NOTIONS

DE

MÉCANIQUE.

PAR

J. N. Noël,

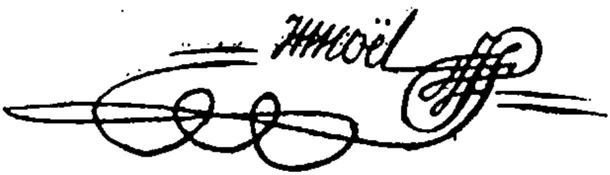
PROFESSEUR DES SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES,
PRINCIPAL DE L'ATHÉNÉE DE LUXEMBOURG,
CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE ROYALE DE METZ.

LUXEMBOURG.

IMPRIMERIE DE J. LAMORT, PLACE D'ARMES.

—

1833.



PRÉFACE.

La physique générale est cette partie de la philosophie naturelle qui nous met en relation avec les corps de l'univers, dont les applications aux besoins de la société se reproduisent sans cesse, et qui doit conséquemment faire partie de l'enseignement moyen. Mais pour que l'étude de la physique soit complétement profitable, il faut qu'elle soit précédée ou accompagnée de notions qui permettent de pénétrer plus avant dans cette partie importante des connaissances humaines, et de comprendre les belles et utiles théories qui, depuis Newton, ont enrichi son domaine.

Le calcul et la géométrie fournissent les moyens les plus commodes pour représenter les lois de la nature, généraliser les conséquences d'un principe et suppléer à la faiblesse de l'esprit dans la recherche des causes éloignées. Souvent (dit M. Péclet) les faits que l'on veut observer ne peuvent être isolés les uns des autres, ou sont dûs à plusieurs causes qui, agissant à la fois, modifient réciproquement les effets qui seraient produits par chacune d'elles. Alors partant des résultats immédiats de l'observation, il faut faire abstraction de ce qui est dû à la cause qu'on n'a pu écarter; et c'est dans ce cas que les considérations mathématiques sont nécessaires. Elles le sont encore d'une manière plus absolue dans la détermination des lois; puisque celles-ci, parfois très-compliquées, ne peuvent s'énoncer que difficilement par le langage ordinaire, et que leur vérification exige l'emploi des moyens géométriques et analytiques. Mais c'est principalement lorsqu'on veut déduire les phénomènes de leurs causes, que l'analyse algébrique est obligée de venir au secours du raisonnement. Il arrive alors, en effet, que partant d'un principe quelconque, on doit parvenir à une certaine conséquence, par une suite d'inductions ou de propositions évidentes ou démontrées : lorsque ces vérités intermédiaires ne sont pas trop nombreuses, on peut facilement suivre cette marche; mais il y a toujours, pour chaque individu, une certaine limite qu'il ne saurait dépasser : au-delà, l'esprit, fatigué, perd de vue le point de départ et ne peut continuer sa route. C'est alors que l'analyse mathématique devient indispensable pour franchir aisément cette limite; car avec un petit nombre de propositions fixes et invariables, cette science donne le moyen de trouver les conséquences les plus éloignées d'un principe quelconque, sans que l'on soit obligé d'employer tous les raisonnemens intermédiaires.

Ainsi la géométrie et l'algèbre élémentaires sont absolument nécessaires à l'étude de la physique. Mais il faut de plus, posséder les principes fondamentaux de la mécanique, sur lesquels sont basées les explications d'un grand nombre de phénomènes. A la vérité, la plupart des traités de physique renferment les énoncés des principaux théorèmes de la mécanique, qui d'ailleurs en est une partie essentielle; mais ces théorèmes n'y sont pas démontrés, et on n'en donne que quelques applications, qui sont loin de présenter toutes les conséquences utiles qu'on pourrait en déduire.

C'est pour suppléer à ces omissions, qu'à l'exemple de plusieurs Professeurs, j'ai toujours fait précéder l'étude de la physique par celle de la statique, et que j'ai développé, par des notes ou dictées, les principes de dynamique sur lesquels les leçons de physique étaient appuyées; ne pouvant à cet égard faire usage des excellens traités de mécanique que nous possédons, parce qu'ils supposent la connaissance du calcul différentiel et intégral, que mes auditeurs n'avaient pu acquérir encore. Néanmoins, l'inconvénient bien reconnu de dictées un peu nombreuses, et la difficulté de trouver un traité de mécanique qui, se liant à l'enseignement de la physique, offrît les principes des applications de cette science à l'industrie, sans exiger d'autres connaissances mathématiques que celles qu'on acquiert dans les classes élémentaires, m'ont déterminé à publier le présent ouvrage. Je le donne, non comme pouvant atteindre complétement le but, mais comme un essai qui, par les améliorations dont il est susceptible, pourra peut-être engager quelques-uns des hommes illustres et vraiment utiles, dont les travaux reculent chaque jour la limite des sciences physiques, à compléter ce que les traités élémentaires de ces sciences laissent encore à désirer, sous plusieurs rapports.

Un ouvrage de la nature de celui-ci, pourrait, s'il était bien exécuté, devenir très-utile, non-seulement pour rendre accessibles à un grand nombre de personnes, les belles et importantes vérités qui font l'objet de la physique générale, mais aussi pour familiariser les élèves des écoles moyennes avec les principes sur lesquels sont fondés les procédés de l'industrie; et tel est le double but que j'ai cherché à atteindre dans ce traité. Quant à ceux qui veulent approfondir la science industrielle, ils trouveront une instruction aussi sûre que profitable dans un grand nombre d'ouvrages publiés depuis que M. Dupin, par son cours normal et d'éloquens écrits, a fixé l'attention des Géomètres sur les applications de la géométrie et de la mécanique aux beaux-arts. Je citerai particulièrement les ouvrages de MM. Dandelin et Poncelet, que j'ai consultés fréquemment, et auxquels je suis redevable de plusieurs idées, qui m'ont été fort utiles. Il est à regretter que M. Dandelin n'ait pas encore complété son travail, en y joignant la mécanique des liquides et des fluides; nous aurions alors un nouveau traité de mécanique élémentaire, fort remarquable. A l'égard de l'ouvrage de M. Poncelet, si je puis en juger par la première partie imprimée et les deux autres lithographiées, que l'auteur a bien voulu permettre de me communiquer, la seconde édition, en ce moment sous presse, sera l'un des traités les plus complets, les plus élémentaires, et conséquemment les plus utiles, que nous ayons sur la mécanique industrielle. Je dois aussi beaucoup aux excellens Traités de Mécanique de MM. Francœur et Poisson, ainsi qu'à ceux de statique de MM. Biot et Poinsot. L'utilité de ces ouvrages, dans l'enseignement, est appréciée depuis long-temps; et je ne pouvais sans doute puiser à de meilleures sources.

Nous possédons également de très-bons traités élémentaires de physique; je me bornerai à citer ceux de MM. Beudant et Péclet, qui m'ont fourni les idées de plusieurs applications intéressantes. Ces deux ouvrages paraissent réunir les principales conditions d'après lesquelles il me semble que la physique devrait être présentée. Ils ont ce caractère particulier d'utilité, déjà indiqué pour le traité de M. Beudant : « c'est l'habitude qu'a l'auteur de faire l'application des propriétés dont il s'occupe à des objets qui sont à la portée de tous les lecteurs, et qui présentent cela d'extrêmement avantageux, qu'ils habituent l'esprit à observer et à se rendre compte des phénomènes qui tombent chaque jour sous les yeux, et qu'on remarque souvent pendant sa vie tout entière, sans avoir cherché à se les expliquer. Cette méthode offre beaucoup d'avantages dans l'étude des sciences, et le bon emploi qu'en a fait M. Beudant peut être d'un utile exemple.» (Bulletin des Sciences Mathématiques, mars 1831.)

Guidé par les divers ouvrages que je viens de citer, et par le désir de mettre à la portée des personnes, dont les connaissances mathématiques ne sortent pas des élémens, l'étude de la physique générale, de cette science, a dit M. Ampère, la plus utile peut-être à tous les hommes qui vivent en société, et qui est comme la base de toutes les sciences naturelles; j'ai lieu d'espérer que le présent traité sera une utile introduction à cette étude importante.

Luxembourg, Juillet 1833.

Nota. Les numéros placés entre parenthèses, indiquent les articles sur lesquels s'appuie celui dont on s'occupe. Dans une première lecture, on peut passer ce qui est imprimé en petit texte, sauf à revenir ensuite sur ces matières, dont la plupart présentent des applications.

TABLE SOMMAIRE DES MATIÈRES.

Fautes essentielles à corriger.

PAGES.	LIGNES.	FAUTES.	CORRECTIONS.
10,	14, en rem.,	plusieurs, une seule,	une, plusieurs,
50,	4,	positions du,	positions horizontales du
50,	6,	ou 12 $\sqrt{2}$ palmes,	pour les deux cas,
50,	18,	15 livres $\frac{3}{8}$,	16 livres $\frac{7}{8}$,
50,	19,	25 livres $\frac{5}{8}$,	28 livres $\frac{1}{8}$,
50,	21, 22 et 24,	4, 11, — 10,	3, 12, — 6,
72,	13,	ABC = ACI,	ABC = CAB,
76,	7,	sin B : sin IGH,	sin IGH : sin IGN,
76,	17,	l'angle IGN,	l'angle IGH,
76,	18,	AC : BC,	BC : BA,
76,	22,	*hauteur, base,*	*base, longueur,*
77,	7, en rem.,	AC : AB, AC : BC,	AC : CB, AB : BC,
77,	4 et 5, rem.,	*hauteur, longueur,*	*longueur, base,*
80,	20,	$O = r$,	$ON = r$,
83,	6,	SA,	S'A,
92,	14, en rem.,	(90),	(91),
109,	15,	P cos B,	Q cos B,
110,	5,	possible ; on,	possible ; après avoir posé $m = Q \sin B + f Q \cos B$, on
135,	10,	contantes,	constantes,
144,	13,	AI + IB,	AI + IE,
147,	6,	$+ 4t$,	$- 4t$,
155,	12,	$+ < 0{,}0001$,	$+ < 0{,}00001$,
176,	4 et 5,	point, rayon r',	cercle, rayon en r',
183,	3,	OI,	OH,
187,	7, en rem.,	$- 2x'$	$+ 2x'$,
281,	2, en rem.,	*a* l'air,	*a* l'aire,
282,	19,	de le section,	de la section.

NOTIONS

DE MÉCANIQUE.

PRÉLIMINAIRES.

La mécanique rationnelle est basée sur plusieurs définitions et notions premières, qu'il faut d'abord rappeler, pour plus de clarté et d'exactitude.

1. Espace. On nomme *espace*, l'étendue *vide* ou immatérielle, immuable et sans bornes, qui contient tous les corps de l'univers et qu'ils peuvent pénétrer librement dans tous les sens. Chaque portion de ce *lieu* vide peut être conçue limitée de différentes manières; et il en résulte alors l'*étendue figurée* ou les *corps géométriques*, qu'on nomme aussi *espaces relatifs*, *volumes* ou *capacités*.

On appelle *corps physique* ou simplement *corps*, toute substance matérielle capable d'affecter nos sens. Les corps physiques se présentent sous trois états principaux, auxquels on peut rapporter tous les autres : 1° Un corps est *solide*, lorsque comme les pierres, les bois, les métaux, etc., il a une forme extérieure fixe, qu'on ne peut lui faire abandonner qu'en employant un effort plus ou moins considérable. 2° Un corps est *liquide*, lorsque ses différentes parties cèdent facilement à la plus petite pression et qu'il prend exactement la forme du vase qui le renferme, comme l'eau, le mercure, les liqueurs, etc. 3° Enfin, on appelle *fluide aériforme* ou *gaz*, tout corps, tel que l'air, les vapeurs, etc., dont les parties paraissent totalement dépourvues d'adhérence.

Quel que soit leur état, tous les corps ont de l'étendue et jouissent en outre de quatre propriétés générales, savoir : l'impénétrabilité, la divisibilité, l'inertie et la mobilité.

2. Impénétrabilité. On appelle *impénétrabilité*, la propriété qu'a un corps d'exclure du lieu qu'il occupe tous les autres corps. Mais pour bien concevoir cette propriété, dans tous les cas, il faut distinguer soigneusement l'espace circonscrit par la continuité apparente de la surface du corps, de l'espace réel que ce

corps occupe. Car tous les corps sont plus ou moins *poreux;* et c'est par suite de l'existence de ces *pores* ou vides, que plusieurs se laissent en apparence pénétrer par d'autres, et subissent divers changemens très-remarquables; mais il n'en est pas moins certain que deux portions quelconques de matière ne peuvent occuper à la fois le même lieu.

C'est l'impénétrabilité qui annonce l'existence de la matière. C'est la même propriété qui donne lieu aux divers genres de mouvemens; car si les corps étaient pénétrables, ils ne pourraient recevoir aucune sorte d'impulsion, ni en donner aucune. D'ailleurs, comme on ne saurait concevoir du mouvement là où il n'y a rien, on peut partout où l'on reconnaît qu'il y a du mouvement, annoncer par cela même l'existence d'un corps.

3. Divisibilité. Aussitôt qu'on a conçu l'idée de l'étendue, on acquiert celle de la *divisibilité;* car un corps ayant de l'étendue, on peut en concevoir la moitié, puis la moitié de cette moitié, et ainsi de suite à l'infini : c'est là ce qu'on nomme la *divisibilité géométrique.* Mais on ignore si, par des moyens mécaniques, il est possible de diviser un corps matériel à l'infini : tout ce que l'expérience nous apprend à cet égard, c'est que plusieurs corps peuvent être divisés en parties si ténues qu'elles deviennent imperceptibles à nos sens. Ainsi par exemple, lorsqu'un sel est dissout par l'eau, les parties dans lesquelles il a été réduit, sont si petites qu'elles échappent non-seulement à l'œil nu, mais encore à l'œil armé du plus fort instrument d'optique.

Ces parties moindres que la plus petite grandeur imaginable, de même nature, nous les appelons *infiniment petites;* mais il ne faut pas en conclure qu'il n'existe pas d'autres parties, beaucoup plus petites; car au-delà de ce que nous pouvons apprécier directement, il y a une multitude de corps qui ont entre eux d'énormes différences de grandeurs, et dont l'existence nous a été en partie révélée par le microscope. Les dimensions possibles des corps forment une série immense, qui commence au point géométrique et s'étend indéfiniment au-delà : nos organes ne peuvent saisir qu'une portion de cette série, et nous regardons comme nul ou infini tout ce qui n'y est pas renfermé; mais ces jugemens, résultat nécessaire de l'imperfection de nos sens, n'expriment que les limites extrêmes de la perception. En général, il n'y a dans la nature ni grand ni petit absolu; tout y est relatif à l'individu qui observe : un ciron est un atôme pour nous, c'est un monstre gigantesque pour l'infusoire, incomparablement plus petit que lui.

4. On conçoit, d'après cela, qu'une grandeur infiniment petite pour l'homme, peut contenir une infinité de fois une autre grandeur, que pour cette raison, nous appelons un *infiniment petit du second ordre;* de même celle-ci peut être infiniment grande relativement à une troisième grandeur, qui sera un *infiniment petit du troisième ordre,* et ainsi de suite. Les infiniment petits, dont nous ferons un usage fréquent, ne sont donc pas seulement un moyen d'investigation imaginé par les géomètres; mais ils ont une existence réelle dans la nature physique: ainsi, par exemple, les doigts qui tiennent une pièce de monnaie, en enlèvent, par le frottement, une portion infiniment petite, que nous regardons comme nulle; l'herbe d'un pré croît pendant chaque heure, d'une quantité inappréciable; les espaces parcourus par les différens points d'un corps, croissent aussi par des infiniment petits; car chaque point ne peut aller d'une position à une autre, sans traverser toutes les positions intermédiaires; et on ne saurait imaginer une distance aussi petite que celle qui a lieu entre deux positions successives. Il est une multitude de faits qui prouvent l'existence des infiniment petits.

5. Bien que la matière puisse être divisée en parties réellement infiniment petites, il est très-probable, et nous admettrons désormais, que la division atteint toujours une certaine limite et ne la dépasse jamais, soit qu'une division plus petite soit réellement impossible, soit que les forces nécessaires pour l'effectuer ne se présentent pas; car la physique et la chimie offrent à chaque pas de nouvelles preuves de la division limitée de la matière; et un grand nombre de phénomènes de ces sciences seraient tout-à-fait inexplicables dans la supposition contraire. Nous appellerons *points matériels,* les corps infiniment petits dans toutes leurs dimensions, placés à la limite de la division effective: ce seront des *atômes* pour les corps simples, des *molécules* pour les corps composés, et des *particules* pour les aglomérations d'atômes et de molécules. De plus, nous ferons remarquer, et la physique apprend, que la seule diversité du mode d'agrégation des points matériels, fait que le système entier, ou le corps qu'ils composent, est accidentellement solide, liquide ou gazeux; et de là résultent également les autres propriétés accidentelles, telles que les divers degrés de *dureté,* de *mollesse,* d'*élasticité,* etc.

6. Inertie. L'*inertie* de la matière consiste en ce que *tout corps est incapable, par lui-même, de changer l'état où il se trouve*. Si un corps passe du repos au mouvement ou du mouvement au repos, s'il devient plus ou moins solide, plus ou moins liquide, etc., l'expérience prouve que c'est toujours par l'influence de causes étrangères et jamais par l'effet d'une volonté propre et libre. Cette indifférence complète, ce manque de volonté ou d'affection que l'on reconnaît à la matière, n'est pas démentie par les attractions que deux corps, mis en contact, exercent l'un sur l'autre; car ces attractions peuvent être attribuées à la cause même qui lie entre eux les élémens matériels; et elles n'ont lieu que quand les corps ont une certaine proximité, qu'ils ne prennent jamais d'eux-mêmes.

« Une seule classe de corps semble faire exception à ce principe : ce sont ceux des êtres qu'on appelle *animés*, qui s'arrêtent ou se meuvent par l'effet d'une volonté intérieure; mais dans ceux-là encore, les molécules matérielles qui composent leurs parties et ces parties elles-mêmes, sont absolument inertes. C'est leur ensemble qui possède la qualité d'être animé; séparées, elles ne vivent plus et rentrent dans les lois ordinaires de tous les autres corps. »

« Nous sommes dans une obscurité absolue sur la cause de cette différence, et nous ignorons complétement ce qui détermine l'état de vie; mais, voyant dans toutes les autres circonstances la matière dépourvue de *spontanéité*, et reconnaissant que, même dans les êtres animés, elle perd cette faculté par la mort et le sommeil, nous sommes conduits à la regarder comme étrangère à son essence, et ramenant ce cas aux lois ordinaires, nous concevons la volonté des êtres animés comme l'acte d'un principe intérieur et immatériel qui réside en eux. A la vérité, nous ne pouvons pas dire dans laquelle de leurs parties ce principe réside, ni en quoi il consiste; encore moins comment, immatériel, il peut agir sur la matière. Mais pour peu que nous ayons réfléchi sur nous-mêmes, et que nous ayons observé avec quelqu'attention les œuvres de la nature, ces obscurités, malheureusement trop ordinaires, où nous laissent l'imperfection de nos connaissances, ne doivent jamais être pour nous le fondement d'une objection contre l'essence des choses que nous sommes toujours réduits à ignorer. Ainsi nous agirons philosophiquement, dans cette circonstance, comme dans toute autre, en nous rapprochant des analogies et en faisant dépendre le mouvement des êtres animés d'une cause étrangère à leur matière, puisque nous trouvons la matière inerte dans tous les autres cas où nous pouvons l'éprouver. Nous admettrons donc l'immatérialité du principe de la volonté comme une distinction fondée sur l'analogie, et l'*inertie* de la matière comme une propriété générale dans l'état actuel de l'univers. » (*Biot*, statique.)

7. Mobilité. Tous les corps sont *mobiles*, c'est-à-dire suscep-

tibles d'être déplacés. Un corps est en *mouvement*, lorsqu'il change de place ou que les parties dont il est composé passent d'un lieu dans un autre; et un corps est en *repos*, quand tous ses points matériels restent chacun dans un même lieu de l'espace.

Il n'est peut-être, dans l'univers, aucun corps qui soit absolument en repos; tout démontre que notre globe tourne sans cesse sur lui-même et autour du soleil, avec le système des astres, qui lui-même paraît aussi en mouvement dans l'espace. Ainsi le repos n'est pas *absolu*, mais *relatif*: un corps est en repos pour nous, quand il conserve la même position par rapport à des objets que nous regardons comme fixes. Un homme qui reste à la même place, dans un bateau, est en repos à l'égard de ce bateau, quoiqu'il soit réellement en mouvement, avec le bateau, par rapport au rivage.

Nous n'avons aucun moyen de déterminer les *mouvemens réels* des corps dans l'espace; parce que nous n'y connaissons aucun objet en repos absolu et auquel nous puissions rapporter la position des autres corps. Tous les mouvemens (essentiellement *continus*) sont donc aussi pour nous des *mouvemens relatifs*; et nous disons qu'un corps est en mouvement, lorsqu'il change de position par rapport à des objets que nous regardons comme fixes, bien que ceux-ci soient eux-mêmes en mouvement dans l'espace. Du reste le mouvement demeure identiquement le même, soit qu'il soit absolu ou relatif; et nous n'aurons pas désormais à distinguer s'il est l'un ou l'autre.

8. Forces. D'après l'inertie de la matière, un corps en repos ne peut entrer en mouvement, et un corps en mouvement ne peut changer la manière dont il se meut, sans l'action d'une cause étrangère, appelée *force* ou *puissance*. Ainsi la force est une cause qui meut ou qui tend à mouvoir un corps. Nous ignorons complétement la nature de cette modification singulière, en vertu de laquelle la matière devient animée; mais cette cause, quelle qu'elle soit, se manifeste dans une multitude de circonstances : les chocs, la chute des corps, les mouvemens des bateaux, des boulets, etc., sont autant d'exemples de l'action des forces.

On considère dans une force, 1° son point d'*application*, c'est-à-dire le point matériel sur lequel elle agit immédiatement; 2° sa *grandeur*, c'est-à-dire l'effort qu'elle fait pour mouvoir le corps ou le point du corps auquel elle est appliquée; 3° enfin, sa *direc-*

tion ou la ligne suivant laquelle elle tend à mouvoir le point matériel sur lequel elle agit. Or cette ligne est nécessairement *droite;* car la force ne peut tendre à mouvoir le corps, ou à exercer son action, que vers un seul point de l'espace, à la fois.

9. Les efforts que nous faisons pour produire ou empêcher le mouvement, et les diverses manières dont un même corps peut se mouvoir, nous donnent les idées de forces *égales* et *inégales*. Deux forces sont *égales*, lorsqu'elles peuvent soutenir chacune un même corps, dans un même lieu, et aussi lorsqu'appliquées à un même point matériel et le sollicitant en sens directement opposés, ce point demeure en repos. Si ce point pouvait se mouvoir, les deux forces seraient *inégales*. On conçoit, d'après cela, que des forces peuvent être des multiples ou des sous-multiples d'une même; et qu'en prenant celle-ci pour *unité*, chacune des autres sera exprimée par un *nombre*, représentant son *énergie* ou, suivant le mot technique, son *intensité*. Et comme tout nombre peut être remplacé par le rapport d'une droite à l'unité linéaire, on a coutume de représenter chaque force par une longueur prise sur sa direction et à partir de son point d'application; ce qui a l'avantage de simplifier l'énoncé des théorèmes.

Pour achever de définir une force, il faut encore faire connaître si son action est continue ou instantanée, comme un simple choc qui ne se reproduit point; il faut en outre déterminer le rapport de son intensité avec la grandeur des mouvemens qu'elle est capable de produire; recherches délicates et dans lesquelles le temps doit entrer en considération.

10. Temps. Le *temps* est une notion première tellement simple, qu'il est impossible de le définir. L'impression que laisse en nous la succession des événemens, donne assez bien l'idée du temps, mais n'est point propre à le mesurer; car la durée nous affecte d'une manière trop variable, suivant les sensations qui nous dominent. Le temps se mesure par une suite d'évènemens matériels, identiques, qui se succèdent sans interruption. Les grandes unités de temps résultent des phénomènes célestes; le jour est l'intervalle qui sépare deux retours consécutifs du soleil à un même méridien; l'année, celui qui s'écoule entre deux retours consécutifs du soleil à un même point du ciel. On obtient des durées égales et plus petites, par l'écoulement d'une même masse de sable dans les mêmes circonstances, ou par les oscillations du pendule.

On désigne sous le nom de *jour vrai*, l'intervalle qui s'écoule entre deux retours consécutifs du soleil à un même méridien : c'est le temps que marquent les cadrans solaires. Cette durée varie dans l'année, parce que le soleil a un mouvement annuel en sens contraire de son mouvement diurne apparent, dont la projection parallélement à l'équateur n'est pas constante. On désigne sous le nom de *jour moyen*, la durée de l'année divisée par 365,24226 qui représentent le nombre de jours vrais de l'année : c'est le temps que marquent les horloges bien réglées. Les horloges sont tantôt en avance, tantôt en retard sur le jour vrai; mais à la fin de l'année, ces avances et ces retards se trouvent compensés.

11. Forces constantes. On distingue deux espèces de forces, les forces *constantes* et les forces *accélératrices*. Les premières n'agissent qu'à l'origine du mouvement et par une seule impulsion instantanée et finie; les autres agissent continuellement et par une suite d'impulsions infiniment petites qui se succèdent d'une manière continue. Cette distinction, utile en théorie, n'est cependant point réelle; il n'existe point dans la nature de force dont l'action soit rigoureusement instantanée, car une force quelconque, exige toujours un temps fini pour produire une *vitesse* finie dans le corps sur lequel elle agit. Mais les forces constantes peuvent être regardées comme le résultat de l'action d'une force accélératrice qui a agi pendant un certain temps; l'effet produit est évidemment le même que si le corps était mis en mouvement par une force instantanée qui lui imprimerait la même vitesse. Nous admettrons donc la distinction des forces constantes et des forces accélératrices, parce qu'elle est commode pour les démonstrations, et que d'après ce qu'on vient de remarquer, il ne peut en résulter aucune idée inexacte.

Les forces constantes produisent des mouvemens *uniformes* et les forces accélératrices des mouvemens *variés*. On appelle *mouvement uniforme*, tout mouvement dans lequel le mobile parcourt constamment le même espace pendant le même intervalle de temps. La *vitesse* du corps est alors l'espace qu'il décrit uniformément pendant chaque unité de temps, telle qu'une seconde (*). Si donc v désigne la vitesse, l'espace décrit pen-

(*) La *vitesse* d'un point matériel en mouvement, est une chose qui réside dans ce point, dont il est animé et qui le distingue d'un point actuellement en repos. Prenant pour unité de vitesse celle du mobile qui parcourt l'unité linéaire pendant l'unité de temps, on pourra dire, dans le mouvement uniforme, que *la vitesse a pour mesure l'espace rectiligne décrit pendant chaque unité de temps.*

dant le temps t, entier ou fractionnaire, sera vt. D'où il suit que *dans le mouvement uniforme, l'espace décrit est égal à la vitesse multipliée par le temps* (qui est ici un nombre abstrait), et par conséquent *la vitesse est égale à l'espace divisé par le temps.*

On appelle *mouvement varié,* tout mouvement dans lequel le mobile parcourt des espaces inégaux dans des temps égaux, quelque petits qu'ils soient. Dans ce cas, la *vitesse* du corps, à un instant donné, est l'espace que ce corps décrirait uniformément pendant chaque unité de temps, si à cet instant donné, la force cessait immédiatement d'agir sur le corps, lequel se mouverait alors uniformément suivant une ligne droite.

12. Loi d'inertie. *Lorsqu'une force agit sur un mobile par une simple impulsion, ce corps se meut suivant la droite qui est la direction de la force, et décrit constamment le même espace pendant le même temps, pourvu qu'il n'éprouve aucune résistance étrangère.*

Ce principe fondamental de la mécanique est un résultat de raisonnement et d'expérience. En effet, d'après l'inertie de la matière, un corps est à la fois incapable de prendre par lui-même aucun mouvement et d'altérer celui qu'il a reçu, soit dans sa direction, soit dans sa grandeur; car à cause de sa complète indifférence, il n'y a pas de raison pour que ce corps entre en mouvement de lui-même, ni pour qu'il diminue son mouvement plutôt que de l'augmenter, ni enfin pour qu'il change sa direction plutôt vers la droite que vers la gauche. D'un autre côté, nous voyons que le mouvement que possède un corps se perpétue plus long-temps, à mesure que les frottemens et les causes quelconques qui tendent à le détruire, diminuent; ce qui porte à penser que sans ces obstacles, dont on peut faire abstraction dans la théorie, pour les prendre plus tard en considération, le mouvement acquis durerait toujours. C'est ce qui est complétement vérifié par les phénomènes célestes; car depuis un grand nombre de siècles, les mouvemens des planètes n'ont pas éprouvé la moindre altération, et par conséquent la vitesse dont elles étaient animées à l'époque des plus anciennes observations, s'est perpétuée jusqu'ici dans toute son intensité. On doit donc admettre que tout corps persévère dans son état de mouvement ou de repos, jusqu'à ce qu'il éprouve l'action d'une cause étrangère.

Cette *loi d'inertie* est, si l'on veut, une hypothèse, mais c'est une hypothèse évidemment permise ; car elle consiste à attribuer à des causes étrangères tous les changemens d'état, soit de repos ou de mouvement, soit de solidité, de liquidité, etc. ; et l'étude des effets n'est aucunement intéressée à connaître si ces causes sont réellement dans ou hors de la matière, puisque dans l'une et l'autre supposition les effets restent les mêmes. Nous regarderons donc la matière comme absolument *inerte* ; et il en résulte nécessairement que si un corps, pendant la première seconde de son mouvement, décrit une distance de 6 mètres, par exemple, il décrira la même distance pendant chacune des secondes successives, tant qu'il ne rencontrera pas d'obstacles hors de lui.

13. Équilibre. Un corps peut être en repos parce que les forces qui agissent sur lui, se contrebalancent ou se détruisent mutuellement. Pour distinguer ce repos de celui qui a lieu par l'absence de toute force, on l'appelle *équilibre*, et on dit que les forces qui agissent sur le corps, se font *équilibre*. Les conditions de l'équilibre de plusieurs forces, ne dépendent ni du temps ni de la vitesse ; ces conditions résultent uniquement de la seule présence actuelle de plusieurs forces qui n'obtiennent aucun effet, mais qui se détruisent avec évidence, quelles que soient leurs valeurs numériques particulières : de sorte que l'état d'équilibre des corps reste comme un moment singulier de l'état de mouvement, où la mesure des forces par leurs effets, et leurs effets mêmes ont disparu.

14. Définitions. On appelle *mécanique* la science de l'équilibre et du mouvement ; son but est de prévoir et de calculer l'effet des forces. Elle se partage en quatre parties, savoir : la *statique*, la *dynamique*, l'*hydrostatique* et l'*hydrodynamique*. Les deux premières ont pour objet l'équilibre et le mouvement des corps solides, et les deux autres, l'équilibre et le mouvement des liquides et des fluides.

Pour procéder du simple au composé, on commence par étudier l'équilibre d'un point matériel, en faisant abstraction du volume, du poids et de plusieurs autres propriétés physiques : les théorèmes que l'on déduit de cet état idéal, qui ne comprend que les notions de la force et de la mobilité, servent ensuite à établir des vérités générales, applicables aux corps tels que la nature nous les présente.

NOTIONS DE STATIQUE.

Composition et décomposition des forces.

15. La *statique* est la science de l'équilibre des forces ; son but est de trouver les rapports que les puissances doivent avoir en grandeur et en direction, pour se contrebalancer ou se détruire mutuellement : elle est indépendante de la notion du temps.

16. Lorsque plusieurs forces, qui ne se font pas équilibre, agissent simultanément sur un même corps invariable de grandeur, il est évident que ce corps se meut ou tend à se mouvoir, suivant une certaine direction, nécessairement unique, puisque ce corps ne peut aller par plusieurs chemins à la fois. Or, il est clair qu'on peut toujours regarder ce mouvement, comme l'effet d'une seule force, capable de l'effet résultant de toutes les forces proposées. Cette seule force, capable de produire sur un corps, le même effet que plusieurs autres (quant au mouvement ou au repos), et qui peut à elle seule en tenir parfaitement lieu, se nomme leur *résultante ;* et ces autres forces, à l'égard de la résultante, en sont les *composantes.*

La méthode par laquelle on trouve la résultante de plusieurs forces, se nomme la *composition des forces ;* la méthode par laquelle on remplace plusieurs forces données, par une seule capable du même effet, s'appelle *la décomposition des forces.* Mais ces deux recherches n'en font qu'une seule, celle de la loi qui lie la résultante à ses composantes.

Désormais nous désignerons les forces par les lettres P, Q, R, S, etc., placées sur leurs directions. Et si une lettre, telle que A, indique le point d'application d'une force P, nous supposerons toujours que l'action de cette force a lieu de A vers P, ou que la force tire de A en P. Nous appellerons *forces concourantes* ou *angulaires, forces parallèles,* les forces dont les directions se coupent, ou sont parallèles. Nous dirons qu'une droite, perpendiculaire à la direction d'une force, est *perpendiculaire à cette force ;* et nous aurons ainsi des *forces perpendiculaires* ou *obliques* entre elles.

17. Axiomes. Il est évident qu'*on peut, sans changer l'état de repos ou de mouvement d'un système de force, y introduire ou supprimer plusieurs forces en équilibre entre elles.*

Il n'est pas moins évident que *deux forces égales se font équilibre, lorsqu'elles sont appliquées en sens directement opposés, à un même point, ou aux extrémités d'une droite inextensible* AB, *dans le sens de cette droite.* Car il n'y a pas de raison pour que le mouvement naisse d'un côté plutôt que de l'autre.

Dans le second cas, à cause de la force physique qui lie invariablement entre eux les points matériels de la droite rigide et inextensible AB, le point A ne peut se mouvoir par l'action de la force P, sans entraîner en même temps et avec la même force le second point matériel adjacent; ce second point reçoit donc, par le premier, l'action de la force P, comme si elle lui était immédiatement appliquée : il en est de même du troisième point matériel, de même du quatrième, et ainsi de suite jusqu'au dernier B. De sorte que l'état du corps est absolument le même que si les deux forces égales et directement opposées P et Q étaient immédiatement appliquées au point B, et par suite à un point quelconque de la droite AB; et voilà pourquoi ces deux forces se font équilibre sur la droite.

18. Corollaire. Puisque quand tous les points matériels sur la direction d'une force P, sont liés invariablement entre eux, l'action de cette force sur le premier se transmet à chacun des autres, comme si elle lui était immédiatement appliquée; il s'ensuit qu'*on peut, sans changer l'effet d'une force sur un corps, l'appliquer à tel point qu'on voudra de sa direction, pourvu que le nouveau point d'application soit lié avec le premier d'une manière invariable;* ce qu'il faudra toujours supposer chaque fois qu'on fera usage de ce principe.

« Il importe de remarquer qu'à la rigueur, une droite telle que AB, complétement *rigide* et *inextensible*, n'existe point dans la nature, quoique la conception mathématique en soit indispensable pour l'étude des principes. Tous les points matériels qui composent les corps naturels, y sont seulement retenus, en vertu des forces physiques qui agissent sur eux, dans un état de proximité plus ou moins intime, et non dans un état immédiat de contiguité. Ainsi en tirant ou en poussant ces particules par de nouvelles forces suffisamment énergiques, on doit généralement pouvoir les séparer ou les rapprocher davantage. C'est en effet ce qui a lieu; car il n'y a aucun corps naturel qui ne soit compressible et extensible, même ceux qui comme le fer et la pierre la plus dure, résistent le plus énergiquement à tout changement d'état. De sorte qu'après avoir démontré les lois abstraites de l'équilibre pour des corps parfaitement solides, il reste encore à y faire les modifications convenables, si l'on veut les appliquer à des corps physiques réels. C'est ce qui est souvent difficile à faire avec rigueur, et l'on n'y parvient d'ordinaire que par des approximations, de l'exactitude desquelles il faut souvent se défier. Mais ces lois abstraites n'en sont pas moins très-utiles en elles-mêmes, d'abord par les principes qu'elles peuvent servir à établir, et ensuite, parce qu'elles offrent la limite de celles qui doivent avoir lieu dans le cas des corps imparfaitement solides que la nature nous présente. »

19. Théorème. *Lorsque deux corps agissent l'un sur l'autre, par pression, traction ou choc, la réaction est toujours égale et contraire à l'action.*

En effet, deux points matériels A et B ne peuvent agir l'un sur l'autre que suivant la droite AB qui les joint ou par la force qui les unit. Si donc le premier A, soumis à l'action d'une force P, vient à agir sur le second B, en repos, et qu'on peut supposer en équilibre au moyen de deux forces égales et contraires P et P′, dirigées suivant la droite AB, il est clair que l'action de A sur B lui communiquera nécessairement l'action de la force P, dont A est animé. Le point B étant donc alors soumis à la seule action de la force P, l'autre force égale et contraire P′ aura été détruite. Mais la force P de A n'a pu détruire la force P′ de B, que parce que celle-ci, égale et directement opposée, a réagi sur le point A ; la réaction P′ de B sur A est donc égale et contraire à l'action P de A sur B.

Ce principe fondamental, énoncé par Newton, est d'ailleurs démontré par toutes sortes de faits. En tirant un corps avec une corde ou en le poussant avec une barre, nous sommes tirés ou poussés, en sens contraire, de la même manière et avec le même effort ; et voilà pourquoi on ne saurait frapper un peu fort, avec la main, sur un corps dur, sans se faire mal. En général, nous ne pouvons concevoir qu'une force exerce son action, sans faire naître une résistance égale et directement contraire : c'est une suite de la transmission des forces, qui n'aurait jamais lieu sans cela, et qui dépend uniquement de l'inertie et de l'impénétrabilité.

20. Théorème. *Lorsque plusieurs forces* P, Q, R, S, *etc., se font actuellement équilibre sur un corps, l'une quelconque d'entre elles, la force* P, *par exemple, est égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres* Q, R, S, *etc.* Car supposons

que l'on applique au système une force P' parfaitement égale et contraire à la force P : les forces P et P' étant en équilibre, leur effet est nul de lui-même, et l'on peut regarder le corps comme n'étant plus soumis qu'à l'action des forces Q, R, S, etc. Mais d'un autre côté, la force P faisant équilibre aux forces Q, R, S, etc., l'effet de toutes ces forces est nul de lui-même, et l'on peut regarder le corps comme n'étant plus soumis qu'à l'action de la simple force P'. Ainsi l'état du système est identiquement le même, soit qu'on le suppose sollicité par les forces Q, R, S, etc., soit qu'on le suppose sollicité par la simple force P', qui est conséquemment la résultante de ces forces Q, R, S, etc. Or, la force P est égale et directement opposée à cette résultante P' : donc, etc.

Il suit de là non-seulement que plusieurs forces Q, R, S, etc., peuvent avoir une résultante; mais de plus que dans tout système de forces, l'état du repos ou du mouvement n'est pas changé, quand on remplace plusieurs de ces forces par leur résultante; ce qui est plus simple.

21. Théorème. *La résultante de deux forces* P *et* Q, *qui se rencontrent en un point* A, *est dirigée dans l'angle de ces deux forces* (fig. 1). D'abord cette résultante est dirigée dans le plan des deux forces, car il n'y a pas de raison pour qu'elle tombe d'un côté de ce plan plutôt que de l'autre côté. Ensuite, la force P tirant le point A de A vers P, ce point A ne se mouvera pas dans la partie QBC du plan des deux forces; de même, il ne se mouvera pas dans la partie PCB : il ne pourra donc se mouvoir que dans l'angle PAQ; la résultante qui produit ce mouvement, est donc dirigée dans cet angle.

Corollaire. *Lorsque les deux forces* P *et* Q *sont égales, il est clair que leur résultante divise en deux parties égales l'angle que ces forces font entre elles.* Car il n'y a pas de raison pour que cette résultante fasse avec l'une des composantes un angle plus grand qu'avec l'autre.

De plus, *cette résultante ne saurait être nulle;* car si elle était égale à zéro, en appliquant au point A une force Q' égale et directement opposée à la force Q, cette force Q' serait la résultante du système; mais comme elle détruit la force Q, le système aurait aussi la force P pour résultante; ce qui est impossible. De là résulte que *deux forces ne peuvent se faire équilibre, que quand elles sont égales et directement opposées.*

22. Forces suivant une même droite. Il est évident et l'on doit admettre comme axiome, que *si deux forces* P *et* Q *agissent dans le même sens et suivant une même droite, leur résultante est égale à leur somme* P + Q. Par exemple, si P peut supporter un poids de 6 livres et Q un poids de 5 livres, P et Q réunies dans la même direction, soutiendront un poids de 11 livres.

On voit d'après cela, que si tant de forces qu'on voudra, agissent suivant une même droite et dans le même sens, sur un même corps, leur résultante sera égale à leur somme et agira dans le même sens, suivant cette droite.

Lorsque deux forces inégales P *et* Q *agissent en sens directement contraires l'une de l'autre, leur résultante est égale à la différence* P—Q *de ces forces, et agit dans le sens et la direction de la plus grande* P. Car cette plus grande force est la somme des deux P — Q et Q; or la dernière Q est détruite par la force Q, égale et directement opposée (17) : on peut donc supprimer ces deux forces, et le point n'est plus tiré que par la différence P — Q.

De là et de ce qui précède, on peut conclure que *la résultante de tant de forces qu'on voudra, dirigées suivant la même droite, est égale à leur somme algébrique; c'est-à-dire, égale à l'excès de la somme des forces qui agissent dans un sens sur la somme de celles qui agissent dans le sens directement opposé, et tire dans le sens de la plus grande somme.* C'est là un premier principe de la composition des forces, si utile pour la solution des problèmes de statique.

23. Forces parallèles. La composition des forces parallèles se rapporte immédiatement à celle des forces suivant une même droite; et on a d'abord ce théorème, aussi remarquable qu'important :

La résultante R *de deux forces parallèles* P *et* Q, *de même sens, appliquées aux extrémités d'une droite inflexible* AB, *est égale à leur somme, leur est parallèle et divise la droite d'application en parties réciproquement proportionnelles aux deux composantes.*

1° Appliquons aux deux points A et B deux forces M et N, égales et contraires, et qui agissent dans la direction AB (fig. 2). Ces deux forces se détruisent, et par conséquent l'effet des deux forces P et Q n'est pas changé : mais les deux forces M et P, appliquées en A, ont une résultante S appliquée au même point

A, et dirigée dans l'angle MAP (21). De même, les deux forces N et Q ont une résultante T, appliquée en B et dirigée dans l'angle QBN. Les deux résultantes S et T vont nécessairement se couper en un point D, où l'on peut les supposer appliquées (18). Par le point D menons M'N' parallèle à AB, et DC parallèle à AP ou à BQ. Appliquons au point D les deux forces M' = M et P' = P, suivant DM' et DC : comme l'angle M'DC = MAP et l'angle M'DA = MAS ; si l'on pose le système MAP sur le système M'DC, les deux forces M et P coïncideront en grandeurs et en directions avec les deux forces M' et P'; donc la résultante S des deux premières M et P, coïncidera en grandeur et en direction avec la résultante des deux autres M' et P'; cette dernière résultante est donc égale à S, appliquée en D et dirigée suivant DA. De même, appliquant en D, suivant les directions DN et DC, les deux forces N' = N et Q' = Q, on verra que la résultante des deux forces N' et Q' est la force T, appliquée en D et dirigée suivant DB. Ainsi, puisque les deux forces M' et N', égales et directement opposées, se détruisent; on voit que la résultante des deux forces S et T, qui est celle des quatre forces M', N', P', Q', et par conséquent des deux P', Q', dirigées suivant la même droite DC, vaut la somme P' + Q' de ces deux forces (22), et que sa direction est DC. Mais la résultante des deux forces S et T, est absolument la même que celle des quatre forces M, N, P, Q, et par conséquent des deux P et Q. Donc la résultante des deux forces parallèles P et Q, de même sens, est égale à P' + Q' ou P + Q, c'est-à-dire égale à leur somme, et leur est parallèle, puisqu'elle est dirigée suivant DC. De plus, son point d'application, qui peut être C (18), est situé sur la droite d'application AB, entre ceux des composantes P et Q.

2° Maintenant, pour trouver la position de ce point sur AB, remarquons d'abord que si les deux forces P et Q étaient égales; en prenant les deux forces auxiliaires M et N égales entre elles et à chacune des deux proposées P et Q, les résultantes partielles S et T diviseraient les angles MAP et NBQ en deux parties égales chacun (21); de sorte qu'on aurait l'angle DAC = MAS = SAP = ADC, et par suite AC = DC. On aurait de même BC = DC; d'où AC = BC et le point C serait le milieu de AB. Ainsi on voit que *la résultante de tant de forces parallèles de même sens qu'on voudra, égales et situées deux à deux de part et d'autre et* *à égales distances d'un point* C, *est égale à leur somme, leur est parallèle et passe par ce point* C.

3° D'après cela, soit 2φ la mesure commune des deux forces parallèles et inégales P et Q; supposons qu'on ait $P = 2m\varphi$ et $Q = 2n\varphi$, m et n étant deux nombres entiers. Partageons la droite d'application AB en parties directement proportionelles aux deux forces P et Q, de manière qu'on ait P : Q :: AI : IB (fig. 3). Si nous divisons AI en m parties égales à x, d'où $AI = mx$, nous aurons $2m\varphi : 2n\varphi :: mx : IB = nx$. Sur les prolongemens de AB, prenons $AD = AI = mx$ et $BE = IB = nx$: il est clair que A sera le milieu de DI et B celui de IE; la force P sera donc la résultante de $2m$ forces égales à φ, parallèles, de même sens, appliquées aux $2m$ points milieux des $2m$ parties égales à x qui composent la droite DI; car toutes ces forces égales à φ, sont placées deux à deux de part et d'autre et à égales distances du point A; donc leur résultante passe par ce point et est égale à leur somme $2m\varphi$ ou à P (2°). De même, la force Q est la résultante des $2n$ forces égales à φ, parallèles, de même sens, appliquées aux $2n$ points milieux des $2n$ parties égales à x qui composent la droite IE. Par conséquent, la résultante des deux forces P et Q, est la même que celle des $2(m+n)$ forces égales à φ, et passe par le milieu C de la droite DE; car les milieux des parties extrêmes de DE, étant les points d'application de deux forces égales à φ, doivent être à la même distance du point d'application de la résultante (2°), lequel conséquemment est le milieu C. Or, à cause de $AB = \frac{1}{2}DE = DC$, si l'on retranche la partie commune AC, il restera $BC = AD = AI$. De même, $AC = BE = BI$. Remplaçant donc, dans P : Q :: AI : IB, les droites AI et IB par leurs égales BC et AC, on aura

$$P : Q :: BC : AC.$$

Cette proportion détermine le point d'application C de la résultante R des deux forces proposées P et Q. D'ailleurs cette proportion étant vraie quelque petite que soit la commune mesure 2φ de P et Q, sera vraie encore lorsque cette mesure commune sera infiniment petite, c'est-à-dire quand ces deux forces seront incommensurables entre elles. Ce qui complète la démonstration du théorème proposé.

Voici une nouvelle démonstration qui paraît mettre mieux en évidence la transmission des forces de pression.

1° Concevons la droite matérielle inflexible AB tenue en équilibre autour du point inébranlable C, par les forces parallèles P et Q (fig. 4). Il est visible que la molécule A, à laquelle la force P est appliquée, n'est retenue en repos que par son adhérence avec la seconde molécule vers C; et cette adhérence étant nécessairement aussi appliquée à la seconde molécule, il est clair que celle-ci éprouve un effort égal et parallèle à la force P : il en est de même de la troisième molécule, de même de la quatrième, et ainsi de suite, jusqu'au point C; lequel par sa résistance indéfinie, détruit l'effort P, et celui-ci n'a aucune action sur les molécules suivantes entre C et B. On voit que par l'effet des deux forces parallèles P et Q, le point C est sollicité par deux forces respectivement égales et parallèles aux deux proposées P et Q, et dirigées conséquemment suivant une même droite : donc leur résultante, c'est-à-dire celle R des deux forces proposées P et Q, est égale à la somme $P + Q$ de ces dernières et leur est parallèle.

Et comme il n'y a pas de raison pour que la résultante de deux forces parallèles et égales, qui tombe parallèlement entre elles, soit plus près de l'une de ces forces que de l'autre; on voit que la résultante de tant de forces parallèles qu'on voudra, égales, de même sens et situées deux à deux à la même distance de part et d'autre du milieu de la droite d'application, est égale à la somme de toutes ces forces, leur est parallèle et passe par ce milieu.

2° Maintenant, soient m et n les nombres respectifs de molécules égales que contiennent les portions AC et BC de la droite inflexible AB, et x la *longueur* de chaque molécule : on aura donc $AC = mx$ et $BC = nx$. Les actions des forces P et Q étant détruites et renouvelées à chaque instant, il est clair que comme elles sont continues, après un temps quelconque, les m molécules de AC éprouvent chacune un effort égal et parallèle à la force P : et comme ces molécules sont liées entre elles d'une manière invariable, les m efforts parallèles à P ont une résultante égale à leur somme mP. D'où l'on voit que les deux portions AC et BC sont sollicitées à se mouvoir dans le même sens, par les forces parallèles mP et nQ, appliquées à leurs milieux. Mais à cause du point fixe C, la portion AC, dans son mouvement, entraîne la portion BC avec un mouvement égal et contraire, absolument comme si la force mP était appliquée à BC, dans un sens parallèle et opposé : donc puisque ce mouvement est détruit par l'effet de la force parallèle nQ, ces deux forces parallèles, appliquées sur BC, sont nécessairement égales et directement opposées (21). Or, $mP = nQ$ donne $mxP = nxQ$; d'où $AC \times P = BC \times Q$, et par suite

$$P : Q :: BC : AC.$$

Corollaire. Réciproquement, toute force donnée R, appliquée à un point C de la droite inflexible AB, peut être décomposée en deux autres, parallèles et de même sens P et Q, appliquées respectivement aux deux points donnés A et B de cette droite. Car ayant $P + Q = R$ et $P : Q :: BC : AC$, on trouvera les deux composantes P et Q par les proportions R : P :: AB : BC et R : Q :: AB : AC.

24. Théorème. *La résultante* R *de deux forces parallèles* P *et* Q, *agissant en sens contraires sur une droite inflexible* AB, *est égale à leur différence, leur est parallèle, agit dans le sens de la plus grande, plus près de celle-ci et hors des deux, et divise la droite d'application en deux segmens* AC *et* BC *réciproquement proportionnels aux deux composantes* (fig. 5).

Il est clair, en effet, qu'on peut toujours décomposer la plus grande force Q en deux autres, parallèles et de même sens, l'une P′ égale à P, appliquée en A et détruite par la force P, et l'autre R, appliquée en un point C : cette dernière étant la seule force active du système, est nécessairement la résultante des deux forces P et Q, et il vient évidemment $Q = P + R$ et P : R :: BC : AB (23); d'où l'on tire

$$R = Q - P \text{ et } P : Q :: BC : AC.$$

Dans ce théorème et le précédent, on a P : Q : R :: BC : AC : AB; c'est-à-dire que *chacune des trois forces* P, Q, R *est représentée par la distance des points d'application des deux autres.*

25. Corollaire. Lorsque $P = Q$, on a $R = 0$; et la proportion P : R :: BC : AB, donne $BC = \infty$. Ainsi dans ce cas, il faudrait décomposer la force Q en deux autres, dont l'une égale à zéro devrait avoir son point d'application C à une distance infinie; ce qui est impossible. Il faut donc en conclure que *deux forces parallèles, égales, contraires et non directement opposées, n'ont point de résultante unique.*

Effectivement, tout ce qu'on dirait pour faire voir que cette résultante, si elle existe, agit dans un certain sens, à la droite de la force Q, se dirait pour prouver qu'elle agit dans le sens parallèle et contraire, à la gauche de la force P; car tout est le même dans les deux cas, parfaitement symétriques : cette résultante ne peut donc se trouver qu'entre les deux forces P et Q. Mais alors, en la détruisant par un obstacle invincible, il y aurait équilibre; et cependant les deux forces P et Q feraient évidemment tourner la droite AB autour de l'obstacle, placé au point d'application de la résultante supposée : de sorte qu'il y aurait à la fois mouvement et équilibre dans le système. Cette absurdité prouve que l'hypothèse d'une résultante unique ne saurait être admise; et que par conséquent il n'existe aucune force capable seule de l'effet résultant des deux forces proposées.

Ce cas singulier de la composition des forces mérite d'être distingué par une dénomination spéciale ; et on l'appelle *couple*. De sorte que par le mot *couple*, on entend l'ensemble de deux forces égales, parallèles, contraires et non directement opposées. D'où il paraît que l'*effet* d'un couple est de faire tourner la droite d'application autour de l'un de ses points, regardé comme fixe.

26. Corollaire II. Étant données tant de forces parallèles qu'on voudra, appliquées à des points situés dans l'espace et liés invariablement entre eux, il est bien facile, d'après ce qui précède (23 et 24), de trouver leur résultante et son point d'application : *on cherchera la grandeur et le point d'application de la résultante, d'abord des deux premières forces, puis de cette résultante et d'une troisième force, de cette seconde résultante et d'une quatrième force, ainsi de suite.* Les points d'application des résultantes successives s'obtiennent en divisant les droites d'application en deux segmens réciproquement proportionnels aux deux forces adjacentes ; et la résultante du système est égale à la somme algébrique des forces proposées ; c'est-à-dire égale à l'excès de la somme des forces qui agissent dans un sens sur la somme de celles qui agissent dans le sens contraire, et tire dans le sens de la plus grande somme. Toutefois, si la résultante des forces qui agissent dans un sens était égale, mais non directement opposée, à la résultante de celles qui agissent dans le sens contraire, le système se réduirait à un couple, et il n'y aurait pas de résultante unique.

Cette composition successive des forces parallèles, fournit plusieurs conséquences remarquables, que nous développerons avec plus de facilité, dans la théorie des momens, après avoir étudié la composition des forces angulaires.

27. Forces angulaires. La résultante de deux forces concourantes se détermine aisément à l'aide du théorème qui suit, connu sous le nom de *parallélogramme des forces*, et l'un des plus importans de la mécanique :

La résultante R *de deux forces* P *et* Q, *appliquées à un même point* A, *est représentée en direction et en intensité par la diagonale* AD *du parallélogramme construit sur les droites* AB *et* AC, *qui représentent en grandeur et en direction les deux forces proposées* P *et* Q (fig. 6).

1° Dans le parallélogramme ABDC, prolongeons le côté BD de la longueur DH=AB=DC, et achevons le losange CDHF. Regardons tous les points du système comme liés invariablement entre eux; et sur la droite inextensible HF, appliquons les deux forces Q' et Q'', contraires, égales entre elles et à la force Q: ces deux forces se détruisent, et par conséquent la résultante des quatre forces P, Q, Q', Q'', est la même que celle des deux proposées P et Q. Or, je dis que cette résultante passe par le point D. Car à cause de AC=BD, de AB=DH et de P : Q :: AB : AC, par hypothèse, il vient P : Q' :: DH : BD; donc la résultante T des deux forces parallèles P et Q' passe par le point D (23). La résultante S des deux forces égales Q et Q'', divisant en deux parties égales l'angle QFQ'', ainsi que son opposé CFH (21), est dirigée suivant la diagonale DF du losange et passe aussi par le point D. Donc la résultante des deux forces T et S, qui est celle des quatre P, Q', Q, Q'', et conséquemment des deux P et Q, passe nécessairement par le point D. D'ailleurs la résultante R des deux forces P et Q est appliquée au point A, puisqu'elle doit produire sur ce point le même effet que ces deux forces; cette résultante est donc effectivement dirigée suivant la diagonale AD.

2° Appliquant au point A la force R' égale et directement opposée à la résultante R, ces deux forces se détruiront, et par conséquent les trois forces P, Q, R' seront en équilibre sur le point A; donc la force Q sera égale et directement opposée à la résultante des deux autres P et R' (20); cette résultante sera donc dirigée suivant le prolongement AG de CA. Menant BG parallèle à AR', et achevant le parallélogramme ABGK, ce qui donne AK=BG=AD; la force R' sera représentée par AK. Car si elle pouvait avoir une autre intensité AM; en formant le parallélogramme MABN, sur les droites AB et AM qui représentent les forces P et R', en grandeur et en direction, la résultante de ces deux forces serait dirigée suivant AN (1°); ce qui est absurde. Donc la force R' ou son égale R, est représentée en intensité par AK ou son égale la diagonale AD. Ce qui complète la démonstration du théorème proposé.

28. Corollaire. A cause de l'angle ADC=BAD, de l'angle ACD=180°—BAC et de CD=AB, on voit que les trois forces P, Q, R, sont représentées par les trois côtés DC, AC et AD du triangle ACD, et que de plus les inclinaisons de ces forces deux

à deux, sont déterminées par les angles du même triangle : donc puisque les côtés sont comme les sinus des angles opposés et que sin ACD = sin BAC, on a P : Q : R :: sin DAC : sin BAD : sin BAC. D'où il suit que *deux forces angulaires et leur résultante, sont chacune représentée par le sinus de l'angle des deux autres.*

En général, deux forces angulaires, leur résultante et les trois angles que leurs directions font entre elles, sont six grandeurs telles, que trois quelconques étant données, pourvu qu'il y ait au moins une force, on trouvera toujours les trois autres, en construisant ou en résolvant numériquement le triangle ACD, d'après les principes de la géométrie ou de la trigonométrie.

Par exemple, *pour décomposer la force donnée* R, *appliquée en* A, *en deux autres forces inconnues* P *et* Q, *qui aient les directions données* AB *et* AC*;* on prendra la longueur AD égale à la valeur numérique de R, puis on achèvera le parallélogramme ABDC ; et les côtés AB et AC représenteront les forces cherchées. Car ayant alors P : Q : R :: AB : AC : AD, et R = AD, il viendra P = AB et Q = AC.

Et si l'on veut déterminer numériquement les composantes P et Q, connaissant les valeurs numériques de la résultante R et des angles BAC, BAD et DAC ; on calculera les premiers termes des proportions

P : R :: sin DAC : sin BAC et Q : R :: sin BAD : sin BAC.

Dans ce cas, si l'angle BAC est droit, ce qui donne sin BAC = 1, sin DAC = cos BAD et sin BAD = cos DAC, il viendra P = R cos BAD et Q = R cos DAC. De sorte qu'alors les composantes P et Q sont les *projections* de la résultante R sur leurs directions. Chacune de ces composantes est ce qu'on appelle *la force* R *estimée suivant la direction de la même composante.*

Corollaire II. Il est facile de voir, d'après le corollaire précédent, que 1° si deux forces, dirigées dans le plan d'un triangle, sont respectivement perpendiculaires et proportionnelles à deux côtés de ce triangle, leur résultante sera aussi perpendiculaire et proportionnelle au troisième côté ; 2° lorsque des puissances, dirigées dans le plan, et toutes vers le dehors ou toutes vers le dedans d'un polygone rectiligne, sont perpendiculaires aux milieux des côtés et proportionnelles à ces mêmes côtés, ces puissances sont en équilibre.

Corollaire III. Si tant de forces qu'on voudra sont appliquées à un même point, on trouvera leur résultante, en cherchant successivement, d'après le parallélogramme des forces, la résultante des deux premières, puis la résultante de celle-ci et d'une troisième force, la résultante de cette dernière et d'une quatrième force, et ainsi de suite. Si toutes les forces proposées sont dans un même plan, il est clair que la résultante totale sera dans ce plan; et si elles sont en équilibre, leur résultante sera nulle.

Par cette composition successive, on voit que *si l'on construit un contour polygonal, plan ou gauche, dont les côtés soient respectivement parallèles et proportionnels aux forces successives, appliquées à un même point, le dernier côté de ce contour sera aussi parallèle et proportionnel à la résultante de toutes ces forces*. Ce théorème remarquable renferme, comme cas particulier, le *parallélipipède des forces,* que nous allons démontrer expressément.

29. Théorème. *Lorsque trois forces* P, Q, R, *appliquées à un même point* A, *sont représentées en grandeurs et en directions par les trois arêtes contiguës* AB, AC, AD, *d'un parallélipipède, leur résultante* S *est représentée en direction et en grandeur par la diagonale contiguë* AG (fig. 7).

Car la résultante N des deux forces P et Q, est représentée par la diagonale AE du parallélogramme ABEC; et la résultante S des deux forces N et R, ou des trois P, Q, R, est représentée en grandeur et en direction par la diagonale AG du parallélogramme AEGD, qui est aussi celle du parallélipipède : donc, etc.

30. Corollaires. On voit d'abord que la résultante S ne saurait être nulle, qu'autant que les trois forces P, Q, R, sont nulles séparément. De plus, pour décomposer une force donnée S, appliquée en A, en trois autres P, Q, R, respectivement parallèles à trois droites non situées dans un même plan; on prendra la longueur $AG = S$, sur la direction de cette force; puis après avoir mené, par le point A, des parallèles aux trois droites proposées, on achèvera le parallélipipède BH; et AB, AC, AD, seront les valeurs et les directions respectives des trois forces cherchées P, Q, R. Car on aura $P : Q : R : S :: AB : AC : AD : AG$.

Et si le parallélipipède est rectangle, chacune des composantes P, Q, R, sera la projection de S sur sa direction. Désignant donc par a, b, c, les angles respectifs que la force S fait avec les composantes P, Q, R, on aura alors

$$P = S \cos a,\ \ Q = S \cos b \ \text{ et } \ R = S \cos c.$$

D'ailleurs, il est aisé de voir, par les triangles rectangles AEG et ACE, que

$$P^2 + Q^2 + R^2 = S^2;$$

ainsi on a cette relation remarquable :

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1.$$

Au moyen des quatre équations précédentes entre les quantités P, Q, R, S, a, b, c; trois quelconques d'entre elles étant données, pourvu qu'il y ait au moins une force, on pourra toujours calculer les quatre autres.

Lorsque le parallélipipède est oblique; en désignant par p', q', r', les angles CAD, BAD, BAC, respectivement opposés aux forces P, Q, R; il est facile de voir 1° que la projection de AG ou S sur AD est égale à R plus la projection de DG ou AE sur AD; 2° que la projection de AE sur AD est la somme des projections de AC et CE sur la même droite. Désignant donc toujours par a, b, c, les angles BAG, CAG, DAG, on aura

$$S \cos c = R + N \cos DAE \text{ et } N \cos DAE = Q \cos p' + P \cos q';$$

d'où l'on tire $\quad R + Q \cos p' + P \cos q' = S \cos c.$

De même, $\quad Q + R \cos p' + P \cos r' = S \cos b,$

$$P + Q \cos r' + R \cos q' = S \cos a.$$

De plus, les triangles AGE et ACE fournissent

$$R^2 + Q^2 + P^2 + 2RQ \cos p' + 2RP \cos q' + 2PQ \cos r' = S^2.$$

Ces quatre équations coïncident avec celles trouvées plus haut, dès que le parallélipipède est rectangle; et il en résulte aussi la démonstration du théorème que voici : *Si à un point de l'intérieur d'un tétraèdre, on applique quatre puissances* a', b', c', d', *respectivement perpendiculaires et proportionnelles aux faces* a, b, c, d, *ces puissances se feront équilibre.*

D'abord à cause de la proportionnalité, on aura $a' = ra$, $b' = rb$, $c' = rc$, $d' = rd$. Désignant par $(a'b')$ l'angle compris entre a' et b', ainsi des autres, on aura aussi $\cos(a'b') = -\cos(ab)$, $\cos(a'c') = -\cos(ac)$, et ainsi de suite. La résultante R' des trois forces a', b', c', étant la diagonale du parallélipipède construit sur les arêtes qui représentent ces forces, on en déduit quatre équations analogues aux quatre précédentes. Substituant les valeurs de a', b', c', $\cos(a'b')$, etc., et observant que le tétraèdre donne

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab \cos(ab) - 2ac \cos(ac) - 2bc \cos(bc),$$

$$a = b \cos(ab) + c \cos(ac) + d \cos(ad), \text{ etc.};$$

on trouvera $R' = d'$, $\cos(R'a') = -\cos(a'd')$, $\cos(R'b') = -\cos(b'd')$, $\cos(R'c') = -\cos(c'd')$. D'où il suit que la résultante R' des trois forces a', b', c', est égale et directement opposée à la quatrième force d'. Donc ces quatre puissances se font équilibre.

31. *Remarque.* A l'aide du petit nombre de principes qui précèdent, on peut déjà se rendre compte de plusieurs procédés employés dans les arts et dans les usages de la vie. Par exemple, dans les constructions, lorsqu'on élève une pierre d'un poids très-considérable, et qu'on veut l'empêcher de frotter contre le parement extérieur de l'édifice, qu'elle pourrait endommager, un homme tire le système par une corde attachée au point de suspension, et l'écarte ainsi de l'édifice avec une force d'autant moindre qu'elle approche plus d'être horizontale : c'est ce qu'on voit aisément à l'aide du parallélogramme des forces.

On verra de la même manière pourquoi le nageur, qui veut aller d'une rive à l'autre d'une rivière, doit toujours se diriger vers un point au-dessus de celui qu'il se propose d'atteindre. C'est que la force du courant et celle que déploie le nageur, lui font décrire la diagonale d'un parallélogramme.

Il est un grand nombre d'autres procédés des arts que les principes, qui précèdent, peuvent servir à expliquer ou à rendre plus simples et d'une application plus utile. Mais pour avoir encore un exemple, qui montre plus spécialement l'usage de ces principes, proposons-nous le problème que voici :

Dans la charpente d'un bâtiment, la pièce horizontale AB *est soutenue par la pièce verticale* AC *et l'arc-boutant* MN, *de longueur donnée; quelle position celui-ci doit-il avoir, pour que la pièce* AB *soit soutenue le plus possible?* (fig. 8).

Représentons la force absolue de l'arc-boutant MN, par sa longueur donnée a : comme cette force est oblique à AB, si nous la décomposons en deux autres AN et ND, cette dernière seule empêchera la pièce AB de tourner autour du point A, par l'effet des charges que cette pièce supporte; et il s'agit de trouver la plus grande valeur x de la force ND, évidemment dirigée de bas en haut, dans le sens vertical DN. Pour cela, prenons $AN = y$ et $AE = 1$; appliquons au point E la force m parallèle à la force x, de même sens et propre à la maintenir en équilibre autour de l'appui A, à l'aide de la droite inflexible EN, que nous supposerons parfaitement mobile autour de ce point : la résultante de ces deux forces devra donc passer par l'appui A et être détruite par la résistance de cet appui; ainsi on aura $m : x :: y : 1$, ou $xy = m$. On a d'ailleurs

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Dans ces équations, il est clair que quand m sera un maximum, x en sera un aussi, puisque ces deux forces se font équilibre. Or, les deux équations proposées donnent

$$x - y = \sqrt{a^2 - 2m}.$$

Donc le maximum de m, et conséquemment celui de x, répond à $2m = a^2$; d'où $x = y$, et l'angle $AMN = ANM = 45°$. Telle est donc la position que les ouvriers doivent donner à l'arc-boutant MN, pour que la pièce AB soit soutenue le mieux possible.

Des Momens.

32. On appelle *moment* d'une force par rapport à un point, le produit de cette force par la distance numérique de sa direction à ce point, nommé *centre* des momens. On appelle aussi *moment* d'une force par rapport à une droite ou par rapport à un plan, le produit de cette force par la distance numérique de son point d'application à cette droite ou à ce plan, nommés respectivement l'*axe* ou le *plan* des momens.

Cette seconde espèce de *moment* ne change pas lorsque la force varie de direction; et c'est en cela que ces momens diffèrent de ceux de la première espèce.

La théorie des momens conduit de la manière la plus simple à la composition des forces, et elle fait trouver entre ces forces, leur résultante et d'autres quantités, des relations propres à mettre en équations un grand nombre de problèmes de statique.

33. Cherchons d'abord le moment de la résultante R de deux forces quelconques P et Q, appliquées à un même point A. Représentons ces forces par les droites AB et AC, prises sur leurs directions, et achevons le parallélogramme ABDC : la diagonale AD sera la valeur et la direction de la résultante R (fig. 9). Soit O le centre des momens. De ce point, menons sur les forces P, Q, R, les perpendiculaires $OE = p'$, $OF = q'$ et $OG = r'$; joignons OA et OD : il est clair que le triangle OAD est la somme des trois OAB, OBD et ABD; conséquemment, en passant aux aires, et observant que *u*F est égale à la hauteur du triangle ABD, dont A est le sommet, on aura en doublant les deux membres, $Rr' = Pp' + Qq' \ldots (1)$.

Si le point O tombait entre les forces P et R, la distance p' serait seule mesurée en sens contraire, et prendrait le signe — dans l'égalité (1); on aurait donc alors $Rr' = Qq' - Pp'$, comme il est aisé de le vérifier directement. En général, si l'on regarde les forces P, Q, R, comme appliquées aux pieds des perpendiculaires p', q', r', abaissées de O sur leurs directions, la formule (1) s'appliquera à toutes les positions du point O, pourvu qu'on y donne le signe + aux momens des forces qui tendent à faire tourner leurs points d'applications dans un sens, et le signe — aux momens des forces qui tendent à faire tourner en sens contraire.

formule (3) ; on aurait donc alors $Rr' = Qq' - Pp'$, comme on le vérifierait d'ailleurs par la construction d'une nouvelle figure.

On voit que la formule (3) s'applique à tous les cas, pourvu qu'on y donne le signe — à chaque ligne ou à chaque force, dirigée en sens opposé à celui que nous avons considéré pour obtenir cette formule.

37. Maintenant, soient $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$, des forces parallèles dans l'espace ; soient $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n$, les distances de leurs points d'application au plan des momens MN. Ces points étant liés entre eux d'une manière invariable, soit R_2 la résultante des deux forces P_1, P_2 et r_2 la distance à MN de son point d'application ; soit R_3 la résultante des deux forces R_2, P_3 et r_3 la distance de son point d'application à MN, et ainsi de suite ; enfin, soit R_n la résultante du système et r_n la distance de son point d'application : d'après la formule (3), il est clair qu'on aura

$$
\begin{array}{ll}
R_2 = P_1 + P_2, & R_2 r_2 = P_1 d_1 + P_2 d_2 \\
R_3 = R_2 + P_3, & R_3 r_3 = R_2 r_2 + P_3 d_3 \\
R_4 = R_3 + P_4, & R_4 r_4 = R_3 r_3 + P_4 d_4 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
R_n = R_{n-1} + P_n, & R_n r_n = R_{n-1} r_{n-1} + P_n d_n.
\end{array}
$$

Ajoutant entre elles les équations de chaque colonne, et réduisant, on obtiendra

$$
\left.\begin{array}{l}
R_n = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n \\
R_n r_n = P_1 d_1 + P_2 d_2 + P_3 d_3 + \cdots + P_n d_n
\end{array}\right\} \cdots (4).
$$

Ainsi, 1° *la résultante de tant de forces parallèles qu'on voudra est égale à leur somme ;* 2° *le moment de la résultante, par rapport à un plan, est égal à la somme des momens des composantes, par rapport au même plan.*

Par *somme,* il faut entendre ici la somme algébrique des forces et des momens pris avec les signes qui leur appartiennent. Or, si l'on regarde comme positives les forces qui tirent dans un sens, il faudra regarder comme négatives les forces qui tirent en sens contraires (36). De même, si l'on donne le signe + aux distances des points d'application situées d'un côté du plan des momens MN, il faudra prendre avec le signe — les distances situées de l'autre côté.

38. La somme des momens des composantes est nulle, 1° lorsqu'il y a équilibre dans le système, car alors $R_n = 0$; 2° dès que

Les signes des forces résultantes X et Y sont déterminés par ceux des sinus et des cosinus des angles a_1, a_2, a_3, etc., mesurés dans le même sens et d'un même côté de OM, les forces proposées étant des nombres abstraits positifs. Soit α l'angle que la résultante R du système, et conséquemment des deux X et Y, fait avec la droite OM; il est clair que $X = R \sin \alpha$ et $Y = R \cos \alpha$; d'où

$$R^2 = X^2 + Y^2 \text{ et } \tang \alpha = \frac{X}{Y},$$

équations qui font connaître la grandeur et la direction de la résultante R.

36. Proposons-nous actuellement de trouver le moment de la résultante R de deux forces parallèles quelconques P et Q, par rapport à un plan MN. Supposons d'abord ces deux forces de même sens et d'un même côté du plan (fig. 10). Par les points d'application A et B des forces P et Q, menons la droite BA rencontrant le plan MN en O, et soit C le point d'application de la résultante R; nous aurons évidemment (23)

$$R = P + Q \text{ et } P \cdot AC = Q \cdot BC.$$

Des points A, B, C, menons sur le plan MN, les perpendiculaires $AA' = p'$, $BB' = q'$ et $CC' = r'$: ces perpendiculaires seront dans un même plan perpendiculaire au premier MN, et OB' sera l'intersection de ces deux plans. Les triangles équiangles OAA' et OCC', puis OCC' et OBB', donnent $r' : p' :: OC : OA$, puis $q' : r' :: OB : OC$; d'où $r' - p' : r' :: AC : OC$ et $q' - r' : r' :: BC : OC$. On a donc

$$AC = \frac{r' - p'}{r'} \times OC \text{ et } BC = \frac{q' - r'}{r'} \times OC.$$

Substituant ces valeurs dans $P \cdot AC = Q \cdot BC$, puis supprimant r' et transposant, il viendra d'abord $(r' - p') P \cdot OC = (q' - r') Q \cdot OC$, et ensuite

$$Rr' = Pp' + Qq' \ldots (3)$$

Si les deux forces P et R étaient dirigées chacune en sens opposé à celui que nous venons de considérer, il faudrait leur donner le signe — dans la formule (3), qui alors deviendrait $-Rr' = -Pp' + Qq'$, ou $Rr' = Pp' - Qq'$, formule exacte, comme on le vérifierait d'ailleurs, en répétant, sur la fig. 11, les raisonnemens et les calculs précédens. De même, si la force P tombait seule de l'autre côté du plan MN, la distance p' serait seule mesurée en sens contraire et prendrait le signe — dans la

34. Considérons maintenant plusieurs forces P_1, P_2, P_3, ..., P_n, agissant comme on voudra dans un même plan ; soient d_1, d_2, d_3, ..., d_n, les distances respectives du centre O des momens aux directions de ces forces ; soit R_2 la résultante des deux premières et r_2 la distance de O à la direction de R_2 ; soit R_3 la résultante des deux forces R_2 et P_3, ou des trois P_1, P_2, P_3, et r_3 sa distance au point O, et ainsi de suite ; enfin, soit R_n la résultante du système et r_n sa distance au point O : d'après la formule (1), il est clair qu'on aura

$$R_2 r_2 = P_1 d_1 + P_2 d_2$$
$$R_3 r_3 = R_2 r_2 + P_3 d_3$$
$$R_4 r_4 = R_3 r_3 + P_4 d_4$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$R_n r_n = R_{n-1} r_{n-1} + P_n d_n.$$

Ajoutant ces équations entre elles, et supprimant les termes communs aux deux membres, on trouvera

$$R_n r_n = P_1 d_1 + P_2 d_2 + P_3 d_3 + \cdots + P_n d_n \dots (2).$$

Ainsi *le moment de la résultante, par rapport à un point du plan des forces, est égal à la somme des momens des composantes, par rapport au même point.* Bien entendu que dans cette somme, il faudra regarder comme positifs les momens des forces qui tendent à faire tourner le système dans un sens, et comme négatifs les momens des forces qui tendent à faire tourner dans le sens contraire.

Il est clair que la somme des momens des composantes est nulle, 1° lorsque $R_n = 0$, c'est-à-dire lorsqu'il y a équilibre ; 2° quand $r_n = 0$, c'est-à-dire quand le centre des momens est sur la direction de la résultante.

35. Soient a_1, a_2, a_3, ..., a_n, les angles que les forces proposées P_1, P_2, P_3, ..., P_n, font avec une droite OM, tracée dans leur plan ; décomposons chacune de ces forces en deux, l'une perpendiculaire et l'autre parallèle à OM : nous aurons, pour les composantes perpendiculaires à OM, $P_1 \sin a_1$, $P_2 \sin a_2$, $P_3 \sin a_3$, ..., et pour les composantes parallèles à OM, $P_1 \cos a_1$, $P_2 \cos a_2$, $P_3 \cos a_3$, ... Soient donc X et Y les résultantes respectives des forces perpendiculaires et parallèles à OM, on aura (26)

$$X = P_1 \sin a_1 + P_2 \sin a_2 + P_3 \sin a_3 + \cdots + P_n \sin a_n,$$
$$Y = P_1 \cos a_1 + P_2 \cos a_2 + P_3 \cos a_3 + \cdots + P_n \cos a_n.$$

$r_n = 0$, ou que le point d'application de la résultante est dans le plan des momens.

Remarquons d'ailleurs que si tous les points d'application des composantes sont dans un même plan, celui de leur résultante sera aussi dans ce plan. Car en prenant ce même plan pour celui des momens, les distances d_1, d_2, d_3, ..., d_n, seront nulles ; donc on aura $R_n r_n = 0$, et par suite $r_n = 0$.

Lorsque tous les points d'application des composantes et de la résultante sont dans un même plan P ; si par un *axe* OX, tracé dans ce plan, on élève à celui-ci le plan perpendiculaire P′, il est évident que les perpendiculaires menées sur OX des points d'application, seront aussi perpendiculaires sur le plan P′ ; donc les momens des forces, par rapport à OX, seront les mêmes que par rapport à P′ ; c'est-à-dire que *le moment de la résultante, par rapport à* OX, *sera la somme algébrique des momens des composantes, par rapport au même axe.*

Supposons que les points d'application des forces parallèles proposées soient situés sur une même droite d, celui de leur résultante se trouvera aussi sur cette droite. Menant sur d un plan perpendiculaire P, qui la rencontre en O ; il est clair que les distances de O aux points d'application des forces, seront aussi les distances de ces points au plan P : donc les momens des forces, par rapport au centre O, seront les mêmes que par rapport au plan P ; conséquemment, *lorsque des forces parallèles ont leurs points d'application sur une même droite, le moment de la résultante, par rapport à un point de cette droite, est égal à la somme algébrique des momens des composantes, par rapport au même point.*

39. La théorie précédente conduit facilement à la composition des forces parallèles. En effet, connaissant les forces parallèles P_1, P_2, P_3, ..., P_n, et leurs points d'application dans l'espace, prenons trois plans perpendiculaires entre eux, se coupant suivant les trois droites rectangulaires AX, AY et AZ ; menons sur ces trois plans des perpendiculaires, à partir de chacun des points d'application des forces proposées et de celui inconnu de leur résultante R. Soient x_1, x_2, x_3, ..., x, les perpendiculaires parallèles à AX ; y_1, y_2, y_3, ..., y, celles parallèles à AY, et enfin z_1, z_2, z_3, ..., z, celles parallèles à AZ : nous aurons (37)

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n$$
$$Rx = P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + \cdots + P_nx_n$$

$$Ry = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + \cdots + P_n y_n$$
$$Rz = P_1 z_1 + P_2 z_2 + P_3 z_3 + \cdots + P_n z_n$$

La composition successive des forces parallèles ne donne évidemment qu'un seul point d'application à leur résultante; mais on ignore si, en suivant un autre ordre dans cette composition, on aurait encore le même point d'application. Or, les forces proposées restant les mêmes, ainsi que leurs points d'application, il est visible, par les équations précédentes, que la résultante R et les distances x, y, z, resteront respectivement les mêmes et n'auront qu'une valeur chacune. Si donc il pouvait y avoir plusieurs points d'application de la résultante R; en prenant sur les droites AX, AY, AZ, des longueurs respectivement égales aux distances calculées x, y, z, et menant par les points ainsi déterminés, des plans parallèles aux trois plans proposés; tous les points d'application de R, se trouveront à la fois sur les trois nouveaux plans; ils coïncideront donc avec le seul point commun à ces plans, et n'en feront qu'un seul, qui se trouve ainsi complétement déterminé.

Remarquons présentement que les valeurs des distances x, y, z, sont absolument indépendantes des angles que les forces parallèles font avec les trois plans rectangulaires proposés; d'où il est visible que le point d'application de la résultante R reste absolument le même, lorsque les forces, sans cesser d'être de mêmes grandeurs respectives, d'être parallèles entre elles et appliquées aux mêmes points, changent de direction à l'égard des trois plans. Ce point remarquable, par lequel passe constamment la résultante, quelle que soit la position des forces à l'égard du système de leurs points d'application, se nomme *centre des forces parallèles*. Ce point est unique dans le système; et on voit de plus, par les équations des momens, qu'il resterait encore le même, si les forces parallèles augmentaient ou diminuaient toutes dans un même rapport.

De la Pesanteur et des Centres de gravité.

40. On appelle *pesanteur* ou *gravité*, cette cause inconnue qui fait descendre tous les corps vers la terre, dès qu'ils sont abandonnés à eux-mêmes. La pesanteur est donc aussi une force, puisque c'est une cause de mouvement. Cette force pénètre les parties les plus intimes des corps physiques, et agit également

sur tous leurs points matériels. Car l'expérience prouve que dans un espace privé d'air, des corps quelconques, tels qu'une masse de plomb et le duvet le plus léger, tombent de la même hauteur et dans le même temps, c'est-à-dire avec la même vitesse finale; ce qui n'arriverait pas si la pesanteur, *qui est proportionnelle à la vitesse qu'elle imprime*, agissait inégalement sur les divers points matériels. Ainsi la pesanteur tire également toutes les molécules des différens corps, et aucune n'échappe à son action.

Cependant, l'intensité de la pesanteur n'est pas rigoureusement la même pour une même molécule placée dans deux lieux différens du globe terrestre : elle varie à la surface de la terre, depuis l'équateur où elle est la plus petite, jusqu'au pôle où elle est la plus grande : de plus, elle diminue à mesure que la molécule s'élève verticalement au-dessus de la surface du globe que nous habitons; et on a trouvé qu'elle décroît en raison inverse des carrés des distances au centre de ce globe. Mais les dimensions des corps que l'on considère en statique, étant toujours fort petites à l'égard du rayon de la terre, dont la moindre valeur est de plus de 1500 lieues, les variations de la pesanteur, pour les diverses parties d'un même corps, sont pour ainsi dire nulles, ainsi que nous le verrons dans la suite; et l'on doit regarder cette force comme constante dans toute l'étendue du corps.

41. La direction de la pesanteur est celle que prend le *fil-à-plomb* en équilibre; et on a vérifié qu'il est alors perpendiculaire à la surface des eaux tranquilles. Cette direction, dans le lieu où l'on se trouve, est nommée *verticale;* et tout plan qui lui est perpendiculaire, se nomme *plan horizontal.*

La surface de la terre, ou plutôt celle des mers non agitées, étant à peu près sphérique, les directions de la pesanteur vont à peu près concourir au centre du globe. Ainsi à mesure que l'on change de lieux sur la terre, la verticale change, aussi bien que le plan horizontal : mais les distances que l'on considère dans les corps en statique, sont toujours fort petites, et les angles que font les verticales menées des différens points de ces corps sont très-voisins de zéro; de sorte que ces verticales peuvent être regardées, sans erreur appréciable, comme parallèles entre elles : deux fils-à-plomb, placés à une distance peu considérable l'un de l'autre, ne manifestent aucune convergence aux mesures les plus précises, et sont par conséquent parallèles.

Ainsi désormais nous regarderons tous les points matériels des corps, comme sollicités par de petites forces égales, parallèles et de même sens, dues à la gravité; et nous pourrons appliquer aux forces qui proviennent de la pesanteur, tout ce que nous avons dit des forces parallèles, appliquées à un assemblage de points liés entre eux d'une manière invariable. D'abord nous en conclurons que *la résultante de toutes les forces de la pesanteur leur est parallèle, c'est-à-dire verticale;* et ensuite, qu'*elle est égale à leur somme.*

42. La valeur de cette résultante est ce qu'on nomme le *poids* du corps. Soit k la quantité de matière de chacune des molécules égales du corps, m le nombre de ces molécules et φ la force de la pesanteur qui sollicite chacune d'elles. Il est clair que la quantité de matière du corps proposé est mk : c'est ce qu'on appelle la *masse* du corps. Et comme le poids P de ce corps est la résultante des m forces parallèles φ qui sollicitent ses m molécules, il s'ensuit que $P = m\varphi$.

Pour un autre corps, de même nature ou non que le premier, dont les m' molécules peuvent toujours être supposées avoir chacune la même quantité k de matière que celles du premier, on aura de même $P' = m'\varphi$. Donc $P : P' :: m : m' :: mk : m'k$; c'est-à-dire que *les poids sont entre eux comme les masses.*

Il faut bien se garder de confondre les mots *pesanteur* et *poids*, qui expriment des idées fort différentes : la pesanteur est la cause qui attirent les corps vers la terre; c'est la petite force φ agissant sur chaque molécule : le poids est la somme de ces forces pour un corps; c'est l'effort qu'il faut faire pour soutenir le corps, et détruire la résultante de toutes les forces φ qui sollicitent les diverses molécules du même corps.

43. Nous avons vu (39) que les forces parallèles appliquées à différens points liés entre eux d'une manière invariable, ont un *centre*, c'est-à-dire un point unique par lequel passent continuellement les résultantes successives, lorsqu'on fait tourner toutes les forces parallèlement à elles-mêmes, avec leurs grandeurs primitives et en conservant les mêmes points d'application : donc, comme tout corps n'est qu'un assemblage de points matériels, plus ou moins rapprochés et dans des positions fixes les uns à l'égard des autres, il y a dans chaque corps pesant un point unique par lequel passe continuellement la direction du poids, lorsqu'on tourne le corps dans différentes positions à l'égard du plan horizontal. En effet, les forces de la pesanteur ne cessent

pas, dans toutes ces positions, de solliciter les mêmes points matériels et d'être parallèles ; par conséquent les résultantes successives de ces forces, ont toutes même grandeur et se coupent continuellement au même centre, qu'on appelle alors *centre de gravité* ou d'*inertie* du corps.

On voit que si le centre de gravité est fixe, ou s'il est soutenu par une force suffisante, le corps restera en équilibre autour de lui dans toutes ses positions. Si ce n'est pas le centre de gravité qui est fixe, mais un autre point faisant partie du corps solide, alors il est nécessaire, et il suffit pour l'équilibre, que ce point et le centre de gravité soient dans une même verticale ; car alors la direction du poids passera par le point fixe, où l'on peut le supposer appliqué (18). Dans ce cas, suivant que le centre de gravité est plus bas ou plus haut que le point fixe, le corps est *suspendu* ou *supporté*.

Dans la recherche de l'équilibre de plusieurs forces appliquées à un corps solide, on devrait avoir égard aux actions de la pesanteur sur les différens points matériels ; mais la question devient beaucoup plus simple, dès que l'on connaît le poids et le centre de gravité du corps ; car ce poids est une force verticale appliquée au centre de gravité, qu'il suffit de combiner avec les autres forces du système, pour trouver les conditions de l'équilibre ; et on pourra alors regarder tous les points matériels comme tout-à-fait dénués de pesanteur.

44. Le centre de gravité jouit de plusieurs autres propriétés remarquables, et il importe beaucoup de savoir le déterminer pour des corps de figures données. C'est à quoi l'on parvient, d'une manière expérimentale, pour un grand nombre de corps, par des droites successivement verticales, soit en suspendant le corps à plusieurs de ses points, soit en le plaçant en équilibre sur un plan horizontal, dans diverses positions. Mais on y parvient plus sûrement et souvent d'une manière plus simple, par le calcul, qui, lorsqu'on peut l'appliquer, a une rigueur d'exactitude que l'expérience seule n'atteint jamais. Voyons donc comment on applique le calcul à la détermination des centres de gravité.

D'abord on peut toujours regarder un corps comme un assemblage de points matériels qui sont eux-mêmes leurs propres centres de gravité ; ainsi la position du centre de gravité total dépend de la figure du corps et de la manière dont les molécules y sont distribuées. On conçoit en effet, que si la figure et le volume restant les mêmes, les molécules viennent à s'écarter les unes des autres dans une certaine partie du corps, de manière qu'elles se rapprochent davantage dans une autre, les forces qui agissent sur elles n'étant plus réparties de la même manière, la position de la résultante générale changera, et par conséquent celle du centre de gravité du corps. Ainsi dans la détermination de ce point, il faudrait avoir égard non-seulement à la figure du corps, mais encore à la loi suivant laquelle les molécules sont distribuées dans toute son étendue.

Il n'est guère possible d'assigner rigoureusement cette loi pour des corps de volumes très-considérables; mais heureusement, dans les corps de petites dimensions, tels que ceux qui composent les machines, on peut, sans erreur appréciable, supposer, comme nous le ferons désormais, que *dans chacun, il y a une infinité de points matériels égaux entre eux et distribués d'une manière uniforme dans toute son étendue.* Ces corps sont dits *homogènes* ou *uniformément denses;* leurs surfaces ont l'épaisseur et leurs lignes l'épaisseur et la largeur de chaque molécule élémentaire. De sorte que les lignes et les surfaces, en statique, sont pesantes et ont par conséquent des centres de gravité. C'est en cela qu'elles diffèrent des lignes et surfaces *géométriques;* et il est clair que deux droites statiques ne peuvent se couper qu'en un point matériel, et deux plans que suivant une droite matérielle.

45. Soient v et v' les volumes de deux corps uniformément denses et de même nature; m et m' les nombres de leurs molécules, P et P' leurs poids : on aura, comme on l'a vu (42), $P : P' :: m : m'$. Puisque les deux corps proposés sont de même nature et uniformément denses, il y a le même nombre n de molécules dans l'unité de volume de chacun; donc dans les v et v' unités, il y aura nv et nv' molécules; c'est-à-dire que $m = nv$ et $m' = nv'$; d'où $m : m' :: v : v'$. Par conséquent $P : P' :: v : v'$ et $P = P' \times \frac{v}{v'}$.

Si donc on prend pour *unité de poids,* celui P' de l'unité de volume v', il viendra, en sous-entendant ces deux unités, $P = v$; c'est-à-dire qu'alors *le poids du corps est représenté par son volume.*

On verrait de même que *le poids d'une surface est représenté par son aire, et le poids d'une ligne par sa longueur.*

D'après cela, les poids seront désormais des forces parallèles, appliquées aux centres de gravité, et représentés par les longueurs, les aires ou les volumes, suivant qu'il s'agira de lignes, de surface ou de corps.

46. Dans tout corps homogène, on appelle respectivement *densité* et *pesanteur spécifique,* la masse et le poids de l'unité de volume. De plus, en prenant pour unité la masse de chacun des points matériels égaux qui composent le corps proposé, sa masse sera le nombre M de tous ces points matériels. Désignant donc par P le poids et par v le volume total, par D la densité et Φ le poids spécifique; et enfin par g la *mesure de la gravité,* c'est-à-dire celle de chacune des forces égales de la pesanteur qui sollicitent les divers points matériels du corps proposé, on aura les relations
$$P = Mg, \quad P = \Phi v \quad \text{et} \quad M = Dv.$$

Prenant les momens par rapport à trois plans rectangulaires, tant du poids total P du corps que de ses points matériels, dont les poids sont tous égaux à g, on aura, pour déterminer la position du centre de gravité du corps proposé, trois équations dans lesquelles, à cause de $P = Mg$, la quantité g disparaîtra des deux membres.

Ces équations ne renfermant donc plus que des masses et des distances, on voit que la position du centre de gravité ne dépend nullement de la valeur particulière de la pesanteur, et reste conséquemment le même dans tous les lieux et à toutes les hauteurs, pour un même corps : en un mot, ce point ne dépend que des masses et de leurs positions respectives; et voilà pourquoi on le nomme aussi *centre d'inertie* du corps.

47. Principe. Voyons maintenant le principe d'après lequel on détermine les centres de gravité de tous les corps, ou plutôt de toutes les figures que la géométrie considère. Soit un corps de densité uniforme et *symétrique par rapport à un centre* O; c'est-à-dire ayant un point O tel, qu'il divise en deux parties égales toute droite menée par lui et terminée au contour de la figure : il est clair que toutes les molécules égales du corps, sont deux à deux à égales distances et de part et d'autre de O; ainsi O est le point d'application de la résultante des poids égaux de chaque couple de molécules (23); O est donc aussi celui de la résultante totale ou du poids du corps proposé (42); par conséquent O est le centre de gravité du même corps. De sorte que *le*

centre de gravité de toute figure symétrique par rapport à un point, coïncide avec ce point.

On verrait, d'une manière analogue, que le centre de gravité de toute figure symétrique par rapport à un axe ou à un plan, est situé sur cet axe ou ce plan.

Il suit de là que, 1° le centre de gravité d'une droite uniformément pesante est au milieu de sa longueur; 2° le centre de gravité du cercle ou de sa circonférence est au centre; 3° le centre de gravité de l'aire ou du contour ou des sommets d'un parallélogramme, est au milieu d'une diagonale; 4° celui d'un parallélipipède, ou de sa surface totale, ou de sa surface convexe, ou de ses douze arêtes, ou enfin de ses huit sommets, est au milieu d'une diagonale; 5° celui de la sphère ou de sa surface est au centre; 6° enfin, le centre de gravité d'un cylindre, ou de sa surface totale, ou de sa surface convexe, est au milieu de son axe.

48. Théorème. *Le centre de gravité du contour d'un triangle, est au centre du cercle inscrit dans le triangle joignant les milieux des côtés du proposé* (fig. 12).

Car les poids des trois côtés étant des forces parallèles appliquées à leurs milieux D, H, I, et représentées par les longueurs AB, BC, AC, la résultante des deux forces parallèles AB et BC, appliquées en D et H, passe par le point M, qui donne AB : BC :: MH : DM. La résultante des deux forces parallèles AB+BC et AC, appliquées en M et I, passe par un point de IM, lequel conséquemment est le centre de gravité du contour de ABC. Or, la proportion précédente fait voir que IM divise l'angle DIH en deux parties égales; ainsi le centre de gravité du contour proposé, se trouve à la fois sur les droites qui divisent en deux parties égales les angles du triangle DIH; il est par conséquent le centre du cercle inscrit dans ce triangle.

Remarque. Pour avoir le centre de gravité du contour d'un polygone, et en général, d'un assemblage de droites disposées comme on voudra dans l'espace, on observe que les poids de ces droites sont des forces parallèles, appliquées aux milieux de ces droites et proportionnelles à leurs longueurs, puis on procède à la composition successive de ces forces parallèles (26), ou bien l'on fait usage de la théorie des momens (38). Il est donc facile de trouver le centre de gravité du contour d'un quadrilatère.

49. Théorème. *Le centre de gravité de l'aire, ou du contour,*

ou des sommets d'un polygone régulier, est au centre de ce polygone. Car la droite d, qui passe par le centre et par le sommet d'un angle, divise en deux parties égales toute droite qui lui est perpendiculaire et terminée de part et d'autre au contour : donc (47) le centre de gravité de ce contour, ou de l'aire, ou des sommets, se trouve sur d. Ce centre de gravité est donc à la fois sur deux droites d et d' passant par deux sommets et le centre du polygone ; il coïncide par conséquent avec ce centre.

50. Théorème. *Le centre de gravité de l'aire d'un triangle est sur la droite menée du sommet au milieu de la base, au tiers de cette droite, à partir de la base, ou aux deux tiers, à partir du sommet* (fig. 13).

On peut toujours concevoir, en effet, le triangle ABC comme la somme d'une infinité de droites matérielles parallèles à la base BC ; et alors chacune sera divisée en deux parties égales par la droite AD qui joint le sommet A au milieu D de la base BC. Donc le centre de gravité du système de ces droites, et conséquemment de l'aire du triangle ABC, est sur AD. Par la même raison, ce centre est sur la droite BE qui joint le sommet B au milieu E du côté opposé AC ; il est par conséquent à l'intersection O des deux droites AD et BE. Or, DE est parallèle à AB et en vaut la moitié ; donc puisque les deux triangles AOB et DOE sont équiangles, on a $DO = \frac{1}{2}AO$; d'où $AD = \frac{3}{2}AO$, puis $AO = \frac{2}{3}AD$ et $DO = \frac{1}{3}AD$.

Corollaire. Il est aisé de voir que le centre de gravité des trois sommets, ou de trois masses égales, appliquées aux sommets d'un triangle, est le même que celui de l'aire de ce triangle. Ainsi, d'après la théorie des momens, on trouve que la distance du centre de gravité d'un triangle à un plan ou à une droite située dans le plan de ce triangle, vaut le tiers de la somme algébrique des distances de ses trois sommets au même plan ou à la même droite.

Corollaire II. Il est maintenant facile de trouver le centre de gravité d'un polygone, et en général, d'un assemblage de triangles. On cherchera les centres de gravité de ces triangles ; puis les poids des mêmes triangles étant des forces parallèles, appliquées à leurs centres de gravité et représentées par leurs aires, le point d'application de la résultante de toutes ces forces sera le centre de gravité demandé. On le trouvera donc ou par la composition successive des forces parallèles, ou par la théorie des momens.

Ainsi on verra, par exemple, que *le centre de gravité de la surface de tout tétraèdre, est le centre de la sphère inscrite dans le tétraèdre qui joint les centres de gravité des faces du proposé.*

51. Théorème. *Le centre de gravité d'un prisme quelconque, est le milieu de la droite qui joint les centres de gravité des deux bases.*

En effet, on peut toujours concevoir le prisme comme formé d'une infinité de *lames* élémentaires, parallèles et égales à la base b, et ayant toutes l'épaisseur infiniment petite de chacun des points matériels égaux qui composent la masse du prisme. Soit O′ le point où l'une l de ces lames est percée par la droite d qui joint les centres de gravité O et P des deux bases b et b'; soit A′B′ le côté de l égal et parallèle au côté AB de b : il est clair que les deux triangles OAB et O′A′B′ sont égaux, et qu'en faisant coïncider l et b, leurs centres de gravité coïncideront aussi, ainsi que O′ et O. Or, O est le centre de gravité de b; donc O′ est celui de l. Donc la droite d passe par les centres de gravité de toutes les lames élémentaires. Ainsi les poids égaux de ces lames sont des forces parallèles égales, de même sens, appliquées aux différens points de la droite d, et à égales distances, de part et d'autre du milieu de d; donc le centre de gravité du système de toutes ces lames, c'est-à-dire celui du prisme, est le milieu de la droite d.

52. Théorème. *Le centre de gravité de tout tétraèdre est sur la droite qui joint le sommet au centre de gravité de la base, au quart de cette droite, à partir de la base et aux trois quarts, à partir du sommet* (fig. 14).

Soit SABC le tétraèdre proposé et G le centre de gravité de sa base ABC; les droites CG et AG passent donc par les milieux I et E des côtés AB et BC (48). Concevant le tétraèdre formé d'une infinité de droites matérielles parallèles à AB et terminées de part et d'autre aux faces ASC, BSC; ces droites seront divisées chacune en deux parties égales par le plan SCI; donc les centres de gravité de toutes ces droites, et conséquemment celui du tétraèdre, seront dans ce plan. De même, le centre de gravité du tétraèdre est dans le plan SAE; il est donc sur l'intersection SG de ces deux plans. Par des raisons semblables, ce centre de gravité est sur la droite CH qui joint le sommet C au centre de gravité H de la face opposée SAB; il est par conséquent l'intersection O de ces deux droites, situées dans le plan SCI. Or, à cause de $IG = \frac{1}{3}IC$ et de $IH = \frac{1}{3}IS$, GH est parallèle à SC et en vaut le tiers ; les deux triangles GOH et SOC sont donc équiangles et donnent $OG = \frac{1}{3}OS$; d'où $SG = \frac{4}{3}OS$, puis $OS = \frac{3}{4}SG$ et $GO = \frac{1}{4}SG$.

Corollaire. Le centre de gravité des quatre sommets, c'est-à-dire de quatre masses égales appliquées aux quatre sommets d'un tétraèdre, est le même que celui de ce tétraèdre. D'où il suit que la distance du centre de gravité d'un tétraèdre, à un plan quelconque, vaut le quart de la somme algébrique des distances de ses quatre sommets au même plan.

Corollaire II. Pour avoir le centre de gravité d'un polyèdre quelconque, et en général, d'un assemblage de tétraèdres, on observera que les poids de ces tétraèdres sont des forces verticales, appliquées à leurs centres de gravité et représentées par leurs volumes ; puis on déterminera la position du centre de gravité du système, soit par la composition successive des forces parallèles, soit par la théorie des momens, comme dans le théorème que voici.

53. Théorème. *Le centre de gravité d'une pyramide polygonale uniformément dense, est sur la droite qui joint le sommet et le centre de gravité de la base, au quart de cette droite, à partir de la base et aux trois quarts, à partir du sommet.*

D'abord la pyramide proposée est la somme de tétraèdres, tous de même hauteur h qu'elle, et ayant respectivement pour bases les triangles a, b, c, d, etc., qui composent la base B de cette pyramide. Il est clair que les centres de gravité de ces tétraèdres sont tous situés sur le plan B', mené parallèlement à la base B, par le point O au quart, à partir de B, de la droite SG joignant le sommet S de la pyramide au centre de gravité G de sa base B ; car ce plan B' coupe proportionnellement SG et les droites qui joignent le sommet S aux centres de gravité des triangles a, b, c, d, etc. Donc le centre de gravité de la somme des tétraèdres, c'est-à-dire celui de la pyramide, est sur le plan B'.

D'un autre côté, les poids de la pyramide et des tétraèdres sont des forces parallèles, appliquées aux centres de gravité respectifs et représentées par les volumes. Prenant donc les momens par rapport à un plan SGN conduit suivant SG, désignant par m, u, v, x, y, etc., les distances à ce plan des centres de gravité de la pyramide et des tétraèdres qui la composent, il viendra, en supprimant le facteur $\frac{1}{3}h$ commun,

$$Bm = au + bv + cx + dy + \text{etc.} \dots (1).$$

Soient u', v', x', y', etc., les distances au plan SGN, des centres de gravité des triangles a, b, c, d, etc.; le point d'application G de la résultante B des forces parallèles a, b, c, d, etc., étant sur le plan SGN, la somme des momens de ces forces, par rapport à SGN, est nulle, et on a

$$au' + bv' + cx' + dy' + \text{etc.} = 0 \dots (2).$$

Or, les perpendiculaires u et u' à SGN, sont parallèles et dans un même plan avec la droite menée de S au centre de gravité de a; et il en résulte deux triangles équiangles, qui donnent $u = \frac{3}{4}u'$. De même, $v = \frac{3}{4}v'$, et ainsi des autres. Multipliant donc l'équation (2) par $\frac{3}{4}$ et substituant, on verra que le second membre de l'équation (1) est nul; donc $Bm = 0$, et par suite $m = 0$; c'est-à-dire que le centre de gravité de la pyramide proposée est sur le plan SGN. Par la même raison, ce centre de gravité est sur un autre plan conduit par SG; il est par conséquent sur l'intersection SG de ces plans. Déjà il se trouve sur le plan B'; il est donc à l'intersection O de ce plan avec SG. Donc puisque $GO = \frac{1}{4}SG$, par construction, il en résulte le théorème énoncé d'abord.

Corollaire. Tout cône droit ou oblique, à base circulaire ou non, n'étant au fond qu'une pyramide d'une infinité de faces latérales, on voit que le centre de gravité de tout cône est sur la droite qui joint le sommet au centre de gravité de la base, au quart de cette droite, à partir de la base.

Corollaire II. *La droite* SG *menée du sommet d'une pyramide au centre de gravité de sa base, passe par le centre de gravité de toute section* P, *parallèle à cette base.* D'abord la section P coupe les tétraèdres qui composent la pyramide, suivant les triangles a', b', c', d', ..., respectivement semblables aux bases a, b, c, d, ... Soit G' le point où la droite SG perce la section P, et soient u, v, x, y, ..., m, les perpendiculaires abaissées sur le plan SGN des centres de gravité de a', b', c', d', ..., P; on aura, en prenant les momens par rapport au plan SGN,

$$Pm = a'u + b'v + c'x + d'y + \text{etc.} \dots (3).$$

Or, il est facile de voir que la droite SK menée du sommet d'un tétraèdre au centre de gravité K de sa base a, passe par le centre de gravité K' de la section a' parallèle à cette base (52); donc les perpendiculaires u et u' à SGN, sont parallèles et dans un même plan avec SK; et il en résulte deux triangles équiangles, donnant $u' : u :: SK : SK' :: SG : SG'$. De sorte qu'en faisant $SG = r \cdot SG'$, on aura $u' = ru$. On aura de même $v' = rv$, $x' = rx$, $y' = ry$, etc. D'ailleurs, les triangles a, b, c,

d, etc., qui composent B, étant proportionnels aux triangles a', b', c', d', etc., qui composent P; en désignant par r' le rapport commun, on aura $a = a'r'$, $b = b'r'$, $c = c'r'$, $d = d'r'$, etc. Multipliant donc l'équation (3) par rr', et substituant, il viendra

$$Pmrr' = au' + bv' + cx' + dy' + \text{etc.} = 0.$$

Or, P, r, r', n'étant pas nuls, il faut qu'on ait $m = 0$; de sorte que le centre de gravité de P se trouve sur le plan SGN, et par la même raison, sur un autre plan conduit suivant SG; donc il est sur la droite SG, au point G'.

Remarque. Il est clair que le point G' est homologue à G. Et comme on peut toujours couper la pyramide par un plan parallèle à la base B, de manière que la section soit égale à un polygone P, semblable à cette base, il en résulte que *les centres de gravité de deux polygones semblables* B *et* P, *sont deux points homologues ou semblablement placés sur ces polygones.*

En général, si l'on observe que dans deux figures semblables, planes ou solides, les élémens homologues sont proportionnels, on verra que dans deux figures semblables, terminées par des droites ou des plans, des lignes ou des surfaces courbes, les centres de gravité des sommets, des périmètres, des surfaces, ou des volumes, sont chaque fois deux points homologues ou semblablement placés dans ces deux figures.

54. Théorèmes. Voici encore plusieurs théorèmes, faciles à démontrer sur les centres de gravité, d'après la théorie des momens :

I. *Le centre de gravité d'un arc* a *de cercle, est sur le rayon qui passe par le milieu de cet arc et à une distance du centre, quatrième proportionnelle à la longueur de cet arc, à sa corde et au rayon.* D'abord ce centre de gravité est sur le rayon mené au milieu de a (47). De plus, il est aisé de voir que le moment de chaque élément de l'arc, par rapport au diamètre parallèle à la corde c, est égal au rayon r multiplié par la projection de cet élément sur cette corde; donc la somme des momens de tous les élémens, c'est-à-dire celui ax de l'arc entier, est égal à rc; d'où $a : c :: r : x$.

II. *Le centre de gravité de l'aire d'un secteur circulaire, est sur le rayon mené au milieu de l'arc, à une distance du centre, quatrième proportionnelle à l'arc, à sa corde et aux deux tiers du rayon* r. Car le secteur proposé est composé d'une infinité de triangles isocèles égaux, infiniment petits, dont les poids chargent également et uniformément l'arc a', semblable au proposé a, et dont le rayon est les deux tiers du proposé r : donc le centre de gravité du secteur est le même que celui de l'arc a'.

Corollaire. Le centre de gravité d'un segment circulaire s, dont r est le rayon et c la corde, est sur le rayon mené au milieu de l'arc, à une distance x du centre, telle qu'on a $12sx = c^3$.

III. Le centre de gravité de l'aire d'un trapèze est sur la droite d qui joint les milieux des deux bases a et b, et divise cette droite en deux parties a' et b', adjacentes à a et à b, telles qu'on a $a' : b' :: a + 2b : 2a + b$.

IV. Le centre de gravité de tout tronc de pyramide, à bases parallèles a^2 et b^2, est sur la droite d qui joint les centres de gravité des deux bases, et divise cette droite en deux parties a' et b', adjacentes aux bases a^2 et b^2, de manière qu'on a

$$a' : b' :: a^2 + 2ab + 3b^2 : 3a^2 + 2ab + b^2.$$

Ce théorème s'applique au cône tronqué, à bases parallèles.

V. *Le centre de gravité de toute zône sphérique, est au milieu de la droite* d *qui joint les centres des deux bases.* Car la zône proposée est la somme d'une infinité de zônes équivalentes, de hauteurs égales infiniment petites, dont les poids chargent la droite d également et uniformément. (Le même théorème s'applique à la calotte sphérique.)

VI. *Le centre de gravité de tout secteur sphérique, est sur le rayon qui passe par le centre de la base de la zône sur laquelle il s'appuie, et à une distance du centre de la sphère, égale aux trois quarts du rayon, moins les trois huitièmes de la hauteur de la zône.* Il est clair, en effet, que le secteur sphérique proposé est la somme d'une infinité de tétraèdres, infiniment petits et équivalens, dont les poids égaux sont distribués uniformément sur une zône concentrique à celle du secteur et dont le rayon est les 3 quarts de celui de la sphère : donc le centre de gravité du secteur est le même que celui de la nouvelle zône, et se trouve par le théorème V.

Remarque. D'après la théorie des momens, on trouve aisément la position du centre de gravité d'un segment ou d'une tranche sphérique. On verrait aussi que le centre de gravité de la surface convexe d'une pyramide régulière ou d'un cône droit, est au tiers de l'axe, à partir de la base.

Application de la Théorie des Centres de gravité.

55. Tout corps pesant ayant sa base plane en contact avec un plan horizontal, sur lequel il peut glisser librement d'ailleurs, demeure en équilibre, dès que la direction verticale de son poids passe dans l'intérieur de la base. Car ce poids pouvant être regardé comme appliqué au point de sa direction qui se trouve en contact avec le plan horizontal (18), sera nécessairement détruit par la résistance de ce plan, puisqu'il n'y a pas de raison pour que le nouveau point d'application se meuve d'un côté plutôt que de l'autre sur le plan. Mais si la direction du poids tombait hors de la base ; en regardant ce poids comme appliqué au point de la surface du corps qui se trouve sur sa direction, rien n'empêcherait ce point de se rapprocher du plan ; et le corps culbuterait.

On voit donc qu'*un corps pesant ne saurait demeurer en équilibre sur un plan horizontal, abstraction faite du frottement, que quand la verticale abaissée du centre de gravité, tombe dans l'intérieur de la base en contact avec le plan*. Plus la base est petite, plus cette condition est difficile à remplir : de là l'impossibilité de faire tenir une canne debout.

56. *Lorsque le corps en équilibre sur un plan horizontal, ne le touche pas suivant une surface continue, mais seulement en plusieurs points isolés, tels que ceux des pieds d'une table, la direction du poids du corps tombe nécessairement dans l'intérieur du polygone ayant pour sommets les points d'appuis*. Car il est clair que le poids appliqué au centre de gravité, se décompose en plusieurs forces obliques au plan et transmises à ces points d'appuis, par l'intermédiaire des parties solides du corps. Chacune de ces forces obliques se décompose elle-même en deux autres, l'une dirigée dans le plan et l'autre perpendiculaire et détruite par la résistance du plan. Les forces perpendiculaires au plan sont les seules qui le pressent ; et la somme de ces pressions étant évidemment égale au poids du corps, ce poids est la résultante de toutes les forces perpendiculaires. Or, la résultante de plusieurs forces parallèles, passe évidemment dans l'intérieur du polygone que forment les points d'application de ces forces (26) ; donc enfin la direction du poids du corps tombe dans l'intérieur du polygone formé par ses points d'appuis.

Remarquons bien qu'il ne peut y avoir équilibre que dans ce cas ; puisque si la direction verticale du poids tombait hors du polygone, ce poids ne serait pas la résultante des pressions qui ont lieu aux appuis ; et il n'y aurait qu'une partie du poids qui serait détruite par la résistance du plan ; donc l'autre partie obtiendrait tout son effet, suivant la verticale, et le corps tomberait.

57. *Ces principes s'appliquent à l'équilibre du corps humain.* Dans l'homme, le centre de gravité est très-près de l'axe transversal mené par les deux hanches, du moins lorsque les jambes sont maintenues parallèles dans le prolongement du corps, et les bras appliqués sur les côtés. Or, à cause de la disposition symétrique des membres, le centre de gravité se trouve aussi dans l'axe longitudinal du corps ; il est donc placé à peu près au milieu du corps, entre les deux hanches. Un homme qui se tient droit sur un plan horizontal, ne peut donc être supporté

qu'autant que le centre de gravité se trouve verticalement au-dessus de l'espace quadrangulaire que les contours des pieds embrassent sur le sol : s'il se tient verticalement, son équilibre sera d'autant plus assuré, que ses pieds détermineront une plus grande base ; et on peut, *la longueur des pieds étant donnée, ainsi que l'écart des deux talons, trouver la position que doivent avoir les deux pieds, pour que cette base soit la plus grande possible.*

Lorsqu'on se fend, dans l'escrime, en portant un pied devant l'autre, la stabilité est très-grande dans le sens de ce mouvement, à cause de la grande longueur sur laquelle le corps peut osciller sans cesser d'être soutenu par le sol ; mais elle est beaucoup moindre dans le sens latéral, parce que le triangle ayant son sommet au pied d'avant et sa base au pied d'arrière, est très-étroit. Tous les mouvemens si gracieux des patineurs ont également pour but et pour effet de maintenir le centre de gravité du corps dans la verticale qui passe par le tranchant du patin posé à chaque instant sur la glace.

Un homme ne peut se pencher en avant, se baisser, sans porter en même temps en arrière une autre partie de son corps, et ramener ainsi la verticale dans la base. Lorsque ses pieds sont à côté l'un de l'autre en se touchant, il a très-peu de stabilité latérale, laquelle est à son minimum, lorsque les pieds sont l'un devant l'autre et leurs axes en ligne droite ; car alors, au moindre mouvement, la verticale sort de cette petite base. Cependant les danseurs de corde prennent l'habitude de se tenir solidement dans cette position.

Une personne assise a son centre de gravité verticalement placé au-dessus du siége ; pour se relever, elle doit donc rapprocher ses pieds du siége et se pencher en avant, afin de ramener la verticale dans la base formée par les pieds. Un homme qui porte un fardeau au moyen d'une *hotte*, est obligé de se pencher en avant, parce que le fardeau et lui forment un seul système, dont le centre de gravité tomberait hors de sa base, s'il se tenait verticalement. Par la même raison, il doit se pencher en arrière, lorsqu'il porte un fardeau dans ses bras.

Les divers mouvemens qu'on fait naturellement avec les bras pour se soutenir lorsqu'on trébuche ou que l'on glisse, n'ont d'autre but que de ramener la direction verticale du poids du corps à passer par la base que forment les pieds. C'est aussi pour cela que les funambules tiennent une longue perche (balancier) entre les mains, pendant leurs jeux, ou font avec les bras divers mouvemens. On voit aussi pourquoi un homme qui tire un corps très-pesant, au moyen d'une corde, donne à son corps une position inclinée, et pourquoi il tombe dès que la corde vient à casser.

Les dessinateurs et les peintres doivent avoir égard aux principes précédens, dans la pose qu'ils donnent à leurs personnages; sans quoi leurs tableaux manqueraient de vérité, et produiraient un effet désagréable, quel que fût d'ailleurs le mérite de ces ouvrages.

58. Lorsque l'homme est en marche, le poids de son corps soutenu par le pied immobile, lui fait porter alternativement le centre de gravité au-dessus de l'un et l'autre pied; ce centre est donc successivement le plus haut et le plus bas possible; et il en résulte en outre, dans le haut du corps, un balancement sensible, qui devient une cause de gêne pour deux personnes marchant l'une à côté de l'autre, mais d'un pas différent; car alors tantôt le haut du corps des deux individus s'éloigne, tantôt il se rapproche; ce qui produit des coudoiemens désagréables et fatiguans. Lorsqu'on veut faire marcher de front un assez grand nombre d'hommes, ce coudoiement produit un effet encore plus fâcheux, et le frottement qui en résulte occasionne la perte de l'alignement et la désunion dans la ligne : c'est pour éviter cet inconvénient que dans l'état militaire, on exige que les soldats marchent du même pas, comme c'est pour alléger leur marche qu'on leur apprend à porter tout le poids du corps sur le pied immobile. Ces deux principes bien observés, peuvent mettre la troupe en état de faire, sans beaucoup de fatigue, des marches considérables. Aussi remarque-t-on que les vieux soldats, accoutumés dès long-temps à prendre dans les rangs la position la plus favorable à la marche en ligne, supportent plus long-temps, malgré souvent des blessures et des infirmités, la fatigue des routes, que de jeunes soldats pleins de force et de vigueur, mais encore peu exercés.

59. La théorie des centres de gravité est d'une haute importance dans l'art des constructions : elle reparaît toutes les fois qu'on doit s'occuper de la stabilité d'un édifice, laquelle est à son maximum, lorsque le centre de gravité du système est placé verticalement au-dessus du centre de la base. Aussi tout architecte intelligent, prend-t-il les précautions nécessaires pour que

cette condition soit remplie. On croit que les tours de Pise et de Bologne, qui sont inclinées à l'horizon et semblent menacer les passans de leur chute, ont été construites exprès de cette manière, et que dans chacune d'elles l'architecte a tellement ménagé la disposition des parties, que la verticale menée du centre de gravité, passe par le centre de la base.

Connaissant la forme et l'étendue d'un toit, on peut déterminer le poids et le centre de gravité d'une portion plane de ce toit, en le supposant seulement composé de lattes et d'ardoises, ou tuiles : or cette surface devant être supportée par un certain nombre de chevrons, on pourra répartir le poids en autant de forces égales, qui indiqueront l'effort dont chaque chevron doit être capable. Ceux-ci sont soutenus par des pièces horizontales, qu'on appelle panne et dont le nombre est donné : on pourra donc aussi déterminer l'effort que chaque panne doit être capable de supporter à l'endroit où elle soutient un chevron. De pièce en pièce on trouvera ainsi la résistance dont chaque partie d'une charpente doit être capable, tant dans le sens longitudinal que dans le sens transversal; en sorte que d'après des règles, fournies par l'expérience et le calcul, sur la résistance des bois, on pourra déterminer les dimensions d'équarrissage de chaque pièce. De cette manière on n'est point exposé à augmenter inutilement ces dimensions, ce qui augmente considérablement les dépenses et a en outre l'inconvénient de charger les murs de l'édifice d'un poids dangereux, et dont on n'évite l'effet qu'en donnant à ces murs de fortes épaisseurs, qui augmentent encore les dépenses et nuisent à la beauté et à l'élégance du système (*).

C'est ainsi que la géométrie et la mécanique fournissent aux arts des moyens de solidité, d'exactitude et d'économie. On démontre aisément d'ailleurs, 1° que *les toits les plus raides ou les plus élevés font moins d'effort pour écarter les plates-formes ou sablières que les toits plus surbaissés, lorsque la projection horizontale est la même pour tous ces toits*; 2° que *la charge totale d'un toit ou l'effort total que les chevrons souffrent, par le poids des tuiles dont ils sont couverts, est toujours la même, quelque surmonté ou surbaissé que soit ce toit.*

60. Les centres de gravité jouissent encore de plusieurs pro-

(*) Cet exemple et celui du précédent numéro, se trouvent, à peu de changemens près, dans les *Leçons de Mécanique* de M. *Dandelin*, ouvrage que nous avons souvent consulté.

priétés remarquables, qu'il est bon de connaître. La suivante est d'un usage fréquent dans la recherche des conditions d'équilibre et présente plusieurs applications importantes :

Lorsqu'un corps ou système solide est en équilibre, son centre de gravité est toujours le plus bas ou le plus haut possible. On conçoit en effet, que si le centre de gravité n'était pas aussi bas ou aussi haut que le permet le système, rien n'empêcherait ce centre de descendre ou de monter encore, et il n'y aurait pas équilibre.

C'est en vertu de ce principe qu'une sphère, un cylindre droit, de densité uniforme, reste en équilibre sur un plan horizontal, dans toutes les positions qu'on veut lui donner; car dans chaque position, le centre de gravité est à la même distance du plan et ne saurait descendre. Et il en est de même du cône droit.

61. On vérifie d'ailleurs complétement la propriété précédente, en *cherchant les conditions de l'équilibre d'une porte dont les gonds sont parfaitement mobiles sur deux points fixes d'une droite inclinée à l'horison.* Supposons que cette porte, de forme rectangulaire, occupe, lorsqu'elle est fermée, la position verticale ABCD (fig. 15), le point D désignant le goud supérieur, et le point O, sur le prolongement de l'horizontale BA, désignant le gond inférieur. Dans cette position, la porte est nécessairement en équilibre; car son poids P, appliqué au centre de gravité G, et dont la direction verticale est située dans le plan ABC, se décompose en deux forces dirigées vers D et vers A : la première est détruite par la résistance du point fixe D, et la seconde est aussi détruite; car pouvant la considérer comme appliquée en A, elle se décompose elle-même en deux autres, l'une suivant le prolongement de DA, détruite par le point D, et l'autre suivant la droite solide AO et pareillement détruite par la résistance du point O.

On verrait d'une manière absolument semblable, que la porte est aussi en équilibre dans la position verticale A''B''C''D, prolongement de BADC. Mais dans toutes les autres positions intermédiaires, la porte, abandonnée à elle-même, se meut pour aller se fixer dans la position ABCD; c'est-à-dire que la porte se ferme d'elle-même. En effet, considérons la position A'B'C'D, dans laquelle la porte fait avec l'horizon un coin aigu vers AB : il est clair que la direction verticale du poids P, appliqué au centre de gravité G', tombe dans l'intérieur de ce coin; et qu'on peut décomposer ce poids en trois forces, deux dirigées suivant G′D et G′A′, et détruites; la troisième perpendiculaire au plan A′B′C′ et dirigée de G′ vers le plan ABC. Cette dernière force n'étant pas nulle, produira tout son effet et ramènera la porte dans la position verticale ABCD, où cette force sera alors égale à zéro.

Maintenant, soit I le milieu de DO; la droite IG est horizontale; et à cause de l'angle aigu DIG, cette droite, dans le mouvement de la porte autour de DO, décrit la surface convexe d'un cône, ayant I pour sommet et son axe dirigé suivant ID. Et si par IG on menait un plan horizontal, la surface convexe proposée toucherait ce plan suivant la génératrice IG; toutes les autres génératrices seraient donc au-dessus de ce plan, et le point G″ en serait le plus éloigné. D'où l'on voit que dans les deux seules positions d'équilibre de la porte, son centre de gravité en G ou en G″ est le plus bas ou le plus haut possible, à l'égard du plan horizontal conduit par AB.

62. Suivant que le centre de gravité est le plus bas ou le plus haut possible, l'équilibre est dit *stable* ou *instantanée*. Dans le premier cas, si le corps est dérangé de sa position, il tend toujours à y revenir et la reprend en effet, après quelques oscillations de part et d'autre, bientôt détruites par les frottemens et la résistance de l'air; tandis que dans le second, le corps tombera au moindre choc et ne reviendra jamais de lui-même à sa première position, parce qu'il faudrait que son centre de gravité remontât; ce qui ne peut avoir lieu que par l'effet d'une nouvelle force dirigée de bas en haut.

On voit qu'un corps a d'autant plus d'aplomb, que son centre de gravité est plus près de sa base; c'est pour cela que les cônes et les pyramides sont beaucoup plus solides sur leurs bases, que les colonnes et les prismes élevés verticalement.

63. La propriété que nous venons d'établir (61), conduit à reconnaître que *toutes les fois qu'on soulève le centre de gravité d'un corps, on emploie une force dont la grandeur est proportionnelle à la masse du corps et à l'élévation de son centre de gravité*. C'est ce que nous démontrerons d'ailleurs, quand nous apprécierons le *travail mécanique des forces*; mais on voit pourquoi les voitures exigent plus de forces d'attelage pour rouler sur un pavé raboteux que sur un pavé uni, l'un et l'autre étant horizontal : c'est que dans le premier cas, chaque fois que les roues passent sur un obstacle, elles élèvent le centre de gravité

total du fardeau. Ainsi la dépense de force pour produire cet effet augmente avec le poids et la hauteur.

A cette occasion, nous ferons remarquer que *pour maintenir en équilibre et en contact, une roue chargée, contre un obstacle au-dessus de l'horizon, la plus petite force possible doit être parallèle au plan tangent à la roue, au point où celle-ci est soutenue par l'obstacle.* Et l'on voit ainsi pourquoi les traits des chevaux attelés à une voiture, sont ordinairement parallèles au plan sur lequel cette voiture est placée.

64. Une autre propriété singulière des centres de gravité, et qui peut avoir des applications, c'est que *quand le centre de gravité d'un corps peut se mouvoir sur un plan, en obéissant à la pesanteur; il suit toujours le chemin par lequel il descend le plus vite.* Ceci explique pourquoi une sphère placée sur un plan incliné descend toujours en suivant une direction telle, que le centre ne sort pas du plan vertical perpendiculaire au plan incliné.

65. Tous les corps étant pesants, on rencontre partout l'occasion d'appliquer la théorie des centres de gravité, dont par suite les usages sont nombreux et importans : elle sert même à déterminer, de la manière la plus simple, la mesure des surfaces et des volumes de certains corps, comme nous l'avons fait voir en géométrie. Mais voici encore d'autres curieuses applications, qui se lient plus immédiatement aux usages de la science de l'équilibre.

I. *Un cylindre droit de densité uniforme et du poids de 6 livres, est maintenu en équilibre sur un appui, par deux poids appliqués à ses bases et aux distances respectives de 8 et 12 palmes du point d'appui. Quelle est la valeur du second poids, le premier étant de 30 livres?* Réponse : 19 livres.

II. *Lorsque deux hommes soutiennent les extrémités d'un cylindre droit de densité uniforme, dont la longueur et le poids sont 20 palmes et 10 livres, et transportent ainsi deux poids, l'un de 30 et l'autre de 36 livres, appliqués respectivement à 8 et à 15 palmes de la première extrémité;* on trouve que les charges respectives de ces deux hommes, sont 32 et 44 livres.

III. *Un cylindre droit et homogène, dont l'unité de longueur pèse ½ livre, peut tourner librement autour d'un appui à l'une de ses extrémités. Un poids de 48 livres, à 3 palmes de cet appui, doit être soutenu en équilibre, par une puissance appliquée à l'autre extrémité du cylindre; quelle doit être la longueur de celui-ci, pour que la puissance soit la moindre possible?* D'abord quelle que soit la longueur cherchée x, la puissance ne peut être un minimum dans le cas d'équilibre, que quand elle agit perpendiculairement au cylindre et dans un plan vertical, et alors on trouve, pour la longueur x qui répond au minimum de la puissance P, dans toutes les positions du cylindre, $x=2P$. Et suivant que le cylindre est horizontal, ou incliné de 45°, le minimum P vaut 12 livres, ou $6\sqrt{2}$ livres; d'où $x=24$ palmes, ou $12\sqrt{2}$ palmes.

IV. Pour faciliter leur besogne et marcher plus commodément, les porteurs d'eau emploient quelquefois une espèce de *joug*, placé sur leurs épaules, et deux cordes égales, attachées à ses extrémités, ces cordes supportant un anneau rond et deux seaux, placés aux extrémités d'un diamètre. De cette manière, la charge totale est plus grande, mais la fatigue est beaucoup moindre. Pour apprécier l'équilibre de ce système, supposons que le joug pèse 6 livres et ait une longueur de 4 palmes; que les cordes, longues chacune de 10 palmes, pèsent 1 livre chacune; que l'anneau rond pesant 4 livres, ait 16 palmes de diamètre ou plutôt son axe; et qu'enfin chaque seau pèse 20 livres. Dans ce cas, on trouve que le porteur d'eau soutient un poids de 52 livres, que la pression horizontale sur l'anneau équivaut à 15 livres $\frac{3}{8}$, et enfin, que les cordes sont tendues avec une force de 25 livres $\frac{5}{8}$.

V. *Un cylindre droit et homogène peut tourner librement autour d'un appui, à 4 palmes de l'extrémité à laquelle est suspendu un poids de* 11 *livres; quelle doit être la longueur de ce cylindre, dont chaque palme de longueur pèse* 1 *livre, pour qu'il y ait équilibre dans le système?* Réponse : 12 ou — 10 palmes. On peut interpréter la valeur négative.

VI. La moindre force nécessaire pour contrebalancer le poids P d'une pyramide régulière homogène et la mettre sur le point de culbuter autour d'une arête de la base horizontale, doit être appliquée au sommet de cette pyramide, perpendiculairement à l'apothème qui répond à cette arête et dans le plan vertical qui joint le même apothème au centre de gravité du corps. De sorte qu'étant donnés le poids et les dimensions de la pyramide, on pourra calculer la valeur de cette moindre force.

66. Théorème. *Si tous les points matériels d'un corps solide homogène, sont attirés par un centre avec des forces proportionnelles aux distances de ce centre* O *à leurs points d'application; la résultante de toutes les forces attractives sera appliquée au centre de gravité* G *du corps et vaudra la droite* OG *prise autant de fois qu'il y a de points matériels.*

Par le centre O menons trois plans perpendiculaires entre eux, se coupant suivant les trois droites rectangulaires OX, OY et OZ. Décomposons chacune des forces proposées en trois autres respectivement perpendiculaires aux trois plans. Soient $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ les composantes parallèles à OX; $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ celles parallèles à OY, et $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ celles parallèles à OZ. Les résultantes respectivement parallèles aux trois droites rectangulaires, étant désignées par X, Y, Z, il est clair qu'on aura

$$X = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$$
$$Y = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n$$
$$Z = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n.$$

Soient x, y, z les distances des trois plans au centre de gravité G du corps : les momens par rapport à ces plans des n forces φ dues à la pesanteur et appliquées aux n points matériels, donneront évidemment

$$nx = X, \quad ny = Y \text{ et } nz = Z.$$

Soit donc R la résultante de toutes les forces attractives exercées par le point O : d'après le parallélipipède des forces rectangulaires (30), il viendra

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = n^2(x^2 + y^2 + z^2) = n^2 \cdot OG^2;$$

d'où $R = n \cdot OG$. Ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. Donc pour qu'il y ait équilibre dans le système, il faut que $R = 0$, d'où $OG = 0$, c'est-à-dire il faut que le centre O d'attraction coïncide avec le centre de gravité G du corps. Et comme le centre de gravité d'un triangle ou tétraèdre est le même que celui de trois ou quatre points matériels égaux, placés aux sommets (50 et 52), on voit que *quand trois ou quatre forces sont en équilibre sur un point, ce point est le centre de gravité du triangle ou tétraèdre ayant ses sommets aux extrémités des droites qui représentent ces forces en grandeurs et en directions.* (*La réciproque est vraie.*)

En général, si tous les points matériels d'un corps homogène sont attirés vers un point O, par des forces proportionnelles à leurs distances à ce point, et qu'il y ait équilibre, ce point O sera le centre de gravité du systême. Car alors $OG = 0$. Réciproquement, si le point O est le centre de gravité, il y aura équilibre; puisqu'alors on aura $R = 0$.

Toutes les molécules de la terre (abstraction faite des mouvemens volcaniques ou autres) sont en équilibre autour de son centre O. Si donc on regardait la terre comme homogène, ou seulement composée de couches concentriques homogènes, on serait porté à en conclure que *tous les points matériels intérieurs pèsent vers le centre, en raison des simples distances*; et c'est d'ailleurs ce qu'on démontre directement.

Remarque. Si le point attractif O est le centre de la terre, et que le corps attiré soit peu considérable; tous ces points seront également éloignés de O, puisque la plus grande différence de ces distances est comme infiniment petite ou nulle à l'égard du rayon terrestre; donc tous les points matériels du corps seront également attirés par le point O. Et puisque le point d'application de la résultante de toutes ces attractions coïncide avec le centre de gravité G, c'est-à-dire avec le point d'application de la résultante des actions de la pesanteur, lorsqu'on les suppose parallèles entre elles; on voit que la position du centre de gravité ne dépend nullement du parallélisme des forces de la pesanteur, mais bien de ce que ces forces sont égales, et conséquemment *proportionnelles aux* *distances du centre O de la terre aux points matériels d'un corps de petites dimensions.*

Effectivement, dans cette dernière hypothèse, et d'après le parallélogramme des forces, on trouve que *le poids d'une droite homogène est proportionnel à sa longueur et appliqué à son milieu;* que *le poids d'un triangle homogène est proportionnel à son aire et appliqué à l'intersection des droites joignant les sommets aux milieux des côtés opposés; ainsi des autres.* L'hypothèse du parallélisme détermine donc exactement le centre de gravité; et il est clair qu'elle simplifie la recherche de ce point important.

67. PROBLÈME. *Trouver la position que prend l'espèce de lit appelé pliant, quand il est chargé d'un poids connu.*

Soit ABOCD la section verticale du lit, reposant sur le plan horizontal AB (fig. 16). Considérons CMD comme une corde portant le poids donné P, appliqué au milieu M. Les règles AD et BC, dans lesquelles $AO = OB = a$ et $OC = OD = b$, peuvent tourner librement autour de l'axe qui passe par leur point commun O; elles prendront donc, par l'effort du poids P, une position telle, que dès qu'il y aura équilibre, le poids P sera le moins éloigné possible de l'horizontale AB. L'équilibre exige donc que la droite MOR, nécessairement verticale, comme perpendiculaire AB, soit un minimum.

Ce minimum est facile à trouver, en désignant par $2c$ la longueur donnée de la corde CMD, et en faisant $AR = BR = x$ et $MOR = m$. En effet, on aura aisément

$$CQ = \frac{bx}{a},\ OR = \sqrt{a^2 - x^2},\ QO = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\text{et } QM = \frac{1}{a}\sqrt{a^2c^2 - b^2x^2};$$

$$\text{d'où } \frac{a+b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{1}{a}\sqrt{a^2c^2 - b^2x^2} = m.$$

Résolvant cette dernière équation par rapport à x, on verra que le minimum de m répond à

$$x = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{(a+b)^2c^2 - b^4}{a^2 + 2ab}},$$

valeur qui détermine le point R, et conséquemment la position d'équilibre cherchée.

On voit ici une application du principe du n° 60; car le centre de gravité du système étant le plus bas possible, il est clair que la droite MR sera un minimum. On serait d'ailleurs parvenu à la valeur précédente de x, mais beaucoup moins simplement, par la décomposition des poids et en prenant les momens par rapport au point O. Nous laissons aux élèves à opérer cette vérification.

De l'Equilibre des Forces qui sollicitent un Corps solide géné par des obstacles.

68. Supposons d'abord que le corps solide ait un seul point fixe, autour duquel il puisse tourner librement en tous sens. Dans ce cas, pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que toutes les forces qui sollicitent le corps, aient une résultante unique, passant par le point fixe; car alors il est clair que cette résultante sera détruite par la résistance indéfinie de ce point. Il n'y aurait évidemment pas équilibre, si la résultante unique ne passait pas par le point fixe, ou bien si le système de forces se réduisait, soit à un couple (25), soit à deux forces non situées dans un même plan. Effectivement, si dans ce dernier cas, les deux forces pouvaient avoir une résultante unique; en prenant sur sa direction un point fixe tel, qu'en joignant ce point à l'un de ceux de l'une des deux forces proposées, par une droite fixe, cette droite ne rencontre pas la direction de l'autre force, ce qui est toujours possible; il est clair que la résultante unique serait détruite et qu'ainsi il y aurait équilibre, tandis que la première des deux forces serait seule détruite et que l'autre obtiendrait tout son effet. Il y aurait donc à la fois équilibre et mouvement dans le système. Cette absurdité prouve évidemment que *deux forces non situées dans le même plan, n'ont pas de résultante unique,* et ne peuvent conséquemment être maintenues en équilibre par un point fixe du corps solide.

69. Supposons maintenant que le corps solide ait deux points fixes; il sera donc retenu par l'axe fixe qui passe par ces deux points et pourra tourner autour de cet axe, sans pouvoir glisser dans le sens de la longueur. Alors pour qu'il y ait équilibre dans le système, il faut et il suffit que les forces qui agissent sur le corps proposé, se réduisent à d'autres qui rencontrent perpendiculairement l'axe fixe, lequel les détruira nécessairement. Or, les forces qui ne sont pas dans des plans perpendiculaires à l'axe, peuvent se décomposer chacune en deux autres, l'une perpendiculaire et l'autre parallèle à l'axe : cette dernière ne peut produire aucun mouvement, puisque, par hypothèse, le corps ne saurait glisser suivant l'axe. Ainsi le repos du corps solide dépend uniquement de l'équilibre des composantes situées dans des

plans perpendiculaires à l'axe fixe. Développons les conditions de cet équilibre.

Soit MN un plan perpendiculaire à l'axe fixe AB et le rencontrant au point B (fig. 17). Soit P l'une des forces proposées, dirigée dans le plan PCD perpendiculaire à l'axe AB. Par la direction de la force P, menons le plan PCK perpendiculaire au plan MN et soit KO l'intersection des deux plans. Du point D où le plan PCD rencontre l'axe AB, menons DC perpendiculaire à la direction de la force P; DC sera aussi perpendiculaire à l'axe AB, et désigne la plus courte distance de la force P à cet axe. Menons CO perpendiculaire à KO et par conséquent à MN. Suivant CO appliquons au point C les deux forces contraires P′ et — P′, égales entre elles et à la force P; ces deux forces se détruisent, et l'effet de la force P sur le corps n'est pas changé. Or, la résultante S des deux forces égales P et P′, est dirigée dans le plan KOC et rencontre le plan MN au point K, où on peut la supposer appliquée : elle se décompose donc en deux forces, l'une égale à P, dirigée suivant KO, et l'autre égale à P′, perpendiculaire au plan MN au point K. Il est visible, en effet, que les angles OKS et PCS sont égaux, de même que les angles CKP′ et SCP′; donc les composantes de S au point K sont les mêmes qu'au point C. Ainsi au lieu de la force proposée P appliquée en C, nous avons la même force appliquée en O et dirigée dans le plan MN, et le couple P′, — P′, perpendiculaire à ce plan. L'effet de ce couple est détruit, puisque le corps ne saurait glisser suivant AB; il reste donc la force P située dans le plan MN, et dont le moment par rapport au point B ou à l'axe AB, est $P \times BO$ ou $P \times DC$.

Raisonnant de même pour toutes les forces proposées, on les remplacera par des forces de mêmes valeurs et respectivement parallèles, situées dans le plan MN, et par des forces perpendiculaires au même plan : celles-ci tendent à faire glisser le corps suivant AB, et leur effet est nul. Quant aux premières, situées dans le plan MN, il faut et il suffit pour l'équilibre, que leur résultante passe par l'axe fixe AB ou par le point B, qui la détruira. Ainsi (34) *dans l'équilibre d'un corps solide retenu par un axe fixe et sollicité par des forces dirigées dans des plans perpendiculaires à cet axe, la somme des momens de ces forces par rapport au même axe et pris avec les signes qui leur appartiennent, est égale à zéro.*

Remarquons présentement qu'on ne pourrait supposer plus de deux points fixes dans un corps solide, sans qu'il se trouvât complétement rendu immobile, ce qui rendrait inutile la recherche des conditions de son équilibre. En effet, imaginons trois points fixes : le triangle ayant ces trois points pour sommets, deviendra fixe lui-même. Or, tout autre point du corps est entièrement déterminé de position par ses distances aux trois premiers points, et ne peut se déplacer qu'avec eux, puisque les trois distances sont invariables, comme le corps solide. Donc, s'ils sont immobiles, tout autre point du corps le sera aussi nécessairement.

70. Considérons maintenant un corps solide astreint à s'appuyer par un ou plusieurs points contre un plan immobile et impénétrable. Ce plan ne peut être déplacé ni percé par le corps solide; et en conséquence il anéantit tout effort normal à sa surface qui tendrait à produire l'un et l'autre de ces effets. Ainsi la résistance opposée par le plan peut être considérée comme une force perpendiculaire à ce plan, et qui se développe en chacun des points de contact, avec des intensités qui peuvent être inégales pour ces différens points. Or, par le seul fait que ces résistances ont des directions parallèles, elles ont toujours une résultante égale à leur somme, et dont le point d'application tombe nécessairement dans l'espace plan compris entre les points de contact, espace qu'on appelle la *base* du corps. Cette résultante ne pouvant détruire qu'une résultante égale et directement opposée, on voit que *pour qu'un corps solide, sollicité par autant de forces qu'on voudra, soit maintenu en équilibre contre un plan inébranlable, il faut et il suffit,* 1° *que toutes ces forces aient une résultante unique;* 2° *que cette résultante soit perpendiculaire au plan et tombe dans l'intérieur de la base, où elle sera détruite.*

Réciproquement, soit un corps solide maintenu en équilibre, par plusieurs forces, contre une surface plane ou courbe qu'il touche en un point C. Par le point C menons à cette surface la *normale* CN, conséquemment perpendiculaire au plan tangent en C. On peut toujours décomposer les forces proposées chacune en deux autres, l'une parallèle au plan tangent et l'autre appliquée en C, laquelle à son tour se décompose en deux forces, l'une dirigée dans le plan et l'autre suivant CN. Or, toutes les composantes suivant CN ont une résultante égale à leur somme, laquelle