zux-zu+z)+c-m \\ dxyzu = m(uxy-ux+u)+d-m; \end{array}$$

$$x+v^2+vz^2+vzu^2=a(xvzu-1)$$
$$v+z^2+zu^2+zux^2=b(xvzu-1)$$
$$z+u^2+ux^2+uxv^2=c(xvzu-1)$$
$$u+x^2+xv^2+xvz^2=d(xvzu-1).$$

On a des équations semblables pour 5, 6, 7, ..., inconnues. Il est aisé de résoudre l'équation

$$(1+a^2)(x^2-c^2)=2a(b-ac)(x-c).$$

35. L'emploi d'inconnues *auxiliaires* simplifie souvent la résolution des équations. Par exemple, si l'on a les trois égalités

$$x^2+v^2+z^2=a(x+v)=b(x+z)=c(v+z);$$

on posera $x^2+v^2+z^2=t$, puis on cherchera les valeurs de x, v, z, dans les trois équations résultantes

$$a(x+v)=t,\ b(x+z)=t \text{ et } c(v+z)=t;$$

ce qui donnera des expressions de la forme

$$x=pt,\ v=qt,\ z=rt,$$

p, q, r étant des nombres donnés. Substituant ces valeurs dans $x^2+v^2+z^2=t$, les deux membres seront divisibles par t, et il viendra $(p^2+q^2+r^2)t=1$. Cette équation faisant connaître l'auxiliaire t, on aura ensuite x, v et z.

36. C'est ainsi qu'on résoudra aisément chacun des groupes d'équations que voici :

$$x^2+v^2+s^2+u^2=\frac{423x}{8}=\frac{141v}{2}=\frac{423s}{5}=\frac{423u}{4};$$

$$x+\tfrac{1}{2}(v+s+u)=v+\tfrac{1}{3}(x+s+u)=$$
$$s+\tfrac{1}{4}(x+v+u)=u+\tfrac{1}{5}(x+v+s)=3700;$$

$$x+v+s=2u,\ v+s+u=\tfrac{7}{3}x,\ s+u+x=4v,$$
$$u+x+v=5s \text{ et } x^2+v^2+s^2+u^2=3872x.$$

Dans le deuxième système, l'inconnue auxiliaire est la somme des 4 inconnues proposées. Nous laissons encore à résoudre les systèmes d'équations qui suivent :

$$x+v=83s,\ x-v=17s \text{ et } xv=4950s;$$
$$x+v=38s,\ x-v=23s \text{ et } x^2+v^2=13811s;$$
$$x+v=as,\ \ x-v=bs \ \text{ et } x^2-v^2=cs;$$
$$\frac{x}{a^2-b^2}-\frac{(a-b)x}{(a+b)^2}-4ab(a-b)^2=\frac{x}{(a+b)(a-b)^2}-(a-b)(a+b)^2.$$

Nota. Le Recueil de problèmes d'Algèbre par M. LOBATO, contient un grand nombre d'équations qui se résolvent par une méthode particulière d'éliminer. Ce recueil, auquel je dois plusieurs idées, se distingue par le choix des questions qu'il renferme, et les élèves le consulteront avec fruit.

Problèmes résolubles comme ceux du 1^er^ degré.

37. *Huit bœufs ont mangé en 7 semaines l'herbe d'un pré de 4 arpens et celle qui a crû pendant ce temps; 9 bœufs ont mangé en 8 semaines l'herbe d'un pré de 5 arpens et celle qui a crû pendant ces 8 semaines. Combien faudrait-il de bœufs pour manger en 12 semaines l'herbe d'un pré de 6 arpens et celle qui croîtra pendant ce temps? On suppose que les bœufs mangent tous également, que les prés sont également bons et que l'herbe y croît uniformément.*

Soit x le nombre de bœufs cherché, h l'herbe contenue d'abord sur chaque arpent et hu celle qui croît sur cet arpent par semaine. Puisque l'herbe croît uniformément, il est clair qu'en 7 semaines il en croîtra $7hu$, sur un arpent, et sur 4 arpens, qui produisent tous également, il en croîtra 4 fois $7hu$ ou $28hu$. D'ailleurs, l'herbe contenue d'abord sur ces 4 arpens est $4h$; donc 8 bœufs en 7 semaines ont mangé $4h+28hu$: et comme tous les bœufs mangent également, il s'ensuit qu'un bœuf en 1 semaine mange $\frac{1}{56}(4h+28hu)$.

On verra de même qu'un bœuf en une semaine mange, dans le 2^e^ et le 3^e^ pré, respectivement $\frac{1}{72}(5h+40hu)$ et $\frac{1}{12x}(6h+72hu)$: on a donc les deux équations

$$\frac{4h+28hu}{56}=\frac{5h+40hu}{72} \text{ et } \frac{4h+28hu}{56}=\frac{6h+72hu}{12x}.$$

La 1^re^ de ces équations donne $u=\frac{1}{28}$. Avec cette valeur, la 2^e^ équation fournit $x=8$. Ce problème, traité d'une manière générale par Newton, a beaucoup d'analogie avec celui que voici :

38. *Quatre bassins d'eau, à faces rectangulaires, dans lesquels la pluie tombe et qui sont alimentés chacun par une source, ont respectivement pour surfaces de niveau 12, 20, 42 et 14 mètres carrés. On évacuerait l'eau de ces bassins en employant 5 ouvriers pendant 3 heures pour le 1^er^; 7 ouvriers*

pendant 4 heures, pour le 2ᵉ, et 12 ouvriers pendant 6 heures, pour le 3ᵉ. On demande le nombre z *d'ouvriers qu'il faudra, pendant 7 heures, pour évacuer l'eau du 4ᵉ bassin. On suppose que l'eau est à la même hauteur inconnue* x *dans les 4 bassins, au moment où l'opération commence; que la pluie y tombe avec une égale intensité; que les sources y amènent le même volume d'eau inconnu* u, *par heure, et qu'enfin tous les ouvriers évacuent chacun par heure, la même quantité d'eau inconnue* t.

Soit v la quantité dont la pluie qui tombe augmenterait par heure la hauteur de chaque bassin, s'il ne recevait et ne perdait point d'eau. La surface de l'eau dans un bassin étant a et sa hauteur x, son volume sera ax (*). De même, le volume d'eau de pluie qui tombe par heure dans ce bassin est av; et le volume qui y tomberait en h heures est ahv. Et comme le volume d'eau fourni par la source au même bassin en h heures est hu, il s'ensuit que le volume d'eau évacué de ce bassin, après h heures, est $ax + ahv + hu$. Mais en une heure chaque ouvrier évacue hors du bassin le volume t d'eau; donc n ouvriers en h heures évacueront le volume hnt. Et puisqu'après ces h heures le bassin est vide, il s'ensuit que $ax + ahv + hu = hnt$.

Substituant dans cette équation générale, les valeurs de a, h et n, relatives à chaque bassin, on aura

$$12x + 36v + 3u = 15t$$
$$20x + 80v + 4u = 28t$$
$$42x + 252v + 6u = 72t$$
$$14x + 98v + 6u = 6zt.$$

Ces équations donnent $x = \frac{2}{3}t$, $v = \frac{1}{6}t$, $u = \frac{1}{3}t$ et $z = 4$. De sorte que le nombre d'ouvriers cherché est 4. Et si on suppose que chaque ouvrier évacue par heure 3 mètres cubes d'eau, on aura $x = 2$, $v = \frac{1}{2}$ et $u = 1$.

39. *Deux ouvriers travaillent immédiatement l'un après l'autre à un ouvrage, et le terminent 6 jours plus tard qu'il ne l'eût été s'ils avaient travaillé ensemble. Le 1ᵉʳ y a travaillé pendant les 3 cinquièmes du temps que le 2ᵉ emploierait seul pour faire tout l'ouvrage, et en a fait les 2 tiers de ce qu'il a*

(*) Les notions de géométrie que nous emploierons quelquefois dans ce traité, seront toujours peu étendues, et on pourra les considérer comme faisant partie des conditions de la question.

laissé. Combien de jours chaque ouvrier emploierait-il seul pour faire l'ouvrage proposé n ?

Soient x et u les nombres de jours cherchés : puisque le 1er ouv. fait n d'ouvrage en x jours, en 1 jour il en fait $\frac{n}{x}$; donc en $\frac{3}{5}u$ de jours, temps pendant lequel il a travaillé à l'ouvrage n, il en a fait $\frac{3nu}{5x}$: il en a donc laissé à faire au 2^{me}, $n-\frac{3nu}{5x}$. Or, il a fait les $\frac{2}{3}$ de ce qu'il a laissé : on a donc cette 1re équation

$$\frac{3nu}{5x}=\frac{2}{3}\left(n-\frac{3nu}{5x}\right).$$

D'un autre côté, il est clair qu'autant de fois l'ouvrage d'un jour du 2^{me} ouvrier sera contenu dans l'ouvrage qui lui a été laissé, autant de jours il aura mis à faire cet ouvrage ; ce nombre de jours est donc

$$\left(n-\frac{3nu}{5x}\right):\frac{n}{u}, \text{ ou } u-\frac{3u^2}{5x}.$$

Donc, puisque les deux ouvriers ont travaillé immédiatement l'un après l'autre, l'ouvrage n'a été terminé qu'en

$$u-\frac{3u^2}{5x}+\frac{3}{5}u \text{ jours.}$$

Il est clair d'ailleurs que les 2 ouvriers emploient ensemble, pour faire l'ouvrage n, un nombre de jours marqué par

$$n:\left(\frac{n}{x}+\frac{n}{u}\right), \text{ ou } n:\frac{n(u+x)}{ux}, \text{ ou enfin } \frac{ux}{u+x}.$$

Mais d'après l'énoncé, ce dernier temps a 6 jours de moins que le temps précédent ; on a par conséquent cette 2^e équation

$$u-\frac{3u^2}{5x}+\frac{3}{5}u=\frac{ux}{u+x}+6.$$

Il reste maintenant à résoudre les deux équations que l'on vient de trouver. Or, en chassant les dénominateurs dans chacune et réduisant, ces deux équations deviennent

$$3u=2x \text{ et } 3x^2u+5xu^2-3u^3-30x^2-30xu=0.$$

Il est évident que l'élimination par addition et soustraction ne saurait être employée ici. Mais en prenant dans la 1re, la valeur de u, puis substituant cette valeur dans la 2^{me} équation ; chassant les dénominateurs et réduisant les termes semblables, on aura

$$10x^3 - 150x^2 = 0, \text{ ou } 10x^2(x-15) = 0.$$

On peut satisfaire à cette équation finale en posant $x=0$, ce qui donne $s=0$; mais ces deux valeurs ne conviennent pas au problème proposé. Il faut donc prendre $x-15=0$, ou $x=15$, ce qui fournit $u=10$; et ces deux valeurs satisfont en effet à la question.

40. *Deux cuves renferment, l'une* a *mesures d'eau et l'autre* b *mesures; elles reçoivent par heure la* 1re c *mesures d'eau et la* 2e d *mesures. Trouver après quel nombre* x *d'heures la* 1re *cuve renfermera* n *fois autant d'eau que la* 2e.

Il est visible qu'après x heures, la 1re cuve renfermera $a+cx$ mesures d'eau et la 2e $b+dx$ mesures; on a par conséquent

$$a+cx=n(b+dx); \text{ d'où résulte } x=\frac{bn-a}{c-dn}.$$

Si $a=24$, $b=10$, $c=5$, $d=2$ et $n=2$, on aura $x=-4$; le problème est donc impossible, dans ce cas. Effectivement, puisque $24 > 2$ fois 10 et que $5 > 2$ fois 2, on voit que la 1re cuve aura toujours plus que 2 fois autant d'eau que la 2me; elle ne pourra donc jamais en avoir seulement 2 fois autant.

D'un autre côté, la valeur 4 de x étant négative, elle résout le problème que donne le proposé en y prenant l'inconnue x en *sens contraire*; c'est-à-dire en demandant *depuis quel nombre* x *d'heures la* 1re *cuve renfermait* 2 *fois autant d'eau que la* 2e. De sorte qu'il y a déjà 4 heures que la 1re cuve avait 2 fois autant d'eau que l'autre.

En effet, il y a 4 heures la 1re cuve renfermait $24-4$ fois 5, ou 4 mesures d'eau, et la 2e, $10-4$ fois 2, ou 2 mesures; la 1re cuve avait donc effectivement 2 fois autant d'eau que la 2e.

Si l'on change d en $-d$ et x en $-x$ dans l'équation et la formule primitives, elles deviendront :

$$a-cx=n(b+dx) \quad \text{et} \quad x=\frac{a-bn}{c+dn};$$

le problème résolu est donc alors : *Deux cuves renferment, l'une* a *mesures d'eau et l'autre* b *mesures; par heure la* 1re *reçoit* c *mesures d'eau et la* 2me *en perd* d *mesures. Trouver depuis quel nombre* x *d'heures la* 1re *avait* n *fois autant d'eau que la* 2me.

Examinons ce que devient la formule proposée sous les trois hypothèses $bn = a$ et $c = dn$, $bn > a$ et $c = dn$, $bn > a$ et $c < dn$.

1° Si $a = bn$ et $c = dn$, on aura $x = \frac{0}{0}$, et le problème sera indéterminé. En effet, $a = bn$ dit que la 1re cuve avait d'abord n fois autant d'eau que la 2e; et $c = dn$ montre que la 1re cuve reçoit par heure n fois autant d'eau qu'en reçoit l'autre; la 1re cuve aura donc toujours n fois autant d'eau que la 2e, quel que soit le nombre x d'heures employé; ce nombre d'heures est donc arbitraire.

2° Si $a < bn$ et $c = dn$, il viendra $x = \infty$, et conséquemment le problème est alors impossible. Effectivement, la 1re cuve reçoit bien par heure n fois autant d'eau que la 2me; mais comme d'abord elle n'en avait pas n fois autant, il s'ensuit que jamais la 1re cuve n'aura n fois autant d'eau que l'autre, et que par conséquent le problème demande une chose impossible.

3° Enfin, si $a < bn$ et $c < dn$, la valeur de x sera négative; le problème sera donc impossible. Cela doit être en effet, car les deux parties a et cx de l'eau de la 1re cuve étant moindres que n fois les deux parties b et dx de l'eau de la 2e, jamais la 1re cuve n'aura n fois autant d'eau que l'autre.

Mais puisque la valeur de x est négative, elle résout le problème que donne le proposé en y prenant l'inconnue x dans une acception opposée, et par conséquent en demandant *depuis quel nombre* x *d'heures la* 1re *cuve avait* n *fois autant d'eau que la* 2me.

La discussion précédente, suffit pour montrer comment on traiterait tout autre problème du premier degré.

41. Voici les énoncés d'un grand nombre de problèmes, propres à exercer à la mise en équation, et même à la discussion :

Quel est le nombre qui en contient un autre 3 fois et qui le surpasse de 8? (R. c'est 12.)

Dans la composition d'une certaine quantité de poudre, il fallait la moitié de tout le poids, plus 6 livres de salpêtre; le tiers, moins 5 livres de souffre, et le quart, moins 3 livres de charbon. Quel est ce poids? (R. 24 livres.)

On distribue 252ſ à un certain nombre de pauvres, hommes, femmes et enfans; les hommes reçoivent 12ſ chacun, les femmes 6ſ et les enfans 3ſ; le nombre des femmes est double de celui des hommes, moins 2, et celui des enfans triple de celui des femmes, moins 4. Combien y a-t-il d'hommes, de femmes et d'enfans? (R. 7, 12 et 32.)

Les biens de A sont les 3 quarts de ceux de B; mais A perdant 24^f et B en gagnant 16, les biens de A ne se trouvent plus que les 2 tiers de ceux de B. Combien avaient-ils chacun? (R. 312^f et 416.)

Quel est le nombre x dont le cube de la moitié vaille 9 fois le carré de son tiers? (R. c'est 8.)

Si un homme était mort 12 ans plutôt, il aurait été marié le tiers de sa vie; mais s'il eût vécu encore 8 ans, il eût été marié pendant les 4 septièmes de son âge. A quel âge est-il mort et pendant combien de temps a-t-il été marié? (R. à 62 ans; pendant 32 ans.)

Deux voyageurs se mettent en route chacun avec une certaine somme d'argent. Arrivés dans un bois, ils sont rencontrés par des voleurs qui prennent au 1^{er} le tiers de ce que possède le 2^e, et à celui-ci le quart de ce que possède l'autre; en sorte que le 1^{er} n'a plus que les 2 cinquièmes de ce qui reste au second. A l'issue de la forêt, ils sont rencontrés encore par d'autres voleurs; mais ceux-ci n'ayant pris que 4 fr. au 1^{er} voyageur, après en avoir pris 50 au 2^e, ce dernier n'a plus que la moitié de l'autre. Combien avaient-ils chacun en partant? (R. 72^{fr} et 48.)

Un colonel voulant attaquer un poste ennemi avec l'un des 3 bataillons qu'il commande, promet une récompense de 901 louis, qui sera distribuée comme il suit : chaque soldat du bataillon qui attaquera recevra un louis et le reste sera partagé également entre les soldats des deux autres bataillons. Or, suivant que l'attaque est faite par le 1^{er}, ou par le 2^e, ou par le 3^e bataillon, les soldats des deux autres reçoivent chacun un demi, ou un tiers, ou un quart de louis. Combien y a-t-il de soldats dans chacun des bataillons? (R. 265, 583 et 689.)

La somme des trois produits différens qu'on obtient en multipliant 2 à 2 trois nombres inconnus, augmente de 100, lorsque ces nombres augmentent respectivement de 3, de 2 et de 1; la même somme diminue de 7, quand le 1^{er} nombre augmente de 4 et le 2^{me} diminue de 3; enfin, cette somme diminue de 47, lorsque le 1^{er} nombre augmentant de 6, les deux autres diminuent respectivement de 2 et de 5. Quels sont ces trois nombres inconnus? (R. 8, 5 et 9.)

Un marchand achète un certain nombre d'aunes d'une toile dont 18 aunes coûtent 62^f. S'il eût acheté 6 aunes de moins et qu'il eût revendu ensuite le quart de sa toile à 12^f pour 9 aunes et les trois autres quarts à 26^f pour 12 aunes, il aurait reçu 56^f un tiers de moins qu'il n'a d'abord payé. Combien d'aunes a-t-il donc achetées? (R. 30.)

Chaque partie perdue prend à un joueur le 5^{me} de l'argent qu'il avait en commençant cette partie, et chaque partie gagnée lui donne le tiers de ce qu'il avait en la commençant. Une personne joue 4 parties : elle perd la 1^{re} et dépense en outre 30^f; elle gagne la 2^{me} et donne 4^f à un pauvre; elle perd la 3^e et donne 60^f à son domestique; enfin, elle gagne la 4^{me} et paie une dette de 200^f. Alors il lui reste les 5 sixièmes de ce qu'elle avait en entrant au jeu. Combien avait-elle? (R. 1200^f.)

Partager 317 en 4 parties telles, que la 1^{re} plus le tiers des trois autres, la 2^e plus le quart des 3 autres, et la 3^e plus le 5^e des trois autres, donnent trois nombres égaux. Quelles sont ces parties? (R. 47, 77, 92 et 101.)

Cinq enfans et leur mère ont à se partager 135 louis, de manière que chaque enfant, à partir du plus jeune, prendra autant de louis qu'il a d'années et en sus le 10^e du reste. Par cette disposition, les enfans ont des parts égales, et la mère reçoit autant de louis qu'il y a d'unités dans la somme des âges des cinq enfans. Quels sont ces âges? (R. 5, 7, 9, 11 et 13 ans.)

Trouver deux nombres dans le rapport de 3 à 4, et dont la somme soit à celle de leurs carrés :: 7 : 50. (Les nombres sont 6 et 8.)

La somme des carrés de deux nombres vaut 17 fois la différence de ces nombres, laquelle n'est que le quart de leur somme. Quels sont ces deux nombres? (R. 5 et 3.)

Le produit de deux nombres est 12, tandis que la différence de leurs cubes est au cube de leur différence :: 13 : 4. Quelles valeurs ont-ils? (R. 6 et 2.)

On avait une certaine somme pour acheter 1 aune de drap de Louvier à 5 huitièmes de large. Comme on vient de dépenser une partie de cette somme, le reste ne peut payer qu'une aune de drap d'Elbeuf à 7 huitièmes. Mais si chacun des 15^f de ce reste devenait 5^{tt}, on pourrait acheter une aune de drap d'Elbeuf à 7 huitièmes, 2 aunes de drap de Sedan à 7 huitièmes et acquitter une dette de 140^{tt}. Combien avait-on d'abord? On sait qu'à dimensions égales le drap d'Elbeuf vaut les 2 tiers du drap de Louvier et le drap de Sedan en vaut les 4 tiers. (R. 90^{tt}.)

Deux joueurs conviennent que celui qui perdra triplera l'argent de l'autre. Ayant perdu chacun une partie, le premier sort du jeu avec 45^f et le 2^e avec 30^f de moins que 3 fois son argent avant de jouer. Combien avaient-ils chacun en entrant au jeu? (Indéterminé.)

En 1812 il s'était écoulé, depuis la mort de Newton, autant d'années que ce savant a vécu. Si Descartes était mort 15 ans plus tard, il aurait eu les 2 tiers de son âge au moment où Newton naquit. Celui-ci était au 17^e de son âge 3 ans avant la mort de Descartes. Enfin 23 ans après la mort de Newton, il y avait un siècle que Descartes avait cessé de vivre. On demande les époques de la naissance et de la mort de chacun de ces deux grands géomètres.

Quel nombre x devrait-on ajouter à deux nombres donnés a et b, pour que la 1^{re} somme valût c fois la 2^e? (Si $a=24$, $b=10$ et $c=3$, on aura $x=-3$.)

Quel nombre x faut-il ajouter à 4 nombres donnés a, b, c, d, pour que le produit des deux premières sommes soit égal au produit des deux autres? (On peut changer les signes de a, b, c, d.)

Une personne dépense tous les ans la c^{me} partie de l'argent qu'elle a entre les mains. Elle reçoit a flor. au bout de chaque année, et possède, après 4 ans, une somme qui excède de a florins la somme qu'elle avait d'abord, diminuée de son quotient par c^2. Combien cette personne avait-elle d'abord? (On peut faire $a = 120$ et $c = 3$.)

Les biens d'un négociant, qui possède a flor., produisent b flor. pour c flor. d'intérêt par an. Combien doit-il dépenser au commencement de chaque année, pour qu'après 3 ans, non-seulement il n'ait plus rien, mais doive le produit de la dépense cherchée par la somme du carré et du cube du quotient de b par c? (Dans ce problème et le précédent, la formule se simplifie en divisant ses deux termes par une même quantité.)

Quels sont les biens de trois personnes? On sait que les biens de chacune, plus n fois les biens des deux autres, font a pour la 1re, b pour la 2me et c pour la 3me.

Quels sont les biens de trois personnes? On sait que les biens de la 1re, plus a fois ceux des deux autres; les biens de la 2e, plus b fois ceux des deux autres; les biens de la 3e, plus c fois ceux des deux autres, donnent trois sommes égales chacune à d. (Prendre $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$ et $d = 1200$.)

Trouver trois nombres proportionnels à m, n, p, et tels qu'en les augmentant respectivement de a, b, c, la somme de leurs produits deux à deux soit augmentée de d.

Trouver les deux facteurs d'un produit, de manière qu'étant proportionnels aux deux nombres a et b, si on les augmente respectivement de ces deux nombres, le nouveau produit surpasse le 1er de c. (Faire $a = 6$, $b = 4$ et $c = 48$.)

Quels sont les biens x et y de deux personnes? On sait que si elles recevaient chacune a fl., la 1re aurait m fois autant que la 2e; mais que si elles perdaient chacune b florins, la 2e aurait n fois autant que la 1re. (Prendre $a = 360$, $b = 120$, $m = 2$ et $n = 4$.)

Trouver les termes de deux fractions dont a est la somme et b la différence. On sait que c est la somme de leurs numérateurs et d celle de leurs dénominateurs.

Trouver six quantités A, B, C, D, E, F, connaissant les différences a, b, c, de B à A, de D à C, de F à E, ainsi que les rapports m, n, p, de A à C, de D à E et de F à B. (Toutes les inconnues dépendent de C. Même problème pour 8, pour n quantités.)

On a deux vases contenant chacun un mélange d'eau et de vin; on verse le c^{me} du 1er dans le 2e, puis le c^{me} du 2e dans le 1er. Alors les deux vases contiennent chacun a litrons d'eau et b de vin. Combien y avait-il d'abord d'eau dans chacun?

Il y a de l'eau dans trois vases : on verse le c^{me} de l'eau du 1er dans le 2e, puis le c^{me} de l'eau du 2e dans le 3e et le c^{me} de l'eau du 3e dans le 1er; alors les trois vases contiennent chacun a litrons d'eau : Combien y en avait-il d'abord dans chacun?

Il y a de l'eau dans trois vases : on verse dans le 1er, le n^{me} de l'eau des deux autres; dans le 2^e, le n^{me} de l'eau des deux autres; dans le 3^e, le n^{me} de l'eau des deux autres : alors les vases renferment chacun a litrons d'eau. Combien en avaient-ils d'abord chacun?

Un homme a trois espèces de vins dans trois tonneaux A, B, C, contenant le 1^{er} a litrons de vin, le 2^{me} b litrons et le 3^{me} $a+b$. Il verse la moitié des vins de A et B dans C, puis le tiers du mélange dans B et b litrons du 2^e mélange dans A. Sachant que le litron du 1^{er} mélange vaut celui du 1^{er} vin, celui du 2^e mélange un du 2^e vin, et que le litron du 2^e mélange coûte $a+b$ centimes, on demande quels sont les prix des vins proposés? (Si $a=10$ et $b=6$, le 1^{er} vin coûtera 48^c et le 3^e 6^c.)

Problèmes d'analyse indéterminée.

42. *Former la longueur du mètre en plaçant des pièces d'or de 20 francs et de 40 fr. les unes à la suite des autres et en ligne droite.*

On sait que les longueurs respectives des diamètres des pièces de 20 et de 40 fr., sont 21 et 26 millimètres; donc si l'on prend x pièces de 20 fr. et v de 40, la somme $21x+26v$ millimètres des longueurs des diamètres de ces pièces devra égaler le mètre ou 1000 millimètres. Il suffit donc de chercher les valeurs entières de x et de v qui satisfont à l'équation

$$21x+26v=1000.$$

Or, d'après la méthode tracée en algèbre, on aura successivement :

$$x=47-v+\frac{13-5v}{21},\ x=47-v+u \text{ et } u=\frac{13-5v}{21};$$

$$v=2-4u+\frac{3-u}{5},\ v=2-4u+u' \text{ et } u'=\frac{3-u}{5};$$

$$\text{d'où } u=3-5u'.$$

D'après ces valeurs, on trouve, en remontant à celles de v et de x,

$$v=21u'-10 \text{ et } x=60-26u'.$$

Ainsi le problème n'a que les deux solutions entières et positives qui répondent à $u'=2$ et $u'=1$, savoir :

$$v=32 \text{ et } x=8,\ v=11 \text{ et } x=34.$$

Par conséquent pour former la longueur du mètre avec le plus petit nombre possible de pièces de 20 fr. et de 40 fr., il faut prendre 8 pièces de 20 fr. et 32 de 40. La 2^{me} solution fournit le moyen de composer la longueur du mètre avec la plus petite somme d'argent possible.

Lorsqu'on assigne d'autres valeurs à u', l'une des inconnues x et v devient négative. Par exemple, si l'on prend $u'=3$, on aura $v=53$ et $x=-18$; ce qui indique qu'on forme la longueur du mètre en plaçant en ligne droite 53 pièces de 40 fr. les unes à la suite des autres, puis en portant 18 pièces de 20 fr. en sens contraire, en revenant de la dernière pièce de 40 fr. à la première : la distance de la dernière pièce de 20 fr. à la première de 40, est 1000 millimètres ou un mètre.

43. *Trouver de combien de manières on peut remplir l'espace autour d'un point sur un plan, en y réunissant l'angle d'un carré avec les angles de deux autres polygones réguliers.*

Soit d l'angle droit; on sait que les angles de deux polygones réguliers, ayant l'un x et l'autre v côtés, valent respectivement

$$\frac{2d}{x}(x-2) \quad \text{et} \quad \frac{2d}{v}(v-2).$$

Et comme l'espace autour d'un point vaut $4d$, il s'ensuit que

$$d+\frac{2d}{x}(x-2)+\frac{2d}{v}(v-2)=4d;\ \text{d'où}\ xv=4x+4v.$$

Cette équation donne $x=\dfrac{4v}{v-4}=4+\dfrac{16}{v-4}$:

donc, pour que x soit un nombre entier positif, il faut que $v-4$ soit un des diviseurs positifs de 16. Prenant donc successivement

$$\begin{aligned} v-4&=1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\\ \text{on aura}\quad v&=5,\ 6,\ 8,\ 12,\ 20,\\ x&=20,\ 12,\ 8,\ 6,\ 5. \end{aligned}$$

On voit que les valeurs de x sont, dans un ordre inverse, les mêmes que celles de v; ce qui doit être, puisque l'équation du problème est *symétrique* par rapport à x et v, c'est-à-dire ne change pas en y mettant x à la place de v et v à la place de x. On ne doit donc considérer que les trois premiers systèmes de valeurs; et il en résulte, qu'on peut remplir l'espace autour d'un point sur un plan, en y réunissant l'angle d'un carré, 1° avec l'angle d'un pentagone et celui d'un polygone régulier de 20 côtés; 2° avec l'angle d'un hexagone et celui d'un dodécagone régulier; 3° enfin, avec deux angles d'un octogone régulier.

44. *Trois femmes portent au marché, l'une 10 perdrix, l'autre 25 et la 3^me 30. Ayant vendu de leurs perdrix à un certain prix, elles vendent le reste à un autre prix, et rapportent chacune la même somme d'argent. Combien ont-elles vendu de perdrix chacune à chaque prix, et quels sont ces prix?*

Soit u le 1^er prix, v le 2^e et x, t, s les nombres de perdrix vendues respectivement par les trois femmes au 1^er prix; les nombres de perdrix vendues au 2^me prix, sont respectivement $10-x$, $25-t$ et $30-s$. On n'aura donc que deux équations différentes, que l'on peut écrire comme il suit :

$$t=x-\frac{15v}{u-v} \quad \text{et} \quad s=x-\frac{20v}{u-v}.$$

Comme x ne saurait surpasser 10, on ne peut supposer $u-v=v$; il faut donc que $u-v$ divise 15 et 20, sans quoi t et s ne pourraient être des nombres entiers. Mais 5 est le seul nombre >1 qui divise 15 et 20; on doit donc avoir $u-v=5$, puis $t=x-3v$ et $s=x-4v$. Enfin, à cause que x ne saurait surpasser 10, v ne peut avoir que les deux valeurs 1 et 2. De là résulte donc que le problème n'est susceptible que des 10 solutions que voici :

1° pour $v=1$, qui donne $u=6$, on aura $x=4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$,
$t=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ et $s=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$;

2° pour $v=2$, qui fournit $u=7$, il vient $x=8, 9, 10$,
$t=2, 3, 4$ et $s=0, 1, 2$.

45. *Une montre marque les heures, les minutes et les secondes; les trois aiguilles sont sur la 12^e heure; il s'agit de trouver les rencontre deux à deux et trois à trois de ces aiguilles.*

Le cadran étant divisé en 60 parties égales, il est clair que pendant une heure, les aiguilles parcourent respectivement 5, 60 et 3600 de ces divisions. Or, pour que deux aiguilles se rencontrent, il faut et il suffit que la distance parcourue par l'une soit égale à celle que l'autre aiguille a parcourue dans le même temps, plus un nombre exact de circonférences. Si donc x désigne le nombre d'heures employées par la 2^e aiguille pour atteindre la 1^re, et que n soit un nombre entier positif quelconque, on aura

$$60x=5x+60n.$$

De même, t et s étant les nombres respectifs d'heures employées par la 3^{me} aiguille, pour rencontrer la 1re et la 2^{me}, il viendra

$$3600t = 5t + 60n' \text{ et } 3600s = 60s + 60n''.$$

On tire de ces trois équations

$$x = \frac{12n}{11}, \quad t = \frac{12n'}{719} \quad \text{et} \quad s = \frac{12n''}{708}.$$

Il est visible qu'une aiguille qui va plus vîte qu'une autre, l'a rencontrée autant de fois qu'elle a décrit de circonférences de plus qu'elle, dans le même temps ; de sorte que la 2^{me} aiguille rencontre n fois la 1re, dans un temps marqué par la valeur précédente de x ; et ainsi des autres.

Maintenant, puisque la 2^{me} aiguille rencontre la 1re dans un temps x, et que la 3^{e} rencontre aussi la 1re dans un temps t, il est évident que les deux dernières aiguilles seront au-dessus de la 1re, dès que les temps x et t seront égaux. Par conséquent la rencontre des trois aiguilles est réduite à trouver les valeurs entières et positives de n et n' qui satisfont à l'équation

$$\frac{12n}{11} = \frac{12n'}{719}, \quad \text{ou} \quad n = \frac{11n'}{719}.$$

Or, ces valeurs de n et n' sont données par les deux formules

$$n' = 719v \text{ et } n = 11v\text{; d'où } x = 12v.$$

Ainsi, la 1re rencontre des trois aiguilles aura lieu dans 12 heures, l'aiguille des minutes aura rencontré 11 fois celle des heures, l'aiguille des secondes aura rencontré 719 fois celle des heures et 708 fois celle des minutes.

46. L'analyse indéterminée peut s'appliquer à la construction des *carrés magiques*, ainsi nommés, parce que les anciens leur attribuaient de grandes vertus, et que la disposition des nombres qui composent ces carrés, formait la base et le principe de plusieurs de leurs talismans.

On appelle carré magique, un carré divisé en plusieurs autres petits carrés égaux, dans lesquels se trouvent des nombres tels, que ceux de chaque bande, soit horizontale, soit verticale, soit diagonale, donnent toujours la même somme ou le même produit.

47. Considérons, par exemple, un carré divisé en neuf carrés

égaux ; il s'agit de placer dans chacun de ces carrés, un nombre tel, que les trois nombres qui composent chaque bande horizontale, verticale et diagonale, donnent une somme constante n. On aura donc les huit équations que voici :

g	h	i
d	e	f
a	b	c

$$a+b+c=n$$
$$d+e+f=n$$
$$g+h+i=n$$
$$a+d+g=n$$
$$b+e+h=n$$
$$c+f+i=n.$$
$$a+e+i=n$$
$$c+e+g=n.$$

Eliminant entre ces équations, prises deux à deux, ce qui peut se faire de plusieurs manières, on trouvera toujours des résultats qui fourniront les mêmes conséquences. Par exemple, si l'on élimine d'abord i, puis f, c, e, h, d, on trouvera les valeurs que voici :

$$b=\tfrac{1}{3}n+g-a,\ d=n-a-g,\ h=\tfrac{1}{3}n+a-g,\ e=\tfrac{1}{3}n,$$
$$c=\tfrac{2}{3}n-g,\ i=\tfrac{2}{3}n-a \text{ et } f=a+g-\tfrac{1}{3}n.$$

Il existe une infinité de carrés magiques qui satisfont aux conditions demandées, car les trois quantités a, g, n peuvent être prises à volonté, pourvu cependant qu'il n'en résulte pas de nombres fractionnaires, ni de nombres négatifs. Par exemple, les trois hypothèses $n=15$, $a=4$ et $g=2$, puis $n=24$, $a=3$ et $g=7$, enfin $n=33$, $a=7$ et $g=6$, fournissent les trois carrés magiques qui suivent :

2	7	6
9	5	1
4	3	8

7	4	13
14	8	2
3	12	9

6	12	15
20	11	2
7	10	16

48. Proposons-nous maintenant de placer, dans chacun des 9 carrés qui composent le carré primitif, un nombre tel, que le produit des trois nombres qui forment chaque bande horizontale, verticale et diagonale, soit un nombre constant n. Il est clair qu'on aura à traiter en nombres entiers les huit équations que voici :

$$abc=n,\ def=n,\ ghi=n,\ adg=n,$$
$$beh=n,\ cfi=n,\ aei=n,\ ceg=n.$$

Prenant les valeurs de f, d, e, i, h, g, on trouvera

$$c=\frac{n}{ab},\ d=\frac{n}{a^2b}\sqrt[3]{n},\ e=\sqrt[3]{n},\ f=\frac{a^2b}{n}\sqrt[3]{n},$$

$$g=\frac{ab}{n}\sqrt[3]{n^2},\ h=\frac{1}{b}\sqrt[3]{n^2}\ \text{et}\ i=\frac{1}{a}\sqrt[3]{n^2}.$$

On voit que les nombres a, b, n sont arbitraires; il faudra seulement les choisir tels que toutes les valeurs soient des nombres entiers. Par exemple, on peut faire les trois suppositions, 1° $a=4$, $b=9$ et $n=1728=(12)^3$; 2° $a=8$, $b=256$ et $n=4096=(16)^3$; 3° $a=6$, $b=100$ et $n=27000=(30)^3$; il en résultera les trois carrés magiques que voici :

3	16	36
144	12	1
4	9	48

128	1	32
4	16	64
8	256	2

20	9	150
225	30	4
6	100	45

49. Les exemples précédens suffisent pour montrer comment on construirait des carrés magiques d'un plus grand nombre de petits carrés; on peut consulter à ce sujet le premier volume des Récréations mathématiques et physiques d'Ozanam. Voici encore trois carrés magiques :

20	28	1	9	17
27	5	8	16	19
4	7	15	23	26
11	14	22	25	3
13	21	29	2	10

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

1	63	62	4
60	6	7	57
8	58	59	5
61	3	2	64

50. *Déterminer deux nombres entiers* x *et* y, *dont la somme des carrés soit aussi un carré.*

L'identité $(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(a^2+b^2)^2$ satisfait à cette condition, en prenant $x=a^2-b^2$, $y=2ab$ et $z=a^2+b^2$; car alors on aura

$$x^2+y^2=z^2,$$

quelques valeurs qu'on donne aux deux nombres a et b; de sorte que si on ne prend pour a et b que des nombres entiers, x, y, z seront entiers pareillement. Par exemple, si on fait successivement

$$a=2,\ 3,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 6,\ 6,\ 7,\ 7,\ 7,\ 8,\ 8,\ 8,\ 8,\ 9,\ 9,\ 9,\ \ldots$$
$$b=1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 4,\ 1,\ 5,\ 2,\ 4,\ 6,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 2,\ 4,\ 8,\ \ldots$$

il viendra successivement

$$x=3,\ 5,15,\ 7,21,\ 9,35,11,45,33,13,63,55,39,\ 15,77,65,\ 17,\ldots$$
$$y=4,12,\ 8,24,20,40,12,60,28,56,84,16,48,80,112,36,72,144,\ldots$$
$$z=5,13,17,25,29,41,37,61,53,65,85,65,73,89,113,85,97,145,\ldots$$

Et comme on a aussi $z^2-y^2=x^2$, ces valeurs résolvent aussi le problème où l'on demanderait deux carrés entiers, dont la différence fût un carré entier.

51. *Trouver deux carrés entiers dont la différence soit un nombre entier donné.* Il s'agit de résoudre en nombres entiers l'équation $x^2-y^2=a$. Pour cela, il suffira de prendre $x=y+z$; car alors on aura

$$y=\frac{a-z^2}{2z} \quad \text{et} \quad x=\frac{a+z^2}{2z}.$$

Il ne reste plus qu'à choisir z de manière que ces deux valeurs soient des nombres entiers. Par exemple, si l'on prend successivement

$$\begin{array}{rl} & a= 12,\ 15,\ 24,\ 35,\ 48,\ 63,\ \ldots \\ & z= 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7;\ \ldots \\ \text{on aura} & y= 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots \\ & x= 7,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ \ldots \end{array}$$

De là il est facile de trouver des nombres entiers pour u et v, dans les deux équations $x\pm a=u^2$ et $x\pm b=v^2$, ou dans les deux $a-x=u^2$ et $b-x=v^2$, a et b étant entiers : il suffira de retrancher ou d'ajouter ces équations.

52. Si l'on voulait trouver pour x et y des valeurs rationnelles propres à rendre un carré parfait le binome x^2+my^2, ou le trinome $x^2-2mxy+ny^2$, il faudrait égaler ce binome ou ce trinome à $(x+u)^2$, et résoudre l'équation résultante par rapport à x.

53. Pour donner à x et y des valeurs rationnelles propres à rendre des carrés parfaits les deux quantités mx^2+nxy et $(mx+ny)(m'x+n'y)$, on égalera la première à $\frac{p^2}{q^2}x^2$ et la deuxième à $\frac{p^2}{q^2}(mx+ny)^2$.

54. Considérons le trinome $ax^2+bxy+cy^2$, et prenons $x=y+z$ et $a+b+c=m^2$; nous le réduirons ainsi à $m^2y^2+(2a+b)yz+az^2$. Egalant ce dernier trinome à $(my+u)^2$, on verra qu'on peut toujours trouver pour x et y des valeurs rationnelles capables de rendre le premier trinome proposé, un carré, pourvu que $a+b+c$ soit le carré d'un nombre m, comme cela a lieu dans chacun des polynomes : $2x^2+2y^2$, $2x^2-y^2$, $3x^2+6xy+7y^2$, $7x^2-3xy+5y^2$.

55. Si l'on veut résoudre en nombres rationnels, l'équation $x^2+y^2=a^2+b^2$, il suffira de prendre

$$a-x=\frac{v}{u}(y-b);\ \text{d'où}\ a+x=\frac{u}{v}(y+b).$$

Ces deux équations feront connaître les valeurs cherchées de x et de y, en fonctions des arbitraires u et v et des nombres donnés a et b.

56. Pour avoir les valeurs de t et de v qui rendent x et y rationnels dans les deux équations

$$x^2\pm a(x+y)=t^2\ \text{et}\ y^2\pm b(x+y)=v^2,$$

on posera $t=x+z$ et $v=y+u$.

57. S'il faut trouver les valeurs de v qui rendent l'inconnue x rationnelle dans chacune des équations

$$x^2=a^2v^2+b,\ x^2=av^2+b^2\ \text{et}\ x^2=(av+b)(a'v+b'),$$

on fera $x=av+u$ dans la première, $x=uv+b$ dans la deuxième, et $x=u(av+b)$ dans la troisième.

58. Nous ne pousserons pas plus loin la recherche des valeurs rationnelles des inconnues dans les équations indéterminées d'un degré supérieur au premier, parce que cette recherche est une des plus difficiles de l'analyse algébrique. Nous renvoyons pour cet objet, au 2ᵉ volume de l'Algèbre d'Euler, enrichie de notes par Lagrange, ainsi qu'à la théorie des nombres de M. Legendre, et aux recherches arithmétiques de M. Gauss.

59. Voici quelques problèmes faciles à résoudre, d'après ce qui précède :

Un laboureur doit 400ᶠ. N'ayant point d'argent, il offre en paiement des brebis à 14ᶠ pièce et des agneaux à 10ᶠ. De combien de manières peut-il acquitter sa dette? (R. De cinq manières.)

Trouver en nombres entiers les côtés d'un rectangle, dont la surface contienne 4 fois autant de mètres carrés que son contour contient de mètres. (Quatre solutions.)

De combien de manières peut-on remplir l'espace autour d'un point avec l'angle d'un triangle équilatéral et les angles de deux autres figures régulières? (De cinq manières.)

Trouver en nombres entiers les côtés d'un rectangle qui soit à un carré dont le côté vaut 12, comme le contour du premier est au contour du deuxième. (Quatre rectangles.)

Le côté d'un cube est 8; on demande, en nombres entiers, les dimensions d'un parallélipipède rectangle, à base carrée, de manière que sa capacité et celle du cube soient entre elles comme leurs surfaces? (Quatre solutions.)

Trouver en nombres entiers les dimensions d'un parallélipipède rectangle à base carrée, dont la capacité vaut 5 fois autant de mètres cubes que sa surface contient de mètres carrés. (Douze solutions.)

Une marchande modiste a échangé du mérinos à 8^f la robe contre des chapeaux de paille à 19^f et a donné 43^f de retour. De combien de manières a-t-elle pu varier son marché?

Pour 1964^f on achète 100 bêtes, savoir : des veaux à 24^f pièce, des chèvres à 20 et des moutons à 18. Combien aura-t-on de bêtes de chaque espèce?

On a des vins à 50, à 80, à 100 et à 150 cents le litron. Trouver en nombres entiers le nombre de litrons de chaque espèce qu'il faut prendre pour former un mélange de 100 litrons, coûtant 90 florins en tout.

Un nombre multiple de 3 et compris entre 100 et 300, étant divisé par 7, donne 1 pour reste; mais si on le divise par 10, il restera 6. Quel est ce nombre?

Trente pauvres reçoivent 50 cents, à raison de 3 cents par homme, de 2 par femme et de 1 par enfant. Combien y a-t-il d'hommes, de femmes et d'enfans?

Un étourdi passant sur un pont, fit tomber dans l'eau une corbeille d'œufs qu'une femme portait au marché. Obligé de donner 2 centimes par œuf, il demanda combien il y en avait dans la corbeille? La femme répondit : je ne me souviens pas bien du nombre; mais je sais qu'il est entre 100 et 150, et qu'en comptant les œufs par 2, il en restait 1; par 3, il en restait 2; par 4, il en restait 3; par 5, il en restait 4; par 6, il en restait 5, et par 7, il n'en restait point. Quel est ce nombre d'œufs?

Trouver deux nombres entiers tels, qu'en ajoutant l'un au carré de l'autre, les deux sommes soient des carrés.

Trouver un nombre entier tel, que le carré de son double plus 3 fois ce nombre cherché, donne un carré parfait.

Trouver un nombre entier dont le triple carré augmenté de 16, donne un carré.

Trouver un nombre tel, qu'en y ajoutant 19, la somme soit un carré parfait.

Trouver deux nombres entiers tels, que la somme de leurs carrés, plus 7 fois leur produit, donne un nombre carré.

De quelques équations résolubles comme celles du second degré.

60. Lorsqu'on a deux équations du second degré, à deux inconnues, il faut, pour éviter les radicaux dans l'élimination

d'une inconnue, commencer par faire disparaître le carré de cette inconnue; prendre ensuite la valeur de la même inconnue, dans le résultat, et substituer cette valeur dans l'une des équations proposées. Mais dans ce cas, l'équation finale pourra être du quatrième degré; il faudra donc, pour pouvoir la résoudre d'après les méthodes des deux premiers degrés, la ramener à une équation du second; ce qui n'est possible que dans quelques cas particuliers, que nous allons examiner.

61. Considérons d'abord les deux équations

$$x^2-xv+v^2=7 \text{ et } 2x^2-2v^2=16-xv.$$

Pour appliquer la règle que nous venons d'indiquer, on retranche la 2e équation du double de la 1re, et il vient

$$4v^2-3xv=-2;\ \text{d'où}\ x=\frac{4v^2+2}{3v}.$$

Substituant cette valeur dans la première équation proposée, on trouve, toute réduction faite,

$$13v^4-53v^2=-4.$$

Cette équation finale se résoudra comme celles du second degré, en y prenant v^2 pour inconnue : on trouvera ainsi

$$v^2=4 \text{ et } v^2=\tfrac{1}{13};$$

d'où il sera facile de tirer les quatre couples de valeurs de x et de v.

On résoudra de même chacun des groupes d'équations

$x^2-v^2=7$ et $x^2+v^2+xv=37$,

$x^2+xv=a$ et $x^2-v^2=b$,

$x+z=2v$, $v+u=2z$, $vz=a$ et $x^2+u^2=b$,

$x+z=2v$, $v+u=2z$, $vz=a$ et $ux=b$.

62. En général, lorsque l'équation finale est de la forme

$$x^{2n}+px^n=q,$$

on doit prendre x^n pour inconnue; ou bien poser $x^n=u$, ce qui donne $x^{2n}=u^2$ et $u^2+pu=q$. Cette équation faisant connaître les deux valeurs u' et u'' de u, on aura les valeurs de x par les équations $x^n=u'$ et $x^n=u''$. C'est ainsi qu'on résoudra l'équation finale dans

$$x^4-4v^4=17 \text{ et } xv=6.$$

63. Soit à résoudre les deux équations

$$xy = ax + ay \quad \text{et} \quad x^2 = a^2 + y^2.$$

Si l'on prend la valeur de y dans la 1re de ces équations et qu'on substitue cette valeur dans la 2^{me}, on obtiendra

$$x^4 - 2ax^3 - a^2x^2 + 2a^3x = a^4.$$

Cette équation finale du 4^{me} degré est *complète*; mais en extrayant la racine carrée de son 1er membre, on a $x^2 - ax - a^2$ pour racine et $-a^4$ pour reste. D'où il suit que si l'on avait d'abord ajouté a^4 aux deux membres de l'équation finale; $+a^4$ et $-a^4$ se seraient détruits dans l'extraction de la racine carrée du 1er membre de la nouvelle équation, et cette racine carrée aurait été exactement $x^2 - ax - a^2$: d'ailleurs, celle du second membre $2a^4$ est $a^2\sqrt{2}$; par conséquent

$$x^2 - ax - a^2 = \pm a^2\sqrt{2}; \text{ d'où } x = \frac{a}{2}\left(1 \pm \sqrt{5 \pm 4\sqrt{2}}\right).$$

64. Il suit de cet exemple, que *quand l'équation finale du 4^{me} degré, est complète, si l'on extrait la racine carrée de son premier membre, et que le reste soit indépendant de l'inconnue, la racine trouvée sera égale à $\pm$ la racine carrée du résultat qu'on obtient en ajoutant au second membre, le reste pris avec un signe contraire.* On aura donc alors une équation du second degré, qu'on sait résoudre.

C'est ainsi qu'on traitera l'équation finale dans chacun des systèmes d'équations que voici :

$x + y = a$ et $x^4 + y^4 = b$,
$x - y = a$ et $x^5 - y^5 = b$,
$x + y = a$ et $x^4 + y^4 - x^2y^2 = b$,
$y - x = a$ et $x^2y^2 + b(x^2 + y^2) = c$,
$x + y = a$, $u + z = b$, $ux = yz$ et $x^4 + y^4 + z^4 + u^4 = c$.

65. Supposons maintenant que l'équation finale soit de la forme

$$x^4 + px^3 + qx^2 + prx + r^2 = 0,$$

p, q, r, ayant des signes quelconques, mais x^4 et r^2 étant positifs. Si l'on divise les deux membres de cette équation par x^2, elle devient

$$x^2 + \frac{r^2}{x^2} + p\left(x + \frac{r}{x}\right) + q = 0.$$

Posant $x+\frac{r}{x}=u$; d'où $x^2+\frac{r^2}{x^2}=u^2-2r$, on aura

$$u^2+pu+q-2r=0.$$

Cette équation du second degré fera connaître les deux valeurs u' et u'' de u. Substituant ces valeurs, on aura celles de x par les équations

$$x+\frac{r}{x}=u' \text{ et } x+\frac{r}{x}=u''.$$

Au moyen de cette méthode, on résoudra non seulement les deux équations

$$x^4-6x^3+24x+16=0,$$
$$x^4-14x^3+58x^2-70x+25=0;$$

mais de plus, on trouvera toutes les racines des équations $x^5-a^5=0$ et $x^5+a^5=0$, en observant que la 1re est le produit d'un quintinome en x par $x-a$ et la seconde par $x+a$.

66. Dans les deux équations

$$ax=cv-xv \text{ et } x^2=a^2+v^2,$$

l'élimination de v conduit à une équation finale du quatrième degré, résoluble par extraction de racine carrée (64). Si on élimine x, l'équation finale du quatrième degré, se résoudra en divisant ses deux membres par v^2 (65).

On voit que le choix de l'inconnue peut influer sur l'équation finale. Mais ce qui est très-remarquable, c'est que la possibilité de résoudre l'équation finale peut dépendre de la manière d'éliminer les inconnues. En effet, qu'on ait, par exemple, les deux. équations

$$xv+x+v=4,$$
$$x^2+v^2+x+v=10.$$

Pour opérer l'élimination, on est naturellement porté à prendre la valeur de v dans la 1re et à substituer cette valeur dans la 2me. Or, en opérant ainsi, on obtient l'équation finale

$$x^4+3x^3-7x^2-24x+10=0;$$

et cette équation ne saurait se résoudre par aucune des méthodes exposées dans ce qui précède; pas même par celle *des diviseurs commensurables*. Mais en suivant une autre marche dans l'élimination, on arrive aisément aux valeurs inconnues.

En effet, si à la 2^{me} équation proposée, on ajoute le double de la 1re, l'équation résultante prendra la forme

$$(x+v)^2+3(x+v)=8;\ \text{d'où}\ x+v=-\tfrac{3}{2}\pm\tfrac{9}{2};$$

et par conséquent $x+v=3$ et $x+v=-6$. Combinant chacune de ces valeurs de $x+v$ avec la première équation proposée, on en déduira facilement les 4 couples de valeurs de x et de v, lesquelles sont irrationnelles et imaginaires.

67. Cet exemple montre très-bien que la manière d'éliminer les inconnues peut influer sur le degré de l'équation finale et sur la simplicité des résultats. C'est de quoi l'on se convaincra encore en résolvant les équations

$$xz=ac,\ vz-cv=ac\ \text{et}\ x^2+v^2=c^2.$$

En effet, l'élimination de x et de v conduit à une équation finale du 4^e degré en z, résoluble par extraction de racine carrée. Mais si on élimine z entre les deux premières, et que dans l'équation résultante, on prenne la valeur de v, pour la substituer dans la 3^e équation proposée, l'équation finale du 4^e degré ne sera pas résoluble, d'après ce qui précède. Enfin, comme l'élimination de z donne $xv=a(v-x)$, si l'on retranche le double de cette équation de la 3^e proposée, il viendra

$$(v-x)^2+2a(v-x)=c^2.$$

Cette équation fournit pour $v-x$, deux valeurs qui étant combinées avec $xv=a(v-x)$, donnent les quatre valeurs de x et de v.

68. Les exemples précédens font voir que l'élimination par addition et soustraction, simplifie souvent la résolution des équations du second degré à plusieurs inconnues, et que cette méthode est généralement préférable à la substitution des valeurs. Voici des équations à traiter par addition et soustraction :

$x^2+y^2+xy=100$ et $xy+x-y=19$,
$x^2+y^2+z^2=29$, $yz=12$ et $x(z-y)=2$,
$x+y=a$, $bz=xy$ et $x^2+y^2=z^2$,
$(x+y)xy=a$ et $(x+y)(x^2+y^2)=b$,
$(x+y)(x^2+y^2)=a$ et $(x-y)(x^2-y^2)=b$,
$x(a-x)=y(b-y)$ et $2x(x-a)=y^2-a^2$,
$x+y+z=a$, $x^2+y^2+z^2=h$ et $xy-(x+y)z=c$.
$x+y+z+a=b$, $xy=az$ et $x^2+y^2=a^2$.

Dans le dernier exemple, si l'on élimine z entre les deux 1res équations, puis y par substitution, entre le résultat et la 3^{me}, l'equàtion finale du 4^{me} degré, ne se résoudra qu'en la comparant au carré du trinome $x^2+ax+ab$.

69. Lorsque tous les termes de l'équation finale du 4^e degré sont dans le premier membre comme dans

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0,$$

et que le terme connu $s=hk$, on peut regarder ce 1er membre comme le produit des deux facteurs trinomes

$$x^2+ux+h \text{ et } x^2+tx+k.$$

De cette manière, on pose une identité qui exige que les coefficiens d'une même puissance de x soient égaux dans les deux membres, et que par suite ont ait, entre les deux inconnues u et t, les trois équations

$$u+t=p,\ ht+ku=r \text{ et } tu+h+k=q.$$

Si les valeurs des inconnues, tirées des deux 1res équations, satisfont à la 3^e, l'équation du 4^e degré sera le produit des deux facteurs trinomes proposés. Mais si les valeurs de u et t ne satisfont pas à la 3^e condition, il faudra décomposer s en deux autres facteurs, positifs ou négatifs, et prendre ces facteurs pour h et k. On voit que cette méthode peut donner lieu à plusieurs essais inutiles; mais le nombre en diminuera avec celui des diviseurs de s. Au reste, on peut souvent suppléer à la méthode précédente, par la manière d'éliminer les inconnues. Par exemple, voici deux équations qui se résolvent aisément par addition et soustraction :

$$x^2+v^2-x-v=8 \text{ et } x^2+xv+v^2=19.$$

Eliminant v, d'après la méthode du n° 60, l'équation finale sera

$$x^4+x^3-7x^2-49x+102=0.$$

On peut résoudre cette équation, en la décomposant en facteurs trinomes; car à cause de $102=17\times 6$, on trouve que ces deux facteurs sont $x^2-6x+17$ et x^2-5x+6. Egalant donc chacun de ces trinomes à zéro, l'équation finale sera satisfaite, et on aura aisément les quatre valeurs de x et de v.

On peut appliquer cette méthode à la résolution des équations finales

$$x^4+12x^3+35x^2+6x-9=0,$$

$$x^4-x^3-31x^2+25x+150=0,$$

$$x^4-2bx^3+(a^2+b^2)x^2-(2a^2b+2ab^2)x+a^4-b^4=0.$$

70. Il existe dans la manière d'éliminer les inconnues, des simplifications accidentelles, qu'il serait impossible d'indiquer en général ; mais que l'habitude du calcul algébrique fait bientôt apercevoir. Par exemple, dans les équations

$$xy^3 + y^2 = 36 \text{ et } x^3y + x^2 = 144,$$

il faudra diviser la seconde par la première et mettre $xy + 1$ en facteur commun. Dans les deux équations

$$(x + y)\,xy = a \text{ et } (x^2 + y^2)\,xy = b(x + y),$$

on multipliera la seconde par xy et on aura égard à la première.

Les équations $(x^2 + y^2)(x + y) = a$ et $(x^4 - y^4)(x^2 - y^2) = b$, se résolvent par division, addition et soustraction, de même que $xy(x - y) = a$ et $x^2y^2(x^2 - y^2) = b$.

71. Si l'on a les deux équations

$$x^2 + 2xy + y^2 - 10x - 10y + 21 = 0,$$
$$x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 6y + 5 = 0,$$

on observera que la première peut se résoudre immédiatement par rapport à $x + y$ et la seconde par rapport à $x - y$. Si on avait

$$x^3 + 2x^2y + 2xy^2 - 4xy + y^2 - 4 = 0,$$
$$x^2 + 2xy + 2y^2 - 5y + 2 = 0,$$

on soustrairait la 1re de la 2e multipliée par x, et l'on aurait

$$xy - 2x + y^2 - 4 = 0, \text{ ou } (y - 2)(x + y + 2) = 0.$$

Cette équation est satisfaite par $y - 2 = 0$ et par $x + y + 2 = 0$. Combinant chacune de ces dernières équations avec la seconde proposée, on trouvera $x = 0$ et $y = 2$, $x = -4$ et $y = 2$, $x = -5$ et $y = 3$.

72. Dans les deux équations

$$x^4 + y^4 + 2xy = 109 \text{ et } x^2 + y^2 = 13,$$

on retranche la 1re du carré de la 2e et l'on prend xy pour inconnue, dans l'équation résultante. On opère de même sur les deux équations $(x^2 + y^2)\,x^2y^2 = 2900$ et $(x + y)\,xy = 70$, ainsi que sur les deux $x + y - \sqrt{xy} = 7$ et $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 5$.

73. Voici encore plusieurs systèmes d'équations à résoudre :

$$xy = a \text{ et } x^5 + y^5 + b(x^3 + y^3) = c(x + y),$$

$$\begin{array}{l|c|c}
xyz + xy - y = a & x + y = az & x + y = az \\
xyz - xy + y = b & xy = z^2 & xy = z^2 \\
xy + y - xyz = c & x^4 + y^4 + z^4 = b & x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = b.
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l}
xyz = zuv & uvxyz = 5681 & y^4 + z^4 + u^4 = 353 \\
yzu = avx & 2u = v + x + y + z & x + y + z = \frac{3}{2}u \\
zuv = bxy & 3v = u + x + y + z & \\
uvx = cyz & 4x = u + v + y + z & x + y + u = \frac{7}{3}z \\
vxy = duz & 5y = u + v + x + z & x + u + z = 4y
\end{array}$$

74. Considérons encore les deux équations

$$xy + a = b\sqrt{1 + x^2} \quad \text{et}$$

$$\left[y - \frac{ax + c}{\sqrt{1 + x^2}}\right]^2 + \left[a - \frac{a - cx}{\sqrt{1 + x^2}}\right]^2 = d^2.$$

Développant la seconde équation et substituant la valeur de $\sqrt{1 + x^2}$, tirée de la première, on aura, en réduisant,

$$y^2 + 2a^2 + c^2 - 2ab - 2bc\frac{y - ax}{xy + a} = d^2.$$

Substituant, dans cette équation, la valeur de x, tirée de la première proposée, et réduisant, on obtiendra

$$y^2 + 2a^2 + c^2 - 2ab - 2c\frac{b^2y - y^3 - a^2y \mp ab\sqrt{y^2 + a^2 - b^2}}{ab \pm y\sqrt{y^2 + a^2 - b^2}} = d^2$$

A cause de $b^2y - y^3 - a^2y = -y(y^2 + a^2 - b^2)$, on voit que le numérateur est divisible par le dénominateur. De sorte que si l'on chasse ce dénominateur et qu'on transpose dans le premier membre, celui-ci sera le produit des deux facteurs

$$ab \pm y\sqrt{y^2 + a^2 - b^2} \quad \text{et}$$
$$y^2 + 2a^2 + c^2 - 2ab - d^2 \pm 2c\sqrt{y^2 + a^2 - b^2}.$$

Egalant donc chacun de ces facteurs à zéro, l'équation finale sera satisfaite, et on aura deux équations qui feront connaître les valeurs de y; d'où l'on aura ensuite celles de x. La dernière de ces deux équations pourra même se mettre sous la forme

$$\left(c \pm \sqrt{y^2 + a^2 - b^2}\right)^2 = d^2 - (a - b)^2;$$

il sera donc facile de la résoudre. On peut traiter l'équation

$$\frac{x^2}{a} = \sqrt{x^2 - \frac{a^4}{x^2}} + \sqrt{a^2 - \frac{a^4}{x^2}}.$$

75. Lorsque deux inconnues entrent de la même manière dans les équations proposées, on obtient presque toujours une équation finale d'un degré moins élevé, en remplaçant ces inconnues par d'autres qui en dépendent également, telles que leur demi-somme, leur demi-différence, leur produit, la somme de leurs carrés, une moyenne proportionnelle entre elles, etc. C'est ce qu'on peut voir sur plusieurs des équations traitées dans ce qui précède; et c'est d'ailleurs ce que nous allons établir directement par des exemples. Soient d'abord les deux équations

$$(x+v)(x^2+v^2)=a,$$
$$(x^2+v^2)(x^4+v^4)=b.$$

On voit que les inconnues x et v entrent de la même manière dans ces deux équations; il faut donc remplacer x et v par d'autres inconnues, et faire, par exemple,

$$x+v=\varphi \text{ et } x^2+v^2=\omega; \dots (1)$$

d'où en élevant au carré de part et d'autre,

$$2xv=\varphi^2-\omega \text{ et } x^4+v^4=\omega^2-\tfrac{1}{2}(\varphi^2-\omega)^2.$$

Substituant ces valeurs, les équations proposées deviennent

$$\varphi\omega=a \text{ et } \tfrac{1}{2}\omega(\omega^2+2\varphi^2\omega-\varphi^4)=b.$$

Eliminant φ, l'équation finale prend la forme

$$\omega^6-2(b-a^2)\omega^3=a^4.$$

Cette équation peut se résoudre en prenant d'abord ω^3 pour inconnue (62); on connaîtra donc ω et φ. Avec ces valeurs les équations (1) déterminent x et v.

Par exemple, si $a=65$ et $b=1261$, on aura

$$\omega^6-2(2964)\omega^3=17850625;$$

d'où en se bornant aux valeurs réelles, $\omega=13$, $\varphi=5$, $x=3$ et $v=2$.

Sans l'usage des inconnues auxiliaires φ et ω, il serait impossible de résoudre les équations proposées, d'après ce qui précède.

76. On apprendra bien vîte à connaître dans quels cas les inconnues cherchées pourront être remplacées par d'autres plus faciles à déterminer. Par exemple, dans les équations

$$x+y+z=a,\quad xz+y=b \text{ et } x^3+y^3+z^3=c,$$

il faudra poser $x+y=2\varphi$ et $x-y=2\omega$.

Dans les équations $xy = 216$ et $\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{y^4} = 97$, on prendra $x^4 = \varphi^3$ et $y^4 = \omega^3$. Dans les équations $x + y = 72$ et $\sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{xy^2} = 48$, on fera $x = \varphi^3$ et $y = \omega^3$.

Pour les équations $xy = uz$, $x + y = 2a$, $u + z = 2b$ et $x^4 + y^4 - u^4 - z^4 = c$, on posera $x - y = 2\varphi$ et $u - z = 2\omega$; ou bien on prendra seulement $xy = t$.

77. Dans chacun des groupes d'équations

$$\begin{array}{l|l|l} x + y = az & x + y + z = a & x + y - z = a \\ x^2 + y^2 = z^2 & x^2 + y^2 = z^2 & x^2 + y^2 = z^2 \\ x^4 + y^4 + z^4 = b & x^3 + y^3 + z^3 = b & xy + xz + yz = b, \end{array}$$

on fera $x + y = 2\varphi$ et $x - y = 2\omega$. Il faudra prendre $x + y = 2\varphi$ et $xy = \omega$, dans les deux systèmes :

$$\begin{array}{l|l} xy = uz & xy = uz \\ x + y + u + z = a & x + y + u + z = a \\ x^2 + y^2 + u^2 + z^2 = b & x^2 + y^2 + u^2 + z^2 = b \\ x^4 + y^4 + u^4 + z^4 = c & x^3 + y^3 + u^3 + z^3 = c. \end{array}$$

Problèmes résolubles comme ceux du second degré.

78. *Trois tuyaux coulant ensemble dans un bassin, le remplissent en 6 heures. Si chaque tuyau coulait seul, le second remplirait le bassin dans les 3 quarts du temps employé par le 1^er^ seul, et le 3^e^ mettrait 10 heures de plus que le 2^e^. Quel temps chaque tuyau serait-il seul pour remplir le bassin?*

Soit x le temps employé par le 1^er^ seul; $\frac{3x}{4}$ sera donc le temps employé par le 2^me^ seul, et $\frac{3x}{4} + 10$ ou $\frac{1}{4}(3x + 40)$ celui employé par le 3^e^. Soit c la capacité du bassin : puisque le 1^er^ tuyau verse c unités d'eau en x heures, en une heure il versera $\frac{c}{x}$ et en 6 heures, $\frac{6c}{x}$. De même, en 6 heures le 2^e^ et le 3^e^ tuyaux verseront $\frac{24c}{3x}$ et $\frac{24c}{3x+40}$. Or, en 6 heures, les trois tuyaux, coulant ensemble, remplissent le bassin c; donc on a l'équation

$$\frac{6c}{x} + \frac{24c}{3x} + \frac{24c}{3x+40} = c.$$

Cette équation peut se simplifier; et on en tire $x = \frac{56}{3}$ et $x = -10$. La 1^re^ valeur donne $\frac{3x}{4} = 14$ et $\frac{3x}{4} + 10 = 24$. Donc le 1[er] tuyau remplirait seul le bassin en 18 heures 40 minutes, le 2[me] en 14 heures et le 3[me] en un jour. Et c'est de quoi l'on peut aisément faire la preuve.

Quant à la valeur négative $x = -10$, pour avoir le problème qu'elle résout, on change x en $-x$, dans l'équation proposée, et l'on a

$$-\frac{6c}{x}-\frac{24c}{3x}+\frac{24c}{40-3x}=c.$$

Les quantités $\frac{6c}{x}$ et $\frac{24c}{x}$, ayant le signe $-$, ne désignent plus l'eau qui entre dans le bassin par les deux premiers tuyaux, en 6 heures, mais désignent au contraire l'eau qui en sort. D'ailleurs, comme $3x$ ou 30 est < 40, la quantité $\frac{24c}{3x+40}$, qui est devenue $\frac{24c}{40-3x}$, reste positive et désigne toujours l'eau qui entre dans le bassin par le 3[e] tuyau, coulant 6 heures. Donc le problème résolu par la valeur $x = 10$ est celui-ci :

L'eau sort d'un bassin par deux tuyaux et y entre par un 3[me] : en faisant couler les trois tuyaux ensemble, le bassin, d'abord vide, est rempli en 6 heures. Si chaque tuyau coulait seul, le 2[e] viderait le bassin dans les 3 quarts du temps employé par le 1[er] seul, et le 3[e] remplirait le bassin en 10 heures moins le temps du 2[e]. Quel temps chacun serait-il seul pour verser l'eau que peut contenir le bassin?

Résolvant directement ce problème, on trouvera $x = 10$ et $x = -\frac{56}{3}$.

79. *Trouver de laquelle de ses parties une somme* a *doit augmenter tous les ans, pour qu'en ajoutant au bout de chaque année,* b *fr. à cette somme, elle soit nulle après 2 ans.*

Soit x le dénominateur de la partie cherchée : l'équation du problème sera

$$a+\frac{a}{x}+b+\frac{a}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}+b=0;$$

et on en déduira

$$x=\frac{-(2a+b)\pm\sqrt{b^2-4ab}}{2(a+2b)}.$$

On peut faire $a=24$ et $b=100$; on peut trouver aisément le *maximum* de a, b étant *constant*, et le *minimum* de b, a étant *constant*.

Il est visible que le radical sera toujours moindre que b; et, à plus forte raison, moindre que $2a+b$; donc les deux valeurs de x seront toujours négatives, et le problème résolu sera :

Trouver de laquelle de ses parties une somme a *doit diminuer tous les ans, pour qu'en ajoutant au bout de chaque année,* b *francs à cette somme, elle soit nulle après 2 ans.*

On voit que les valeurs de x seront réelles, égales, imaginaires, suivant qu'on aura $b > 4a$, $b = 4a$, $b < 4a$. Dans ce dernier cas, si l'on change le signe de la quantité $4ab$, qui rend le radical imaginaire, ce qui se fera en changeant le signe de a ou le signe de b, on résoudra un problème analogue au proposé. En effet, en changeant le signe de a, l'équation et la formule proposées traduiront et résoudront le problème :

Trouver de laquelle de ses parties une dette a *doit augmenter tous les ans, pour qu'en payant* b *francs de cette dette, au bout de chaque année, elle soit acquittée après 2 ans.*

En changeant le signe de b, l'équation proposée et la formule deviendront :

$$a+\frac{a}{x}-b+\frac{a}{x}+\frac{a}{x^2}-\frac{b}{x}-b=0, \dots (1)$$

$$x=\frac{-(2a-b)\pm\sqrt{b^2+4ab}}{2(a-2b)}.$$

Donc le problème résolu sera : *Trouver de laquelle de ses parties une somme* a *doit augmenter tous les ans, pour qu'en dépensant* b *francs de cette somme au bout de chaque année, elle soit nulle après 2 ans.*

Et ce problème est au fond le même que le précédent.

Pour discuter le dernier problème qu'on vient d'énoncer, on observe que le numérateur de x prend le signe du radical, lorsqu'on a

$$\sqrt{b^2+4ab} > 2a-b;\ \text{d'où}\ b^2+4ab > 4a^2-4ab+b^2,$$
$$\text{et}\ 2b > a.$$

Mais lorsque $2b > a$, le dénominateur $2(a-2b)$ est négatif; et par suite, les deux valeurs de x sont l'une positive et l'autre négative. Il est facile de voir aussi que si $2b < a$, les deux valeurs de x seront négatives. Enfin, si $2b = a$, les deux valeurs de x deviendront :

$$x = \frac{0}{0} \quad \text{et} \quad x = \frac{-3b}{0}.$$

La première de ces valeurs prend une forme indéterminée qu'elle ne doit pas avoir; car la supposition de $2b = a$, dans l'équation (1), donnant

$$\frac{b}{x}\left(3 + \frac{2}{x}\right) = 0, \text{ il en résulte } x = -\frac{2}{3} \text{ et } x = \frac{b}{0}.$$

L'indétermination de l'une des valeurs de x, vient du facteur $2(a - 2b)$, qu'on trouve être commun aux deux termes de la formule. Supprimant donc ce facteur commun, on aura une formule, qu'on trouverait d'ailleurs, en observant que l'équation (1) est la même chose que

$$a\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 - b\left(1 + \frac{1}{x}\right) = b,$$

$$\text{et donne } 1 + \frac{1}{x} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4ab}}{2a}.$$

Voici un problème dont la discussion offre précisément les mêmes circonstances que celle du problème qui a fourni les deux précédens :

De laquelle de ses parties le bien d'une personne doit-il augmenter tous les ans, pour que, recevant a *francs au commencement de chaque année, et devant* b *francs avant la première, cette personne ait* c *francs au bout de deux ans.*

80. *On demande quatre nombres pairs, en progression arithmétique, tels qu'en multipliant la somme des deux du milieu par celle des trois derniers, le produit soit égal au cube de la demi-somme des deux premiers.*

Ce problème, dont voici la solution donnée dans le tome III des *Annales de Mathématiques*, ne paraît difficile qu'en ce que, s'élevant naturellement au troisième degré, il faut le rabaisser au second. Or, c'est à quoi l'on parvient en procédant comme il suit :

Soit $2x$ le premier terme et $2v$ la raison de la progression; ses quatre termes seront donc

$$2x, \quad 2x + 2v, \quad 2x + 4v \quad \text{et} \quad 2x + 6v;$$

et l'on devra avoir, d'après l'énoncé du problème,

$$(6x + 12v)(4x + 6v) = (2x + v)^3.$$

Posant $2x + v = z$, d'où $2x = z - v$, cette équation deviendra

$$(2z + 4v)(3z + 9v) = z^3,$$

ou bien, en posant $6v=t$ et développant,

$$t^2+5zt=z^2(z-6);\ \text{d'où}\ t=\tfrac{1}{2}z\left(-5\pm\sqrt{4z+1}\right).$$

Soit fait $\pm\sqrt{4z+1}=u$, ou $4z+1=u^2$ et $z=\frac{1}{4}(u^2-1)$; on aura

$$t=\frac{(u^2-1)(u-5)}{8};\ \text{d'où}\ v=\frac{(u^2-1)(u-5)}{48}\ \text{et}\ x=\frac{(u^2-1)(17-u)}{96}.$$

Par l'inspection de ces valeurs, il est clair que u ne peut être qu'un nombre impair; posant donc $u=2n+1$, il viendra enfin

$$v=\frac{n(n+1)(n-2)}{6}\quad\text{et}\quad x=\frac{n(n+1)(8-n)}{12}.$$

La nécessité d'avoir x positif, renferme les valeurs de n entre -1 et $+8$; mais attendu que les valeurs $+1$, $+4$, $+5$, $+7$ de n rendent x fractionnaire, on ne peut admettre que les six systèmes que voici :

$$\begin{aligned}
n &= -1,\ 0,\ 2,\ 3,\ 6,\ 8,\\
x &= \ \ 0,\ 0,\ 3,\ 5,\ 7,\ 0,\\
v &= \ \ 0,\ 0,\ 0,\ 2,\ 28,\ 72.
\end{aligned}$$

Et comme les valeurs -1 et 0 de n donnent les mêmes valeurs pour x et v, le problème n'a réellement que 5 solutions.

81. *Trouver quatre nombres* u, x, y, z, *en progression géométrique, connaissant leur somme* a *et la somme* b *de leurs carrés.*

A cause de $\frac{x}{u}=\frac{y}{x}=\frac{z}{y}$, on a évidemment les 4 équations

$$x^2=uy,\ y^2=xz,\ u+x+y+z=a$$
$$\text{et}\ x^2+y^2+u^2+z^2=b.$$

Prenant les valeurs de u et z dans les deux 1res équations, et substituant ces valeurs dans les deux autres équations, on aura

$$x+y+\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=a\quad\text{et}\quad x^2+y^2+\frac{x^4}{y^2}+\frac{y^4}{x^2}=b.$$

Chassant les dénominateurs, et décomposant en facteurs, ces deux équations deviennent

$$(x+y)(x^2+y^2)=axy\quad\text{et}\quad(x^2+y^2)(x^4+y^4)=bx^2y^2\ \ldots(1)$$

Les inconnues x et y entrant de la même manière dans ces équations, prenons $x+y=\varphi$ et $xy=\omega$; d'où $x^2+y^2=\varphi^2$

$-2u$ et $x^4+y^4=\varphi^4-4\varphi^2u+2u^2$. Avec ces valeurs, les équations (1) se réduisent à

$$\varphi(\varphi^2-2u)=au \text{ et } (\varphi^2-2u)(\varphi^4-4\varphi^2u+2u^2)=bu^2.$$

Eliminant u, l'équation finale sera

$$\varphi^2+\frac{b}{a}\varphi=\frac{1}{2}(a^2-b).$$

Cette équation du second degré, fera connaître φ; et on aura ensuite u, x, y, z et u.

Par exemple, si $a=45$ et $b=765$, on trouvera $\varphi=18$, $u=72$, $x=6$, $y=12$, $z=24$ et $u=3$. La valeur négative $\varphi=-35$, conduirait à des expressions imaginaires.

82. Voici plusieurs problèmes à résoudre :

Un jardin a 432 aunes carrées de surface, et sa longueur a 6 aunes de plus que sa largeur. Quelle longueur a-t-il? (R. 24 aunes.)

Un parc renferme plusieurs fontaines; à chacune correspond deux fois autant d'allées qu'il y a de fontaines, et chaque fontaine communique à trois grottes. Trouver le nombre de grottes, sachant qu'il surpasse 56 de 10 fois le nombre de fontaines. (Il y a 96 grottes.)

Un marchand a reçu 196 fr. pour deux ballots, contenant l'un 200 et l'autre 160 aunes d'étoffes. Pour 7 francs il donne 4 aunes de plus de la première étoffe que pour 6 francs de la seconde. On demande le prix de l'aune de chaque étoffe. (R. 50 et 60 centimes.)

Trouver deux nombres en raison de 4 à 5, tels qu'en ajoutant 6 au plus grand et 1 au plus petit, les racines carrées des deux sommes diffèrent de l'unité. (Le 1er est 30 ou 10 et le 2^{e} 24 ou 8.)

Le produit de deux nombres, dont le premier est un carré, est à la somme de leurs carrés comme 30 est à 61; la différence des deux mêmes nombres est égale à la racine carrée du premier. Quels sont ces deux nombres? (R. Le 1er 25 ou 36 et l'autre 20 ou 30.)

Diviser 20 en deux parties telles, que leur différence soit à leur somme comme leur double produit est à la différence de leurs carrés. (La 1re partie vaut $10\pm\frac{10}{3}\sqrt{3}$).

Deux marchands vendent chacun d'une certaine étoffe; le 2^{e} en vend 3 aunes de plus que l'autre, et ils retirent ensemble 140 florins. Si l'un avait vendu l'étoffe de l'autre, ils auraient reçu respectivement 96 et 50^{f}. Combien chacun a-t-il vendu d'aunes? (R. L'un 15 ou 5, l'autre 18 ou 8.)

On a un verger carré, dont le côté diffère de 24 pieds, en plus et en moins, de la largeur et de la longueur d'un terrain rectangulaire, ayant 621945 pieds carrés de superficie. On veut faire entourer ce verger d'un mur de 4 pieds de hauteur, et on demande combien ce mur coûtera, sachant que la toise carrée sera payée 6 francs et que la toise vaut 6 pieds? (R. 2104 francs.)

Un nombre est composé de trois chiffres tels, que la somme des carrés de ces chiffres, regardés comme exprimant des unités simples, est 104, et que le carré du second chiffre surpasse le double produit des deux autres de 4 unités. Si l'on soustrait 594 du nombre proposé, le reste sera égal au même nombre renversé. Quel est ce nombre proposé? (R. 862.)

On a deux nombres dont la somme, le produit et la différence de leurs carrés ont des valeurs égales. Quels sont ces deux nombres? (R. Le plus petit vaut $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$.)

Deux personnes entrent en société avec un fonds de 6500f; la première laisse son argent dans la société pendant 4 ans, la seconde y laisse le sien seulement pendant 2 ans, et chacune retire 4200f de capital et d'intérêt simple. Combien avaient-elles mis séparément?

Devinez ce que le commandant d'une place assiégée mande à son général? la dépêche porte ce qui suit : En ajoutant 2000 au nombre de soldats de la garnison, la somme fera le 30e du nombre de livres de pain à consommer. Si nous avions 1000 hommes de moins et 10000 livres de pain de plus à consommer, la garnison pourrait être nourrie pendant 160 jours. Enfin, si le soldat avait une ration journalière deux fois plus petite, nos troupes pourraient encore manger pendant 200 jours.

Une personne qui ne reçoit que les intérêts simples de son argent, place 2400f en deux sommes, dont l'une devient 600f au bout de 25 mois et l'autre 1200f après 10 mois. Quel est l'intérêt simple d'un florin par mois?

Le problème résolu par la valeur négative, est celui-ci : Les biens d'une personne surpasse ses dettes de 2400f. Les biens se réduiraient à 1200f après 10 mois, si chacun de leurs florins éprouvait une certaine diminution par mois. Les dettes deviendraient 600f, si chacun de leurs florins devenait 1 de moins que 25 fois la diminution dont on vient de parler. Quelle est cette diminution?

Deux marchands entrent en société avec un fonds de 2400f. L'argent de l'un y reste pendant 3 mois et celui de l'autre pendant 2 mois. Ils retirent chacun 2376f tant de capital que d'intérêt simple. Quelles sont les mises de ces marchands, et quel est l'intérêt simple d'un flor. par mois?

Le problème résolu par les valeurs négatives est celui-ci : Deux personnes qui doivent l'une 2400f de plus que l'autre, paient une certaine somme par mois sur chacun des florins de leurs dettes; et après 2 mois, la 1re redoit encore 2376f, tandis qu'au contraire, on redoit la même somme à la 2me, après trois mois. De combien sont les dettes de chaque personne, et combien acquittent-elles sur chaque florin par mois?

Trouver trois nombres, connaissant les trois produits a, b, c, qu'ils donnent en multipliant chacun d'eux par la somme des deux autres. (Faire $a = 27$, $b = 32$ et $c = 35$.)

Partager un nombre donné a en deux parties, dont la somme des cubes, plus leur somme multipliée par leur produit, donne b.

Trouver quatre nombres en proportion, connaissant la somme a des antécédens, la somme b des conséquens, et le produit c des quatre termes. (Interpréter les valeurs imaginaires; faire $a=81$, $b=20$ et $c=810000$).

Trouver une proportion, connaissant la somme a des extrêmes, la somme b des moyens et la somme c des carrés des quatre termes. (Prendre $a=18$, $b=12$ et $c=576$.)

Trouver deux nombres, connaissant leur produit a et la somme b des quotiens qu'ils donnent quand on divise le carré de chacun par celui de l'autre. (Supposer dans la formule $a=32$ et $b=17$ quarts.)

Partager le nombre donné a en deux parties telles, que la somme des deux quotiens qu'elles donnent en divisant chacune par le carré de l'autre, soit $\frac{1}{a}$.

Partager le nombre donné a en deux parties telles, que b soit la somme des deux quotiens que l'on trouve en divisant le carré de chacune par l'autre. (Interpréter les valeurs imaginaires.)

Trouver deux nombres tels, que leur produit vaille a fois leur somme, et que la différence de leurs carrés soit égale au carré de a.

Partager le nombre donné a, deux fois de suite en deux parties, de manière que le produit b de la première partie d'une division par la 1re partie de l'autre, soit donné; et que la somme c des carrés des deux autres parties, soit aussi donnée.

Décomposer un produit donné a en deux facteurs positifs tels, que leur somme vaille b fois la différence de leurs racines carrées.

La somme de deux nombres est a et la somme de leurs carrés vaut b fois la racine carrée de leur produit. Quels sont ces deux nombres?

Trouver les facteurs de deux produits égaux, connaissant la somme a de leurs multiplicandes, et les valeurs b et c que prennent ces produits, quand le multiplicateur de l'un devient celui de l'autre.

Trouver deux produits, connaissant leur somme a, la somme b de leurs multiplicandes, et les valeurs c et d que prennent ces produits, quand le multiplicateur de l'un devient celui de l'autre. (Interpréter les valeurs imaginaires; voir quand a et b sont des différences.)

Quel nombre x doit-on ajouter à deux nombres donnés a et b, et en retrancher ensuite, pour que le produit des deux sommes et celui des deux différences aient le rapport de a à b?

Trouver deux nombres ayant c pour quotient, et tels, que la somme des carrés de leurs différences aux deux nombres a et b, vaille le carré de la différence des deux nombres cherchés. (Interpréter les valeurs négatives et imaginaires.)

Partager les nombres donnés a, b, c, d, chacun en deux parties telles, que p soit le produit de la 2e partie de a par la 1re de b, de la 2e de b par la 1re de c, de la 2e de c par la 1re de d et de la 2e de d par la 1re de a. (Même problème pour m nombres donnés.)

Trouver quatre nombres en progression arithmétique, connaissant la somme a des extrêmes et celle b des moyens. (Faire $a = 78$ et $b = 70$.)

Trouver quatre nombres en progression par différence, connaissant la somme a des carrés des moyens, et le produit ou la somme b des carrés des extrêmes.

Partager le nombre donné a en quatre parties qui forment une progression arithmétique et dont la somme des carrés soit égale à b.

Trouver trois nombres dont le carré de l'un vaille la somme des carrés des deux autres : on connaît la somme a de ces trois nombres et la somme b de leurs produits deux à deux.

Trouver trois nombres en proportion géométrique continue, connaissant leur somme a et celle b de leurs carrés.

Trouver trois nombres en proportion continue, connaissant la différence a du moyen à la somme des extrêmes, ainsi que la différence b de la somme des carrés de ces extrêmes au carré du moyen.

Trouver une proportion, connaissant la somme a des extrêmes, la somme b des moyens et la somme c des puissances 5$^{\text{mes}}$ des 4 termes.

Trouver quatre nombres en proportion, connaissant la somme ou la différence des extrêmes, la somme ou la différence des moyens et la somme des cubes des quatre termes.

Trouver quatre nombres en progression géométrique, connaissant la somme des extrêmes et celle des moyens.

Trouver quatre nombres en progression géométrique, connaissant la somme ou la différence des termes impairs et la somme ou la différence des termes pairs.

Trouver 4 nombres en progression géométrique, connaissant l'excès de la somme des extrêmes sur celle des moyens, et l'excès de la somme des carrés des extrêmes sur celle des carrés des moyens.

Trouver cinq nombres en progression géométrique, connaissant la somme a des termes pairs et celle b des termes impairs.

Trouver 6 nombres en progression par quotient, connaissant la somme a des deux extrêmes et la somme b des deux moyens.

Trouver trois nombres en proportion géométrique, connaissant leur produit a et la somme b de leurs cubes. (Prendre $a = 74088$ et $b = 2077208$.)

Trouver une proportion géométrique, connaissant le produit a des deux premiers termes, le produit b des deux derniers, ainsi que leur somme c. (Prendre $a = 63$, $b = 847$ et $c = 80$.)

Trouver quatre nombres en proportion géométrique, connaissant leur produit a, leur somme b et la somme c de leurs carrés. (Faire $a = 11025$, $b = 64$ et $c = 1700$.)

Trouver cinq nombres en progression arithmétique, connaissant leur somme a et la somme b de leurs carrés. (Prendre $a = 55$ et $b = 765$.)

Nota. Plusieurs problèmes supposent seulement que l'on connaisse les définitions des progressions arithmétique et géométrique, et ne sortent pas de la liste des questions résolubles comme celles du 2^me degré.

Des maximums et minimums du second degré.

83. J'appellerai *maximum* et *minimum du second degré*, la plus grande et la plus petite valeur que puisse avoir une *variable*, entrant dans une équation du second degré, ou résoluble par celles du second degré.

84. Soit d'abord une équation du second degré en x, contenant une variable v; résolvons cette équation par rapport à x, et rendons entière la quantité sous le radical; nous aurons une expression de la forme

$$x = \mathrm{M} \pm \mathrm{N}\sqrt{\mathrm{A} - \mathrm{B}}.$$

Il est clair que la variable v n'est susceptible de maximum, ni de minimum, que quand elle entre dans la quantité $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ sous le radical. Or, supposons que cette variable v soit dans B, sans être dans A; à mesure que v croîtra, $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ diminuera, et v ne pourra croître que jusqu'à donner $\mathrm{A} - \mathrm{B} = 0$; car si v croissait encore, $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ deviendrait négative et x imaginaire ou impossible : donc, dans ce cas, le maximum de v fournit $\mathrm{A} - \mathrm{B} = 0$ et $x = \mathrm{M}$. La première de ces équations donne le maximum de v et la seconde fait connaître la valeur de x qui correspond à ce maximum.

Pareillement, si la variable v entrait dans A, sans être dans B, on verrait que le minimum donne $\mathrm{A} - \mathrm{B} = 0$ et $x = \mathrm{M}$.

Enfin, lorsque la variable v entre dans A et dans B, il peut se présenter trois cas; 1° ou la quantité $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ sous le radical diminue pendant que v augmente : dans ce cas le maximum de v a lieu lorsque $\mathrm{A} - \mathrm{B} = 0$ et $x = \mathrm{M}$; ou la quantité $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ diminue avec v : alors le minimum de v fournit $\mathrm{A} - \mathrm{B} = 0$ et $x = \mathrm{M}$; 3° enfin, $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ augmente, soit que v augmente, soit que v diminue : dans ce cas il est clair que v n'est susceptible ni de maximum, ni de minimum.

On voit par cette discussion, que le maximum et le minimum de la variable rendent toujours nulle la quantité $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ sous le radical; que si la variable n'entre que dans la partie négative $-\mathrm{B}$, il y a maximum; que si elle entre dans la partie positive

A seule, il y a minimum; que si elle se trouve à la fois dans la partie positive et dans la partie négative, il peut y avoir à la fois maximum et minimum, et même n'en point avoir du tout.

85. Ainsi en général, *pour avoir la plus grande ou la plus petite valeur d'une variable entrant dans une équation du second degré à une inconnue, il faut résoudre cette équation par rapport à l'inconnue; rendre, si l'on veut, entière la quantité sous le radical, et égaler cette quantité à zéro : l'équation résultante fera connaître le maximum ou le minimum cherché, et l'équation restante donnera la valeur de l'inconnue qui répond à ce maximum ou à ce minimum.* Au moyen de cette règle, on aura facilement le maximum ou le minimum de a dans les équations

$$(36-x)x=a;\quad x^2-8x+4a=a^2-11;$$
$$ax^2+c^2x^2=(x+c)^2;\quad 2ac-ax=\sqrt{(4c^2-4x^2)};$$
$$x^2+(a-x)^2=b\sqrt{ax-x^2}.$$

86. Cherchons d'après la règle précédente, le maximum de c dans l'équation $2(a+bc)x=d+2cx^2$.

Résolvant cette équation par rapport à x, on trouve

$$x=\frac{1}{2c}\left[a+bc\pm\sqrt{(a+bc)^2-2cd}\right].$$

Comme la variable c entre dans la partie positive et dans la partie négative sous le radical, il peut y avoir à la fois maximum et minimum (84). Or, pour connaître chacun d'eux, on observe que la quantité sous le radical devant toujours être positive et variable; si on l'égale à la quantité positive et variable u^2, qu'ensuite on résolve l'équation en u^2 par rapport à c, on verra facilement si la valeur de c devient la plus grande ou la moindre possible, quand on y fait $u^2=0$, puisque pour $u^2=0$, il y a nécessairement maximum ou minimum (84). Or, en opérant comme on vient de le dire, on a

$$(a+bc)^2-2cd=u^2 \text{ et } x=\frac{1}{2c}(a+bc\pm u);$$

et la 2^{me} valeur, substituée dans l'équation proposée, donnerait la 1re. Résolvant l'équation en u^2 par rapport à c, il vient

$$c=\frac{1}{b^2}\left[d-ab\pm\sqrt{(d^2-2abd+b^2u^2)}\right].$$

Le carré u^2 étant toujours positif et variable, tandis que a,

b, d, sont des nombres donnés, on voit que pour toutes les valeurs réelles de u, positives ou négatives, les valeurs du radical sont plus grandes que celle qui a lieu lorsque $u=0$. Mais quand le radical est le moindre possible, le nombre qu'on doit ajouter ou retrancher à $d-ab$, pour avoir c, est aussi le moindre possible; donc la somme est la plus petite possible, et le reste le plus grand possible. D'où l'on tire, pour le maximum et le minimum de c,

$$c=\frac{1}{b^2}[d-ab-\sqrt{(d^2-2abd)}],$$
$$c=\frac{1}{b^2}[d-ab+\sqrt{(d^2-2abd)}].$$

Le minimum de c surpasse son maximum; mais cela tient à ce que les valeurs de c résolvent deux problèmes : dans l'un on demande le maximum de c et dans l'autre le minimum. Les valeurs de x qui répondent à ce maximum et à ce minimum, sont données par l'équation

$$x=\frac{1}{2c}(a+bc)=\sqrt{\frac{d}{2c}}\ (*).$$

87. On voit, par cet exemple, que *pour avoir le maximum et le minimum de la variable, lorsqu'elle entre dans la partie positive et dans la partie négative sous le radical, il suffit d'égaler tout ce qui est sous ce radical à* u^2, *puis de prendre, dans l'équation résultante, la valeur de la variable, et de comparer cette valeur à ce qu'elle devient lorsque* $u=0$. C'est ce qu'on verra encore, en cherchant, d'après cette règle, le maximum ou le minimum de a dans chacune des équations

$$2(a+b)x=x^2+2a^2-2b^2;\ \ x^2+(a-x)^2=bx;$$
$$x^2+(a+b)^2=2abx;\ \ (x+a)(x-b)=cx^2.$$

88. Voyons maintenant comment on trouve le maximum et le minimum, lorsque la variable entre dans une équation à plusieurs inconnues, résoluble par rapport à chacune de ces incon-

(*) On peut remarquer que si, dans le minimum trouvé pour c, les quantités a et b sont supposées constantes, mais d variable; à mesure que d diminuera, le minimum de c diminuera aussi : et comme d ne peut diminuer que jusqu'au terme $d=2ab$, il s'ensuit qu'à ce terme, c aura atteint le plus petit de ses *minima*, c'est-à-dire, son *minimum-minimorum*, lequel est par conséquent $c=\frac{a}{b}$, et donne $x=b$.

nues, comme les équations du second dégré. Cette recherche repose sur le principe que voici :

Lorsqu'une variable entre, avec plusieurs inconnues, dans une équation résoluble comme celles du second degré, le maximum ou le minimum de cette variable rend nulle la quantité sous le radical de chaque inconnue.

En effet, prenons d'abord dans l'équation proposée, la valeur de l'une quelconque x des inconnues, et supposons que les autres aient les valeurs qui conviennent au maximum ou au minimum de la variable v : si ce maximum ou ce minimum ne rendait pas nulle la quantité sous le radical de x; comme cette quantité sous le radical doit toujours être positive, pour que x soit réelle, il est clair que la variable v pourrait encore augmenter et diminuer, sans que la quantité sous le radical devînt négative, et conséquemment, sans que la valeur de x devînt impossible : donc cette variable v ne serait ni à son maximum, ni à son minimum; ce qui est contre l'hypothèse. Donc la quantité sous le radical de x est nulle; et il en sera de même des quantités sous les radicaux des autres inconnues.

89. De là résulte que *pour avoir le maximum ou le minimum d'une variable, dans une équation résoluble comme celles du second degré, il faut prendre dans cette équation, successivement la valeur de chaque inconnue, et égaler à zéro la quantité sous chaque radical : les équations résultantes et les équations restantes serviront à déterminer le maximum ou le minimum demandé, ainsi que les valeurs correspondantes des inconnues proposées.* D'après cette règle, cherchons le minimum de b dans les équations

$$xyz = a^3 \text{ et } xy + xz + yz = b^2.$$

Eliminant d'abord z, il vient

$$x^2y^2 + (x+y)a^3 = b^2xy. \dots (1)$$

Résolvons cette équation, d'abord par rapport à x; nous aurons

$$x = \frac{1}{2y^2}\left[b^2y - a^3 \pm \sqrt{(b^2y-a^3)^2 - 4a^3y^3}\right].$$

On voit que b est susceptible de minimum (84). Et puisque ce minimum rend nulle la quantité sous le radical (88), il en résulte, en chassant le dénominateur $2y^2$,

$$2xy^2 = b^2y - a^3 \text{ et } (b^2y-a^3)^2 = 4a^3y^3.$$

Elevant la première de ces équations au carré et ayant égard à la seconde, on aura

$$4x^2y^4 = 4a^3y^3;\ \text{d'où}\ x^2y = a^3.$$

Résolvant l'équation (1) par rapport à y, on verra de même que le minimum de b, donne $xy^2 = a^3$. Ce qu'on pouvait d'ailleurs prévoir ; car l'équation (1) étant *symétrique* par rapport à x et y, elle reste la même quand on y change x en y et y en x ; le résultat qu'elle fournit, doit donc aussi demeurer le même.

Les équations $x^2y = a^3$ et $xy^2 = a^3$, donnent $x = y = a$; d'où $z = a$. Et l'équation $2xy^2 = b^2y - a^3$, fournit, pour le minimum de b, $b = a\sqrt{3}$.

90. Si b était donné et que a fût variable, le maximum ou le minimum de a serait $a = \frac{1}{3}b\sqrt{3}$ et donnerait $x = y = z = a$.

Dans ce cas, comme la variable a entre dans la partie positive et dans la partie négative de la quantité sous le radical, il reste encore à savoir lequel du maximum ou du minimum rend nul ce radical, et donne les valeurs précédentes. Pour y parvenir, on pose

$$x = \tfrac{1}{3}b\sqrt{3} + \varphi \ \text{et}\ y = \tfrac{1}{3}b\sqrt{3} - \varphi,$$

et alors l'équation (1) devient

$$a^3 \cdot \tfrac{2}{3}b\sqrt{3} = \tfrac{2}{9}b^4 - \left(\tfrac{1}{3}b^2\varphi^2 + \varphi^4\right).$$

On voit que le maximum de a répond $\varphi = 0$; et il en résulte les valeurs trouvées d'abord.

Il suit de cet exemple, que *quand on ne saura laquelle de la plus grande ou de la plus petite valeur a été obtenue, il faudra égaler les inconnues proposées, à leurs valeurs trouvées, augmentées ou diminuées des auxiliaires* φ, ω, *etc ; substituer les résultats dans l'équation proposée, résoudre l'équation résultante par rapport à la variable, et comparer sa valeur à ce qu'elle devient lorsqu'on y suppose nulles les auxiliaires* φ, ω, *etc. : alors on aura le maximum ou le minimum demandé.* C'est ce qu'on verra d'ailleurs, en cherchant le maximum de a dans l'équation $xy - x^2y^2 = a(x + y)$.

91. On peut s'exercer à chercher le maximum ou le minimum, soit de a, soit de b, dans les équations que voici :

$x^2+y^2+b=a(x+y)$;
$x+y+z=a$ et $x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2=b$;
$vxyz=a^4$ et $v^2+x^2+y^2+z^2=b^2$;
$x+y+z+u=a$ et $uyz+uxz+uxy+xyz=b$;
$u+v+x+y+z=a$ et $u^3+v^3+x^3+y^3+z^3=b^3$.

92. Si l'on devait trouver le minimum de a, dans l'équation

$$2a\sqrt{x^2-c^2}+2a\sqrt{y^2-c^2}=(x+y)^2,$$

cette équation ne pourrait s'abaisser au second degré, que par l'usage d'inconnues auxiliaires; et voici comment : posons $x^2-c^2=z^2$ et $y^2-c^2=v^2$, ou $x=\sqrt{(c^2+z^2)}$ et $y=\sqrt{(c^2+v^2)}$; substituons ces valeurs, et faisons, dans l'équation résultante, $z+v=2u$ et $z-v=2t$, ou $z=u+t$ et $v=u-t$: nous aurons une nouvelle équation qui, après avoir chassé le radical et avoir divisé par u, donnera, pour le minimum de a,

$$a=2c \text{ et } x=y=c\sqrt{2}.$$

C'est d'ailleurs ce qu'on pourrait vérifier, en posant, dans l'équation proposée, $x=c\sqrt{2}+\varphi$ et $y=c\sqrt{2}-\varphi$ (90).

93. En général, lorsque l'équation ou les équations proposées, sont symétriques par rapport aux inconnues, le maximum et le minimum de la variable rendent toujours ces inconnues égales entre elles. Et pour obtenir ce maximum ou ce minimum, il suffit d'égaler l'une des inconnues à $v+\varphi$, l'autre à $v-\varphi$, etc. C'est ainsi qu'on traitera chacun des systèmes d'équations qui suivent, pour y avoir le minimum de a :

$$(a-x)^m+(a-y)^m=b \text{ et } x^n+y^n=c;$$
$$x^m+y^m+z^m=a \text{ et } x+y+z=b;$$

dans chacun de ces groupes d'équations, les exposans sont entiers et positifs.

94. *On veut faire construire un coffre en fer, à faces rectangulaires, de* a^3 *centimètres cubes de capacité, et dont l'enveloppe ait partout* $\frac{1}{2}$ *centimètre d'épaisseur. On veut d'ailleurs que ce coffre coûte et pèse le moins possible; quelles dimensions doit-il avoir pour cela?*

Soient x, y, z les dimensions intérieures de ce coffre; soit m le volume de son enveloppe : puisque cette enveloppe doit avoir $\frac{1}{2}$ centimètre d'épaisseur, il est clair que les dimensions extérieures seront $x+1$, $y+1$ et $z+1$. Or, le volume d'un parallélipipède rectangle étant le produit de ses trois dimensions, il est facile de voir que le problème proposé fournit les deux équations :

$$xyz=a^3 \text{ et } (x+1)(y+1)(z+1)-xyz=m;$$

d'où l'on tire, pour le minimum de m, $m=(1+a)^3-a^3$ et $x=y=z=a$.

Les calculs précédens résolvent aussi le problème où, le volume m de l'enveloppe étant donné, on demanderait que le coffre eût la plus grande capacité possible.

95. *Si l'on veut partager le nombre donné* k *en* n *parties telles, que la somme de tous les produits différens qu'on obtient en combinant ces parties* m *à* m, *soit un maximum, il faut prendre toutes ces parties égales entre elles.*

En effet, désignons par x et y deux quelconques de ces n parties, et par s la somme de toutes les autres; nous aurons donc

$$x+y+s=k.$$

Soit h la somme de tous les produits différens qu'on obtient en multipliant les n parties cherchées m à m : pour cette somme, les parties n'entrent qu'une fois dans un produit; ainsi le produit xy est multiplié par la somme a de tous les produits différens des $n-2$ autres parties, $m-2$ à $m-2$; tandis que chacune des parties x et y est multipliée par la somme b des $n-2$ autres, $m-1$ à $m-1$: de sorte qu'en désignant par c la somme de tous les produits différens des $n-2$ autres parties, prises m à m, il viendra

$$axy+bx+by+c=h.$$

Cette équation et la précédente donnent

$$x=\tfrac{1}{2}(k-s)\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}(k-s)^2+\frac{b}{a}(k-s)+\frac{c}{a}-\frac{h}{a}}.$$

Supposons que toutes les parties de k, excepté x et y, aient les valeurs qui conviennent au maximum de h : on voit que c'est ce maximum qui rend nulle la quantité sous le radical de x et qui donne

$$x=\tfrac{1}{2}(k-s)=y.$$

Donc, pour le maximum de h, deux quelconques des n parties de k sont égales entre elles : donc toutes ces parties sont égales. C.Q.F.D.

Réciproquement, il est aisé de voir qu'étant donné la somme h des produits différens des n nombres inconnus, combinés m à m; pour que la somme de ces nombres soit un minimum, il faut que ces mêmes nombres soient égaux entre eux.

96. *Si l'on veut partager un nombre donné* k *en* n *parties, dont le produit soit un maximum, il faut prendre ces parties égales entre elles.*

En effet, soient x et y deux quelconques de ces parties, s la somme des $n-2$ autres et p leur produit; on aura

$$x+y+s=k \quad \text{et} \quad pxy=h.$$

Opérant comme dans la démonstration précédente, on verra que le maximum de h, donne $x=\frac{1}{2}(k-s)=y$. D'où il suit que pour le maximum de h, deux quelconques des parties cherchées, sont égales entre elles : donc toutes ces parties sont égales.

Réciproquement, on voit que pour décomposer un produit donné h en n facteurs positifs, dont la somme soit un minimum, il faut prendre tous ces facteurs égaux entre eux.

97. *Les exposans étant des nombres quelconques positifs, on demande le maximum ou le minimum de* u *dans les équations*

$$\left.\begin{array}{c} a_1x_1^p+a_2x_2^q+a_3x_3^r+\dots+a_nx_n^t=\varphi \\ \text{et} \quad x_1^h x_2^i x_3^k \dots x_n^m = u \text{ (*)}. \end{array}\right\} \dots (1)$$

Posant d'abord

$$a_1x_1^p=y_1,\quad a_2x_2^q=y_2,\quad a_3x_3^r=y_3,\quad \dots,\quad a_nx_n^t=y_n;$$

puis substituant les valeurs de x_1, x_2, x_3, ..., x_n, tirées de ces équations, on aura

$$\left.\begin{array}{l} y_1+y_2+y_3+\dots+y_n=\varphi, \\ y_1^{\frac{h}{p}} y_2^{\frac{i}{q}} y_3^{\frac{k}{r}} \dots y_n^{\frac{m}{t}} = u a_1^h a_2^i a_3^k \dots a_n^m = u' \end{array}\right\} \dots (2)$$

Soit v le moindre multiple des dénominateurs des exposans réduits, dans le 1[er] membre de la 2[e] équation, et soit élevé de part et d'autre à la puissance v : si nous posons, pour abréger,

(*) Les expressions x_1, x_2, x_3, ..., x_n, s'énoncent x premier, x deuxième, x troisième, ..., x, $n$ième.

$$\frac{hv}{p}=a,\ \frac{iv}{q}=b,\ \frac{kv}{r}=c,\ldots,\ \frac{mv}{t}=g;$$

il est clair que a, b, c, ..., g, seront des nombres entiers positifs, et que nous aurons à traiter les deux équations

$$\left.\begin{array}{r} y_1+y_2+y_3+\cdots+y_n=\varphi \\ \text{et}\ \ y_1^a y_2^b y_3^c \ldots y_n^g=\omega^{tv} \end{array}\right\}\ldots(3)$$

Il est visible que le maximum ou le minimum de ω^{tv} donnera le maximum ou le minimum de ω. Or, la dernière équation revient à

$$a^a b^b c^c \ldots g^g \left(\frac{y_1}{a}\right)^a \left(\frac{y_2}{b}\right)^b \left(\frac{y_3}{c}\right)^c \cdots \left(\frac{y_n}{g}\right)^g=\omega^{tv};$$

donc ω^{tv} ne saurait être un maximum, à moins que le produit qui multiplie $a^a b^b c^c \ldots g^g$, n'en soit un. Or, ce produit contient a facteurs $\frac{y_1}{a}$, dont la somme est y_1; b facteurs $\frac{y_2}{b}$, dont la somme est y_2; c facteurs $\frac{y_3}{c}$, dont la somme est y_3, ...; enfin, g facteurs $\frac{y_n}{g}$, dont la somme est y_n; ce produit contient donc $a+b+c+\cdots+g$, ou s facteurs, dont la somme est $y_1+y_2+y_3+\cdots+y_n$ ou φ : par conséquent, pour que le même produit soit un maximum, il faut, d'après ce qui précède (96), que tous ses s facteurs soient égaux entre eux : l'un quelconque de ces mêmes facteurs est donc $\frac{\varphi}{s}$. Et comme y_1 contient a de ces facteurs, on aura $y_1=\frac{a\varphi}{s}$. De même, $y_2=\frac{b\varphi}{s}$, $y_3=\frac{c\varphi}{s}$, ..., $y_n=\frac{g\varphi}{s}$.

Ces valeurs feront connaître celles de x_1, x_2, x_3, ..., x_n qui répondent au maximum de ω^t ou de ω. On tire aussi, des valeurs précédentes,

$$y_1 : \frac{h}{p} :: y_2 : \frac{i}{q} :: y_3 : \frac{k}{r} :: \cdots :: y_n : \frac{m}{t}.$$

Comparant cette suite de rapports égaux aux équations (2), on verra que *pour partager un nombre donné* φ *en* n *parties telles, qu'en les élevant chacune à une puissance quelconque positive, le produit de ces puissances soit un maximum, il faut prendre ces parties proportionnelles à leurs exposans.*

Les valeurs précédentes auraient lieu pareillement si, ω étant donné, on cherchait le minimum de φ.

98. *Partager un nombre donné* a *en* n *parties telles, qu'en multipliant chacune par celle qui la suit immédiatement et la dernière par la première, la somme des produits résultans soit un maximum.*

Soient $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$ les n parties cherchées; on aura

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+\cdots+x_n=a,$$
$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_6+\cdots+x_nx_1=b.$$

Pour éliminer une inconnue entre ces équations, prenons la valeur de x_3 dans la première, et posons, pour abréger, $h= x_6+x_7+\cdots+x_n$; nous obtiendrons

$$x_3=a-x_1-x_2-x_4-x_5-h.$$

Substituant cette valeur dans la seconde équation proposée et développant, il viendra

$$x_1x_2+ax_2-x_1x_2-x_2^2-x_2x_4-hx_2+ax_4-x_1x_4-x_2x_4-$$
$$x_2x_5-x_4^2-x_4x_5-hx_4+x_4x_5+x_5x_6+\cdots+x_nx_1=b.$$

Réduisant et changeant les signes des deux membres, on aura

$$\left.\begin{array}{l} x_2^2+2x_2x_4-ax_2+x_2x_5+hx_2-ax_4+x_1x_4 \\ +x_4^2+hx_4-x_5x_6-x_6x_7-\cdots-x_nx_1=-b. \end{array}\right\}\ldots(3)$$

Préparant cette équation pour la résoudre par rapport à x_2, il vient d'abord

$$x_2^2-(a-2x_4-x_5-h)x_2=ax_4-x_1x_4-x_4^2-$$
$$x_4x_5-hx_4+x_5x_6+x_6x_7+\cdots+x_nx_1-b;$$

d'où $x_2^2-(a-2x_4-x_5-h)x_2=p-b$,

p désignant une quantité positive. Cette équation donne

$$x_2=\tfrac{1}{2}(a-2x_4-x_5-h)\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}(a-2x_4-x_5-h)^2+p-b}.$$

On voit que si les inconnues proposées ont les valeurs qui conviennent au maximum de b, ce maximum rendra nul le radical de x_2 et donnera

$$x_2=\tfrac{1}{2}(a-2x_4-x_5-h).$$

Résolvant l'équation (3) par rapport à x_4, on verra pareillement que le maximum de b fournit

$$x_4=\tfrac{1}{2}(a-2x_2-x_1-h).$$

Retranchant cette valeur de la précédente, on aura, toute réduction faite, $\qquad x_1=x_5.$

Si l'on avait d'abord éliminé x_4, on aurait trouvé $x_2 = x_6$; si l'on avait éliminé x_3, on aurait eu $x_4 = x_n$; ainsi de suite. Ces résultats prouvent, que *pour le maximum de* b, *les coefficiens des deux multiplicateurs de l'inconnue éliminée, dans la 2^e équation proposée, sont égaux entre eux.*

Ce principe ne saurait s'appliquer au cas de trois inconnues; mais alors le problème peut se résoudre directement, et donne, pour le maximum de b,

$$x_1 = x_2 = x_3 = \tfrac{1}{3}a.$$

Lorsqu'il y a quatre inconnues, suivant qu'on élimine x_4, x_3, x_2, x_1, le principe précédent donne, pour le maximum de b,

$$x_2 = x_2,\ x_1 = x_1,\ x_4 = x_4 \text{ et } x_3 = x_3,$$

équations qui n'apprennent rien sur les inconnues proposées; le problème est donc alors indéterminé. C'est ce qu'on peut vérifier directement; car alors les équations du problème, sont

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a,$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 = b.$$

La première donne $x_4 = a - x_1 - x_2 - x_3$: substituant cette valeur dans la seconde équation, mise sous la forme,

$$x_2(x_1 + x_3) + x_4(x_1 + x_3) = b,$$

on aura, en réduisant,

$$a(x_1 + x_3) - (x_1 + x_3)^2 = b;\ \text{d'où } x_1 + x_3 = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - b}.$$

On voit que le maximum de b donne $x_1 + x_3 = \frac{1}{2}a$; d'où $x_2 + x_4 = \frac{1}{2}a$. Le maximum de b ne pouvant donc fournir que deux équations entre les quatre inconnues x_1, x_2, x_3, x_4, le problème est évidemment indéterminé.

Lorsqu'il y a cinq inconnues, suivant qu'on élimine x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, le principe énoncé plus haut, donne, pour le maximum de b,

$$x_2 = x_3,\ x_1 = x_2,\ x_1 = x_5,\ x_4 = x_5 \text{ et } x_3 = x_4;$$

ces valeurs et la première équation proposée, fournissent $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = \frac{1}{5}a$.

Si $n = 6$, en éliminant d'abord x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, le maximum de b donnera

$$x_2 = x_4,\ x_1 = x_3,\ x_2 = x_6,\ x_1 = x_5,\ x_4 = x_6 \text{ et } x_3 = x_5,$$

d'où $x_1 = x_3 = x_5$ et $x_2 = x_4 = x_6$. Ces valeurs réduisent les deux équations proposées à

$$x_1 + x_2 = \tfrac{1}{3}a \text{ et } x_1 x_2 = \tfrac{1}{6}b;$$

d'où il est facile de conclure que le maximum de b répond à $x_1 = x = \frac{1}{6}a$, et que par conséquent ce maximum a lieu lorsque

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = \tfrac{1}{6}a.$$

En général, les parties de a sont égales entre elles, pour le maximum de b; mais le problème est indéterminé lorsque le nombre n de ces parties, est un multiple de 4. Par exemple, supposons $n = 8$; nous aurons, d'après le principe énoncé plus haut,

$$x_2 = x_6,\ x_1 = x_5,\ x_4 = x_8 \text{ et } x_3 = x_7;$$

d'où les équations du problème deviendront

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \tfrac{1}{2}a,$$
$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_1 = \tfrac{1}{2}b;$$

elles sont par conséquent de même forme que quand $n = 4$; et conséquemment le problème est indéterminé.

Lorsque $n = 12$, on trouve $x_2 = x_6 = x_{10}$, $x_1 = x_5 = x_9$, $x_4 = x_8 = x_{12}$ et $x_3 = x_7 = x_{11}$; d'où les équations du problème se réduisent encore à celles qui ont lieu pour $n = 4$; ce problème est donc aussi indéterminé pour $n = 12$. Il en sera de même pour $n = 16, 20, 24$, etc.

Il résulte de la discussion précédente, qu'en général, *pour que les parties d'un nombre donné soit telles, qu'en multipliant chacune par celle qui la suit immédiatement et la dernière par la première, la somme des produits résultans soit un maximum, il suffit que ces parties soient égales entre elles.*

Réciproquement, les calculs que nous venons d'employer démontrent, que *si l'on connaît la somme des produits obtenus, au moyen de* n *nombres inconnus, en multipliant chacun par celui qui le suit immédiatement et le dernier par le premier, la somme de ces* n *nombres sera la moindre possible, quand ils seront égaux entre eux* (*).

(*) Ce principe et le précédent servent à démontrer les deux théorèmes que voici : 1° Parmi tous les polygones de n côtés et d'une même somme de droites menées des sommets à un point intérieur et divisant l'espace autour de ce point en parties égales, celui dont l'aire est la plus grande, est le polygone régulier ayant son centre au point donné.

2° Parmi les polygones de n côtés et de même surface s, dans lesquels

99. Voici quelques problèmes et théorèmes pour servir d'exercices :

Décomposer le produit donné a en deux facteurs positifs tels, qu'en multipliant chacun par la racine carrée de l'autre, la somme des deux produits soit un minimum.

Connaissant la somme a des racines carrées de deux nombres, quelles valeurs doivent-ils avoir, pour que leur somme divisée par la racine carrée de leur produit, donne le plus petit quotient possible?

Quel nombre x doit-on retrancher de a et ajouter à b, pour que la somme des racines carrées des deux résultats soit un maximum?

Trouver quatre nombres en proportion, dont le produit soit le plus grand possible, connaissant la somme a des deux premiers et la somme b des deux derniers.

Partager le nombre donné a en trois parties telles, qu'en les multipliant deux à deux et multipliant chaque produit par la somme de ses facteurs, la somme des nouveaux produits soit la moindre possible.

On veut creuser près d'une rivière, un bassin à faces rectangulaires, propre à rendre plus claire et plus saine l'eau qu'il reçoit de cette rivière, et qui ait a mètres cubes de capacité. Le contour intérieur de ce bassin sera revêtu d'un mur dont chaque mètre carré de surface coûtera b fr. Le prix pour creuser le bassin croîtra comme la profondeur et sera c fr. pour le premier mètre. Quelles doivent être les dimensions de ce bassin, pour que le prix de sa construction soit un minimum?

Un particulier a une masse d'argent fin de a centimètres cubes de volume. Il veut employer cette masse à la confection d'une tabatière à faces rectangulaires, dont l'enveloppe ait partout $\frac{1}{5}$ de centimètre d'épaisseur. Mais comme les 12 côtés seront des filets d'or, tous de même grosseur, il voudrait, pour diminuer les frais autant qu'il se peut, que la somme de ces 12 côtés fût un minimum. Quelles doivent être, pour cela, les dimensions de la tabatière à construire?

Pour décomposer un produit donné en n facteurs positifs, de manière que la somme de leurs puissances m^{mes} soit un minimum, on doit prendre tous ces facteurs égaux entre eux.

Si l'on veut trouver n nombres positifs tels, que la somme de leurs puissances m^{mes} étant un nombre donné, le produit de ces n nombres

---

les droites menées des sommets à un même point intérieur, divisent l'espace autour de ce point en parties égales, celui où la somme de ces droites est la moindre possible, est le polygone régulier dont le centre est au point donné.

J'ai démontré ces deux théorèmes dans le 2^e vol. de la *correspondance Mathématique et Physique*, publiée par MM. GARNIER et QUETELET; ouvrage où les élèves des cours de Physique et de Mathématiques supérieures trouveront de quoi les intéresser.

soit un maximum, il faut prendre tous ces n nombres égaux entre eux.

S'il faut trouver n nombres positifs, de manière que la somme de tous les produits différens qu'ils donnent en les multipliant m à m, étant un nombre donné, le produit de ces m nombres soit un maximum, on devra prendre tous ces nombres égaux entre eux.

Pour décomposer un produit donné en n facteurs positifs tels, que la somme des produits qu'ils donnent en les multipliant m à m, soit un minimum, il faut prendre tous ces facteurs égaux entre eux.

Etant donnée la somme des carrés de n nombres inconnus; pour que la somme de leurs produits par des nombres déterminés, soit un maximum, il faut que ces nombres inconnus soit proportionnels à leurs multiplicateurs donnés.

Connaissant la somme des produits respectifs de n nombres inconnus par des nombres donnés; pour que la somme des carrés de ces n nombres inconnus soit un minimum, il faut que ces mêmes nombres inconnus soient proportionnels à leurs multiplicateurs donnés.

Pour partager un nombre donné a en n parties telles, que la somme de leurs carrés moins k fois la somme des produits qu'on obtient en multipliant chacune de ces parties par celle qui la suit immédiatement et la dernière par la première, donne le moindre reste possible, il fau prendre toutes ces mêmes parties égales entre elles.

La somme des carrés de n nombres inconnus, moins k fois la somme des produits qu'ils fournissent en multipliant chacun par celui qui le suit immédiatement et le dernier par le premier, donnant un reste connu; pour que la somme de ces n nombres soit un minimum, ils doivent être égaux entre eux.

Nota. Les 8 théorèmes qu'on vient d'énoncer, confirment l'assertion du n° 93; les deux premiers se démontrent par les mêmes calculs, ainsi que le 3^e et le 4^e, le 5^e et le 6^e, le 7^e et le 8^e.

Problèmes résolubles par les progressions.

100. *On a deux tonneaux de vin dans chacun desquels on prend une certaine partie du vin qu'il contient et on verse dans l'un le vin extrait de l'autre : on fait* n *fois successives cette double opération, en prenant successivement le quart, le 5^e, le 6^e, le 7^e, ..., le $(n+3)^{me}$; et alors les deux tonneaux renferment l'un* a *et l'autre* b *litrons de vin : combien en avaient-ils d'abord chacun ?*

Soit $a+b=h$; il est clair qu'il y aura toujours h litrons de vin dans les deux tonneaux. Soit R_v le vin restant dans le 1er avant la v^{me} opération, et R_{v+1} le vin restant après, le vin qui reste dans le 2e tonneau, avant la v^{me} opération, est $h - R_v$; on a par conséquent

$$R_{v+1} = R_v - \frac{R_v}{v+3} + \frac{h - R_v}{v+3};$$

d'où l'on tire $(v+3)R_{v+1} - (v+1)R_v = h$, et

$$(v+2)(v+3)R_{v+1} - (v+1)(v+2)R_v = (v+2)h.$$

Prenant successivement $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$, et observant que $R_{n+1} = a$, on aura

$$\begin{aligned}
&3 \cdot 4R_2 - 2 \cdot 3R_1 = 3h\\
&4 \cdot 5R_3 - 3 \cdot 4R_2 = 4h\\
&5 \cdot 6R_4 - 4 \cdot 5R_3 = 5h\\
&6 \cdot 7R_5 - 5 \cdot 6R_4 = 6h\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(n+2)(n+3)a - (n+1)(n+2)R_n = (n+2)h.
\end{aligned}$$

Ajoutant ces équations entre elles et observant que tous les termes des premiers membres se détruisent deux à deux, excepté $(n+2)(n+3)a$ et $-2 \cdot 3R_1$, on trouvera

$$(n+2)(n+3)a - 2 \cdot 3R_1 = h[3+4+5+6+\cdots+(n+2)];$$

d'où l'on tire, en prenant la somme de la progression,

$$R_1 = \frac{1}{6}(n+2)(n+3)a - \frac{n}{12}(n+5)(a+b).$$

Les quantités de vin R_1 et $a + b - R_1$, que les tonneaux contenaient d'abord, se trouvent ainsi déterminées.

101. *Un pigeon femelle donne tous les ans 4 pigeons femelles et 4 mâles; et chaque pigeon femelle d'une année est tué l'année suivante, après avoir fourni 4 pigeons femelles et 4 mâles. On demande combien il y aura de pigeons produits au bout de* n *années?*

Puisque le 1er pigeon et la moitié des P pigeons produits la v^{me} année, sont des femelles, chacun d'eux en produira 8 l'année suivante; le nombre de pigeons fournis pendant cette année suivante est donc $8 + \frac{1}{2}P \times 8$, ou $8 + 4P$. De sorte que le nombre de pigeons produits chaque année est 8 plus 4 fois ceux produits l'année précédente. D'après cela, le nombre de pigeons produits la première année étant 8, les pigeons fournis pendant les années 2e, 3e, 4e, 5e, ..., sont respectivement :

$8+8\cdot4$
$8+8\cdot4+8\cdot4^2$
$8+8\cdot4+8\cdot4^2+8\cdot4^3$
$8+8\cdot4+8\cdot4^2+8\cdot4^3+8\cdot4^4$
etc..........................

D'où l'on voit que le nombre de pigeons produits pendant la v^{me} année est

$$8+8\cdot4+8\cdot4^2+8\cdot4^3+\cdots+8\cdot4^{v-1}, \text{ ou } \tfrac{8}{3}(4^v-1).$$

Prenant successivement $v=1, 2, 3, 4, \ldots, n$, et ajoutant, on aura pour le nombre x de tous les pigeons produits pendant n années,

$$x=\tfrac{8}{3}(4+4^2+4^3+\cdots+4^n-n); \text{ d'où } x=\tfrac{8}{9}(4^{n+1}-4-3n).$$

102. *Deux vases* A *et* B, *dont les capacités sont respectivement* a *et* b, *sont remplis l'un et l'autre d'un mélange de vin et d'eau, dont la proportion est connue pour chaque vase. On a deux mesures égales, dont la contenance commune est* x, *et qu'on remplit en même temps dans les deux vases* A *et* B, *pour verser ensuite dans chacun le liquide extrait de l'autre. Ayant fait* n—1 *autres fois cette opération, on veut savoir,* 1° *combien il y a alors d'eau et de vin dans chaque vase?* 2° *quelle doit être la contenance commune* x, *pour que les deux derniers mélanges soient exactement de même nature?*

1° Soient c et d les deux quantités connues d'eau qui entrent d'abord dans les deux mélanges a et b. Il est clair que les deux vases A et B contiendront toujours les mêmes quantités a et b de liquide, après chaque opération. Soit R la quantité d'eau contenue dans le vase A, avant la v^{me} opération; l'eau contenue dans le vase B, avant la même opération, sera évidemment $c+d-R$. Or, prendre x litrons sur a litrons, c'est prendre les $\frac{x}{a}$ de a litrons; c'est donc prendre les $\frac{x}{a}$ de l'eau et les $\frac{x}{a}$ du vin qui composent le liquide a, puisque l'eau et le vin y sont exactement mêlés. Ainsi, par la v^{me} opération, on extrait du vase A, le nombre $\frac{x}{a}R$ litrons d'eau, et du vase B, le nombre $\frac{x}{b}(c+d-R)$ litrons d'eau. Donc, après cette opération, le vase A contient une quantité d'eau exprimée par

$$\left(1-\frac{x}{a}-\frac{x}{b}\right)R+\frac{x}{b}(c+d), \text{ ou par } mR+k,$$

et posant, pour abréger, $m=1-\frac{x}{a}-\frac{x}{b}$ et $k=\frac{x}{b}(c+d)$.

L'expression $mR+k$ montre que *pour avoir l'eau contenue dans le vase* A, *après une opération quelconque, il faut multiplier par* m *l'eau qu'il renfermait avant et ajouter* k *au produit.* D'après cette règle, puisque A contenait d'abord c litrons d'eau, il en contiendra, après les opérations 1re, 2e, 3e, 4e, 5e, ..., respectivement

$$\begin{array}{l} cm+k \\ cm^2+km+k \\ cm^3+km^2+km+k \\ cm^4+km^3+km^2+km+k \\ cm^5+km^4+km^3+km^2+km+k \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Sans qu'il soit besoin de continuer ces résultats, on voit que la quantité z d'eau contenue dans le vase A, après la n^{me} opération, est

$$z=cm^n+k+km+km^2+km^3+\cdots+km^{n-1};$$

d'où l'on tire

$$z=cm^n+k\,\frac{m^n-1}{m-1}.$$

Substituant la valeur de k et celle de m au dénominateur, on aura, réductions faites,

$$z=\frac{(bc-ad)}{a+b}m^n+\frac{a(c+d)}{a+b}\ \dots\ (1)$$

Avec cette valeur de z, on aura aisément les quantités de vin et d'eau contenues dans les deux vases, après la n^{me} opération. On peut faire $n=\infty$.

2° Puisqu'après la n^{me} opération le vase A contient toujours a litrons de liquide, chaque litron sera le a^{me} de ce liquide, et contiendra par conséquent le a^{me} de l'eau z qu'il renferme. De même, chaque litron du dernier mélange, dans le vase B, contiendra le b^{me} de l'eau $c+d-z$ que ce mélange renferme. Or, pour que les deux derniers mélanges soient exactement de même nature, il faut qu'un litron du premier contienne autant d'eau qu'un litron du second; on a par conséquent

$$\frac{z}{a} = \frac{c+d}{b} - \frac{z}{b}; \text{ d'où } z = \frac{a(c+d)}{a+b}.$$

Substituant la valeur (1) de z, puis supprimant le dénominateur commun $a+b$, ainsi que le terme $a(c+d)$, commun aux deux membres, il vient

$$(bc-ad)m^n = 0 \;\ldots.\; (2)$$

Lorsque $bc=ad$, ou que $a:b::c:d$, l'équation (2) est satisfaite, quelle que soit la valeur de x, et le problème est indéterminé. C'est aussi ce que montre l'équation (1); car cette équation devenant alors $z=c$; quelque multipliées que soient les opérations et quelque valeur qu'on donne à x, l'état des deux mélanges demeure invariable.

Si bc n'est pas égal à ad, l'équation (2) donnera $m^n=0$ et par conséquent $m=0$; d'où l'on tire

$$1-\frac{x}{a}-\frac{x}{b}=0, \text{ ou } x=\frac{ab}{a+b} \;\cdots\; (3)$$

Comme cette valeur ne dépend pas de n et que $m^n=0$ ne peut avoir lieu que quand n n'est pas nul, on voit qu'en donnant à x la valeur (3), les deux mélanges seront exactement de même nature, dès la 1re opération. C'est ce que montre encore la formule (1), qui se réduit à son second terme, par $m=0$.

103. *On a* b *litrons d'eau dans* m *vases; on prend du 1er vase pour verser dans les* m—1 *autres, de manière que chacun de ceux-ci renferme* a *fois autant d'eau qu'il en contenait auparavant; on fait la même opération avec le 2e vase, puis avec le 3e, le 4e, le 5e ..., le* m*me. Après avoir recommencé ces* m *opérations successivement* n—1 *autres fois, les vases contiennent chacun la même quantité d'eau; on demande combien chacun en contenait avant la 1re opération.*

Soient R_1, R_2, R_3, R_4, ..., R_m, les quantités respectives d'eau contenues dans les vases proposés, avant de faire pour la ν^{me} fois les m opérations successives. A cette ν^{me} fois, on verse du 1er dans les $m-1$ autres, de manière que chacun de ceux-ci renferme a fois autant d'eau qu'il en contenait auparavant; on ajoute par conséquent à chacun de ces derniers $(a-1)$ fois l'eau qu'il renfermait; il restera donc dans le premier, après cette opération,

$$R_1-(a-1)(R_2+R_3+R_4+\cdots+R_m).$$

Et comme on a toujours $R_1+R_2+R_3+R_4+\cdots+R_m=b$, il s'ensuit qu'il reste dans le 1er vase, $R_1-(a-1)(b-R_1)$ ou $aR_1-(a-1)b$, ou encore aR_1-h, en posant $h=(a-1)b$.

L'expression aR_1-h nous apprend que pour avoir ce qui reste dans le vase duquel on a versé dans les $m-1$ autres, il faut multiplier par a ce qu'il contenait auparavant et soustraire h du produit. Quant aux $m-1$ autres vases, on sait déjà qu'après le versement, chacun renferme a fois autant d'eau qu'il en contenait auparavant. D'après cela, il est clair que les quantités d'eau contenues dans les vases, après les versemens 1er, 2^e, 3^e, 4^e, ..., m^{me}, sont respectivement :

$$\begin{array}{llll}
aR_1-h, & aR_2, & aR_3, & \ldots, aR_m \\
a^2R_1-ah, & a^2R_2-h, & a^2R_3, & \ldots, a^2R_m \\
a^3R_1-a^2h, & a^3R_2-ah, & a^3R_3-h, & \ldots, a^3R_m \\
a^4R_1-a^3h, & a^4R_2-a^2h, & a^4R_3-ah, & \ldots, a^4R_m \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
a^mR_1-a^{m-1}h, & a^mR_2-a^{m-2}h, & a^mR_3-a^{m-3}h, & \ldots, a^mR_m-h.
\end{array}$$

D'où l'on voit qu'après avoir fait pour la v^{me} fois les m versemens successifs, l'eau contenue dans le u^{me} vase est

$$a^mR_u-a^{m-u}h, \text{ ou encore } a^mR_u-p,$$

en posant $p=ha^{m-u}=(a-1)ba^{m-u}$. L'expression a^mR_u-p nous apprend qu'on aura l'eau qui reste dans le u^{me} vase, après avoir fait, pour la v^{me} fois, les m versemens successifs, en multipliant par a^m celle qu'il contenait avant cette fois, et en ôtant p du produit. Ainsi les quantités d'eau contenues dans le u^{me} vase après avoir fait les m versemens successifs, 1, 2, 3, 4, ..., n fois, x étant l'eau qu'il renfermait d'abord, sont respectivement:

$$\begin{array}{l}
a^mx-p \\
a^{2m}x-pa^m-p \\
a^{3m}x-pa^{2m}-pa^m-p \\
a^{4m}x-pa^{3m}-pa^{2m}-pa^m-p \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a^{mn}x-pa^{mn-n}-pa^{mn-2n}-\cdots-pa^m-p.
\end{array}$$

Or, l'eau contenue dans le u^{me} vase, après avoir fait n fois les m versemens successifs, est $\frac{b}{m}$; on a donc

$$a^{mn}x - p\,(1 + a^m + a^{2m} + \cdots + a^{mn-m}) = \frac{b}{m};$$

d'où
$$x = \frac{mp\,(a^{mn} - 1) + b\,(a^m - 1)}{ma^{mn}\,(a^m - 1)}.$$

Cette formule s'appliquera aux vases 1er, 2e, 3e, 4e, ..., m^{me}, en faisant successivement $u = 1, 2, 3, 4, \ldots, m$, dans la valeur de p.

104. Nous laissons à traiter par les progressions, les théorèmes et problèmes que voici :

La somme de n nombres entiers consécutifs quelconques est divisible par n ou par $\frac{1}{2}n$, suivant que n est impair ou pair.

Toute puissance de 2, diminuée de 1, est égale à la somme des diviseurs de cette puissance, excepté elle-même.

Trouver une progression arithmétique de $n+7$ termes, dont la somme des n premiers fasse 40, celle des 4 termes suivans 86, et celle des 3 derniers 96.

Trouver une progression arithmétique telle, que la somme des 7 premiers termes soit 49, celle des 7 derniers 651 et celle de tous les termes 2500.

Dans une progression géométrique, le produit des deux extrêmes est 576; la somme des carrés des 2 premiers termes 45, et la somme des carrés des deux derniers 46080. Quelle est cette progression?

Quelle est la progression géométrique dont le nombre de termes est impair? On sait que 140 est la somme du premier et du moyen termes, 3780 celle du dernier et du moyen, et que la somme de tous les termes surpasse la raison de 5462.

Un pigeon femelle donne tous les ans 6 pigeons, 3 femelles et 3 mâles; de même, chaque femelle produite fournit tous les ans 6 pigeons, 3 femelles et 3 mâles, et ainsi de suite. Combien y aura-t-il de pigeons produits au bout de n années?

Un particulier achète tous les ans un pigeon femelle, qui lui donne 3 pigeons mâles chaque année suivante; combien aura-t-il de pigeons mâles après n années.

Une génisse donne un veau mâle la 1re année, un veau femelle la 2e, et ainsi de suite, alternativement; il en est de même de chaque veau femelle produit : on demande combien il y aura de veaux en tout, après n années.

Trouver un nombre tel, qu'en en prenant la moitié et le nombre a; le tiers du reste et le nombre a; le quart du 2e reste et le nombre a; le cinquième du 3e reste et le nombre a, et ainsi de suite, il reste b après la n^{me} opération.

Deux vases renferment l'un a et l'autre b litrons d'eau : on prend une certaine partie de l'eau du 1er pour la verser dans le 2me, et ensuite la même partie de l'eau du 2me pour la verser dans le 1er : on fait n fois successives ce couple de versemens. Combien y a-t-il alors d'eau dans chaque vase, sachant qu'on a pris successivement la moitié, le tiers, le quart, le 5^e, le 6^e, le 7^e, ..., le $(n+1)^{me}$. [Même problème, lorsqu'on prend constamment la c^{me} partie.]

Dans deux vases, on a deux mélanges d'eau et de vin, l'un de a et l'autre de b litrons de liquide, contenant respectivement c et d litrons d'eau. On verse x litrons du 1^{er} mélange dans le 2^{me}, et ensuite, après avoir bien laissé mêler l'eau et le vin, on verse x litrons du 2^{me} mélange dans le 1^{er} : on fait $n-1$ autres fois de suite ce couple de versemens, et l'on demande, 1° combien il y aura d'eau alors dans le 1^{er} vase; 2° quelle devra être la valeur de x pour que les deux derniers mélanges soient exactement de même nature.

On a trois vases A, B, C, contenant respectivement a, b, c, litres d'eau. On verse dans B le d^{me} de l'eau de A et m litres de C, puis dans A le d^{me} de l'eau de B et m litres de C : on fait $n-1$ autres fois ces deux opérations successives; combien y a-t-il alors d'eau dans chacun des vases proposés?

On a m vases contenant des mélanges d'eau et de vin, composés respectivement de a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_m litres de vin, et de b_1, b_2, b_3, b_4, ..., b_m litres d'eau. On verse dans le 1^{er}, le c^{me} des mélanges de tous les autres, puis dans le 2^e, le c^{me} des mélanges de tous les autres, dans le 3^e, le c^{me} des mélanges de tous les autres, ..., enfin, dans le m^{me}, le c^{me} des mélanges de tous les autres : après avoir fait n fois ces m opérations successives, on voudrait savoir quelles seront alors les quantités d'eau et de vin contenues dans chacun des vases proposés. [On peut supposer tous les a égaux entre eux, ainsi que tous les b; on peut aussi faire croître ou décroître tous les a d'après une certaine loi, de même que tous les b.]

Exercices sur le calcul des Radicaux.

105. Réduire à leurs plus simples expressions les quantités :

$$\sqrt{(a^2b - 4ab + 4b)},\ \sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{8},\ \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{24},$$

$$\sqrt{27(x+1)(x^2-1)},\ \sqrt[3]{x^4 + 18x^3 + 108x^2 + 216x},$$

$$\sqrt[3]{(8a + 24)} - \sqrt[3]{(125a + 375)},\ \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{128},$$

$$a\sqrt{\left(\frac{a^2-a}{a+1}\right)} + a\sqrt{\left(\frac{a}{a^2-1}\right)} - \sqrt{\left(\frac{a}{a^2-1}\right)},$$

$$\sqrt[4]{an^4 - n^4x} - \sqrt[4]{a-x},\ \sqrt[5]{a^7(a^2-x^2)^6(a+x)^4},$$

$$\sqrt{27(a^2-b^2)(a+b)} - \sqrt{12a^3 - 12a^2b},\ \sqrt{2\sqrt[3]{16}}.$$

106. Trouver les formes les plus simples des produits :

$(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2}-1)$, $(6\sqrt{3}-6)(2+2\sqrt{3})$,
$\left(\sqrt[3]{12+\sqrt{19}}\right)\left(\sqrt[3]{12-\sqrt{19}}\right)$, $(x+y\sqrt{-1})(x-y\sqrt{-1})$,
$\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\right)\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right)$, $\sqrt[3]{5\sqrt{2}}\times\sqrt[3]{25\sqrt{6}}$.

107. Trouver les expressions les plus simples des quotiens, dans les divisions que voici indiquées :

$8:(2-\sqrt{3})$, $(a^3b-ab^2c):(a^2+a+\sqrt{bc})$,
$(18+9\sqrt{3}+12\sqrt{5}+6\sqrt{15}):(3+2\sqrt{5})$,
$(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}):(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})$, $2\sqrt[4]{24\sqrt[3]{18}}:\sqrt{2\sqrt{12}}$,
$5\sqrt[3]{9\sqrt{72}}:\sqrt[4]{27\sqrt{18}}$, $6:(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3})$.

Lorsque le diviseur a plusieurs termes, on doit chercher à le rendre rationnel. Or, s'il était $\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}$, il suffirait de multiplier le dividende et le diviseur par $\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$; et ainsi des autres.

108. Développer les puissances que voici indiquées :

$(\sqrt{5}-1)^2$, $(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3})^3$, $\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right)^2$
$(1+\sqrt{7})^5$, $(1+\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$, $(2-\sqrt{2})^4$ et $\left(\sqrt{2\sqrt[3]{18}}\right)^3$.

109. Il est aisé de trouver les racines carrées des quantités :

$$2\sqrt[3]{18},\quad \sqrt[5]{a^2-2ab+b^2}\quad \text{et}\quad a^2-2x\sqrt{a^2-x^2}.$$

En général, si l'on regarde chaque radical comme portant sur tout ce qui le suit, on aura

$$\sqrt{}4\sqrt[3]{}16\sqrt[5]{}4\sqrt[6]{}4\sqrt[7]{}64\sqrt[8]{}256=2\sqrt[4]{8},$$

$$\sqrt[2n+1]{}a^n\sqrt[2n-1]{}a^{n-1}\ldots\sqrt[9]{}a^4\sqrt[7]{}a^3\sqrt[5]{}a^2\sqrt[3]{}a\sqrt{}a=\sqrt{a},$$

$$\sqrt{}3\sqrt{}3\sqrt{}3\sqrt{}3\sqrt{}3\sqrt{}3\sqrt{}3\sqrt{}3 \text{ etc., à l'infini, } =3.$$

110. *Extraire s'il est possible, la racine* n^{me} *de* $a\pm\sqrt{b}$.

Pour y parvenir, soit posé $\sqrt[n]{(a\pm\sqrt{b})}=x\sqrt[n]{z}$; d'où

$$a \pm \sqrt{b} = zx^n \text{ et } x^{2n} - \frac{2a}{z}x^n + \frac{a^2-b}{z^2} = 0 \ldots (1)$$

Prenons $\sqrt[n]{\frac{a^2-b}{z^2}} = c$, ou $\frac{a^2-b}{z^2} = c^n$, et divisons les deux membres de l'équation (1) par x^n; nous aurons

$$x^n + \frac{c^n}{x^n} - \frac{2a}{z} = 0 \ldots (2)$$

Posons $x + \frac{c}{x} = u$; d'où $x = \frac{1}{2}u \pm \sqrt{\frac{1}{4}u^2 - c} \ldots (3)$.

Si c n'était pas rationnel, cette nouvelle expression de x serait plus compliquée que la première, et la racine n^{me} de $a \pm \sqrt{b}$ ne serait pas possible. Il faudra donc toujours disposer de z, de manière que c soit commensurable; et si aucune des valeurs entières de z ne satisfait à cette condition, la racine demandée n'existera pas.

Supposons donc que c soit rationnel; alors la formule (3) fera connaître x dès que u sera déterminé. Or, pour trouver u, soit élevée l'équation $x + \frac{c}{x} = u$, successivement aux puissances 2^e, 3^e, 4^e, 5^e, 6^e, 7^e, etc.; soit mis partout u à la place de $x + \frac{c}{x}$, et successivement dans chaque résultat les valeurs de

$$x^2 + \frac{c^2}{x^2},\ x^3 + \frac{c^3}{x^3},\ x^4 + \frac{c^4}{x^4},\ x^5 + \frac{c^5}{x^5},\ \ldots,$$

tirées des résultats précédens; ayant égard en outre à l'équation (2), où n vaudra successivement 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc., et posant, pour abréger, $\frac{2a}{z} = d$, on aura

$$\begin{aligned}
&u^2 - 2c - d = 0\\
&u^3 - 3cu - d = 0\\
&u^4 - 4cu^2 + 2c^2 - d = 0\\
&u^5 - 5cu^3 + 5c^2u - d = 0\\
&u^6 - 6cu^4 + 9c^2u^2 - 2c^3 - d = 0\\
&u^7 - 7cu^5 + 14c^2u^3 - 7c^3u - d = 0\\
&\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Dans ces équations, u doit être rationnel, ainsi que c, qui désigne successivement la racine 2^e, 3^e, 4^e, 5^e, 6^e, 7^e, etc. de $\frac{a^2-b}{z^2}$.

Connaissant u, par ces équations, d'après la méthode des diviseurs commensurables, on en substituera la valeur dans la formule (3), ce qui fera connaître x, et $x\sqrt[n]{z}$ sera la racine 2ᵉ, 3ᵉ, 4ᵉ, 5ᵉ, 6ᵉ, 7ᵉ, ..., de $a \pm \sqrt{b}$, suivant que n vaudra 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., c'est-à-dire, suivant qu'on aura employé la 1ʳᵉ, la 2ᵉ, la 3ᵉ, la 4ᵉ, la 5ᵉ, la 6ᵉ, la 7ᵉ, ..., des équations en u.

111. Pour appliquer la méthode précédente, proposons-nous d'extraire la racine cubique de $148 + 46\sqrt{11}$: on aura $a = 148$, $b = 23276$; d'où $a^2 - b = 21904 - 23276 = -1372 = -343 \times 4 = -4 \cdot 7^3$. Si donc on prend $z = 2$, il viendra $c = -7$, et $d = 148$. La 2ᵉ équation en u sera donc

$$u^3 + 21u - 148 = 0.$$

La seule racine commensurable de cette équation étant $u = 4$, cette valeur et celle de c donnent $x = 2 \pm \sqrt{11}$; on a donc

$$\sqrt[3]{148 + 46\sqrt{11}} = (2 + \sqrt{11})\sqrt[3]{2}.$$

112. Si l'on veut trouver la racine 4ᵐᵉ de $17 - 12\sqrt{2}$, on aura $a = 17$, $b = 288$ et $a^2 - b = 1$; d'où $z = 1$, $c = \pm 1$ et $d = 34$. Pour $c = 1$, la 3ᵉ des équations en u ne donne à u que des valeurs irrationnelles; il faut donc prendre $c = -1$; et alors on trouvera $u = 2$, $x = 1 \pm \sqrt{2}$ et

$$\sqrt[4]{17 - 12\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2}.$$

On voit qu'il faut avoir égard à la double valeur de c, quand elle a lieu. Si l'on applique la méthode dont nous venons de fournir deux exemples, on obtiendra

$$\sqrt{6 - 4\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2},\ \sqrt[3]{2 + 2\sqrt{-1}} = -1 + \sqrt{-1},$$
$$\sqrt[6]{289 - 323\sqrt{20}} = 2 - \sqrt{5},\ \sqrt[7]{8 + 8\sqrt{-1}} = 1 - \sqrt{-1}$$
et $$\sqrt[5]{288 + 132\sqrt{3}} = (1 + \sqrt{3})\sqrt[5]{3}.$$

Dans l'avant dernier exemple, il faut donner le signe $-$ au radical de la racine, quoique celui de l'expression proposée ait le signe $+$, parce que la puissance 7ᵐᵉ de $1 + \sqrt{-1}$ est $8 - 8\sqrt{-1}$. Cette exception vient du radical imaginaire $\sqrt{-1}$.

Exercices sur la résolution de certaines équations.

113. Qu'on ait d'abord à résoudre les équations

$x = (27)^{\frac{1}{3}}$ et $y = (27)^{\frac{2}{6}}$; d'où $x^3 - 3^3 = 0$ et $y^6 - 3^6 = 0$.

Il est clair que ces deux équations peuvent s'écrire comme il suit :

$$(x-3)(x^2-3x+9)=0,$$

$$(y-3)(y+3)(y^2-3y+9)(y^2+3y+9)=0.$$

La première équation a trois racines, dont deux imaginaires; la seconde a les trois mêmes racines, plus trois autres, dont deux imaginaires.

114. Lorsque l'équation à résoudre contient des radicaux, il faut d'abord les faire disparaître. Or, pour chasser un radical d'une équation, il suffit de le laisser seul dans un membre et d'élever de part et d'autre à la puissance marquée par l'indice de ce radical. Par exemple, si on a

$$\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{3x-5} = 1,$$

on chassera successivement le radical cubo et le radical carré; ce qui donnera $x^3 - 24x^2 + 21x + 46 = 0$;

d'où $x = 2, 23, -1$. La dernière racine satisfait à l'équation que donne la proposée en y prenant $\sqrt{x+2}$ avec le signe $-$.

115. Si d'abord on avait fait disparaître le radical carré, il aurait été impossible de chasser ensuite le radical cubique. En général, il n'est pas toujours possible de faire disparaître les radicaux d'une équation, d'après la méthode précédente. Mais on évite toutes les difficultés en représentant chaque radical par une inconnue auxiliaire. Par exemple, qu'on ait

$$\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x} - 7\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} + 6 = 0:$$

on fera seulement $x = z^6$, et la transformée sera

$$z^4 - z^3 - 7z^2 + z + 6 = 0;$$

d'où $z = 1, 3, -1, 2$ et $x = 1, 729, 1, 64$. La valeur $x = 64$ ne satisfait pas à l'équation proposée; mais bien à celle qu'on trouve en y changeant les signes des radicaux de degré pair.

116. Considérons encore l'équation

$$\sqrt[5]{x^{18}} - 794\sqrt[5]{x^{12}} + 47449\sqrt[5]{x^{6}} - 46656 = 0:$$

si l'on pose $x^6 = z^5$, la transformée sera

$$z^3 - 794z^2 + 47449z - 46656 = 0.$$

Cette transformée donne $z = 1,\ 64,\ 729$; d'où à cause de $x^6 = z^5$ ou de $x^6 - z^5 = 0$, on tire les trois équations

$$x^6 - 1 = 0,\quad x^6 - 32^6 = 0 \quad \text{et} \quad x^6 - 243^6 = 0.$$

Ces équations font aisément connaître les 18 valeurs de x qui satisfont à l'équation proposée en mettant dans celle-ci les cinq valeurs dont chaque radical du 5^e^ degré est susceptible.

117. Lorsqu'on prend $z = x^3$ et $t = y^2$, il est aisé de résoudre les deux équations :

$$\sqrt[3]{z^2} - 2\sqrt[3]{z}\sqrt{t} + t - 1 = 0 \quad \text{et} \quad \sqrt[3]{z^2} + 6\sqrt{t} - t - 9 = 0.$$

En représentant chaque radical par une inconnue auxiliaire, on résout facilement les équations que voici :

$$\sqrt[3]{(x+2)} - \sqrt[3]{(x-17)} = 1;$$
$$\sqrt[5]{(x+43)} - \sqrt[5]{(x-199)} = 2;$$
$$x + y - \sqrt[3]{xy} = a \quad \text{et} \quad \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = b;$$
$$xy = a \quad \text{et} \quad \sqrt[r]{x^m} + \sqrt[r]{y^m} = b;$$
$$x + y + \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{y^2} = 154 \quad \text{et} \quad \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 7.$$

118. Nous avons déjà vu plusieurs fois que les inconnues auxiliaires peuvent simplifier la résolution des équations. C'est ce que nous allons voir encore. Considérons d'abord les deux groupes ou systèmes d'équations :

$$\left.\begin{aligned} xyz(x+y+z) &= 216 \\ x^2y^2z^2(x^2+y^2+z^2) &= 16704 \\ x^3y^3z^3(x^3+y^3+z^3) &= 1368576 \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} p(x^2+y^2+z^2) &= a \\ p(x^3+y^3+z^3) &= b \\ p(x^4+y^4+z^4) &= c, \end{aligned}$$

p désignant $x+y+z$. Pour résoudre chacun de ces systèmes, on prendra

$$x + y + z = p,\quad xy + xz + yz = q \quad \text{et} \quad xyz = r;$$

alors, d'après la composition des équations, x, y, z, seront les racines de l'équation

$$\varphi^3 - p\varphi^2 + q\varphi - r = 0:$$

et il reste à déterminer p, q, r, en élevant les deux membres de la première équation auxiliaire, successivement aux puissances 2ᵉ, 3ᵉ, 4ᵉ, puis en substituant dans les équations proposées.

On résoudrait de même les deux systèmes d'équations :

$$\begin{array}{l|l}
(x+y+z)(x+y+z)=a & xyz(x+y+z)=a \\
(xy+xz+yz)(x^2+y^2+z^2)=b & xyz(xy+xz+yz)=b \\
xyz(x^3+y^3+z^3)=c & (x+y+z)(xy+xz+yz)=c.
\end{array}$$

119. Considérons actuellement les deux groupes :

$$\begin{array}{l|l}
uxy(u+x+y)=a & uxyz(u+x+y)=a \\
xyz(x+y+z)=b & uxyz(x+y+z)=b \\
yzu(y+z+u)=c & uxyz(y+z+u)=c \\
zux(z+u+x)=d & uxyz(z+u+x)=d.
\end{array}$$

Pour résoudre ces deux systèmes, on posera dans chacun

$$u+x+y+z=\varphi \quad \text{et} \quad uxyz=\omega.$$

Remarquons bien que les deux méthodes précédentes s'appliquent à n équations de même forme que les équations des systèmes que ces méthodes résolvent.

120. Soient encore à résoudre les trois équations

$$\begin{aligned}
xyz(x^2+y^2+z^2)&=-12\\
x^2y^2z^2(x^4+y^4+z^4)&=72\\
x^4y^4z^4(x^8+y^8+z^8)&=4128.
\end{aligned}$$

On posera d'abord

$$x^2+y^2+z^2=v,\ xyz=u \ \text{et}\ x^4+y^4+z^4=t.$$

Elevant au carré la première de ces équations, ainsi que l'équation résultante, et ayant égard aux deux autres équations auxiliaires, on aura les valeurs de $x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2$ et $x^4y^4+x^4z^4+y^4z^4$. Ces valeurs étant substituées dans le carré de la troisième équation auxiliaire, donneront

$$x^8+y^8+z^8=\tfrac{1}{2}(t^2-v^4+2v^2t)+4u^2v.$$

Ainsi les équations proposées deviennent

$$uv=-12,\ u^2t=72 \ \text{et}\ u^4t^2-u^4v^4+2u^4v^2t+8u^6v=8256;$$

d'où l'on tire, en négligeant les valeurs imaginaires,

$$u=-2,\ v=6 \ \text{et}\ t=18.$$

Ces valeurs donnent aisément

$x^2+y^2+z^2=6,\ x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2=9$ et $x^2y^2z^2=4.$

De sorte que x^2, y^2, z^2 sont les racines de l'équation

$$\varphi^3-6\varphi^2+9\varphi-4=0,$$

et qu'on a par conséquent $x^2=4$, $y^2=1$ et $z^2=1$; d'où l'on tire les 8 systèmes de valeurs :

$$\begin{aligned}
x&=2,+2,+2,+2,-2,-2,-2,-2;\\
y&=1,+1,-1,-1,+1,+1,-1,-1;\\
z&=1,-1,+1,-1,+1,-1,+1,-1.
\end{aligned}$$

Mais quatre seulement de ces systèmes satisfont aux équations proposées.

Voici encore deux systèmes d'équations à résoudre :

$x^2+y^2=13$ et $x^3+y^3=35$;

$x+y+z=6,\ x^2+y^2+z^2=14$ et $x^3+y^3+z^3=36.$

121. En faisant un usage convenable d'inconnues auxiliaires, il ne sera pas difficile de résoudre les divers systèmes d'équations que voici :

$$(x+y)(x^2+y^2)=a \text{ et } (x^2+y^2)(x^3+y^3)=b;$$

$$\begin{array}{l|l}
xyz(x+y+z)=a & (x+y+z)(x^2+y^2+z^2)=a\\
xyz(x^2+y^2+z^2)=b & (x+y+z)(x^3+y^3+z^3)=b\\
xyz(x^4+y^4+z^4)=c & (x+y+z)(x^4+y^4+z^4)=c
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)=a & xyz(xy+xz+yz)=a\\
(x^2+y^2+z^2)(x^3+y^3+z^3)=b & xyz(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)=b\\
(x^3+y^3+z^3)(x^4+y^4+z^4)=c & xyz(x^3y^3+x^3z^3+y^3z^3)=c
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
(xy+xz+yz)(x+y+z)=a & (x+y+z)(xy+xz+yz)=a\\
(xy+xz+yz)(x^2+y^2+z^2)=b & (x^2+y^2+z^2)(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)=b\\
(xy+xz+yz)(x^3+y^3+z^3)=c & (x^3+y^3+z^3)(x^3y^3+x^3z^3+y^3z^3)=c
\end{array}$$

122. Voici plusieurs équations, où les exposans sont des nombres quelconques, positifs ou négatifs :

$$\begin{array}{l|l}
x^n+y^n=ax^m+ay^m & (x^m+y^m)x^n=ay^v\\
x^n+y^n=bx^m-by^m & (x^m+y^m)y^n=bx^v
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
(xyz)^m(x^n+y^n)=a & (xyz)^m(x^ny^n+x^nz^n)=a\\
(xyz)^m(x^n+z^n)=b & (xyz)^m(x^ny^n+y^nz^n)=b\\
(xyz)^m(y^n+z^n)=c & (xyz)^m(x^nz^n+y^nz^n)=c
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^m y^p z^q = a & x^m y^m (x^n y^n + x^n z^n + y^n z^n) = a z^v \\ x^p y^m z^q = b & x^m z^m (x^n y^n + x^n z^n + y^n z^n) = b y^v \\ x^q y^p z^m = c & y^m z^m (x^n y^n + x^n z^n + y^n z^n) = c x^v. \end{array}$$

$$x^n y^n + x^n z^n + y^n z^n = a x^v = b y^v = c z^v = d;$$

$$x^n + y^n + z^n + u^n = a x^v = b y^v = c z^v = d u^v = \varphi.$$

123. Il n'est pas nécessaire de faire usage des logarithmes pour résoudre les équations exponentielles que voici :

$$\begin{array}{l|l} 36^x = 8.9^x & 8^x - 4 = 4.8^{1-x} \\ 27^{2x-3} = 243^{-1} & 9^x + 5.9^{x-1} = 6.7^{2x-2} \\ 16^{x-1} = 4 & 2.4^x - 3.4^{x-1} + 5.4^{x-2} = 400 \\ 16^{x^2-x} = 128 & 9^x - 5.8^y = 7 \text{ et } 2.9^x + 8^y = 58 \\ 5^{8^x} = 625 & x^x = y^8 \text{ et } y^x = x^2 \\ 8^{9^{x-1}} = 16^{\frac{1}{3}}.2^{3^x} & x^{x+y} = y^3 \text{ et } y^{x+y} = x^{12} \\ 6^{2^{2x-10}} = 16.3^{2^y}. & x^x = y^{2x+5} \text{ et } x^{x-3} = y^{x+1} \end{array}$$

Dans la dernière équation de la première colonne, on donne, pour condition, que x et y soient des nombres entiers. Et la même condition a lieu dans $(x^2 + y^2).2^{x-y} = x^2 + 6y^2$. Enfin, si l'on a les trois équations

$$x^{x-3} = y^{y}, \quad x^{y+1} = y^{x+2} \text{ et } x^{2y-1} = y^{3y},$$

les inconnues seront déterminées ; mais elles ne le seraient pas si l'on ne prenait que deux quelconques de ces équations : il faudrait alors ajouter la condition que x et y fussent des nombres entiers.

De quelques séries numériques finies.

124. On appelle *série* une suite de quantités qui croissent ou décroissent d'après une certaine loi. Le *terme général* d'une série est celui qui fournit tous les autres par ses valeurs particulières. Une série est *numérique*, lorsque tous ses termes sont exprimés en chiffres. *Sommer* une série, c'est trouver une formule propre à calculer aisément sa valeur.

125. Voyons d'abord comment on trouve la série au moyen de la *partie variable* qui entre dans la somme de tous ses ter-

mes. Soit par exemple $(-1)^v . v(v+1)$ cette partie variable; changeons-y v en $v-1$, puis retranchons-la du résultat et réunissons les multiplicateurs de $(-1)^{v-1}.v$; nous aurons

$$2(-1)^{v-1}.v^2 = -(-1)^v.v(v+1)+(-1)^{v-1}(v-1)v.$$

Faisant dans cette identité, successivement $v = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n$, il viendra

$$\begin{array}{l}
+2.1^2 = +1.2+0 \\
-2.2^2 = -2.3-1.2 \\
+2.3^2 = +3.4+2.3 \\
-2.4^2 = -4.5-3.4 \\
+2.5^2 = +5.6+4.5 \\
-2.6^2 = -6.7-5.6 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\pm 2.n^2 = \pm n(n+1) \pm (n-1)n.
\end{array}$$

Ajoutant ces n identités entre elles, puis observant que les termes des seconds membres se détruisent deux à deux, excepté $\pm n(n+1)$, il viendra, en divisant par 2,

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots \pm n^2 = \pm \tfrac{1}{2}n(n+1).$$

Le premier membre est la série cherchée, et le second, la somme de cette série. On voit d'ailleurs que le signe + n'a lieu que pour n impair.

126. Il résulte de cet exemple, que *pour trouver la série numérique dont on connait la partie variable de la somme des* v *premiers termes, il faut indiquer la différence entre cette partie et ce qu'elle fournit quand on y change* v *en* v—1 *ou en* v+1; *décomposer cette différence en facteurs fonctions de* v; *puis faire successivement, dans l'identité résultante,* v = 1, 2, 3, 4, 5, ..., n; *ajouter entre elles les* n *nouvelles équations, et réduire dans le second membre seulement : le premier sera la série cherchée.*

127. D'après cette règle, si l'on veut avoir la série que fournit le produit de $v+1$ facteurs $(a+1)(a+2)(a+3)\ldots(a+v+1)$, il faudra changer v en $v-1$, retrancher le résultat de l'expression qui l'a donné et décomposer la différence en facteurs. Or, en opérant ainsi, on trouvera

$$(a+1)(a+2)(a+3)\cdots(a+v-1)(a+v)^2 =$$
$$(a+1)(a+2)\cdots(a+v+1)-(a+1)(a+2)\cdots(a+v).$$

Faisant successivement $v=1, 2, 3, 4, \ldots, n$; ajoutant les n identités résultantes et réduisant dans le second membre seulement, il viendra la formule

$$\begin{gathered}(a+1)^2+(a+1)(a+2)^2+\cdots+(a+1)\cdots(a+n-1)(a+n)^2\\=-(a+1)+(a+1)(a+2)(a+3)\cdots(a+n+1).\end{gathered}$$

128. Soit encore le produit $\frac{1}{a+1}\,v(v+1)(v+2)\cdots(v+a)$. Si l'on y change v en $v-1$, et que l'on opère comme dans le cas précédent, on trouvera la formule

$$\begin{gathered}1\cdot2\cdot3\cdots a+2\cdot3\cdot4\cdots(a+1)+3\cdot4\cdot5\cdots(a+2)+\cdots+\\n(n+1)(n+2)\cdots(n+a-1)=\frac{n}{a+1}(n+1)(n+2)\cdots(n+a).\end{gathered}$$

Dans cette formule, chaque terme du premier membre a pour facteurs a nombres entiers consécutifs, dont le 1$^{\text{er}}$ est 1 dans le 1$^{\text{er}}$ terme, 2 dans le 2$^{\text{e}}$, 3 dans le 3$^{\text{e}}$, etc. Il existe deux autres formules analogues, l'une pour les nombres pairs et l'autre pour les nombres impairs. Si l'on fait successivement $a=2, 3, 4$, etc., on aura successivement

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5+\cdots+n(n+1)=\frac{n}{3}(n+1)(n+2),$$
$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{n}{4}(n+1)(n+2)(n+3),$$
etc. ....

129. La valeur *réciproque* d'une quantité est l'unité divisée par cette quantité; mais on appelle *inverse* d'une série, la suite de quotiens obtenus en divisant l'unité par chaque terme de cette série. Il est facile de s'assurer, au moyen de la valeur réciproque du produit $(v+1)(v+2)(v+3)\cdots(v+a)$, que l'inverse de la série générale du n° précédent est

$$\begin{gathered}\frac{1}{1\cdot2\cdots(a+1)}+\frac{1}{2\cdot3\cdots(a+2)}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+a)}\\=\frac{1}{a\cdot2\cdot3\cdots(a+1)}-\frac{1}{an(n+1)(n+2)\cdots(n+a)}.\end{gathered}$$

130. Les séries numériques que l'on considère ordinairement, sont celles des *nombres figurés*, ainsi nommés à cause de leurs rapports avec certaines figures de géométrie. Prenons, par ex., l'expression $\frac{1}{6}v(v+1)(av-2v-a+5)$, et traitons cette expression, d'après la règle du n° 126; nous en déduirons la formule :

$$1+a+(3a-3)+(6a-8)+(10a-15)+(15a-24)+\cdots+\tfrac{1}{2}n(an-2n-a+4)=\frac{n}{6}(n+1)(an-2n-a+5).$$

Cette formule est celle des nombres *polygones* : en y faisant successivement $a=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$, etc., elle donne les séries des nombres *naturels*, des nombres *triangulaires*, des nombres *carrés*, des nombres *pentagones*, des nombres *hexagones*, etc. Voici ces séries :

$$1+2+3+4+5+\cdots+n=\tfrac{1}{2}n(n+1)$$
$$1+3+6+10+\cdots+\tfrac{1}{2}n(n+1)=\tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$
$$1+4+9+25+\cdots+n^2=\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$1+5+12+22+\cdots+\tfrac{1}{2}n(3n-1)=\tfrac{1}{2}n^2(n+1)$$
$$1+6+15+28+\cdots+n(2n-1)=\tfrac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$$

etc. ....

131. En appliquant la règle du n° 126, les deux expressions

$$\frac{(u+c)(u+2c)\cdots(u+vc)}{c\cdot 2c\cdots vc}\quad\text{et}\quad\frac{c\cdot 2c\cdots(v+1)c}{(u+c)(u+2c)\cdots(u+vc)},$$

fourniront les deux séries générales que voici :

$$1+\frac{u}{c}+\frac{u(u+c)}{c\cdot 2c}+\cdots+\frac{u(u+c)\cdots(u+nc-c)}{c\cdot 2c\cdots nc}$$
$$=\frac{(u+c)(u+2c)(u+3c)\cdots(u+nc)}{c\cdot 2c\cdot 3c\cdots nc};$$

$$\frac{c}{u+c}+\frac{c\cdot 2c}{(u+c)(u+2c)}+\cdots+\frac{c\cdot 2c\cdots nc}{(u+c)(u+2c)\cdots(u+nc)}$$
$$=\frac{c}{u-1}\left[1-\frac{2c\cdot 3c\cdots(n+1)c}{(u+c)(u+2c)\cdots(u+nc)}\right].$$

La seconde de ces formules est l'inverse de la première. Remplaçant vc par $2v-1$; ce qui sera remplacer c par 1, $2c$ par 3, $3c$ par 5, $4c$ par 7, ..., nc par $2n-1$, les deux séries précédentes en fourniront deux autres, qui seront pour les nombres impairs, ce que les formules données par la supposition de $c=2$, sont pour les nombres pairs.

132. Les deux séries du n° précédent ont lieu qu'elles que soient les valeurs positives ou négatives des lettres qui les composent ; on peut donc en déduire une infinité de séries numériques. Par exemple, si dans la première on fait successivement $c=1$ et $u=2,\ 3,\ 4,\ 5$, etc. ; qu'ensuite on change $n+1$ en n dans les résultats, on aura

$$1+2+3+4+5+\cdots+n=\tfrac{1}{2}n(n+1),$$
$$1+3+6+10+15+\cdots+\tfrac{1}{2}n(n+1)=\tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2),$$
$$1+4+10+20+35+\cdots+\tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$
$$=\tfrac{n}{24}(n+1)(n+2)(n+3),$$
$$1+5+15+35+70+\cdots+\tfrac{n}{24}(n+1)(n+2)(n+3)$$
$$=\tfrac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4),$$
etc. ....

La première de ces séries est la somme des nombres naturels, ou des *nombres figurés du second ordre*; la seconde, celle des nombres *triangulaires*, ou des nombres figurés du 3^e^ *ordre*; la troisième, celle des nombres *pyramidaux*, ou des nombres figurés du 4^e^ *ordre*; la quatrième est la somme des nombres figurés du 5^e^ *ordre*; et ainsi de suite. On voit que le terme général de chaque série est la somme de la série précédente (*).

133. En traitant les deux quantités $(a+vr)(a+vr+r)$ et aq^v, on aura la somme des n premiers termes d'une progression arithmétique et d'une progression géométrique. Si l'on considère les expressions

$$\frac{v+1}{v^2}, \quad \frac{(-1)^v}{v}, \quad \frac{(-1)^v(n+1)(n+2)\cdots(n+v)}{1\;.\;2\;\cdots\;v}, \quad (-1)^v v,$$
$$\frac{1}{v}, \quad \frac{1}{v(v+1)}, \quad \frac{1}{(v+1)\,2^{v+1}} \quad \text{et} \quad \frac{(-1)^v\cdot m^v}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots(v+1)},$$

on en déduira huit formules assez remarquables. Il en sera de même des formules fournies par les quatre expressions

$$(-1)^v v(v+1), (-1)^v v(v+1)(v+2), \frac{(-1)^v}{v(v+1)} \text{ et } \frac{(-1)^v}{v(v+1)(v+2)}.$$

134. Soient considérés les deux termes généraux

$$\frac{(a+b)\,(a+2b)\,(a+3b)\,(a+4b)\cdots\;(a+vb)}{(c+d)\,(c+2d)\,(c+3d)\,(c+4d)\cdots(c+vd-d)},$$
$$\frac{(a+bv)\,(a+bv+b)\,(a+bv+2b)\cdots\;(a+bv+br)}{(c+dv)\,(c+dv+d)\,(c+dv+2d)\cdots(c+dv+dr-d)},$$

(*) Il est aisé de voir que 91 est le 13^e^ nombre triangulaire; 1540 le 20^e^ nombre pyramidal; 17300 le 24^e^ nombre figuré du 4^e^ ordre; et ainsi de suite. Par exemple, si l'on demande le rang n du nombre pyramidal dont la valeur est a, on aura $\tfrac{1}{6}n\,(n+1)\,(n+2)=a$; d'où $n^3<6a$ et $(n+1)^3>6a$. Donc n est la racine cubique du plus grand cube contenu dans $6a$.

dans chacun desquels le numérateur a un facteur de plus que le dénominateur. En y appliquant la méthode, on en déduira deux formules tellement générales, qu'on pourra y donner telles valeurs qu'on voudra, positives ou négatives, aux lettres a, b, c, d. Et ces formules feront toujours prévoir la forme des séries dont elles donnent la sommation ; ce qui est avantageux.

135. Maintenant qu'on sait déterminer la série numérique finie dont la somme est donnée, il reste à résoudre le problème inverse, c'est-à-dire à trouver la somme lorsque la série est connue. Ce problème est beaucoup plus difficile que l'autre ; il est même souvent impossible. La règle suivante dit tout ce que nous pouvons prescrire à ce sujet :

Pour sommer, quand cela se peut, une série numérique donnée, il faut tâcher d'égaler son terme général en v, *soit à une fonction de termes généraux de séries dont on ait les sommations, soit à la différence de deux quantités variables en* v *telles, qu'en faisant* $v = n$ *dans l'une, on ait le même résultat qu'en faisant* $v = n + 1$ *dans l'autre. On obtiendra ainsi une identité qui conduira à la somme cherchée, en y faisant* $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$ *et en ajoutant les résultats.* Par exemple, soit la série

$$2\tfrac{1}{2} + 6\tfrac{1}{6} + 12\tfrac{1}{12} + 20\tfrac{1}{20} + 30\tfrac{1}{30} + 42\tfrac{1}{42} + \text{etc.};$$

il est aisé de voir que son terme général en v est $v(v+1) + \frac{1}{v(v+1)}$, et que par suite on a l'identité

$$v(v+1) + \frac{1}{v(v+1)} =$$
$$\frac{v}{3}(v+1)(v+2) - \tfrac{1}{3}(v-1)v(v+1) + \frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}.$$

Le second membre de cette identité est composé de deux différences, et les quantités de chaque différence sont telles, qu'en faisant $v = n$ dans l'une, on a le même résultat qu'en posant $v = n + 1$ dans l'autre. De là, en faisant $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$, on trouve que la somme de la série proposée est

$$\tfrac{1}{3}n(n+1)(n+2) + \frac{n}{n+1}.$$

136. Soit encore la série

$$1.3 - 1.2.4 + 1.2.3.5 - 1.2.3.4.6 + 1.2.3.4.5.7 - \text{etc.}$$

Son terme général en v est $(-1)^{v-1}.1.2.3.4\ldots v(v+2)$, et il n'est pas bien difficile de s'assurer qu'on a

$$(-1)^{v-1}.1.2.3.4\ldots v(v+2) =$$
$$(-1)^{v-1}.1.2.3.4\ldots v-(-1)^{v}.1.2.3.4\ldots v(v+1),$$

identité dans laquelle le second terme du second membre donne, en y faisant $v=n$, le même résultat qu'en prenant $v=n+1$ dans le premier. De là il est aisé de voir que la somme de la série proposée est

$$1 \pm 1.2.3.4.5\ldots n(n+1).$$

137. On peut appliquer la méthode précédente à la recherche des identités qui produisent les formules que voici :

$$\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}+\cdots+\frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{2.4.6.8\ldots\quad 2n}$$
$$=\frac{3.5.7.9\ldots(2n+1)}{2.4.6.8\ldots\quad 2n}-1;$$

$$\frac{2}{1}+\frac{2.4}{1.3}+\frac{2.4.6}{1.3.5}+\frac{2.4.6.8}{1.3.5.7}+\cdots+\frac{2.4.6.8\ldots\quad(2n)}{1.3.5.7\ldots(2n-1)}$$
$$=\frac{2.4.6.8\ldots(2n+2)}{3.1.3.5\ldots(2n-1)};$$

$$\frac{2.7}{3}-\frac{2.4.11}{3.5}+\frac{2.4.6.15}{3.5.7}-\frac{2.4.6.8.19}{3.5.7.9}+\cdots$$
$$+\frac{2.4\ldots(2n-2)(4n-1)}{3.5\ldots\quad(2n-1)}=\pm\frac{2.4.6\ldots\quad 2n}{1.3.5\ldots(2n-1)}+2;$$

$$\frac{3}{(1.2)^2}+\frac{5}{(2.3)^2}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2};$$

$$\frac{3}{1.2}-\frac{5}{2.3}+\frac{7}{3.4}-\frac{9}{4.5}+\cdots\pm\frac{2n+1}{n(n+1)}=1\pm\frac{1}{n+1};$$

$$\frac{a}{a+1}+\frac{a+1}{(a+1)(a+2)}+\frac{a+2}{(a+1)(a+2)(a+3)}+\cdots$$
$$+\frac{a+n-1}{(a+1)\cdots(a+n)}=1-\frac{1}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)};$$

$$1-2+3-4+5-6+\cdots\pm n=\pm\tfrac{1}{4}(2n+1)+\tfrac{1}{4};$$

$$1^2-3^2+5^2-7^2+\cdots\pm(2n-1)^2=\pm\tfrac{1}{2}(2n-1)(2n+1)-\tfrac{1}{2};$$

$$1^3-2^3+3^3-4^3+\cdots\pm n^3=\pm\tfrac{1}{8}(2n+1)[2n(n+1)-1]-\tfrac{1}{8};$$

$$1^4-2^4+3^4-4^4+\cdots\pm n^4=\pm\tfrac{1}{2}n(n+1)[n(n+1)-1];$$

$$1.3.1^2+2.4(1.2)^2+3.5(1.2.3)^2+4.6(1.2.3.4)^2+\cdots$$
$$+(n-1)(n+1)[1.2.3\ldots(n-1)]^2=(2.3.4.5\ldots n)^2-1;$$

$$1.2-2.3+3.4-4.5+\cdots\pm n(n+1)=\pm\tfrac{1}{2}(n+1)^2+k;$$

$$(a+r)^2-(a+2r)^2+(a+3r)^2-(a+4r)^2+\cdots\pm(a+nr)^2$$
$$=\tfrac{a}{2}(a+r)\pm\tfrac{1}{2}(a+nr)(a+nr+r).$$

Dans l'avant-dernière de ces formules, k est nul ou $\frac{1}{2}$ suivant que n est impair ou pair.

138. Les sommes les plus utiles à connaître, dans les séries numériques, sont celles des premières puissances des n premiers nombres entiers. Or, pour trouver ces sommes, désignons par S_m (qu'on énonce S, *m ième*), la quantité $1^m+2^m+3^m+4^m+\cdots+n^m$, de manière que S_1 représente la somme des n premiers nombres entiers, S_2 la somme de leurs carrés, S_3 celle de leurs cubes, S_4 celle de leurs puissances quatrièmes, etc. Cela posé, on a évidemment, d'après la formule du binome, et m étant entier positif,

$$(1+v)^m=1+mv+c_2v^2+c_3v^3+\cdots+mv^{m-1}+v^m.$$

Faisant successivement $v=1, 2, 3, 4, \ldots, n$, puis ajoutant les n identités résultantes et effaçant les termes communs aux deux membres de la nouvelle équation, on obtiendra

$$(1+n)^m=n+1+mS_1+c_2S_2+c_3S_3+c_4S_4+\cdots+mS_{m-1}.$$

D'après la manière dont on a trouvé cette formule, il est clair qu'on ne doit prendre, dans le second membre, que la somme de tous les termes qui précèdent celui dans lequel le numéro de S est égal à la valeur de l'exposant m.

Faisant donc successivement $m=2, 3, 4, 5, 6, 7$, etc., cette formule donnera, en ayant égard aux valeurs en m des coefficiens c_2, c_3, c_4, etc. :

$$(1+n)^2=1+n+2S_1$$
$$(1+n)^3=1+n+3S_1+3S_2$$
$$(1+n)^4=1+n+4S_1+6S_2+4S_3$$
$$(1+n)^5=1+n+5S_1+10S_2+10S_3+5S_4$$
$$(1+n)^6=1+n+6S_1+15S_2+20S_3+15S_4+6S_5$$
$$(1+n)^7=1+n+7S_1+21S_2+35S_3+35S_4+21S_5+7S_6$$

etc. . . . .

De ces formules il est aisé de tirer les valeurs de S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, etc.; car en substituant chaque valeur dans toutes celles qui la suivent et décomposant en facteurs, on trouve

$$S_1 = \tfrac{1}{2}n(n+1)$$
$$S_2 = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$S_3 = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$$
$$S_4 = \tfrac{1}{30}n(n+1)(2n+1)[3n(n+1)-1]$$
$$S_5 = \tfrac{1}{12}n^2(n+1)^2[2n(n+1)-1]$$
$$S_6 = \tfrac{1}{42}n(n+1)(2n+1)\{3n[n^2(n+1)-1]+1\}.$$

139. Effectuant les multiplications indiquées et réduisant, on obtient

$$S_1 = \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n$$
$$S_2 = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n$$
$$S_3 = \tfrac{1}{4}n^4 + \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{1}{4}n^2$$
$$S_4 = \tfrac{1}{5}n^5 + \tfrac{1}{2}n^4 + \tfrac{1}{3}n^3 - \tfrac{1}{30}n$$
$$S_5 = \tfrac{1}{6}n^6 + \tfrac{1}{2}n^5 + \tfrac{5}{12}n^4 - \tfrac{1}{12}n^2$$
$$S_6 = \tfrac{1}{7}n^7 + \tfrac{1}{2}n^6 + \tfrac{1}{2}n^5 - \tfrac{1}{6}n^3 + \tfrac{1}{42}n.$$

Observant que si une puissance de n, depuis la plus grande jusqu'à la plus petite, vient à manquer dans l'une des valeurs précédentes, cette puissance forme un terme ayant o pour coefficient, on verra, en examinant avec attention ces valeurs, que *pour trouver celle de* S_m, *il faut multiplier par* m *chaque terme de* S_{m-1} *et augmenter de* 1 *l'exposant de* n *dans chacun de ces termes, puis diviser le premier terme du résultat par* m+1, *le* 2ᵉ *par* m, *le* 3ᵉ *par* m−1, *le* 4ᵉ *par* m−2, *le* 5ᵉ *par* m−3, *et ainsi de suite, jusqu'au dernier : faisant* n=1 *dans l'expression résultante et retranchant de l'unité la valeur qui en proviendra, le reste sera le multiplicateur de* n *dans le dernier terme de* S_m, *et l'expression dont il s'agit sera le surplus des termes.*

D'après cette règle, si l'on veut trouver S_7, la valeur de S_6 donnera d'abord

$$\tfrac{1}{8}n^8 + \tfrac{1}{2}n^7 + \tfrac{7}{12}n^6 - \tfrac{7}{24}n^4 + \tfrac{1}{12}n^2.$$

Posant ensuite $n=1$, dans ce résultat, ce qui fournit $\frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{7}{12} - \frac{7}{24} + \frac{1}{12}$ ou 1, puis retranchant cette valeur de l'unité, le reste o sera le multiplicateur de n dans le dernier terme de S_7 ; de sorte qu'on a

$$S_7 = \tfrac{1}{8}n^8 + \tfrac{1}{2}n^7 + \tfrac{7}{12}n^6 - \tfrac{7}{24}n^4 + \tfrac{1}{12}n^2,$$

comme on le vérifierait d'ailleurs à l'aide des formules du nº 138.

Avec cette valeur de S_7 la règle précédente donnera

$$S_8 = \tfrac{1}{9}n^9 + \tfrac{1}{2}n^8 + \tfrac{2}{3}n^7 - \tfrac{7}{15}n^5 + \tfrac{2}{9}n^3 - \tfrac{1}{30}n,$$

et ainsi de suite, pour S_9, S_{10}, S_{11}, etc.

140. Comme toute expression de la forme $A + < B$ signifie A *plus une quantité plus petite que* B, il est facile de voir, par les valeurs du n° précédent, qu'on a

$$S_1 = \tfrac{1}{2}n^2 + < n,\ S_2 = \tfrac{1}{3}n^3 + < n^2,\ S_3 = \tfrac{1}{4}n^4 + < n^3,$$
$$S_4 = \tfrac{1}{5}n^5 + < n^4,\ S_5 = \tfrac{1}{6}n^6 + < n^5,\ S_6 = \tfrac{1}{7}n^7 + < n^6,$$

et ainsi de suite. Donc en général,

$$S_m = \frac{1}{m+1}\,n^{m+1} + < n^m.$$

Cette formule est utile en géométrie et en mécanique, comme nous l'avons fait voir dans le tome 1er de la *Correspondance Mathématique et Physique*, déjà citée, page 68.

141. Les sommes des premières puissances des nombres naturels ont un grand nombre d'applications; mais leur principal usage est de sommer toute série numérique dont le terme général en v est une fonction entière et rationnelle de v. Par exemple, si le terme général d'une série est $av^p - bv^q + cv^r$, la somme de cette série sera $aS_p - bS_q + cS_r$.

C'est ainsi qu'on obtient les formules :

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \tfrac{1}{3}n(2n-1)(2n+1),$$
$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$
$$1^4 + 3^4 + 5^4 + \cdots + (2n-1)^4 = \frac{n}{15}[8n^2(6n^2-5)+7]$$
$$1.4 + 4.9 + \cdots + n^2(n+1)^2 = \frac{n}{15}(n+1)\{n[3n(n+4)+13]+2\}$$

142. *Trouver le nombre de boulets contenus dans une pile à base triangulaire.*

Cette pile est composée de *tranches*, en allant du sommet à la base; et ces tranches sont telles, que si au nombre de boulets de l'une d'elles, on ajoute le numéro de la suivante, la somme sera le nombre de boulets de cette suivante. Donc, puisque la 1re tranche n'a qu'un boulet, la 2e en aura $1+2$, la 3e $1+2+3$, la 4e $1+2+3+4$, en général, la v^{me} en aura

$$1+2+3+4+\cdots+v, \text{ ou } \tfrac{1}{2}v^2 + \tfrac{1}{2}v.$$

Faisant dans cette valeur successivement $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$, on aura successivement les nombres de boulets contenus dans les tranches 1^{re}, 2^e, 3^e, 4^e, ..., n^e; la somme de tous ces nombres sera donc le nombre x de tous les boulets contenus dans la pile; il viendra par conséquent $x = \frac{1}{2}S_2 + \frac{1}{2}S_1$; d'où (139)

$$x = \tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

Par exemple, *un fermier vient de vendre à 24 centimes la douzaine, une pile d'œufs, à base triangulaire, composée de 15 tranches. On veut savoir combien il recevra d'argent, sans défaire la pile pour en compter les œufs; ce qui serait assez long et exposerait à les casser.* En faisant $n = 15$ dans la valeur précédente de x, on trouvera que la pile est composée de 680 œufs; coûtant par conséquent $13^f, 60$.

143. *Trouver le nombre de boulets contenus dans une pile à base rectangulaire.*

Dans cette pile les tranches sont formées de *rangées* de boulets. Le nombre de rangées d'une tranche quelconque est égal au numéro de cette tranche; tandis que le nombre de boulets qui forment chaque rangée est égal au même numéro augmenté d'un nombre donné k. De sorte que dans la $v^{ième}$ tranche, il y a v rangées contenant chacune $v + k$ boulets; ce qui fait v fois $(v + k)$ boulets, ou $v^2 + kv$.

Prenant successivement $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$, on aura successivement les nombres de boulets contenus dans les tranches 1^{re}, 2^e, 3^e, 4^e, ..., n^e; la somme de tous ces nombres sera donc le nombre x de boulets contenus dans la pile proposée; il viendra conséquemment, $x = S_2 + kS_1$; d'où (139)

$$x = \tfrac{1}{6}n(n+1)(3k+2n+1).$$

Pour la pile à base carrée, $k = 0$ et $x = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

144. *Le directeur d'un arsenal doit faire transporter à 10 lieues le reste d'une pile de boulets, à base rectangulaire, contenant encore 12 tranches, dont celle du haut a 7 rangées de 11 boulets chacune. Comme chaque boulet pèse 12 livres, et que les voitures ne peuvent porter que de 15 à 18 cents liv.; on demande combien il faudra de voituriers et combien chacun recevra, sachant qu'on paie 50 cents par quintal conduit à une lieue?*

Il est clair que la tranche du haut est la 7^e de la pile totale, et que par suite $7 + k = 11$; d'où $k = 4$. On voit de plus que le nombre z de boulets restans est la différence entre deux piles à bases rectangulaires, pour lesquelles $k=4$, l'une ayant 18 tranches et l'autre 6; on a donc

$$z=\tfrac{1}{6}.18.19(3.4+2.18+1)-\tfrac{1}{6}.6.7(3.4+2.6+1),$$

ou $z=2618$ boulets. D'après cela, il est facile de voir qu'il faudra 20 voitures, portant chacune 130 boulets, sauf la dernière qui en aura 148; et que les voituriers recevront chacun 78^f, excepté le 20^{me} qui aura $88^f,80$.

145. *Etant donné un polynome de* n *termes de la forme* a + b + c + d + e + f + *etc., trouver combien il restera de termes dans sa puissance* m^{me}, *après qu'on aura effectué toutes les réductions possibles.*

Soit x la somme de tous les termes du polynome, excepté a; la puissance m^{me} de ce polynome sera donnée par la formule

$$(a+x)^m=a^mx^0+ma^{m-1}x+c_2a^{m-2}x^2+\cdots+x^m.$$

On voit que, pour calculer tous les monomes qui composent la puissance m^{me} du polynome proposé, il suffit de développer les puissances 0, 1, 2, 3, 4, ..., m^{me} du polynome x, qui contient $n-1$ termes. Si donc on désigne par t_n et u_m les nombres respectifs de termes des puissances m^{mes} d'un polynome de n termes et d'un polynome de $n-1$ termes, on aura

$$t_n=u_0+u_1+u_2+u_3+\cdots+u_m.\ \ldots (1)$$

Cette formule fournit la solution du problème proposé. En effet, pour un trinome, $n=3$ et u_m désigne le nombre de termes de la puissance m^{me} d'un binome. Or, ce nombre de termes est $m+1$; donc alors $u_m=m+1$.

Faisant successivement $m=0, 1, 2, 3, 4, \ldots, m$, on aura successivement $u_0=1$, $u_1=2$, $u_2=3$, $u_3=4, \ldots, u_m=m+1$. Substituant ces valeurs dans l'équation (1), le nombre t_3 de termes de la puissance m^{me} d'un trinome, sera

$$t_3=1+2+3+4+\cdots+(m+1)=\tfrac{1}{2}(m+1)(m+2).$$

Pour un quadrinome, $n=4$ et u_m exprime le nombre de termes de la puissance m^{me} d'un trinome; donc, d'après ce qu'on vient de trouver, on a $u_m=\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$.

Prenant dans cette équation, successivement $m=0, 1, 2, 3, 4, \ldots, m$, on verra, d'après l'équation (1), que le nombre t_4 de termes de la puissance m^{me} d'un quadrinome, est

$t_4 = 1 + 3 + 6 + 10 + \dots + \frac{1}{2}(m+1)(m+2)$, ou (132)
$t_4 = \frac{1}{6}(m+1)(m+2)(m+3)$.

En général, le nombre t_v des termes de la puissance m^{me} d'un polynome de v termes, est

$$t_v = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)\dots(m+v-1)}{1.2.3\dots(v-1)},$$

$$\text{ou}\quad t_v = \frac{v(v+1)(v+2)\dots(v+m-1)}{1.2.3\dots m}; \dots (2)$$

car si l'on réduit ces deux fractions au même dénominateur, en multipliant les deux termes de chacune par le dénominateur de l'autre, leurs numérateurs seront égaux, comme étant chacun le produit des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, ..., $(m+v-1)$: donc ces deux fractions sont égales.

En supposant que la formule (2) soit vraie pour un polynome de v termes, je dis qu'elle sera vraie ausssi pour un polynome de $v+1$ termes. Car dans le premier cas, la formule (2) désigne le nombre u_m de termes de la puissance m^{me} d'un polynome de v termes; et si on y fait successivement $m = 0, 1, 2, 3, 4, \dots, m$, qu'on substitue les valeurs résultantes dans (1) et qu'on ait égard à ce que devient la première formule du numéro 131, lorsque $c=1$, on trouvera ce que donne la formule (2), quand on y change v en $v+1$. D'où il suit que si cette formule est vraie pour une certaine valeur de v, elle sera vraie aussi pour une valeur plus grande d'une unité. Or, cette formule (2) est démontrée pour $v=4$; elle a donc lieu aussi pour $v=5$. Etant vraie pour $v=5$, elle sera vraie aussi pour $v=6$, puis pour $v=7$, $v=8$, et enfin pour $v=n$. De sorte que

$$t_n = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)}{1.2.3\cdots m},$$

ce qu'il fallait trouver.

D'après cette formule, pour savoir si un polynome de 20 termes peut être le cube parfait d'un autre polynome, on fera $m=3$ et $t_n=20$, et il viendra

$$\tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2) = 20.$$

Et comme $n=4$ est la seule hypothèse qui satisfasse à cette équation, on en conclut qu'un polynome de 20 termes peut être le cube parfait d'un quadrinome de la forme $a+b+c+d$.

146. Voici encore quelques problèmes à résoudre :

Un particulier achète tous les ans un pigeon femelle qui lui donne cette année et les suivantes un nombre de pigeons mâles égal au rang de cette même année. Comb. aura-t-il de pigeons mâles au bout de n années?

Pendant n années un particulier a reçu tous les ans un nombre de pigeons femelles égal au nombre impair de même rang que cette année. Comme chaque pigeon femelle d'une année lui donne tous les 12 mois un nombre de pigeons mâles égal au nombre impair de même rang que l'année où il a reçu ce pigeon femelle, on veut savoir combien il y a eu de pigeons mâles produits pendant les n années proposées. [On pourrait supposer les pigeons femelles reçus une année, en nombre égal au rang de cette année, ou au carré de ce rang, etc.]

Trouver combien il y a d'unités dans la somme de tous les produits différens des n premiers nombres entiers multipliés 2 à 2, un nombre ne devant pas être multiplié par lui-même.

Un propriétaire convient avec un maçon de lui donner $\frac{1}{2}$ cents pour chaque palme cube de pierre employé à la construction d'un escalier massif, dont les faces latérales sont perpendiculaires à la base horisontale, laquelle est un trapèze ayant ses deux côtés parallèles à angles droits sur l'un des deux autres côtés. Le plus grand côté parallèle vaut 30 palmes, le plus petit 10 et la hauteur 240. Chaque degré a 4 palmes de large et 3 de haut : de sorte que l'escalier a 60 degrés et commence au plus petit *côté* parallèle 10. Combien a-t-il dû coûter? (R. 255390 cents.)

Des équations à indices.

147. La notation des numéros des lettres conduit à des équations qui se résolvent par une manière particulière d'éliminer. Cette notation n'est pas nouvelle ; mais personne, que je sache, n'en a fait l'usage que je vais faire connaître, et qui offre de grands avantages.

148. On appelle *numéro* ou *indice* d'une lettre, le nombre écrit à la droite et un peu au-dessous : ce nombre indique quel rang la quantité représentée par la lettre, tient dans une suite de quantités de même nature qu'elle. Ainsi dans une suite de quantités, toutes désignées par x, x_v (qu'on énonce x, v^{me}), sera la v^{me}, et v sera le numero ou l'indice de x.

Résoudre l'équation qui lie deux x consécutifs tels que x_v et x_{v+1}, c'est en déduire une équation entre x_1 et x_n et des nombres donnés.

149. Considérons, par exemple, l'équation

$$px_{v+1} = qx_v + r, \ldots (1)$$

dans laquelle p, q, r, sont des quantités connues, positives ou négatives. Pour résoudre cette équation, divisons ses deux membres par q, posons $\frac{p}{q} = a$, $\frac{r}{q} = b$ et multiplions de part et d'autre par a^{v-1}; nous aurons, en transposant,

$$a^v x_{v+1} - a^{v-1} x_v = ba^{v-1}.$$

Prenant successivement $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, n-1$, il viendra

$$\begin{aligned} &ax_2 - x_1 = b \\ &a^2x_3 - ax_2 = ba \\ &a^3x_4 - a^2x_3 = ba^2 \\ &a^4x_5 - a^3x_4 = ba^3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a^{n-1}x_n - a^{n-2}x_{n-1} = ba^{n-2}. \end{aligned}$$

Ajoutant entre elles ces $n-1$ équations et observant que tous les termes des premiers membres se réduisent deux à deux, excepté x_1 et $a^{n-1}x_n$, on aura

$$a^{n-1}x_n - x_1 = b(1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n-2}).$$

Pour trouver la valeur de la progression géométrique entre parenthèses, on la désignera par S et on la soustraira de son produit par a; alors on verra que l'équation précédente se réduit à

$$a^{n-1}x_n - x_1 = b\,\frac{a^{n-1}-1}{a-1}.$$

Substituant les valeurs de a et b, et réduisant, on obtiendra

$$x_n = \frac{r}{p-q} + \left(x_1 - \frac{r}{p-q}\right)\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} \cdots (2)$$

Si $p = q$, cette formule est en défaut; mais alors l'équation (1) se réduit en la divisant par p, et on en tire

$$x_n = x_1 + \frac{r}{p}(n-1).$$

La formule (2) peut servir à résoudre tous les problèmes relatifs aux progressions géométriques; car tous ces problèmes peuvent avoir des équations de même forme que l'équation (1), comme il est aisé de s'en assurer.

150. Si l'on avait les deux équations

$$vx_{v+1} = (v+1)\,x_v + av^2 \quad \text{et} \quad (v+3)\,x_{v+1} = vx_v + av,$$

on les résoudrait par addition, comme l'équation (1), en divisant la première par $v(v+1)$ et en multipliant la seconde par $(v+1)(v+2)$.

151. Considérons maintenant l'équation

$$x_v = vx_{v+1} - av.$$

Cette équation ne saurait se résoudre par addition; mais on peut la traiter par la substitution des valeurs. En effet, prenons successivement, dans cette équation, $v=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, etc., nous aurons successivement

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_2 - a\\
x_2 &= 2x_3 - 2a\\
x_3 &= 3x_4 - 3a\\
x_4 &= 4x_5 - 4a\\
x_5 &= 5x_6 - 5a\\
x_6 &= 6x_7 - 6a\\
x_7 &= 7x_8 - 7a\\
&\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Substituant successivement $x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, \ldots$, dans la valeur de x_1, on aura les valeurs successives

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2x_3 - a(1+2)\\
x_1 &= 2.3x_4 - a(1+2+2.3)\\
x_1 &= 2.3.4x_5 - a(1+2+2.3+2.3.4)\\
x_1 &= 2.3.4.5x_6 - a(1+2+2.3+2.3.4+2.3.4.5)\\
&\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Il est aisé de voir, par ces résultats, qu'en général, on a

$$x_1 = 2.3.4\ldots(n-1)x_n - \\ a[1+2+2.3+2.3.4+\cdots+2.3\ldots(n-1)].$$

Cette formule résout l'équation proposée, puisqu'elle établit une relation entre x_1, x_n et des nombres donnés.

On résoudrait de même l'équation $x_{v+1} = vx_v + a$.

152. Quelquefois on peut éliminer par élévation aux puissances. Considérons par exemple, l'équation

$$\frac{a(v+1)}{v+2}(x_v)^m = x_{v+1},$$

dans laquelle m est quelconque. Pour résoudre cette équation, il faut élever ses deux membres à la puissance m^{n-v}; puis faire successivement $v=1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n-1$, et multiplier entre elles les $n-1$ équations résultantes. Effaçant ensuite les facteurs communs aux deux membres, simplifiant la fraction du premier, chassant le dénominateur et posant, pour abréger, $p=\frac{m^n-m}{m-1}$, on aura définitivement

$$a^p(2x_1^m)^{m^{n-1}}=(3^{m^{n-2}}.4^{m^{n-3}}\ldots n^m)^{m-1}(ax_n+x_n)^m.$$

On traitera semblablement les deux équations

$$(x_{v+1})^m=a(x_v)^p \text{ et } (x_{v+1})^2=\frac{bv}{c^v}x_v.$$

153. Nous savons résoudre les équations contenant deux x consécutifs quelconques, tels que x_v et x_{v+1}. Voyons maintenant comment on traitera deux équations renfermant x_v, x_{v+1}, y_v et y_{v+1}. D'abord si ces quatre quantités se trouvent dans chaque équation, il sera impossible, par la simple algèbre, de résoudre ces deux équations; parce qu'on ne pourra jamais en déduire une équation ne contenant que x_v et x_{v+1}, ou que y_v et y_{v+1}. Mais si quelques-unes de ces quatre quantités manquent dans les deux équations proposées, il sera possible quelquefois d'arriver à des valeurs déterminées pour x_n et y_n.

154. Par exemple, supposons que dans les équations

$$x_{v+1}=2y_v \text{ et } y_{v+1}=2x_v+a,$$

on doive avoir $y_0=0$ et $y_1=a$, et cherchons x_n et y_n. Or, si l'on change v en $v-1$ dans la première équation, elle donne $x_v=2y_{v-1}$. Substituant cette valeur, dans la seconde équation, elle devient

$$y_{v+1}=2^2y_{v-1}+a.$$

Divisant par 2^v et faisant successivement $v=1, 2, 3, 4, \ldots, n-1$, ajoutant et réduisant, on trouve

$$y_n+2y_{n-1}=a(2^n-1).$$

Changeant n en v, posant $2=-c$, divisant par c^v, puis prenant $v=1, 2, 3, 4, \ldots, n$ et ajoutant, on aura, réductions faites,

$$y_n=\frac{a}{6}[3.2^n-(-2)^n-2].$$

Avec cette valeur on trouve facilement celle de x_n.

155. On peut aussi résoudre les deux équations

$$x_{v+1}=y_v-x_v+a \text{ et } y_{v+1}=y_v+x_v-a,$$

dans lesquelles on sait que $y_0 = 0$ et $y_1 = a$. En effet, on en tire d'abord

$$x_{v+1} + y_{v+1} = 2y_v;\ \text{d'où}\ x_v + y_v = 2y_{v-1};$$

ce qui réduit la seconde équation proposée à

$$y_{v+1} - 2y_{v-1} = -a.$$

Posant $2 = c^2$, ou $c = \sqrt{2}$, et opérant comme dans l'exemple précédent, on aura y_n et par suite x_n.

156. En traitant les deux équations

$$x_{v+1} = y_v + a(2v - 1)\ \text{et}\ y_{v+1} = x_v,$$

où l'on suppose $x_0 = 0$ et $x_1 = a$, on obtiendra

$$x_n = \tfrac{1}{2}a(1 \pm 1) + \tfrac{1}{2}an(n-1),$$

le signe supérieur n'ayant lieu que pour n impair.

157. Voici quelques équations pour appliquer les méthodes de résolution que nous venons d'indiquer :

$$vx_{v+1} = (v+1)x_v + av(v+1);$$
$$(v+1)x_{v+1} = vx_v + av;$$
$$v^m(x_{v+1} - a) = (v+1)(x_v - a);$$
$$x_{v+1} = ax_v\ \text{et}\ ay_{v+1} = ax_v + y_v;$$
$$x_v y_{v+1} = ax_{v+1}\ \text{et}\ y_v x_{v+1} = vy_{v+1};$$
$$x_v y_v = v^2 x_{v+1}\ \text{et}\ x_v = a^2 y_v x_{v+1};$$
$$(x_v)^2 + (y_v)^2 = ax_{v+1}\ \text{et}\ x_v y_v = bx_{v+1};$$
$$2x_{v+1} = x_v + y_v\ \text{et}\ 2y_{v+1} = x_{v+1} + y_v.$$

Les deux premières équations se résolvent par addition ; la troisième par multiplication ; les deux quatrièmes par multiplication et addition ; les deux cinquièmes par substitution, élévation aux puissances et multiplication ; les deux sixièmes par multiplication ; les deux septièmes en ajoutant et soustrayant le double de la seconde à la première, en prenant les racines carrées et en ajoutant ; enfin les deux dernières par addition et en y supposant $x_1 = a$ et $y_1 = b$.

158. Ce que nous venons de dire sur l'emploi des numéros des lettres, sert à résoudre une classe de problèmes très-curieux, qu'il serait difficile ou même impossible de traiter par une autre méthode. On a d'ailleurs remarqué que la sommation des séries numériques est nécessaire pour mettre les expressions des incon-

nues sous la forme la plus simple; et c'est ce qu'on peut voir encore dans les problèmes que nous allons résoudre.

159. *Soient marqués à volonté, sur une droite indéfinie, deux points 1 et 2; puis sur la même droite, soient marqués successivement un point 3 également distant de 1 et 2; un point 4 également distant de 2 et 3; un point 5 également distant de 3 et 4; et ainsi de suite. Trouver sur la droite, la position du* n^{me} *des points marqués de cette manière.*

Soient x_v, x_{v+1} et x_{v+2} les distances de 1 aux points v, $v+1$ et $v+2$: puisque le point $v+2$ est également distant de v et $v+1$, il est visible qu'on a

$$x_v + x_{v+1} = 2x_{v+2}.$$

Prenant dans cette équation, successivement $v=1, 2, 3, 4, \ldots, u$; puis ajoutant les u équations résultantes, effaçant les termes communs aux deux membres, observant que $x_1 = 0$ et que $x_2 =$ l'intervalle entre 1 et 2, $= a$, on trouvera

$$x_{u+2} = a - \tfrac{1}{2}x_{u+1}.$$

Multipliant les deux membres de cette équation par $(-2)^u$; puis faisant successivement $u = 1, 2, 3, 4, \ldots, n-2$, ajoutant et observant que $x_2 = a$, il viendra, toutes les réductions faites,

$$x_n = \tfrac{2}{3}a + \frac{a}{3.(-2)^{n-2}}.$$

Lorsque n est infini, cette formule se réduit à $\frac{2}{3}a$.

160. *Un négociant gagne, pendant chaque année, une partie de son bien de cette année, marquée par ce qui reste en ôtant de* m *le rang de cette même année; il dépense à la fin de chaque année,* a *fois l'excès de* m *sur le rang de l'année immédiatement précédente. Après* n *années, il possède* b *francs; combien avait-il d'abord?*

Soient x_v et x_{v+1} les biens du négociant au commencement de la v^{me} et de la $(v+1)^{me}$ année; il est clair qu'on aura

$$x_v + \frac{x_v}{m-v} - a(m-v+1) = x_{v+1}.$$

Résolvant cette équation, d'après l'une des méthodes qui précèdent, on trouvera

$$mx_1 - (m-n)b = am(m-2S_1+n) +$$
$$a[1.2+2.3+3.4+4.5+\cdots+(n-1)n].$$

Substituant la valeur de S_1 (138), ainsi que celle du multiplicateur de a (128), il viendra, en réduisant,

$$x_1 = \frac{m-n}{m}(amn+b) + \frac{an}{3m}(n-1)(n+1).$$

161. *Les nombres à soustraire croissent comme les nombres impairs* 1, 2, 3, 7, 9, *etc.; les nombres dont on soustrait, sont: 2 fois un nombre donné* a, 4 *fois le* 1^er^ *reste*, 6 *fois le* 2^e^, 8 *fois le* 3^e^; ...; 2n *fois le* (n − 1)^me^, *et le* n^me^ *reste vaut* b. *Trouver le premier nombre* z *à soustraire.*

Soit x_ν le ν^{me} nombre dont on soustrait et $x_{\nu+1}$ le suivant; on aura évidemment

$$2\nu x_\nu - (2\nu - 1)z = x_{\nu+1}.$$

Cette équation donne, à cause de $x_1 = a$ et de $x_{n+1} = b$,

$$a = \frac{b}{2.4\ldots 2n} + z\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2.4} + \frac{5}{2.4.6} + \cdots + \frac{2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\right).$$

Comme la somme de la série est $1 - \dfrac{1}{2.4.6\ldots 2n}$, il vient

$$z = \frac{a(2.4.6\ldots 2n) - b}{(2.4.6\ldots 2n) - 1}.$$

162. *Étant donnés* n *nombres* $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$, *partager ces* n *nombres chacun en deux parties telles, que* r *soit le rapport constant entre la* 1^re^ *partie de chaque nombre et la* 2^e^ *du nombre immédiatement suivant, et aussi le rapport entre la* 1^re^ *partie de* a_n *et la* 2^e^ *de* a_1.

Soient x_ν et y_ν les deux parties de a_ν et $x_{\nu+1}$, $y_{\nu+1}$ celles du nombre suivant $a_{\nu+1}$; on aura donc, d'après l'énoncé,

$$x_\nu + y_\nu = a_\nu \quad \text{et} \quad x_\nu = ry_{\nu+1}; \text{ d'où } y_\nu + ry_{\nu+1} = a_\nu.$$

Posant $h = -r$; multipliant les deux membres par h^ν; prenant successivement $\nu = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$ et ajoutant, puis $\nu = 1, 2, 3, 4, \ldots, u-1$ et additionnant; faisant, pour abréger,

$$\varphi = a_1h + a_2h^2 + a_3h^3 + \cdots + a_nh^n$$
$$\varphi' = a_1h + a_2h^2 + a_3h^3 + \cdots + a_{u-1}h^{u-1};$$

observant enfin que $y_{n+1} = y_1$, on trouvera

$$y_1 = \frac{-\varphi}{h(h^n - 1)} \quad \text{et} \quad y_u = \frac{hy_1 - \varphi'}{h^u}.$$

A l'aide de ces formules, on calculera toutes les deuxièmes parties cherchées; et il sera facile ensuite d'avoir les premières.

Supposons que les nombres donnés soient les n premiers nombres entiers, de manière que $a_v = v$, et ainsi des autres; nous aurons donc

$$\varphi = h + 2h^2 + 3h^3 + \cdots + nh^n$$
$$\varphi' = h + 2h^2 + 3h^3 + \cdots + (u-1)h^{u-1}.$$

Retranchant chacune de ces équations de son produit par h et réduisant, on aura les valeurs de φ et φ', lesquelles substituées dans celles de y_1 et de y_u, après avoir mis partout $-r$ au lieu de h, donneront

$$y_1 = \frac{1}{(r+1)^2} + \frac{n(-r)^n}{(r+1)[(-r)^n-1]}$$
$$y_u = \frac{1}{(r+1)^2} + \frac{u-1}{r+1} + \frac{n(-r)^{n+1-u}}{(r+1)[(-r)^n-1]}.$$

La seconde de ces formules devient la première, quand $u=1$; ce qui doit être.

On peut faire un grand nombre d'autres suppositions sur les valeurs des n nombres à partager; par ex., on peut admettre que ce soit les n premières puissances d'un nombre donné a, de manière que $a_v = a^v$: on peut supposer aussi que $a_v = va^v$; que $a_v = v(v+1)$; $a_v = \frac{1}{v(v+1)k^v}$; $a_v = bv$; enfin $a_v = v$ et $r=1$. Chaque fois on déterminera y_1 et y_u, par des calculs analogues à ceux où $a_v = v$.

163. *Un rentier a placé une somme* x *à intérêt composé, pendant* n *années, au taux de* r *pour* 1 *par an. Sur les valeurs de cette somme au bout des années* 1re, 2^e, 3^e, 4^e, ..., n^{me}, *il a dépensé* c, 2c, 3c, 4c, ..., nc. *On demande combien il lui est resté à la fin de la* n^{me} *année.*

Soient x_{v-1} et x_v ce qui lui est resté à la fin des années $(v-1)^{me}$ et v^{me}. La somme x_{v-1} qui lui est restée au bout de la $(v-1)^{me}$ année, a été placée pendant la v^{me} à r pour 1 d'intérêt; elle a donc valu, au bout de cette v^{me} année, $(1+r)x_{v-1}$: et comme alors le rentier a dépensé vc sur cette valeur, il s'ensuit qu'à la fin de la v^{me} année, il lui est resté

$$x_v = (1+r)x_{v-1} - vc.$$

Divisant les deux membres par $1+r$ et posant $a = \frac{1}{1+r}$, puis multipliant de part et d'autre par a^{v-1}, on aura une équation qui, à cause de $x_0 = x$, donnera :

$$a^n x_n - x = -c(1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \cdots + na^{n-1});$$

ou bien, en prenant la somme de la série entre parenthèses,

$$a^n x_n = x - c\left[\frac{na^n}{a-1} - \frac{a^n-1}{(a-1)^2}\right].$$

Substituant la valeur de a et réduisant, il viendra enfin

$$x_n = (1+r)^n x - \frac{c}{r^2}\left[(1+r)^{n+1} - (1+n)r - 1\right].$$

Cette formule donnerait aussi la valeur de x, ainsi que celle de c, les autres quantités étant données; mais on ne saurait en tirer ni r, ni n, même en s'aidant des logarithmes.

164. *Un père ordonne par son testament que l'aîné de ses* n *enfans prendra une somme* a *sur l'héritage, plus la moitié du reste; le* 2e *une somme* 2a *sur ce qu'aura laissé le* 1er, *plus les deux tiers du reste; le* 3e *une somme* 3a *sur ce qu'aura laissé le* 2e, *plus les* 3 *quarts du reste; ainsi de suite, jusqu'au* ne *enfant, qui reçoit une somme* na, *plus* (n — 1) *fois le* nme *du reste: alors il reste* b *pour la mère. Quel est l'héritage?*

Soit x_v ce qui reste de l'héritage avant que le v^{me} enfant prenne sa part, et x_{v+1} ce qui reste après; on aura évidemment

$$x_v - va - \frac{v(x_v - va)}{v+1} = x_{v+1}, \text{ ou } x_v = (v+1)x_{v+1} + av.$$

Prenant successivement $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$, et substituant successivement $x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots, x_n$ dans x_1, il viendra, à cause de $x_{n+1} = b$,

$$x_1 = 1.2.3.4 \ldots n(n+1)b +$$
$$a\left[1 + 1.2^2 + 1.2.3^2 + 1.2.3.4^2 + \cdots + 1.2.3\ldots(n-1)n^2\right].$$

Substituant la valeur de la série (127), et réduisant, il vient

$$x_1 = 2.3.4.5 \ldots n(n+1)(a+b) - a.$$

On peut varier de sept manières l'énoncé du problème du testament:

1° Les parts sont successivement a, $2a$, $3a$, $4a$, ..., na, plus la moitié, le tiers, le quart, le cinquième, ..., le $(n+1)^{me}$ du reste correspondant, le dernier étant toujours b;

2° Les parts sont successivement a, $3a$, $5a$, $7a$, ..., $(2n-1)a$, diminués respectivement de la moitié, du quart, du sixième, du huitième, ..., du $2n$ ième du reste correspondant, le dernier étant b;

3° Les parts successives, sont a, $3a$, $5a$, $7a$, ..., $(2n-1)a$, diminués respectivement du *unième*, du tiers, du cinquième, du septième, ..., $(2n-1)$ ième du reste correspondant, le dernier étant b;

4° Les parts sont $2a$, $4a$, $6a$, $8a$, ..., $2na$; diminués respectivement de la moitié, du quart, du sixième, du huitième, ..., du $2n$ième du reste correspondant, le dernier étant b;

5° Les parts sont $2a$, $4a$, $6a$, $8a$, ..., $2na$, diminués respectivement du *unième*, du tiers, du cinquième, du septième, ..., $(2n-1)$ième du reste correspondant, le dernier étant b;

6° Les parts sont le nombre a diminué successivement de la moitié, du quart, du sixième, ..., du $2n$ième du reste correspondant;

7° Enfin, les parts sont le nombre a diminué successivement du tiers, du cinquième, du septième, ..., du $(2n+1)^{me}$ du reste correspondant.

165. *On distribue à* n *pauvres une certaine somme d'argent: on donne au* 1er a *florins, plus le* c^{me} *de ce qui reste; au* 2^e 2a *fl., plus le* c^{me} *de ce qui reste; au* 3^e 3a *fl., plus le* c^{me} *de ce qui reste; ainsi de suite: alors il reste* b *fl. Quelle somme a-t-on distribuée?*

Soit x_v ce qui reste de la somme avant que le $v^{ième}$ pauvre reçoive sa part, et x_{v+1} ce qui reste après; il est clair qu'on aura

$$x_v - av - \frac{x_v - av}{c} = x_{v+1}, \text{ ou } x_v - \frac{c}{c-1}\, x_{v+1} = av.$$

Cette équation est résoluble par addition (149), et donne, toutes réductions faites,

$$x_1 = a(c-1)^2 + [b + an(c-1) - a(c-1)^2]\left(\frac{c}{c-1}\right)^n.$$

Il est facile de résoudre le même problème,

1° Lorsque les premières portions des parts des pauvres successifs étant a, $3a$, $5a$, ..., $(2n-1)a$, les secondes portions sont le c^{me} des restes, ou encore 2 fois le $(2c+1)^{me}$;

1° Lorsque les premières portions des parts étant $2a$, $4a$, $6a$, ..., $2na$, les secondes portions sont le c^{me} des restes;

2° Lorsque les premières portions étant $1a$, $4a$, $7a$, ..., $(3n-2)a$, les secondes portions sont 3 fois le $(3c+1)^{me}$ des restes;

4° Enfin, lorsque les premières portions étant $1.2a$, $2.3a$, $3.4a$, ..., $n(n+1)a$, les secondes portions sont le c^{me} des restes.

166. Voici encore plusieurs problèmes à résoudre par les équations à indices:

Les nombres à soustraire croissent comme les nombres pairs 2, 4, 6, 8, etc.; les nombres dont on soustrait, sont: 3 fois un nombre donné a, 5 fois le 1er reste, 7 fois le 2^e, 9 fois le 3^e, ..., $(2n+1)$ fois le $(n-1)^{me}$, et le n^{me} reste vaut b. Trouver le premier nombre z à soustraire.

On ajoute constamment le nombre donné a à un nombre inconnu; au tiers de la somme, aux 3 cinquièmes de la 2^e somme, aux 5 septièmes de la 3^e, ainsi de suite, et il vient, après la n^{me} opération, le n^{me} résultat qu'on obtient en ajoutant a au nombre inconnu cherché, aux 2 quarts de la somme, aux 4 sixièmes de la 2^e somme, aux 6 huitièmes de la 3^e, ainsi de suite. Quel est ce nombre inconnu?

Une personne gagne, au bout de chaque année, la moitié de ses biens pendant cette année, et dépense à la fin a francs. Après n années, elle possède autant qu'elle aurait eu au bout de n années, si elle avait dépensé à la fin de chaque année a francs de moins que la moitié de son bien pendant cette année. Combien avait-elle d'abord?

Quel nombre x faut-il retrancher constamment d'un nombre donné a, des 4 demies du premier reste, des 5 tiers du second, des 6 quarts du troisième, ..., de $(n+2)$ fois le n^{me} du $(n-1)^{me}$ reste, pour que le dernier vaille b?

Quel nombre x faut-il ajouter au tiers d'un nombre donné a, aux 2 quarts de la 1^{re} somme, aux 3 cinquièmes de la 2^e, aux 4 sixièmes de la 3^e, aux 5 septièmes de la 4^e, ..., à n fois le $(n+2)^{me}$ de la $(n-1)^{me}$ somme, pour que la dernière vaille b? [Même problème, lorsque les dénominateurs des fractions successives, sont : m, $m+1$, $m+2$, $m+3$, ..., $m+n-1$.]

Une personne dépense, pendant chaque année, a fois ce qu'elle a dépensé l'année immédiatement précédente, et gagne a fois ce qu'elle a gagné et dépensé cette même année précédente. Combien possédera-t-elle au bout de la n^{me} année? On sait que n'ayant rien au commencement de la première année, elle gagne b flor. et dépense c flor. pendant cette année.

Une personne gagne, pendant chaque année, une partie de son bien marquée par le rang de cette année, et dépense à la fin de cette même année, le produit de a fl. par le rang de l'année suivante. Quels seront les biens de cette personne à la fin de la n^{me} année, sachant qu'elle possédait b florins au commencement de la première?

Dans des additions de chacune deux nombres, les nombres à ajouter croissent comme les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, ..., n ; les nombres auxquels on ajoute sont : 2 fois un nombre donné a, 3 fois la 1^{re} somme, 4 fois la 2^e, 5 fois la 3^e, ..., $(n+1)$ fois la $(n-1)^{me}$, et la n^{me} somme vaut b. Quel est le premier nombre x à ajouter?

On prend successivement le double d'un nombre inconnu et le double de a, les 4 tiers du résultat et les 4 tiers de a, les 6 cinquièmes du second résultat et les 6 cinquièmes de a, ..., $2n$ fois le $(2n-1)^{me}$ du $(n-1)^{me}$ résultat et $2n$ fois le $(2n-1)^{me}$ de a : alors le dernier résultat vaut b. Quel est le nombre inconnu?

On retranche constamment le nombre a, de la moitié d'un nombre inconnu, plus la moitié de a; du quart du premier reste, plus le quart de a; du sixième du second reste, plus le sixième de a; ...; du $2n^{me}$ du $(n-1)^{me}$ reste, plus le $2n$ ième de a : alors il reste b. Quel est ce nombre inconnu? [Même problème, lorsque les dénominateurs des parties successives, sont : 3, 5, 7, 9, ..., $(2n+1)$].

Une marchande, à qui il ne reste plus que b pommes, en a vendu à n personnes, de manière que chacune a eu k pommes, plus $(m-a)$ fois le quotient de ce qui restait avant de lui donner ce k pommes, divisé par la somme de m joint à c fois le rang de cette personne. Combien la marchande avait-elle d'abord de pommes?

On retranche constamment le nombre a, du $(c+d)^{me}$ d'un nombre inconnu augmenté de a, du $(c+2d)^{me}$ du premier reste augmenté de a, du $(c+3d)^{me}$ du second reste augmenté de a, ..., du $(c+nd)^{me}$ reste augmenté de a, et le dernier reste vaut b. Quel est ce nombre inconnu? [Même problème, lorsque les parties successives sont prises d fois chacune].

Problèmes qui dépendent des combinaisons.

167. *Trouver les relations qui existent entre les sommes des puissances semblables de* n *quantités quelconques* a, b, c, d, ..., k, *et les sommes des produits différens de ces quantités multipliées* 2 *à* 2, 3 *à* 3, 4 *à* 4, *etc., une même quantité n'étant facteur qu'une fois dans un même produit.*

Désignons par S_m la somme des puissances m ièmes des n quantités proposées, et par p_m la somme des produits différens de ces quantités combinées m à m. Soit d'ailleurs a_m la somme de tous les produits différens m à m où a se trouve, b_m la somme de tous les produits m à m qui contiennent b, et ainsi de suite. Il s'agit d'abord de trouver la somme

$$x = a_m + b_m + c_m + \cdots + k_m.$$

A cet effet, prenons un produit de m facteurs, par exemple $abef \ldots h$: puisque a_m est la somme de tous les produits différens de m facteurs où a se trouve, il s'ensuit que a_m renferme seulement une fois $abef \ldots h$; d'où il suit que le produit $abef \ldots h$ ne se trouve qu'une fois dans chacune des m quantités a_m, b_m, e_m, f_m, ..., h_m; il est par conséquent contenu seulement une fois dans la somme x qui renferme ces m quantités. On voit par là que chacun des produits différens des n quantités a, b, c, d, ..., k, combinées m à m, n'est contenu que m fois dans x; donc la somme p_m de tous ces produits m à m n'y est contenu non plus que m fois : et comme x ne renferme pas d'autres quantités que ces produits m à m, il en résulte $x = mp_m$, ou bien

$$a_m + b_m + c_m + \cdots + k_m = mp_m \cdots (1)$$

Il reste maintenant à déterminer a_m, b_m, c_m, etc. Or, comme a_m est la somme de tous les produits où a se trouve, il faut en conclure que a_m vaut a multiplié par la somme p_{m-1} des produits des n quantités proposées combinées $m-1$ à $m-1$, à l'exception de la somme a_{m-1} de ceux de ces produits $m-1$ à $m-1$ où a se trouve; on a donc

$$a_m = ap_{m-1} - a.a_{m-1} \cdots (2)$$

Posant $u = -\frac{1}{a}$, l'équation précédente devient, en multipliant ses deux membres par u^{m-1},

$$u^{m-1}p_{m-1} = u^{m-1}a_{m-1} - u^m a_m.$$

Prenant successivement $m = 2, 3, 4, 5, \ldots, m$, ajoutant et réduisant, en observant que $a_1 = a$ et que $ua_1 = -1$, on aura, en transposant -1,

$$1 + up_1 + u^2p_2 + u^3p_3 + \cdots + u^{m-1}p_{m-1} = -u^m a_m.$$

Multipliant les deux membres par a^m et observant que $u = -\frac{1}{a}$, on trouvera, réductions faites,

$$a^m - p_1 a^{m-1} + p_2 a^{m-2} - p_3 a^{m-3} + \cdots \mp ap_{m-1} = \mp a_m.$$

Ajoutant cette formule avec les résultats qu'elle fournit en y changeant successivement a en $b, c, d, \ldots, k$, et réduisant d'après (1), il viendra

$$\begin{gathered} S_m - p_1 S_{m-1} + p_2 S_{m-2} - p_3 S_{m-3} + \cdots \\ \mp S_1 p_{m-1} \pm mp_m = 0 \cdots (3) \end{gathered}$$

Il est impossible de former un produit de $n+v$ facteurs avec n quantités n'y entrant qu'une fois chacune; donc chacun des produits de plus de n facteurs doit être regardé comme nul; on doit donc avoir $a_{n+v} = 0$ et $p_{n+v} = 0$. D'après cela, il est clair que l'équation (2) est encore vraie pour $m > n$; il en est donc de même de la série (3), pourvu qu'on l'arrête au terme affecté de p_n, car lorsque $m > n$, on a $p_m = 0$. Faisant donc, dans cette série, successivement $m = 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, n$ et $m > n$, elle donnera successivement

$$\begin{aligned} &S_2 - p_1 S_1 + 2p_2 = 0 \\ &S_3 - p_1 S_2 + p_2 S_1 - 3p_3 = 0 \\ &S_4 - p_1 S_3 + p_2 S_2 - p_3 S_1 + 4p_4 = 0 \\ &S_5 - p_1 S_4 + p_2 S_3 - p_3 S_2 + p_4 S_1 - 5p_5 = 0 \\ &S_6 - p_1 S_5 + p_2 S_4 - p_3 S_3 + p_4 S_2 - p_5 S_1 + 6p_6 = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

$$S_n - p_1 S_{n-1} + p_2 S_{n-2} - \cdots \mp p_{n-1} S_1 \pm n p_n = 0$$
$$S_m - p_1 S_{m-1} + p_2 S_{m-2} - p_3 S_{m-3} + \cdots \pm p_n S_{m-n} = 0.$$

Telles sont les relations qui résolvent le problème proposé.

168. Prenant dans ces formules, les valeurs de S_1, S_2, S_3, S_4, etc. et observant que $S_1 = p_1$, on aura successivement

$$S_2 = p_1^2 - 2p_2$$
$$S_3 = p_1^3 - 3p_1 p_2 + 3p_3$$
$$S_4 = p_1^4 - 4p_1^2 p_2 + 4p_1 p_3 + 2p_2^2 - 4p_4$$
$$S_5 = p_1^5 - 5p_1^3 p_2 + 5p_1^2 p_3 + 5p_1 p_2^2 - 5p_1 p_4 - 5p_2 p_3 + 5p_5$$
etc...

Ces valeurs feront donc trouver les sommes des puissances semblables de n quantités quelconques, dès que l'on connaîtra les sommes des produits différens de ces quantités combinées 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4, etc.

169. Les relations trouvées plus haut, donnent encore, en y prenant successivement les valeurs de p_1, p_2, p_3, p_4, etc.,

$$p_1 = S_1$$
$$2p_2 = S_1^2 - S_2$$
$$6p_3 = S_1^3 - 3S_1 S_2 + 2S_3$$
$$24p_4 = S_1^4 - 6S_1^2 S_2 + 8S_1 S_3 + 3S_2^2 - 6S_4$$
$$120p_5 = S_1^5 - 10S_1^3 S_2 + 20S_1^2 S_3 + 15S_1 S_2^2 - 20S_2 S_3 - 30S_1 S_4 + 24S_5$$
etc...

Ces formules résolvent le problème où, étant données les sommes des puissances semblables de n quantités inconnues, on demande les sommes des produits différens de ces quantités, combinées 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4, etc.

170. Le problème proposé plus haut (167) a été résolu par M. Gergonne, dans le tome III des Annales de Mathématiques. La solution que l'on vient de lire, est analogue à la sienne, mais paraît plus simple et plus directe. M. Bret, dans le tome IV des mêmes Annales, s'est aussi occupé du même problème; et il en déduit la formule du binome, par un procédé très-simple, que nous allons modifier comme il suit :

Supposons que les n quantités proposées a, b, c, d, ..., k, soient égales entre elles et à a; l'équation (3) prendra alors la forme

$$mp_m - nap_{m-1} + na^2p_{m-2} - na^3p_{m-3} + \cdots \pm na^m = 0;$$

d'où, en y changeant m en $m-1$, on aura

$$(m-1)p_{m-1} - nap_{m-2} + na^2p_{m-3} - \cdots \mp na^{m-1} = 0.$$

Ajoutant cette équation multipliée par a, à la précédente, et réduisant, on obtiendra

$$mp_m - (n-m+1)\,ap_{m-1} = 0,$$

$$\text{ou}\quad p_m = \frac{n-m+1}{m}\,ap_{m-1}.$$

Prenant successivement $m = 2, 3, 4, 5, \ldots, m$, multipliant entre elles les équations résultantes, supprimant les facteurs communs aux deux membres, et observant que $p_1 = na$, on aura

$$p_m = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{1\;.\;2\;.\;3\;\cdots\;m}\,a^m.$$

Le coefficient de a^m, dans cette valeur, désigne évidemment le nombre de tous les produits différens de n quantités combinées m à m. Substituant les valeurs de $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m$, tirées de cette formule, dans le produit de n facteurs binomes égaux à $x+a$, lequel est, comme on sait,

$$(x+a)^n = x^n + p_1ax^{n-1} + p_2a^2x^{n-2} + \cdots + p_ma^mx^{n-m} + \cdots + a^n,$$

il en résultera la formule connue du binome.

171. A l'aide des relations du n° 169, on résout aisément les deux systèmes d'équations que voici :

$$\begin{array}{l|l}
p_1(u^2+x^2+y^2+z^2) = a & uxyz(u+x+y+z) = a \\
p_1(u^3+x^3+y^3+z^3) = b & u^2x^2y^2z^2(u^2+x^2+y^2+z^2) = b \\
p_1(u^4+x^4+y^4+z^4) = c & u^3x^3y^3z^3(u^3+x^3+y^3+z^3) = c \\
p_1(u^5+x^5+y^5+z^5) = d & u^4x^4y^4z^4(u^4+x^4+y^4+z^4) = d.
\end{array}$$

p_1 désignant $u+x+y+z$, dans le premier système.

Considérons seulement le premier système et posons

$$\begin{aligned}
&u+x+y+z = p_1\\
&ux+uy+uz+xy+xz+yz = p_2\\
&uxy+uxz+uyz+xyz = p_3\\
&uxyz = p_4;
\end{aligned}$$

il est clair, d'après la composition des équations, que u, x, y, z, sont les racines de l'équation :

$$\varphi^4 - p_1\varphi^3 + p_2\varphi^2 - p_3\varphi + p_4 = 0, \ldots (1);$$

et les quatre équations proposées deviennent

$$p_1 S_2 = a, \; p_1 S_3 = b, \; p_1 S_4 = c, \; p_1 S_5 = d.$$

Substituant les valeurs de S_2, S_3, S_4, S_5, tirées de ces équations, dans les relations du n° 169, et observant que $p_5 = 0$, on aura quatre équations qui feront connaître p_1, p_2, p_3, p_4. Substituant les valeurs résultantes dans l'équation (1), les racines de cette équation seront les valeurs de u, x, y, z.

172. *Connaissant les sommes des puissances semblables de* n *nombres quelconques, trouver la somme* φ *des puissances* u$^{\text{mes}}$ *de toutes les sommes partielles qu'on obtient en ajoutant ces* n *nombres* m *à* m, *un même nombre n'entrant qu'une fois dans une même somme partielle, et la puissance* u$^{\text{me}}$ *d'une même somme partielle n'entrant qu'une fois non plus dans* φ.

Il me semblait, en me donnant ce problème, qu'on devait aisément en trouver la solution d'après la théorie des combinaisons et les relations du n° 167. Mais tous mes efforts n'ont abouti qu'à le résoudre pour $u = 1$, $u = 2$ et $u = 3$.

Soient S_1, S_2, S_3, S_4, etc., les sommes des puissances 1$^{\text{res}}$, 2$^{\text{e}}$, 3$^{\text{e}}$, 4$^{\text{e}}$, etc. des n nombres proposés; soit A le nombre de toutes les sommes partielles différentes de $n-1$ nombres pris $m-1$ à $m-1$, B celui des sommes partielles de $n-2$ nombres pris $m-2$ à $m-2$, et C celui des sommes partielles de $n-3$ nombres ajoutés $m-3$ à $m-3$; d'après la théorie des combinaisons, on aura

$$A = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-m+1)}{1 \;.\; 2 \;.\; 3 \;\cdots\; (m-1)},$$

$$B = \frac{(n-2)(n-3)(n-4)\cdots(n-m+1)}{1 \;.\; 2 \;.\; 3 \;\cdots\; (m-2)},$$

$$C = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)\cdots(n-m+1)}{1 \;.\; 2 \;.\; 3 \;\cdots\; (m-3)}.$$

Cela posé, lorsque $u = 1$, il est clair qu'un même nombre a est ajouté à chacune des sommes partielles qu'on obtient en prenant $m-1$ à $m-1$ les $n-1$ autres nombres. Or, le nombre de ces dernières sommes partielles est A; donc φ renferme A fois a : et comme ce qu'on vient de dire de a, se dira de chacun des n nombres proposés, il s'ensuit que φ contient A fois la somme S_1 de tous ces nombres. On a par conséquent

$$\varphi = AS_1.$$

Quand $u=2$, φ exprime la somme des carrés des sommes de n nombres simples ajoutés m à m ; φ ne peut donc renfermer que des termes tels que a^2 et ab. Or, dans toutes les sommes partielles m à m, un même nombre a est ajouté à chacune de A sommes des $n-1$ autres nombres pris $m-1$ à $m-1$. Et comme a^2 ne se trouve qu'une fois dans chacun des carrés des A sommes où a se trouve, il s'ensuit que φ contient A fois a^2. De même, φ contient A fois b^2, A fois c^2, etc.; de sorte que φ renferme AS_2.

D'un autre côté, dans les sommes partielles m à m, la somme $a+b$ de deux nombres a et b, est ajoutée à chacune des B sommes partielles des $n-2$ autres nombres pris $m-2$ à $m-2$; le carré de $a+b$, et par conséquent $2ab$, se trouve donc pris B fois dans la somme φ des carrés des sommes partielles m à m : et comme il en est de même du double de chacun des p_2 produits différens des n nombres proposés multipliés 2 à 2, il en résulte que φ est encore composé de B fois $2p_2$. On a donc enfin

$$\varphi = AS_2 + 2Bp_2.$$

Mais $2p_2 = S_1^2 - S_2$ et $A = \frac{n-1}{m-1}B$; il vient donc

$$\varphi = B\left[\frac{n-m}{m-1}S_2 + S_1^2\right].$$

Prenons maintenant $u=3$; alors φ sera la somme des cubes de chacune des sommes partielles obtenues en ajoutant m à m les n nombres proposés. Ainsi φ ne peut contenir que des termes tels que a^3, a^2b et abc. Or, comme dans les sommes partielles m à m, un nombre a est ajouté à chacune des A sommes partielles des $n-1$ autres nombres pris $m-1$ à $m-1$, il s'ensuit que a entre dans A sommes m à m ; et que par suite a^3 entre A fois dans φ : et comme il en est de même des cubes de chacun des n nombres proposés, il s'ensuit que φ contient AS_3.

D'un autre côté, $3a^2$ est multiplié par chacun des A sommes partielles qu'on obtient en ajoutant $m-1$ à $m-1$ les $n-1$ autres nombres : et comme dans ces A sommes, le nombre b est ajouté avec chacune des B sommes partielles des $n-2$ autres nombres pris $m-2$ à $m-2$, il s'ensuit que b entre dans B des sommes partielles $m-1$ à $m-1$ qui multiplient $3a^2$; donc $3a^2b$ entre B fois dans φ. Ce que l'on vient de dire pour b, se dirait pour chacun des $n-1$ nombres différens de a ; donc, dans φ, $3Ba^2$ est multiplié par la somme des n nombres proposés, excepté a, c'est-à-dire par $S_1 - a$. De sorte que φ renferme $3Ba^2(S_1 - a)$ ou $3Ba^2S_1 - 3Ba^3$. Mais ce que l'on vient de dire pour a, se dira pour chacun des n nombres proposés ; donc φ contient $3BS_1S_2 - 3BS_3$.

Enfin dans les sommes partielles m à m, $a + b$ est ajouté à chacune des B sommes partielles des $n-2$ autres nombres pris $m-2$ à $m-2$; ainsi dans φ, $3(a+b)^2$ est multiplié par chacune des B sommes $m-2$ à $m-2$. Or, dans ces B sommes, le nombre c est ajouté avec chacune des C sommes partielles qu'on trouve en prenant $m-3$ à $m-3$ les $n-3$ autres nombres ; il en résulte donc que φ contient C fois $3(a+b)^2c$, et par conséquent C fois $6abc$. Et comme il en sera de même de 6 fois chacun des p_3 produits différens des n nombres proposés multipliés 3 à 3, il s'ensuit que $6Cp_3$ se trouve dans φ.

On voit donc que φ renferme les trois quantités AS_3, $3BS_1S_2 - 3BS_3$ et $6Cp_3$. Par conséquent

$$\varphi = AS_3 + 3BS_1S_2 - 3BS_3 + 6Cp_3.$$

Mais $B = \frac{n-2}{m-2}C$ et $6p_3 = S_1^3 - 3S_1S_2 + 2S_3$ (169) : donc

$$\varphi = C\left[\frac{n-m}{m-1}\left(\frac{n-2m}{m-2}S_3 + 3S_1S_2\right) + S_1^3\right].$$

On entrevoit bien ce qu'il faudrait faire pour $u = 4$; mais alors les raisonnemens paraissent devoir être si longs, que nous n'entreprendrons pas de les développer.

273. La valeur qu'on vient de trouver pour φ est en défaut dès que $m = 2$; mais il est aisé de s'assurer qu'alors

$$\varphi = (n-4)S_3 + 3S_1S_2.$$

Lorsque les n nombres proposés sont les n premiers nombres entiers, les valeurs de φ, pour $u = 1$, 2 et 3, deviennent respectivement

$$\tfrac{1}{2}An(n+1),\ \tfrac{1}{2}Bn(n+1)\left[\frac{(n-m)(2n+1)}{3(m-1)} + \tfrac{1}{2}n(n+1)\right] \text{ et}$$

$$\tfrac{1}{4}Cn^2(n+1)^2\left[\frac{n-m}{m-2}\left(\frac{n-2m}{m-1} + 2n + 1\right) + \tfrac{1}{2}n(n+1)\right].$$

274. *De combien de manières peut-on faire* n *parts, avec* m *choses, toutes différentes les unes des autres, avec la faculté de faire des parts aussi inégales qu'on voudra ; mais*

sous la condition d'admettre au moins une chose dans chaque part, et d'employer la totalité des choses dans chaque système de répartition?

Voici de ce problème très-remarquable, une solution analogue à celle qu'on trouve dans le tome XI de Annales de Mathématiques; mais qui est beaucoup moins longue :

Considérons d'abord comme systèmes différens de répartitions, ceux-là même où les mêmes parts sont disposées dans un autre ordre. Soit $f(n, m)$ le nombre total de manières de faire n parts avec m choses. Il est clair que si l'on forme d'abord la première part de k choses, on pourra choisir cette part d'un nombre de manières représenté par

$$c_k = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\cdots(m-k+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \cdots\ k}:$$

il restera à faire $n-1$ parts avec les $m-k$ choses restantes; et le nombre de manières différentes de choisir ces $n-1$ parts sera $f(n-1, m-k)$. Or, puisque pour une part de k choses, le nombre de manières différentes de former $n-1$ parts des $m-k$ choses restantes est $f(n-1, m-k)$, il s'ensuit que pour les c_k parts de k choses, ce nombre de manières différentes sera

$$c_k\, f(n-1, m-k).$$

Prenant successivement $k=1, 2, 3, 4, \ldots, m-2, m-1$, on aura successivement les nombres de manières différentes de faire n parts avec m choses, lorsque la première part est formée de $1, 2, 3, 4, \ldots, m-2, m-1$ de ces choses; la somme de tous ces nombres de manières différentes sera par conséquent le nombre $f(n, m)$ de toutes les répartitions possibles de m choses en n parts; ainsi on aura

$$f(n,m) = \begin{cases} mf(n-1, m-1) + c_2 f(n-1, m-2) + c_3 f(n-1, m-3) \\ + \ldots + c_2 f(n-1, 2) + mf(n-1, 1) \cdots\cdots (A) \end{cases}$$

Lorsqu'il y a deux parts, ou que $n=2$, chaque fonction du second membre de (A), exprime qu'il faut former une part avec un certain nombre de choses; ce qui n'est possible que d'une seule manière, en prenant toutes ces choses; ainsi chaque fonction du second membre vaut 1, et il vient

$$f(2, m) = m + c_2 + c_3 + \cdots + c_2 + m.$$

Or, d'après la formule du binome, cette valeur se réduit à

$$f(2, m) = (1+1)^m - 2, \text{ ou à } f(2, m) = 2^m - 2.$$

S'il y a 3 parts, ou si $n = 3$, la formule qu'on vient de trouver donnera les valeurs des fonctions dans le second membre de (A) ; substituant ces valeurs et réunissant les termes positifs, ainsi que les termes négatifs, on aura

$$f(3, m) = \begin{cases} m\,2^{m-1} + c_2\,2^{m-2} + c_3\,2^{m-3} + \cdots + m.2 \\ -2\,(m + c_2 + c_3 + \cdots + c_2 + m)\,; \end{cases}$$

réduisant cette formule, d'après celle du binome, il viendra

$$f(3, m) = (2+1)^m - 2^m - 1 - 2\left[(1+1)^m - 2\right], \text{ ou}$$
$$f(3, m) = 3^m - 3.2^m + 3.$$

Supposons qu'il y ait 4 parts, ou que $n = 4$; la valeur que nous venons d'obtenir, fera connaître celles des fonctions, dans le second membre de (A) ; substituant ces valeurs et réunissant les multiplicateurs de -3 et $+3$, il viendra

$$f(4, m) = \begin{cases} m3^{m-1} + c_2 3^{m-2} + c_3 3^{m-3} + \cdots + m.3 \\ -3\left[m2^{m-1} + c_2 2^{m-2} + c_3 2^{m-3} + \cdots + m.2\right] \\ +3\,(m + c_2 + c_3 + c_4 + \cdots + c_2 + m)\,; \end{cases}$$

d'où l'on tire, en réduisant, d'après la formule du binome,

$$f(4, m) = 4^m - 4.3^m + 6.2^m - 4.$$

Continuant cette manière d'opérer, on verra que pour 5 parts, la formule précédente et la formule (A) donnent

$$f(5, m) = 5^m - 5.4^m + 10.3^m - 10.2^m + 5.$$

Pour 6 parts on trouvera

$$f(6, m) = 6^m - 6.5^m + 15.4^m - 20.3^m + 15.2^m - 6.$$

En général, on voit que le nombre total de manières différentes de choisir n parts avec m choses, est $f(n, m)$ ou

$$n^m - n(n-1)^m + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^m - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-3)^m$$
$$+ \cdots \pm \frac{n(n-1)}{1.2}\,2^m \mp n \ldots \text{(B)}$$

Dans cette formule, on regarde comme systèmes différens de répartitions, ceux où les parts ne sont simplement que transposées. Mais le problème, au contraire, n'admet comme systèmes différens, que ceux qui ne sont pas en totalité composés des mêmes parts. Dans ce cas, on observe que, pour n parts, un seul système pris au hasard, peut, par la simple permutation des parts dont il est formé, en fournir un nombre

$$1.2.3.4\ldots n,$$

lesquelles ne doivent plus compter que pour une part unique; d'où il suit que le nombre de systèmes de répartitions réellement différens, s'obtient en divisant la valeur précédente de $f(n, m)$ par $1.2.3.4\ldots n$; ce qui résout le problème proposé.

275. Il est essentiel de remarquer que, comme il est impossible de faire n parts effectives avec un nombre de choses inférieur à n; et que comme, d'un autre côté, les diverses manières de faire n parts avec n choses, ne sont que les diverses manières de permuter ces choses entre elles; il s'ensuit, 1° que *pour toutes les valeurs de* m *moindres que* n, *la formule* (B) *est nulle;* 2° que *quand* m = n, *la formule* (B) *se réduit à*

$$1.2.3.4\ldots n.$$

Ces deux théorèmes servent à résoudre n équations du 1er degré, de même forme que celles que nous avons considérées au n° 30.

276. *Soit* p *un nombre premier et* n *un nombre entier quelconque, non divible par* p; *je dis que le nombre* $n^{p-1}-1$, *sera divisible par* p.

En effet, soit x un nombre entier quelconque, on aura

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{1.2}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}x^3 + \cdots$$
$$+ \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ n}x^n + \cdots + x^p.$$

Or, je dis que tous les termes du second membre ont leurs coefficiens divisibles par p, excepté le premier et le dernier. Car prenons le coefficient du terme général en x^n; il est nécessairement entier : et comme p est premier et que $n<p$, il s'ensuit que le facteur p du numérateur, ne peut détruire aucun des facteurs du dénominateur; ceux-ci sont donc détruits par les facteurs $p-1$, $p-2$, ..., $p-n+1$; et par conséquent p restera facteur du quotient. On voit donc que $(1+x)^p-1-x^p$ est divisible par p, quel que soit l'entier x.

Posons maintenant $1+x=n$; on aura alors $n^p-(n-1)^p-1$

qui devra être divisible par p. Soit q_n le quotient; il viendra

$$n^p-(n-1)^p-1=pq_n.$$

Prenant successivement $n=1, 2, 3, 4, \ldots, n$, ajoutant et faisant, pour abréger, $k=q_1+q_2+q_3+\cdots+q_n$, on trouvera

$$n^p-n=kp, \text{ ou } n(n^{p-1}-1)=kp.$$

On voit que p divise le produit $n(n^{p-1}-1)$; et puisque p est supposé premier avec n, il faut que p divise l'autre facteur $n^{p-1}-1$. Ce qu'il fallait démontrer.

277. *Si* p *est un nombre premier, le produit* $1.2.3\ldots(p-1)$, *augmenté de l'unité, sera divisible par* p; *et réciproquement, tout nombre qui satisfera à cette condition, sera premier.*

En effet, on a vu (275) que quand $m=n$, la formule (B) se réduit à

$$1.2.3\ldots n=n^n-(n-1)^n+c_1(n-2)^n-c_3(n-3)^n$$
$$+\cdots\pm c_2.2^n\mp n\ldots(1)$$

Soit $n=p-1$, ou $p=n+1$; n sera un nombre pair, et il est clair que p ne divise ni n, ni les nombres au-dessous de n; p doit donc diviser $n^{p-1}-1$ (276). Soit q_n le quotient; on aura

$$n^{p-1}-1=pq_n;\text{ d'où } n^{p-1}=1+pq_n.$$

Prenant successivement $n=1, 2, 3, 4, \ldots, n$, remplaçant l'exposant $p-1$ par sa valeur n; puis substituant dans la formule (1) et désignant par k l'ensemble des multiplicateurs de p, il viendra

$$1.2.3\ldots(p-1)=kp+1-n+c_2-c_3+\cdots\pm c_2\mp n.$$

Ce qui suit kp, dans le second membre, vaut $(1-1)^n-1$ ou -1; on a donc $1.2.3\ldots(p-1)=kp-1$; d'où

$$1.2.3\ldots(p-1)+1=kp.$$

Ce qui démontre le théorème proposé.

Réciproquement, il n'y a qu'un nombre premier p qui puisse diviser $1.2.3\ldots(p-1)+1$. Car si p était composé de deux facteurs inégaux, ils seraient compris tous les deux dans la suite $1, 2, 3, \ldots, p-1$, et par conséquent le produit $1.2.3\ldots(p-1)$ serait divisible par p, et p ne diviserait pas ce produit augmenté de 1 : si p était le produit de deux facteurs égaux à a, on aurait $a<\frac{1}{2}(p-1)$; donc la suite $1, 2, 3, \ldots (p-1)$, renfermerait a et $2a$, et le produit serait encore divisible par a^2 ou par p.

Donc enfin, la quantité $1.2.3\ldots(p-1)+1$ n'est divisible par p que quand p est premier.

Il résulte de là que pour s'assurer si un nombre p est premier, il suffira de voir si le produit des nombres naturels au-dessous de p, plus l'unité, donne une somme divisible par p. Mais quand p a une valeur un peu élevée, ce produit devient si grand, que ce moyen de vérification est réellement impraticable, et bien moins prompt que l'essai par la division, même malgré les abréviations dont il est susceptible.

278. *Tout nombre de la forme* $(1+2a)^{v\cdot 2^n}-1$ *est toujours divisible par* 2^{n+2}.

On peut voir la démonstration de cette proposition, dans le tome IX des Annales de Mathématiques. On trouve aussi, dans la théorie des nombres de M. Legendre, plusieurs beaux théorèmes sur les nombres, dont nous citerons ceux que voici :

Un nombre quelconque est toujours un carré, ou la somme de deux carrés, ou celle de trois, ou enfin celle de quatre au plus.

Tout nombre premier de la forme $4n+1$ est la somme de deux carrés.

Tout nombre premier de la forme $8n+3$ est la somme de trois carrés, dont deux sont égaux.

Tout nombre impair, non compris dans $8n+7$, est la somme de trois carrés.

Tout nombre double d'un impair est la somme de trois carrés, au plus.

Tout nombre est ou triangulaire, ou composé de deux ou trois nombres triangulaires.

Élimination entre deux équations de degrés quelconques, à deux inconnues.

279. Soient les deux équations, ordonnées par rapport à x,

$$x^m+px^{m-1}+qx^{m-2}+\cdots+t=0,$$
$$x^n+p'x^{n-1}+q'x^{n-2}+\cdots+t'=0,$$

dans lesquelles les coefficiens p, q, r, ..., t, p', q', r', ..., t', sont fonctions de la seconde inconnue y et de nombres donnés.

Supposons que y ayant une valeur convenable, les deux équations précédentes soient satisfaites par $x=a$; alors elles seront divisibles par $x-a$, et on aura

$$\left.\begin{aligned} x^m+px^{m-1}+\cdots+t&=(x-\alpha)\,(x^{m-1}+ax^{m-2}+\cdots+h) \\ x^n+p'x^{n-1}+\cdots+t'&=(x-\alpha)\,(x^{n-1}+a'x^{n-2}+\cdots+h'), \end{aligned}\right\}\ (1)$$

a, b, c, ..., h, a', b', c', ..., h', sont des indéterminées; au nombre de $m-1$ dans la première identité et de $n-1$ dans la seconde. Eliminant $x-\alpha$, il viendra

$$\begin{aligned} &(x^m+px^{m-1}+qx^{m-2}+\cdots+t)\,(x^{n-1}+a'x^{n-2}+\cdots+h') \\ &=(x^n+p'x^{n-1}+q'x^{n-2}+\cdots+t')\,(x^{m-1}+ax^{m-2}+\cdots+h). \end{aligned}$$

Effectuant les multiplications, transposant et réunissant les multiplicateurs d'une même puissance de x, on aura une identité $V=0$, du $m+n-2$ ième degré en x, composée par conséquent de $m+n-1$ termes et ayant $m+n-1$ coefficiens fonctions de p, q, r, ..., t, p', q', r', ..., t', et des indéterminées a, b, c, ..., h, a', b', c', ..., h', dont le nombre est $m+n-2$.

Cela posé, puisque les identités n'ont pas été détruites, les valeurs de x dans la dernière $V=0$, sont les mêmes que dans les proposées (1). Mais dans les identités (1), x peut avoir telle valeur qu'on voudra; donc, dans $V=0$, x peut aussi avoir telle valeur qu'on voudra; ce qui exige que tous les coefficiens de x, dans $V=0$, soient nuls séparément. Ainsi, en les égalant chacun à zéro, on aura $m+n-1$ équations, évidemment du premier degré entre les indéterminées introduites : le nombre de celles-ci est $m+n-2$; il ne faudra donc que $m+n-2$ équations pour les déterminer toutes; conséquemment, il y aura une équation qui ne sera pas employée, et dans laquelle substituant, pour les indéterminées qui s'y trouvent, leurs valeurs obtenues en fonctions des coefficiens des équations proposées, on aura une équation ne contenant que y et des nombres donnés; ce sera donc l'équation finale cherchée.

Quant aux valeurs de x, elles seront données par $x-\alpha=0$, lorsqu'on aura déterminé $x-\alpha$. Or, en divisant le premier membre de la première identité (1), par le multiplicateur de $x-\alpha$, dans cette identité, le quotient $x+p-a$ est la valeur de $x-\alpha$; de sorte que les valeurs de x seront données par $x+p-a=0$, et seront

$x=a-p$: Elles seraient aussi $x=a'-p'$.

280. Si ces équations fournissent $x=\frac{0}{0}$, cela annoncera que plusieurs des valeurs de x répondent à la valeur de y qu'on aura

employée, et ces valeurs seront données par un commun diviseur d'un degré supérieur au premier, lequel se trouvera par la méthode connue, après avoir substitué la valeur de y dans les équations proposées.

281. Lorsque $y=\beta$ donne $x=\frac{0}{0}$, les deux termes de x ont le facteur commun $y-\beta$. Si donc on avait supprimé d'abord ce facteur commun, dans la vue de simplifier l'expression générale de x, la valeur $y=\beta$ n'aurait pas donné $x=\frac{0}{0}$, et rien n'aurait indiqué que plusieurs valeurs de x répondent à $y=\beta$. On serait alors parvenu à une valeur de x qui, avec $y=\beta$, n'aurait pas satisfait aux équations proposées, comme cela doit arriver; car puisque plusieurs valeurs de x répondent à $y=\beta$, il n'y a pas de raison pour que l'expression simplifiée de x, donne l'une de ces valeurs plutôt que les autres; elle doit donc les donner toutes; ce qui est impossible, puisque cette expression est du premier degré en x. On voit par là que *si les deux termes de l'expression générale de* x *ont un facteur commun fonction de* y, *on doit ne pas supprimer ce facteur commun.*

282. La méthode d'élimination que nous venons de faire connaître, est due à EULER : si on l'applique aux équations

$$x^3+px^2+qx+r=0 \text{ et } x^2+p'x+q'=0 \ldots (2)$$

on aura d'abord les deux identités

$$x^3+px^2+qx+r=(x-\alpha)(x^2+ax+b),$$
$$x^2+p'x+q'=(x-\alpha)(x+a');$$

d'où éliminant $x-\alpha$ et passant les termes dans le 1$^{\text{er}}$ membre, il viendra, en ordonnant par rapport à x,

$$(p+a'-p'-a)x^3+(pa'+q-ap'-q')x^2+$$
$$(qa'+r-q'a-p'b)x+(ra'-q'b)=0.$$

Si donc on pose, pour abréger, $p-p'=e$ et $q-q'=e'$, on aura les équations

$$\begin{aligned} &a-a'=e\\ &p'a-pa'+b=e'\\ &q'a-qa'+p'b=r\\ &q'b-ra'=0. \end{aligned}$$

Prenant la valeur de a dans la première, et substituant dans les deux équations suivantes, puis la valeur de b dans la première équation résultante, et substituant dans la seconde, ainsi que dans $q'b - ra' = 0$, l'élimination de a' entre les deux nouvelles équations, donnera l'équation finale

$$q'(ep' - e')^2 + (r - eq')^2 + p'(ep' - e')(r - eq') = 0,$$

qui revient à

$$(e'q' - rp')(e' - ep') + (r - eq')^2 = 0 \ldots (3).$$

Substituant les valeurs de a et a' dans $x = a - p$ et $x = a' - p'$, on trouvera

$$x = \frac{e'q' - rp'}{r - eq'} \quad \text{et} \quad x = -\frac{r - eq'}{e' - ep'} \cdots (4)$$

L'équation (3) faisant connaître les valeurs de y, l'une des formules (4) déterminera les valeurs correspondantes de x.

283. Par exemple, prenons les deux équations

$$x^3 - 3ax^2 + 2a^2x - 6ay^2 = 0$$
$$x^2 - 2ay = 0.$$

Ces équations se résolvent aisément par substitution ; mais si on les compare aux équations (2), on verra que

$$p = -3a,\ q = 2a^2,\ r = -6ay^2,\ p' = 0,\ q' = -2ay,$$
$$e = -3a \ \text{et}\ e' = 2a^2 + 2ay,$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (3) et dans la première formule (4), on trouvera, en décomposant en facteurs,

$$4a^2y(a+y)^2(9y - 2a) = 0 \ \text{et}\ x = \frac{2ay(a+y)}{3y(a+y)}.$$

La première de ces équations donne

$$y = \tfrac{2}{9}a,\ y = -a \ \text{et}\ y = 0;$$

la seconde devient alors

$$x = \tfrac{2}{3}a,\ x = \tfrac{0}{0} \ \text{et}\ x = \tfrac{0}{0}.$$

Puisque $y = -a$ donne $x = \frac{0}{0}$, il y a plusieurs valeurs de x qui répondent à la valeur $-a$ de y (280). Faisant donc $y = -a$ dans les équations proposées, puis cherchant le plus grand commun diviseur entre les polynomes résultans $x^3 - 3ax^2 + 2a^2x - 6a^3$ et $x^2 + 2a^2$, on verra que ce plus grand commun diviseur est $x^2 + 2a^2$, et qu'ainsi les deux équations proposées sont satisfaites par $y = -a$ et $x^2 + 2a^2 = 0$, c'est-à-dire par les deux couples de valeurs $y = -a$, $x = a\sqrt{-2}$ et $y = -a$, $x = -a\sqrt{-2}$. Si on avait supprimé le facteur

$a+y$ commun aux deux termes de x, rien n'aurait indiqué l'existence de ces deux couples de valeurs.

La valeur $y=0$ donnant aussi $x=\frac{0}{0}$, il semblerait que plusieurs valeurs de x correspondent à la valeur 0 de y; mais cela n'est pas, car après avoir fait $y=0$ dans les deux équations proposées, on trouve que le plus grand commun diviseur entre les deux polynomes résultans est x, et que par conséquent $y=0$ ne donne que la seule valeur $x=0$.

Cela vient de ce qu'au fond x n'est pas $\frac{0}{0}$, lorsque $y=0$; car si l'on substituait les valeurs de e, e', p', q', r dans la 2^{me} formule (4), elle deviendrait $x=\frac{6ay(a+y)}{2a(a+y)}$, formule qui se réduit à $x=0$, quand $y=0$.

Si l'on avait supprimé les facteurs communs, on aurait eu ou $x=3y$ ou $x=\frac{3}{2}a$ pour toutes les valeurs de y; ce qui est absurde, comme on vient de le voir, et comme on l'a d'ailleurs démontré (281).

284. Considérons actuellement les deux équations générales du second degré

$$x^2+px+q=0 \quad \text{et} \quad x^2+p'x+q'=0, \ldots (5)$$

Pour avoir les formules qui résolvent ces équations, il suffit de faire $r=0$ dans les équations (3) et (4) : on trouvera alors

$$e'^2+e(pq'-qp')=0,\ x=-\frac{e'}{e} \quad \text{et} \quad x=\frac{eq'}{e'-ep'} \cdots (6)$$

La première de ces formules est l'équation finale en y; elle fera donc connaître les valeurs de cette inconnue; et chacune des 2 autres équations donnera les valeurs correspondantes de x.

285. Par exemple, qu'on ait les deux équations

$$x^2+(\tfrac{3}{2}y-y^2)x-\tfrac{3}{2}y^3=0$$
$$x^2+(3-2y)x-6y=0.$$

Dans ce cas, $p=-\frac{1}{2}y(2y-3)$, $q=-\frac{3}{2}y^3$, $p'=-(2y-3)$, $q'=-6y$, $e=\frac{1}{2}(2y-3)(2-y)$ et $e'=\frac{3y}{2}(4-y^2)$. Substituant ces valeurs dans les deux premières formules (6), on trouvera aisément

$$y^2(2-y)^2(y^2+3)=0 \quad \text{et} \quad x=-\frac{3y(2-y)(2+y)}{(2-y)(2y-3)}.$$

La première de ces équations donne

$$y=0,\ y=0,\ y=2,\ y=\sqrt{-3} \text{ et } y=-\sqrt{-3};$$

la seconde fournit, en rendant rationnels les dénominateurs,

$$x=0,\ x=\tfrac{0}{0},\ x=-3 \text{ et } x=-3.$$

On voit qu'il y a plusieurs valeurs de x qui répondent à $y=2$. Or, cette valeur 2 de y réduisant chacune des équations proposées à $x^2+x-12=0$, (d'où $x=2$ et $x=-3$), il y a deux valeurs de x qui correspondent à $y=2$.

Les deux équations proposées pourraient aussi se résoudre par substitution (60).

286. Prenons encore les deux équations du troisième degré

$$x^3+px^2+qx+r=0 \text{ et } x^3+p'x^2+q'x+r'=0.$$

Si on applique la méthode d'Euler, et que pour abréger, on fasse toujours $p-p'=e$, $q-q'=e'$ et $r-r'=e''$, on aura d'abord les cinq équations

$$\begin{aligned}
&a-a'=e\\
&p'a-pa'+b-b'=e'\\
&q'a-qa'+p'b-pb'=e''\\
&r'a-ra'+q'b-qb'=0\\
&r'b-rb'=0.
\end{aligned}$$

Prenant les valeurs de a' et b' dans la première et la dernière de ces équations, puis substituant dans les trois autres; substituant aussi dans la troisième des équations résultantes, les valeurs de a et b tirées des deux autres, et réduisant, il viendra, pour déterminer y, l'équation

$$\left.\begin{aligned}
&(rq'-qr')[e'(e'-ep)-e(e''-eq)]+ree'e''-\\
&(rp'-pr')[e''(e'-ep)+re^2]+e''^2(e''-eq)=0
\end{aligned}\right\}\cdots(7)$$

Quant aux valeurs de x, on les aura par la formule

$$x=\frac{e'(rp'-pr')-e''(e''-eq)-pe'e''}{e'e''-e(rp'-pr')}\cdots(8).$$

Lorsqu'on fait $r'=0$ dans les formules (7) et (8), on retrouve la formule (3) et la seconde formule (4).

287. Pour appliquer les formules (7) et (8), soient les deux équations

$$\begin{aligned}
&x^3-2yx^2-4x+8y=0\\
&x^3+2yx^2-yx-2y^2=0.
\end{aligned}$$

Il est clair qu'ici $p = -2y$, $q = -4$, $r = 8y$, $p' = 2y$, $q' = -y$, $r' = -2y^2$, $e = -4y$, $e' = y - 4$, $e'' = 2y^2 + 8y$, $e' - ep = y - 4 - 8y^2$, $e'' - eq = 2y^2 - 8y$, $p'r - pr' = 16y^2 - 4y^3$, $q'r - qr' = -16y^2$. Substituant ces valeurs dans (7), et réduisant, on trouvera

$$16y^2(4y^5 - 33y^4 + 68y^3 + 17y^2 - 72y + 16) = 0.$$

Les mêmes valeurs substituées dans (8) fournissent

$$x = \frac{16y^3 - 2y^4 - 32y^2}{33y^3 - 8y^4 - 16y}.$$

L'équation finale en y étant résolue, donnera

$$y = 0,\ y = 0,\ y = 1,\ y = -1,\ y = \tfrac{1}{4} \text{ et } y = 4;$$

les valeurs correspondantes de x seront :

$$x = \tfrac{0}{0},\ x = \tfrac{0}{0},\ x = -2,\ x = 2,\ x = \tfrac{1}{2} \text{ et } x = \tfrac{0}{0}.$$

Il n'y a pas plusieurs valeurs de x qui répondent à chacune des valeurs o de y; car lorsque $y = 0$, le plus grand commun diviseur des premiers membres des équations proposées est x, et par conséquent on a seulement $x = 0$, quand $y = 0$. A l'égard de $y = 4$, comme alors le plus grand commun diviseur est $x^2 - 4$, il y a deux valeurs de x qui répondent à la valeur 4 de y. De sorte que les équations proposées admettent les 7 solutions que voici :

$$\begin{aligned} y &= 0,\ 0,\ +1,\ -1,\ +\tfrac{1}{4},\ +4,\ +4, \\ x &= 0,\ 0,\ -2,\ +2,\ +\tfrac{1}{2},\ +2,\ -2. \end{aligned}$$

En résolvant les équations proposées par substitution, l'équation finale en x serait du septième degré. Mais on parvient à résoudre très-facilement les mêmes équations, en cherchant à les décomposer en facteurs; car on trouve sans peine qu'elles se réduisent à celles-ci :

$$(x - 2y)(x^2 - 4) = 0 \text{ et } (x^2 - y)(x + 2y) = 0.$$

Si donc on combine chacun des facteurs de la 1re, égalés à zéro, avec chacun des facteurs de la seconde, égalés aussi à zéro, on retrouvera les sept solutions précédentes.

288. De tout ce qui précède, il est aisé de conclure que les méthodes particulières d'élimination peuvent l'emporter en simplicité sur les méthodes générales. Aussi ne doit-on employer ces dernières, que quand les équations à résoudre n'offrent point

de simplifications dont on puisse profiter; ce que l'habitude du calcul, éclairée par les nombreux exemples que nous avons considérés, peut seule faire connaître. Il convient d'autant mieux de s'exercer à ces procédés particuliers, que la méthode l'Euler, d'ailleurs quelquefois plus simple que celle du plus grand commun diviseur, exige déjà, pour les équations complètes du troisième degré, des calculs fort longs; et pour les degrés plus élevés, ces calculs deviennent impraticables.

Problèmes résolubles par des séries dont les sommes dépendent des progressions.

289. *On forme une série avec les nombres entiers, depuis 1 jusqu'au plus grand de* m *chiffres, en écrivant chaque nombre autant de fois de suite qu'il renferme d'unités. On demande la valeur de tous les nombres que donnent les termes de cette série, en ajoutant dans chacun, les chiffres considérés comme exprimant des unités simples* (*).

Pour bien comprendre la solution de ce problème, considérons d'abord les nombres de trois chiffres, et soient a, b, c, les chiffres de l'un quelconque de ces nombres, lequel vaut par conséquent

$$100a+10b+c.$$

Comme ce nombre est écrit autant de fois qu'il a d'unités pour former un terme de la série proposée, la somme des chiffres de ce terme sera $a+b+c$ pris autant de fois que le nombre est écrit; cette somme sera donc

$$(100a+10b+c)(a+b+c), \text{ ou bien}$$
$$100a^2+110ab+10b^2+101ac+11bc+c^2.$$

(*) Voici un problème qui a de l'analogie avec celui qu'on vient de lire, mais qui est fort loin de pouvoir se résoudre de la même manière :

On forme une série avec les nombres entiers, depuis 1 jusqu'au plus grand de m chiffres, en écrivant chaque nombre à la suite de tous les inférieurs, placés les uns à la droite des autres. On demande la somme des nombres fournis par les termes de cette série, en ajoutant dans chacun, les chiffres considérés comme exprimant des unités simples.

J'ai vainement cherché la solution générale de ce problème; et je ne le rapporte ici que parce qu'il offre de l'intérêt et que probablement beaucoup de lecteurs sauront éluder ou vaincre les difficultés qui m'ont arrêté.

Or, si dans cette expression, l'on prend successivement $c=$ 0, 1, 2, 3, 4, ..., 9 et qu'on ajoute entre eux les 10 résultats; que dans la somme on donne à b les valeurs successives 0, 1, 2, 3, ..., 9, et qu'on réunisse les 10 résultats entre eux; qu'enfin, dans la dernière somme, on prenne successivement $a=1$, 2, 3, 4, ..., 9, et qu'on fasse la somme des 9 résultats, il est visible que cette somme sera la valeur t_3 de toutes les sommes obtenues en additionnant les chiffres, comme exprimant des unités simples, dans chacun des termes de la série, qui sont donnés par tous les nombres depuis 100 jusqu'à 999 inclusivement. Si donc on pose, pour abréger

$$h=1+2+3+4+\cdots+9=45,$$
$$k=1^2+2^2+3^2+\cdots+9^2=15.19,$$

on trouvera, en opérant comme il vient d'être dit,

$$t_3=10990k+2209h^2.$$

Les calculs précédens donneront successivement les valeurs t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, etc., de toutes les sommes fournies par les termes de la série proposée qui sont donnés par tous les nombres de 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. chiffres : on obtiendra

$$\begin{aligned}
t_1 &= k \\
t_2 &= 109k+11h^2 \\
t_3 &= 10990k+2209h^2 \\
t_4 &= 1099900k+331080h^2 \\
t_5 &= 109999000k+44110700h^2 \\
t_6 &= 10999990000k+5511106000h^2 \\
&\text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

La loi des premiers termes de ces expressions est facile à saisir; mais il n'en est pas de même de celle des derniers : heureusement, les valeurs précédentes en fournissent d'autres, qui conduisent aisément à la solution cherchée. En effet, soient x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, etc., les sommes des nombres fournis par les termes de la série, depuis le premier 1 jusqu'à celui donné par le plus grand nombre de 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. chiffres; d'après les valeurs précédentes, il est clair qu'on aura

$$x_1 = k$$
$$x_2 = 110k + 11h^2$$
$$x_3 = 11100k + 2220h^2$$
$$x_4 = 1111000k + 333300h^2$$
$$x_5 = 111110000k + 44444000h^2$$
$$x_6 = 11111100000k + 5555550000h^2$$
etc..............................

La loi de ces valeurs est évidente; et si l'on désigne par 1 (m) *fois* le nombre composé de m chiffres 1, on aura, d'après l'induction,

$$x_m = 1\,(m)\,\textit{fois} \times 10^{m-1}k + (m-1) \times 1\,(m)\,\textit{fois} \times 10^{m-2}h^2.$$

Mais $1\,(m)\,\text{fois} = 1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{m-1} = \frac{1}{9}(10^m - 1)$.

Substituant cette valeur, ainsi que celles de h et k, on trouvera, réductions faites,

$$x_m = \tfrac{1}{81}(27m + 11)(10^m - 1)10^m.$$

290. *Les nombres étant écrits avec* u *chiffres désignés, on demande,* 1° *le nombre* p_m *de tous les nombres de* m *de ces* u *chiffres;* 2° *la somme* x_m *de tous les nombres de* m *chiffres;* 3° *la somme* y_m *de tous les nombres, depuis le plus petit de* 1 *chiffre jusqu'au plus grand de* m *chiffres.*

1° Si à la droite de chacun des p_v nombres de v chiffres, on écrit successivement chacun des u chiffres, on aura up_v nombres de $v+1$ chiffres; et ce sera tous ceux que l'on peut former avec les u chiffres donnés; car chaque nouveau nombre de $v+1$ chiffres, que l'on voudrait écrire avec les u chiffres proposés, serait nécessairement un nombre de v chiffres, suivi de l'un des u chiffres; il serait par conséquent l'un des nombres de $v+1$ chiffres, déjà formés. Ainsi on a, pour le nombre p_{v+1} de tous les nombres de $v+1$ chiffres,

$$p_{v+1} = up_v.$$

Prenant successivement $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, m-1$, puis multipliant entre elles les $m-1$ équations résultantes, on aura, réductions faites,

$$p_m = p_1 u^{m-1}.$$

2° La somme de tous les nombres de v chiffres étant désignée par x_v, soit h un de ces nombres de v chiffres: en écrivant à la droite de h le chiffre 2, par exemple, le nombre de $v+1$ chiffres qui en proviendra, vaudra $10h+2$. De sorte que si à la droite de chacun des p_1u^{v-1} nombres de v chiffres (1°), on écrit le chiffre 2, la somme des nombres résultans de $v+1$ chiffres, aura pour valeur $10x_v+2.p_1u^{v-1}$.

On aurait une expression semblable pour chacun des u chiffres proposés ; si donc on désigne par a la somme de ces u chiffres, il viendra, pour la somme x_{v+1} de tous les nombres de $v+1$ des mêmes chiffres,

$$x_{v+1}=10ux_v+ap_1u^{v-1}.$$

Préparant cette équation pour la résoudre par addition, elle deviendra

$$\left(\frac{1}{10u}\right)^{v+1}x_{v+1}-\left(\frac{1}{10u}\right)^{v}x_v=\frac{ap_1}{10u^2}.10^{-v}.$$

Faisant successivement $v=1, 2, 3, 4, \ldots, m-1$; ajoutant entre elles les équations résultantes, réduisant et observant que $x_1=a$, on aura

$$\left(\frac{1}{10u}\right)^{m}x_m-\frac{a}{10u}=\frac{ap_1}{10u^2}(10^{-1}+10^{-2}+10^{-3}+\cdots+10^{-m+1});$$

d'ou $\quad x_m=\frac{a}{9u}[(9u+p_1)(10u)^{m-1}-p_1u^{m-1}].$

3° Prenant dans cette formule, successivement $m=1, 2, 3, 4, \ldots, m$; ajoutant et faisant la somme des nombres en progression géométrique, on trouvera, pour la somme y_m de tous les nombres entiers depuis o jusqu'au plus grand de m chiffres, écrits avec les u chiffres proposés,

$$y_m=\frac{a}{9u}\left[(9u+p_1)\frac{(10u)^m-1}{10u-1}-p_1\frac{u^m-1}{u-1}\right].$$

Les valeurs générales de p_m, x_m et y_m fourniront aisément celles qui répondent aux cas où l'on prend les dix chiffres ordinaires, les 9 chiffres significatifs, les 5 chiffres impairs, les 4 chiffres pairs, les 3 chiffres 2, 4, 8 ; etc. Par exemple, pour les dix chiffres ordinaires, $u=10$, $p_1=9$, $a=45$; d'où résultent $p_m=9.10^{m-1}$,

$$x_m=45.10^{m-2}(11.10^{m-1}-1) \text{ et } y_m=\frac{10^m}{2}(10^m-1).$$

291. *Considérant les nombres écrits avec* u *des chiffres ordinaires ; soit pris un de ces nombres de* m *chiffres, et soit*

posée une addition, en écrivant les uns sous les autres et en avançant chaque fois d'un rang vers la droite, le 1er chiffre à gauche du nombre de m *chiffres, la somme des deux premiers, celles des* 3, *des* 4, ..., *des* m — 1 *premiers,* v *fois successives la somme des* m *chiffres, puis la somme des* m — 1 *derniers, celles des* m — 2, ..., *des* 3, *des* 2 *derniers et le dernier lui-même. La somme de tous les nombres ainsi disposés sera divisible par le nombre proposé, et donnera un quotient de* m + v — 1 *chiffres* 1. *Ayant formé avec chacun des nombres de* m *chiffres, les* n + 1 *sommes qui répondent successivement à* v = 0, 1, 2, 3, 4, ..., n, *on demande,* 1° *la valeur* P *de toutes les sommes fournies de cette manière par tous les nombres de* m *des* u *chiffres désignés;* 2° *la valeur* Q *de toutes les sommes que l'on peut ainsi produire avec tous les nombres entiers, depuis le plus petit d'un chiffre jusqu'au plus grand de* m *des chiffres proposés;* 3° *le nombre* R *d'additions à faire et le nombre* S *de tous les nombres à écrire pour avoir toutes les sommes qui entrent dans la valeur de* Q.

1° Soient conservées les dénominations du problème du précédent n°, et soient A, B, C, D, E, etc., les nombres de m chiffres, écrits avec les u chiffres désignés; on aura évidemment

$$x_m = A + B + C + D + E + \cdots$$

Représentons par $1\,(v)$ *fois*, le nombre composé de v chiffres 1, de manière, par exemple, que $1111 = 1\,(4)$ *fois*; d'après l'énoncé précédent, le nombre A de m chiffres, donne $n + 1$ sommes toutes divisibles par A, et dont les quotiens respectifs sont :

$$1\,(m-1)\,\textit{fois},\ 1\,(m)\,\textit{fois},\ 1\,(m+1)\,\textit{fois}, \ldots,\ 1\,(m+n-1)\,\textit{fois};$$

de sorte que la valeur de toutes les sommes fournies par A, est

$$A\left[1\,(m-1)\,\textit{fois} + 1\,(m)\,\textit{fois} + 1\,(m+1)\,\textit{fois} + \cdots \right.$$
$$\left. + 1\,(m+n-1)\,\textit{fois}\right].$$

Pour avoir la valeur du multiplicateur de A, on observe que

$$1\,(v)\,\textit{fois} = 1 + 10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^{v-1} = \tfrac{1}{9}(10^v - 1).$$

Prenant successivement $v = m - 1,\ m,\ m + 1,\ m + 2, \ldots,$ $m + n - 1$, et ajoutant, la somme sera le multiplicateur ω de A; on aura donc, réductions faites,

$$\omega = \tfrac{1}{81}\cdot 10^{m-1}(10^{n+1} - 1) - \tfrac{1}{9}(n + 1).$$

Cela posé, puisque la valeur de toutes les sommes fournies par A, est Aω; de même, les valeurs des sommes fournies respectivement par A, B, C, D, ..., sont Bω, Cω, Dω, etc. On a par conséquent

$$P = \omega(A + B + C + D + \cdots), \text{ ou } P = \omega x_m,$$

la valeur de x_m étant celle du numéro précédent.

2° Faisant successivement $m = 1, 2, 3, 4, \ldots, m$, dans la valeur de P; ajoutant et opérant comme au n° 290, 3°, on verra que la valeur Q de toutes les sommes fournies par tous les nombres entiers, depuis le plus petit d'un chiffre jusqu'au plus grand de m des u chiffres, se réduit à

$$Q = \omega y_m,$$

y_m ayant la valeur calculée au n° 290.

3° Il est clair que chaque nombre d'un chiffre fournit $n - 1$ additions, et qu'ainsi les p_1 nombres d'un chiffre fournissent $p_1(n - 1)$ additions. Quant à ceux de plusieurs chiffres, comme chaque nombre de m chiffres fournit $n + 1$ additions, les $p_1 u^{m-1}$ en fourniront $(n + 1) p_1 u^{m-1}$. Prenant successivement $m = 2, 3, 4, 5, \ldots, m$, et ajoutant avec $p_1(n - 1)$, on aura

$$R = p_1(n - 1) + (n + 1)p_1(u + u^2 + u^3 + \cdots + u^{m-1}),$$

$$\text{d'où} \quad R = p_1(n - 1) + (n + 1)p_1\frac{u^m - u}{u - 1}.$$

D'un autre côté, il est aisé de voir que pour obtenir les sommes fournies par chaque nombre d'un chiffre, il faut écrire

$1 + 3 + 4 + 5 + \cdots + (n + 1)$, ou $\frac{1}{2}n(n + 3) - 1$ nombres; donc, pour avoir toutes les sommes fournies par tous les nombres d'un chiffre, il faudra écrire $\frac{1}{2}p_1 n(n + 3) - p_1$ nombres.

A l'égard des nombres de m chiffres, il est clair que pour faire l'addition où la somme des m chiffres est placée v fois, il faut écrire

$$m - 1 + v + m - 1 + 1, \text{ ou } 2m - 1 + v \text{ nombres.}$$

Prenant successivement $v = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$, et ajoutant, on verra que pour former toutes les sommes fournies par un nombre de m chiffres, il faut écrire $(2m - 1)(n + 1) + \frac{1}{2}n(n + 1)$, ou $2(n + 1)m - \frac{1}{2}(n + 1)(n - 2)$ nombres: donc, pour former toutes les sommes fournies par tous les nombres de m chiffres, il faudra écrire

$$2p_1(n+1)mu^{m-1} - \tfrac{1}{2}(n+1)(n-2)p_1 u^{m-1} \text{ nombres.}$$

Posant successivement $m = 2, 3, 4, 5, \ldots, m$, et ajoutant avec $\frac{1}{2}p_1 n(n+3) - p_1$, il viendra

$$S = \begin{cases} 2p_1(n+1)[2u + 3u^2 + 4u^3 + \cdots + mu^{m-1}] \\ -\frac{1}{2}(n+1)(n-2)p_1(u+u^2+u^3+\cdots+u^{m-1}) \\ +\frac{1}{2}p_1 n(n+3) - p_1; \end{cases}$$

d'où l'on tire aisément

$$S = \begin{cases} 2p_1(n+1)\left[\dfrac{mu^m - u}{u-1} - \dfrac{u^m - u}{(u-1)^2}\right] - p_1 \\ -\frac{1}{2}(n+1)(n-2)p_1\dfrac{u^m - u}{u-1} + \frac{1}{2}n(n+3)p_1. \end{cases}$$

292. *Tous les nombres entiers consécutifs, exprimés avec les 10 chiffres ordinaires, étant écrits les uns à la suite des autres, de cette manière :*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 etc.;

on demande d'assigner le chiffre z qui occupe le rang R *dans la suite résultante, sans être obligé d'écrire ceux qui le précèdent.*

Puisqu'il y a 9.10^{v-1} nombres de v chiffres (290), il est clair que pour écrire tous ces nombres, il faudra $9v.10^{v-1}$ chiffres. Prenant successivement $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, m$, et ajoutant, la somme sera le nombre t de chiffres qu'il faut pour écrire la suite des nombres entiers, depuis 1 jusqu'au plus grand de m chiffres; il viendra donc, après les réductions faites,

$$t = m.10^m - \frac{10^m - 1}{9}.$$

De là, si l'on fait $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, etc., on aura

$$t = 9,\ 189,\ 2889,\ 38889,\ 488889,\ 5888889, \text{ etc.}$$

Par ces valeurs on voit que pour écrire, par exemple, tous les nombres entiers, depuis 1 jusqu'au plus grand de 5 chiffres, il faut employer 488889 chiffres.

Il est maintenant facile de résoudre le problème proposé; car si le rang R du chiffre cherché z est, par exemple, 50640; alors, comme pour écrire tous les nombres de 4 ou 5 chiffres, il faut 38889 ou 488889 chiffres, on voit que le chiffre demandé z appartient à un nombre de 5 chiffres. Et puisque 50640 —

$38889 = 11751$, il est clair que z est le 11751^{me} dans les nombres de 5 chiffres. Or, 11751 chiffres contiennent 5 chiffres, 2350 fois, avec le reste 1; ce qui fait voir que z est le premier à gauche du 2351^{me} nombre de 5 chiffres. Mais les nombres de 5 chiffres forment la progression arithmétique 10000, 10001, 10002, 10003, ..., dont le 2351^{me} terme est $10000 + 2350$ ou 12350. Ainsi le 2351^{me} nombre de 5 chiffres est 12350, et par conséquent $z = 1$.

Il résulte de ces calculs, que pour avoir le chiffre z qui occupe le rang R dans la suite proposée, il faut recourir aux valeurs successives du nombre t de chiffres employés pour écrire tous les nombres entiers, depuis 1 jusqu'au plus grand de m chiffres inclusivement; prendre la valeur t' de t, immédiatement inférieure à R, ainsi que la valeur m' de m, qui correspond à t'; retrancher t' de R, et diviser la différence par $m' + 1$, ce qui donnera un quotient q et un reste r'; ajouter q à 1 *suivi de* m' *zéros*, et le r'ième chiffre à gauche de la somme résultante, sera le chiffre demandé z. Si r' était nul, le premier chiffre de la somme $q - 1 + 1$ *suivi de* m' *zéros*, serait le chiffre z.

De cette manière, si $R = 6192$, on aura $z = 2$; si $R = 3157$, il viendra $z = 6$; et si $R = 59439$, on trouvera $z = 9$.

293. *Trouver le nombre* x *de chiffres qu'il faut pour écrire la série formée en plaçant les uns à la droite des autres le premier nombre entier, les 2 premiers, les 3 premiers, les 4 premiers, ..., et enfin, tous les nombres entiers, jusqu'au plus grand de* m *chiffres.*

Soient t_v et t_{v+1} les nombres de chiffres qu'il faut pour écrire les deux termes de la série, qui sont terminés par les plus grands nombres de v et de $v + 1$ chiffres; il est aisé de voir que le nombre total de chiffres employés à écrire les termes terminés par les $9 \cdot 10^v$ nombres de $v + 1$ chiffres, est

$$[t_v + (v + 1)] + [t_v + 2(v + 1)] + [t_v + 3(v + 1)] \\ + [t_v + 4(v + 1)] + \cdots + [t_v + 9 \cdot 10^v (v + 1)];$$

ou bien encore, en réduisant,

$$9 \cdot 10^v t_v + ? \cdot 10^v (9 \cdot 10^v + 1) \cdots (1)$$

On a d'ailleurs $t_{v+1} = t_v + 9(v + 1) \cdot 10^v$. Cette équation servirait à trouver t_v; mais on y parvient immédiatement, en observant que t_v étant le nombre de chiffres qu'il faut pour écrire tous les nombres entiers, depuis 1 jusqu'au plus grand de v chiffres, on a, d'après ce qui précède (292),

$$t_v = v.10^v - \frac{10^v - 1}{9}.$$

Cette valeur de t_v, substituée dans l'expression (1), la réduit à

$$\tfrac{99}{9}.v.10^{2v} + \tfrac{20}{9}.10^{2v} + \tfrac{9}{9}.v.10^v + \tfrac{11}{9}.10^v.$$

Prenant successivement $v = 0, 1, 2, 3, \ldots, m-1$, on aura successivement les nombres de chiffres qu'il faut pour écrire les termes de la série, depuis 1 jusqu'à celui terminé par le plus grand nombre de $1, 2, 3, 4, \ldots, m$ chiffres; la somme des résultats sera donc le nombre x demandé. Ainsi, en réduisant, on trouvera

$$x = \tfrac{5}{81}[(99m - 20)10^{2m-1} + 11(9m-1)10^{m-1} - 11].$$

294. *Trouver la somme* x *des nombres que fournit la suite des nombres entiers, depuis* 1 *jusqu'au plus grand de* m *chiffres, en prenant, dans chacun, la somme des chiffres regardés comme exprimant des unités simples.*

Soient S_v et S_{v+1} les sommes des nombres fournis ainsi par la suite des nombres de v et de $v+1$ chiffres : si à côté de chacun des 9.10^{v-1} nombres de v chiffres, on écrit successivement chacun des 10 chiffres, la somme des nombres fournis par tous les nombres de $v+1$ chiffres qui en résultent, sera

$$S_{v+1} = 10S_v + 9.45.10^{v-1}.$$

Cette équation donne aisément

$$S_v = \tfrac{9}{2}(11.10^{2v-2} - 10^{v-1}).$$

Prenant successivement $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, m$, et ajoutant, il viendra

$$x = 5.10^{m-1}(10^m - 1).$$

295. Voici plusieurs problèmes à résoudre :

Trouver la somme de tous les nombres qu'on obtient en écrivant chacun des nombres de m chiffres, autant de fois qu'il a d'unités.

On demande la formule pour calculer la somme des n premiers termes de chacune des séries :

17, 277, 3777, 47777, 577777, 6777777, etc.

18, 3888, 588888, 78888888, 9888888888, etc.

En général, a étant un nombre de m chiffres, on demande la formule pour calculer la somme des n premiers termes de la série, dont le v^{me} terme est le nombre v suivi de a écrit v fois de suite. [Le v^{me} terme pourrait être le nombre impair $2v-1$ suivi de a écrit $2v-1$ fois successives : on peut trouver aussi la valeur de tous les chiffres considérés comme exprimant des unités simples.]

A la suite des 9 chiffres significatifs écrits v fois, on place successivement les 1, 2, 3, 4, ..., 9 premiers chiffres ; ce qui fournit 9 termes pour chaque valeur de v. On demande, 1° la somme de tous les termes ainsi formés qui répondent aux valeurs de v, depuis 0 jusqu'à m ; 2° le nombre total de chiffres qu'il faut pour écrire tous ces termes ; 3° enfin la valeur de toutes les sommes qu'on obtient en additionnant, dans chacun des mêmes termes, les chiffres considérés comme exprimant des unités simples ?

Trouver la somme de tous les termes formés avec les nombres de m chiffres, en écrivant successivemedt le premier de ces nombres, les 2 premiers, les 3 premiers, ..., et enfin tous les mêmes nombres.

On forme une série avec les nombres entiers, depuis 1 jusqu'au plus grand de m chiffres, en écrivant chaque nombre à la droite de celui qui est immédiatement plus petit. On demande, 1° la somme de tous les termes de la série ; 2° la valeur de tous les nombres obtenus en prenant, dans chaque terme de cette série, la somme des chiffres, considérés comme exprimant des unités simples ; 3° enfin le nombre total de chiffres employés pour écrire la série proposée.

On écrit un nombre donné a à la droite de chacun des nombres entiers, depuis 1 jusqu'au plus grand de m chiffres ; on demande, 1° la somme de tous les termes de la série résultante ; 2° la valeur de toutes les sommes qu'on trouve en additionnant, dans chaque terme, les chiffres considérés comme exprimant des unités simples.

Trouver combien il faut de chiffres pour composer une table de logarithmes, depuis 1 jusqu'à 10^n, inclusivement, n étant < 10 et les logarithmes ayant p décimales.

Trouver combien il faut de chiffres pour écrire la série formée avec les nombres entiers, depuis 1 jusqu'au plus grand de m chiffres, en plaçant chaque nombre autant de fois qu'il a d'unités.

Combien faut-il de chiffres pour écrire la série formée avec les nombres entiers, depuis 1 jusqu'au plus grand de m chiffres, en plaçant chaque nombre à la droite de celui moindre d'une unité ?

Soient tous les nombres entiers que l'on peut écrire avec u des chiffres ordinaires ; soit un de ces nombres de m chiffres ; soient placés les uns sous les autres, et en avançant chaque fois de k rangs vers la droite, le nombre proposé, puis successivement son double, son triple, son quadruple, ..., son produit par v, et soit prise la somme de tous les nombres ainsi disposés. Ayant formé ainsi, avec chaque nombre de m des u chiffres, les n sommes qui répondent à $v = 1, 2, 3, 4, ..., n$, on demande, 1° la valeur P de toutes les sommes formées de cette manière avec tous les nombres de m chiffres ; 2° la valeur Q de toutes les sommes que l'on peut ainsi produire avec tous les nombres entiers, depuis le plus petit d'un jusqu'au plus grand de m des u chiffres proposés; 3° le nombre R des opérations à faire pour avoir ces dernières sommes; 4° enfin, le nombre S de tous les nombres à écrire pour former les mêmes sommes, en supposant qu'on écrive les nombres et le résultat de chaque opération. [On pourrait écrire les uns sous les autres et en avançant chaque fois de k rangs vers la droite, le nombre proposé, puis successivement ce nombre augmenté de φ, de 2φ, de 3φ, ..., de $\nu\varphi$.]

De quelques séries infinies.

296. Lorsque l'exposant m est un nombre entier positif, il est démontré, dans tous les traités d'algèbre, que

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\text{etc.}\ (\text{C})$$

Voyons si cette formule est exacte lorsque m est un nombre quelconque, positif ou négatif. A cet effet, considérons les ν séries indéfinies

$$a'=1+ax+\frac{a(a-1)}{1.2}x^2+\text{etc.}$$

$$b'=1+bx+\frac{b(b-1)}{1.2}x^2+\text{etc.}$$

$$c'=1+cx+\frac{c(c-1)}{1.2}x^2+\text{etc.}$$

....

$$k'=1+kx+\frac{k(k-1)}{1.2}x^2+\text{etc.}$$

Dans ces ν valeurs, les nombres a, b, c, ..., k, sont quelconques, mais tous sous la forme positive. Si l'on conçoit que le produit $a'b'c'\ldots k'$ de ces ν valeurs soit ordonné par rapport aux puissance ascendantes de x; qu'ensuite on y suppose entiers et réellement positifs tous les nombres a, b, c, ..., k; ce produit, d'après la formule (C), aura alors pour facteurs

$$(1+x)^a,\ (1+x)^b,\ (1+x)^c,\ \ldots,\ (1+x)^k;$$

de sorte que si l'on fait $a+b+c+\cdots+k=r$, on aura

$$a'b'c'\ldots k'=(1+x)^r.$$

Et puisqu'on vient de supposer entiers et réellement positifs les nombres a, b, c, ..., k, il s'ensuit que r est aussi un nombre entier positif, et qu'ainsi on a

$$a'b'c' \ldots k' = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{1.2} x^2 + \text{etc.} \ldots (1)$$

Or, il est évident que *si le produit* a'b'c' ... k' *a une certaine forme lorsque* a, b, c, ... k *sont des nombres quelconques, il conservera la même forme quand* a, b, c, ... k *deviendront des nombres entiers indéterminés, sans changer de signes;* car il est visible qu'alors il n'y aura pas de nouvelles réductions dans ce produit, et que par suite sa forme restera la même. Donc le probuit $a'b'c' \ldots k'$ avait la forme (1) avant d'y supposer entiers et réellement positifs les nombres a, b, c, ..., k. De sorte que quels que soient ces nombres, le produit $a'b'c' \ldots k'$ aura toujours la forme (1).

Cela posé, si l'on suppose égaux entre eux les v nombres positifs quelconques $a, b, c, \ldots, k$, on aura $r = a + b + c + \cdots + k = va$; puis $a' = b' = c' = \cdots = k'$ et $a'b'c' \ldots k' = a'^v$. D'ailleurs, en prenant a égal à la fraction positive $\frac{u}{v}$, il viendra $r = va = u$, nombre entier positif; donc le second membre de l'identité (1) est le développement de $(1+x)^u$; déjà le premier membre vaut a'^v; donc $(1+x)^u = a'^v$, ou $(1+x)^{\frac{u}{v}} = a'$. Si donc on remplace, dans l'expression de a', le nombre a par sa valeur $\frac{u}{v}$, on aura

$$(1+x)^{\frac{u}{v}} = 1 + \frac{u}{v} x + \frac{\frac{u}{v}\left(\frac{u}{v} - 1\right)}{1.2} x^2 + \text{etc.} \ldots (2)$$

Or, ce résultat est ce que devient la formule (C) du binome, quand on y change l'exposant m en $\frac{u}{v}$. Cette formule est donc vraie lorsque l'exposant m est un nombre fractionnaire positif.

Je dis aussi que la même formule a lieu quand l'exposant m est un nombre quelconque négatif. En effet, la formule (1) n'est démontrée que pour les cas où les nombres a, b, c, ..., k, ont une forme positive. Mais cette forme positive existe encore lorsqu'on suppose que b représente le nombre négatif $-p$, p étant entier ou fractionnaire; car dans la multiplication de a' par b', on n'a considéré que b et non pas $-p$; et d'ailleurs les règles de cette multiplication demeurent les mêmes, soit que b représente un nombre positif, soit que b représente un nombre négatif

$-p$. Ainsi l'identité (1) est vraie encore quand on y fait $b = -p$. Si donc on pose en même temps $a = p$, $c = 0$, $d = 0$, ..., $k = 0$, ce qui donne $c' = 1$, $d' = 1$, ..., $k' = 1$ et $r = a + b = p - p = 0$, l'identité (1) deviendra $a'b' = 1$. Remplaçant dans a', la quantité a par sa valeur p, on verra par les formules (C) et (2), que $a' = (1+x)^p$. Donc l'équation $a'b' = 1$, donne $b' = (1+x)^{-p}$. Changeant donc b en $-p$, dans b', on trouvera

$$(1+x)^{-p} = 1 - px + \frac{p(p+1)}{1.2}x^2 - \frac{p(p+1)(p+2)}{1.2.3}x^3 + \text{etc.}$$

Or, ce résultat est ce que devient la formule (C) du binome, lorsqu'on y change l'exposant m en $-p$. Par conséquent cette formule est vraie quand l'exposant m est un nombre quelconque négatif (*).

(*) Si l'on fait $a + x = 1 - z$ et $m = -1$, le binome de Newton donnera, pour la puissance -1 de $1 - z$, une valeur qu'on trouverait aussi en divisant 1 par $1 - z$. De sorte que le binome de Newton est vrai lorsque l'exposant $m = -1$. S'il était vrai encore quand l'exposant m est un nombre entier négatif $-u$, il donnerait une formule que, pour abréger, nous représenterons par

$$(1 - z)^{-u} = 1 + uz + c_2z^2 + \cdots + c_nz^n + \text{etc.} \ldots (1)$$

Divisant les deux membres de cette équation par $1 - z$, on aura une équation (2) dont le premier membre sera la puissance $-(u + 1)$ de $1 - z$; et dans le second membre, *le coefficient d'une puissance de z, sera la somme des coefficiens de cette puissance et de toutes les puissances inférieures dans le dividende.* Et en effet, il est aisé de voir que cette loi ayant lieu pour le $n$ième terme du quotient, aura lieu aussi pour le suivant; et que par conséquent elle est générale. De sorte que le $(n + 1)$ième terme du second membre de l'équation (2) est

$$(1 + u + c_2 + c_3 + \cdots + c_n)\, z^n.$$

Substituant et réduisant d'après la première formule (131), où $c = 1$, on verra que le $(n + 1)$ième terme de la puissance $-(u + 1)$ de $1 - z$ est ce que devient le $(n+1)^{me}$ terme du binome de Newton, lorsqu'on y change l'exposant m en $-(u + 1)$. D'où il suit que, *si le binome de Newton est vrai lorsque l'exposant* $m = -u$, *il sera vrai aussi lorsque l'exposant* m *vaudra* $-(u+1)$. Or, le binome de Newton est vrai lorsque l'exposant $m = -1$; donc il sera vrai aussi lorsque l'exposant $m = -2$. Etant vrai pour $m = -2$, il sera vrai aussi pour $m = -3$, pour $m = -4$, $m = -5$, et en général, pour toutes les valeurs négatives entières de l'exposant m. Et l'on doit bien observer que cette conclusion aurait encore lieu, si le binome était $1 + x$; car les raisonnemens précé-

La formule du binome étant ainsi démontrée pour tous les cas où l'exposant est un nombre commensurable, positif ou négatif, aura lieu encore quand l'exposant sera irrationnel; et la généralité de l'algèbre conduit à faire usage de la même formule, lorsque l'exposant est imaginaire.

On doit observer d'ailleurs que quand l'exposant m n'est pas un nombre entier positif, le second membre de la formule (C) est composé d'une infinité de termes, car aucun des coefficiens en m ne devient nul.

297. Les séries binomiales conduisent aux séries *exponentielles*, et voici comment : soit e la valeur de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, lorsque n est infini, et soit élevé de part et d'autre à la puissance x, x étant quelconque; on aura donc $e^x = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$. Développant le second membre, d'après la formule du binome, il viendra

$$e^x = 1 + x + \frac{nx(nx-1)}{1\,.\,2\,.\,n^2} + \frac{nx(nx-1)(nx-2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,n^3} + \cdots$$
$$+ \frac{nx(nx-1)(nx-2)\ldots(nx-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,r\,.\,n^r} + \text{etc.}$$

Cette formule peut s'écrire comme il suit :

$$e^x = 1 + x + \left(x-\frac{1}{n}\right)\frac{x}{2} + \left(x-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{n}\right)\frac{x}{3} + \cdots$$
$$+ \left(x-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(\frac{x}{r-1}-\frac{1}{n}\right)\frac{x}{r} + \text{etc.}$$

Or, n est infini, par hypothèse; donc $\frac{1}{n}=0$, et par suite, il vient

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \cdots + \frac{x^r}{2.3.4\ldots r} + \text{etc.} \ldots \text{(D)}$$

298. Comme e est indépendant de x, e ne changera pas en faisant $x = 1$; ce qui donnera

$$e = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \text{etc., à l'infini.}$$

---

dens ne changent pas quand on y suppose que x représente $-z$; ce qui donne $1+x=1-z$.

Le binome de Newton étant ainsi démontré pour un exposant négatif entier, on fera voir, en raisonnant comme nous l'avons fait pour l'exposant positif, que ce binome est vrai aussi pour un exposant négatif quelconque.

Je dis que e est incommensurable. D'abord, comme la série qui suit le premier terme 2 du second membre est plus petite que

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}+\text{ etc. à l'infini, ou est } < 1,$$

on voit que e est compris entre 2 et 3, et ne saurait être un nombre entier. Si e pouvait être un nombre fractionnaire exact $\frac{m}{n}$, on aurait

$$\frac{m}{n}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{2.3.4\ldots n}+\frac{1}{2.3\ldots n(n+1)}+\text{etc.}$$

Multipliant de part et d'autre par $2.3.4\ldots(n-1)n$, il viendrait

$$2.3.4\ldots(n-1)m=2.2.3.4\ldots n+3.4\ldots n+4.5\ldots n+\cdots+n+1$$
$$+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\text{etc.}\ldots(1)$$

Or, cette égalité est impossible; car le premier membre est un nombre entier, tandis que le second membre n'en est pas un, puisque la seconde série de ce second membre est plus petite que

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\text{ etc. à l'infini, ou est } < \frac{1}{n}.$$

Donc e est un nombre irrationnel, et ne peut s'obtenir que par approximation. On a vu en algèbre que $e=2,718281828$5, à moins d'un billionième près (*).

(*) La formule (D), quoique donnée par la considération de l'infini, n'en est pas moins très-exacte, et peut se vérifier comme il suit : soient a', b', c', ..., k' les valeurs de x séries indéfinies, composées respectivement en a, b, c, ..., k, précisément comme la formule (D) est composée en x. Si l'on multiplie la série a' par la série b', le premier terme du produit $a'b'$ sera l'unité, et les autres se composeront des termes du premier degré, du second, du troisième, etc., à l'infini. Pour obtenir tous les termes du degré r, il faudra multiplier le terme du degré r, dans a', par le premier terme de b'; puis ajouter au résultat, le produit du terme du degré $r-1$, dans a', par le second terme de b'; ajouter au résultat, le produit du terme du degré $r-2$, dans a', par le terme du degré 2 de b'; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'en prenant ainsi les termes à rebours, dans a', et en avançant toujours dans b', on soit arrivé au produit du 1[er] terme de a' par le terme du degré r dans b' : en procédant ainsi, on trouve que la somme des termes du degré r dans le produit $a'b'$, est

$$\frac{a^r}{2.3\ldots r}+\frac{a^{r-1}b}{2.3\ldots(r-1)}+\frac{a^{r-2}b^2}{2.3\ldots(r-2).2}+\frac{a^{r-3}b^3}{2.3\ldots(r-3).2.3}$$

299. Des calculs absolument pareils à ceux du n° 297, prou-

$$+\cdots+\frac{a^2b^{r-2}}{2.2.3\ldots(r-2)}+\frac{ab^{r-1}}{2.3\ldots(r-1)}+\frac{b^r}{2.3\ldots r}\ldots$$

Mettant en facteur commun $\frac{1}{2.3\ldots r}$, on verra, d'après la formule du binome, que le terme du degré r dans le produit $a'b'$, se réduit à $\frac{(a+b)^r}{2.3\ldots r}$. De sorte que le produit $a'b'$, des deux séries a' et b', est composé avec $a+b$, comme la série a' est composée avec a.

Multipliant $a'b'$ par c', puis le produit par d', et ainsi de suite, on verra de la même manière que le produit $a'b'c'\ldots k'$ est composé avec $a+b+c+\cdots+k$, comme la série a', est composée avec a. Si l'on suppose tous les x nombres a, b, c, ..., k, égaux entre eux, leur somme sera ax et le produit $a'b'c'\ldots k'$ vaudra la puissance $x$ième de a'. De sorte qu'on aura

$$a'^x=1+ax+\frac{a^2x^2}{2}+\frac{a^3x^3}{2.3}+\cdots+\frac{a^rx^r}{2.3\ldots r}+\cdots(1)$$

Soit $a=1$, la valeur de la série a' sera alors celle que nous avons désignée par e; et dans ce cas, la formule (1) devient la formule (D); celle-ci est donc vraie lorsque x est un nombre entier positif quelconque. D'un autre côté, comme la formule (1) est vraie pour toutes les valeurs qu'on voudra donner à a, si l'on y fait $a=\frac{u}{x}$, elle donnera la puissance x^{me} de a', égale à une série, qui, à cause de u entier positif, se réduira à la puissance u^{me} de e. D'où en extrayant la racine x^{me} de part et d'autre, on aura la puissance $\frac{u}{x}$ième de e, égale à a', c'est-à-dire, à cause de $a=\frac{u}{x}$, égale à ce que devient la formule (D), lorsqu'on y change x en $\frac{u}{x}$.

Enfin, cette formule (D) est vraie aussi lorsque l'exposant x est un nombre quelconque négatif; car la valeur de $a'b'$ ayant lieu quels que soient les nombres a et b, si on y fait $a=x$ et $b=-x$, elle donnera $a'b'=1$. D'où, à cause que la valeur de a' se réduit, d'après ce qui précède, à la puissance $x$ième de e, on aura la puissance $-x$ième de e égale à b', c'est-à-dire, à ce que devient la formule (D), quand on y change x en $-x$.

Ainsi, la formule (D) est démontrée pour toutes les valeurs commensurables, positives ou négatives, de l'exposant x. Cette formule aura donc lieu aussi lorsque l'exposant x sera incommensurable; et on pourra encore employer la même formule, lorsque l'exposant x sera imaginaire.

(Les idées de cette démonstration et de celle qui a donné la formule (D), sont dues à l'ouvrage intitulé : *Mélanges d'analyse algébrique et de géométrie*, par M. de Stainville. Paris, 1815.

vent que si n est infini, et qu'on ait égard à la formule (D), on aura

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^{nx}=\left(1-\frac{z}{n}\right)^{-nx}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nxz}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-nxz}=e^{xz},$$

$$\left(1-\frac{z}{n}\right)^{nx}=\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-nx}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nxz}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-nxz}=e^{-xz}.$$

Nous ferons usage de ces formules.

300. A l'aide des séries binomiales et exponentielles, il est facile de trouver les séries *logarithmiques*. En effet, nous venons de voir que quand n est infini, on a $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z$. Posons $e^z = 1+v$; d'où $zle = l(1+v)$: nous aurons $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = 1+v$ et $z = n(1+v)^{\frac{1}{n}} - n$. Multipliant de part et d'autre par le et substituant, il viendra

$$l(1+v) = le\left[n(1+v)^{\frac{1}{n}} - n\right].$$

Développant d'après la formule du binome, réduisant et observant que n est infini, ce qui donne $\frac{1}{n} = 0$, on trouvera

$$l(1+v) = le\left[v - \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} - \frac{v^4}{4} + \frac{v^5}{5} - \text{etc.}\right], \ldots \text{(E)}$$

série dont la loi est évidente jusqu'à l'infini et dans laquelle v est un nombre quelconque, positif ou négatif.

301. La série (E) est démontrée en algèbre, sans le secours de l'infini, et on en déduit d'autres séries, propres à calculer, avec la plus grande facilité, les tables de logarithmes. Ici nous nous bornerons à tirer de la série (E), deux résultats assez remarquables.

D'abord si l'on change v en $-v$ dans la formule (E) et qu'on en retranche le résultat, il est clair que, comme $l(1+v) - l(1-v) = l\left(\frac{1+v}{1-v}\right)$, on aura

$$l\left(\frac{1+v}{1-v}\right) = 2le\left[v + \frac{v^3}{3} + \frac{v^5}{5} + \frac{v^7}{7} + \text{etc.}\right].$$

Prenant dans cette formule, $v = \sqrt{-1}$, doublant les deux membres et observant que $2la = l(a^2)$, on verra que le premier membre devient $l(-1)$: et comme $(\sqrt{-1})^{2m+1} = (-1)^m\sqrt{-1}$, on trouvera

$$l(-1) = \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc.}\right) 4le\sqrt{-1}.$$

Or, la série entre parenthèses a une valeur finie ; car elle représente le quart du rapport de la circonférence au diamètre, comme on le verra en trigonométrie ; ainsi on a $l(-1) = \pi l e \sqrt{-1}$, c'est-à-dire que *le logarithme d'une quantité négative est imaginaire.*

302. Pour tirer une autre conséquence de la formule (E), faisons $v = -1$; le 1er membre sera $l 0$ ou $-\infty$; on aura donc

$$\infty = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \text{etc.} \ldots (2)$$

Le second membre de cette formule est la série *harmonique* ; la valeur de cette série est donc infinie. C'est ce qu'on peut démontrer directement. En effet, imaginons que l'on groupe les termes de la série harmonique, de manière que chaque groupe contienne toutes les fractions dont les dénominateurs sont les nombres entiers, depuis une puissance de 2 exclusivement jusques et y compris la puissance de 2 immédiatement supérieure ; le n^{me} de ces groupes sera

$$\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \frac{1}{2^n+3} + \cdots + \frac{1}{2^n+2^n}.$$

Or, chacune des 2^n fractions qui composent ce groupe, est plus grande que la dernière, qui se réduit à $\frac{1}{2^{n+1}}$; donc le groupe lui-même est plus grand que $\frac{2^n}{2^{n+1}}$ ou que $\frac{1}{2}$. Mais il y a, dans la série harmonique, autant de groupes que de puissances de 2, c'est-à-dire une infinité ; cette série est donc plus grande qu'un nombre infini de fois $\frac{1}{2}$; elle est par conséquent infinie.

303. Il est bon de remarquer que plusieurs séries numériques, continuées à l'infini, ont une valeur finie, c'est-à-dire une *limite.*

Par exemple, si l'on prend la somme des n premiers termes, et que dans cette somme, on fasse n infini, on verra que

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \text{etc., à l'infini,} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6} + \text{etc., à l'infini,} = \frac{1}{4};$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2.4} + \frac{5}{2.4.6} + \frac{7}{2.4.6.8} + \text{etc., à l'infini,} = 1;$$

$$\frac{1}{1.3} - \frac{2}{3.5} + \frac{3}{5.7} - \frac{4}{7.9} + \text{etc., à l'infini,} = \frac{1}{4}.$$

304. *Trouver la vraie valeur d'une fraction qui se réduit à $\frac{0}{0}$ par l'hypothèse de* x = a.

Puisque $x = a$ réduit à zéro chacun des deux termes de la fraction proposée, ces deux termes ont nécessairement pour facteur commun, une certaine puissance de $x-a$; on mettra donc ce facteur commun en évidence, en transformant le binome $x-a$ en un monome u, c'est-à-dire, en supposant $x-a=u$, ou $x=a+u$. Alors, effectuant tous les développemens indiqués, au moyen des séries binomiales, exponentielles ou logarithmiques, etc.; ordonnant par rapport aux puissances ascendantes de u; supprimant le facteur en u commun au numérateur et au dénominateur, et faisant ensuite $u=0$, ce qui donne $x=a$, le résultat sera la valeur de la fraction proposée qui répond à $x=a$.

Par exemple, si l'on a $y=\frac{lx-la}{x-a}$, l'hypothèse $x=a$ donnera $y=\frac{0}{0}$. Mais en faisant $x=a+u$, et développant d'après la série (E), on aura

$$y=\frac{l(a+u)-la}{u}=\frac{1}{u}\,l\left(1+\frac{u}{a}\right),$$

$$\text{ou}\quad y=\frac{le}{a}-\frac{ule}{2a^2}+\text{etc.};\ \text{d'où}\ y=\frac{le}{la},$$

lorsque $u=0$, ou $x=a$.

Le procédé s'applique aux fractions rationnelles aussi bien qu'aux fractions irrationnelles. Nous laissons à chercher les vraies valeurs des quatre fractions

$$\frac{\sqrt[3]{(x^2-1)}-\sqrt{(x-1)}}{x-1+\sqrt[3]{(x^2+2x-3)}},\quad \frac{x^3-12x+16}{x^3-3x^2+4},\quad \frac{\sqrt{x-a^2}}{-a+\sqrt{x}}\ \text{et}\ \frac{a^x-b^x}{x}.$$

Ces fractions sont réduites à $\frac{0}{0}$ par les hypothèses $x=1$, $x=2$, $x=a^2$ et $x=0$. On aurait la valeur de la dernière fraction en y substituant les développemens des exponentielles qui y entrent.

305. *Un vase peut se remplir par un tuyau et se vider par un autre. Pendant combien de temps doit-on faire couler les deux tuyaux, le premier ne fournissant que de l'eau, pour que le vase, contenant d'abord* a *litrons de vin, n'en contienne plus que* b *litrons? On suppose que les tuyaux versent uniformément chacun* c *litrons de liquide par heure, et que l'eau*

qui entre dans le vase, se mêle sur-le-champ et exactement avec le liquide que ce vase contient.

Soit x le nombre d'heures cherché, et n le nombre infini d'instans contenus dans une heure; x heures en contiendront donc nx. Soient x_v et x_{v+1} les quantités de vin pur que le vase contient avant et après le v^{me} instant. Puisque par heure, ou n instans, chaque tuyau verse uniformément c litrons de liquide; à chaque instant il en verse $\frac{c}{n}$; et par conséquent, après chaque instant il y aura toujours a litrons de liquide dans le vase. Or, comme $\frac{c}{n}$ sont c fois le an ième de a, il s'ensuit qu'à chaque instant il sort c fois le an ième du mélange : et puisque l'eau est exactement mêlée avec le vin, on voit qu'à chaque instant il sort du vase c fois le an ième du vin et c fois le an ième de l'eau que ce vase contient. Donc pendant le v^{me} instant, il sort du vase c fois le an ième du vin x_v; par conséquent, après le v^{me} instant, la quantité de vin x_{v+1} qui reste dans le vase, est

$$x_{v+1} = \left(1 - \frac{c}{an}\right) x_v.$$

Posant $\frac{c}{a} = d$, et faisant $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, nx$, puis multipliant, observant que $x_1 = a$ et que $x_{nx+1} = b$, il viendra

$$b = a\left(1 - \frac{d}{n}\right)^{nx}; \text{ d'où } b = a.e^{-dx},$$

car n est infini (299). Cette équation facile à résoudre par logarithmes, fera connaître x. Si $a = b$, on aura $x = 0$, comme cela doit être. Si $b = 0$, x sera infini; et si $b = 10a$, x sera négatif, comme il est aisé de voir pourquoi.

306. *On a deux vases* V *et* V', *en forme de prismes ou de cylindres droits, dont les bases* b *et* b' *sont horizontales. Le vase* V *est rempli d'eau jusqu'à la hauteur* h *et le vase* V' *est vide. On ouvre les robinets adaptés aux bases* b *et* b', *et l'eau du vase* V *tombe dans le vase* V', *d'où elle est évacuée au-dehors. En supposant que l'eau sorte de chaque vase avec une vitesse variable, proportionnelle à chaque instant à la hauteur de l'eau dans ce vase, et que les vitesses soient* a *et* a', *quand les hauteurs sont égales à* 1, *dans les vases* V *et* V'; *on demande,* 1° *quelles seront les hauteurs* ω *et* φ *du liquide dans les deux vases après le temps* m; 2° *à quelle époque*

l'eau aura atteint sa plus grande hauteur dans le vase V', *et quelle sera alors cette plus grande hauteur ?*

Il faut d'abord remarquer que la *vitesse* d'écoulement à un instant quelconque, est la quantité d'eau qui sortirait du vase pendant l'unité de temps, si, à partir de cet instant, le mouvement du liquide devenait uniforme. Or, si l'on imagine l'unité de temps divisée en une infinité d'instans égaux et infiniment petits, il est clair que la vitesse d'écoulement pourra être considérée comme ne variant qu'au commencement de chaque instant; car cela reviendra à supposer que cette vitesse varie à des intervalles de temps infiniment petits, et par conséquent d'une manière continue, comme cela est effectivement.

Cela posé, 1° soit n le nombre infini d'instans contenus dans l'unité de temps; les m unités en contiendront donc mn. Soient x_v et y_v les hauteurs respectives de l'eau dans les vases V et V', avant le v ième instant, et x_{v+1}, y_{v+1} les hauteurs après. Par l'énoncé, les vitesses du liquide, au commencement du v ième instant, sont les quatrièmes termes des proportions

$$1 : x_v :: a : ax_v, \quad 1 : y_v :: a' : a'y_v.$$

Or, il suit de la définition du mot *vitesse*, que si l'écoulement devenait constant au commencement du v^{me} instant, il sortirait des vases V et V', et d'une manière uniforme, les volumes d'eau ax_v et $a'y_v$, pendant l'unité de temps ou n instans; donc à chaque instant, il en sortirait $\frac{a}{n}x_v$ et $\frac{a'}{n}y_v$. Et puisque la vitesse du liquide est constante pendant le v^{me} instant, il s'ensuit que pendant cet instant, il sort réellement des vases V et V' les volumes d'eau $\frac{a}{n}x_v$ et $\frac{a'}{n}y_v$. Donc, après le v^{me} instant, les vases V et V' renferment respectivement les volumes d'eau que voici :

$$bx_v - \frac{a}{n}x_v \quad \text{et} \quad b'y_v - \frac{a'}{n}y_v + \frac{a}{n}x_v.$$

Et comme ces volumes sont les produits respectifs des bases b et b' par les hauteurs x_{v+1} et y_{v+1}; si on divise ces mêmes volumes par les bases b et b', on aura les hauteurs x_{v+1} et y_{v+1}. Posant donc, pour abréger,

$$\frac{a}{b} = c, \ \frac{a'}{b'} = d, \ 1 - \frac{c}{n} = k, \ 1 - \frac{d}{n} = p \ \text{ et } \ \frac{a}{b'} = r,$$

on verra qu'après le v^{me} instant, les hauteurs de l'eau dans les deux vases V et V', sont respectivement :

$$x_{v+1} = kx_v \quad \text{et} \quad y_{v+1} = py_v + \frac{r}{n} x_v \dots (1)$$

Prenant successivement $v = 1, 2, 3, 4, \dots, mn$, dans la première de ces équations, multipliant et observant que $x_1 = h$ et $x_{mn+1} = \omega$, on aura

$$\omega = hk^{mn}; \text{ d'où } x_v = hk^{v-1}.$$

Par cette valeur la seconde équation (1) devient

$$y_{v+1} = py_v + \frac{hr}{n} k^{v-1},$$

et prend la forme

$$\left(\frac{1}{p}\right)^v y_{v+1} - \left(\frac{1}{p}\right)^{v-1} y_v = \frac{hr}{np}\left(\frac{k}{p}\right)^{v-1}.$$

Faisant successivement $v = 1, 2, 3, 4, \dots, mn$ et ajoutant; observant d'ailleurs que $y_1 = 0$, $y_{mn+1} = \varphi$ et $k - p = \frac{d-c}{n}$, on trouvera

$$\varphi = \frac{hr}{d-c}\left[k^{mn} - p^{mn}\right].$$

Or, n est infini; donc on a (299)

$$k^{mn} = \left(1 - \frac{c}{n}\right)^{mn} = e^{-cm} \quad \text{et} \quad p^{mn} = \left(1 - \frac{d}{n}\right)^{mn} = e^{-dm}.$$

Avec ces valeurs, on trouve définitivement

$$\omega = he^{-cm} \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{hr}{d-c}\left[e^{-cm} - e^{-dm}\right].$$

2° Il est évident que la plus grande hauteur de l'eau dans le vase V', aura lieu lorsque ce vase perdra précisément autant d'eau, dans un instant, que le vase V lui en fournira; car l'instant suivant, V' perdra plus d'eau et en recevra moins. Or, soit nx le rang de cet instant, et par conséquent x le nombre d'unités de temps; il est clair qu'on aura $ax_{nx} = a'y_{nx}$, ou bien

$$ahe^{-cx+c} = \frac{a'hr}{d-c}\left[e^{-cx+c} - e^{-dx+d}\right].$$

Cette équation donne, pour déterminer le temps x de la plus grande hauteur y_{nx} dans le vase V',

$$e^{-(d-c)(x-1)} = 1 - \frac{b'(d-c)}{a'}; \text{ d'où } y_{nx} = \frac{a'h}{a} e^{-cx+c}.$$

Quoique toutes les valeurs relatives au second vase V' prennent la forme $\frac{0}{0}$, lorsque $d = c$, c'est-à-dire lorsque $a' : b' :: a : b$, il n'y a cependant point d'indétermination dans ce cas. En effet, si l'on pose $d = c + u$, qu'on substitue les développemens des exponentielles e^{-rnu} et $e^{-(x-1)u}$, qu'on réduise et divise par u, et qu'enfin on pose $u = 0$ ou $d = c$, comme au n° 304, on verra qu'alors

$$\varphi = hmre^{-cm} \quad \text{et} \quad x = 1 + \frac{v}{a'},$$

valeurs qu'on obtiendrait d'ailleurs en refaisant les calculs de 1° et 2°, dans l'hypothèse de $d = c$, qui donne $p = k$.

Dans le problème que nous venons de résoudre, on pourrait supposer que l'eau sort du vase V avec la vitesse constante a; c'est-à-dire, que l'eau y est entretenue à la même hauteur. On pourrait encore supposer que le 2° vase V' ne contenant d'abord que du vin pur, à la hauteur h', l'eau qu'il reçoit du 1er V se mêle sur-le-champ et exactement avec le liquide que le 2° vase renferme, et demander combien il restera de vin pur, dans ce 2° vase, 1° après le temps m; 2° à l'époque de la plus grande hauteur du liquide dans le même vase.

307. *Combien un vase qui a coulé pendant* a *heures, a-t-il versé d'eau? On suppose que ce vase ait perdu pendant un instant quelconque, une quantité d'eau égale à la valeur de cet instant multipliée par le rapport de* c *heures à* c *heures augmentées d'un nombre d'instans marqué par le rang de celui que l'on considère.*

Soit n le nombre infini d'instans égaux à x qui composent le temps a; on aura donc $nx = a$. D'après l'énoncé, il est clair que l'eau sortie du vase, pendant le v^{me} instant, a pour valeur $\frac{cx}{c+vx}$, ou $cx(c+vx)^{-1}$, ou enfin

$$x - \frac{x^2}{c}v + \frac{x^3}{c^2}v^2 - \frac{x^4}{c^3}v^3 + \frac{x^5}{c^4}v^4 - \text{etc.}$$

Prenant successivement $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$, on aura successivement les quantités d'eau sorties du vase pendant les instans 1er, 2e, 3e, 4e, ..., ne; la somme z de ces quantités sera donc toute l'eau versée par le vase en a heures; on aura par conséquent

$$z = nx - \frac{x^2}{c}S_1 + \frac{x^3}{c^2}S_2 - \frac{x^4}{c^3}S_3 + \frac{x^5}{c^4}S_4 - \text{etc.}$$

Substituant les valeurs de S_1, S_2, S_3, S_4, ..., tirées de la formule du n° 140, puis divisant les deux membres par c, observant que $nx = a$ et posant $\frac{a}{c} = b$, on trouvera

$$\frac{z}{c} = \left\{ \begin{array}{l} b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \frac{b^5}{5} - \text{etc.} \\ - x\left[< b - < b^2 + < b^3 - < b^4 + \text{etc.}\right]. \end{array} \right.$$

On sait (300) que la première ligne du second membre se réduit à $\frac{l(1+b)}{lc}$: quant à la seconde ligne, il est clair que le multiplicateur de x est plus petit que la série $b + b^2 + b^3 + b^4 + \text{etc.}$, série qui est le développement de $b(1-b)^{-1}$ ou de $\frac{b}{1-b}$. Ainsi on a

$$z = \frac{c}{lc}\, l(1+b) - < cx\, \frac{b}{1-b}.$$

Mais $x = \frac{a}{n}$: et puisque n est infini, x est une quantité infiniment petite, qu'on peut regarder comme nulle ; il vient donc enfin

$$z = \frac{c}{lc}\, l\left(\frac{a+c}{c}\right).$$

308. *Extraire les racines des nombres au moyen des séries binomiales.*

D'abord, comme

$$\sqrt[r]{a^r + b} = a\left(1 + \frac{b}{a^r}\right)^{\frac{1}{r}},$$

si l'on pose $x = \frac{b}{a^r}$ et qu'on développe d'après la formule du binome, on aura

$$\sqrt[r]{a^r + b} = a\left[1 + \frac{x}{r} - \text{A}\,\frac{r-1}{2r}x + \text{B}\,\frac{2r-1}{3r}x - \text{C}\,\frac{3r-1}{4r}x + \text{etc.}\right],$$

A, B, C, D, ..., désignant respectivement les 2$^{\text{e}}$, 3$^{\text{e}}$, 4$^{\text{e}}$, 5$^{\text{e}}$, ..., termes entre crochets carrés.

Si donc on veut extraire la racine r^{me} d'un nombre donné, à l'aide de cette formule, il faudra partager ce nombre en deux autres, l'un a^r qui soit la plus grande puissance r^{me} possible, et l'autre b qui soit moindre que le premier et le moindre possible à l'égard de ce premier ; ce qui pourra donner b négatif. De cette manière, x sera plus petit que l'unité et le moindre possible à l'égard de l'unité ; tous les termes de la série iront donc en diminuant, et il n'en faudra pas un grand nombre pour donner le degré d'approximation demandé.

Par exemple, soit proposé de trouver la racine 5$^{\text{me}}$ de 260, à moins d'un cent-millième près. Dans ce cas, comme 243 est la plus grande puissance 5^{me} contenue dans 260, on aura

$$260 = 3^5 + 17,\ r = 5 \text{ et } x = \tfrac{17}{243};$$

la série deviendra donc

$$\sqrt[5]{260} = 3\left[1 + \frac{17}{1215} - A\,\frac{2.17}{1215} + B\,\frac{3.17}{1215} - C\,\frac{7.17}{2430} + \text{etc.}\right].$$

Réduisant les termes en décimales jusqu'aux millioniêmes, inclusivement, on verra que $\sqrt[5]{260} = 3{,}040848$. Le 5^{me} terme entre crochets carrés ne donne pas de millioniêmes; et puisque les termes sont alternativement positifs et négatifs, et vont en diminuant, l'erreur commise en prenant les quatre premiers est moindre que le 5^{me} (Algèbre) : donc, comme ce 5^{me} terme est négatif, la valeur précédente est un peu trop grande; mais on voit d'ailleurs qu'on a $\sqrt[5]{260} = 3{,}04084$, à moins d'un cent-millième près.

Pour second exemple, soit proposé de trouver la racine cubique de 56, à moins d'un dimillième près. Le plus grand cube contenu en 56 étant 27, si l'on prenait $56 = 27 + 29$, x vaudrait $\frac{29}{27}$ et les termes de la série iraient en augmentant. Mais on peut aussi prendre $56 = 64 - 8$; et alors x vaudra $-\frac{1}{8}$. La série deviendra donc

$$\sqrt[3]{56} = 4\left[1 - \frac{1}{24} - \frac{A}{24} - \frac{5B}{72} - \frac{5C}{72} - \frac{11D}{120} - \text{etc.}\right].$$

Or, x étant négatif, dans la série générale, tous les termes qui suivent le v^{me}, sont négatifs; et comme leurs coefficiens en r vont en diminuant; si l'on représente par S la somme de tous ces termes et par k le coefficient du v^{me}, lequel sera akx^{v-1}, on aura

$$S < akx^{v}(1 + x + x^2 + x^3 + \text{etc.}),$$

$$\text{ou}\quad S < akx^{v-1} \times \frac{x}{1-x}.$$

Ainsi l'erreur commise en ne prenant que les 4 premiers termes de la série qui donne $\sqrt[3]{56}$, est moindre que le septième du quatrième terme, qui se réduit à 0,000482; cette erreur est donc moindre que 0,000069. On a par conséquent $\sqrt[3]{56} = 3{,}8256$, à moins d'un dimillième près.

Soit $\sqrt[r]{a^r+b}=a+y$; d'où $b=y\left(ra^{r-1}+\frac{r(r-1)}{2}y+\text{etc.}\right)$

Si y doit être une petite fraction, on pourra négliger tous les termes qui suivent le premier entre parenthèses, et on aura, pour 1re approximation, $y=\frac{b}{ra^{r-1}}$. Substituant cette valeur dans le second terme entre parenthèses, et négligeant tous les suivans, on aura une seconde valeur de y, beaucoup plus approchée que la première, et qui donnera la formule

$$\sqrt[r]{a^r+b}=a+\frac{2ab}{2ra^r+(r-1)b}.$$

D'après cette formule, si $a=3$, $b=17$ et $r=5$, on trouvera $\sqrt[5]{260}=3{,}04083$, comme plus haut, à l'exception du dernier chiffre.

Voici encore quelques problèmes :

Combien un vase qui a coulé pendant a heures, a-t-il versé d'eau? On suppose que ce vase ait perdu, pendant un instant quelconque, une quantité d'eau égale à la valeur de cet instant multiplié par le carré du rapport de c heures à c heures augmentées d'un nombre d'instans marqué par le rang de celui que l'on considère. $\left(\text{Réponse : } \frac{ac}{a+c}\right)$.

Quelle somme x devrait-on rendre au bout de n années, pour une somme a prêtée pendant ce temps, au taux de r pour 1 par an, si à chaque instant de la durée de l'année, l'intérêt échu se joignait au capital pour porter intérêt l'instant suivant? (R. $x=ae^{nr}$. Si $a=10000$, $n=1$, $r=0{,}05$, on aura $x=10512{,}71$.)

On retranche constamment d'un nombre donné a, la $a$ième partie de 2 fois un nombre inconnu; la $2a$ième partie de 3 fois le 1er reste; la $3a$ième partie de 4 fois le 2^{e}; la $4a$ième partie de 5 fois le 3^{e}, et ainsi de suite. Quelle devrait être la valeur x de ce nombre inconnu, pour que les restes diminuant sans cesse, ne pussent cependant devenir nuls qu'à l'infini? $\left(\text{R. } x=a-\frac{l(1+a)}{le}\right)$.

On retranche constamment l'unité d'un certain nombre inconnu, et des quotiens que l'on trouve en divisant par a, le double du 1er reste, 3 fois le 2^{e}, 4 fois le 3^{e}, 5 fois le 4^{e}, et ainsi de suite. Quelle devrait être la valeur x de ce nombre inconnu, pour que les restes diminuant sans cesse, ne pussent cependant devenir nuls qu'à l'infini? (Réponse : $x=e^{a}-1$.)

Une personne va et vient dans une allée d'un jardin et s'astreint à ne faire chaque fois qu'une certaine fraction du chemin qu'elle vient de parcourir en sens contraire. Elle continue ainsi jusqu'à ce qu'il ne lui reste plus de chemin à faire. On demande quel sera alors le chemin total x qu'elle aura parcouru et à quelle distance y elle sera du premier point de départ? On suppose que la personne ait fait a mètres la première fois, et que la fraction de chemin soit successivement un quart, 2 sixièmes, 3 huitièmes, 4 dixièmes, 5 douzièmes, etc. [Réponse : $x = \frac{2al2}{le}$ et $y = \frac{2a}{le}(l3 - l2)$].

Dans ce problème, la fraction de chemin pourrait être constamment $\frac{1}{2}$; et alors on aurait $x = 2a$ et $y = \frac{2}{3}a$: la fraction de chemin pourrait être successivement une demie, un tiers, un quart, un cinquième, un sixième, etc.; dans ce cas il viendrait $x = ae - a$ et $y = \frac{a}{e}$.

Du maximum et du minimum.

309. Si φ est une fonction connue de x et qu'on donne à x une suite de valeurs très-peu différentes les unes des autres, il en résultera nécessairement pour φ autant de valeurs généralement inégales. Et si ces valeurs de φ, d'abord croissantes, deviennent ensuite décroissantes, puis croissent et décroissent de nouveau, ainsi de suite, la valeur qui surpassera les deux qui la précèdent et la suivent immédiatement sera un *maximum* de φ; au contraire, la valeur surpassée par les deux qui la précèdent et la suivent immédiatement, en sera un *minimum*.

310. La méthode du maximum et du minimum repose sur le principe suivant :

Si dans la série $Au + Bu^2 + Cu^3 + Du^4 +$ etc., A, B, C, ..., *sont des quantités indépendantes de* u, *je dis qu'on pourra toujours prendre* u *assez petit pour que le premier terme* Au *surpasse la somme* S *de tous ceux qui le suivent.*

En effet, soit N le plus grand des coefficiens A, B, C, D, ..., on aura nécessairement

$$S < Nu^2(1 + u + u^2 + u^3 + \text{etc.});$$

d'où, en prenant $u < 1$, il vient

$$S < \frac{Nu^2}{1-u}.$$

Mais N étant un nombre fini indépendant de u, il est clair qu'on peut toujours donner à u une petitesse telle qu'on ait

$$A > \frac{Nu}{1-u}; \text{ d'où } Au > \frac{Nu^2}{1-u} \text{ et } Au > S.$$

311. Maintenant, supposons que, dans l'équation à une inconnue $\varphi = f(x)$, l'inconnue x ait la valeur qui donne le minimum de φ. Si l'on y change x en $x + u$ et qu'on développe suivant les puissances ascendantes de u, le premier terme du développement sera φ, car c'est à quoi ce développement se réduit quand on y fait $u = 0$; on aura donc

$$\varphi' = \varphi + Au + Bu^2 + Cu^3 + Du^4 + \text{etc.},$$

A, B, C, D, etc., étant des quantités en x, mais indépendantes de u. Changeant u en $-u$, on aura le résultat de la substitution de $x - u$ au lieu de x dans l'équation $\varphi = f(x)$: il viendra donc

$$\varphi'' = \varphi - Au + Bu^2 - Cu^3 + Du^4 - \text{etc.}$$

Cela posé, si A n'était pas zéro, on pourrait toujours prendre u assez petit pour que le terme Au surpassât la somme de tous ceux qui le suivent dans les valeurs de φ' et φ''; donc, puisque ce terme entre avec des signes contraires dans ces valeurs, soit que A soit positif ou négatif, l'une serait plus grande et l'autre plus petite que φ, quelque petite que fût d'ailleurs la quantité u; donc φ ne serait pas à son minimum; ce qui est contre l'hypothèse. Donc on a nécessairement $A = 0$. De plus, le coefficient B doit être positif; car si ce coefficient était négatif et égal à $-B'$; à cause de $A = 0$, et parce que $-B'u^2$ peut toujours surpasser la somme de tous les termes suivans dans φ' et φ'', on verra que φ' et φ'' seraient moindres que φ; ce qui est absurde, puisque φ est à son minimum. Donc B est nécessairement positif. Donc lorsque φ est un minimum, on a $A = 0$ et B positif.

On démontrerait de même que, quand φ est un maximum, il vient $A = 0$ et B négatif.

On voit par là que, *pour avoir les valeurs de l'inconnue* x *qui portent la variable* $\varphi = f(x)$ *à son maximum ou à son minimum, il faut remplacer* x *par* $x + u$ *dans l'équation* $\varphi = f(x)$; *puis développer et réduire de manière à trouver un résultat de la forme* $\varphi' = \varphi + Au + Bu^2 + \text{etc.}$; *poser ensuite* $A = 0$ *et résoudre cette équation par rapport à* x *: les valeurs résultantes devront donner* B *négatif pour le maximum de* φ *et* B *positif pour le minimum.*

Si ces valeurs rendaient B nul, il est clair, par ce qui précède, qu'elles devraient d'abord donner aussi $C = 0$, puis D négatif pour le maximum de φ et D positif pour le minimum.

312. On peut aisément appliquer la règle précédente à la détermination du maximum de φ dans l'équation $\varphi = x^2(3a - x)$. Mais si l'on a

$$\varphi = (x + 1)\sqrt{(11 - x)},$$

on y changera x en $x + u$; et pour développer le nouveau second membre de manière à trouver un résultat de la forme $\varphi' = \varphi + Au + Bu^2 + \text{etc.}$, on prendra la formule

$$\sqrt{k + hu} = \sqrt{k} + \frac{hu}{2\sqrt{k}} - \frac{h^2u^2}{8k\sqrt{k}} + \text{etc.}$$

On y fera $k = 11 - x$ et $h = -1$; multipliant ensuite par $x + 1 + u$ et ordonnant par rapport à u, on trouvera

$$A = \frac{21 - 3x}{2\sqrt{(11 - x)}} \text{ et } B = -\frac{45 - 3x}{8\sqrt{(11 - x)^3}}.$$

L'équation $A = 0$ donnant $x = 7$ et cette valeur rendant B négatif, il s'ensuit que le maximum de φ répond à $x = 7$, et que ce maximum est $\varphi = 16$; ce qu'on peut d'ailleurs vérifier en posant $x = 7 + z$.

313. La chose essentielle à la règle précédente est, qu'en substituant $x + u$ au lieu de x, on sache développer le résultat sous la forme $\varphi' = \varphi + Au + Bu^2 + \text{etc.}$; ce qui est quelquefois difficile. Mais souvent on y parviendra au moyen de la multiplication, de la division et de l'extraction de la racine carrée des quantités algébriques : on y parviendra encore en se servant des séries binomiales, exponentielles et logarithmiques. Si cependant tous ces moyens ne suffisaient pas, la question sortirait tout-à-fait des élémens, et ne pourrait se résoudre que par le calcul *différentiel*.

314. Pour donner une nouvelle application de la règle du n° 311, cherchons le minimum de φ, dans les équations

$$x^2y = a \quad \text{et} \quad \varphi = 2xy + x^2\ (*).$$

Eliminant d'abord y, il viendra

$$\varphi = \frac{2a}{x} + x^2.$$

Si l'on change x en $x + u$ et qu'on développe de manière à avoir un résultat de la forme $\varphi' = \varphi + Au + Bu^2 + \text{etc.}$; ce qui

(*) Ces équations appartiennent au problème : Parmi tous les vases cylindriques de même capacité πa, quel est celui dont la surface interne est un minimum?

se réduit à former le carré de $x+u$ et à diviser $2a$ par $x+u$, jusqu'à ce qu'on ait le terme du quotient affecté de u^2, on trouvera

$$\varphi' = \varphi + 2\left(\frac{x^3-a}{x^2}\right)u + \left(\frac{x^3+2a}{x^3}\right)u^2 + \text{etc.}$$

Le coefficient de u devant être nul, cela donne $x^3-a=0$; d'où $x=\sqrt[3]{a}$. Comme cette valeur rend positif le coefficient de u^2, elle répond au minimum de φ, et donne, par la première équation proposée, $y=\sqrt[3]{a}$. De sorte que, pour le minimum de φ, on a $x=y=\sqrt[3]{a}$; et ce minimum est $3\sqrt[3]{a^2}$.

315. Soit encore à trouver le minimum de φ dans l'équation

$$\varphi = n\sqrt{a^2+x^2} + p\sqrt{b^2+(c-x)^2}\ (^*).$$

Changeant x en $x+u$, et exécutant les calculs, comme au n° 312, on trouvera, sans beaucoup de difficultés, que

$$\varphi' = \varphi + \left[\frac{nx}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{p(c-x)}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}\right]u +$$
$$\frac{1}{2}\left[\frac{a^2n}{(\sqrt{a^2+x^2})^3} + \frac{b^2p}{(\sqrt{b^2+(c-x)^2})^3}\right]u^2 + \text{etc.}$$

Pour que φ soit à son minimum, il faut que le coefficient de u soit nul et celui de u^2 positif (311). La seconde condition est visiblement remplie, et la première donne, pour déterminer la valeur de x qui répond au minimum de φ,

$$\frac{n^2x^2}{a^2+x^2} = \frac{p^2(c-x)^2}{b^2+(c-x)^2}.$$

Si $n=p=1$, cette équation donnera $a:b::x:c-x$ (**).

(*) Cette équation appartient au problème : Deux plaines sont séparées par une droite; l'une est un sable mouvant, où un cheval vigoureux ne peut faire qu'une lieue par heure, et l'autre est une belle pelouse, où le même cheval peut faire, sans se fatiguer davantage, 2 lieues par heure. Quel chemin le cheval doit-il suivre, pour aller, dans le moindre temps possible, d'un point situé dans la première plaine à un point de la seconde? On sait que les perpendiculaires menées de ces points sur la droite de séparation sont a et b lieues, et comprennent, sur cette droite, une distance de c lieues.

(**) Cette proportion résout le problème que voici : En quel point d'un canal rectiligne faut-il établir un pont, pour que les deux branches de route qui vont de ce pont à deux villes situées d'un même côté du canal, donnent la moindre somme possible?

316. Considérons à présent l'équation $\varphi = f(x, y)$, dans laquelle on suppose que x et y aient les valeurs qui donnent le maximum ou le minimum de φ. Si l'on change x en $x + u$ et y en $y + v$, il faudra développer de manière à avoir un résultat de la forme

$$\varphi' = \varphi + Au + Bv + Cu^2 + Dv^2 + Euv + \text{etc.},$$

A, B, C, D, ..., étant indépendans de u et de v.

Changeant u en $-u$ et v en $-v$, dans φ', on aura la valeur φ'' que fournit $f(x, y)$, quand on y remplace x et y par $x - u$ et $y - v$; il viendra donc

$$\varphi'' = \varphi - Au - Bv + Cu^2 + Dv^2 + Euv - \text{etc.}$$

Soit $v = \omega u$, les valeurs φ' et φ'' seront alors

$$\varphi' = \varphi + (A + B\omega)u + (C + D\omega^2 + E\omega)u^2 + \text{etc.},$$
$$\varphi'' = \varphi - (A + B\omega)u + (C + D\omega^2 + E\omega)u^2 - \text{etc.}$$

Raisonnant comme au n° 311, on verra d'abord que, pour le maximum ou le minimum de φ, on doit avoir $A + B\omega = 0$, quel que soit ω; ce qui exige que $A = 0$ et $B = 0$. On verra ensuite que le coefficient $C + D\omega^2 + E\omega$ doit être positif pour le minimum de φ et négatif pour le maximum. Mais ce coefficient revient à

$$\frac{1}{4D}\left[(2D\omega + E)^2 + 4CD - E^2\right];$$

pour qu'il reste toujours positif ou négatif, c'est-à-dire, pour qu'il ne puisse jamais changer de signe, il faut que $4CD - E^2$ soit positif. En effet, si $4CD - E^2$ était négatif, en prenant $2D\omega = -E$, le multiplicateur de $\frac{1}{4D}$ deviendrait négatif: faisant ensuite croître ω positivement ou négativement, on finirait par rendre $(2D\omega + E)^2 > 4CD - E^2$, et par conséquent le multiplicateur de $\frac{1}{4D}$ serait positif et changerait de signe; donc aussi le coefficient de u^2 changerait de signe, et φ ne serait ni à son maximum, ni à son minimum; ce qui est contre l'hypothèse. Donc on aura $4CD - E^2 > 0$, et par conséquent C et D de même signe. Le multiplicateur de $\frac{1}{4D}$ sera donc toujours positif; par conséquent, suivant que D sera positif ou négatif, le coefficient de u^2 sera positif ou négatif, et la valeur de φ sera un minimum ou un maximum.

Le résumé de ce qu'on vient de dire, montre que *pour trouver les valeurs de* x *et de* y *qui portent la fonction* $\varphi = f(x, y)$ *à son maximum ou à son minimum, il faut changer* x *en* $x + u$ *et* y *en* $y + v$; *développer et réduire de manière à trouver un résultat de la forme*

$$\varphi' = \varphi + Au + Bv + Cu^2 + Dv^2 + Euv + \text{etc.};$$

puis résoudre les équations $A = 0$ *et* $B = 0$; *et les valeurs qui en résulteront pour* x *et pour* y, *devront rendre positive la quantité* $4CD - E^2$, *et donner en outre* D *positif pour le minimum de* φ *et* D *négatif pour le maximum.*

317. D'après cette règle, pour avoir le maximum de φ dans l'équation

$$\varphi = x^2y^2(5a - x - y),$$

on y changera x et y en $x + u$ et $y + v$; et, après tous les développemens nécessaires, on trouvera

$$\begin{aligned}
A &= xy^2(10a - 2y - 3x),\\
B &= x^2y(10a - 2x - 3y),\\
C &= y^2(5a - 3x - y),\\
D &= x^2(5a - 3y - x),\\
E &= 2xy(10a - 3x - 3y).
\end{aligned}$$

Les équations $A = 0$ et $B = 0$ donnent $x = y = 2a$.

De là, $C = -12a^3$, $D = -12a^3$ et $E = -16a^3$.

Ainsi la condition $4CD - E^2 > 0$ est satisfaite : et comme D est négatif, il s'ensuit que les valeurs $x = y = 2a$ répondent au maximum de φ, et que ce maximum est $\varphi = 16a^5$, comme on peut le vérifier d'ailleurs en posant

$$x = 2a + z \quad \text{et} \quad y = 2a - z.$$

Des calculs semblables aux précédens conduisent au maximum de φ dans l'équation $\varphi = x^m y^n (a - x - y)^p$, m, n et p étant des nombres quelconques positifs ou négatifs.

318. Soit à trouver le minimum de φ dans les deux équations à trois inconnues

$$6a = 6x^2y + 3x^2z + z^3 \quad \text{et} \quad \varphi = 2xy + 2x^2 + z^2.$$

Si d'abord on élimine y de ces équations, le résultat pourra se mettre sous la forme

$$\varphi = \frac{6a + 5x^3 + (x - z)^3}{3x}.$$

D'après la règle du n° 316, si l'on substitue $x+u$ à x et $z+v$ à z, il faudra, pour avoir $\varphi' = \varphi + Au + Bv + Cu^2 + Dv^2 + Euv +$ etc., développer le numérateur, après y avoir posé $x - z = m$, et y prendre ensuite $6a + 5x^3 + m^3 = n$; puis multiplier le numérateur ainsi préparé, par le développement de $\frac{1}{3}(x+u)^{-1}$, poussé jusqu'au terme en u^2. De cette manière on trouvera

$$A = \frac{m^2}{x} + 5x - \frac{n}{3x^2},\ B = -\frac{m^2}{x},\ C = \frac{n}{3x^3} + \frac{m}{x} - \frac{m^2}{x^2},$$

$$D = \frac{m}{x},\ E = \frac{m^2}{x^2} - \frac{2m}{x}, \text{ etc.}$$

Pour le minimum de φ, il faut que A et B soient nuls et que le trinome $C + Dw^2 + Ew$ soit positif (316). La première condition donne $m = 0$ et $5x - \frac{n}{3x^2} = 0$; d'où $x = z = \sqrt[3]{\frac{1}{5}a}$. Ces valeurs réduisent $C + Dw^2 + Ew$ à $\frac{n}{3x^3}$ ou à 5, quantité positive : donc le minimum de φ a lieu, et il donne $x = y = z = \sqrt[3]{\frac{1}{5}a}$ (*).

319. Si l'on avait les deux équations

$$xyz = 1728 = a$$

$$\text{et } 8(x+y)z + 12xy + 48z = \varphi,$$

on en déduirait sans doute le minimum de φ par la méthode précédente; mais il sera beaucoup plus facile d'employer celle du n° 89, laquelle donnera, pour le minimum de φ, les deux équations

$$12x^2y^2 = 48a + 8ay$$

$$\text{et } 12x^2y^2 = 48a + 8ax;$$

d'où l'on tire d'abord $x = y$, et ensuite, à cause de $a = 1728$,

$$x^4 - 1152x - 6912 = 0.$$

(*) Ces valeurs résolvent le problème que voici : On veut construire un vase cylindrique, dont l'intérieur du couvercle soit un segment sphérique à une base; on veut que la capacité, tant du cylindre que du segment, soit de $a\pi$ centimètres cubes. Et comme la surface interne $\pi\varphi$ du vase et du couvercle, doit être dorée, on désire, pour diminuer les frais autant que possible, que cette surface soit un minimum. Quels doivent être, pour cela, le rayon x de la base du cylindre, sa hauteur y et celle z du segment ?

La seule racine réelle positive de cette équation étant $x = 12$, on en conclut $x = y = z = 12$ et $\varphi = 4608$ (*).

320. Enfin, si l'on a les deux équations

$$\varphi = xyz \quad \text{et} \quad (x+1)(y+1)(z+2) - xyz = 1000a,$$

on trouvera, pour le maximum de φ,

$$x = y = -\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{3}(500a - 1)}, \quad z = 2x$$
$$\text{et} \quad \varphi = 2x^3 \text{ (**)}.$$

321. De toutes les fractions, quelle est celle qui surpasse sa puissance $m$ième du plus grand nombre possible?

Quelle doit être la valeur du nombre x, pour que la racine $x$ième de ax soit un maximum, ou pour que la puissance $x$ième de x soit un minimum?

(*) Ces valeurs résolvent le problème suivant : On veut construire une citerne à faces rectangulaires et de la contenance de 17280 hectolitres. Le revêtement de la surface convexe et de celle du fond sera payé 4 flor. l'aune carrée; la voûte à anse de panier placée au-dessus, coûtera 8^f par aune carrée de projection horizontale, et le prix pour creuser la citerne sera de 48^f par aune de profondeur. On demande quelles doivent être les dimensions x, y, z de cette citerne, pour que sa construction coûte le moins possible?

(**) Voici le problème résolu par ces valeurs : On a une masse d'argent fin du poids de a grammes, dont on veut construire un vase cylindrique, à base elliptique. Comme les parois devront avoir partout un millimètre d'épaisseur, aussi bien que le couvercle, on demande la hauteur z du vase et les demi-axes x et y de son couvercle et de sa base, pour que la capacité $\pi\varphi$ du même vase soit un maximum?

FIN.

TABLE SOMMAIRE.

FIN DE LA TABLE.