NOTIONS

DE

GÉOMÉTRIE

ANALYTIQUE,

APPLIQUÉES

A LA RECHERCHE DES PROPRIÉTÉS DES COURBES
DU SECOND DEGRÉ;

Par J. N. Noël,

PROFESSEUR DES SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES,
PRINCIPAL DE L'ATHÉNÉE DE LUXEMBOURG,
CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE ROYALE DE METZ.

LUXEMBOURG,

DE L'IMPRIMERIE DE J. LAMORT, PLACE D'ARMES.

—

1830.

****

NOTIONS
DE
GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Les sections coniques ont des usages si importans, dans les arts et les sciences, qu'on doit s'attacher à rendre leurs propriétés accessibles et familières à tous ceux qui étudient la géométrie (*). Le véritable moyen, sans doute, est de faire entrer la recherche de ces propriétés dans l'enseignement élémentaire : aussi le présent ouvrage forme-t-il la quatrième partie du traité de géométrie que nous avons publié.

Les méthodes purement géométriques, du moins celles employées dans les élémens, bien que fort claires et fort simples, ont cependant l'inconvénient de trop isoler les principes et d'en rendre l'enchaînement difficile à saisir : il nous a paru préférable de faire usage des méthodes analytiques, dont l'avantage est de conduire aux théorèmes de la manière la plus naturelle, si ce n'est la plus simple. Par cette marche, non-seulement ce petit ouvrage fait connaître les propriétés les plus usuelles des courbes du second degré; mais en outre, il devient une introduction utile à l'étude de la Géométrie analytique.

Equations du point.

1. La *Géométrie analytique* fait partie de l'Application de l'Algèbre à la Géométrie en général; son but est de fournir les principes pour résoudre toute question de géométrie, indéterminée ou non, à l'aide des équations qui *représentent* les points, les lignes ou les surfaces d'une figure, sans qu'il soit même nécessaire de tracer d'abord cette figure.

(*) C'est à quoi M. *Bergery* est parvenu, avec beaucoup de succès, dans sa Géométrie des courbes, appliquée à l'industrie. Metz, 1826.

A l'avenir, une indication telle que (G. 400), signifiera le n° 400 de la Géométrie dont ce traité forme la 4^{me} partie.

Comme la plupart des problèmes de géométrie se réduisent, en dernière analyse, à trouver les distances d'un ou de plusieurs points inconnus à d'autres points ou à des droites fixes, il faut d'abord savoir comment on détermine les différens points d'un plan.

2. Pour obtenir la position d'un point M sur un plan, on conçoit deux droites AX et AY indéfinies, se coupant en A (fig. 1re); puis on mène MP parallèle à AY et terminée à AX : il est clair que le point M est déterminé dès que l'on connaît les longueurs AP et PM. Or, ces longueurs sont appelées *coordonnées* du point M; les droites AX et AY sont les *axes* des coordonnées, et le point commun A en est l'*origine*. Suivant que l'angle YAX est droit ou non, les coordonnées sont dites *rectangulaires* ou *obliques*. La distance AP est nommée l'*abscisse* du point M et la longueur PM en est l'*ordonnée*. On désigne généralement les abscisses par x et les ordonnées par y : AX est alors l'*axe des* x ou *des abscisses* et AY l'*axe des* y ou *des ordonnées*.

On regarde comme positives, toutes les abscisses mesurées sur AX, de A vers X, et toutes les ordonnées mesurées sur AY au-dessus de l'axe des x : alors les abscisses mesurées en sens contraire de A vers X', sont négatives, de même que les ordonnées mesurées au-dessous de AX, de A vers Y' (G. 400). Si donc on veut trouver le point dont l'abscisse $x=-2$ et l'ordonnée $y=3$, on prendra d'abord la distance $AP'=2$, puis on mènera, par le point P', une parallèle à AY, et on prendra sur cette parallèle la longueur $P'M'=3$; le point M' ainsi déterminé, sera le point cherché.

3. On appelle *équations d'un point*, les équations qui expriment les valeurs de l'abscisse et de l'ordonnée de ce point. De sorte que si a et b sont ces valeurs, les équations du point seront

$$x=a \text{ et } y=b.$$

La première de ces équations, considérée comme si elle était seule, convient à tous les points pour lesquels l'abscisse est égale à a; elle convient par conséquent à tous les points de la parallèle à l'axe des ordonnées, menée à la distance $AP=a$, et *représente* cette parallèle. De même, l'équation $y=b$ appartient à tous les points de la parallèle à l'axe des abscisses, menée à la distance $AQ=b$. Le système des équations $x=a$ et $y=b$ appartient donc au point qui se trouve à la fois sur les deux parallèles, c'est-à-dire à leur intersection M; et voilà pourquoi $x=a$ et $y=b$ sont dites les *équations* du point M.

4. La parallèle à l'axe des ordonnées, représentée par l'équation $x=a$, se trouve à la *droite* de cet axe si a est positif, à la *gauche* si a est négatif, et coïncide avec le même axe si a est nul; de sorte que l'équation $x=0$ appartient à tous les points de l'axe des ordonnées et ne convient qu'à eux seuls. De même, la parallèle à l'axe des abscisses, représentée par l'équation $y=b$, est au-dessus ou au-dessous de l'axe des x, suivant que b est positif ou négatif; et si b est nul, elle coïncide avec cet axe, pour lequel, conséquemment, on a toujours $y=0$.

Enfin, l'ensemble des équations $x=0$ et $y=0$ appartient au point commun aux deux axes et caractérise l'origine A des coordonnées.

5. Cherchons maintenant la distance de deux points dont on connaît les coordonnées rectangulaires. Soient M et M' ces deux points (fig. 2), d leur distance MM', x et y les coordonnées AP et PM du point M, x' et y' les coordonnées du point M' : si l'on mène M'N parallèle à AX, on aura $MN=y-y'$ et $NM'=x-x'$; le triangle rectangle MNM' donnera donc, pour déterminer la distance d cherchée,

$$d^2=(y-y')^2+(x-x')^2.$$

Cette formule convient à toutes les positions des deux points proposés, pourvu qu'on y donne le signe — aux coordonnées mesurées dans un sens contraire à celui que nous venons de considérer. C'est ce qu'on vérifie aisément, en supposant successivement les deux points dans chacun des angles des axes, ou de part et d'autre des mêmes axes.

Si le point M' tombe à l'origine A, pour laquelle $x'=0$ et $y'=0$, il viendra, pour déterminer la distance d du point (x, y) ou M à l'origine des coordonnées,

$$d^2=x^2+y^2, \quad \text{ou} \quad d=\sqrt{x^2+y^2}.$$

6. Dans tout ce qui va suivre, nous ne calculerons les formules de la géométrie analytique que pour les points situés dans l'angle des coordonnées positives. Si donc on veut appliquer les mêmes formules aux points situés dans les autres angles des axes, il suffira d'y affecter du signe — les lignes qui prendront une direction contraire à celle qu'elles avaient dans l'angle proposé

(G. 400); et les formules, ainsi modifiées, seront celles que l'on trouverait directement en recommençant les raisonnemens, les constructions et les calculs qui ont fourni les premières.

Equations de la ligne droite.

7. Lorsque les coordonnées x et y de chacun des points d'une ligne doivent satisfaire à la même équation; en prenant pour x un nombre quelconque a, cette équation donnera à y une valeur b, au moins; et si b est réelle, le point dont a et b sont les coordonnées, sera nécessairement un de ceux de la ligne. De cette manière, l'équation proposée fait connaître successivement tous les points de la ligne et peut servir à la tracer.

On voit par là qu'une équation entre deux variables x et y, *représente* une ligne dont chacun des points a ces variables pour coordonnées. Aussi appelle-t-on *équation d'une ligne* la relation qui existe entre les coordonnées de chacun des points de cette ligne; et celle-ci à son tour est appelée le *lieu* de l'équation.

8. Cherchons l'équation d'une droite AE passant par l'origine A des coordonnées (fig. 3). Soient AX et AY deux axes quelconques; prenons l'abscisse positive AO $= 1$ et soit a la valeur de l'ordonnée correspondante OV; soit M un point quelconque de la droite AE, x et y les coordonnées AP et PM du point M : les deux triangles semblables AOV et APM donnent $1 : x :: a : y$; d'où l'on tire

$$y = ax.$$

Telle est l'équation de la droite AE; car non-seulement cette équation détermine tous les points de AE, situés dans l'angle YAX; mais aussi tous les points dans l'angle RAY'. C'est ce qu'on vérifie, par exemple, en faisant $x = -3$, dans $y = ax$; car la valeur résultante $y = -3a$ étant négative, détermine un point au-dessous de l'axe AX (G. 401), et ce point tombe sur le prolongement de EA. Effectivement, les coordonnées de ce point étant -3 et $-3a$, ont pour valeurs absolues 3 et $3a$; et si l'on prend du côté des abscisses négatives, la distance AI $=$ 3, et qu'on mène l'ordonnée IG, les triangles semblables AOV et AIG donneront $1 : 3 :: a :$ IG; d'où IG $= 3a$; les coordonnées -3 et $-3a$ déterminent donc, en effet, le point G de la droite EAG.

9. Non-seulement l'équation $y = ax$ appartient à tous les points de la droite AE, indéfiniment prolongée; mais de plus, en y faisant varier a, cette équation détermine toutes les droites qui peuvent passer par l'origine. En effet, comme a est l'ordonnée correspondante à l'abscisse positive AO $= 1$; si $a = \infty$, ce qui arrive quand la droite est parallèle à son ordonnée, cette droite coïncidera avec l'axe AY; et c'est ce que montre l'équation $y = ax$; car ayant alors $x = \frac{y}{\infty} = 0$, quel que soit y, tous les points de la droite se trouvent sur l'axe des ordonnées (4).

Partant de cette position, il est clair qu'à mesure que a diminuera, la droite approchera de l'axe AX; et si a devient nul, c'est-à-dire si le point V tombe en O, la droite aura deux points communs A et O avec l'axe AX et coïncidera avec cet axe. C'est encore ce qu'indique l'équation $y = ax$, qui donne alors $y = 0$, quel que soit x.

Enfin, a devenant négatif et égal à $-$OV', la droite tombe au-dessous de l'axe des x et prend la position AN. C'est ce qu'on voit encore par l'équation $y = ax$, qui devient alors $y = -$ OV' $\times x$; car tant que x est positif, y est négatif, et on ne peut avoir y positif qu'en prenant x négatif: ce qui montre que la droite reste au-dessous de l'axe des x du côté des abscisses positives et ne passe au-dessus de cet axe que du côté des abscisses négatives.

On voit donc, par cette discussion, que l'équation $y = ax$ représente successivement toutes les droites qui passent par l'origine des coordonnées et peut servir à les décrire.

10. Considérons maintenant une droite BH rencontrant l'axe des y à une distance AB $= b$ de l'origine A. Soit D un point quelconque de cette droite, x et y les coordonnées de ce point. Menons par l'origine A la parallèle AE à BH, rencontrant PD en M; nous aurons, d'après ce qui précède, PM $= ax$. Ajoutant d'un côté MD et de l'autre son égale AB ou b, puis observant que PM + MD vaut y, il viendra

$$y = ax + b.$$

Cette équation ayant lieu pour tous les points de la droite BH, indéfiniment prolongée dans les deux sens, est l'équation de cette droite.

11. Réciproquement, *toute équation du premier degré entre*

les variables x *et* y, *représente une ligne droite et en détermine la position.* En effet, cette équation peut toujours se ramener à la forme $y = ax + b$. Si l'on y fait d'abord $x = 0$, pour avoir le point situé sur l'axe des y, il viendra $y = b$; et suivant que b sera positif ou négatif, ce point sera au-dessus ou au-dessous de l'axe des abscisses. Supposons b positif et prenons $AB = b$; menons BF parallèle à AX et soient D, D′, D″, ..., les points dont les coordonnées satisfont à l'équation $y = ax + b$ ou $y - b = ax$; nous aurons donc, en observant que les parallèles PC. P′C′, P″C″, ..., sont égales à b,

$$CD = a.BC,\ C'D' = a.BC',\ C''D'' = a.BC'', \ldots;$$

d'où $CD : BC :: C'D' : BC' :: C''D'' : BC'', \ldots$

Et comme les angles BCD, BC′D′, BC″D″, ..., sont égaux, il s'ensuit que les triangles BDC, BD′C′, BD″C″, ..., sont équiangles; donc toutes les droites BD, BD′, BD″, ..., coïncident et tous les points B, D, D′, D″, ..., sont à une même droite: donc enfin, toute équation de la forme $y = ax + b$, représente une ligne droite, dont x et y sont les coordonnées de chacun de ses points.

12. Dans cette équation, b est la distance de l'origine au point où la droite coupe l'axe des ordonnées, et a est l'ordonnée correspondante à l'abscisse positive $x = 1$, pour la parallèle à la droite proposée, menée par l'origine; a *représente aussi le rapport des sinus des angles que cette droite fait avec les axes des* x *et des* y. Car soit θ l'angle YAX, de ces deux axes et α l'angle que la droite BH fait avec l'axe des x; son angle avec l'axe des y sera donc $\theta - \alpha$. Menant AE parallèle à BH et prenant AO $= 1$; dans le triangle AOV, on aura $OV = a$, l'angle $OAV = \alpha$ et l'angle $AVO = \theta - \alpha$; il viendra donc $1 : a :: \sin(\theta - \alpha) : \sin \alpha$; d'où $a = \frac{\sin \alpha}{\sin(\theta - \alpha)}$, Et si $\theta = 90°$, on aura $a = \text{tang}\ \alpha$.

13. Tant que a et b sont indéterminés, la situation de la droite n'est pas connue; mais si a et b sont donnés, ou si l'on a des conditions qui les déterminent, il sera bien facile d'en conclure la position de la droite. Pour cela, le moyen le plus simple, en général, est de chercher les points où cette droite coupe les axes, en faisant successivement $x = 0$ et $y = 0$, dans son équation. C'est ainsi qu'on trouvera la droite représentée par l'équation

$$\frac{2x}{3} - 4 + \frac{y}{2} = \frac{5y}{6} + \frac{3x}{4} - 1.$$

14. *Trouver l'équation d'une ligne droite passant par deux points donnés, l'angle des axes étant d'ailleurs quelconque.*

Soient (x', y') le premier point, (x'', y'') le second et $y = ax + b$ l'équation de la droite cherchée, a et b étant inconnus. Puisque cette droite passe par les points dont les coordonnées sont x' et y', x'' et y'', son équation sera satisfaite lorsqu'on y remplacera x par x' et y par y', puis x par x'' et y par y''; ainsi on a les trois équations

$$\begin{aligned} y &= ax + b, \\ y' &= ax' + b, \\ y'' &= ax'' + b. \end{aligned}$$

Prenant dans les deux dernières équations les valeurs de a et b, puis substituant dans la première, le résultat sera l'équation demandée. Mais l'élimination se fait beaucoup plus simplement, en retranchant la seconde équation de la première et la troisième de la seconde; car on a, par ce moyen,

$$\begin{aligned} y - y' &= a(x - x'), \\ y' - y'' &= a(x' - x''); \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$a = \frac{y' - y''}{x' - x''} \quad \text{et} \quad y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x').$$

Il est aisé de vérifier que la seconde de ces équations est celle de la droite qui passe par les deux points (x', y') et (x'', y''); car si $y = y'$, elle donne $x = x'$; et si $y = y''$, elle fournit $x = x''$. On voit d'ailleurs que le b de cette droite a pour valeur $b = \frac{x'y'' - y'x''}{x' - x''}$.

Remarquons de plus, que si une droite passe par le point (x', y'), son équation sera toujours de la forme

$$y - y' = a(x - x').$$

15. *L'angle des axes étant quelconque, si les deux droites* $y = ax + b$ *et* $y = a'x + b'$, *sont parallèles, on aura toujours* $a = a'$; *et réciproquement.* Car puisque les deux droites proposées sont parallèles, les parallèles p et p', à ces deux droites, menées par l'origine, coïncident nécessairement; il en est donc de même des ordonnées a et a', qui, pour ces parallèles p et p', correspondent à la même abscisse 1 positive (12); c'est-à-dire que $a = a'$.

Réciproquement, si $a = a'$, les parallèles p et p' aux deux droites proposées, menées par l'origine, auront deux points de communs et coïncideront ; les deux droites proposées seront donc alors parallèles à une même troisième, et conséquemment parallèles entre elles.

16. Il est bon d'observer que quand deux droites se coupent, les coordonnées x et y du point d'intersection, sont respectivement les mêmes dans les équations de ces droites ; et réciproquement. Si donc on résout les deux équations

$$y = ax + b \text{ et } y = a'x + b',$$

les valeurs résultantes seront communes à ces équations et seront les coordonnées du point de rencontre des droites que ces mêmes équations représentent : on aura

$$x = \frac{b' - b}{a - a'} \text{ et } y = \frac{ab' - ba'}{a - a'}.$$

Si $a = a'$, sans qu'on ait $b = b'$, ces valeurs seront infinies; le point d'intersection sera donc infiniment éloigné : aussi alors les deux droites sont parallèles.

Si on avait à la fois $a = a'$ et $b = b'$, les deux droites se confondraient et auraient une infinité de points communs : c'est aussi ce qu'indiquent les valeurs $x = \frac{0}{0}$ et $y = \frac{0}{0}$, que l'on trouve dans ce cas.

17. *Calculer l'angle de deux droites, rapportées à des axes rectangulaires.*

Menons par l'origine A les parallèles AE et AF aux deux droites proposées $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$; l'angle EAF sera donc le même que celui de ces deux droites (fig. 4). Soient α et α' les angles que les droites proposées font avec l'axe des x ; on aura donc l'angle EAX $= \alpha$ et l'angle FAX $= \alpha'$; d'où l'angle EAF $= \alpha' - \alpha$, et en outre $a = \text{tang}\,\alpha$ et $a' = \text{tang}\,\alpha'$ (12). Soit t la tangente de l'angle $\alpha' - \alpha$ des deux droites proposées, de sorte que $t = \text{tang}\,(\alpha' - \alpha)$. Développant le second membre, il viendra

$$t = \frac{\text{tang}\,\alpha' - \text{tang}\,\alpha}{1 + \text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\alpha'}, \text{ ou } t = \frac{a' - a}{1 + aa'}.$$

Soit s le sinus de l'angle $\alpha' - \alpha$ des deux droites ; son cosinus sera $\sqrt{1 - s^2}$ et on aura

$$t=\frac{s}{\sqrt{1-s^2}};\ \text{d'où}\ s=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Substituant la valeur précédente de t et réduisant, on trouvera

$$s=\frac{a'-a}{\sqrt{(1+a^2)(1+a'^2)}}.$$

Cette formule, ou celle qui donne t, suffira pour construire l'angle des deux droites $y=ax+b$ et $y=a'x+b'$, rapportées à des axes rectangulaires.

18. Si cet angle $\alpha'-\alpha$ est droit, sa tangente t sera infinie et son sinus s égal au rayon 1; donc les formules précédentes donneront chacune $aa'+1=0$. Réciproquement, si $aa'+1=0$, on aura $t=\infty$ et $s=1$; l'angle des deux droites proposées sera donc droit. Ainsi on a ce théorème, que nous emploierons souvent :

Lorsque deux droites $y=ax+b$ *et* $y'=a'x+b'$, *rapportées à des axes rectangulaires, sont perpendiculaires l'une à l'autre, on a toujours* $aa'+1=0$; *et réciproquement*. C'est d'ailleurs ce que l'on peut démontrer directement, par la construction d'une figure, et sans le secours de la Trigonométrie.

19. Pour avoir l'angle $\alpha'-\alpha$ des deux droites proposées $y=ax+b$ et $y=a'x+b'$, lorsque les axes sont obliques et font entre eux un angle θ, on observe qu'alors $a=\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}$ (12). Développant $\sin(\theta-\alpha)$, puis chassant le dénominateur et divisant les deux membres par $\cos\alpha$, on aura

$$a\sin\theta-a\cos\theta\tang\alpha=\tang\alpha;\ \text{d'où}\ \tang\alpha=\frac{a\sin\theta}{1+a\cos\theta}.$$

L'équation $a'=\dfrac{\sin\alpha'}{\sin(\theta-\alpha')}$, donne de même $\tang\alpha'=\dfrac{a'\sin\theta}{1+a'\cos\theta}$.

Posant toujours $t=\tang(\alpha'-\alpha)$, développant et substituant les valeurs que l'on vient de trouver pour $\tang\alpha$ et $\tang\alpha'$, il viendra

$$t=\frac{(a'-a)\sin\theta}{1+aa'+(a+a')\cos\theta}.$$

Si les deux droites sont parallèles, $\alpha'=\alpha$, $t=\tang(\alpha'-\alpha)=0$ et par suite $a'=a$, comme au n° 15.

Si les deux droites sont perpendiculaires, l'angle $\alpha'-\alpha=90°$ et $t=\tang 90°=\infty$; ce qui exige qu'on ait

$$1+aa'+(a+a')\cos\theta=0,$$

condition qui, lorsque $\theta=90°$, se réduit à $1+aa'=0$, comme au n° 18.

20. *Trouver l'aire du parallélogramme* ABCD, *dont le sommet d'un angle est à l'origine des coordonnées rectangulaires, connaissant d'ailleurs les équations* $y = ax$ *et* $y = a'x$ *des côtés* AB *et* AD *qui comprennent cet angle, ainsi que les longueurs* A' *et* B' *de ces côtés* (fig. 4). Soient α et α' les angles BAX et DAX; soit s le sinus de l'angle BAD ou $\alpha' - \alpha$. Menant la hauteur DG du parallélogramme ABCD, le triangle rectangle ADG donnera $1 : s :: B' : DG = B's$, et l'aire de ce parallélogramme sera $AB \times DG$ ou $A'B's$. Substituant la valeur de s, trouvée plus haut (17), il viendra

$$A'B's = \frac{A'B'(a'-a)}{\sqrt{(1+a^2)(1+a'^2)}}.$$

Soient x', y' les coordonnées du point B et x'', y'' celles du point D; on trouve aisément que $A'B's = x'y'' - y'x''$.

21. *Les coordonnées étant rectangulaires, la distance* P *du point* (x', y') *à la droite* $y = ax + b$, *sera toujours* $P = \dfrac{y'-ax'-b}{\sqrt{1+a^2}}$.

Soit EF la droite $y = ax + b$, M' le point (x', y') et $M'M = P$ la perpendiculaire cherchée (fig. 5). L'angle de EF avec AX étant égal à l'angle de AX avec AV, parallèle à EF; si l'on prend $AO = 1$, ce qui donne la perpendiculaire $OV = a$, les deux triangles AOV et IMM' seront semblables; on aura donc $AO : MM' :: AV : IM'$, ou $1 : P :: \sqrt{1+a^2} : IM' = P\sqrt{1+a^2}$. Mais ayant $AP' = x'$ et I étant un point de la droite proposée EF ou $y = ax + b$, il vient $IP' = ax' + b$. Donc comme $M'P' = y'$, on a $IM' = y' - ax' - b$; d'où l'on tire

$$P\sqrt{1+a^2} = y' - ax' - b \quad \text{et} \quad P = \frac{y'-ax'-b}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Il est facile de vérifier que si le point (x', y') tombait en M'', au-dessous de la droite proposée EF, la valeur de P serait négative.

On parviendrait d'ailleurs à la formule précédente, au moyen de l'équation de la droite donnée, de celle de sa perpendiculaire menée par (x', y') et de la distance P entre le pied (x, y) et le point (x', y') : on aurait alors à combiner les équations

$$y = ax + b,\ y - y' = a'(x - x'),$$
$$1 + aa' = 0,\ P^2 = (y - y')^2 + (x - x')^2;$$

et on serait ainsi dispensé de construire une figure.

22. Le petit nombre de principes qui précèdent, suffit pour résoudre très-simplement tous les problèmes qui ne dépendent que de la ligne droite, sur un plan. On aura, dans la suite, souvent l'occasion d'appliquer ces principes ; nous nous bornerons donc, pour le moment, au théorème que voici :

Si des extrémités de la base AB *d'un triangle quelconque* ABC, *on mène des parallèles aux deux autres côtés, et que par deux points quelconques* P *et* Q, *pris à volonté sur ces parallèles, on mène aux mêmes côtés, deux nouvelles parallèles, se coupant en* D; *je dis que les trois droites* AQ, BP *et* DC *se rencontreront en un même point* (fig. 6).

Prenons les côtés CA et CB pour les axes des x et des y obliques ; faisons $CA=a$, $CB=b$, $AP=p$ et $BQ=q$: la droite AQ passant par les deux points (a, o) et $(-q, b)$, aura pour équation (14)

$$y=\frac{-b}{a+q}(x-a).$$

De même, la droite BP passant par les deux points (o, b) et $(a, -p)$, aura pour équation

$$y-b=\frac{b+p}{-a}x.$$

Enfin, l'équation de la droite DC, qui passe par les points (o, o) et $(-p, -q)$, sera de la forme

$$y=\frac{q}{p}x.$$

Pour le point où les deux premières droites se coupent, les x et les y sont respectivement les mêmes dans les équations de ces droites. Résolvant donc ces deux équations, les valeurs résultantes seront les coordonnées x et y du point commun aux deux droites AQ et BP : et puisque ces valeurs satisfont à l'équation de la droite DC, il s'ensuit que le point d'intersection de AQ et BP, se trouve sur DC.

Et comme les signes de p et q peuvent être quelconques, il faut en conclure que les droites AP et BQ peuvent être menées indistinctement de part et d'autre de la base du triangle, sans que le théorème cesse pour cela d'avoir lieu.

23. On démontrerait, d'une manière tout-à-fait analogue, les théorèmes des n^{os} 125 et 126 de la Géométrie, après avoir établi que *les coordonnées du milieu de la droite qui joint les*

deux points (x', y') *et* (x'', y''), *sont* $x = \frac{1}{2}(x' + x'')$ *et* $y = \frac{1}{2}(y' + y'')$.

24. *Si l'on veut trouver analytiquement le point également distant de trois droites qui se coupent et forment un triangle*, on verra qu'il existe quatre de ces points et qu'ils se trouvent aux intersections des bissectrices de deux angles du triangle avec leurs perpendiculaires aux sommets des mêmes angles. De là, en cherchant le point également éloigné des trois sommets du même triangle, on sera conduit aux propriétés indiquées, page 294 de la Géométrie.

25. Enfin, voici encore quelques propositions à traiter :

I. Trouver l'aire d'un triangle, au moyen des coordonnées des sommets de ses angles.

II. Trouver le lieu de tous les points également distans chacun de deux points donnés.

III. Quel est le lieu de tous les points tels, qu'en menant de chacun deux droites à deux points donnés, la différence des carrés de ces droites vaille un carré donné c^2 ?

IV. Lorsque des extrémités de la base d'un triangle, on mène des droites à deux points semblablement placés sur les deux autres côtés, ces deux droites se coupent sur la droite menée du sommet au milieu de la base.

V. D'un point donné hors d'un angle tracé, mener une sécante telle, que les distances de ce point aux deux où cette sécante coupe les deux côtés de l'angle, aient le rapport donné n.

Equations de la circonférence et de sa tangente.

26. Soient p et q les coordonnées rectangulaires du centre d'un cercle donné, x et y celles d'un point quelconque de sa circonférence et R la distance de ces deux points ou le rayon; d'après ce qu'on a vu (5), il est clair qu'on aura toujours

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = R^2 \cdots (1)$$

Telle est l'équation la plus générale de la circonférence : elle renferme trois *constantes* indéterminées, parce qu'il faut trois conditions pour déterminer le centre et le rayon d'un cercle.

27. Lorsque l'origine est un point de la circonférence, on a $p^2 + q^2 = R^2$; et l'équation du cercle devient

$$y^2 + x^2 - 2px - 2qy = 0.$$

Alors si on y fait $y = 0$, pour avoir les points où la circonférence coupe l'axe des x, il viendra $x = 0$ et $x = 2p$; ainsi les points d'intersection sont l'origine et celui dont l'abscisse $2p$ est double de l'abscisse p du centre. D'où il suit que *la perpendicu-*

laire q, *menée du centre sur la corde* 2p, *divise cette corde en deux parties égales.*

28. Si l'origine est à l'extrémité d'un diamètre, pris pour axe des x, les coordonnées du centre seront nécessairement $p=R$ et $q=0$; alors l'équation de la circonférence prend la forme

$$x^2+y^2=2Rx;$$

et comme $\sqrt{x^2+y^2}$ exprime la distance du point (x, y) de la circonférence à l'origine des coordonnées (5), ou représente une corde, on voit que *cette corde est moyenne proportionnelle entre le diamètre* 2R *et le segment* x *adjacent à cette même corde.*

29. La même équation prend aussi la forme

$$y^2=2Rx-x^2 \text{ ou } y^2=(2R-x)x.$$

Or, x et $2R-x$ sont les segmens du diamètre, déterminés par l'ordonnée y; de là résulte donc que *si d'un point de la circonférence, on abaisse une perpendiculaire sur le diamètre, cette perpendiculaire sera moyenne proportionnelle entre les deux segmens qu'elle détermine sur ce diamètre.*

30. Enfin, si l'origine des coordonnées rectangulaires est au centre, p et q seront nuls; et l'équation (1) deviendra

$$x^2+y^2=R^2.$$

Cette équation est la plus simple de la circonférence: aussi est-ce celle qu'on emploie le plus fréquemment.

Par ce qui précède, on voit que les coordonnées x et y étant rectangulaires, l'équation de la circonférence est toujours du second degré et ne contient pas le produit xy.

31. Réciproquement, *les coordonnées* x *et* y *étant rectangulaires, toute équation qui ne contient pas le produit* xy, *mais renferme les carrés* x² *et* y², *avec des coefficiens égaux et de même signe, représente une circonférence.* Car cette équation peut toujours se ramener à la forme $(x-p)^2+(y-q)^2=R^2$. C'est ainsi, par exemple, que l'équation

$$Ax^2+Ay^2+Bx+Cy+D=0,$$

devient $\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{C}{2A}\right)^2=\frac{B^2+C^2-4AD}{4A^2}.$

Cette équation est celle de la circonférence, dont les coordonnées du centre et le rayon, sont respectivement (26)

$$p=-\frac{B}{2A},\ q=-\frac{C}{2A} \text{ et } R=\frac{1}{2A}\sqrt{B^2+C^2-4AD}.$$

Il est aisé, d'après cela, de trouver le centre et le rayon de la circonférence représentée par l'équation

$$4x^2-12x+4y^2+20y-2=0.$$

32. L'équation de la circonférence nous a déjà donné plusieurs propriétés de cette ligne; et elle doit les fournir toutes, puisqu'elle la représente complétement. Voyons, par exemple, si les deux droites menées des extrémités d'un diamètre à un même point de la courbe, sont perpendiculaires l'une à l'autre (fig. 7).

D'abord l'équation de la droite BM étant de la forme $y=ax+b$, la condition de passer par le point B ou $(-R, o)$, donnera $o=-aR+b$. Retranchant cette équation de la précédente, on aura, pour l'équation de la droite BM,

$$y=a(x+R).$$

De même, l'équation de la droite CM sera

$$y=a'(x-R).$$

D'ailleurs, l'équation de la circonférence est

$$x^2+y^2=R^2.$$

Les deux droites devant se couper en M sur la circonférence, les coordonnées du point d'intersection, sont respectivement les mêmes dans les trois équations précédentes. Si donc on prend les valeurs de x et de y, dans les deux premières, et qu'on substitue dans la troisième, celle-ci sera satisfaite, et on aura ainsi, réductions faites,

$$x=\frac{a'+a}{a'-a}R, \quad y=\frac{2aa'}{a'-a}R \text{ et } aa'(aa'+1)=o.$$

La dernière équation donne d'abord $aa'+1=o$; ce qui prouve que les droites menées des extrémités d'un diamètre à un même point de la circonférence, sont perpendiculaires l'une à l'autre (18). La même équation fournit ensuite $aa'=o$; d'où $a=o$ et $a'=\frac{o}{o}$, ou bien $a'=o$ et $a=\frac{o}{o}$. Cela signifie que, si l'une des deux droites est menée suivant l'axe des x, l'autre aura telle direction qu'on voudra.

Il est visible, en effet, que dans cette dernière supposition, les deux droites se coupent toujours sur la circonférence, conformément à l'hypothèse; mais cette seconde solution ne fournit aucune propriété, et on aurait pu se dispenser d'y avoir égard.

Remarquons que si, dans le produit des deux premières équations proposées, on substitue la valeur de aa' tirée de $aa'+1=0$, on résoudra le problème où il faut trouver le lieu des sommets de tous les angles droits, dont les côtés passent constamment par deux points donnés.

33. Cherchons actuellement les relations nécessaires pour que deux circonférences se coupent ou se touchent. Prenons pour axe des x la droite d qui joint les deux centres, l'origine des coordonnées rectangulaires étant au centre du plus grand des deux cercles et l'abscisse positive du second centre étant la droite d elle-même : il est clair que les équations des deux circonférences sont respectivement

$$x^2+y^2=R^2 \text{ et } (x-d)^2+y^2=R'^2.$$

Pour les points où les deux circonférences se coupent, les x et les y sont respectivement les mêmes dans les équations précédentes ; de sorte, qu'en résolvant ces équations, on trouvera, pour les coordonnées des points d'intersection,

$$x=\frac{1}{2d}(d^2+R^2-R'^2);$$

$$y=\pm\frac{1}{2d}\sqrt{(d+R+R')(d+R-R')(d+R'-R)(R+R'-d)}.$$

1° On voit qu'il y a deux points d'intersection, pour lesquels x n'a qu'une seule valeur ; ce qui prouve que *la droite qui joint les deux points de rencontre est perpendiculaire à la droite qui joint les deux centres.* De plus, comme les deux valeurs de y sont égales et de signes contraires, *la première droite est divisée en deux parties égales par la seconde.*

2° R étant le plus grand rayon, les deux premiers facteurs sous le radical de y sont positifs ; donc si les deux autres facteurs sont positifs aussi, c'est-à-dire si l'on a en même temps $d<R+R'$ et $d>R-R'$, les deux valeurs de y seront réelles et les deux circonférences se couperont en deux points. Donc, *lorsque la distance des centres de deux cercles est moindre que la somme de leurs rayons, mais plus grande que leur différence, les deux circonférences se coupent.*

Les deux valeurs de y seraient encore réelles, si l'on pouvait avoir en même temps $R>d+R'$ et $d>R+R'$. Mais ces inégalités sont impossibles ; car dès que $R>d+R'$, à plus forte raison $R+R'>d$.

3° Lorsqu'on a $d>R+R'$, l'un des deux derniers facteurs sous le radical de y est négatif, tandis que les trois autres sont positifs ; donc alors les deux valeurs de y sont imaginaires et les deux cercles ne se coupent pas. Il en serait de même si l'on avait $d<R-R'$.

4° Si $d=R+R'$, le dernier facteur sous le radical de y sera nul ; les deux valeurs se réduiront à une seule 0, et par conséquent les deux circonférences n'auront qu'un seul point de commun, placé sur la distance des centres. Il en serait encore de même si l'on avait $d=R-R'$.

5° Réciproquement, dès que les deux circonférences n'ont qu'un seul point de commun, les deux valeurs de y se réduisent à une seule; ce qui ne peut arriver qu'autant qu'elles sont nulles toutes les deux, et par suite qu'autant que l'un des deux derniers facteurs sous le radical est zéro. On a donc $y=0$ et $d=R+R'$, ou $d=R-R'$; ainsi *quand deux circonférences se touchent, le point de contact est placé sur la distance des centres, et cette distance vaut la somme ou la différence des rayons.*

6° Enfin, si $d=0$ et $R>R'$, les deux valeurs de y sont imaginaires; mais si $d=0$ et $R=R'$, x et y sont indéterminés : aussi les circonférences sont-elles intérieures l'une à l'autre, dans le premier cas, et coïncident dans le second.

34. Examinons maintenant les propriétés qui résultent de l'intersection d'une circonférence par une droite ou plusieurs. Soient x', y' les coordonnées d'un point donné sur le plan d'un cercle. L'origine des coordonnées rectangulaires étant au centre, les équations de la circonférence et d'une sécante menée par le point (x', y'), seront respectivement

$$x^2+y^2=R^2 \text{ et } y-y'=a(x-x').$$

Soit z la distance du point (x', y') à l'un des points d'intersection de la sécante avec la circonférence; pour ce point d'intersection, les x et les y seront respectivement les mêmes dans les deux équations précédentes et dans celle-ci :

$$z^2=(x-x')^2+(y-y')^2.$$

Prenant donc les valeurs de x et de y dans la seconde et la troisième équation; puis substituant dans la première, après avoir posé $\sqrt{1+a^2}=m$; observant d'ailleurs que si d désigne la distance du point (x', y') à l'origine, on a $d^2=x'^2+y'^2$, on obtiendra

$$z^2+\frac{2}{m}(x'+ay')z+d^2-R^2=0\ldots(1).$$

Cette équation n'ayant que deux racines, il s'ensuit qu'une droite ne peut jamais couper la circonférence qu'en deux points. Soient z' et z'' les deux valeurs de z; on aura, d'après la composition des équations,

$$z'+z''=-\frac{2}{m}(x'+ay'),$$
$$z'z''=d^2-R^2.$$

Le produit $z'z''$ étant indépendant de la valeur de a, qui détermine la direction de la sécante, on voit que si par le même point (x', y'), on mène une autre sécante et qu'on désigne par v', v'' les distances de ce point aux deux points d'intersection, on trouvera pareillement $v'v''=d^2-R^2$: donc $z'z''=v'v''$, et conséquemment

$$z' : v' :: v'' : z''.$$

Cette proportion a lieu, 1° lorsque le point (x', y') est dans l'intérieur du cercle; 2° lorsqu'il est au-dehors; 3° lorsqu'étant au-dehors, on a $v'=v''$. De là résultent donc les trois théorèmes qu'on démontre en géométrie.

Maintenant, supposons que les deux valeurs z' et z'' de z, dans l'équation (1), soient égales : dans ce cas, la droite $y-y'=a(x-x')$ sera tangente à la circonférence, puisque ses deux points d'intersection avec cette courbe, se réuniront en un seul ; on aura donc alors $z'+z''=2z'$, $z'z''=z'^2$, et ensuite

$$z'=-\frac{x'+ay'}{m} \text{ et } z'=\pm\sqrt{d^2-R^2}.$$

Si donc le point (x',y') est hors du cercle, on aura $d>R$ et les deux valeurs de z' seront réelles et égales ; on peut donc, *par un point hors du cercle, mener à la circonférence, deux tangentes égales entre elles.*

Si le point (x',y') était dans l'intérieur du cercle, c'est-à-dire si l'on avait $d<R$; z' serait imaginaire et il n'y aurait point de tangente ; ce qui est d'ailleurs évident.

Enfin, si le point (x',y') est sur la circonférence ; en désignant par x'' et y'' ses coordonnées, on aura $x'=x''$, $y'=y''$ et $x''^2+y''^2=R^2$; et comme alors $d=R$, il vient $z'=0$ et $x''+ay''=0$; d'où $a=-\frac{x''}{y''}$. Cette valeur de a étant unique, on voit que *par un point* (x'', y'') *donné sur la circonférence, on ne peut mener qu'une seule tangente à cette ligne*. De là on tire $yy''+xx''=R^2$ pour l'équation de la tangente ; mais nous allons chercher cette équation d'une autre manière.

35. Proposons-nous de trouver l'équation d'une droite (D) perpendiculaire à l'extrémité (x'',y'') du rayon R. D'abord l'équation de ce rayon est de la forme $y=a'x$; et puisque le point (x'',y'') appartient à la fois au même rayon et à la circonférence $x^2+y^2=R^2$, on a à la fois

$$y''=a'x'' \text{ et } x''^2+y''^2=R^2.$$

L'équation de la droite (D), passant par le point (x'',y''), est de la forme $\quad y-y''=a(x-x'')$;

la condition d'être perpendiculaire au rayon R, donne $aa'+1=0$; d'où à cause de $a'=\frac{x''}{y''}$, il vient $a=-\frac{y''}{x''}$. Substituant cette valeur dans l'équation de (D) et réduisant d'après la relation $x''^2+y''^2=R^2$, on trouvera l'équation cherchée

$$yy''+xx''=R^2.$$

Maintenant pour montrer que la droite (D) représentée par cette équation, est tout entière hors du cercle, retranchons le double de la même équation hors de celle-ci : $x''^2+y''^2=R^2$; nous aurons $\quad y''^2-2yy''+x''^2-2xx''=-R^2$

Cette soustraction n'ayant pas changé les valeurs des coordonnées x et y d'un point quelconque de la droite (D), l'équation résultante représente toujours la même droite. Soit d la distance du point (x, y) au centre; on aura $x^2 + y^2 = d^2$. Ajoutant cette équation à la précédente, il viendra

$$(y - y'')^2 + (x - x'')^2 = d^2 - R^2.$$

Cette équation représente encore la même droite (D). Or, le premier membre étant toujours positif, quel que soit le point (x, y) de cette droite, la distance d de ce point au centre sera toujours plus grande que le rayon R; tous les points de (D) sont donc hors du cercle, à l'exception du point (x'', y''), qui est sur la circonférence; la droite (D) n'a donc que le seul point (x'', y'') de commun avec cette courbe : donc elle lui est tangente en ce point.

On voit ainsi que *la perpendiculaire à l'extrémité* (x'', y'') *d'un rayon est tangente à la circonférence.* L'équation de cette tangente est $yy'' + xx'' = R^2$, et sa direction est déterminée par $a = -\frac{y''}{x''}$.

36. Voyons maintenant comment on peut mener une tangente à la circonférence, par un point donné (x', y'). Soit d la distance de ce point à l'origine ou au centre; on aura d'abord

$$x'^2 + y'^2 = d^2 \dots (1)$$

De plus, le point de contact cherché (x'', y''), étant sur la circonférence, on a

$$x''^2 + y''^2 = R^2 \dots (2)$$

Enfin, la tangente $yy'' + xx'' = R^2$, devant passer par le point (x', y'), pour lequel $x = x'$ et $y = y'$, il vient

$$y'y'' + x'x'' = R^2 \dots (3)$$

Résolvant les deux dernières équations, par rapport à x'' et à y'', on aura les coordonnées du point de contact cherché; et les valeurs résultantes montreront de plus dans quels cas il y aura deux tangentes, une seule ou aucune.

Mais il sera beaucoup plus simple de déduire des trois équations précédentes, le moyen de construire la tangente menée par le point (x', y') hors du cercle. Or, ajoutant la seconde équation au quart de la première et retranchant la troisième, on trouvera $(y'' - \frac{1}{2}y')^2 + (x'' - \frac{1}{2}x')^2 = \frac{1}{4}d^2 \dots (4)$

Les coordonnées x'' et y'' n'ayant pas changé de valeurs, elles appartiennent, dans cette équation, au même point que dans les équations proposées. Mais il est visible que la nouvelle équation représente une circonférence, dont $\frac{1}{2}y'$ et $\frac{1}{2}x'$ sont les coordonnées du centre (26); conséquemment ce centre est le milieu de la distance d. Et comme le rayon est $\frac{1}{2}d$, on voit que cette circonférence est décrite sur la distance d, prise pour diamètre. D'ailleurs, les coordonnées x'' et y'' du point de contact cherché, doivent satisfaire à l'équation (4); ce point appartient donc à la nouvelle circonférence : déjà il appartient à la proposée; il se trouve donc aux intersections de ces deux courbes. De sorte que si l'on joint par des droites ces deux points d'intersection au point donné (x', y'), on aura les deux tangentes que l'on peut mener à la circonférence, par un point situé hors du cercle; et telle est précisément la construction prescrite en géométrie pour mener une tangente à la circonférence, d'un point donné hors de cette courbe.

37. *Un cercle, dont* O *est le centre, et un point* P *étant donnés sur un plan, trouver le lieu des intersections des tangentes aux points où la circonférence est coupée par une droite quelconque menée du point* P.

Plaçons l'origine des coordonnées rectangulaires au centre O et l'axe des x suivant la droite d qui joint ce centre au point P. Soient (x', y') et (x'', y'') les points où la droite tirée de P coupe la circonférence; l'équation de cette droite sera donc

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x').$$

Et puisque le point P ou (d, o) se trouve sur la même droite on a
$$-y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(d - x'); \text{ d'où } \frac{y' - y''}{x' - x''} = \frac{-y'}{d - x'}.$$

Les tangentes menées aux points (x', y') et (x'', y''), ont respectivement pour équations

$$yy' + xx' = R^2,$$
$$yy'' + xx'' = R^2.$$

Pour le point d'intersection de ces tangentes, les x et les y sont respectivement les mêmes dans leurs équations. Retranchant la seconde de ces équations de la première, puis remplaçant, dans l'équation résultante, la fraction $\frac{y'-y''}{x'-x''}$, par sa valeur trouvée plus haut, et réduisant, il viendra

$$yy' + xx' = dx;\ \text{d'où } R^2 = dx \text{ et } x = \frac{R^2}{d}.$$

Cette valeur de x étant constamment la même, quelle que soit la sécante menée de P, c'est-à-dire quelle que soit l'ordonnée y, représente évidemment une parallèle à l'axe des y. Et suivant que d sera $>$ ou $<$ R, c'est-à-dire suivant que le point P sera au-dehors ou dans l'intérieur du cercle, cette parallèle, au contraire, coupera le cercle, ou lui sera extérieure.

Il résulte donc des calculs précédens, que *si d'un point situé dans le plan d'un cercle, on mène autant de sécantes qu'on voudra, les points de rencontre des deux tangentes aux intersections de chaque sécante, seront tous sur une perpendiculaire à la droite qui joint le centre du cercle au point proposé.*

38. On peut donc dire que la sécante *pivote* sur le point P, quand le point de rencontre des deux tangentes correspondantes parcourt la perpendiculaire P′, dont on vient de parler. Pour exprimer plus brièvement ce fait, on a donné au point P, un nom qui signifie *pivot de rotation*; il s'appelle *pôle* de la perpendiculaire P′, et celle-ci est dite la *polaire* du point P. Rien n'est plus facile que de trouver le pôle, lorsque la polaire est donnée, et réciproquement; il suffit pour cela, de déterminer d ou x dans $dx = R^2$.

Soit P″ le point où la perpendiculaire P′ rencontre la droite d, c'est-à-dire l'extrémité de l'abscisse x; on a nommé *pôles conjugués* d'un cercle, deux points P et P″ en ligne droite avec son centre, de manière que le rayon R soit moyen proportionnel entre leurs distances d et x à ce centre. D'où il suit que le sommet d'un angle circonscrit au cercle et le milieu de la corde qui joint les deux contacts, sont deux pôles conjugués l'un de l'autre.

39. On appelle *axe radical* de deux cercles, une droite telle, qu'en menant de l'un quelconque de ses points, des tangentes aux deux circonférences, ces tangentes sont égales entre elles. Voyons s'il peut exister une telle droite. Soit d la distance des centres des deux cercles proposés; R et R′ leurs rayons. Plaçons l'origine des coordonnées rectangulaires au centre du premier cercle et l'axe des x suivant la droite d. Soit (x', y') un point

tel, qu'en menant de ce point des tangentes aux deux circonférences, les longueurs de ces tangentes, depuis le point (x', y') jusqu'aux deux contacts, soient égales chacune à c; il est visible que les distances de (x', y') à l'origine et au centre du second cercle, forment deux triangles rectangles, ayant l'un R et c pour côtés de l'angle droit, et l'autre R' et c : on a par conséquent

$$x'^2 + y'^2 = R^2 + c^2,$$
$$(d - x')^2 + y'^2 = R'^2 + c^2.$$

Retranchant la seconde de ces équations de la première, on aura

$$x' = \frac{d^2 + R^2 - R'^2}{2d}, \text{ ou } x' = \tfrac{1}{2}d + \frac{(R + R')(R - R')}{2d}.$$

Cette équation représente une droite d', parallèle à l'axe des ordonnées; car elle reste la même, quelle que soit la longueur c des deux tangentes égales menées du point (x', y'), c'est-à-dire quel que soit ce point et par conséquent son ordonnée y'. De plus, comme cette équation est unique et qu'elle est vraie, quelles que soient les trois quantités R, R' et d, il s'ensuit que deux cercles ont toujours et n'ont jamais qu'un seul axe radical, tel que nous l'avons défini : c'est la droite d' perpendiculaire à la distance d des centres et éloignée du premier de la distance x', que nous venons de calculer. Il est bien facile, d'après cette valeur, de construire l'axe radical de deux cercles donnés.

40. Il résulte aussi de la valeur précédente de x', 1° que si deux cercles se coupent, leur axe radical est dirigé suivant la corde commune; 2° que si deux cercles se touchent, intérieurement ou extérieurement, leur axe radical est la tangente commune au point qu'ils ont de commun; 3° enfin, que la différence des carrés des rayons de deux cercles, est égale à la différence des carrés des distances de leurs centres au point où l'axe radical coupe la droite qui joint ces deux centres. Ce point est dit le *centre radical* des deux cercles proposés.

41. *Les axes radicaux de trois cercles quelconques, pris deux à deux, se coupent toujours en un même point, appelé* centre radical *de ces cercles.*

Supposons d'abord que les trois cercles proposés A, B, C, ne se coupent pas, ou du moins que l'un d'eux ne coupe pas les deux autres; soit P le point de rencontre de l'axe radical des deux cercles A et B, avec l'axe radical des deux cercles A et C;

du point P menons les tangentes A′, B′, C′, aux cercles A, B, C. Puisque P appartient à l'axe radical des deux cercles A et B, les tangentes A′ et B′ sont égales (39). De même, puisque P appartient à l'axe radical des deux cercles A et C, les tangentes A′ et C′ sont égales. Donc les tangentes B′ et C′, égales à la même A′, sont égales entre elles, et par conséquent P est un point de l'axe radical des deux cercles B et C : donc enfin les trois axes radicaux se rencontrent au même point P.

Supposons actuellement que les trois cercles A, B, C se coupent; soient R, R′, R″ leurs rayons; les équations de ces cercles seront respectivement

$$(x-p)^2+(y-q)^2=R^2 \text{ ou } A''=0,$$
$$(x-p')^2+(y-q')^2=R'^2 \text{ ou } B''=0,$$
$$(x-p'')^2+(y-q'')^2=R''^2 \text{ ou } C''=0.$$

Les équations des cordes communes à ces trois cercles, c'est-à-dire de leurs axes radicaux, sont respectivement

$$A''-B''=0,\ A''-C''=0 \text{ et } B''-C''=0.$$

Or, pour le point P d'intersection des deux premiers axes, les x et les y sont respectivement les mêmes dans leurs équations; donc, puisqu'en retranchant la première de ces équations de la seconde, on obtient $B''-C''=0$, c'est-à-dire l'équation du troisième axe radical, il s'ensuit que le point P tombe aussi sur cet axe.

42. Voici quelques problèmes à résoudre :

I. Trouver le lieu de tous les points tels, que la somme des carrés des distances de chacun à deux points donnés, vaille un carré donné c^2.

II. Connaissant l'angle de deux droites qui se coupent au centre d'un cercle donné, mener à celui-ci une tangente telle, que ses parties comprises entre le point de contact et les deux droites proposées, aient un rapport connu n. (Ce problème peut avoir huit solutions.)

III. Par un point donné sur le plan d'un cercle connu, mener deux sécantes perpendiculaires entre elles, de manière que les parties interceptées par la circonférence, soient dans le rapport donné n. (La solution conduit à un théorème assez remarquable.)

IV. Etant donnés tant de points qu'on voudra sur un plan, en trouver un autre tel, que la somme des carrés de ses distances aux premiers, vaille un carré donné c^2. (On pourrait aussi demander que cette somme fût la moindre possible; et alors, s'il y a seulement trois points, sommets d'un triangle, le point cherché sera le centre de gravité de ce triangle.)

V. Trouver le lieu des sommets de tous les angles égaux à A, dont les côtés passent constamment par deux points donnés B et C. (La solution analytique conduit à la construction pour décrire sur la corde BC un segment capable de l'angle donné A ; mais il faut pour cela, que l'origine des coordonnées rectangulaires soit au milieu de la corde BC et l'axe des x dirigé suivant cette corde : autrement, il serait fort difficile d'arriver à la construction du problème.)

De la Transformation des coordonnées.

43. Lorsqu'on veut résoudre une question à l'aide des principes de la géométrie analytique, la première chose à faire est de choisir les axes des coordonnées, de manière à simplifier les calculs et à fournir les résultats les plus faciles à interpréter géométriquement. Or, pour cela, les axes doivent être le plus souvent rectangulaires ; quelquefois cependant il faut les prendre obliques ; d'autres fois l'un d'eux doit être dirigé suivant une droite donnée, l'origine doit être placée à un certain point, etc. Mais l'usage seul peut apprendre comment il faut disposer les axes et l'origine, pour que l'équation à considérer ait le moindre nombre de termes qu'il se puisse.

Comme il n'arrive pas toujours qu'on ait pu faire le meilleur choix à cet égard, et que souvent les axes sont déjà déterminés, on a recours à *la transformation des coordonnées*, dont le but est de faire disparaître quelques termes de l'équation proposée, en changeant l'origine et la direction des axes ; préparation qui la met en état d'être résolue et discutée plus aisément.

44. Quand on veut ainsi passer d'un système de coordonnées à un autre, on cherche, pour un point quelconque, les valeurs des anciennes coordonnées en fonction des nouvelles : en substituant ces valeurs dans l'équation proposée, elle appartient toujours aux mêmes points ; mais ces points s'y trouvent rapportés aux nouveaux axes. Par conséquent les propriétés de la courbe restent toujours les mêmes, et il n'y a de changement que dans la manière dont elles sont exprimées.

45. Voyons d'abord comment on passe d'un système de coordonnées rectangulaires, à un système de coordonnées obliques, d'une autre origine. Soient h et k les coordonnées AQ et QA′ de la nouvelle origine A′ (fig. 8) ; soient A′X′ et A′Y′ les nouveaux axes des x' et des y' ; M un point quelconque de la ligne ; x et

y ses coordonnées rectangulaires AP et PM; x' et y' ses nouvelles coordonnées A'P' et P'M; soient enfin $y=ax+b$ et $y=a'x+b'$ les équations des nouveaux axes A'X' et A'Y'. Menant A'E et P'D parallèles à AX; prenant A'I $=1$ et tirant IK perpendiculaire à A'E, on aura IH $=a$ et IK $=a'$. De sorte, qu'en désignant A'H par m et A'K par m', il viendra $m^2=1+a^2$ et $m'^2=1+a'^2$.

Cela posé, on a évidemment

$$x=h+\text{A'C}+\text{P'D},$$
$$y=k+\text{CP'}+\text{DM}.$$

Les triangles semblables A'IH et A'CP' donnent

$$m:x'::1:\text{A'C}=\frac{x'}{m} \text{ et } m:x'::a:\text{CP'}=\frac{ax'}{m}.$$

Pareillement, les triangles semblables A'IK et P'DM fournissent

$$m':y'::1:\text{P'D}=\frac{y'}{m'} \text{ et } m':y'::a':\text{DM}=\frac{a'y'}{m'}.$$

Substituant ces valeurs, on trouve

$$\left.\begin{aligned} x&=h+\frac{x'}{m}+\frac{y'}{m'},\quad m^2=1+a^2,\\ y&=k+\frac{ax'}{m}+\frac{a'y'}{m'},\quad m'^2=1+a'^2.\end{aligned}\right\}\ (1)$$

Telles sont les formules générales pour passer d'un système de coordonnées rectangulaires, à un système de coordonnées obliques, d'une autre origine. Si l'origine était la même, h et k seraient nuls.

46. Si l'angle des nouveaux axes était droit, on aurait $aa'+1=0$; d'où à cause de $m^2=1+a^2$, il vient $a'=-\frac{1}{a}$, $m'=\frac{m}{a}$ et par suite

$$\left.\begin{aligned} x&=h+\frac{x'}{m}+\frac{ay'}{m},\\ y&=k+\frac{ax'}{m}-\frac{y'}{m}\end{aligned}\right\}\ (2)$$

Ces formules sont donc pour passer d'un système de coordonnées rectangulaires, à un système de coordonnées rectangulaires, d'une autre origine.

47. Maintenant, si l'on veut passer d'un système d'axes obliques, à un système d'axes rectangulaires, de même origine, il

suffira de faire $h=0$ et $k=0$, dans les formules (1) et de résoudre ces mêmes formules par rapport à x' et y' : on trouvera ainsi

$$y'=\frac{m'(y-ax)}{a'-a} \text{ et } x'=\frac{m(a'x-y)}{a'-a} \dots (3)$$

48. Enfin, si l'on veut passer d'un système quelconque, à un autre parallèle, on prendra

$$x=h+x' \text{ et } y=k+y',$$

comme il est bien facile de le vérifier.

Il resterait encore à trouver les formules pour passer d'un système de coordonnées obliques, à un autre oblique pareillement ; mais comme nous ne ferons pas usage de ces formules, nous ne les rapporterons pas ici.

49. Pour donner une application des formules précédentes, supposons que les axes étant obliques, l'équation d'une ligne soit

$$x^2+y^2+\tfrac{48}{25}xy=64, \dots (4)$$

et proposons-nous de transformer les coordonnées, de manière à faire disparaître le produit xy. Pour cela, on prendra les formules pour passer d'un système d'axes obliques, à un système d'axes rectangulaires, de même origine ; on remplacera donc, dans l'équation précédente, y et x par les seconds membres des formules (3) ; puis après avoir développé, on égalera à zéro le coefficient du produit xy, et on aura ainsi les deux équations

$$(a^2m'^2+a'^2m^2-\tfrac{48}{25}aa'mm')x^2+(m^2+m'^2-\tfrac{48}{25}mm')y^2= 64(a'-a)^2 \text{ et}$$

$$2am'^2+2a'm^2-\tfrac{48}{25}(a+a')mm'=0.$$

Remettant les valeurs de m et m', dans la dernière de ces équations, et supprimant le facteur $2(a+a')$, on aura

$$aa'+1-\tfrac{24}{25}\sqrt{(1+a^2)(1+a'^2)}=0.$$

Cette équation entre les deux indéterminées a et a' fera connaître l'une d'elles, dès que l'autre sera donnée. Si l'on prend, par exemple, $a=0$, il en résultera $a'=\frac{7}{24}$; et alors l'équation de la courbe représentée par l'équation (4), deviendra

$$x^2+y^2=64;$$

cette courbe est donc une circonférence ayant 8 pour rayon.

On pourrait prendre toute autre valeur pour a ; par exemple, en faisant $a=\frac{3}{4}$, il vient $a'=\frac{4}{3}$ et encore $x^2+y^2=64$.

50. Une équation du second degré, à deux variables x et y, peut représenter quatre courbes différentes, nommées *courbes du second degré*, savoir : la circonférence, l'ellipse, la parabole et l'hyperbole. Ces courbes sont aussi appelées *sections coniques*, parce qu'on les obtient en coupant un cône droit par des plans diversement inclinés.

Nous allons chercher les principales propriétés des trois dernières courbes.

De l'Ellipse.

51. On appelle *ellipse*, une courbe plane telle, que la somme des distances de chacun de ses points à deux points donnés F, F', est constamment la même et égale à une droite donnée 2A. Ces points F et F' sont dits les *foyers* de l'ellipse, et les droites menées des foyers à un point quelconque de la courbe, sont les *rayons vecteurs* de cette conrbe.

52. Pour construire l'elllpse, d'après sa définition, prenons le milieu O de la distance FF' (fig. 9) ; portons sur cette droite prolongée, les distances OB et OB' égales chacune à la moitié de 2A ; les points B et B' appartiendront d'abord à la conrbe cherchée. Car ayant $FB = A - OF$ et $F'B = A + OF$, il vient $FB + F'B = 2A$. On verra de même que $FB' + F'B' = 2A$.

Pour avoir d'autres points, prenons sur FF' un point quelconque I, puis des foyers F et F' comme centres et avec des rayons respectivement égaux à IB et IB', décrivons deux arcs se coupant en M et M' ; ces deux points appartiennent à l'ellipse. Car puisque $FM = IB$ et $F'M = IB'$, on a $FM + F'M = BB' = 2A$. De même $FM' + F'M' = 2A$. Ainsi M et M' sont deux points de l'ellipse ; et on en trouverait quatre, si l'on portait successivement chacune des deux ouvertures de compas aux deux foyers. On voit d'ailleurs que BB' est perpendiculaire au milieu de MM'.

Après avoir trouvé ainsi une série de points suffisamment approchés les uns des autres, on les joindra par une ligne continue BCB'C', qui sera l'ellipse demandée.

On peut aussi construire l'ellipse d'un mouvement continu, en fixant aux foyers F et F' deux épingles, auxquelles soit attaché un fil dont la longueur égale 2A ; puis en faisant glisser un style ou un crayon qui tienne ce fil toujours tendu : la courbe sera tracée quand l'instrument mobile aura fait deux demi-révolutions, l'une au-dessus de FF' et l'autre au-dessous.

Enfin si l'ellipse doit être tracée sur le terrain, on se sert d'un cordeau ayant $2A$ pour longueur, et de trois piquets, dont deux fixent les extrémités du cordeau aux foyers F, F', et le troisième sert à tracer la courbe, en tenant le cordeau toujours tendu.

Il est clair que quand les deux foyers coïncident, l'ellipse est une circonférence de cercle ; et à mesure que les deux foyers s'éloignent l'un de l'autre, l'ellipse s'alonge de plus en plus, jusqu'à devenir enfin une ligne droite, lorsque les deux foyers sont arrivés aux extrémités de la droite $BB' = 2A$.

53. Maintenant que nous avons une idée de la forme de l'ellipse, cherchons l'équation de cette courbe. Pour cet effet, plaçons l'origine des coordonnées rectangulaires au milieu O de la droite FF', que nous prendrons égale à $2c$, et dirigeons l'axe des x suivant cette droite. Soit M un point quelconque de la courbe ; soient x, y les coordonnées OP et PM du point M ; enfin, soient r et r' les deux rayons vecteurs FM et F'M, dont la somme, d'après la définition, doit toujours être égale à la droite donnée $2A$: on aura donc d'abord $r' + r = 2A$.

Ensuite, à cause de $FP = x - c$ et $F'P = x + c$, les deux triangles rectangles FMP, F'MP, fournissent

$$r^2 = y^2 + (x - c)^2 \text{ et } r'^2 = y^2 + (x + c)^2.$$

Prenant successivement la somme et la différence de ces équations, il viendra, en réduisant,

$$r'^2 + r^2 = 2y^2 + 2x^2 + 2c^2 \text{ et } r'^2 - r^2 = 4cx.$$

Mais $r'^2 - r^2$ étant la même chose que $(r' + r)(r' - r)$, si dans ce produit, on substitue

$$r' + r = 2A,$$

on trouvera
$$r' - r = \frac{2cx}{A}.$$

Ces deux équations donnent

$$r' = A + \frac{cx}{A} \text{ et } r = A - \frac{cx}{A}.$$

Substituant ces valeurs dans $r'^2 + r^2 = 2y^2 + 2x^2 + 2c^2$, on obtiendra

$$A^2 + \frac{c^2x^2}{A^2} = x^2 + y^2 + c^2;$$

d'où $$A^2y^2 + (A^2 - c^2)x^2 = A^2(A^2 - c^2).$$

Il est clair que FF' ou $2c < 2A$; donc $A^2 - c^2$ est essentiellement positif; et si l'on pose $A^2 - c^2 = B^2$, B sera connu, et l'on aura enfin $$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2.$$

Telle est l'équation la plus simple de l'ellipse.

54. Discutons cette équation; et pour cela, résolvons-la par rapport à y; nous aurons

$$y = \pm \frac{B}{A}\sqrt{A^2 - x^2}.$$

Ces deux valeurs étant égales et de signes contraires, on voit que pour une même abscisse AP, il y a deux ordonnées égales PM, PM', et que par suite la courbe est divisée en deux parties égales par l'axe des x. On verra de même qu'elle est divisée en deux parties par l'axe des y. De plus, P étant le milieu de la *corde* MM', parallèle à OC, il s'ensuit que chaque axe des coordonnées divise en deux parties égales toute corde parallèle à l'autre.

Faisant successivement $x = o$ et $y = o$, pour avoir les points où la courbe rencontre les axes des coordonnées, on trouvera $y = \pm B$ et $x = \pm A$. L'ellipse coupe donc l'axe des ordonnées en deux points C et C', placés à la même distance B de l'origine O et de part et d'autre. De même, elle coupe l'axe des abscisses en deux points B et B', à la même distance A et de part et d'autre de l'origine.

L'abscisse augmentant depuis $x = o$ jusqu'à $x = A$, l'ordonnée diminue depuis $y = B$ jusqu'à $y = o$. De plus, $x = A$ représentant une parallèle à l'axe des ordonnées (3), et les deux valeurs de y étant alors nulles, les deux points où cette parallèle coupe l'ellipse, se réunissent en un seul B; donc cette parallèle est tangente à la courbe en B. Cette courbe ne saurait donc s'étendre dans le sens OB au-delà de l'abscisse $x = A = OB$. Effectivement, pour $x > A$, les deux valeurs de y sont imaginaires. Ainsi l'ellipse est renfermée dans le rectangle qu'on obtient en menant des parallèles aux axes des coordonnées, par les quatre points B, C, B', C', où elle coupe ces axes. En outre $x = A$ est la plus grande abscisse et $y = B$ la plus grande ordonnée.

Les droites $2A = BB'$ et $2B = CC'$ s'appellent les *axes* de l'ellipse ; la première $2A$ en est le *grand axe*, la seconde $2B$ le *petit axe* et l'origine O le *centre*.

L'ellipse est dite *rapportée à ses axes et au centre*, lorsqu'elle est représentée par l'équation $A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2$, les coordonnées étant rectangulaires. Les extrémités B et B' du grand axe $2A$ sont les *sommets* de l'ellipse, et la demi-distance c des deux foyers se nomme *excentricité*. Si les axes $2A$ et $2B$ sont égaux, l'excentricité c est nulle, puisqu'elle est donnée par $A^2 - c^2 = B^2$; les deux foyers coïncident donc avec l'origine, et l'ellipse n'est plus qu'un cercle, ayant A pour rayon. Aussi l'équation de l'ellipse se réduit-elle alors à celle de la circonférence $x^2+y^2=A^2$. La circonférence n'est donc qu'une ellipse dont les deux axes sont égaux.

55. Pour construire les deux foyers, et conséquemment l'excentricité c lorsque les axes sont donnés, il suffit de décrire un arc de l'extrémité C du petit axe, comme centre, et avec un rayon A égal au demi-grand axe ; cet arc coupera ce grand axe BB' aux deux foyers F et F'.

56. Il importe de remarquer actuellement, que réciproquement, *toute équation de la forme* $My^2+Nx^2=P$, M, N *et* P *étant positifs et les coordonnées rectangulaires, représente une ellipse.* D'abord si M n'était pas plus grand que N ; en prenant alors l'axe des x pour celui des y et réciproquement, le coefficient de y^2, dans l'équation résultante, serait plus grand que celui de x^2. Nous pouvons donc supposer $M > N$. Dans ce cas, multiplions les deux membres de l'équation proposée par $\frac{P}{MN}$, et posons $\frac{P}{N} = A^2$ et $\frac{P}{M} = B^2$; cette équation deviendra

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2 \;\ldots\; (1)$$

Dans cette équation A et B sont connus, et A est plus grand que B. Or, prenant sur l'axe des x, deux points F et F', de part et d'autre de l'origine et à une distance c telle qu'on ait $c^2 = A^2 - B^2$, puis désignant par d et d' les distances de F et F' à un point quelconque (x, y) de la courbe (1), on aura

$$d^2 = y^2 + (x-c)^2 \text{ et } d'^2 = y^2 + (x+c)^2.$$

Développant ces valeurs, observant que $c^2 = A^2 - B^2$ et que l'équation (1) donne $y^2 = B^2 - \frac{B^2x^2}{A^2}$, il viendra

$$d^2 = B^2 - \frac{B^2x^2}{A^2} + x^2 - 2cx + A^2 - B^2 = A^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{A^2};$$

d'où $d^2 = \left(A - \frac{cx}{A}\right)^2$. Comme la plus grande valeur de x est A et que $c < A$, on voit que la valeur absolue de d, la seule qu'il nous faille considérer ici, est $d = A - \frac{cx}{A}$.

Par des calculs tout-à-fait semblables, on trouvera $d' = A + \frac{cx}{A}$; donc $d + d' = 2A$. Ainsi l'équation (1), et conséquemment l'équation proposée $My^2 + Nx^2 = P$, représente une courbe telle, que la somme des distances de chacun de ses points à deux points donnés F et F', est constamment égale à la droite donnée $2A$; donc cette courbe est une ellipse, dont $2A$ et $2B$ sont les axes, F et F' les foyers et c l'excentricité (54).

Il est facile, d'après cela, de tracer les ellipses exprimées par les équations

$$\frac{4}{3}x^2 - 2 + \frac{1}{12}y^2 = 1 - \frac{2}{3}y^2,$$

$$7y^2 + 6x - \frac{11}{24} + \frac{x^2}{5} = 6 - x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 5y.$$

Dans la dernière de ces équations, on fera d'abord disparaître les premières puissances de x et de y, en employant les formules $x = h + x'$ et $y = k + y'$.

Les valeurs trouvées plus haut pour d et d' font voir que la distance d'un foyer à un point quelconque de l'ellipse, est une fonction *rationnelle* de l'abscisse de ce point. Il serait bien aisé de démontrer que les foyers sont les seuls points du plan de l'ellipse qui jouissent de cette propriété.

57. *Si l'on coupe la surface convexe d'un cône droit par un plan incliné à l'axe* CV *et rencontrant toutes les génératrices, l'intersection* MNGR *sera une ellipse* (fig. 10).

Par l'axe CV, menons le plan HCI perpendiculaire au plan coupant MNGR et le rencontrant suivant la droite RN que nous désignerons par $2A$. Plaçons l'origine des coordonnées rectangulaires au milieu O de RN et l'axe des x suivant cette droite. Soient x et y les coordonnées OP et PM d'un point quelconque M de la courbe MNGR; nous aurons $PN = A - x$ et $PR = A + x$. Or, PM étant perpendiculaire à l'intersection RN, le sera aussi au plan HCI; donc si par la droite PM, on mène un plan perpendiculaire à l'axe CV, ce plan coupera la surface conique suivant une circonférence, dont DS sera le diamètre. Mais M est un point de cette circonférence, et MP, perpendiculaire au plan HCI, l'est aussi au diamètre DS; donc $MP^2 = PS \times PD$, ou $y^2 = PS \times PD$.

Reste à déterminer PS et PD. Pour cela, on observe que les deux droites SD et IH sont parallèles, tandis que les deux droites non-parallèles IH et NR, situées dans le même plan CIH, finiront toujours par se rencontrer en un point K; les triangles KRH et RDP sont donc semblables, aussi bien que KNI et PNS, et il vient

$$KR : A + x :: KH : DP, \quad KN : A - x :: KI : PS.$$

Prenant les valeurs de DP et PS dans ces proportions, puis substituant ces valeurs dans celle de y^2, on aura, pour tous les points de l'intersection MNGR,

$$y^2 = \frac{KH.KI}{KR.KN}(A^2 - x^2).$$

Faisant $x = 0$ dans cette équation, on aura les distances de l'origine O aux points où la courbe coupe l'axe des y: désignant ces distances par B, on obtiendra

$$B^2 = \frac{KH.KI}{KR.KN}A^2, \text{ ou } \frac{B^2}{A^2} = \frac{KH.KI}{KR.KN}.$$

Il est clair que B est connu, puisque les droites KH, KI, KR, KN, sont déterminées par les dimensions du cône et la position du plan coupant, qui sont données. Ainsi l'équation de l'intersection devient $A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2$;

cette courbe est donc une ellipse, dont 2A et 2B sont les axes, O le centre, et R et N les sommets (56).

58. Voyons maintenant comment l'équation de l'ellipse conduit aux diverses propriétés de cette courbe. D'abord il est facile de voir que la double ordonnée qui passe par un foyer, vaut $\frac{2B^2}{A}$. On la nomme *paramètre* : c'est une troisième proportionnelle aux deux axes.

Ensuite, soient (x, y) et (x', y') deux points quelconques de l'ellipse; on aura

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - x^2), \; y'^2 = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - x'^2);$$

d'où l'on tire $y^2 : y'^2 :: (A - x)(A + x) : (A - x')(A + x')$; c'est-à-dire, que dans l'ellipse, les carrés des ordonnées sont entre eux comme les produits des distances des pieds de ces ordonnées aux extrémités du grand axe.

59. *Toute droite* MON *menée par l'origine* O *et terminée de part et d'autre à l'ellipse, est divisée en deux parties égales par cette origine* (fig. 9). En effet, les équations de l'ellipse et de la droite MON, étant

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2 \text{ et } y = ax;$$

pour les points où ces deux lignes se coupent, leurs équations sont satisfaites par les mêmes valeurs de x et les mêmes valeurs de y. Si donc on élimine y entre ces équations, on trouvera pour x deux valeurs égales et de signes contraires; de sorte que l'une étant OP, l'autre sera OP'; et les deux triangles rectangles OMP et ONP' seront égaux : donc OM = ON.

Les droites terminées à l'ellipse et menées par l'origine, étant divisées chacune en deux parties égales par cette origine, sont appelées *diamètres* de l'ellipse (ce qui a fait donner à l'origine le nom de *centre* de la courbe).

Il est bien aisé de prouver qu'une droite $y = ax + b$ ne peut jamais couper l'ellipse en plus de deux points.

60. *Les deux axes de l'ellipse sont l'un le plus grand et l'autre le plus petit de tous ses diamètres.* Car en désignant par d le demi-diamètre OM, on aura $d^2 = x^2 + y^2$. Substituant dans cette équation la valeur de y^2, tirée de l'équation de l'ellipse, il viendra

$$d^2 = B^2 + \frac{A^2 - B^2}{A^2} x^2.$$

Comme $A > B$, il est clair, par cette égalité, que la plus grande et la plus petite valeur de d, répondent à la plus grande et à la plus petite valeur de x, c'est-à-dire à $x = A$ et $x = 0$; la plus grande et la plus petite valeur de d sont donc en effet, $d = A$ et $d = B$.

Il suit de là que si du centre de l'ellipse et avec des rayons égaux à ses demi-axes, on décrit deux circonférences de cercle, l'ellipse comprendra la plus petite et sera comprise dans la plus grande.

61. *Suivant qu'un point est situé sur l'ellipse, au-dehors ou au-dedans, le trinome* $A^2y^2 + B^2x^2 - A^2B^2$ *est nul, positif ou négatif.* En effet, on sait déjà que pour tout point sur l'ellipse, ce trinome est nul. Mais l'abscisse x restant la même, si le point

(x, y) est au-dehors ou au-dedans de l'ellipse, l'ordonnée y sera plus grande ou plus petite que sur l'ellipse ; le trinome sera donc plus grand ou plus petit que zéro ; il sera par conséquent positif ou négatif. La réciproque est vraie.

62. *Lorsque deux droites* $y = ax + b$ *et* $y = a'x + b'$, *menées des extrémités du grand axe, se coupent sur l'ellipse, on a toujours* $A^2aa' + B^2 = 0$. D'abord ces droites passant par les points $(A, 0)$ et $(-A, 0)$, leurs équations deviennent respectivement

$$y = a(x - A),$$
$$y = a'(x + A).$$

L'équation de l'ellipse est d'ailleurs

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2.$$

Puisque les deux premières lignes se coupent sur la troisième, il s'ensuit que y a les mêmes valeurs dans les trois équations précédentes, ainsi que x. Si donc on prend ces valeurs de y et de x dans les deux premières équations, et qu'on les substitue dans la troisième, celle-ci sera satisfaite et deviendra

$$aa'(A^2aa' + B^2) = 0.$$

Cette équation fournit d'abord $aa' = 0$, qui n'apprend rien ; elle donne ensuite $A^2aa' + B^2 = 0$. Ce qu'il fallait démontrer.

On aurait encore la même relation si les droites qui se coupent sur l'ellipse, partaient des extrémités du petit axe.

Il est facile de voir que réciproquement, si deux droites $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$, partant des extrémités de l'un des axes, ont leurs a et a' tels, qu'on ait $A^2aa' + B^2 = 0$, ces deux droites se couperont sur l'ellipse.

63. On appelle *cordes supplémentaires* d'une ellipse, les droites qui, partant des extrémités d'un même diamètre, se coupent sur la courbe.

Soit v l'angle compris par deux cordes supplémentaires menées des extrémités du grand axe, du côté des y positifs, et v' l'angle des cordes supplémentaires tirées des extrémités du petit axe, du côté des x positifs ; on aura donc à la fois, pour les deux premières cordes,

$$y = a(x - A),\ y = a'(x + A) \text{ et } \operatorname{tang} v = \frac{a' - a}{1 + aa'}.$$

Substituant dans la dernière équation, les valeurs de a et a', tirées des deux autres, puis ayant égard à l'équation de l'ellipse, on trouvera

$$\text{tang}\, v = \frac{-2AB^2}{(A^2-B^2)y}. \text{ De même, tang}\, v' = \frac{2A^2B}{(A^2-B^2)x}.$$

Puisque tang v est négative et tang v' positive, l'angle v est obtus et l'angle v' aigu. De plus, dès que y aura sa plus grande valeur B et x sa plus grande valeur A, l'angle v sera le plus grand possible et l'angle v' le moindre possible. D'où il suit, 1° que *l'angle compris entre les cordes supplémentaires menées des extrémités du grand axe, est toujours obtus, et atteint son maximum, lorsque son sommet tombe à l'extrémité du petit axe*; 2° que *l'angle des deux cordes supplémentaires, qui partent des extrémités du petit axe, est toujours aigu, et parvient à son minimum, lorsque son sommet arrive à l'extrémité du grand axe*; 3° enfin que *l'angle obtus maximum et l'angle aigu minimum, valent ensemble deux angles droits*; car ayant alors tang $v' =$ — tang v, il vient $v + v' = 180°$.

64. *Pour une même abscisse, les ordonnées de l'ellipse et de la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre, sont entre elles comme le petit axe est au grand.* Car soient y et y' les ordonnées de l'ellipse et de la circonférence, pour une même abscisse x; les équations de ces deux courbes seront respectivement

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2 \quad \text{et} \quad y'^2 + x^2 = A^2.$$

On tire de ces équations

$$y'^2 = A^2 - x^2 \quad \text{et} \quad y^2 = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - x^2) = \frac{B^2}{A^2}y'^2.$$

De là résulte $y : y' :: B : A :: 2B : 2A$.

65. Cette propriété donne le moyen de décrire une ellipse par points, lorsqu'on connaît ses deux axes. On trace d'abord deux circonférences ayant ces deux axes pour diamètres; on mène ensuite, d'un point de la plus grande, une ordonnée sur le grand axe et une droite au centre; enfin, on tire, par le point où cette droite coupe la petite circonférence, une parallèle à l'axe des x : cette parallèle rencontre l'ordonnée précédente, en un point de l'ellipse cherchée.

66. On peut aussi tracer, d'un mouvement continu, l'ellipse dont on connaît les axes. Pour cela, on prend une règle dont la longueur BM = A, et sur laquelle on marque la distance MI =

B (fig. 11); faisant ensuite mouvoir cette règle, de manière que R soit toujours sur CC′ et I toujours sur BB′, l'extrémité M décrira l'ellipse demandée.

Car soient x et y les coordonnées OP, PM du point M, et menons RQ parallèle à OB; nous aurons

$$B : A :: y : MQ = \frac{Ay}{B} \text{ et } MQ^2 + x^2 = A^2;$$

d'où il vient $$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2:$$

le point M est donc en effet sur l'ellipse cherchée.

Ce moyen est le plus ordinairement employé pour décrire une ellipse sur le papier; et dans ce cas, une petite bande de papier remplace la règle.

67. *Si les extrémités d'une droite donnée qui se meut, sont assujéties à rester respectivement sur deux droites perpendiculaires entre elles, un point quelconque donné sur la droite mobile, décrira une ellipse.*

Ce théorème, que nous laissons à démontrer, a pu suggérer la construction suivante d'un instrument très-simple, pour décrire d'un mouvement continu, l'ellipse dont les axes 2A et 2B sont donnés. On compose cet instrument de trois règles (fig. 12) : la plus grande FF′ = 2A + 2B, et les deux autres OM, MC, sont égales chacune à $\frac{1}{2}$(A + B). La règle EF a son milieu O sur le centre et son arête E′F′ sur le grand axe de l'ellipse. Une cheville ronde passe dans les trous percés au milieu O de EF et à l'extrémité O de OM. Les règles OM et MC sont réunies par une articulation en M à leur extrémité commune. La règle OM est placée au-dessus des deux autres. Enfin, sur MC est un trou N qui reçoit la pointe à tracer et qui est tel qu'on ait MN = $\frac{1}{2}$(A — B).

Rien n'est plus facile que l'usage de cet instrument, appelé *triangle variable* (voyez page 26 de la Géométrie des courbes, par M. Bergery): on fait glisser la pointe C, placée d'abord en F′, le long de F′O, et pendant ce mouvement, la pointe N décrit un quart de l'ellipse. Pour tracer un second quart, on fera passer MC sous OM, de manière que le point C se meuve de O en E′. Enfin, la grande règle étant retournée bout à bout et appliquée de nouveau sur le grand axe, on tracera de même la seconde moitié de l'ellipse.

Pour démontrer que le point N du triangle variable est constamment sur l'ellipse dont les axes ont fourni les dimensions de l'instrument, désignons par x et y les coordonnées OP et PN du point N, et menons NR parallèle à OM; à cause de OM = MC, nous aurons RN = NC et PR = PC. En outre, comme CM = $\frac{1}{2}$(A + B) et CN = B, il est clair qu'on a

$$y^2 = B^2 - PC^2 \text{ et } B : \tfrac{1}{2}(A+B) :: 2PC : x - PC.$$

De là on déduit $PC = \frac{Bx}{A}$ et $A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2$, équation de l'ellipse proposée; donc le point N est constamment sur cette ellipse et la décrit.

68. Cherchons actuellement l'équation d'une tangente à l'ellipse représentée par l'équation $A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2$.

Pour cela, considérons d'abord une sécante rencontrant l'ellipse aux deux points (x', y') et (x'', y'') : l'équation de cette sécante sera donc (14)

$$y-y''=a(x-x'') \text{ et } a=\frac{y'-y''}{x'-x''}.$$

Les deux points (x', y') et (x'', y'') se trouvant sur l'ellipse, on doit avoir

$$A^2y'^2+B^2x'^2=A^2B^2,$$
$$A^2y''^2+B^2x''^2=A^2B^2.$$

Retranchant la seconde de ces équations hors de l'autre, il viendra

$$A^2(y'^2-y''^2)+B^2(x'^2-x''^2)=0;$$

d'où $$A^2(y'+y'')\frac{y'-y''}{x'-x''}+B^2(x'+x'')=0,$$

et $$A^2a(y'+y'')+B^2(x'+x'')=0.$$

Si les deux points d'intersection (x', y') et (x'', y'') se réunissent en un seul, la sécante n'aura que ce seul point de commun avec l'ellipse; elle lui sera donc *tangente*. Alors, comme $x'=x''$ et $y'=y''$, on aura

$$2A^2ay''+2B^2x''=0, \text{ ou } a=-\frac{B^2x''}{A^2y''}.$$

Substituant cette valeur de a dans l'équation $y-y''=a(x-x'')$, qui représente maintenant la tangente à l'ellipse au point (x'', y''); chassant le dénominateur et réduisant, d'après $A^2y''^2+B^2x''^2=A^2B^2$, on trouvera, pour l'équation cherchée de la tangente à l'ellipse en (x'', y''),

$$A^2yy''+B^2xx''=A^2B^2.$$

Il est facile de vérifier qu'en effet, la droite (D) représentée par cette équation, est tout entière hors de l'ellipse. Car si on retranche le double de la même équation hors de $A^2y''^2+B^2x''^2=A^2B^2$, il viendra

$$A^2(y''^2-2yy'')+B^2(x''^2-2xx'')=-A^2B^2;$$

d'où en complétant les carrés, on déduit

$$A^2(y-y'')^2+B^2(x-x'')^2=A^2y^2+B^2x^2-A^2B^2.$$

Cette équation représente toujours la même droite (D). Or, on voit que le trinome $A^2y^2 + B^2x^2 - A^2B^2$ est positif pour tous les points de cette droite, excepté pour le point (x'', y''); donc tous les points de (D), excepté (x'', y''), sont hors de l'ellipse (61); donc la droite (D) n'a que le seul point (x'', y'') de commun avec l'ellipse; donc elle lui est tangente en ce point.

69. Comme le coefficient a, qui détermine la direction de la tangente (12), n'a qu'une seule valeur, il s'ensuit que par un point (x'', y'') donné sur l'ellipse, on ne peut mener qu'une seule tangente à cette courbe.

C'est ce qu'on vérifie d'ailleurs en cherchant le point de contact (x'', y'') d'une tangente à l'ellipse, menée par un point donné (x', y'). Dans ce cas, les équations de l'ellipse et de la tangente, sont:

$$A^2y''^2 + B^2x''^2 = A^2B^2,$$
$$A^2y'y'' + B^2x'x'' = A^2B^2.$$

Eliminant y'' de ces équations, on trouvera, pour x'',

$$x'' = \frac{A^2B^2x' \pm A^2y'\sqrt{A^2y'^2 + B^2x'^2 - A^2B^2}}{A^2y'^2 + B^2x'^2}.$$

Si le point (x', y') est hors de l'ellipse, le trinome sous le radical sera positif (61); x'' et y'' auront donc deux valeurs réelles, et il y aura deux tangentes. Mais si le point (x', y') est sur l'ellipse, le trinome sous le radical sera nul; x'' et y'' n'auront alors qu'une seule valeur réelle chacune, et il n'y aura qu'une tangente. Enfin, si le point (x', y') est dans l'intérieur de la courbe, le trinome sous le radical sera négatif; donc x'' et y'' seront imaginaires, et il n'y aura pas de tangentes. Ce qui est d'ailleurs évident.

70. Remarquons en passant, que si des équations $A^2y''^2 + B^2x''^2 = A^2B^2$ et $A^2ay'' = -B^2x''$, on tire les valeurs de y'' et x'', qu'ensuite on substitue ces valeurs dans l'équation $y'' = ax'' + b$, qui est celle de la tangente au point (x'', y''), cette équation deviendra

$$A^2a^2 + B^2 = b^2.$$

D'où il est aisé de voir que la tangente ne peut être parallèle à l'un des deux axes, que quand le point de tangence est à une extrémité de l'autre axe.

71. Si dans l'équation de la tangente MT à l'ellipse (fig. 13), on fait $y = 0$, on aura l'abscisse x ou OT du point T où cette tangente coupe l'axe des x, et il viendra $OT = \frac{A^2}{x''}$. Mais OF

$= OF' = c$, $FM = A - \frac{cx''}{A}$ (53) et $F'M = A + \frac{cx''}{A}$; donc

$$TF = OT - OF = \frac{A^2}{x''} - c = \frac{A}{x''}\left(A - \frac{cx''}{A}\right) = \frac{A}{x''} \times FM,$$

$$TF' = OT + OF' = \frac{A^2}{x''} + c = \frac{A}{x''}\left(A + \frac{cx''}{A}\right) = \frac{A}{x''} \times F'M.$$

Prenant $ME = FM$, on aura $TF' : TF :: F'M : FM$ ou ME; d'où il suit que FE est parallèle à TM, et qu'ainsi l'angle $GMF' = MEF = EFM = FMT$. De sorte que *dans l'ellipse, les rayons vecteurs* FM, F'M, *menés au point de tangence* M, *font avec la tangente* MT *et d'un même côté de cette ligne, deux angles égaux.*

D'après cette propriété importante, on démontre en Physique, que tous les rayons calorifiques émanés du point F, se réfléchissent sur l'ellipse et vont se réunir au point F'; et réciproquement. C'est de là que les points F et F' ont reçu leur nom de *foyer*.

72. Nous avons résolu plus haut (69), par l'analyse, le problème de mener une tangente à l'ellipse, par un point donné. Voici la solution graphique de ce problème (fig. 13):

1° Supposons que le point donné soit sur l'ellipse, par exemple en M. Menant alors les rayons vecteurs FM et F'M, prolongeant l'un d'eux F'M de la longueur $MK = MF$ et tirant la droite MIT perpendiculaire à FK, cette perpendiculaire sera la tangente demandée. Car les deux triangles rectangles MIF et MIK étant égaux, on a l'angle $FMT = IMK = F'MG$; les deux rayons vecteurs FM et F'M font donc avec la droite MT et d'un même côté, deux angles égaux; cette droite MT coïncide donc avec la tangente en M (71). Il serait d'ailleurs facile de démontrer que tous les points de la droite GMT sont hors de l'ellipse, à l'exception du point M.

2° Supposons actuellement le point donné hors de l'ellipse, et soit G ce point. Du foyer F' comme centre et avec le grand axe 2A pour rayon, on décrira un arc de cercle; du point G comme centre et avec le rayon GF, on décrira un second arc, coupant le premier en K et K'; on mènera les droites F'K et F'K': ces deux droites couperont l'ellipse aux deux points M et M' de tangence, et GM, GM', seront les tangentes demandées. En effet, par construction, $F'MK = 2A$. Mais le point M étant sur l'ellipse, on a aussi $F'MF = 2A$; donc $MK = MF$. D'ailleurs, par construction, GF = GK ; donc la droite GMT est perpendiculaire au milieu de FK ; cette droite est donc tangente au point M (1°). On démontrera de même que GM′ est tangente en M′.

73. Il résulte de la construction (1°) de la tangente MT, que I étant le milieu de FK et O le milieu de FF′, la droite OI est la moitié de F′K. Mais F′K = F′M + MF = 2A ; donc OI = A. Donc *les pieds des perpendiculaires menées d'un foyer sur les tangentes à l'ellipse, appartiennent à la circonférence ayant le grand axe pour diamètre.*

74. On appelle *normale* d'une courbe, la perpendiculaire à sa tangente au point de contact. Ainsi *dans l'ellipse, la normale* MN *divise en deux parties égales l'angle* FMF′, *formé par les rayons vecteurs menés au point de tangence.*

75. Si l'on veut trouver l'équation d'une normale à l'ellipse, il suffira d'observer d'abord que cette droite passe par le point de tangence (x'', y''), et que par suite son équation est de la forme $y - y'' = a'(x - x'')$.

De plus, cette droite étant perpendiculaire à la tangente, pour laquelle $a = -\frac{B^2x''}{A^2y''}$, il faut qu'on ait la relation $aa' + 1 = 0$, qui donne $a' = \frac{A^2y''}{B^2x''}$. Ainsi l'équation de la normale devient

$$y - y'' = \frac{A^2y''}{B^2x''}(x - x'').$$

Pour le point N où cette normale rencontre l'axe des abscisses, on a $y = 0$; ce qui donne

$$x = \mathrm{ON} = \frac{A^2 - B^2}{A^2}x''.$$

On voit que la distance ON sera toujours plus petite que OF ou c. Retranchant cette valeur hors de OP ou x'', on aura la distance du pied de l'ordonnée au pied de la normale. Cette distance se nomme *sounormale* ; sa valeur est donc

$$\mathrm{PN} = \frac{B^2}{A^2}x''.$$

Elle est par conséquent de même signe que l'abscisse du point de tangence et moindre que cette abscisse.

76. Quant à la tangente, pour avoir le point où elle rencontre

l'axe des x, on fera $y=0$ dans son équation, qui donnera alors, comme on l'a vu (75)

$$x \text{ ou } OT = \frac{A^2}{x''}.$$

Si de cette valeur on retranche OP ou x'', il restera la distance PT du pied de l'ordonnée au point où la tangente rencontre l'axe des x. Cette distance se nomme *soutangente*; son expression est

$$PT = \frac{A^2 - x''^2}{x''}.$$

Cette valeur étant indépendante du second axe 2B, convient aussi à la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre. Si donc on trace cette circonférence et qu'on lui mène une tangente au point où elle est rencontrée par le prolongement de l'ordonnée PM de l'ellipse, cette tangente coupera l'axe des x au point T; et TM sera tangente à l'ellipse au point M.

77. On peut aisément démontrer les théorèmes que voici :

I. Si on prend sur les prolongemens des axes de l'ellipse, quatre points dont les distances au centre soient égales chacune à la corde qui joint les extrémités des mêmes axes, on aura les sommets d'un carré circonscrit à la courbe.

II. Les tangentes aux extrémités d'un même diamètre, sont parallèles entre elles; et réciproquement, si deux tangentes à l'ellipse sont parallèles, la droite qui joint les deux points de contact, passe par le centre.

De là il suit que trois tangentes à l'ellipse ne peuvent jamais être parallèles entre elles.

III. La plus courte distance d'un point du grand axe à l'ellipse, est la normale menée par ce point.

IV. L'origine étant au sommet $(-A, 0)$ et les coordonnées parallèles aux axes 2A et 2B, l'ellipse est représentée par $A^2y^2 + B^2x^2 = 2AB^2x$, et sa tangente au point (x'', y''), par $A^2yy'' + B^2xx'' = AB^2(x + x'')$.

V. Le demi-petit axe B est moyen proportionnel, 1° entre les distances des deux foyers à la tangente; 2° entre les deux ordonnées de la tangente qui ont leurs pieds aux extrémités du grand axe; 3° entre les distances d'un foyer aux deux sommets; 4° enfin, entre la normale et la perpendiculaire menée du centre sur la tangente. En outre, si p et r sont les distances d'un foyer à la tangente et au point de contact, r' désignant la distance de ce point à l'autre foyer, on aura $p^2 : B^2 :: r : r'$.

VI. Si le sommet d'un angle droit est à l'un des foyers de l'ellipse et que l'un des côtés de cet angle passe par le point de tangence, l'autre côté rencontrera la tangente sur une perpendiculaire au grand axe, qui sera la même pour toutes les tangentes, et qu'on nomme la *directrice* de l'ellipse. De plus, les distances d'un point de l'ellipse au foyer et à la directrice voisine sont entre elles comme $c : A$.

VII. Le sommet d'un angle droit mobile, dont les côtés sont continuellement tangens à l'ellipse, décrit une circonférence de même centre que cette courbe et d'un rayon égal à la droite qui joint les extrémités des deux axes.

VIII. Lorsque la portion d'une tangente à l'ellipse, comprise entre les perpendiculaires aux extrémités du grand axe, est le diamètre d'une circonférence, cette circonférence passe par les deux foyers.

78. On appelle *diamètres conjugués* de l'ellipse, deux diamètres tels, qu'en les prenant pour axes des coordonnées, l'équation de la courbe conserve la même forme que pour ses axes rectangulaires.

Cherchons ces diamètres, et prenons, à cet effet, les formules pour passer d'un système d'axes rectangulaires à un autre système de même origine (45), savoir :

$$x = \frac{x'}{m} + \frac{y'}{m'} \text{ et } y = \frac{ax'}{m} + \frac{a'y'}{m'},$$

formules dans lesquelles $m^2 = 1 + a^2$ et $m'^2 = 1 + a'^2$. Substituant ces valeurs de x et de y dans l'équation $A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2$, qui est celle de l'ellipse rapportée à ses axes et au centre, on trouvera

$$\frac{A^2a'^2 + B^2}{m'^2}y'^2 + \frac{A^2a^2 + B^2}{m^2}x'^2 + \frac{A^2aa' + B^2}{mm'}2x'y' = A^2B^2.$$

Pour que cette équation soit de même forme que celle qui est relative aux axes $2A$ et $2B$, il faut qu'elle ne contienne pas le produit $x'y'$ des nouvelles coordonnées ; il faut donc profiter de l'indétermination de a et a' pour faire disparaître ce terme, en rendant son coefficient nul, ce qui donne la condition

$$A^2aa' + B^2 = 0, \ldots (1)$$

et l'équation de la courbe devient, en y supprimant les accens des coordonnées, dont on n'a plus besoin, pourvu qu'on se rappelle que ces coordonnées sont en général obliques,

$$\frac{A^2a'^2 + B^2}{m'^2}y^2 + \frac{A^2a^2 + B^2}{m^2}x^2 = A^2B^2 \ldots (2)$$

La condition (1) qui existe entre a et a', étant du premier degré par rapport à chacune de ces quantités, déterminera l'une d'elles quand l'autre sera connue, et en ne prenant pour a', par exemple, que des valeurs réelles, il est clair qu'on n'en aura non plus que de réelles pour a et les coefficiens de y'^2 et x'^2. Il existe donc une infinité de systèmes d'axes des coordonnées, pour lesquels l'équation de l'ellipse ne contient que les carrés y'^2, x'^2 des variables, avec un terme constant. Mais pas un seul de ces systèmes ne sera rectangulaire, puisqu'alors on devrait avoir $aa'+1=0$; ce qui réduit la relation (1) à $A^2=B^2$, chose impossible dans l'ellipse.

A la vérité, en prenant $a'=\infty$ et $a=0$, les relations (1) et $aa'+1=0$ seraient bien satisfaites; mais alors on retomberait sur l'équation aux axes 2A et 2B.

79. Actuellement, si l'on fait successivement $y=0$ et $x=0$, dans l'équation (2), on aura les distances de l'origine aux points où l'ellipse coupe les axes des x et des y obliques : en désignant ces distances par A′ et B′, la première étant comptée sur l'axe des abscisses et la seconde sur l'axe des ordonnées, on trouvera

$$A'^2=\frac{A^2B^2m^2}{A^2a^2+B^2} \quad \text{et} \quad B'^2=\frac{A^2B^2m'^2}{A^2a'^2+B^2} \cdots (3)$$

Prenant dans ces équations les valeurs des dénominateurs, et substituant dans l'équation (2) de l'ellipse, elle devient

$$A'^2y^2+B'^2x^2=A'^2B'^2.$$

Dans cette équation, 2A′ et 2B′ sont les *diamètres conjugués* auxquels l'ellipse est rapportée. En prenant à volonté un diamètre pour 2A′, ce qui fera connaître a, la relation (1) donnera a' et la seconde valeur (3) déterminera 2B′, conjugué de 2A′. De sorte que *tout diamètre de l'ellipse a son conjugué*.

80. Remarquons présentement que *si deux diamètres* 2A′ *et* 2B′ *sont conjugués, les tangentes aux extrémités de l'un, seront parallèles à l'autre*. Soit en effet, (x'', y'') une extrémité du diamètre 2A′; l'équation de ce diamètre sera $y=ax$ et la condition de passer par le point (x'', y'') donnera $y''=ax''$, ou $a=\frac{y''}{x''}$. Mais pour la tangente $y=a''x+b$, au point (x'', y''), on a $a''=-\frac{B^2x''}{A^2y''}$; ainsi $aa''=-\frac{B^2}{A^2}$. D'un autre côté, la relation (1) donne aussi $aa'=-\frac{B^2}{A^2}$: donc $aa''=aa'$ et $a''=a'$. La tangente à l'extrémité de 2A′, est donc parallèle à 2B′ (15). On verra de même que la tangente à l'extrémité de 2B′ est parallèle à 2A′.

81. Réciproquement, *si les tangentes aux extrémités de deux*

diamètres d *et* d′, *leur sont respectivement parallèles, ces diamètres seront conjugués.* Car si d' n'était pas le conjugué de d, soit d'' ce conjugué ; les tangentes aux extrémités de d'' seront donc parallèles à d, et conséquemment parallèles à la tangente à une extrémité de d' ; ce qui est absurde (77, II). Donc d et d' sont conjugués l'un de l'autre.

82. Remarquons encore que *deux diamètres conjugués* $2A'$ *et* $2B'$, *sont toujours parallèles à deux cordes supplémentaires* $y = px + b$ *et* $y = p'x + b'$. Car pour ces cordes, on a $A^2pp' + B^2 = 0$ (62) ; et pour les diamètres conjugués $2A'$ et $2B'$, on a pareillement $A^2aa' + B^2 = 0$: donc $aa' = pp'$. Rien n'empêche de mener la première corde parallèlement à $2A'$, ce qui donne $p = a$ (15) ; alors il viendra $p' = a'$, et la seconde corde sera parallèle à $2B'$.

83. Etant donc donnés une ellipse et ses deux axes, rien n'est plus facile que de trouver deux diamètres conjugués, comprenant entre eux un angle donné. Il suffit pour cela, de décrire sur l'un des deux axes, un segment capable de l'angle donné, et de mener des cordes supplémentaires à l'un des points d'intersection de l'arc avec l'ellipse : les diamètres parallèles à ces cordes, seront les diamètres conjugués demandés.

Bien entendu que cette construction doit être faite sur le grand axe, si l'angle donné est obtus, et sur le petit, si l'angle est aigu. Il faut de plus que l'angle donné soit moindre que le plus grand angle obtus et plus grand que le plus petit angle aigu (63) : autrement, le problème serait impossible.

84. Cherchons maintenant si l'ellipse peut avoir des diamètres conjugués égaux entre eux ; et pour cela, observons d'abord que dans les expressions (3) de A'^2 et B'^2, on a $m^2 = 1 + a^2$, $m'^2 = 1 + a'^2$ et $B^2 = -A^2aa'$. Substituant ces valeurs et réduisant, il viendra

$$A'^2 = \frac{A^2a'(1 + a^2)}{a' - a} \quad \text{et} \quad B'^2 = \frac{-A^2a(1 + a'^2)}{a' - a} \cdots (4)$$

Si les diamètres conjugués $2A'$ et $2B'$ sont égaux, les valeurs précédentes de A'^2 et B'^2 seront égales aussi, et réciproquement. Egalant donc ces deux valeurs et simplifiant, on aura, pour déterminer les directions des deux diamètres conjugués égaux,

$$a'(1 + a^2) = -a(1 + a'^2); \text{ d'où } (a + a')(aa' + 1) = 0.$$

On ne saurait avoir $aa'+1=0$; il faut donc que $a+a'=0$; d'où $a'=-a$, ou bien $a=-a'$; ce qui fournit toujours les deux mêmes droites. Ainsi, *bien que l'ellipse ait une infinité de diamètres égaux deux à deux, elle n'a cependant que deux diamètres conjugués qui soient égaux entre eux : ce sont les diamètres parallèles aux cordes qui joignent les extrémités des deux axes.*

Effectivement, en faisant $a'=-a$, dans la relation $A^2aa'+B^2=0$, on en tire $a=\frac{B}{A}$ et $a'=-\frac{B}{A}$; d'où $1:a::A:B$ $1:-a'::A:B$. Ce qui montre que les diamètres conjugués égaux, sont parallèles aux cordes qui joignent les extrémités des deux axes, et sont dirigés conséquemment suivant les diagonales du rectangle que forment les tangentes aux extrémités des mêmes axes.

L'ellipse rapportée à ses diamètres conjugués égaux, a pour équation

$$y''+x''=A'',$$

qui est analogue à celle du cercle entre coordonnées rectangulaires.

85. Ajoutons présentement entre elles les équations (4), et réduisons; nous aurons

$$A''+B''=A^2-A^2aa',\ \text{ou}\ A''+B''=A^2+B^2.$$

Ainsi *dans l'ellipse, la somme des carrés de deux diamètres conjugués quelconques, est égale à la somme des carrés des deux axes.*

86. Multipliant l'une par l'autre les valeurs (4) de A'' et B'', et observant toujours que $B^2=-aa'A^2$, il viendra

$$A''B''=\frac{A^2B^2(1+a^2)(1+a'^2)}{(a'-a)^2},\ \text{ou}\ \frac{A'B'(a'-a)}{\sqrt{(1+a^2)(1+a'^2)}}=AB.$$

La figure formée par les demi-diamètres A' et B', et les tangentes à leurs extrémités, est évidemment un parallélogramme (80). Si donc s désigne le sinus de l'angle compris entre A' et B', l'aire de ce parallélogramme sera $A'B's$. Or, nous avons vu (20) que cette aire a pour valeur le premier membre de la dernière équation précédente; ainsi on a

$$A'B's=AB,\ \text{ou}\ 4A'B's=4AB;$$

c'est-à-dire que *le parallélogramme construit sur deux diamètres* *conjugués, est équivalent au rectangle construit sur les deux axes.*

87. Il est facile de voir que *les coordonnées comprenant un angle* θ, *toute équation de la forme* $My^2 + Nx^2 = P$, M, N, P, *étant des nombres positifs, représente une ellipse.* D'abord si l'on prend les nombres A′ et B′ tels qu'on ait $A'^2 = \frac{P}{N}$ et $B'^2 = \frac{P}{M}$, cette équation deviendra

$$A'^2y^2 + B'^2x^2 = A'^2B'^2 \ldots (5).$$

Or, on peut toujours trouver une ellipse dont 2A′ et 2B′ soient les diamètres conjugués, comprenant l'angle θ; car en désignant par s le sinus de cet angle, les axes 2A et 2B seront donnés par les relations $A^2 + B^2 = A'^2 + B'^2$ et $AB = A'B's$, desquelles on tire

$$A+B = \sqrt{A'^2+B'^2+2A'B's} \text{ et } A-B = \sqrt{A'^2+B'^2-2A'B's};$$

les valeurs de A et B seront donc toujours réelles.

Connaissant les axes 2A et 2B, on pourra tracer l'ellipse; et cette ellipse, rapportée à ses diamètres conjugués 2A′ et 2B′, sera représentée, comme on l'a vu (79), par l'équation (5), et conséquemment par l'équation proposée $My^2 + Nx^2 = P$.

88. Il résulte aussi des valeurs que l'on vient de trouver pour A + B et A — B, que *si l'on prend sur la perpendiculaire au diamètre* 2A′, *menée d'une extrémité de son conjugué* 2B′, *deux points éloignés chacun de cette extrémité d'une distance égale à* A′, *les deux axes seront respectivement la somme et la différence des droites qui joignent ces deux points au centre.*

De là, étant donnés, de longueurs et de positions, deux diamètres conjugués de l'ellipse, on en déduira les grandeurs des deux axes; et on aura ensuite leurs positions, en prenant la valeur de a dans la première des équations (3); ce qui donnera

$$a = \frac{B}{A}\sqrt{\frac{A^2-A'^2}{A'^2-B^2}}, \text{ ou } a = \frac{B}{A}\sqrt{\frac{(A+A')(A-A')}{(A'+B)(A'-B)}}.$$

89. Reprenons maintenant l'équation de l'ellipse rapportée à ses diamètres conjugués 2A′ et 2B′, savoir :

$$A'^2y^2 + B'^2x^2 = A'^2B'^2.$$

Cette équation étant absolument de même forme que celle qui est relative aux axes, toutes les propriétés indépendantes de l'inclinaison des coordonnées, seront communes aux axes de l'ellipse et à ses diamètres conjugués. Ainsi, 1° *Chaque diamètre divise les cordes parallèles à son conjugué en deux parties égales, et partage conséquemment l'ellipse en deux parties superposables.* D'où il suit que pour avoir un diamètre et le centre d'une ellipse tracée, il suffit de mener une droite par les milieux de deux cordes parallèles.

2° *Les carrés des ordonnées, aux diamètres conjugués, sont entre eux comme les produits des distances des pieds de ces ordonnées aux points où l'axe des abscisses coupe la courbe.*

De sorte que pour décrire une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués et l'angle qu'ils font entre eux, il faut d'abord tracer une ellipse sur ces diamètres, pris pour axes rectangulaires, puis incliner les ordonnées de cette ellipse sous l'angle donné, sans changer leurs longueurs : les points ainsi trouvés, appartiendront à l'ellipse demandée.

3° Pour deux cordes supplémentaires $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$, on aura toujours $A'^2 aa' + B'^2 = 0$; et réciproquement.

4° La tangente $y = ax + b$, au point (x'', y''), a pour équation

$$A'^2 yy'' + B'^2 xx'' = A'^2 B'^2 \quad \text{et} \quad a = -\frac{B'^2 x''}{A'^2 y''}.$$

Ce qui donne le moyen de calculer les coordonnées du point de contact d'une tangente à l'ellipse, menée par un point donné. L'équation de cette tangente devient aussi $A'^2 a^2 + B'^2 = b^2$.

5° *Si une corde supplémentaire est parallèle au diamètre mené au point de tangence, l'autre corde sera parallèle à la tangente.* Ainsi on peut, sans connaître les axes, mener une tangente à l'ellipse, soit par un point donné sur cette courbe, soit parallèlement à une droite donnée.

6° Enfin, si deux diamètres sont respectivement parallèles à deux cordes supplémentaires, les tangentes aux extrémités de ces diamètres, seront respectivement parallèles à ceux-ci (5°); ces diamètres seront donc conjugués l'un de l'autre (81), et comprendront entre eux un angle égal à celui des deux cordes supplémentaires proposées.

De là, si l'ellipse est tracée; en décrivant sur un diamètre quelconque un segment capable de l'angle formé par deux diamètres conjugués demandés, on pourra décrire ces diamètres; et si l'angle est droit, les deux diamètres cherchés seront les deux axes de l'ellipse.

90. *Les parallélogrammes ayant respectivement pour diagonales deux diamètres conjugués de l'ellipse et dont les côtés sont parallèles à deux autres diamètres conjugués, sont équivalens.*

Soient 2A, 2B deux diamètres conjugués quelconques et 2A', 2B' deux autres diamètres aussi conjugués. Soit (x', y') une extrémité de 2A' et (x'', y'') une extrémité de 2B'; l'équation de l'ellipse rapportée aux diamètres 2A et 2B, donnera donc

$$A^2y'^2 + B^2x'^2 = A^2B^2 \text{ et } A^2y''^2 + B^2x''^2 = A^2B^2 \ldots (1)$$

L'équation du diamètre 2A' étant $y = a'x$, fournit $y' = a'x'$ ou $a' = \frac{y'}{x'}$. La tangente à l'extrémité (x'', y'') de 2B', étant parallèle à 2A' (80), il vient

$$-\frac{B^2x''}{A^2y''} = \frac{y'}{x'}, \text{ ou } A^2y'y'' + B^2x'x'' = 0 \ldots (2)$$

Cette équation et la première (1) donnent

$$B^2 = \frac{y'}{x''}(y'x'' - x'y'') \text{ et } A^2 = -\frac{x'}{y''}(y'x'' - x'y'') \ldots (3)$$

Avec ces valeurs, la seconde équation (1) se réduit à $x'y' = -x''y''$. Multipliant de part et d'autre par le sinus s de l'angle compris entre A et B, et supprimant le signe —, qui est inutile pour la propriété à démontrer, on aura $x'y's = x''y''s$. Or, s étant le sinus de l'angle entre x' et y' et entre x'' et y'', les produits $x'y's$ et $x''y''s$ expriment les aires respectives des parallélogrammes construits sur les coordonnées x', y' et x'', y'', et ayant pour diagonale, le premier 2A' et le second 2B': donc, etc.

91. Remarquons que comme $x'y' = -x''y''$, les deux équations (3) deviennent

$$B^2 = y'^2 + y''^2 \text{ et } A^2 = x'^2 + x''^2.$$

D'après ces deux relations remarquables, si A et B sont les demi-axes de l'ellipse, ce qui donne $A'^2 = x'^2 + y'^2$ et $B'^2 = x''^2 + y''^2$, on trouvera

$$A'^2 + B'^2 = A^2 + B^2,$$

comme au n° 85. De plus, si s désigne le sinus de l'angle des deux diamètres conjugués 2A' et 2B', la multiplication des équations (3) donnera

$$AB = y'x'' - x'y'' = A'B's \quad (20),$$

relation trouvée au n° 86.

92. *Le diamètre de la base d'un cylindre droit étant égal au second axe 2B d'une ellipse donnée, on peut toujours couper ce cylindre par un plan, de manière que la section résultante soit égale à l'ellipse proposée.* Pour cela, menons le plan LKIH suivant l'axe CV du cylindre (fig. 14); prenons OR $=$ A, 2A étant le grand axe, et tirons RON; nous aurons RN $=$ 2A. Suivant RN menons sur le plan HK, un plan perpendiculaire, dont l'intersection avec la surface convexe du cylindre sera la courbe fermée NMRG. Soit M un point quelconque de cette courbe, et x, y les coordonnées rectangulaires OP, PM, de ce point; on aura PR $= A - x$ et PN $= A + x$. Par la droite MP, perpendiculaire au plan HK, soit mené le plan DMS perpendiculaire à l'axe CV; ce plan coupera le cylindre suivant un cercle ayant DS $=$ IH $=$ 2B pour diamètre, et il viendra PS $=$ B $-$ PQ et PD $=$ B $+$ PQ. Comme M est un point de la circonférence du cercle précédent et que MP ou y est perpendiculaire au diamètre DS, on a $y^2 = \mathrm{PS} \times \mathrm{PD} = B^2 - \mathrm{PQ}^2$. D'ailleurs, dans le triangle PND, DQ : NO :: PQ : OP ou B : A :: PQ : x; donc PQ $= \frac{Bx}{A}$, et il vient, pour tous les points de la courbe NMRG,

$$y^2 = B^2 - \frac{B^2x^2}{A^2} \quad \text{ou} \quad A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2 :$$

donc cette courbe est l'ellipse proposée. Ce qu'il fallait démontrer.

On voit que les sections faites dans un cylindre droit, par des plans, ne sauraient être que des rectangles, des cercles ou des ellipses.

93. Remarquons d'ailleurs que les deux plans HTI et NMR, étant perpendiculaires au plan HK, leur intersection commune est perpendiculaire au même plan, ainsi qu'aux deux droites IH et NR; l'angle de ces deux droites, ou son égal NOF, mesure donc le coin des deux plans HTI et NMR. Et comme la base πB^2 du cylindre est évidemment la projection de l'aire E terminée par l'ellipse NMRG, il s'ensuit que $\pi B^2 = E \times \cos \mathrm{NOF}$ (G. 258). Mais le triangle rectangle NOF donne $\cos \mathrm{NOF} = \frac{B}{A}$; il vient donc $E = \pi AB$, valeur que nous trouverons plus bas, d'une autre manière.

94. Il résulte de ce qui précède (92) qu'*une ellipse donnée peut toujours être disposée à l'égard d'un plan, de manière que*

sa projection sur ce plan soit un cercle, ayant le second axe pour diamètre; ce qui permet de démontrer, pour l'ellipse, plusieurs propriétés analogues à celle dont jouit le cercle. En voici une :

De tous les quadrilatères qu'on peut inscrire dans une même ellipse, le plus grand est un parallélogramme dont les sommets sont aux extrémités de deux diamètres conjugués. Pour démontrer ce théorème, soit M un quadrilatère inscrit dans l'ellipse proposée et N la projection de M sur le plan du cercle qui est la projection de l'ellipse; N sera un quadrilatère inscrit dans le cercle, et on aura, en désignant par v l'angle des deux plans, $N = M \cos v$ (G. 258).

Puisque $\cos v$ est constant, tandis que M et N sont variables, il est clair que quand N sera un maximum, ce qui arrive dès que N est un carré, M sera aussi un maximum. Les diagonales d et d' du quadrilatère maximum M ayant pour projections les diagonales D et D' du carré N, et celles-ci se coupant au centre du cercle, il s'ensuit que d et d' se coupent au centre de l'ellipse. De plus, dans l'ellipse, toute corde c parallèle à d, a pour projection dans le cercle, la corde C parallèle à D; et puisque D' divise évidemment C en deux parties égales, de même d' divisera c en deux parties égales. Ainsi les diagonales d et d' du quadrilatère maximum M, sont telles que chacune divise en deux parties égales toute corde parallèle à l'autre; donc ces diagonales sont deux diamètres conjugués (89, 1°) et le quadrilatère maximum M, un parallélogramme.

On voit en outre, que comme il y a une infinité de quadrilatères maximums égaux, inscrits dans le cercle, il y a aussi une infinité de quadrilatères maximums équivalens, inscrits dans l'ellipse : tous sont des parallélogrammes, dont un seul rectangle, ayant pour diagonales les deux diamètres conjugués égaux, et un seul losange, ayant pour diagonales les deux axes.

95. Par des raisonnemens analogues aux précédens, on démontrera aisément les théorèmes que voici :

I. De tous les quadrilatères circonscrits à la même ellipse, le plus petit est un parallélogramme, dont les points de tangence sont aux extrémités de deux diamètres conjugués; et il y a une infinité de quadrilatères circonscrits, de même surface minimum, dont un seul rectangle, touchant l'ellipse aux extrémités des deux axes, et un seul losange, ayant les points de contact aux extrémités des diamètres conjugués égaux.

II. De tous les triangles inscrits dans l'ellipse, le plus grand renferme les trois quarts du diamètre mené par son sommet, sa base étant parallèle au conjugué de ce diamètre.

III. De tous les triangles circonscrits à la même ellipse, le plus petit a la base parallèle à un diamètre et le sommet sur le prolongement du conjugué de ce diamètre, à une distance du centre égale à ce conjugué.

IV. La droite qui joint le centre d'une ellipse au sommet de l'angle circonscrit, divise la corde de contact en deux parties égales.

mesurer la longueur de l'ellipse, ni celle d'un arc de cette courbe. Il faut se résoudre à envelopper d'un fil l'arc ou l'ellipse et à prendre la longueur du fil pour celle qu'il s'agit de déterminer. Ce procédé n'est pas exact; mais il suffira dans bien des circonstances.

100. Nous dirons que deux lignes brisées sont *semblables*, lorqu'elles ont un même nombre de droites homologues proportionnelles, comprenant un même nombre d'angles homologues égaux. Et par courbes *semblables*, nous entendrons deux courbes telles, qu'en inscrivant dans l'une une ligne brisée quelconque, on pourra inscrire dans l'autre une ligne brisée semblable.

101. *Deux ellipses sont semblables, dès qu'elles ont les axes proportionnels.* Car il est facile de voir qu'en inscrivant dans l'une un polygone formé d'une série de trapèzes, ayant chacun deux côtés perpendiculaires au grand axe, on pourra toujours inscrire dans l'autre un polygone semblable au précédent; de sorte qu'il sera toujours possible d'inscrire des lignes brisées semblables, dans les deux ellipses proposées; ces deux ellipses sont donc semblables (100).

De là résulte que les longueurs des ellipses semblables, sont entre elles comme leurs grands ou leurs petits axes. Il est clair aussi que leurs aires sont proportionnelles aux carrés des mêmes axes (96).

102. Dans deux ellipses semblables, on appelle points *homologues*, deux points dont les coordonnées rectangulaires sont proportionnelles, et arcs *homologues*, deux arcs terminés à des points homologues chacun à chacun. D'où il est aisé de démontrer que dans deux ellipses semblables, 1° les arcs homologues sont semblables et proportionnels aux deux grands axes ou aux deux petits; 2° les segmens compris entre deux arcs homologues et leurs cordes, sont semblables et entre eux comme les carrés des deux grands axes.

103. Voici encore quelques problèmes et théorèmes, faciles à traiter, d'après ce qui précède :

I. Tracer une tangente à l'ellipse, de manière que le point de contact divise en deux parties égales la portion de cette tangente, entre les deux axes.

II. Trouver le plus grand et le plus petit des angles compris par deux rayons vecteurs, menés à différens points de l'ellipse.

III. Soient S et S' les segmens de deux tangentes parallèles, compris entre les points de contact et une troisième tangente à l'ellipse, et soit $2B'$ le diamètre qui joint les deux premiers points de contact; je dis qu'on aura toujours $SS'=B'^2$.

IV. Si l'on divise en trois parties égales chacune des cordes parallèles à l'un des axes d'une ellipse, les points de division appartiendront à une ellipse concentrique à la première et dont l'aire sera le tiers de l'aire de

V. Si l'on fixe en un point l'un des sommets du losange formé par quatre règles, mobiles autour de leurs extrémités, et qu'on fasse mouvoir le sommet de l'angle opposé suivant une droite invariable, passant par le point fixe; deux points pris sur les côtés de l'angle mobile et à la distance B du sommet, décriront une ellipse ayant 2B pour petit axe et le point fixe pour centre.

VI. Construire une ellipse semblable à une ellipse donnée et dont l'aire soit à celle de cette dernière dans un rapport connu. Construire une ellipse semblable à deux ellipses données, et dont l'aire vaille la somme ou la différence des aires de ces ellipses.

VII. Le point du cercle qui roule intérieurement sur la circonférence d'un autre cercle de rayon double, décrit une ellipse dont les demi-axes sont la plus grande et la plus petite distance de ce point à la circonférence du cercle auquel il appartient; et suivant que ce point est à la circonférence ou au centre, il décrit une droite ou un cercle égal au cercle mobile.

VIII. Si deux droites $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$, touchant continuellement une même ellipse, se meuvent de manière que le produit aa' soit constamment égal à $-p^2$, le point d'intersection des deux tangentes décrira une seconde ellipse. Si l'on conçoit deux tangentes à la seconde ellipse, mobiles comme les deux premières et donnant encore continuellement $aa' = -p^2$, l'intersection de ces dernières décrira une troisième ellipse, de laquelle, d'après les mêmes procédés, on déduira une quatrième ellipse, et ainsi de suite. Cela posé, 1° toutes les ellipses construites sur la première seront semblables entre elles, lui seront concentriques et leurs axes auront les mêmes directions que les siens; 2° les aires de ces ellipses formeront une progression par quotient, dont la raison sera 2.

(Pour la démonstration il faudra d'abord observer que la première tangente est représentée à la fois par les deux équations $y = ax + b$ et $A^2a^2 + B^2 = b^2$, puis on éliminera b. On procédera de même pour la seconde tangente; et alors on verra que a et a' sont racines d'une même équation du second degré; ce qui fournira l'équation de la seconde ellipse; et de même pour la troisième, etc. On pourra aussi examiner les deux hypothèses $aa' = -1$ et $aa' = -\frac{B^2}{A^2}$).

IX. Si un angle droit se meut autour de son sommet placé au centre d'une ellipse, les cordes qui joindront les intersections de ses côtés avec la courbe, seront continuellement tangentes au cercle du même centre que l'ellipse et ayant pour rayon la perpendiculaire abaissée du centre sur la corde qui joint les extrémités de deux demi-axes.

De l'Hyperbole.

104. L'*hyperbole* est une courbe plane telle, que la différence des distances de chacun de ses points à deux points fixes F et F', est constamment égale à une droite donnée 2A. Ces deux

points F et F', sont dits les *foyers* de l'hyperbole, et les droites menées des foyers à un point quelconque de la courbe, sont les *rayons vecteurs* de cette courbe.

105. Pour construire l'hyperbole, on prend une règle F'D, ayant une extrémité percée d'un trou dont le centre soit sur le prolongement de l'une des longues arêtes (fig. 16). On engage dans ce trou, une pointe plantée au foyer F', par exemple. A l'autre foyer F est plantée une pointe, autour de laquelle peut tourner l'extrémité d'un fil, dont l'autre extrémité est attachée au point D de la règle. La longueur du fil doit être telle, qu'en la retranchant de F'D, il reste 2A. Faisant glisser une pointe à tracer M le long du fil, on le force à s'appliquer toujours contre la règle qui tourne autour de F'; et alors, par ce mouvement, la pointe M décrit une portion de l'hyperbole demandée. Il est visible, en effet, que dans le mouvement de la règle, on aura toujours $F'M - FM = F'MD - FMD = 2A$; la pointe M sera donc toujours sur l'hyperbole cherchée, et en tracera une portion d'autant plus grande, que la règle F'D sera plus longue.

Faisant tourner de même la règle autour de F et le fil autour de F', on décrira une autre *branche* de la même hyperbole. De sorte que cette courbe se compose de deux branches égales et opposées, MBM' et $mB'm'$, qui s'étendent indéfiniment dans les deux sens, au-dessus et au-dessous de la droite FF'.

Cette construction montre d'ailleurs que $FB = F'B'$, et que quand le point M est en B, on a $2A = F'B - FB = F'B - F'B' = BB'$.

Il est clair, d'après cela, que $2A < FF'$. C'est ce qu'on peut voir autrement; car appelant M un point quelconque de l'hyperbole, on aura, d'après la définition, $F'M - FM = 2A$. Mais dans le triangle F'MF, on a $F'M - FM < FF'$; donc $2A < FF'$.

106. On peut aussi décrire l'hyperbole par points, comme il suit : soit O le milieu de la droite FF', et soient prises les distances OB et OB' égales chacune à A : les points B et B' appartiendront d'abord à la courbe cherchée. Car ayant $FB = FO - A$ et $F'B = FO + A$, il vient $F'B - FB = 2A$. De même, $FB' - F'B' = 2A$.

Pour avoir d'autres points, prenons *sur le prolongement* de OF, un point quelconque I; puis des foyers F et F', comme centres, avec des rayons respectivement égaux à IB et IB′, décrivons deux arcs se coupant en M et M′; des mêmes centres F, F′ et avec les rayons IB′, IB, décrivons deux nouveaux arcs se coupant en m et m'; les points M, M′ appartiendront à une branche de la courbe, et les points m, m' à l'autre branche. Car puisque FM = IB et F′M = IB′, on a F′M — FM = BB′ = 2A; donc le point M est à l'hyperbole demandée; et il en est de même des points M′, m et m'.

En répétant ces constructions avec des points sur le prolongement de F′F; mais de plus en plus éloignés de F, on obtiendra autant de points qu'il sera nécessaire pour tracer, à la main, la courbe avec quelqu'exactitude.

107. Maintenant que nous savons tracer l'hyperbole et que nous avons une idée exacte de la forme qu'elle affecte, cherchons son équation. A cet effet, plaçons l'origine des coordonnées rectangulaires au milieu O de la droite FF′, que nous représenterons par $2c$, et dirigeons l'axe des x suivant cette droite (fig. 16). Soit M un point quelconque de la courbe; soient x, y les coordonnées OP, PM du point M; enfin, soient r et r' les rayons vecteurs FM et F′M, dont la différence, d'après la définition, est constamment égale à la droite donnée 2A : on aura d'abord $r'-r=2A$.

Ensuite, à cause de $FP=c-x$ et de $F'P=c+x$, les triangles FMP, F′MP fournissent

$$r^2=y^2+(c-x)^2 \text{ et } r'^2=y^2+(c+x)^2.$$

Prenant successivement la somme et la différence de ces équations, et réduisant, il viendra

$$r'^2+r^2=2y^2+2x^2+2c^2 \text{ et } r'^2-r^2=4cx.$$

Or, r'^2-r^2 étant la même chose que $(r'-r)(r'+r)$, si dans ce produit, on substitue

$$r'-r=2A,$$

on en déduira
$$r'+r=\frac{2cx}{A}.$$

Ces deux équations donnent

$$r'=\frac{cx}{A}+A \text{ et } r=\frac{cx}{A}-A.$$

Substituant ces valeurs dans $r'^2+r^2=2y^2+2x^2+2c^2$, on aura
$$A^2+\frac{c^2x^2}{A^2}=x^2+y^2+c^2;$$

d'où $A^2y^2+(A^2-c^2)x^2=A^2(A^2-c^2)$.

Mais on a vu (105) que $2A<2c$ ou $A<c$; donc c^2-A^2 est positif. Posons $c^2-A^2=B^2$, B sera une quantité donnée et réelle, et nous aurons $A^2-c^2=-B^2$; d'où l'on tire

$$A^2y^2-B^2x^2=-A^2B^2;$$

et telle est l'équation la plus simple de l'hyperbole.

Cette équation se déduit de celle de l'ellipse, en changeant, dans cette dernière, B^2 en $-B^2$ ou B en $B\sqrt{-1}$. Ce changement dans les propriétés de l'ellipse, conduira donc à celles de l'hyperbole. Ainsi ces deux courbes jouissent de propriétés analogues, bien que leurs formes soient très-différentes.

108. Prenant la valeur de y dans l'équation précédente de l'hyperbole, on aura

$$y=\pm\frac{B}{A}\sqrt{x^2-A^2}.$$

Ces deux valeurs étant égales et de signes contraires, il s'ensuit que pour une même abscisse OP, il y a deux ordonnées égales PM et PM'; la courbe est donc divisée en deux parties égales par l'axe des x.

Faisant $x=0$, pour avoir les points où la courbe rencontre l'axe des y, on aura $y=\pm B\sqrt{-1}$; ces deux valeurs étant imaginaires ou impossibles, l'hyperbole ne rencontre pas l'axe des ordonnées. Tant qu'on aura $x<A$, les valeurs de y seront imaginaires et il n'y aura pas de courbe : si l'on prend $x=\pm A$, ou $x=OB$ et $x=-OB'$, il viendra $y=\pm 0$; l'hyperbole rencontre donc l'axe des abscisses aux deux points B et B', qui donnent $BB'=2A$. De plus, $x=A$ représentant une parallèle à l'axe des ordonnées, et les deux valeurs de y étant alors nulles, les deux points où cette parallèle rencontre l'hyperbole, se réunissent en un seul en B; donc cette parallèle RR' est tangente à la courbe au point B. On verra de même que la parallèle $x=-A$ ou SS', à l'axe des y, est tangente à l'hyperbole au point B'.

Si l'on prend l'abscisse x positive ou négative, mais numériquement plus grande que A, les deux valeurs de y seront chaque fois réelles, et d'autant plus grande, que x sera plus grande elle-même; la courbe s'étend donc indéfiniment à la droite du point B et à la gauche du point B'.

Enfin on voit que l'hyperbole est composée de deux branches égales, opposées et indéfinies, dont la plus petite distance est BB′ ou 2A (car la plus petite abscisse est $x = A$ ou $x = -A$); et en pliant la figure soit suivant l'axe des x, soit suivant l'axe des y, les quatre parties de la courbe se couvriront parfaitement, et sont égales. Cela résulte aussi de la construction donnée plus haut (105).

109. Les quantités 2A et 2B sont dites les *axes principaux*, ou simplement les *axes* de l'hyperbole, bien qu'elle ne détermine que le premier, égal à BB′, par sa rencontre avec l'axe des abscisses; 2A est le *premier axe*, 2B le *second* et l'origine O le *centre* de la courbe. Les extrémités B et B′ du premier axe, sont les *sommets* de l'hyperbole; et quand elle est représentée par l'équation $A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2$, on dit qu'elle est *rapportée à ses axes et au centre.*

Lorsque les deux axes sont égaux, l'hyperbole est dite *équilatère*; son équation est alors

$$y^2 - x^2 = -A^2;$$

l'hyperbole équilatère est donc entre les hyperboles, ce que le cercle est entre les ellipses.

110. Connaissant le premier axe BB′ et les foyers F, F′, rien n'est plus facile que de construire le second axe 2B; car ayant $B^2 = c^2 - A^2 = OF^2 - OB^2$, si du sommet B comme centre et d'un rayon égal à OF, on décrit un arc coupant l'axe des ordonnées aux points C et C′, on aura $2B = CC'$.

Si l'on veut trouver les deux foyers, connaissant les deux axes BB′ et CC′, on observera que $c^2 = A^2 + B^2 = OB^2 + OC^2$, et alors décrivant du centre O et avec le rayon CB, un arc, cet arc coupera l'axe des x aux deux foyers F et F′.

111. *Toute équation de la forme* $My^2 - Nx^2 = -P$, M, N *et* P *étant des nombres positifs, et les coordonnées étant rectangulaires, représente une hyperbole.* D'abord en multipliant les deux membres de cette équation par $\frac{P}{MN}$, puis posant $A^2 = \frac{P}{N}$ et $B^2 = \frac{P}{M}$, on aura

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2 \ldots (1)$$

Dans cette équation A et B sont connus. Prenant sur l'axe des x, de part et d'autre de l'origine O, deux points F et F′, tels que $OF = OF' = c$ (fig. 16) et qu'on ait $c^2 = A^2 + B^2$;

désignant par d et d' les distances FM et F′M du point M ou (x, y) de la courbe (1) aux deux F et F′; on aura évidemment

$$d^2 = y^2 + (c - x)^2 \text{ et } d'^2 = y^2 + (c + x)^2.$$

Développant et observant que $y^2 = \frac{B^2x^2}{A^2} - B^2$ et $c^2 = A^2 + B^2$, on verra, en opérant comme pour l'ellipse (56), que

$$d = \frac{cx}{A} - A \text{ et } d' = \frac{cx}{A} + A; \text{ d'où } d' - d = 2A.$$

Ainsi la courbe représentée par l'équation (1) et conséquemment par l'équation proposée $My^2 - Nx^2 = -P$, est telle que la différence des distances de chacun de ses points aux deux F et F′, est constamment égale à 2A ; donc cette courbe est une hyperbole (104), dont 2A et 2B sont les axes et F, F′ les foyers.

D'après cela, si on avait $\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}y - 2x + \frac{34}{3} - \frac{4}{3}x^2 = 0$, rien ne serait plus facile que de tracer la courbe représentée par cette équation, après en avoir chassé les premières puissances de x et de y, en y faisant $x = h + x'$ et $y = k + y'$.

112. *Si l'on coupe les deux nappes opposées d'un cône droit, par un plan perpendiculaire au plan* HCIN′ *conduit suivant l'axe* VCV′, *l'intersection* FNMT *sera une hyperbole* (fig. 17).

Les deux surfaces convexes pouvant être prolongées à l'infini, il est clair que le plan coupant rencontre HICN′ suivant la droite KNN′ et les surfaces convexes suivant une courbe composée de deux branches infinies, telles que FNT. Plaçons l'origine au milieu O de la droite NN′ = 2A, et l'axe des x suivant cette droite. Soit M un point quelconque de la courbe, et MP = y, OP = x, les coordonnées rectangulaires de ce point ; nous aurons NP = x − A et N′P = x + A. Menons suivant la droite MP, perpendiculaire au plan HIC, un plan perpendiculaire à l'axe CV ; ce plan coupera le cône suivant un cercle, ayant DS pour diamètre. Mais M étant un point de la circonférence de ce cercle ; et MP, perpendiculaire au plan HIC, étant aussi perpendiculaire au diamètre DS, il vient y^2 = PS×PD. D'ailleurs, les triangles HN′K et DN′P sont semblables, de même que KIN et PNS ; on a donc

$$KN' : x + A :: KH : DP \text{ et } KN : x - A :: KI : PS.$$

Substituant les valeurs de DP et PS, tirées de ces proportions, dans l'expression de y^2, on aura, pour tous les points de la courbe,

$$y^2 = \frac{HK \cdot KI}{KN' \cdot KN}(x^2 - A^2).$$

Pour avoir les distances de l'origine aux points où la courbe coupe l'axe des coordonnées, il faut faire $x = 0$ dans son équation ; ce qui donnera

$$y^2 = -\frac{HK \cdot KI}{KN' \cdot KN} A^2.$$

Donc ces distances sont imaginaires : si on les représente chacune par $B\sqrt{-1}$, B sera connu, et l'équation de la courbe proposée deviendra

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2.$$

cette courbe est par conséquent une hyperbole (111), dont $2A$, $2B$ sont les axes, N et N' les sommets et O le centre.

113. Il est aisé maintenant de tirer de l'équation de l'hyperbole, les diverses propriétés de cette courbe, lesquelles, comme on a vu (107), sont analogues à celles de l'ellipse.

D'abord en résolvant l'équation $A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2$, par rapport à y^2, on verra que dans l'hyperbole, les carrés des ordonnées sont entre eux comme les produits des distances des pieds de ces ordonnées aux sommets de la courbe.

Ensuite, il est facile de voir que la double ordonnée qui passe par un foyer, vaut $\frac{2B^2}{A}$. On la nomme *paramètre* : c'est une troisième proportionnelle aux deux axes $2A$ et $2B$.

114. *Toute droite* $m'OM$ *menée par le centre* O *est terminée de part et d'autre à l'hyperbole, en est un* diamètre, *parce qu'elle est divisée par ce centre en deux parties égales* (fig. 16). En effet, les équations de la droite $m'OM$ et de l'hyperbole, étant

$$y = ax \text{ et } A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2;$$

si on élimine y de ces équations, l'équation finale donnera les abscisses des intersections de la droite $m'OM$ et de l'hyperbole : on aura

$$x = \pm \frac{AB}{\sqrt{B^2 - a^2A^2}}.$$

Ces deux valeurs étant égales et de signes contraires, si l'une est OP, l'autre sera $OP' = OP$; et les deux triangles rectangles OPM et $OP'm'$ seront égaux : donc $OM = Om'$.

115. Pour que le diamètre soit *réel*, il faut qu'on ait $B^2 >$

a^2A^2 : si B^2 était moindre que a^2A^2, les valeurs de x seraient impossibles, aussi bien que celles de y ; le diamètre n'existerait donc pas, ou serait *imaginaire*. Enfin, si $B^2 = a^2A^2$, les valeurs de x et de y seront infinies, et le diamètre lui-même aura une longueur infinie.

Dans ce cas, $a = \pm\frac{B}{A}$, et les droites $y = \frac{B}{A}x$, $y = -\frac{B}{A}x$, ne rencontrent l'hyperbole qu'à une distance infinie : on les appelle *asymptotes* de la courbe ; pour les construire, il suffit de mener à BB′ et par le sommet B, une perpendiculaire, sur laquelle on prendra les longueurs BR et BR′, égales chacune au demi-second axe B : OR et OR′ seront les directions des deux asymptotes cherchées.

Soient y et y' les ordonnées de l'hyperbole et d'une asymptote, qui répondent à la même abscisse x ; on aura donc

$$y^2 = \frac{B^2x^2}{A^2} - B^2 \text{ et } y'^2 = \frac{B^2x^2}{A^2}; \text{ d'où } y' - y = \frac{B^2}{y' + y}$$

Par ces valeurs, il est clair qu'à mesure que l'abscisse x augmente, les ordonnées y, y' augmentent aussi, et leur différence diminue ; la courbe approche donc de plus en plus de l'asymptote ; enfin, si x est infinie, il en sera de même de y, y' et la différence $y' - y$ sera nulle. D'où il suit que *les asymptotes de l'hyperbole, à partir du centre* O, *vont continuellement en s'approchant de cette courbe, sans néanmoins pouvoir la rencontrer, autre part qu'à l'infini*. Et c'est de là que ces droites ont reçu le nom d'*asymptote*.

Il est clair que les asymptotes de l'hyperbole séparent ses diamètres réels de ses diamètres imaginaires ; et que si une ellipse et une hyperbole ont le même centre et les mêmes axes, les diamètres égaux de la première formeront, étant prolongés, les asymptotes de la seconde.

116. *Le premier axe de l'hyperbole est le plus petit de tous ses diamètres*. Car soit d un demi-diamètre et (x, y) son extrémité ; on aura à la fois

$$y^2 = \frac{B^2x^2}{A^2} - B^2 \text{ et } d^2 = y^2 + x^2; \text{ d'où } d^2 = \frac{A^2 + B^2}{A^2}x^2 - B^2.$$

On voit que d sera le moindre possible quand l'abscisse x aura sa moindre valeur A ; ce qui donne $d = A$.

Il est aisé de voir aussi qu'une ligne droite ne peut couper l'hyperbole en plus de deux points.

117. *Lorsque deux droites* $y=ax+b$ *et* $y=a'x+b'$ *menées des extrémités du premier axe, se coupent sur l'hyperbole, on a toujours* $A^2aa'-B^2=0$; *et réciproquement.* Même démonstration qu'au n° 62. Cela résulte d'ailleurs de ce que B^2, pour l'ellipse, devient $-B^2$ pour l'hyperbole.

Les deux droites précédentes sont des *cordes supplémentaires* de l'hyperbole, parce qu'on appelle ainsi deux droites qui, partant des extrémités d'un même diamètre, se coupent sur la courbe.

118. *Suivant qu'un point* (x, y) *est sur l'hyperbole, au-dehors ou au-dedans, le trinome* $A^2y^2-B^2x^2+A^2B^2$ *est nul, positif ou négatif; et réciproquement.* On sait déjà que ce trinome est nul pour tout point (x, y) sur l'hyperbole. Mais l'abscisse x restant la même, si le point (x, y) est au-dehors ou au-dedans de l'hyperbole, l'ordonnée y sera plus grande ou plus petite que sur la courbe; le trinome sera donc plus grand ou plus petit que zéro; il sera par conséquent positif ou négatif.

119. La tangente à l'hyperbole n'étant qu'une sécante, dont les deux points d'intersection avec la courbe, se réunissent en un seul, il est clair qu'en opérant comme pour l'ellipse, on trouvera que la tangente $y=ax+b$, à l'hyperbole, au point (x'', y''), a pour équation

$$A^2yy''-B^2xx''=-A^2B^2, \dots (1)$$

et que la direction de cette tangente est donnée par la valeur

$$a=\frac{B^2x''}{A^2y''}.$$

Tout cela résulte encore de ce que B^2, pour l'ellipse, devient $-B^2$, pour l'hyperbole. Mais on ne peut plus vérifier, comme dans l'ellipse, que la droite représentée par l'équation (1), n'a que le seul point (x'', y'') de commun avec l'hyperbole. Voici alors comment il faut procéder :

Prenons la valeur de y dans l'équation (1) et substituons cette valeur dans le trinome $A^2y^2-B^2x^2+A^2B^2$; en réduisant au même dénominateur $A^2y''^2$, puis en remettant au numérateur, au lieu de $A^2y''^2$, sa valeur $B^2x''^2-A^2B^2$, tirée de l'équation de l'hyperbole, nous aurons

$$A^2y^2-B^2x^2+A^2B^2=\frac{A^2B^4(x-x'')^2}{A^2y''^2}.$$

Le second membre de cette égalité sera toujours positif; il en sera donc de même du trinome $A^2y^2 - B^2x^2 + A^2B^2$, pour tous les points (x, y) de la droite (1); tous ces points, à l'exception du point (x'', y''), sont par conséquent hors de l'hyperbole (118). Ainsi la droite (1) n'a que le seul point (x'', y'') de commun avec l'hyperbole; donc elle lui est tangente en ce point.

120. La valeur de a, qui détermine la direction de la tangente, étant unique, il s'ensuit que par un point (x'', y''), donné sur l'hyperbole, on ne peut mener qu'une seule tangente à cette courbe.

C'est ce qu'on vérifie d'ailleurs en cherchant le point de contact (x'', y'') d'une tangente à l'hyperbole, menée par un point (x', y') donné. Dans ce cas, les équations de l'hyperbole et de la tangente, sont :

$$A^2y''^2 - B^2x''^2 = -A^2B^2,$$
$$A^2y'y'' - B^2x'x'' = -A^2B^2.$$

Eliminant y'' de ces équations, on trouvera, pour x'',

$$x'' = \frac{A^2B^2x' \pm A^2y'\sqrt{A^2y'^2 - B^2x'^2 + A^2B^2}}{B^2x'^2 - A^2y'^2}.$$

Par cette formule et le principe du n° 118, il est visible que, suivant que le point (x', y') est hors de l'hyperbole, sur cette courbe ou dans l'intérieur, x'' et y'' ont deux valeurs réelles, une seule, ou deux valeurs imaginaires; donc il y a deux tangentes, une seule ou aucune.

121. La valeur précédente de x'', peut aussi s'écrire comme il suit :

$$x'' = \frac{A^2B}{B^2x'^2 - A^2y'^2}\left(Bx' \pm Ay'\sqrt{1 + \frac{A^2y'^2 - B^2x'^2}{A^2B^2}}\right).$$

Cela posé, 1° lorsque le point (x', y') sera entre la courbe et une asymptote, dont l'équation est $Ay = Bx$ (115), on aura $Ay' < Bx'$; la fraction sous le radical sera négative; donc la quantité affectée du double signe $\pm$ sera moindre que Ay', et à plus forte raison, moindre que Bx'; donc, puisque $A^2y'^2 < B^2x'^2$, les deux valeurs de x'' seront positives. De sorte que *par un point pris entre l'hyperbole et une asymptote, on peut toujours mener deux tangentes à une même branche.*

2° Si le point (x', y') est entre les asymptotes, on aura $Ay' > Bx'$; le numérateur de x'' aura donc deux valeurs de signes opposés : et comme alors le dénominateur est négatif, il s'ensuit que x'' aura une valeur positive et une négative. Donc il y aura une tangente à une branche et une à l'autre.

3° Enfin, si le point (x', y') est sur une asymptote, on aura $Ay' = B'x$, et les deux valeurs de x'' deviendront $x'' = \frac{0}{0}$ et $x'' = \infty$. Opérant pour faire disparaître le facteur commun aux deux termes de x'', la première valeur de cette abscisse devient $x'' = \frac{A}{2Bx'}(y'^2 + B^2)$. Quant à la seconde valeur, elle reste toujours infinie. Ainsi, par un point pris sur une asymptote, on ne peut mener qu'une seule tangente à l'hyperbole.

Il y a bien, si l'on veut, une seconde tangente; mais son point de contact avec la courbe est infiniment éloigné. Effectivement, ce point étant sur l'hyperbole et son abscisse x'' étant infinie, son ordonnée y'' est aussi infinie et se réduit à $y'' = \frac{Bx''}{A}$. Et comme la valeur de a, qui convient à la tangente, est $a = \frac{B^2x''}{A^2y''}$, en y substituant la valeur qu'on vient de trouver pour y'', on aura $a = \frac{B}{A}$. Or, cette valeur détermine la direction d'une asymptote; donc la seconde tangente qui nous occupe, coïncide avec cette asymptote.

122. Si dans l'équation de la tangente MT au point M, on fait $y = 0$, on aura l'abscisse x ou OT du point T où cette droite rencontre l'axe des x (fig. 17), et il viendra $OT = \frac{A^2}{x''}$; ce qui montre que la tangente ne passe par le centre que quand le point de tangence est à l'infini. Mais F et F' étant les foyers, on a $OF = OF' = c$, $FM = \frac{cx''}{A} - A$ et $F'M = \frac{cx''}{A} + A$ (107); donc

$$TF = OF - OT = c - \frac{A^2}{x''} = \frac{A}{x''}\left(\frac{cx''}{A} - A\right) = \frac{A}{x''} \times FM,$$

$$TF' = OF' + OT = c + \frac{A^2}{x''} = \frac{A}{x''}\left(\frac{cx''}{A} + A\right) = \frac{A}{x''} \times F'M.$$

De là résulte $TF : TF' :: FM : F'M$; ce qui montre que MT divise l'angle FMF' en deux parties égales. Ainsi *dans l'hyperbole, les droites menées des foyers au point de tangence, font avec la tangente et de part et d'autre de cette ligne, deux angles égaux.*

D'où il est visible que *la normale* MN *divise en deux parties* *égales le supplément* FMK *de l'angle formé par les rayons vecteurs menés au point de tangence.*

123. Proposons-nous maintenant de construire une tangente à l'hyperbole, par un point donné. Supposons d'abord ce point sur la courbe, en M; menons les rayons vecteurs FM et F'M; prenons MH = MF et tirons MT perpendiculaire à FH; cette perpendiculaire sera la tangente demandée. Car les deux triangles rectangles MIF et MIH étant égaux, la droite MT divise en deux parties égales l'angle FMF' des deux rayons vecteurs FM et F'M; donc MT coïncide avec la tangente au point M (122). Il serait d'ailleurs facile de démontrer que tous les points de la droite MT sont hors de l'hyperbole, excepté le point M.

Supposons maintenant que le point donné soit hors de l'hyperbole, par exemple en G: de ce point G comme centre et du rayon GF, décrivons un arc; du foyer F' comme centre et avec le premier axe 2A pour rayon, décrivons un second arc qui coupera le premier en H et H': les droites F'H, F'H', iront couper l'hyperbole aux points de contact des deux tangentes que l'on peut mener à la courbe, par le point G; de sorte que M étant l'un de ces points, GMT sera tangente en M. En effet, par construction, F'M — HM = F'H = 2A. Mais M étant sur l'hyperbole, on a aussi F'M — FM = 2A; donc MH = MF. D'ailleurs GF = GH; donc la droite GMT est perpendiculaire au milieu de FH; ainsi, d'après le premier cas, elle est tangente en M.

124. Le point I étant le milieu de FH et le point O le milieu de FF', il est clair que la droite OI est la moitié de F'H ou de 2A. Ainsi *les pieds des perpendiculaires menées d'un foyer sur les tangentes à l'hyperbole, appartiennent à la circonférence ayant le premier axe pour diamètre.*

Menant Oz parallèle à MT, on verra que la figure OIMz est un parallélogramme, et qu'ainsi Mz = OI = A. D'où il suit que *dans l'hyperbole (comme dans l'ellipse), la partie d'un rayon vecteur comprise entre la tangente et sa parallèle menée par le centre, est égale à la moitié du premier axe.*

Cette propriété et la précédente donnent le moyen de *construire l'hyperbole (ou l'ellipse) dont on connaît le centre* O, *la longueur du premier axe* 2A, *une tangente et son point de contact* M. Car les perpendiculaires à la tangente, aux points I et I' où elle est coupée par la circonférence décrite du centre O et du rayon A, passent par les foyers, ainsi que les parallèles menées par M aux droites OI et OI′.

125. Il est facile de voir que l'équation de la normale à l'hyperbole, est

$$y-y''=-\frac{A^2y''}{B^2x''}(x-x'').$$

Les valeurs de la *soutangente* et de la *sounormale*, sont respectivement

$$PT=\frac{x''^2-A^2}{x''} \text{ et } PN=\frac{B^2x''}{A^2}.$$

126. Voici quelques théorèmes à démontrer :

I. Si la droite $y=ax+b$ est tangente à l'hyperbole, on aura toujours $A^2a^2-B^2=b^2$.

II. Les tangentes aux extrémités d'un même diamètre de l'hyperbole, sont parallèles entre elles ; et réciproquement, si deux tangentes à l'hyperbole, sont parallèles, la droite qui joint les deux points de contact, passe par le centre.

Il suit de là que trois tangentes à l'hyperbole ne peuvent jamais être parallèles entre elles.

III. La plus courte distance entre l'hyperbole et un point du prolongement du premier axe, est la normale qui passe par ce point.

IV. L'origine étant au sommet $(-A, o)$ et les coordonnées parallèles aux axes 2A et 2B, l'hyperbole est représentée par $A^2y^2-B^2x^2=-2AB^2x$, et sa tangente au point (x'', y''), par $A^2yy''-B^2xx''=-AB^2(x+x'')$.

V. Dans l'hyperbole, le demi-second axe B est moyen proportionnel, 1° entre les distances des deux foyers à la tangente ; 2° entre les ordonnées de la tangente qui ont leurs pieds aux sommets de la courbe ; 3° entre les distances d'un foyer aux deux sommets ; 4° enfin entre la normale et la perpendiculaire menée du centre sur la tangente.

VI. Le sommet d'un angle droit mobile, dont les côtés sont continuellement tangens à l'hyperbole, décrit une circonférence de même centre et ayant $\sqrt{A^2-B^2}$ pour rayon.

VII. La portion d'une tangente à l'hyperbole, comprise entre les perpendiculaires aux extrémités du premier axe, est le diamètre d'une circonférence qui passe par les deux foyers.

Tous ces théorèmes sont analogues à ceux énoncés pour l'ellipse (77) et s'en déduisent en y changeant B^2 en $-B^2$.

VIII. Les droites qui vont d'un même point quelconque de l'hyperbole équilatère aux extrémités d'un même diamètre réel (ou *transverse*), font des angles égaux avec l'une quelconque des deux asymptotes. (On démontrera d'abord que pour les droites proposées, les a et a' sont tels, qu'on a toujours $aa'=1$, etc.)

127. On appelle *diamètres conjugués* de l'hyperbole, deux diamètres tels, qu'en les prenant pour axes des coordonnées, l'équation de la courbe conserve la même forme que pour ses axes rectangulaires.

Pour trouver ces diamètres, prenons les formules qui servent à passer d'un système d'axes rectangulaires à un autre système de même origine (45), savoir :

$$x=\frac{x'}{m}+\frac{y'}{m'} \text{ et } y=\frac{ax'}{m}+\frac{a'y'}{m'},$$

formules dans lesquelles $m^2=1+a^2$ et $m'^2=1+a'^2$. Substituant ces valeurs de x et de y dans l'équation $A^2y^2-B^2x^2=-A^2B^2$, qui est celle de l'hyperbole rapportée à ses axes et au centre, on trouvera

$$\frac{A^2a'^2-B^2}{m'^2}y'^2+\frac{A^2a^2-B^2}{m^2}x'^2+2x'y'\frac{A^2aa'-B^2}{mm'}=-A^2B^2\ldots(a)$$

Pour que cette équation soit de même forme que celle qui est relative aux axes 2A et 2B, il faut qu'elle ne contienne pas le produit $x'y'$ des nouvelles coordonnées ; il faut donc profiter de l'indétermination de a et a' pour faire disparaître ce terme, en rendant son coefficient nul ; ce qui donne la condition

$$A^2aa'-B^2=0;\ \ldots(1)$$

et l'équation de la courbe devient, en y supprimant les accens des coordonnées obliques x' et y',

$$\frac{A^2a'^2-B^2}{m'^2}y^2+\frac{A^2a^2-B^2}{m^2}x^2=-A^2B^2\ldots(2).$$

La condition (1) qui existe entre les inconnues a et a' étant du premier degré, admet une infinité de valeurs réelles pour ces inconnues ; il y a donc une infinité de systèmes d'axes de coordonnées, pour lesquels l'équation de l'hyperbole ne contient que les carrés y^2, x^2 des variables, avec un terme constant. Mais pas un seul de ces systèmes, autre que celui des axes, ne sera rectangulaire, puisqu'alors on devrait avoir $aa'+1=0$; ce qui réduit la relation (1) à $A^2+B^2=0$, chose évidemment impossible.

128. Nous avons vu (115) que les diamètres dirigés suivant les droites $y=ax$ et $y=a'x$ ne sont réels, c'est-à-dire ne rencontrent l'hyperbole, qu'autant que $B^2>A^2a^2$ et $B^2>a'^2A^2$, ou $B>Aa$ et $B>a'A$. Mais ces inégalités ne sauraient exister en même temps, pour les diamètres conjugués ; car d'après la

relation (1), si $B > aA$, on aura $B < a'A$, et réciproquement. L'hyperbole ne rencontre donc jamais à la fois ses diamètres conjugués.

Supposons qu'elle coupe l'axe des x; alors on aura $B > aA$ et $B < a'A$. Faisant $y = 0$ et $x = 0$, dans l'équation (2), on aura les distances de l'origine aux points où l'hyperbole rencontre les axes des x et des y obliques : en désignant ces distances par A' et D, la première étant comptée sur l'axe des abscisses et la seconde sur l'axe des ordonnées, on trouvera

$$A'^2 = \frac{A^2B^2m^2}{B^2 - a^2A^2} \quad \text{et} \quad D^2 = \frac{-A^2B^2m'^2}{A^2a'^2 - B^2}.$$

Comme $B > aA$ et $B < Aa'$, on voit que la distance A' est réelle et la distance D imaginaire, comme cela doit être, puisque la courbe ne rencontre pas l'axe des y. Cependant on a coutume de prendre, sur l'axe des y, deux points C et C' éloignés chacun de l'origine d'une distance B' telle, qu'on ait $B'^2 = -D^2$. Alors $2A'$ et $2B'$ sont appelés les *diamètres conjugués* de l'hyperbole, bien que le premier $2A'$ soit le seul terminé à la courbe : $2A'$ est le *premier* diamètre conjugué et $2B'$ le *second*.

129. On voit d'ailleurs que, pour déterminer les longueurs A' et B', on a

$$A'^2 = \frac{A^2B^2m^2}{B^2 - a^2A^2} \quad \text{et} \quad B'^2 = \frac{A^2B^2m'^2}{A^2a'^2 - B^2} \cdots (3)$$

Prenant dans ces équations, les valeurs des dénominateurs, et substituant dans l'équation (2) de l'hyperbole, on obtient

$$A'^2y^2 - B'^2x^2 = -A'^2B'^2,$$

équation qui se déduit de l'équation analogue de l'ellipse, en changeant B'^2 en $-B'^2$ dans cette dernière.

130. Soit s le sinus de l'angle compris par les diamètres conjugués $2A'$ et $2B'$; il est clair qu'en raisonnant comme pour l'ellipse, les équations (1) et (3) donneront

$$A'^2 - B'^2 = A^2 - B^2 \quad \text{et} \quad A'B's = AB,$$

relations fournies par celles analogues de l'ellipse, en changeant dans ces dernières B^2 et B'^2, respectivement en $-B^2$ et $-B'^2$.

La seconde de ces relations nous apprend que *le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués quelconques de l'hyperbole, est équivalent au rectangle construit sur les deux axes.*

Quant à l'égalité $A'^2 - B'^2 = A^2 - B^2$, elle *montre que la différence des carrés de deux diamètres conjugués de l'hyperbole, vaut la différence des carrés des deux axes.*

Il n'y a donc que l'hyperbole équilatère qui ait ses diamètres conjugués égaux; et tous les siens le sont deux à deux.

131. L'équation de l'hyperbole, rapportée à ses diamètres conjugués $2A'$ et $2B'$, étant $A'^2y^2 - B'^2x^2 = -A'^2B'^2$, on tire de cette équation et de la relation (1), les théorèmes que voici à démontrer, et qui sont analogues à ceux énoncés (89) pour l'ellipse :

1° *Chaque diamètre divise les cordes parallèles à son conjugué en deux parties égales.* D'où il suit que pour avoir un diamètre et le centre d'une hyperbole tracée, il suffit de mener une droite par les milieux de deux cordes parallèles et de répéter cette opération pour deux autres cordes parallèles.

2° *Les carrés des ordonnées aux diamètres conjugués, sont entre eux comme les produits des distances des pieds de ces ordonnées aux points où l'axe des abscisses coupe la courbe.*

De sorte que pour décrire une hyperbole dont on connaît deux diamètres conjugués et l'angle qu'ils font entre eux, il faut d'abord tracer une hyperbole sur ces diamètres, pris pour axes rectangulaires, puis incliner les ordonnées de cette hyperbole sous l'angle donné, sans changer leurs longueurs : les points ainsi obtenus appartiendront à l'hyperbole demandée.

3° *Les tangentes aux extrémités d'un diamètre réel de l'hyperbole, sont parallèles à son conjugué; et réciproquement.*

4° *Deux diamètres conjugués de l'hyperbole, sont toujours parallèles à deux cordes supplémentaires menées des extrémités du premier axe.*

Ce qui donne le moyen, connaissant une hyperbole et ses deux axes, de trouver deux diamètres conjugués, comprenant entre eux un angle donné.

5° Pour deux cordes supplémentaires $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$, menées des extrémités de $2A'$, on aura toujours $A'^2aa' - B'^2 = 0$; et réciproquement.

6° La tangente $y = ax + b$ à l'hyperbole, au point (x'', y''), a pour équation

$$A'^2yy'' - B'^2xx'' = -A'^2B'^2, \quad \text{ou} \quad A'^2a^2 - B'^2 = b^2,$$

la valeur de a étant $a=\frac{B'^2x''}{A'^2y''}$.

7° *Si une corde supplémentaire est parallèle au diamètre mené au point de tangence, l'autre corde sera parallèle à la tangente.*

On peut donc, sans connaître les axes, mener une tangente à l'hyperbole, soit par un point donné sur cette courbe, soit parallélement à une droite donnée.

8° Si un diamètre réel de l'hyperbole est parallèle à une corde supplémentaire, son conjugué sera parallèle à l'autre corde, comme étant tous les deux parallèles à la tangente à une extrémité du premier diamètre (3° et 7°); l'angle entre ces diamètres conjugués sera donc le même que celui des deux cordes supplémentaires.

De là, si l'hyperbole est tracée, on trouvera aisément deux diamètres conjugués, comprenant un angle donné, lesquels seront les axes, quand l'angle sera droit.

132. *Dans l'hyperbole rapportée à ses axes, les rectangles construits sur les coordonnées des extrémités positives de deux diamètres conjugués, sont équivalens entre eux.* Soient (x,y) et (x',y') les extrémités positives des diamètres conjugués $2A'$ et $2B'$; les équations de ces diamètres donneront évidemment $a=\frac{y}{x}$ et $a'=\frac{y'}{x'}$. Substituant ces valeurs dans la relation $A^2aa'=B^2$ et dans la seconde relation (3), puis observant que $x'^2+y'^2=B'^2$, on trouvera

$$A^2yy'=B^2xx',$$
$$A^2y'^2-B^2x'^2=A^2B^2.$$

De plus, comme l'extrémité (x,y) appartient à l'hyperbole, on a

$$A^2y^2-B^2x^2=-A^2B^2.$$

Substituant dans cette équation, les valeurs de A^2 et B^2, tirées des deux équations précédentes, et réduisant, on obtiendra $xy=x'y'$. Ce qu'il fallait démontrer.

Au moyen de $xy=x'y'$, les valeurs que l'on vient de trouver pour A^2 et B^2, deviennent $A^2=x^2-x'^2$ et $B^2=y'^2-y^2$,

relations fort remarquables.

133. *Le produit des distances du point de tangence à ceux où la tangente rencontre les axes de l'hyperbole, est égal au carré du demi-diamètre B' parallèle à cette tangente* (fig. 18). Car la tangente MTU rencontrant les axes en T et U, et le diamètre $ON=B'$, conjugué de $OM=A'$, étant parallèle à MT (131, 3°); si l'on mène MR parallèle à OP, les triangles MRU et MTP, semblables à ONQ, donneront

$$x : x' :: \text{MU} : \text{B}',$$
$$y : y' :: \text{MT} : \text{B}'.$$

Multipliant par ordre, et observant que $xy = x'y'$, on trouvera $\text{MU} \times \text{MT} = \text{B}'^2$.

134. Décrivant sur TU comme diamètre, une circonférence rencontrant OM en O et en I, on aura $\text{OM} \times \text{IM} = \text{MU} \times \text{MT}$, ou $\text{A}' \times \text{IM} = \text{B}'^2$, ou encore $\text{IM} = \frac{\text{B}'^2}{\text{A}'}$.

De là résulte le moyen de *construire les axes de l'hyperbole, connaissant deux diamètres conjugués* $2\text{A}'$ *et* $2\text{B}'$, *ainsi que l'angle* MON *qu'ils font entre eux*. Pour cela, sur le premier diamètre $\text{OM} = \text{A}'$, on prendra $\text{MI} = \frac{\text{B}'^2}{\text{A}'}$; par le milieu de OI, on élevera une perpendiculaire, qui coupera en V la parallèle MU à $\text{ON} = \text{B}'$; du centre V et du rayon VO, on décrira une circonférence, qui coupera MU aux points T et U où cette parallèle rencontre les axes cherchés : menant alors les droites OT et OU, puis MP perpendiculaire à OT; le premier axe 2A se construira par la formule $\text{A}^2 = \text{OP} \times \text{OT}$. On aurait de même $\text{B}^2 = \text{MP} \times \text{OU}$.

135. *Les coordonnées comprenant un angle* θ, *toute équation de la forme* $\text{M}y^2 - \text{N}x^2 = -\text{P}$, (M, N *et* P *étant des nombres positifs*) *représente une hyperbole*. D'abord si l'on prend les nombres A' et B' tels qu'on ait $\text{A}'^2 = \frac{\text{P}}{\text{N}}$ et $\text{B}'^2 = \frac{\text{P}}{\text{M}}$, cette équation deviendra

$$\text{A}'^2 y^2 - \text{B}'^2 x^2 = -\text{A}'^2\text{B}'^2 \ldots (4)$$

Or, on peut toujours trouver une hyperbole dont $2\text{A}'$ et $2\text{B}'$ soient les diamètres conjugués, comprenant l'angle θ; car en désignant par s le sinus de cet angle, les axes 2A et 2B seront donnés par les relations $\text{A}^2 - \text{B}^2 = \text{A}'^2 - \text{B}'^2$ et $\text{AB} = \text{A}'\text{B}'s$, desquelles on tire

$$\text{A}^2 = \tfrac{1}{2}(\text{A}'^2 - \text{B}'^2) + \sqrt{\tfrac{1}{4}(\text{A}'^2 - \text{B}'^2)^2 + \text{A}'^2\text{B}'^2s^2},$$
$$\text{B}^2 = -\tfrac{1}{2}(\text{A}'^2 - \text{B}'^2) + \sqrt{\tfrac{1}{4}(\text{A}'^2 - \text{B}'^2)^2 + \text{A}'^2\text{B}'^2s^2};$$

d'où il est visible que les valeurs de 2A et 2B seront toujours réelles.

Connaissant les axes 2A et 2B, on pourra tracer l'hyperbole; et cette hyperbole, rapportée à ses diamètres conjugués $2\text{A}'$ et $2\text{B}'$, sera représentée, comme on l'a vu (129), par l'équation (4) et conséquemment par l'équation proposée $\text{M}y^2 - \text{N}x^2 = -\text{P}$.

136. Lorsque les deux diamètres conjugués $2\text{A}'$ et $2\text{B}'$ sont donnés, ainsi que l'angle compris θ, on peut calculer les longueurs des deux axes, par les formules que l'on vient d'obtenir; mais ces formules sont com-

pliquées et difficiles à construire ; il importe donc de déterminer la position des axes, sans faire usage de leurs valeurs. Or, α étant l'angle compris entre A et A', l'angle entre A et B' sera $\theta+\alpha$; ainsi dans les formules (3), on a $\tang \alpha = a$ et $\tang(\theta+\alpha)=a'$. Divisant donc ces deux formules l'une par l'autre, après y avoir substitué A^2aa' au lieu de B^2 ; réduisant d'ailleurs, au moyen des principes de la trigonométrie, on obtiendra

$$\tang 2\alpha = \frac{B'^2 \sin 2\theta}{A'^2 - B'^2 \cos 2\theta},$$

formule qui s'appliquera à l'ellipse, en y changeant B'^2 en $-B'^2$.

137. L'équation de l'hyperbole prend une forme très-simple, lorsqu'on choisit ses asymptotes pour axes des coordonnées. En effet, comme alors les a et a', qui déterminent les nouveaux axes des x' et des y', à l'égard du premier axe 2A de la courbe, ont respectivement pour valeurs $a = -\frac{B}{A}$ et $a' = \frac{B}{A}$ (115) ; d'où $m^2 = 1 + a^2 = \frac{A^2+B^2}{A^2} = m'^2$; l'équation (ν) du n° 127, qui est celle de l'hyperbole rapportée aux nouveaux axes, se réduit à

$$x'y' = \frac{A^2+B^2}{4} \ldots (\varphi)$$

Dans cette forme nouvelle de l'équation de l'hyperbole, on reconnaît aisément la propriété caractéristique des asymptotes de s'approcher sans cesse de la courbe ; car y' devient nul dès que x' est infini, et réciproquement.

138. *Le parallélogramme construit sur les coordonnées d'un point quelconque de l'hyperbole, rapportée à ses asymptotes, est équivalent au losange ayant pour diagonales les deux demi-axes de la courbe* (fig. 19).

Soient OX' et OY' les asymptotes, c'est-à-dire les nouveaux axes des x' et des y' ; soient B et B' les sommets de la courbe ; x', y' les coordonnées du point M et OPMQ le parallélogramme construit sur ces coordonnées. Par les sommets B et B' menons des parallèles aux asymptotes ; d'après la construction de ces lignes, la perpendiculaire BH = le demi-second axe B = OC ; la figure OBHC est donc un rectangle. De plus, comme l'angle BOH = BOD' = OBD, le côté OD = BD et le parallélogramme ODBD' est un losange, dans lequel les diagonales OB = A DD' = BH = B ; de sorte qu'on a $4OD^2 = A^2 + B^2$.

Cela posé, soit s le sinus de l'angle QOP ; nous avons vu (20) que les aires des parallélogrammes OPMQ et ODBD' qui ont l'angle commun QOP, sont respectivement $x'y's$ et $OD\cdot OD'\cdot s = OD^2\cdot s = \frac{A^2+B^2}{4}\cdot s$. Ainsi d'après l'équation (φ) de l'hyperbole, ces deux aires sont équivalentes. Mais il est visible d'ailleurs que l'aire du losange ODBD' est $\frac{1}{2}$AB; donc

$$x'y's = \tfrac{1}{2}AB.$$

139. Divisant cette équation par celle de l'hyperbole, on aura

$$s = \frac{2AB}{A^2+B^2},$$

formule que l'on obtiendrait d'ailleurs en substituant les valeurs précédentes de a et a' dans l'expression de s, trouvée au n° 17.

140. Lorsque l'hyperbole est équilatère, $s = 1$: le losange ODBD' devient un carré, et reste toujours équivalent au rectangle des coordonnées. Le grand losange BCB'C', quadruple de ODBD', se nomme la *puissance* de l'hyperbole : c'est le demi-rectangle des axes 2A et 2B.

141. Pour plus de simplicité, nous supprimerons les accens des variables x' et y', en nous rappelant qu'étant comptées sur les asymptotes, elles sont en général obliques. De plus, nous poserons $A^2 + B^2 = 4H^2$; et alors, l'équation de l'hyperbole, rapportée à ses asymptotes, sera $xy = H^2$.

142. Réciproquement, *toute équation de la forme* $xy = H^2$, *représente une hyperbole, rapportée à ses asymptotes*. Car soit θ l'angle des coordonnées proposées; il est clair qu'on peut toujours trouver une hyperbole dont l'angle des asymptotes étant égal à θ et son sinus désigné par s, ce sinus et les axes 2A et 2B satisfassent aux relations

$$A^2 + B^2 = 4H^2 \quad \text{et} \quad s = \frac{2AB}{A^2+B^2}.$$

Ces équations, en effet, fournissent

$$A + B = 2H\sqrt{1+s} \quad \text{et} \quad A - B = 2H\sqrt{1-s},$$

formules qui donneront toujours pour A et B des valeurs réelles.

Connaissant ainsi les deux axes 2A et 2B, on connaîtra aussi leurs directions, car le premier 2A divise en deux parties égales l'angle des asymptotes, c'est-à-dire l'angle θ des axes des coordonnées; l'hyperbole pourra donc être construite (105). Or, si l'on rapporte cette hyperbole à ses asymptotes, on trouvera, comme on l'a vu (137), $xy = \frac{1}{4}(A^2 + B^2)$ ou $xy = H^2$, c'est-à-dire l'équation proposée, l'angle des asymptotes étant θ. Cette équation représente donc une hyperbole, rapportée à ses asymptotes ; ce qu'il fallait démontrer.

143. Pour avoir l'équation de la tangente à l'hyperbole $xy = H^2$, nous considérerons cette tangente, comme une sécante dont les points d'intersection (x', y') et (x'', y'') avec la courbe se réunissent en un seul. L'équation de cette sécante sera

$$y-y''=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x''),\quad a=\frac{y'-y''}{x'-x''}.$$

On a d'ailleurs $x'y'=H^2$ et $x''y''=H^2$; d'où $y'=\frac{x''y''}{x'}$. Substituant cette valeur et réduisant, on aura, pour l'équation de la sécante,

$$y-y''=-\frac{y''}{x'}(x-x'')\ \text{et}\ a=-\frac{y''}{x'}.$$

Maintenant, si le second point d'intersection (x', y') coïncide avec le premier, ce qui donne $y'=y''$ et $x'=x''$, la sécante proposée sera tangente au point (x'', y'') et aura pour équation

$$y-y''=-\frac{y''}{x''}(x-x'')\ \text{et}\ a=-\frac{y''}{x''}.$$

144. En faisant $y=0$ dans cette équation, on aura l'abscisse x du point T où la tangente rencontre l'axe des abscisses, et $x-x''$ sera la valeur de la soutangente PT ; il viendra donc PT $=x''=$ OP ; c'est-à-dire que, *lorsque l'hyperbole est rapportée à ses asymptotes, la soutangente, pour chaque point, est égale à l'abscisse qui lui correspond.*

Si donc par le point M de l'hyperbole, on veut lui mener une tangente, il faudra prendre sur l'asymptote OX', et à partir du pied de l'ordonnée PM, la distance PT $=$ OP ; et TMR sera la tangente demandée.

145. Les triangles TOR et TPM étant semblables, il en résulte TM $=$ MR. *La portion de la tangente, entre les asymptotes, est donc divisée en deux parties égales par le point de contact.*

146. Soit une droite II' coupant l'hyperbole en G et G' et les asymptotes en I et I' ; je dis que IG $=$ I'G'. D'abord on peut toujours mener une tangente RMT parallèle à la droite II' (131, 7°). Et puisque le point de contact M est le milieu de RT, la droite OMM' divise la parallèle II' à RT, en deux parties égales au point M'. D'ailleurs le conjugué du diamètre OM est paral-

lèle à RT (131, 3°); il est donc aussi parallèle à la corde GG′; celle-ci est donc divisée en deux parties égales, en M′, par le diamètre OM (131, 1°). De sorte qu'ayant à la fois M′I = M′I′ et M′G = M′G′, il vient IG = I′G′. Donc, *si une droite coupe l'hyperbole et ses asymptotes, les parties de cette droite comprises entre les asymptotes et la courbe, sont égales entre elles.*

147. Cette propriété fournit un moyen bien simple de construire l'hyperbole, connaissant un de ses points et ses deux asymptotes. On mènera par ce point G une droite quelconque IGI′, terminée en I et I′ aux asymptotes OX′ et OY′; on prendra I′G′ = IG, et le point G′ appartiendra à l'hyperbole. On trouvera donc ainsi autant de points qu'on voudra de la courbe. Pour éviter la confusion d'un grand nombre de droites, tirées d'un même point, on pourra faire servir quelques-uns des points déjà déterminés, à en trouver d'autres.

Et comme l'angle des asymptotes peut se construire, dès que l'on connaît le rapport des axes (115), il résulte encore de la propriété précédente, le moyen de *tracer l'hyperbole, dont on connaît deux points, une asymptote et le rapport des axes principaux.*

148. *La portion de la tangente, comprise entre les deux asymptotes, est égale en longueur au conjugué du diamètre mené au point de tangence.* D'abord TR étant tangente en M, l'aire du triangle TRO est double de celle du parallélogramme OPMQ, et vaut par conséquent AB (138). Soit la demi-tangente $MT = m$ et le demi-diamètre $OM = A'$; l'angle OMR est évidemment égal à celui que le diamètre $2A'$ fait avec son conjugué $2B'$. Si donc on désigne par s le sinus de cet angle, l'aire du parallélogramme construit sur les demi-diamètres conjugués A' et B', sera $A'B's = AB$ (130), et l'aire du parallélogramme construit sur A' et m, vaudra $A'ms$. Ce parallélogramme, double du triangle OMT, vaut le triangle OTR ou AB; donc $A'B's = A'ms$, et par suite $B' = m$.

149. On voit de plus, qu'*en menant du centre de l'hyperbole, une parallèle à la tangente à une extrémité d'un diamètre* $2A'$, *la portion de cette parallèle entre les parallèles aux asymptotes tirées de la même extrémité, exprime en grandeur et en direction le conjugué* $2B'$ *du diamètre proposé.*

De là résulte le moyen de trouver le conjugué d'un diamètre donné, connaissant les asymptotes; et aussi de tracer les asymptotes, connaissant deux diamètres conjugués, en longueurs et en directions.

150. *L'hyperbole étant rapportée à ses asymptotes,* OX *et* OY, *trouver l'aire* S *du segment* BCPM, *compris entre la courbe, une asymptote et les deux ordonnées* BC *et* MP (fig. 20).

L'équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes étant de la forme $xy = m^2$, les coordonnées du sommet B seront BC $=$ OC $= m$. Soient x et y les coordonnées du point M, de manière que OP $= x$ et PM $= y$. Appelons e la valeur que l'on trouve en supposant n infini, dans le développement de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; on aura donc

$$e = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ et } \sqrt[n]{e} - 1 = \frac{1}{n}.$$

Le nombre infini n étant supposé entier, la formule de Newton donnera, pour le développement de la valeur de e,

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n}\right) + \text{etc.}$$

Le nombre n étant infini, il est clair que le quotient $\frac{1}{n}$ est infiniment petit, et doit être considéré comme nul; il vient donc

$$e = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \text{etc};$$

ce qui donne, à moins d'un dibillionième près,

$$e = 2,718281828\,45;$$

d'où l'on a trouvé pour le logarithme ordinaire de e,

$$\mathrm{l}e = 0,4342944819\,0.$$

Cela posé, prenons sur CP n points (en y comprenant C et P) tels, que leurs distances au point O forment une progression géométrique croissante, dont m soit le premier terme et $\sqrt[n]{e} = r$ la raison, n étant toujours infini. Les ordonnées menées par ces n points divisent le segment BCPM en $n-1$ trapèzes mixtilignes. Soit QRIN le v^{me} de ces trapèzes, à partir du point C; à cause de n infini, il est clair que la raison r diffère infiniment peu de l'unité, et que par conséquent les abscisses OC et OR sont presqu'égales, ainsi que les ordonnées QN et RI; la figure QRIN est donc un parallélogramme. Si donc on désigne par s

le sinus de l'angle YOP, on aura, pour l'aire du parallélogramme, $QRIN = s \times QR \times QN$.

Or, par construction $OQ = m.r^{v-1}$ et $OR = m.r^{v}$; donc $QR = mr^{v-1}(r-1)$, $QN = \frac{m^2}{OQ} = mr^{-v+1}$, et par suite $QRIN = m^2 s(r-1)$.

Cette valeur étant indépendante de v, il s'ensuit que les $n-1$ trapèzes qui composent le segment S sont tous équivalens, et qu'ainsi on a $\quad S = m^2 s(n-1)(r-1)$.

Mais OP ou $x = mr^{n-1}$, parce que x est le n^{me} terme de la progression : prenant de part et d'autre les logarithmes ordinaires, on trouvera, à cause de $\mathrm{l}\,r = \frac{\mathrm{l}\,e}{n}$

$$n-1 = (\mathrm{l}\,x - \mathrm{l}\,m)\frac{n}{\mathrm{l}\,e} = \frac{n}{\mathrm{l}\,e}\,\mathrm{l}\left(\frac{x}{m}\right).$$

Substituant cette valeur dans celle de S, puis observant que $r - 1 = \sqrt[n]{e} - 1 = \frac{1}{n}$, on obtiendra définitivement

$$S = \frac{m^2 s}{\mathrm{l}\,e}\cdot \mathrm{l}\left(\frac{x}{m}\right).$$

Il est aisé de voir que l'erreur commise en prenant QRNI pour un parallélogramme, est moindre que $\frac{m^2}{rn^2}$; ainsi l'erreur qui en résulte sur la mesure du segment S, est moindre que $\frac{m^2}{n}$, ou qu'une quantité infiniment petite, puisque n est infini.

151. Si l'on veut calculer l'aire du segment BMM', formé par l'hyperbole, le prolongement de son premier axe et l'ordonnée MM' parallèle au second, on remarquera que l'aire du triangle OPM ou de son équivalent OCB, est $\frac{1}{2}m^2 s$. Et comme l'espace $BOM = BOC + BCPM - OPM = BCPM = \frac{m^2 s}{\mathrm{l}\,e}\cdot \mathrm{l}\left(\frac{x}{m}\right)$, on en déduit

$$\text{segment } BMM' = \tfrac{1}{2}OM' \times MM' - \frac{OC^2 . s.}{\mathrm{l}\,e}\,\mathrm{l}\left(\frac{OP}{OC}\right).$$

152. D'après les valeurs précédentes, si l'hyperbole est équilatère, il sera bien facile de calculer le volume décrit autour de l'asymptote OX, par le segment BCPN ou S. En effet, le v^{me} parallélogramme QRIM devenant alors un rectangle, le volume décrit par ce rectangle, autour de OX, aura pour mesure $\pi QN^2 \times QR$ ou

$$\pi m^3 r(r-1) \times \frac{1}{r^v}.$$

Prenant successivement $v=1, 2, 3, 4, \ldots, n-1$, on aura successivement les volumes produits autour de OX par les $n-1$ rectangles qui composent le segment propoté S; la somme de tous ces volumes sera donc celui engendré par ce segment; de sorte qu'on aura

$$\text{vol. S}=\pi m^3 r(r-1)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^3}+\cdots+\frac{1}{r^{n-1}}\right),$$

ou bien $$\text{vol. S}=\pi m^3 r\left(1-\frac{1}{r^{n-1}}\right).$$

Mais à cause de OP ou $x=m\,r^{n-1}$, il vient

$$\text{vol. S}=\pi m^3 r\left(1-\frac{m}{x}\right).$$

Enfin, $r=\sqrt[n]{e}$ donne $r=e^{\frac{1}{n}}$: et puisque n est infini, on a $\frac{1}{n}=0$, puis $r=e^0=1$; d'où résulte le volume cherché

$$\text{vol. S}=\pi m^3\left(1-\frac{m}{x}\right).$$

Lorsque l'abscisse x est infinie, l'aire du segment S est aussi infinie (150), tandis que le volume décrit par ce segment a la valeur finie πm^3.

Quelque singulier que paraisse ce résultat, il n'en est pas moins exact; mais pour mieux concevoir comment il peut se faire que l'espace ZBCX, qui est infini en étendue et en surface, engendre néanmoins un corps dont le volume est fini, prenons sur l'asymptote OX et à partir de C, des longueurs égales respectivement aux termes de la suite infinie m, $2m$, $4m$, $8m$, $16m$, ...; et concevons sur ces longueurs, des rectangles extérieurs à l'espace ZBCX. Ces rectangles engendreront des cylindres dont les hauteurs croîtront en raison double, tandis que les bases décroîtront en raison quadruple; ainsi ces cylindres décroîtront seulement en raison double. Or, le premier $=\pi m^3$; donc la somme de tous ces cylindres est

$$\pi m^3\left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\text{etc., à l'infini}\right)=2\pi m^3.$$

Il est évident que le solide engendré par l'espace infini ZBCX est moindre que tous les cylindres extérieurs, c'est-à-dire moindre que $2\pi m^3$; ce solide a par conséquent un volume fini. (Voyez les Mélanges d'analyse et de géométrie, page 664; par M. de Stainville. Paris, 1815).

153. *Deux hyperboles sont semblables, lorsqu'elles ont leurs axes*

homologues proportionnels. Soient M et N deux points quelconques de la première, M' et N' deux points *homologues* de la seconde, c'est-à-dire deux points dont les coordonnées rectangulaires soient respectivement proportionnelles à celles des deux points M et N. En inscrivant à volonté une ligne brisée dans l'arc MN, il est facile de voir qu'on pourra toujours inscrire, dans l'arc *homologue* M'N', une ligne brisée semblable; de sorte que les arcs homologues MN et M'N' sont semblables (100). Ainsi les deux hyperboles proposées renferment un même nombre d'arcs homologues semblables; donc elles sont semblables elles-mêmes.

154. Puisque dans deux hyperboles semblables, les arcs semblables ne sont que des lignes brisées semblables, composées d'une infinité de droites homologues, infiniment petites, il s'ensuit, 1° que les longueurs de ces arcs sont entre elles comme leurs cordes, et par conséquent comme les premiers axes; 2° que les segmens compris par deux arcs semblables et leurs cordes, sont eux-mêmes semblables et proportionnels aux carrés des premiers ou des seconds axes.

155. *Lorsque deux hyperboles semblables ont le même centre et les premiers axes suivant la même droite, elles ont les mêmes asymptotes; et réciproquement.* Car une asymptote de la première et une asymptote correspondante ou homologue de la seconde, font avec l'axe des x et d'un même côté, des angles égaux dirigés dans le même sens; donc elles coïncident. La réciproque est évidente; car deux hyperboles qui ont les mêmes asymptotes, ont nécessairement leurs axes proportionnels.

156. Voici plusieurs problèmes et théorèmes sur l'hyperbole :

I. Trouver les conditions nécessaires pour qu'une droite ne rencontre l'hyperbole qu'en un seul point, ou pour qu'elle ne la rencontre pas.

II. Etant donnés, dans l'hyperbole, la direction du premier axe, deux points et un foyer, décrire la courbe.

III. Trouver la courbe passant par les points qui divisent chacune des cordes parallèles au premier axe de l'hyperbole, en trois parties égales.

IV. Si par chaque point d'une tangente à un cercle donné, on élève sur cette tangente, une perpendiculaire égale à la partie extérieure de la sécante menée par ce point et par le centre, le lieu des extrémités de ces perpendiculaires sera une hyperbole.

V. Si d'un foyer de l'hyperbole, on mène une perpendiculaire à une asymptote, les distances du pied de cette perpendiculaire au centre et au foyer proposé, vaudront respectivement le demi-premier axe et le demi-second.

VI. Tracer l'hyperbole, 1° dès que l'on connaît un foyer, une asymptote et le premier axe ou le rapport des deux axes; 2° lorsque l'on connaît un foyer et les directions du premier axe et d'une asymptote. (Les solutions dépendent du théorème V.)

VII. Si par un point quelconque de l'hyperbole, on mène une parallèle à la droite d qui joint les extrémités de deux diamètres conjugués, la différence des carrés des distances du point proposé à ceux où la parallèle coupe ces deux diamètres, sera égale au carré de la droite *d*.

VIII. Comment tracer les bords d'une allée d'un parterre, pour que cette allée paraisse avoir partout la même largeur à un œil placé verticalement au-dessus de la droite qui divise en deux parties égales la même allée, dans le sens de sa longueur? On admet que deux droites paraissent égales, dès qu'elles sont vues sous des angles égaux.

IX. Le lieu de tous les centres de gravité des triangles de même surface et de même angle au sommet, est une hyperbole, dont les asymptotes sont les deux côtés du sommet commun aux triangles.

X. Le lieu de tous les milieux des segmens qu'interceptent deux axes rectangulaires, sur les droites tirées d'un point donné dans le même plan, est une hyperbole équilatère, dont le centre est au milieu de la droite qui joint le point donné à l'origine des axes proposés. (Ces deux axes pourraient être obliques.)

De la Parabole.

157. La *parabole* est une courbe plane telle, que les distances de l'un quelconque de ses points à un point fixe F et à une droite donnée DE, sont égales entre elles. Le point fixe F est dit le *foyer* de la parabole, la droite donnée DE en est la *directrice*, et la distance du foyer à un point de la courbe est le *rayon vecteur* de cette courbe.

158. D'après cette définition, pour construire la parabole, le foyer F et la directrice DE étant donnés, on prend une équerre ABC (fig. 21); on attache en C et en F les extrémités d'un fil; dont la longueur est égale au côté AC de l'angle droit de l'équerre; on applique l'autre côté AB contre la directrice, qui sera, si l'on veut, une règle tenue immobile; puis on fait glisser l'équerre suivant la directrice, ayant soin de tenir le fil toujours tendu au moyen d'un crayon ou style qui s'appuie constamment sur le côté AC. La trace de ce style sera la parabole demandée.

Effectivement, à cause de la ligne $CmF = CA$, on aura toujours $mF = mA$.

Le côté AC de l'équerre étant parvenu sur la perpendiculaire FG, menée du foyer à la directrice, donnera le point O où cette perpendiculaire est coupée par la courbe. Ce point O est appelé le *sommet* de la parabole et la perpendiculaire OFX, à la directrice, est l'*axe* de la courbe.

Renversant l'équerre autour de l'axe GX et continuant le mouvement suivant la directrice, on décrira la seconde portion OV′ de la parabole, égale à la première OV.

Par ce procédé on obtient une portion VOV′ de la courbe, et cette portion est d'autant plus grande, que le côté AC de l'équerre est plus grand lui-même.

159. On peut aussi décrire la parabole par points. Soit toujours F le foyer et DE la directrice. Menons FG perpendiculaire à DE, et prenons le milieu O de la distance FG du foyer à la directrice; ce milieu O sera évidemment le sommet de la parabole. Pour avoir d'autres points, prenons sur la perpendiculaire GFX, et à partir du point G, une distance quelconque GP, plus grande que GO; puis du foyer F comme centre et du rayon GP, décrivons un arc; cet arc coupera la perpendiculaire tirée de P sur GP, aux deux points M et M′, qui seront à la parabole cherchée.

Menant en effet, MQ perpendiculaire à la directrice, on aura MQ = GP = FM; le point M est donc à égales distances du foyer F et de la directrice; il appartient conséquemment à la parabole. Il en est de même du point M′. On voit que par cette construction, on trouvera autant de points qu'on voudra de la courbe à décrire; et ces points seront deux à deux de part et d'autre et à égales distances de l'axe OX.

160. Cherchons actuellement l'équation de la parabole. Désignons par p la distance FG du foyer F à la directrice DE, puis plaçons l'origine des coordonnées rectangulaires au milieu O de cette distance et dirigeons l'axe des x suivant FG. Soit M un point quelconque de la courbe, x et y les coordonnées OP et OM de ce point, et r le rayon vecteur FM = MQ = GP : il est clair qu'on aura d'abord $r = x + \frac{1}{2}p$.

Ensuite, le triangle rectangle FMP donne

$$r^2 = y^2 + (x - \tfrac{1}{2}p)^2.$$

Substituant la valeur précédente de r, développant et réduisant, il viendra

$$y^2 = 2px.$$

Telle est l'équation de la parabole rapportée à ses *axes principaux* OX et OY, bien que le premier OX soit seul un *axe* de la courbe : aussi le nomme-t-on *premier axe* ou simplement l'*axe* de la parabole. Le coefficient $2p$ est le *paramètre* : c'est la double distance du foyer à la directrice, ou encore la double ordonnée qui passe par le foyer.

161. L'équation précédente donne

$$y = \pm\sqrt{2px}.$$

Ces deux valeurs étant égales et de signes contraires, on voit que *le premier axe de la parabole divise en deux parties égales, toutes les cordes de cette courbe qui sont perpendiculaires au même axe.*

Posant $x = 0$, pour avoir les points où la courbe coupe l'axe des ordonnées, on aura $y = \pm 0$; les deux points d'intersection se réunissent donc à l'origine O. Ainsi le *second axe* de la parabole lui est tangent au sommet; et la courbe ne s'étend pas à la gauche de cet axe, comme on le voit d'ailleurs, puisque x négatif donne y imaginaire. Et comme x positif donne à y des valeurs réelles, d'autant plus grandes que x est plus grand lui-même, il s'ensuit que la parabole s'étend indéfiniment à la droite de son second axe, *symétriquement* au-dessus et au-dessous du premier.

162. Remarquons d'ailleurs que dans la parabole $y^2 = 2px$, le paramètre $2p$ peut varier depuis zéro jusqu'à l'infini. Lorsque ce paramètre est nul, ce qui donne $y = 0$, quel que soit x, la parabole se réduit à son axe. A mesure que le paramètre augmente, la parabole devient de plus en plus ouverte, s'approche de plus en plus de la tangente menée par le sommet, pour laquelle $y^2 = 0$, et se confond avec cette tangente, lorsque le paramètre $2p$ devient infini; car alors, quel que soit y, on a toujours $x = \frac{y^2}{\infty} = 0$.

163. Nous venons de voir que la parabole a pour équation $y^2 = 2px$. Réciproquement, *les coordonnées étant rectangulaires, toute équation qui peut se ramener à la forme* $y^2 = 2px$, *représente une parabole, ayant le sommet à l'origine et l'axe dirigé suivant celui des abscisses* (fig. 21).

Prenons en effet, sur l'axe des x et de part et d'autre de l'origine O, les distances $OF = OG = \frac{1}{2}p$, et par le point G, menons DE perpendiculaire à GF; si M ou (x, y) est un point de la courbe, on aura évidemment

$$FM^2 = y^2 + (x - \tfrac{1}{2}p)^2 = 2px + x^2 - px + \tfrac{1}{4}p^2;$$

d'où $FM = x + \frac{1}{2}p$. Mais il est visible que la perpendiculaire

$MQ = PG = x + \frac{1}{2}p$; donc $MF = MQ$. Ainsi la courbe représentée par l'équation $y^2 = 2px$, et conséquemment par l'équation proposée, est telle, que les distances de chacun de ses points à un point fixe F et à une droite donnée DE, sont égales entre elles ; donc cette courbe est une parabole (157), dont F est le foyer, DE la directrice, O le sommet et $2p$ le paramètre.

D'après cela, si on a l'équation $2y^2 + 3y - 8x + 9 = 0$, et qu'on passe du système de coordonnées à un autre parallèle, en posant $x = h + x'$ et $y = k + y'$, on verra qu'en prenant $h = \frac{63}{64}$ et $k = -\frac{3}{4}$, l'équation proposée se réduit à $y'^2 = 4x'$; cette équation représente donc une parabole, facile à construire.

164. *Si l'on coupe la surface convexe d'un cône droit par un plan parallèle à une génératrice* CH *et perpendiculaire au plan conduit suivant cette génératrice et l'axe* CV *du cône, la section résultante sera une parabole* (fig. 22).

Soit M un point quelconque de l'intersection FNMT. Prenons le point N pour origine et NK pour axe des x. Soient x et y les coordonnées rectangulaires NP et PM du point M. Puisque PM est aussi perpendiculaire au plan HCI ; en conduisant par la droite MP, un plan perpendiculaire à l'axe CV, ce plan coupera le cône suivant un cercle, ayant son intersection DS avec HCI pour diamètre. Or, M est un point de la circonférence de ce cercle et MP une perpendiculaire au diamètre DS ; donc $y^2 = DP \times PS$. Les triangles semblables KNI et PNS donnant $KN : x :: KI : PS$, et ayant d'ailleurs $PD = HK$, il vient

$$y^2 = \frac{KI.KH}{KN}x.$$

Représentant le coefficient de x par $2p$, p sera donné, et on aura, pour tous les points de la courbe indéfinie FNMT, $y^2 = 2px$; donc cette courbe est une parabole (163), dont N est le sommet, NK l'axe et $2p$ le paramètre.

165. On peut considérer la parabole comme une ellipse dont le grand axe est infini. Prenons en effet, une ellipse dont OI soit le demi-grand axe A (fig. 21), l'origine des coordonnées rectangulaires étant au sommet O et les x positifs étant comptés suivant OX ; l'équation de cette courbe sera

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(2Ax - x^2).$$

La distance du centre I de cette ellipse au foyer F est IF =

$\sqrt{A^2 - B^2}$; en la retranchant du demi-grand axe A, il restera la distance OF du sommet au foyer le plus proche. Regardons cette distance comme une constante représentée par $\frac{1}{2}p$; nous aurons $\frac{1}{2}p = A - \sqrt{A^2 - B^2}$; d'où $B^2 = Ap - \frac{1}{4}p^2$.

Substituant cette valeur de B^2 dans l'équation précédente de l'ellipse, elle devient, réductions faites,

$$y^2 = 2px - \frac{p}{A}(x^2 + \tfrac{1}{2}px) + \frac{p^2x^2}{4A^2}.$$

Si dans cette équation, on donne successivement à A différentes valeurs, p restant toujours le même, on aura une suite d'ellipses dont les grands axes seront différens, mais qui auront toutes le même foyer F et la même distance de ce foyer au sommet de la courbe. Enfin, si l'abscisse x conservant une valeur finie, on suppose A infiniment grand, les termes divisés par A et A^2 seront infiniment petits et devront être regardés comme nuls; il viendra donc alors

$$y^2 = 2px,$$

équation d'une parabole. On passe donc de l'ellipse à la parabole, en supposant le grand axe infini. Ce qui peut conduire aux propriétés de la parabole, à l'aide de celles de l'ellipse.

166. Il est bien facile de s'assurer que, suivant que le point (x, y) est sur la parabole, au-dehors ou au-dedans, le binome $y^2 - 2px$ est nul, positif ou négatif; et réciproquement.

167. Pour trouver l'équation d'une tangente à la parabole, il faut regarder cette droite comme une sécante, dont les points d'intersection (x', y') et (x'', y'') avec la courbe se réunissent en un seul. Il est clair que l'équation de cette sécante est

$$y - y'' = a(x - x'') \quad \text{et} \quad a = \frac{y' - y''}{x' - x''}.$$

Les deux points (x', y') et (x'', y'') étant sur la parabole, on a

$$y'^2 = 2px' \quad \text{et} \quad y''^2 = 2px''; \quad \text{d'où} \quad a = \frac{2p}{y' + y''}.$$

Pour la tangente, les deux points d'intersection (x', y') et (x'', y'') coïncident et donnent $y' = y''$, $x' = x''$ et $a = \frac{p}{y''}$. Par cette valeur de a on voit qu'au sommet la tangente coïncide avec le second axe; mais qu'elle ne peut devenir parallèle au premier que quand y'' est infini. Substituant la valeur $a=\frac{p}{y''}$, on aura, pour l'équation de la tangente à la parabole, au point (x'', y''),

$$y-y''=\frac{p}{y''}(x-x'')\,;\ \text{d'où}\ yy'=p(x+x'')\ldots(1)$$

Retranchant le double de cette équation de $y''^2=2px''$, puis ajoutant de part et d'autre y^2, on trouvera

$$(y-y'')^2=y^2-2px.$$

Cette équation représente toujours la droite exprimée par l'équation (1). Or pour tout point (x, y) situé sur la même droite, le binome y^2-2px est positif; tous les points de la droite (1) sont donc hors de la parabole, à l'exception du point (x'', y''), qui est sur la courbe; cette droite (1) est donc effectivement tangente à la parabole au point (x'', y'').

168. La valeur $a=\frac{p}{y''}$, qui détermine la direction de la tangente, étant unique, il s'ensuit que par un point (x'', y'') donné sur la parabole, on ne peut mener qu'une seule tangente à cette courbe.

C'est ce qu'on vérifie d'ailleurs en cherchant le point de contact (x'', y'') d'une tangente à la parabole, menée par un point donné (x'', y''). Dans ce cas, les équations de la parabole et de la tangente donnent

$$y''^2=2px''\ \text{et}\ y'y''=p(x'+x'').$$

Eliminant y'' de ces équations, l'équation finale fournit

$$x''=\frac{y'^2-px'}{p}\pm\frac{y'}{p}\sqrt{y'^2-2px'}.$$

Suivant donc que le point (x', y') sera hors de la parabole, sur cette courbe ou dans son intérieur, les deux valeurs de x'' seront réelles et inégales, réelles et égales ou imaginaires, et il y aura deux tangentes, une seule ou aucune.

Nous venons de résoudre analytiquement le problème de mener une tangente à la parabole : nous verrons bientôt les moyens de construire ce problème.

169. Pour avoir le point où la tangente rencontre l'axe des x, il faut faire $y=0$ dans l'équation $yy''=p(x+x'')$; ce qui donnera $x=-x''$. Ce point T sera donc toujours situé du côté des abscisses négatives, à la distance $OT=OP$ du sommet O (fig. 23). Par conséquent la soutangente $PT=2OP=2x''$;

c'est-à-dire que *dans la parabole, la soutangente est double de l'abscisse du point de tangence.* Ceci fournit un moyen très-simple de mener une tangente à cette courbe, quand on connaît le point de contact M, ou seulement son abscisse OP.

170. Nous venons de voir que OT = OP; mais OF = OG (160); donc TF = PG = MH = MF; le triangle TFM est donc isocèle et donne l'angle FMT = FTM = TMH = SMF'. Ainsi, *dans la parabole, les droites menées du point de tangence au foyer et parallèlement à l'axe, font avec la tangente des angles égaux;* propriété qui devait naturellement résulter de ce que la parabole est une ellipse dont le grand axe est infini, et dont les foyers sont par conséquent infiniment éloignés l'un de l'autre.

171. De là résulte un moyen très-simple de mener une tangente à la parabole par un point extérieur K (fig. 23). De ce point comme centre et d'un rayon égal à KF, soit décrit un arc coupant la directrice aux points H et H'; soient menées de ces points deux parallèles à l'axe; ces parallèles couperont la parabole en M et M', qui seront les points de tangence, et KM, KM' les tangentes demandées.

En effet, par construction KF = KH; mais d'ailleurs MF = MH : donc les deux triangles KFM et KMH sont égaux. Par conséquent, l'angle TMF = TMH = SMF'; ce qui exige que KM soit tangente au point M (170). On verra de même que KM' est tangente en M'.

Si le point de tangence devait être très-éloigné et qu'on eût besoin seulement de la direction de la tangente, il serait plus commode de mener KS perpendiculaire à FH; KS serait la tangente demandée.

Si la tangente devait être parallèle à une droite donnée, on ferait, au foyer F, l'angle NFM double de l'angle que cette droite forme avec l'axe; et le point M serait le point de contact de la tangente cherchée.

172. Il est clair que *la normale* MN *divise en deux parties égales l'angle* FMF' *formé par les droites menées du point de tangence au foyer et parallèlement à l'axe.*

On trouve bien facilement que l'équation de cette normale est

$$y - y'' = -\frac{y''}{p}(x - x'').$$

Si on y prend y nul, on aura, pour la sounormale PN, $x - x''$

$= p$; de sorte que *dans la parabole, la sounormale est constante et égale à la moitié du paramètre*. Ce qui donne le moyen de mener une normale, et par suite une tangente, à la parabole, par un point donné sur cette courbe.

173. La tangente TM est perpendiculaire au milieu I de FH (171). Mais le sommet O étant au milieu de FG, la droite OI est parallèle à GH, et coïncide avec l'axe des y. D'où il suit que, *dans la parabole, les pieds des perpendiculaires menées du foyer à toutes les tangentes à cette courbe, appartiennent au second axe principal*. Ce qui vient de ce que la parabole est une ellipse dont le centre est à une distance infinie du sommet O ; en sorte que la circonférence décrite de ce centre et d'un rayon égal à cette distance, coïncide avec l'axe des y (73).

174. Voici quelques théorèmes à démontrer :

I. Si des extrémités d'une corde passant par le foyer de la parabole, on mène deux tangentes à cette courbe, elles se couperont à angle droit sur la directrice.

II. Le foyer est le seul point du plan de la parabole, dont la distance à un point quelconque de la courbe, soit une fonction rationnelle de l'abscisse de ce point.

III. Si d'un point du second axe de la parabole, on mène une droite au foyer et une tangente à la courbe, ces deux droites seront perpendiculaires entre elles.

IV. La plus courte droite menée de la parabole à un point donné sur l'axe, est la normale qui passe par ce point.

V. Dans la parabole, les carrés des distances du point d'intersection de deux tangentes à leurs points de contact, sont entre eux comme les rayons vecteurs menés à ces deux points, et le produit de ces distances vaut le carré de la droite qui joint le foyer au point d'intersection dont il s'agit.

175. Dans la parabole, on appelle *diamètre*, la droite qui passe par les milieux d'un système de cordes parallèles. Soit $y = ax + b$ l'équation de l'une quelconque de ces cordes. Pour les extrémités de cette corde, son équation et celle de la parabole $y^2 = 2px$, admettent les mêmes valeurs pour x et les mêmes valeurs pour y. Eliminant x entre ces équations, on aura pour déterminer y,

$$y^2 - \frac{2p}{a}y + \frac{2bp}{a} = 0.$$

Les racines de cette équation, sont les ordonnées des extrémités de la corde, et l'ordonnée y'' du milieu de cette corde est égale à la demi-somme des mêmes racines, c'est-à-dire à $\frac{p}{a}$. Cette valeur est la même pour le milieu de toute autre corde parallèle à la première, puisqu'alors p et a restent les mêmes; donc la droite qui passe par les milieux de toutes les cordes proposées est parallèle à l'axe des x; c'est-à-dire que *tous les diamètres de la parabole sont parallèles à son axe*. Ce qui vient d'ailleurs de ce que le centre de cette courbe est situé sur l'axe, à une distance infinie.

176. Et comme en faisant varier a, l'ordonnée $y'' = \frac{p}{a}$, qui est aussi celle de l'origine du diamètre, peut avoir telle valeur on voudra, il s'ensuit que *par chaque point de la parabole, on peut mener un diamètre.*

Réciproquement, *toute parallèle à l'axe de la parabole est un diamètre*. Car elle coïncide avec le diamètre mené par le même point.

177. L'ordonnée du point où un diamètre coupe la parabole, étant $y'' = \frac{p}{a}$, on en déduit $a = \frac{p}{y''}$. Cette valeur de a est celle qui convient à la tangente au point dont y'' est l'ordonnée (167); ainsi *dans la parabole, la tangente à l'origine d'un diamètre est parallèle aux cordes que ce diamètre divise en deux parties égales.*

178. On appelle *axes conjugués* de la parabole, tout système d'axes de coordonnées, pour lequel l'équation de la courbe est de même forme que par rapport à ses axes principaux.

Cherchons les axes conjugués; et prenons, à cet effet, les formules pour passer d'un système d'axes rectangulaires, à un autre de différente origine, savoir :

$$x = h + \frac{x'}{m} + \frac{y'}{m'}, \quad y = k + \frac{ax'}{m} + \frac{a'y'}{m'},$$

formules dans lesquelles $m^2 = 1 + a^2$, $m'^2 = 1 + a'^2$ et (h, k) la nouvelle origine.

Substituant ces valeurs de x et de y dans l'équation $y^2 - 2px = 0$, qui est celle de la parabole rapportée à ses axes principaux; chassant les dénominateurs et ordonnant, il viendra

$$\begin{gathered} a'^2m^2y'^2 - 2mm'^2px' + 2m'm^2(a'k - p)y' + \\ a^2m'^2x'^2 + 2aa'mm'x'y' + m^2m'^2(k^2 - 2ph) = 0. \end{gathered}$$

Si l'on observe que les quantités m et m' ne peuvent jamais devenir nulles, on verra que, pour que l'équation précédente soit de même forme que celle qui est relative aux axes, il faut qu'on ait

$$q = 0,\ m = 1,\ q'k - p = 0,\ k^2 - 2ph = 0;$$

et alors l'équation de la parabole se réduit à

$$a'^2y'^2 - 2m'^2px' = 0 \dots (1)$$

La condition $k^2 - 2ph = 0$ ou $k^2 = 2ph$, fait voir que les coordonnées k et h satisfont à l'équation $y^2 = 2px$ de la parabole, et qu'ainsi *la nouvelle origine est un point de la courbe.* La relation $a'k = p$, donnant $a' = \frac{p}{k}$, montre que *le nouvel axe des ordonnées touche la parabole à la nouvelle origine* (167). Enfin la condition $q = 0$, nous apprend que le nouvel axe des abscisses est parallèle à l'axe de la parabole; il est donc un diamètre de cette courbe (176).

Substituant les valeurs précédentes de m'^2 et a'^2 dans l'équation (1), on trouvera $y'^2 = 2(p + 2h)x'$. Supprimant les accens des variables y' et x', en se rappelant toutefois qu'elles se comptent sur des axes obliques; posant d'ailleurs $p' = p + 2h$, on aura, pour l'équation de la parabole, rapportée à ses axes conjugués,

$$y^2 = 2p'x.$$

Comme dans cette équation l'axe des x est un diamètre, puisqu'il divise en deux parties égales toutes les cordes parallèles à son conjugué; la parabole est dite *rapportée à son diamètre.* Le coefficient $2p'$ est le *paramètre* relatif à ce diamètre. De plus, les coordonnées de la nouvelle origine pouvant avoir telles valeurs qu'on voudra, il s'ensuit que *la parabole admet une infinité de systèmes d'axes conjugués.*

179. Soit r le rayon vecteur mené à la nouvelle origine (h, k); on a vu (178) que $r = \frac{1}{2}p + h$. Mais $p' = p + 2h$; donc $2p' = 4r$. Donc *dans la parabole, le paramètre d'un diamètre quelconque est quadruple de la distance du foyer à l'origine de ce diamètre.* Cette propriété subsiste également pour l'axe.

180. Remarquons maintenant que *l'angle des coordonnées étant désigné par θ, toute équation qui peut se ramener à la forme $y^2 = 2p'x$, représente une parabole.* Soit en effet $y^2 = 2px$ une parabole, rapportée à son axe, dans laquelle le paramètre $2p$ et l'un de ses points (h, k) soient tels, qu'on ait $p + 2h = p'$

et que la tangente à ce point fasse avec l'axe des x un angle égal à θ; il est clair que si l'on désigne tang θ par a', on aura à la fois

$$k^2 = 2ph,\quad a'k = p \text{ et } p + 2h = p'; \ldots (2)$$

ce qui donne, en posant $1 + a'^2 = m'^2$,

$$h = \frac{p'}{2m'^2},\quad p = \frac{a'^2 p'}{m'^2} \text{ et } k = \frac{a'p'}{m'^2} \cdots (3)$$

Ces valeurs étant nécessairement réelles, il en sera de même de la parabole $y^2 = 2px$.

Cela posé, transformons les coordonnées de cette parabole, de manière que la nouvelle origine étant (h, k), l'axe des ordonnées soit la tangente en ce point, l'angle des coordonnées étant égal à l'angle donné θ, et par conséquent le nouvel axe des x étant parallèle à l'ancien. Dans ce cas, puisque les nouveaux axes des x et des y font avec l'ancien axe des abscisses, les angles o et θ, il est clair qu'on aura $a = \text{tang } 0 = 0$, $m^2 = 1 + a^2 = 1$ ou $m = 1$, $a' = \text{tang } \theta$, $m'^2 = 1 + a'^2$, et que par suite, les formules (45) pour passer d'un système de coordonnées rectangulaires à un autre, d'origine différente, deviendront

$$x = h + x' + \frac{y'}{m'} \text{ et } y = k + \frac{ay'}{m'}.$$

Substituant ces valeurs dans $y^2 = 2px$, réduisant d'après les équations (2) ou (3), il viendra, pour l'équation de la parabole, rapportée aux nouveaux axes, $y'^2 = 2p'x'$. Or, cette équation coïncide avec la proposée $y^2 = 2p'x$, car le coefficient $2p'$ est le même, ainsi que l'angle θ des coordonnées. Donc l'équation $y^2 = 2p'x$ représente une parabole; et il en est de même de toute équation réductible à cette forme, par la transformation des coordonnées, telle, par exemple, que $y^2 + My + Nx + P = 0$, qui en y posant

$$y = y' - \tfrac{1}{2}M \text{ et } x = x' + \frac{M^2 - 4P}{4N}, \text{ devient } y'^2 = -Nx'.$$

181. Les valeurs (3) fournissent le moyen de décrire la parabole $y^2 = 2p'x$; car menant par l'origine la perpendiculaire k sur l'axe des x et par l'extrémité de k une parallèle d à cet axe, puis prenant sur d un point à la distance h de l'extrémité dont il s'agit, ce point sera le sommet et d l'axe de la parabole cherchée; on tracera donc facilement cette parabole, puisque son paramètre $2p$ est d'ailleurs connu.

182. L'équation $y^2 = 2p'x$ de la parabole, rapportée à ses axes conjugués, étant de même forme que par rapport à ses axes principaux, les propriétés indépendantes de l'inclinaison des coordonnées seront communes à l'un et à l'autre système. Ainsi,

1° *Les carrés des ordonnées au diamètre, sont entre eux comme les abscisses correspondantes.* Connaissant donc le paramètre d'un diamètre et l'angle des axes conjugués; il est bien facile de tracer la parabole, en décrivant d'abord une parabole sur ce diamètre, pris pour axe, avec le paramètre donné, puis en inclinant sous l'angle donné, les ordonnées de cette courbe, sans changer leurs longueurs.

2° Suivant que le point (x, y) est sur la parabole, au-dehors ou au-dedans, le binome $y^2 - 2p'x$ est nul, positif ou négatif; et réciproquement.

3° La tangente $y = ax + b$, au point (x'', y''), a pour équation $yy'' = p'(x + x'')$, la valeur de a, qui détermine la direction de cette tangente, étant $a = \frac{p'}{y''}$. On trouve aussi que l'équation de la tangente $y = ax + b$, se réduit à $2ab = p'$.

4° La soutangente est encore $2x''$, c'est-à-dire double de l'abscisse du point de contact. Ce qui fournit un moyen bien simple de mener une tangente à la parabole, rapportée à son diamètre, par un point (x'', y'') donné sur cette courbe.

183. On appelle *segment parabolique*, la surface comprise entre un arc de parabole et sa corde. Cherchons l'aire du segment ABD (fig. 24). Pour y parvenir, circonscrivons-lui le parallélogramme ADRV et par le point de contact B, menons le diamètre BX. Il est clair que BX et BV sont deux axes conjugués de la parabole (178) et qu'ainsi C est le milieu de AD.

Divisons l'arc AOB en une infinité d'élémens infiniment petits, tels que OM, et par chaque point de division, menons une ordonnée au diamètre BX; nous partagerons la surface BCAO en une infinité de trapèzes mixtilignes, tels que MOQN. Puisque l'arc MO est infiniment petit, on peut le considérer comme une droite; et si on mène BH parallèle à cette droite, le triangle BOM sera évidemment la moitié du parallélogramme OMKu. Soit I le milieu de OM; soient menées l'ordonnée IP et la tangente IT; il est visible qu'on aura BT = BP = ½TP : donc, à cause de la similitude des triangles TBE et TPI, on aura aussi

BE ou IF$=\frac{1}{2}$IP. Le parallélogramme OMKu est donc la moitié du trapèze MOQN; par conséquent, le triangle BOM est le quart du trapèze MOQN.

Ainsi chaque triangle élémentaire, du segment BAO, est le quart du trapèze correspondant, dans la surface BCAO; donc le segment BAO est lui-même le quart de BCAO. Mais le triangle BCA étant la moitié du parallélogramme CV, il est visible que BCAO$=\frac{1}{2}$CV$+\frac{1}{4}$BCAO; d'où l'on tire

$$BCAO=\tfrac{2}{3}CV.$$

On démontrerait de même que BCDM'$=\frac{2}{3}$CR; donc le segment ABD$=\frac{2}{3}$ADRV; c'est-à-dire que *l'aire de tout segment parabolique est les deux tiers du parallélogramme circonscrit.*

On voit en outre que le segment BAO est le 6^{me} de BCAV.

184. Dans deux paraboles, rapportées à leurs axes, on appelle *points homologues* deux points de ces courbes, dont les abscisses, et par conséquent les ordonnées, sont entre elles comme les paramètres. Les *droites homologues* sont terminées à des points homologues chacun à chacun; et il en est de même des *arcs homologues.*

185. *Toutes les paraboles sont des courbes semblables.* Soient MN et M'N' deux arcs homologues de deux paraboles quelconques : en inscrivant à volonté une ligne brisée dans le premier MN, il est facile de démontrer qu'on pourra toujours inscrire, dans le second M'N', une ligne brisée semblable; de sorte que les arcs homologues MN et M'N' sont semblables (100). Les deux paraboles proposées renferment donc un même nombre d'arcs homologues semblables; elles sont par conséquent semblables elles-mêmes.

186. Puisque les arcs homologues de deux paraboles, ne sont que des lignes brisées semblables, composées d'une infinité de droites homologues, infiniment petites, et que par conséquent les segmens terminés par ces arcs et leurs cordes, sont eux-mêmes semblables et homologues; il en résulte que dans deux paraboles quelconques, 1° les arcs ou les droites homologues, sont comme les paramètres; 2° les segmens homologues sont comme les carrés des mêmes paramètres.

187. Voici quelques théorèmes et problèmes sur la parabole :

I. Dans deux paraboles ayant le même sommet et le même axe, les tangentes en deux points homologues sont parallèles.

II. Si l'on divise en trois parties égales chacune des cordes perpendiculaires à l'axe de la parabole, les points de division seront sur une parabole, de même axe et de même sommet que la première, divisant en trois parties équivalentes, tout segment de cette première terminé par l'une des cordes proposées.

III. Les milieux des ordonnées de la parabole sont à une autre parabole, ayant même axe et même sommet que la première, et divisant en deux portions équivalentes, tout segment de cette première, terminé par l'arc, l'abscisse et l'ordonnée.

IV. Trouver les conditions nécessaires pour qu'une droite coupe la parabole en un seul point.

V. Une parabole étant tracée, déterminer, 1° son axe; 2° un système d'axes conjugués, faisant entre eux un angle donné; 3° enfin, le paramètre à l'axe ou à un diamètre quelconque donné.

VI. Si d'un point pris sur l'axe de la parabole, on mène deux rayons à la courbe, on formera un *secteur* que l'on demande de partager en deux parties proportionnelles à deux nombres donnés, par une droite tirée du point proposé. (Cette droite rencontre la parabole au point où passe une hyperbole équilatère, dont une asymptote est dirigée suivant l'axe de la parabole proposée.)

De l'équation commune aux sections coniques et de quelques propriétés résultantes.

188. Les équations de l'ellipse et de l'hyperbole, rapportées aux centres et aux diamètres conjugués 2A et 2B (qui pourraient être les axes), sont

$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2 \text{ et } A^2y^2-B^2x^2=-A^2B^2.$$

Si on transporte l'axe des ordonnées parallèlement à lui-même, de manière que l'origine soit à l'extrémité $(-A, 0)$ du diamètre 2A, suivant lequel est dirigé l'axe des x; il est clair que le nouvel axe des y sera tangent à la courbe (89 et 131), que de plus l'ordonnée y restera toujours la même, mais que l'abscisse x deviendra $x-A$; on aura donc alors, pour les équations des deux courbes,

$$y^2=\frac{2B^2}{A}x-\frac{B^2}{A^2}x^2 \text{ et } y^2=-\frac{2B^2}{A}x+\frac{B^2}{A^2}x^2.$$

Ces deux équations et celle $y^2=2px$ de la parabole, montrent que l'axe des x étant un diamètre et l'axe des y tangent à l'origine, l'équation de toute section conique est de la forme

$$y^2=2px+qx^2,$$

équation dans laquelle on a, pour la parabole, $q=0$; pour l'ellipse, $p=\frac{B^2}{A}$ et $q=-\frac{B^2}{A^2}$; pour l'hyperbole, $p=-\frac{B^2}{A}$ et $q=\frac{B^2}{A^2}$.

189. Réciproquement, *toute équation de la forme* $y^2=2px$

$+ qx^2$, *représente une section conique, dont l'axe des* x *est un diamètre.*

D'abord *la courbe est une parabole, si* q $= 0$; car alors son équation devient $y^2 = 2px$ (180). *La courbe est une ellipse, lorsque* p *est positif et* q *négatif;* car en prenant $p = \frac{B^2}{A}$, $q = -\frac{B^2}{A^2}$ et $x = A + x'$, l'équation proposée prend la forme $A^2y^2 + B^2x'^2 = A^2B^2$, et représente une ellipse rapportée à ses diamètres conjugués 2A et 2B (87). Enfin, *la courbe est une hyperbole, si* p *est négatif et* q *positif;* car en faisant $p = -\frac{B^2}{A}$, $q = \frac{B^2}{A^2}$ et $x = A + x'$, l'équation proposée devient $A^2y^2 - B^2x'^2 = -A^2B^2$; elle représente conséquemment une hyperbole, rapportée à ses diamètres conjugués 2A et 2B (135).

Il est clair, dans chacun de ces cas, que si l'angle des coordonnées est droit, la courbe sera rapportée à ses axes principaux.

190. Il est facile de démontrer que le trinome $y^2 - 2px - qx^2$ est nul, positif ou négatif, suivant que le point (x, y) est sur la courbe, au-dehors ou au-dedans; et réciproquement.

191. Soient (x', y') et (x'', y'') les points où une sécante $y = ax + b$ rencontre la section conique $y^2 = 2px + qx^2$; on aura à la fois

$$y'^2 = 2px' + qx'^2, \ldots (1)$$
$$y''^2 = 2px'' + qx''^2, \ldots (2)$$
$$y - y'' = a(x - x'') \text{ et } a = \frac{y' - y''}{x' - x''} \cdots (3).$$

Retranchant (2) de (1) et ayant égard à (3), il viendra

$$(y' + y'')a = 2p + q(x' + x'').$$

Si l'on suppose que les deux points d'intersection (x', y') et (x'', y'') se réunissent en un seul, la sécante $y - y'' = a(x - x'')$ sera alors tangente à la section conique au point (x'', y''): et comme dans ce cas $y' = y''$ et $x' = x''$, il viendra

$$2ay'' = 2p + 2qx'', \text{ ou } a = \frac{p + qx''}{y''}.$$

Avec cette valeur, l'équation de la tangente au point (x'', y''), se réduit à

$$yy'' = p(x + x'') + qxx'' \ldots (4)$$

Prenant dans cette équation, la valeur de y, pour la substituer dans le trinome $y^2-2px-qx^2$, puis réduisant au même dénominateur et ayant égard à l'équation (2), on trouvera

$$y^2-2px-qx^2=\frac{p^2}{y''^2}(x-x'')^2.$$

Ainsi pour tout point de la droite (4), le trinome $y^2-2px-qx^2$ est positif; tous les points de cette droite sont donc hors de la courbe proposée, à l'exception du point (x'', y''). De sorte que la droite (4) n'a que le seul point (x'', y'') de commun avec la section conique; elle lui est par conséquent tangente en ce point. Et elle est la seule; car la valeur de a, qui détermine sa direction est unique.

192. ***Les cordes qui joignent les points de contact de chaque couple de tangentes menées à une section conique, par les points d'une droite quelconque, se coupent toutes en un même point, situé sur le conjugué du diamètre parallèle à cette droite.***

Soit $y^2=2px+qx^2$ la section conique, dans laquelle on suppose l'axe des y parallèle à la droite proposée (D), ce qui est toujours possible; l'équation de cette droite sera donc $x=n$, n étant la distance de l'origine au point où la droite coupe l'axe des x. Soit (n, m) un point quelconque de la droite (D), (x', y') et (x'', y'') les contacts des deux tangentes menées par ce point à la section conique; les équations de ces tangentes sont donc

$$my'=p(n+x')+qnx',$$
$$my''=p(n+x'')+qnx''.$$

L'équation de la corde qui joint les deux contacts, est

$$y-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x'').$$

Substituant dans cette équation, la valeur de $\frac{y'-y''}{x'-x''}$, tirée des deux précédentes, on trouvera, réductions faites,

$$my=p(n+x)+qnx.$$

Pour avoir le point P où la corde de contact rencontre l'axe des x, il suffit de poser $y=0$, dans son équation: il viendra alors, pour l'abscisse de l'intersection P,

$$x=\frac{-pn}{p+qn}.$$

Comme p, q, n sont donnés invariables, et que la valeur précédente de x ne dépend pas de l'ordonnée m du point de la droite (D), d'où l'on a mené les deux tangentes, il s'ensuit que pour les deux tangentes tirées d'un autre point de (D), la corde de contact passera par le même point P que la précédente. Donc puisque P est situé sur le conjugué du diamètre parallèle à (D), il en résulte le théorème énoncé d'abord.

L'inverse de ce théorème est également vraie.

Le point P est dit le *pôle* de la droite (D), et celle-ci est la *polaire* du point P. D'après la valeur précédente de x, il est facile de trouver le pôle, lorsque la polaire est donnée; et réciproquement.

193. *Si les côtés d'un angle droit mobile sont continuellement tangens à une section conique, le sommet décrira une circonférence de même centre que la courbe proposée.*

Soit (x', y') le sommet de l'angle droit proposé; l'équation de l'un de ses côtés sera de la forme $y - y' = a(x - x')$. Ce côté devant être tangent à la section conique $y^2 = 2px + qx^2$, si l'on désigne par (x'', y'') le point de contact, on aura à la fois

$$y'' - y' = a(x'' - x'),$$
$$y''^2 = 2px'' + qx''^2.$$

Éliminant y'' et résolvant l'équation finale, par rapport à x'', les deux valeurs résultantes seront les abscisses des deux points où la droite $y'' - y' = a(x'' - x')$ peut couper la section conique proposée; mais puisque cette droite est tangente, les deux points d'intersection coïncident en un seul; les deux valeurs de l'abscisse x'' sont donc égales; la quantité sous le radical est conséquemment nulle; ce qui donne

$$a^2 - \frac{2y'(p + qx')}{qx'^2 + 2px'}a + \frac{p^2 + qy'^2}{qx'^2 + 2px'} = 0 \ldots (1).$$

Chacun des côtés de l'angle droit proposé conduira évidemment à cette équation; les deux valeurs a' et a'' de a, dans cette même équation, appartiennent donc, l'une à un côté de l'angle droit et l'autre au second côté: et puisque ces deux côtés sont perpendiculaires l'un à l'autre, il est clair qu'en supposant les coordonnées rectangulaires, on aura $a'a'' + 1 = 0$ (18), ou $a'a'' = -1$. De plus, le produit $a'a''$ des racines de l'équation (1) étant égal au terme indépendant de a, il vient, en chassant le dénominateur,

$$qy'^2 + qx'^2 = -2px' - p^2 \ldots (2)$$

Cette équation entre les coordonnées x', y' du sommet de l'angle droit mobile, représente évidemment une circonférence (31), de même centre que l'ellipse ou l'hyperbole proposée, et dont le rayon est $\sqrt{(A^2+B^2)}$, pour l'ellipse, et $\sqrt{(A^2-B^2)}$, pour l'hyperbole, 2A et 2B désignant les axes de ces deux courbes. Quant à la parabole, où $q=0$, le lieu géométrique du sommet de l'angle droit, se réduit à $x'=-\frac{1}{2}p$ et représente la directrice de la courbe. Cette directrice peut être considérée comme une circonférence, dont le centre, situé à l'infini, coïncide avec celui de la parabole.

194. *Trouver une courbe telle, que les distances de chacun de ses points à un point fixe* F *et à une droite donnée* DE, *aient le rapport connu* m.

Soit placé l'axe des x suivant la perpendiculaire FH, menée de F sur DE, et l'origine des coordonnées rectangulaires au point O, divisant FH en deux parties FO et OH dont m soit le rapport FO : OH; on verra, qu'en désignant FO par d, l'équation de la courbe cherchée sera

$$y^2=2d(1+m)x-(1-m^2)x^2.$$

Suivant donc que le rapport m sera plus petit que l'unité, plus grand ou égal, la courbe sera une ellipse, une hyperbole ou une parabole (189). Or, dans la parabole, où $m=1$, $4d$ est le paramètre; donc F est le foyer et DE la directrice. Il est clair d'ailleurs que O est le sommet, dans chacune des trois courbes; et si 2A désigne le premier axe, 2B le second et c l'excentricité, il est facile de voir qu'on aura, 1° pour l'ellipse, où $m<1$,

$$A=\frac{d}{1-m},\ B=\frac{d}{1-m}\sqrt{1-m^2},\ c=\frac{dm}{1-m}=mA \text{ et } d=A-c;$$

2° pour l'hyperbole, où $m>1$,

$$A=\frac{d}{m-1},\ B=\frac{d}{m-1}\sqrt{m^2-1},\ c=\frac{dm}{m-1}=mA \text{ et } d=c-A.$$

Et puisque d est la distance du sommet O au point F, on voit que dans les deux dernières courbes, comme dans la première, le point fixe F est un foyer.

195. La droite DE étant la directrice de la parabole précédente, sera aussi appelée, par analogie, la *directrice* des deux autres courbes. Ainsi la directrice d'une section conique est une perpendiculaire au premier axe principal telle, que les distances

du foyer et de cette perpendiculaire à un point quelconque de la courbe, sont dans un rapport constant (celui de l'égalité, pour la parabole, et celui de l'excentricité au demi-premier axe, pour l'ellipse et l'hyperbole). Il est clair en outre que l'hyperbole et l'ellipse ont chacune deux directrices.

196. *La droite* FR *qui joint le foyer* F *d'une section conique au point* R *où une sécante* MN *rencontre la directrice voisine* DE, *divise en deux parties égales le supplément de l'angle* MFN *compris par les rayons vecteurs, menés aux points d'intersection de la sécante avec la courbe* (fig. 25).

Menons en effet, NI parallèle à MF et MP, NQ, perpendiculaires à la directrice DE. Les triangles RMP et RNQ étant semblables, aussi bien que RMF et RNI, on aura deux proportions qui, à cause du rapport commun RM : RN, donneront MP : NQ :: MF : NI, ou MP : MF :: NQ : NI. Mais d'après la définition de la directrice DE (195), on a MP : MF :: NQ : NF ; donc NQ : NI :: NQ : NF, et par suite NI = NF. Le triangle NIF étant donc isocèle, il s'ensuit que l'angle NFI = NIF = IFM'. Ce qu'il fallait démontrer.

197. Ce théorème fournit le moyen de *tracer la section conique dont on connaît le foyer et trois points*. Effectivement, il en résultera d'abord deux points de la directrice. Connaissant la directrice et le foyer, on aura la direction du premier axe, puis le rapport entre les distances de l'un des trois points au foyer et à la directrice voisine ; d'où l'on déduira l'*espèce* de courbe demandée, puis son sommet et ses deux axes, lorsqu'elle sera une ellipse ou une hyperbole.

Si elle doit être une parabole, on n'aura besoin, pour la construire, que de connaître son foyer et deux de ses points ; car il en résultera d'abord un point de la directrice ; et la tangente menée par ce point à la circonférence décrite de l'un des points donnés, comme centre, avec la distance de ce point au foyer pour rayon, sera la directrice elle-même.

198. La construction d'une section conique, d'après certaines conditions, est, en général, un problème assez facile à résoudre, au moyen des propriétés de la courbe. Par exemple, *si l'on veut décrire la section conique tangente à trois droites données et dont un foyer soit un point donné ;* on mènera de ce point des perpendiculaires aux droites proposées : si les pieds de ces perpendicu-

laires sont en ligne droite, cette droite sera le second axe d'une parabole (173), bien facile à tracer, puisqu'on aura sur-le-champ sa directrice. Mais si les trois pieds forment un triangle, le centre et le rayon de la circonférence circonscrite à ce triangle, seront respectivement le centre et le demi-premier axe de l'ellipse ou de l'hyperbole à construire (73 et 124); et on en déduira les données nécessaires à cette construction.

199. Voici encore quelques théorèmes et problèmes à traiter :

I. Si un côté de l'angle droit, dont le sommet est au foyer d'une section conique, passe par le point de tangence, l'autre côté coupera la tangente sur la directrice. (Ce théorème est déjà énoncé pour l'ellipse, page 42.)

II. Trouver le lieu de tous les sommets des triangles de même base d, dans chacun desquels un des angles à la base est double de l'autre. (Ce lieu est une branche d'hyperbole, ayant pour premier axe les deux tiers de d et pour centre l'un des points qui divisent d en trois parties égales. Cette branche coupe l'arc dont d est la corde, en deux parties doubles l'une de l'autre, et résout le problème de la *trisection* de l'angle.)

III. Les deux droites menées des extrémités d'un diamètre d'une section conique aux extrémités de toute corde parallèle au conjugué de ce diamètre, se coupent sur une autre section conique; et suivant que la courbe proposée est une ellipse ou une hyperbole, la nouvelle courbe, au contraire, est une hyperbole ou une ellipse. Si la courbe donnée était une parabole, la seconde courbe serait une parabole égale, mais tournée en sens opposé; d'où résulte un théorème, que nous laissons à énoncer.

IV. Dans toute section conique $y^2 = 2px + qx^2$, si par un point de l'axe des y et à la distance $2p$ de l'origine, on mène une parallèle à l'axe des x, la portion de cette parallèle, entre l'axe des ordonnées et le prolongement de l'une des deux cordes supplémentaires menées des extrémités du diamètre placé sur l'axe des abscisses, sera égale à la distance de l'origine au point où l'autre corde prolongée coupe l'axe des y. (Cette propriété donne le moyen de trouver autant de points qu'on voudra de la section conique proposée.)

V. Trouver sur le plan d'une section conique, un point dont la distance à un point quelconque de la courbe, soit une fonction rationnelle de l'abscisse de ce dernier point. (Le point cherché est l'un des foyers.)

VI. Trouver le lieu géométrique de tous les milieux d'une série de cordes parallèles, dans une section conique. (Ce lieu est un diamètre de la courbe.)

VII. Une portion de section conique étant tracée sur un plan, trouver la nature de la courbe.

200. *Dans une section conique, la corde d'un segment étant perpendiculaire au premier axe principal, trouver la mesure du*

volume engendré par le demi-segment autour d'un axe extérieur CZ, *dans le même plan et parallèle au premier axe* OX (fig. 26 et 27).

Soit OMP $=$ S le demi-segment proposé; plaçons l'origine des coordonnées rectangulaires au sommet O de la courbe et l'axe des x suivant le premier axe principal OX. Soient h et k les coordonnées OP et PM du point M. Divisons l'abscisse h en un nombre infini n de parties égales à ε, de manière qu'on ait $h = n\varepsilon$ et que ε puisse être regardée comme infiniment petite: il est clair que les ordonnées dont les pieds tombent aux points de division de h, partagent le demi-segment S en trapèzes mixtilignes, tels que HILK, qui, à cause de la hauteur IL ou ε infiniment petite, pourront être regardés comme des rectangles. Soit I le νième point de division de h, à partir du sommet O, et soit t_ν le νième trapèze HILK; on aura donc OI $= \nu\varepsilon$. Soit d la distance OC du sommet O à l'axe de rotation CZ et IH $= y$. Le νième trapèze t_ν pouvant être regardé comme un rectangle, il est visible que le volume décrit par le trapèze, autour de CZ, est la différence des cylindres décrits par EFHK et EFIL; ainsi on a, lorsque l'arc du demi-segment S est concave vers l'axe CZ,

$$\text{vol. } t_\nu = \pi(d+y)^2\varepsilon - \pi d^2\varepsilon = t_\nu \cdot 2\pi d + \pi y^2\varepsilon,$$

et lorsque l'arc du demi-segment est convexe vers le même axe,

$$\text{vol. } t_\nu = \pi d^2\varepsilon - \pi(d-y)^2\varepsilon = t_\nu \cdot 2\pi d - \pi y^2\varepsilon;$$

ce qui donne, pour les deux cas,

$$\text{vol. } t_\nu = t_\nu \cdot 2\pi d \pm \pi y^2\varepsilon.$$

L'équation commune aux trois sections coniques est (188)

$$y^2 = 2px + qx^2.$$

Pour le point H, où IH $= y$ et OI $= x = \nu\varepsilon$, il vient

$$y^2 = 2p\nu\varepsilon + q\nu^2\varepsilon^2.$$

Substituant cette valeur de y^2 dans l'expression précédente de vol. t_ν, on aura

$$\text{vol. } t_\nu = t_\nu \cdot 2\pi d \pm \pi(2p\nu\varepsilon^2 + q\nu^2\varepsilon^3).$$

Prenant successivement $\nu = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$, on aura successivement les volumes décrits autour de CZ par les trapèzes qui composent le demi-segment S; la somme de ces volumes sera donc celui engendré par ce demi-segment: observant que

$t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_n = S$; que $nz = h$ et que n étant infini, on a $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{1}{2}n^2$ (G. page 239) et $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{3}n^3$; on trouvera, réductions faites,

$$\text{vol. } S = S \cdot 2\pi d \pm \pi h^2 (p + \tfrac{1}{3}qh) \ldots (1)$$

Cette formule fera connaître la mesure du volume décrit par le demi-segment S de l'ellipse, de l'hyperbole ou de la parabole, en y substituant les valeurs de p et q qui appartiennent à la courbe que l'on considère (188). Par exemple, pour la parabole, où $q = 0$ et $2ph = k^2$, on trouvera

$$\text{vol. } S = S \cdot 2\pi d \pm \tfrac{1}{2}\pi k^2 h ;$$

c'est-à-dire que *le volume décrit par un demi-segment de parabole autour d'un axe extérieur, dans le même plan et parallèle à l'axe de la courbe, lui-même perpendiculaire à la corde de ce segment, a pour mesure l'aire du demi-segment multipliée par la circonférence que décrit le sommet, plus ou moins le demi-cylindre dont la hauteur et le rayon de la base sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée qui terminent ce demi-segment* ; plus *si l'arc du demi-segment est concave et* moins *s'il est convexe vers l'axe de rotation*.

201. Supposons que le demi-segment dont l'arc est concave et le demi-segment dont l'arc est convexe vers l'axe CZ, aient le même sommet O et la même abscisse h ; la distance d sera la même, pour tous les deux ; et si l'on prend le signe $+$, puis le signe $-$, dans la formule (1), les valeurs résultantes exprimeront les volumes décrits par le premier et le second demi-segment ; la somme de ces volumes sera par conséquent celui décrit par le segment entier 2S ; ainsi on aura

$$\text{vol. } 2S = 2S \cdot 2\pi d.$$

D'où il suit que *le volume engendré par un segment de section conique, autour d'un axe extérieur, dans le même plan et perpendiculaire à la corde du segment, elle-même perpendiculaire au premier axe principal, a pour mesure l'aire de ce segment multipliée par la circonférence que décrit le sommet de la courbe.* Par exemple, si le segment devient l'ellipse entière πAB, le grand axe 2A étant parallèle à l'axe de rotation, on aura, pour le volume de l'*anneau applati* engendré, $2\pi^2 ABd$.

202. Pour l'*ellipsoïde allongé* que produit la demi-ellipse S

autour de son grand axe 2A, on a $d=0$, $h=2A$, $p=-\frac{B^2}{A}$, $q=\frac{B^2}{A^2}$, et la formule (1) donne

$$\text{vol. } S=\tfrac{2}{3}\pi AB^2.$$

D'où l'on voit que *l'ellipsoïde allongé a pour mesure les quatre tiers du cylindre dont la hauteur et le rayon de la base, sont respectivement le demi-grand et le demi-petit axe de l'ellipse génératrice.*

Raisonnant comme pour la formule (1), on verra que l'*ellipsoïde applati*, engendré par la révolution d'une demi-ellipse, autour de son petit axe 2B, a pour mesure $\frac{4}{3}\pi A^2B$. De sorte que l'ellipsoïde applati est plus grand que l'ellipsoïde allongé.

203. La formule (1) conduit aussi à la mesure du corps décrit par un secteur de section conique, ou par un segment à deux bases. Enfin on a ce théorème, que nous laissons à démontrer :

La corde d'un segment de parabole étant perpendiculaire à son axe, l'anneau engendré par ce segment, autour d'un axe extérieur, dans le même plan et parallèle à la corde, a pour volume l'aire de ce segment multipliée par la circonférence que décrit le sommet, plus ou moins les quatre cinquièmes du cylindre produit autour de la tangente au sommet, par le rectangle circonscrit au segment proposé ; *plus* si l'arc du segment est convexe et *moins* s'il est concave vers l'axe de rotation.

Nous laissons aussi à résoudre ce problème : On veut construire un vase cylindrique d'argent fin, à base elliptique, et surmonté d'un couvercle dont l'intérieur soit égal au demi-ellipsoïde allongé décrit par cette base. La capacité intérieure, tant du vase que du couvercle, sera de $\frac{1}{2}$ litres et l'épaisseur aura partout un millimètre. Comme on désire ménager autant qu'il se pourra la matière, on demande quelles devront être les dimensions du vase à construire, pour que la quantité d'argent employé soit un minimum?

Des courbes que peut représenter une équation du second degré, à deux variables, et de quelques problèmes qui en dépendent.

204. Les courbes dont les équations sont du second degré, s'appellent aussi *courbes du second ordre*. Pour trouver ces courbes, considérons l'équation la plus générale du second degré à deux variables x et y, savoir

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0, \ldots (1)$$

l'angle des coordonnées x et y étant quelconques. Supposons d'abord que A ne soit pas nul, c'est-à-dire que l'équation renferme au moins le carré y^2. Dans ce cas, en résolvant l'équation par rapport à y et posant, pour abréger,

$$y_1 = -\frac{B}{2A}x - \frac{D}{2A}, \ldots (2)$$

il viendra

$$y = y_1 \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF}.$$

Ainsi, pour la même abscisse x, l'ordonnée y aura deux valeurs et déterminera deux points de la ligne représentée par l'équation proposée, en supposant toutefois que cette équation ne soit pas impossible.

Pour trouver ces deux points, il faut d'abord construire la droite que représente l'équation (2). Or, soient OX et OY les axes des x et des y, O étant l'origine (fig. 28), et supposons tous les nombres A, B, D, positifs (les raisonnemens seraient les mêmes, si un ou plusieurs de ces nombres étaient négatifs). Il est clair que la droite (2) coupe les axes des x et des y en des points éloignés de l'origine O des distances $-\frac{D}{B}$ et $-\frac{D}{2A}$. La seconde n'étant pas infinie, représentons-la par OG. Quant à la première, si elle était infinie, c'est-à-dire si B était nul, la droite (2) serait parallèle à l'axe des x et pourrait aisément se construire; mais supposons que cette première distance ait une valeur finie et soit égale à OH; la droite HGX' sera donc celle que représente l'équation (2).

Cela posé, soit OP une abscisse de la ligne (1); l'ordonnée correspondante de la droite (2) sera — PP'. Et puisqu'à cette ordonnée, il faut ajouter et retrancher le terme irrationnel de y, pour avoir les valeurs de l'ordonnée de la ligne (1) qui répondent à l'abscisse OP; on voit que si l'on prend les droites P'M et P'M' égales chacune au terme contenant le radical, M et M' seront deux points de la ligne (1) cherchée.

Transformons actuellement les coordonnées, et prenons GX' et GY pour les nouveaux axes des x' et des y', G étant la nouvelle origine. Les anciennes coordonnées étant $OP = x$ et $PM = y$, les nouvelles seront $GP' = x'$ et $P'M = y'$. Si donc on observe que $PP' = -\frac{B}{2A}x - \frac{D}{2A}$, et que les triangles GOH et PHP' sont semblables, on trouvera

$$y=-\frac{B}{2A}x-\frac{D}{2A}+y' \text{ et } x=\frac{OH}{GH}x'=vx'.$$

Substituant ces valeurs dans celle de y fournie par l'équation (1), réduisant et élevant au carré, on verra que la ligne (1) est représentée par l'équation

$$4A^2y'^2=(B^2-4AC)v^2x'^2-2(BD-2AE)vx'+D^2-4AF\ldots(3).$$

Si donc B^2-4AC était nul, il est clair qu'en passant à des coordonnées parallèles, l'équation (1) pourrait se ramener à la forme $y^2=2px$, et représenterait une parabole (180). Il est facile de voir d'ailleurs que cette parabole se réduirait à deux droites parallèles à l'axe des y, ou à cet axe lui-même, ou à deux droites imaginaires, si $BD-2AE$ étant nul, on avait en même temps D^2-4AF positif, nul ou négatif.

Admettons que B^2-4AC ne soit pas nul : dans ce cas, si nous transportons l'origine sur GX', de G en I, de manière qu'on ait

$$GI=\frac{BD-2AE}{(B^2-4AC)v},$$

le nouvel axe des abscisses étant toujours dirigé suivant GX' et le nouvel axe des ordonnées étant parallèle à GY; il est visible que la nouvelle ordonnée sera toujours $P'M$ ou y', et que si l'on désigne par x'' la nouvelle abscisse IP', on aura

$$x'=\frac{BD-2AE}{(B^2-4AC)v}+x''.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (3) et réduisant, on trouvera, pour représenter la ligne (1), l'équation

$$4A^2y'^2=(B^2-4AC)v^2x''^2-\frac{(BD-2AE)^2}{B^2-4AC}+D^2-4AF\ldots(4)$$

Suivant donc que B^2-4AC sera négatif ou positif, cette équation pourra évidemment prendre la forme $My^2+Nx^2=P$ ou $My^2-Nx^2=P$, M et N étant deux nombres positifs ; ainsi l'équation (4) et conséquemment l'équation (1), représentera une ellipse (87), ou une hyperbole (135), rapportée à des diamètres conjugués.

L'ellipse se réduirait même à un point, ou bien serait impossible, si P était nul ou négatif, tandis que l'hyperbole se réduirait à deux droites, si l'on avait $P=0$.

On voit que *l'équation* (1) *représente une parabole, une ellipse* *ou une hyperbole, suivant que la quantité* B^2-4AC *est nulle, négative ou positive*. Et cela serait encore si l'une des quantités B, C, D, E, était nulle, ou s'il y en avait plusieurs égales à zéro.

205. Maintenant, pour connaître toutes les courbes représentées par l'équation (1), il ne nous reste plus qu'à examiner le cas où A et C sont nuls en même temps. Dans ce cas, B^2-4AC étant positif, l'équation représentera sans doute une hyperbole. Or, c'est ce qui a lieu en effet; car l'équation du second degré devenant alors $$Bxy+Dy+Ex+F=0,$$
on peut la mettre sous la forme
$$B\left(x+\frac{D}{B}\right)\left(y+\frac{E}{B}\right)-\frac{DE}{B}+F=0.$$
Et si l'on passe à un système de coordonnées parallèles, en posant
$$x=x'-\frac{D}{B} \text{ et } y=y'-\frac{E}{B},$$
$-\frac{D}{B}$ et $-\frac{E}{B}$ seront l'abscisse et l'ordonnée de l'origine des nouvelles coordonnées x' et y'; et l'équation proposée deviendra
$$x'y'=\frac{DE-BF}{B^2}.$$
Sous cette forme, elle représente, comme on l'a vu (142), une hyperbole rapportée à ses asymptotes.

Il résulte de la discussion précédente, qu'*une équation du second degré entre deux variables* x *et* y, *ne peut représenter d'autres courbes que l'ellipse* (*ou la circonférence*), *la parabole et l'hyperbole, c'est-à-dire l'une des sections coniques*; et nous avons vu plus haut (204) à quel caractère on reconnaît chaque espèce de courbe.

206. La marche que nous venons de suivre est analogue à celle qu'on trouve pag. 776 et suiv. de la Géométrie analytique de M. Biot, 6^{me} édition; cette méthode est aussi très-propre à fournir la construction de la courbe proposée, comme on le verra dans le problème que voici :

Les côtés PQ *et* PR *d'un angle tracé étant donnés de longueurs* (fig. 29), *si on divise chacun de ces côtés en* n *parties égales, et que l'on compte les points de division de* P *vers* R, *pour le côté* PR, *et de* Q *vers* P, *pour le côté* PQ; *les droites qui joindront les extrémités* P *et* Q, *des deux côtés, aux deux points de division* *de même rang, se couperont sur une courbe, qu'il s'agit de construire.*

Pour cet effet, prenons le sommet P de l'angle pour origine des coordonnées obliques, PQ étant l'axe des x et PR l'axe des y. Soient S et T les $v$ièmes points de division des côtés PQ et PR; soient a et b les longueurs de ces côtés; on aura donc, d'après l'énoncé, $QS = \frac{v}{n}a$ et $PT = \frac{v}{n}b$. Soit M le point où se coupent les droites RS et QT, et soient x et y les coordonnées PN et NM du point M. Il est clair, par les triangles semblables QMN et QTP, RSP et SMN, qu'on aura

$$a - x : a :: y : \frac{v}{n}b \quad \text{et} \quad a - \frac{v}{n}a - x : a - \frac{v}{n}a :: y : b.$$

Egalant entre elles les valeurs de $\frac{v}{n}$, tirées de ces proportions, puis chassant les dénominateurs et réduisant, il viendra

$$a^2y^2 + abxy + b^2x^2 - 2a^2by - 2ab^2x + a^2b^2 = 0 \ldots (1)$$

Cette équation étant indépendante des nombres n et v, sera vraie quels que soient ces nombres; elle représente donc le lieu de tous les points d'intersection M des droites menées conformément à l'énoncé. Or, ce lieu est une ellipse, puisque pour l'équation proposée, la quantité $B^2 - 4AC$ est négative et se réduit à $-3a^2b^2$ (204).

Actuellement, pour trouver les moyens de décrire cette ellipse, résolvons l'équation (1) par rapport à y; nous aurons

$$y = b - \frac{bx}{2a} \pm \frac{b}{2a}\sqrt{4ax - 3x^2}.$$

La droite $y_1 = b - \frac{bx}{2a}$ rencontre l'axe des y au point R et l'axe des x au point G tel, que $PG = 2a$; cette droite est donc RG. De plus, d'après les deux valeurs générales de y, il est clair que RG divise en deux parties égales toutes les cordes de l'ellipse cherchée, parallèles à l'axe des ordonnées; RG est donc un diamètre (89).

D'un autre côté, dans les points de l'ellipse, où les ordonnées sont tangentes, les deux valeurs de y sont égales; le radical est donc nul; ces points appartiennent par conséquent à la droite RG. Effectivement, les coordonnées de ces deux points sont $x = 0$ et $y = b = PR$, $x = \frac{4}{3}a = PI$ et $y = \frac{1}{3}b = IR'$. De sorte que les deux parallèles PK et IK touchent la courbe en R et R'.

Résolvant l'équation (1) par rapport à x et raisonnant comme pour y, on verra qu'en prenant $PH = 2b = 2PR$, la droite RQ sera un diamètre de l'ellipse, et que les points où les parallèles à l'axe des abscisses sont tangentes, sont Q et Q', sur HQ, les coordonnées du dernier point étant $x = \frac{1}{3}a$ et $y = \frac{4}{3}b = PL$. De sorte que les parallèles PQ et LK touchent la courbe en Q et Q', L'ellipse est donc inscrite dans le parallélogramme PIKL. On sait d'ailleurs que si deux diamètres de l'ellipse sont tels, que les tangentes aux extrémités de l'un soient parallèles à l'autre, ces deux diamètres sont conjugués (81); donc RR' et QQ' sont deux diamètres conjugués de la courbe : on connaît leurs longueurs et l'angle qu'ils font entre eux ; on peut donc en déduire les deux axes, de longueur et de position (88), et conséquemment décrire l'ellipse demandée.

Il est aisé de s'assurer que cette ellipse est inscrite dans le triangle PHG, et touche les côtés, chacun dans son milieu.

207. Si les points de division des côtés PR et PQ, se comptaient à partir du point commun P, les droites joignant les extrémités R et Q de ces côtés à deux de leurs points de division de même rang, se couperaient sur la diagonale du parallélogramme construit sur les côtés PR, PQ et l'angle compris RPQ, et dont RQ serait la seconde diagonale. C'est ce qu'on peut aisément vérifier.

208. Remarquons encore que *si les points qui divisent les côtés* PQ *et* PR *en* n *parties égales chacun, se comptent de* Q *vers* P *pour l'un et de* P *vers* R *pour l'autre, la droite joignant deux points de division de même rang et la droite joignant les deux points de division d'un rang immédiatement supérieur, se couperont sur une parabole.*

Pour le faire voir, prenons les côtés $PQ = a$ et $PR = b$ pour axes des coordonnées, PQ étant celui des abscisses. Soient S et T les $v$ièmes points de division des côtés PQ et PR ; on aura donc $QS = \frac{v}{n}a$, $PS = \frac{n-v}{n}a$ et $PT = \frac{v}{n}b$. Ainsi l'équation de la droite ST se réduit à

$$n(n-v)ay + nvbx = v(n-v)ab \dots (1)$$

Changeant v en $v+1$, dans cette équation, on aura celle de la droite qui joint les $(v+1)$ièmes points de division, il viendra donc

$$n(n-v-1)ay+n(v+1)bx=(v+1)(n-v-1)ab \ldots (2)$$

Pour le point où les deux droites se coupent, les x et les y sont respectivement les mêmes dans les deux équations précédentes. Si donc on élimine v de ces équations, l'équation résultante renfermera les coordonnées de l'intersection de deux droites consécutives quelconques, menées conformément à l'énoncé, et représentera le lieu de toutes les intersections. Or, pour éliminer v avec plus de facilité, retranchons (2) de (1); nous aurons

$$nay-nbx=(2v-n+1)ab;$$

d'où nous pouvons déduire aisément les valeurs de v et de $n-v$. Substituant ces valeurs dans l'équation (1) et réduisant, on trouvera, pour l'équation du lieu géométrique cherché,

$$(ay-bx-ab)^2-4ab^2x-\frac{a^2b^2}{n^2}=0;$$

ce lieu est par conséquent une parabole (204).

Lorsque n est infini, on est conduit à ce théorème : Si une droite ST rencontrant continuellement deux côtés PQ et PR d'un triangle donné PRQ, se meut de manière à couper constamment ces deux côtés en parties donnant la proportion QS : SP :: PT : TR; les intersections successives de chaque position de la droite mobile avec la position immédiatement suivante, décriront une parabole, à laquelle la droite mobile restera toujours tangente. De plus, cette parabole, tangente en Q et P aux deux côtés PQ et PR, aura deux diamètres dirigés suivant les prolongemens de deux côtés opposés du parallélogramme dont PQ et PR sont les demi-diagonales.

209. Voici une propriété commune aux courbes du second ordre et de laquelle on a déduit le moyen de les construire :

Si une section conique est coupée par deux droites non-parallèles AB *et* CD; *que d'un point* P *de la première droite* AB, *on mène une sécante* PN *parallèle à la seconde* CD *et d'un point* Q *de la seconde, une sécante* ST *parallèle à la première; les deux rapports* PM × PN : PB × PA *et* QC × QD : QS × QT *seront égaux et invariables, quels que soient les points* P *et* Q (fig. 30).

Prenons les droites proposées AB et CD pour axes des x et des y obliques, O étant l'origine; l'équation de la section conique étant nécessairement du second degré en x et y (204), sera de la forme

$$y^2+axy+bx^2+cy+dx+e=0, \ldots (1)$$

a, b, c, d, e étant des nombres donnés, positifs ou négatifs. Cette équation est la même que celle-ci :

$$y^2+(ax+c)y+b\left(x^2+\frac{d}{b}x+\frac{e}{d}\right)=0 \ldots (2)$$

Dans les points A et B, où la courbe coupe l'axe des x, on a $y=0$; ce qui donne, pour déterminer les abscisses OB et OA des points d'intersection,

$$x^2+\frac{d}{b}x+\frac{e}{d}=0.$$

Désignant par x' et x'' les racines de cette dernière équation, on aura $x'=\mathrm{OB}$, $x''=-\mathrm{OA}$, et le trinome $x^2+\frac{d}{b}x+\frac{e}{d}$ prendra la forme $(x-x')(x-x'')$. Si donc x désigne l'abscisse OP, dans l'équation (2), les valeurs correpondantes de y seront PM et PN, et le dernier terme de cette équation deviendra $b\times \mathrm{PB}\times \mathrm{PA}$. Or, le produit des valeurs de y, dans l'équation (2), est égal au dernier terme; ainsi on a $\mathrm{PM}\times\mathrm{PN}=b\cdot\mathrm{PB}\times\mathrm{PA}$, ou $\mathrm{PM}\times\mathrm{PN} : \mathrm{PB}\times\mathrm{PA}=b$. On aurait de même, $\mathrm{P'M'}\times\mathrm{P'N'} : \mathrm{P'B}\times\mathrm{P'A}$.

Maintenant, si l'on remarque que l'équation (1) revient à

$$x^2+\frac{1}{b}(ay+d)x+\frac{1}{b}(y^2+cy+e)=0,$$

on verra, en raisonnant comme pour l'équation (2), que $\mathrm{QS}\times\mathrm{QT}=\frac{1}{b}\cdot\mathrm{QC}\times\mathrm{QD}$, ou que $\mathrm{QC}\times\mathrm{QD} : \mathrm{QS}\times\mathrm{QT}=b$. Tous les rapports $\mathrm{PM}\times\mathrm{PN} : \mathrm{PB}\times\mathrm{PA}$, $\mathrm{P'M'}\times\mathrm{P'N'} : \mathrm{P'B}\times\mathrm{P'A}$, $\mathrm{QC}\times\mathrm{QD} : \mathrm{QS}\times\mathrm{QT}$, etc., sont donc égaux au nombre constant b. Ce qu'il fallait démontrer.

Il est clair que le théorème précédent aurait encore lieu, si les parallèles aux axes étaient tangentes à la courbe.

210. De ce théorème, on tire le moyen de faire passer une section conique par cinq points donnés, sommets d'un pentagone. Proposons-nous, par exemple, *de décrire l'ellipse circonscrite au pentagone donné* AA'BB'G (fig. 31).

Supposons le problème résolu, et soit I le point de rencontre des deux droites A'A et B'B; par le point G, menons les droites

GG'' et GG', respectivement parallèles aux deux $B'B$ et $A'A$ et rencontrant l'ellipse demandée en G'' et G'. Pour déterminer ces deux points, le théorème précédent donne

$$IA \cdot IA' : IB \cdot IB' :: HA \cdot HA' : HG \cdot HG'' :: KG \cdot KG' : KB \cdot KB';$$

d'où l'on tire

$$HG'' = \frac{HA \cdot HA' \cdot IB \cdot IB'}{HG \cdot IA \cdot IA'} \text{ et } KG' = \frac{IA \cdot IA' \cdot KB \cdot KB'}{IB \cdot IB' \cdot KG}.$$

Ces valeurs, faciles à construire, feront connaître les points G' et G'' de l'ellipse cherchée.

Pour avoir le centre, on mènera, par les milieux des cordes parallèles AA' et GG', BB' et GG'', les droites CC' et EE', qui se couperont au centre O. Ces droites, en effet, seront deux diamètres, car le conjugué du diamètre parallèle à deux cordes, passe par les milieux de celle-ci (89, 1°).

Les droites QA et $Q'G$, moitiés des cordes parallèles AA' et GG', étant deux ordonnées au diamètre CC', il est clair qu'on aura

$$\frac{QA^2}{Q'G^2} = \frac{OC^2 - OQ^2}{OC^2 - OQ'^2};$$

d'où l'on tire $$OC^2 = \frac{QA^2 \cdot OQ'^2 - OQ^2 \cdot Q'G^2}{QA^2 - Q'G^2}.$$

De là, en posant $h^2 = QA.Q'O$, $m^2 = OQ \cdot Q'G$ et $n^2 = QA^2 - Q'G^2$, valeurs dont la construction est fort simple, il viendra

$$OC^2 = \frac{(h^2 + m^2)(h^2 - m^2)}{n^2},$$

formule dont la construction est également fort simple.

Le diamètre CC' étant ainsi connu, on trouvera son conjugué MM' ou $2A'$, au moyen de l'équation $A'^2 \cdot OQ^2 + OC^2 \cdot QA^2 = A'^2 \cdot OC^2$, de laquelle on tire la formule, facile à construire,

$$A'^2 = \frac{OC^2 \cdot QA^2}{CQ \cdot QC'}.$$

Enfin, connaissant les deux diamètres conjugués CC' et MM', ainsi que l'angle $COM = CQA$ qu'ils font entre eux, on construira l'ellipse, soit comme il a été dit (89, 2°), soit en déterminant d'abord les deux axes, de grandeur et de position (88).

Il suit de cette solution, qu'une ellipse est complétement déterminée, dès qu'elle doit passer par cinq points donnés. Mais le problème serait impossible, si trois de ces points étaient en ligne droite; et si les cinq points étaient les sommets d'un pentagone régulier, l'ellipse demandée serait une circonférence.

211. En général, une section conique pouvant être construite, lorsqu'on connaît les cinq coefficiens de son équation $y^2+axy+bx^2+cy+dx+e=0$; on voit que *pour déterminer une courbe du second degré, il faut généralement cinq conditions ou cinq données, lesquelles se réduisent à quatre pour la parabole et l'hyperbole équilatère, et à trois pour la circonférence;* car l'égalité des deux axes, dans l'hyperbole équilatère, fait déjà une donnée; et pour la parabole, on a toujours la condition $a^2-4b=0$ (204). Quant à la circonférence, elle est bien fournie par la seule égalité des deux axes de l'ellipse; mais cette égalité faisant coïncider les deux foyers avec le centre, équivaut à deux conditions distinctes.

D'ailleurs, on a vu (197) que l'ellipse et l'hyperbole sont déterminées, dès qu'on a un foyer avec trois autres données, et que la parabole peut se construire, quand on a son foyer et deux de ses autres élémens. Il s'ensuit donc que la connaissance d'un foyer équivaut à deux des conditions nécessaires à la construction de toute section conique.

212. *Trouver l'aire de l'ellipse représentée par l'équation* $Ay^2+Bxy+Cx^2+S=0$, *l'angle des coordonnées étant désigné par* v.

D'abord puisque l'équation précédente représente une ellipse, la quantité B^2-4AC est négative (204). De plus, l'origine est au centre; car si (α, β) est un point de la courbe, $(-\alpha, -\beta)$ en sera un autre; et il est facile de voir que la droite joignant ces deux points, passe par l'origine et se trouve divisée en deux parties égales, par cette origine, laquelle conséquemment est le centre de l'ellipse.

Soit $y=px$ l'équation de l'un des diamètres de l'ellipse proposée et d la demi-longueur de ce diamètre; d, x et y sont donc les côtés d'un triangle dont l'angle entre x et y vaut $180°-v$, et il est clair (G. 381) qu'on aura $d^2=x^2+y^2+2xy\cos v$. De sorte que pour l'extrémité (x,y) de d, les valeurs des coordonnées x et y sont respectivement les mêmes dans les trois équations

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+S=0,$$
$$y=px \text{ et } d^2=x^2+y^2+2xy\cos v.$$

Eliminant x et y de ces équations, on trouvera

$$(Ad^2+S)p^2+(Bd^2+2S\cos v)p+Cd^2+S=0.$$

Dans cette équation, d et p sont variables; et comme la plus grande et la plus petite valeur du diamètre $2d$, sont l'une le grand et l'autre le petit axe de l'ellipse proposée (60), il faut d'abord trouver cette plus grande et cette plus petite valeur. Or, résolvant l'équation finale précédente par rapport à p, puis observant que le maximum et le minimum de d doivent rendre nulle la quantité sous le radical (*Mélanges d'algèbre*, page 59), on aura, pour déterminer ce maximum et ce minimum, l'équation

$$d^4-\frac{4S(B\cos v-A-C)}{4AC-B^2}d^2+\frac{4S^2\sin^2 v}{4AC-B^2}=0.$$

Désignant donc par a le maximum de d et par b le minimum, $2a$ et $2b$ seront les deux axes de l'ellipse proposée, et il viendra, d'après la composition des équations,

$$a^2+b^2=\frac{4S(B\cos v-A-C)}{4AC-B^2} \text{ et } a^2b^2=\frac{4S^2\sin^2 v}{4AC-B^2} \cdots (1)$$

Soit E l'aire cherchée de l'ellipse; on aura donc (96)

$$E=\pi ab;\ \text{d'où } E=\frac{2\pi S\sin v}{\sqrt{4AC-B^2}}.$$

Les équations (1) feront connaître les axes de l'ellipse représentée par l'équation proposée. (On en déduirait aussi les axes de l'hyperbole représentée par cette même équation, si B^2-4AC était positif.)

213. *Déterminer l'ellipse de la plus grande surface qu'on peut inscrire dans un triangle donné.*

Soient m et n deux côtés du triangle donné et v l'angle compris. Soit

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+1=0,$$

l'équation de l'ellipse cherchée, rapportée à des axes obliques parallèles aux côtés m et n, et comprenant entre eux, conséquemment, un angle égal à v. Portons l'origine au point où se coupent les côtés m et n, en laissant toujours les axes parallèles à eux-mêmes; soient x, y les coordonnées du centre de l'ellipse, par rapport aux nouveaux axes; x', y' les nouvelles coordonnées et x'', y'' les anciennes; on aura donc $x'=x+x''$ et $y'=y+y''$, ou $x''=x'-x$ et $y''=y'-y$. Substituant ces valeurs dans $Ay''^2+Bx''y''+Cx''^2+1=0$, il viendra, pour l'équation de l'ellipse, rapportée aux nouveaux axes,

$$A(y'-y)^2+B(x'-x)(y'-y)+C(x'-x)^2+1=0,$$

A, B, C, étant des coefficiens qui, avec x et y, forment les inconnues du problème.

Il faut d'abord exprimer que l'ellipse touche les côtés m et n, qui sont ici les axes des x' et des y'. Pour cela, faisons d'abord $y'=0$ dans son équation, et exprimons que les valeurs qui en résultent pour x', sont égales; nous trouverons, pour l'abscisse x_1 du point de contact avec le côté m, $x_1=x+\frac{B}{2C}y$, avec la condition

$$(B^2-4AC)y^2=4C \ldots (1)$$

Si dans l'équation de l'ellipse on fait $x'=0$ et qu'on exprime que les valeurs qui en résultent pour y' sont égales, on trouvera, pour l'ordonnée y_2 du point de contact avec le côté n, $y_2=y+\frac{B}{2A}x$, avec la condition

$$(B^2-4AC)x^2=4A \ldots (2).$$

L'équation du troisième côté du triangle proposé est $y'=-\frac{n}{m}x'+n$, ou

$$m(y'-y)+n(x'-x)+nx'+my'-mn=0.$$

Pour le point de contact de ce côté avec l'ellipse, les équations de ces deux lignes admettent les mêmes valeurs pour x' et les mêmes valeurs pour y': de plus, les deux valeurs qui en résultent pour x' se réduisent à une seule, de même que les deux valeurs qui en résultent pour y': on a donc, pour les coordonnées x_3 et y_3 du point de contact avec le troisième côté,

$$x_3=x+\frac{(Bm-2An)(nx+my-mn)}{2(An^2-Bmn+Cm^2)},$$

$$y_3=y+\frac{(Bn-2Cm)(nx+my-mn)}{2(An^2-Bmn+Cm^2)},$$

avec la condition $(B^2-4AC)(nx+my-mn)^2-4An^2+4Bmn-4Cm^2=0$, laquelle, si l'on en retranche les produits respectifs des équations (1) et (2) par m^2 et n^2, se réduit à $(B^2-4AC)(2xy-2nx-2my+mn)+4B=0$; ou bien, en posant $D=2xy-2nx-2my+mn$, cette condition prend la forme

$$(B^2-4AC)D=-4B \ldots (3)$$

Retranchant du carré de cette équation, 4 fois le produit des équations (1) et (2), et réduisant, on obtiendra

$$(4AC-B^2)(4x^2y^2-D^2)=16.$$

Prenant dans cette équation la valeur de $4AC-B^2$ et substituant cette valeur dans $E=\frac{2\pi \sin v}{\sqrt{4AC-B^2}}$, E désignant l'aire de l'ellipse cherchée (212), il viendra

$$E^2=\tfrac{1}{4}\pi^2 \sin^2 v\,(4x^2y^2-D^2).$$

Posant $E=\frac{1}{2}\pi z \sin v$ et remettant la valeur de D, on trouvera
$$z^2=4x^2y^2-(2xy-2nx-2my+mn)^2 \ldots (4)$$
Dans cette équation, x, y et z sont variables ; et il s'agit de trouver le maximum de z, puisque z étant à son maximum, il en sera de même de l'aire E de l'ellipse demandée. Or, résolvant l'équation (4) par rapport à x et supposant que l'inconnue y ait la valeur qui convient au maximum de z, on verra que pour ce maximum, la quantité sous le radical est nulle et qu'il en résulte
$$x=\frac{m}{2n}(n-y) \ldots (5)$$

De même, résolvant l'équation (4) par rapport à y, on verra que le maximum de z donne

$$y=\frac{n}{2m}(m-x) \ldots (6)$$

Le maximum de z et conséquemment celui de E, fournit donc les équations (5) et (6). Ainsi, d'après ces équations, les coordonnées du centre de la plus grande ellipse inscrite dans le triangle proposé, sont

$$x=\tfrac{1}{3}m \text{ et } y=\tfrac{1}{3}n ;$$

ce centre coïncide donc avec le centre de gravité du triangle.

Au moyen de ces valeurs, on trouve $A=-\frac{12}{n^2}$, $B=-\frac{12}{mn}$ et $C=-\frac{12}{m^2}$, puis $x_1=\frac{1}{2}m$, $y_2=\frac{1}{2}n$, $x_3=\frac{1}{2}m$ et $y_3=\frac{1}{2}n$. De sorte que les points de contact sont les milieux des côtés du triangle proposé. Soit T l'aire de ce triangle ; celle de l'ellipse maximum inscrite sera $E=\frac{1}{9}\pi T\sqrt{3}$.

Il résulte des calculs précédens, que *la plus grande ellipse inscrite dans un triangle donné, touche les côtés en leurs milieux et son centre coïncide avec le centre de gravité du triangle.*

Ce théorème remarquable, auquel M. *Bérard* est parvenu, par le calcul différentiel, tome IV des Annales de Mathématiques, fournit le moyen de tracer la plus grande ellipse inscriptible, et montre *comment il faut s'y prendre pour couper, dans une pièce de bois triangulaire, la plus grande table ovale qu'il se puisse.*

En effet, l'un des diamètres $2A'$ de cette ellipse est dirigé suivant la droite d, menée du milieu du côté m du triangle, au sommet opposé : et puisque le centre est au tiers de cette droite, à partir du côté m, il s'ensuit que $A'=\frac{1}{3}d$. Le conjugué $2B'$ du diamètre $2A'$ est parallèle au côté m, tangent à l'ellipse à l'extrémité de $2A'$ (80). De plus, la droite qui joint les points de contact avec les deux autres côtés du triangle, passe par leurs milieux ; elle est donc parallèle au troisième côté m, et en vaut la moitié. En outre, la moitié de cette droite, étant l'ordonnée de l'un des points de contact, vaut évidemment $\frac{1}{4}m$; et quant à l'abscisse du même point, il est facile de voir que sa valeur est $d-\frac{1}{3}d-\frac{1}{2}d$ ou $\frac{1}{6}d$. Ainsi, pour ce point de contact, l'équation de l'ellipse maximum, rapportée à ses diamètres conjugués $2A'$ et $2B'$, devient

$$\tfrac{1}{16}A'^2m^2+\tfrac{1}{36}B'^2d^2=A'^2B'^2;$$

d'où à cause de $A'=\frac{1}{3}d$, on tire $B'^2=\frac{1}{12}m^2$, valeur bien facile à construire.

Connaissant donc les deux diamètres conjugués $2A'$ et $2B'$, ainsi que l'angle qu'ils font entre eux, on en déduira la grandeur et la position des deux axes $2A$ et $2B$ (88); d'où il sera aisé de tracer la plus grande ellipse inscriptible demandée.

Voici encore deux théorèmes :

I. Le lieu de tous les sommets des triangles ayant une même base et la même différence des angles adjacens, est une hyperbole équilatère, dont le centre est au milieu de la base commune.

II. Si sur les 3 côtés d'un triangle, pris tour à tour comme diagonales, on construit des parallélogrammes, dont les côtés soient parallèles à deux droites données, les trois autres diagonales se couperont en un même point, centre d'une hyperbole équilatère circonscrite au triangle proposé. (Voyez la démonstration, page 184 du tome III de la Correspondance Mathématique et Physique, de M. *Quetelet*.)

NOTE.

Notre but, dans ce qui précède, a été de faire connaître les principales propriétés des courbes du second ordre, au moyen de l'algèbre et de la géométrie élémentaire seules, et de fournir ainsi une utile introduction à l'étude de la *Géométrie analytique*. Mais pour prendre une connaissance plus complète et plus approfondie de cette partie importante des Mathématiques, nous renvoyons aux ouvrages publiés sur cette matière, tels que ceux de MM. Biot, Bourdon, Boucharlat, Garnier, Lacroix, etc.

Si nous avons quelquefois invoqué, dans ce petit traité, les principes de la Trigonométrie rectiligne, c'est parce qu'ils sont si simples et si faciles à acquérir, qu'il n'y aurait aucun avantage réel à ne pas les employer. Cependant, pour comprendre ce livre, la trigonométrie n'est pas rigoureusement nécessaire ; et nous indiquerons le moyen de s'en passer, d'autant plus volontiers, qu'il peut se présenter des circonstances où l'on ait besoin d'étudier les propriétés des sections coniques, sans connaître la trigonométrie. Il suffit, à cet effet, de remplacer, par ce que nous allons dire, les nos 17, 18 et 19.

Construire l'angle de deux droites, rapportées à des axes quelconques (fig. 32).

Menons par l'origine A les parallèles AK et AM aux deux droites proposées $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$; l'angle MAK de ces deux parallèles sera évidemment le même que celui ω des deux droites. Prenons $AO = 1$ et menons OM parallèle à AY ; nous aurons $OI = a$ et $OM = a'$. Prenons aussi $AN = 1$ et menons NR perpendiculaire à AK et NV à AM : il est clair qu'on pourra aisément construire l'angle $MAK = \omega$, dès que l'on connaîtra la longueur t de la perpendiculaire NR, ou la longueur s de la perpendiculaire NV. Ces longueurs dépendent évidemment de l'angle ω : aussi appelle-t-on NR la *tangente*, NV le *sinus* et AV le *cosinus* de cet angle ; et on a ainsi, en abrégé, NR ou $t = \tan \omega$, NV ou $s = \sin \omega$ et $AV = \cos \omega$.

Cela posé, pour trouver t, menons sur AY les perpendiculaires OB et AD; il est clair qu'en désignant par θ l'angle YAX des deux axes, on aura $AB = OD = \cos\theta = c$ et $OB = AD = \sin\theta = d$; d'où $c^2 + d^2 = 1$. On a aussi $AR^2 = 1 + t^2$. Les aires des triangles ANR et AIM, sont respectivement $\frac{1}{2}t$ et $\frac{1}{2}(a' - a)d$: et puisque ces triangles ont l'angle MAI commun, il en résulte

$$\tfrac{1}{2}t : \tfrac{1}{2}(a'-a)d :: AR : AI \times AM;$$

d'où $t^2 : (a'-a)^2 d^2 :: 1 + t^2 : AI^2 \times AM^2$;

$$1 : AI^2 \times AM^2 - (a'-a)^2 d^2 :: t^2 : (a'-a)^2 d^2;$$

$$t^2 = \frac{(a'-a)^2 d^2}{AI^2 \times AM^2 - (a'-a)^2 d^2}.$$

A cause de $c^2 + d^2 = 1$, les deux triangles rectangles AID et AMD donnent

$$AI^2 = (a+c)^2 + d^2 = a^2 + 2ac + 1,$$
$$AM^2 = (a'+c)^2 + d^2 = a'^2 + 2a'c + 1.$$

Substituant donc ces valeurs et développant, après avoir remplacé d^2 par $1 - c^2$, on verra que la racine carrée du dénominateur de t^2 est $(a + a')c + aa' + 1$; ainsi on aura

$$t = \frac{(a'-a)d}{(a+a')c + aa' + 1}.$$

De là, pour avoir s, les deux triangles semblables ANR et ANV fournissent $1 : AR :: s : t$, ou $1 : 1 + t^2 :: s^2 : t^2$; d'où l'on tire

$$s = \frac{(a'-a)d}{\sqrt{(1+a^2+2ac)(1+a'^2+2a'c)}}.$$

Chacune de ces formules suffit pour construire l'angle ω des deux droites proposées $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$.

Si la première droite tombe au-dessous de l'axe des x, a sera négatif; si la seconde se trouve à la gauche de l'axe des y, a' deviendra $-a'$; si l'angle ω des deux droites est obtus, t prendra le signe $-$; comme réciproquement, si t est négatif, l'angle ω sera obtus : enfin, si cet angle est droit, on aura t infini et $s = 1$; ce qui donnera chaque fois

$$(a + a')c + aa' + 1 = 0.$$

Réciproquement, cette relation ayant lieu, on aura $t = \infty$, $s = 1$ et l'angle ω droit.

Lorsque les deux axes sont rectangulaires, on a $d=1$, $c=0$ et par suite

$$t=\frac{a'-a}{1+aa'} \quad \text{et} \quad s=\frac{a'-a}{\sqrt{(1+a^2)(1+a'^2)}}.$$

Telles sont donc les formules pour construire l'angle ω de deux droites $y=ax+b$ et $y=a'x+b'$, rapportées à des axes rectangulaires.

Et si alors l'angle ω est droit, il viendra $t=\infty$, $s=1$ et $1+aa'=0$. Réciproquement, les coordonnées étant rectangulaires, si $1+aa'=0$, on aura $t=\infty$, $s=1$ et l'angle ω droit.

Trouver la distance d'un point donné à une droite donnée, l'angle θ des deux axes étant quelconque (fig. 33).

Soit M' ou (x', y') le point donné et $y=ax+b$ la droite donnée EF ; soit $MM'=P$ la distance cherchée, x et y les coordonnées du point M. En menant MN parallèle à AX et MH perpendiculaire à M'P', on aura $MN=x-x'$ et $M'N=y'-y$. Tirant AV parallèle à EF, prenant $AO=1$ et menant OV parallèle et OB perpendiculaire à l'axe AY, les triangles AOV et MNI seront semblables, de même que les triangles AOB et MNH. Si donc on pose $AB=c$ et $OB=d$, on aura, en comparant les côtés homologues,

$$1 : x-x' :: a : IN=a(x-x'),$$
$$1 : x-x' :: c : NH=c(x-x'),$$
$$1 : x-x' :: d : MH=d(x-x').$$

D'après ces valeurs, le triangle MNI, où l'angle N est obtus, donne

$$MI^2=(x-x')^2+a^2(x-x')^2+2ac(x-x')^2,$$
$$\text{ou } MI^2=(x-x')^2(1+a^2+2ac).$$

D'ailleurs, $P'I=y-a(x-x')=ax+b-a(x-x')=ax'+b$ et $M'I=y'-ax'-b$. Et comme les triangles semblables IMM' et HMM' fournissent

$$MI : MH :: IM' : P=\frac{IM'\times MH}{MI},$$

il vient, en substituant les valeurs précédentes de IM', MH et MI,

$$P=\frac{(y'-ax'-b)\,d}{\sqrt{1+a^2+2ac}}.$$

Si le point M' tombait au-dessous de la droite EF, la valeur de P serait négative; et si l'angle des deux axes était droit, ce qui donne $c=0$ et $d=1$, on aurait

$$P=\frac{y'-ax'-b}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Telle est donc la formule pour calculer la distance d'un point donné (x', y') à une droite $y=ax+b$, rapportée à des axes rectangulaires.

Il est bien facile maintenant de *trouver la distance* P *de deux points* M *et* M' *ou* (x, y) *et* (x', y') *les coordonnées n'étant pas rectangulaires;* car dans le triangle MNM', où l'angle N est aigu, on a $P^2=MN^2+M'N^2-2M'N\times NH$. Mais $MN=x-x'$, $M'N=y'-y$ et $NH=c(x-x')$: donc

$$P^2=(x-x')^2+(y-y')^2+2c(x-x')(y-y').$$

Si le point (x', y') vient à coïncider avec l'origine, ce qui suppose x' et y' nuls, on aura, pour la distance du point (x, y) à l'origine des coordonnées obliques,

$$P^2=x^2+y^2+2cxy;$$

d'où à cause de $c=AB=\cos\theta$, il vient

$$P^2=x^2+y^2+2xy\cos\theta,$$

formule employée page 111.

Voici trois fautes essentielles à corriger :

Page 13, ligne 21, $(-p, -q)$, lisez $(-q, -p)$.

Même page, ligne 22, au lieu de $\frac{q}{p}$ lisez $\frac{p}{q}$.

Page 59, ligne 18, au lieu de (fig. 17), lisez (fig. 17, bis).

FIN.

TABLE SOMMAIRE DES MATIÈRES.

Ici comme pour la géométrie, nous conseillerons aux élèves de dresser eux-mêmes la table détaillée, en écrivant dans un cahier d'un très-petit format, les énoncés des théorèmes et des problèmes, et en traçant à côté les figures ou les principales formules qui s'y rapportent. Une table ainsi formée, leur sera fort utile dans les répétitions et pour bien connaître l'enchaînement des principes.

Remarque. On trouvera des théorèmes à démontrer ou des problèmes à résoudre, pages 14, 24, 42, 51, 53, 66, 79, 87, 92, 99, 102 et 115

NOTES ET ADDITIONS.

Note sur la transformation des coordonnées.

Il est bien facile de trouver les formules pour passer d'un système d'axes quelconques AX et AY (fig. 8), à un système d'axes aussi quelconques A'X' et A'Y', d'une autre origine A'. Conservant en effet, les dénominations et les constructions du n° 45, où IK est alors parallèle à AY, et répétant les raisonnemens et les calculs de ce n°, on aura, pour les formules cherchées,

$$x = h + \frac{x'}{m} + \frac{y'}{m'} \text{ et } y = k + \frac{ax'}{m} + \frac{a'y'}{m'} \cdots (A)$$

Mais en désignant par c le cosinus de l'angle θ des deux axes proposés, les valeurs de m et m', dans ces formules, sont

$$m^2 = 1 + a^2 + 2ac \text{ et } m'^2 = 1 + a'^2 + 2a'c \ldots (1)$$

Cela résulte de la dernière formule de la page 119 et des triangles A'IH et A'IK, où A'H $= m$ et A'K $= m'$.

Lorsque l'angle θ est droit, ce qui donne $c = 0$, on a encore les formules (A), dans lesquelles alors $m^2 = 1 + a^2$ et $m'^2 = 1 + a'^2$, comme au n° 45. De là on tire les formules du n° 46; et quant à celles du n° 47, on peut les remplacer par les formules (A). Mais comme on a, dans ce cas, $aa' + 1 + (a + a')c = 0$ (p. 117), cette équation et les équations (1), que l'on vient de considérer, donnent, en éliminant c,

$$m^2 = \frac{(a' - a)(1 - a^2)}{a + a'} \text{ et } m'^2 = \frac{(a' - a)(a'^2 - 1)}{a + a'}.$$

Ces valeurs et les formules (A) sont pour passer d'un système d'axes obliques à un système d'axes rectangulaires, d'origine différente. Je les crois préférables à celles du n° 47, du moins pour l'application du n° 49, où l'on peut d'ailleurs simplifier en posant d'abord $a = 0$; car n'ayant que le terme en $x'y'$ à faire disparaître, l'indéterminée a' suffira à cet effet.

On voit que la transformation des coordonnées sur un plan, peut s'opérer sans la trigonométrie. Si l'on voulait employer les principes de cette science, les formules précédentes prendraient d'autres formes, moins commodes à la vérité pour les calculs et la théorie, en plusieurs circonstances; mais qu'il est bon de connaître, parce qu'on en fait usage dans tous les traités de géométrie analytique.

Reprenons donc la figure 8, et soient α, α', les angles EA'X' et EA'Y' des nouveaux axes A'X', A'Y' avec l'ancien axe des x, l'angle des deux axes proposés étant désigné par θ. Il est clair qu'on aura l'angle IHA' $= \theta - \alpha$, l'angle IKA' $= \theta - \alpha'$, et les triangles A'IH, A'IK fourniront:

$$m = \frac{\sin\theta}{\sin(\theta-\alpha)},\ a = \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)},\ m' = \frac{\sin\theta}{\sin(\theta-\alpha')}\ \text{et}\ a' = \frac{\sin\alpha'}{\sin(\theta-\alpha')}.$$

Substituant ces valeurs dans les formules (A), il viendra, pour passer d'un système d'axes obliques à un système d'axes obliques, d'une autre origine, les formules :

$$\left.\begin{aligned} x &= h + \frac{x'\sin(\theta-\alpha)+y'\sin(\theta-\alpha')}{\sin\theta} \\ y &= k + \frac{x'\sin\alpha + y'\sin\alpha'}{\sin\theta} \end{aligned}\right\}\ (\mathrm{B})$$

Si l'angle θ est droit, il viendra $\sin\theta = 1$, $\sin(\theta-\alpha) = \cos\alpha$ et $\sin(\theta-\alpha') = \cos\alpha'$; donc on aura, pour passer d'un système d'axes rectangulaires à un systèmo d'axes obliques,

$$x = h + x'\cos\alpha + y'\cos\alpha'$$
$$y = k + x'\sin\alpha + y'\sin\alpha'.$$

L'angle θ n'étant pas droit, si les nouveaux axes sont rectangulaires, ce qui suppose $\alpha' - \alpha = 90^\circ$ ou $\alpha' = 90^\circ + \alpha$, on aura $\sin\alpha' = \cos\alpha$ et $\sin(\theta-\alpha') = \sin(\theta - 90^\circ - \alpha) = -\cos(\theta-\alpha)$. De sorte que les formules (B) donneront, pour passer d'un système d'axes obliques à un système d'axes rectangulaires,

$$x = h + \frac{x'\sin(\theta-\alpha) - y'\cos(\theta-\alpha)}{\sin\theta},$$
$$y = k + \frac{x'\sin\alpha + y'\cos\alpha}{\sin\theta}.$$

De là, si les premiers axes sont rectangulaires, aussi bien que les nouveaux, il viendra, pour passer du premier système au second,

$$x = h + x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$
$$y = k + x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

Des courbes semblables.

La définition des courbes semblables, donnée au n° 100, n'est qu'une extension de celle des polygones semblables, et fournit plusieurs conséquences importantes, que nous allons indiquer.

Deux courbes sont semblables, lorsque les coordonnées rectangulaires de leurs différens points, sont proportionnelles. (Le lecteur tracera facilement les deux figures qui se rapportent à ce théorème.)

Soient O et O′ les origines, OX et O′X′ les axes des abscisses et ACE un arc de la première courbe. Inscrivons à volonté la ligne brisée ABC DE, dans cet arc; je dis qu'il est toujours possible d'inscrire une ligne brisée semblable, dans un arc de la seconde courbe. Menons en effet, les ordonnées AP, BQ, CR, DS et ET; prenons sur la seconde courbe le point A′ dont les coordonnées O′P′ et A′P′ soient proportionnelles à celles du point A; on aura donc AP : A′P′ :: OP : O′P′. Soit r la valeur de chacun de ces rapports égaux; il viendra $AP = r.A'P'$ et $OP = r.O'P'$. Si donc on prend dans la seconde courbe, les abscisses O′P′, O′Q′, O′R′, etc., de manière qu'on ait $OP = r.O'P'$, $OQ = r.O'Q'$, $OR = r.O'R'$, etc., ce qui donne $PQ = r.P'Q'$, $QR = r.Q'R'$, etc.; il est clair qu'en menant les ordonnées P′A′, Q′B′, R′C′, etc., et observant que par hypothèse, les coordonnées sont proportionnelles, on aura $AP = r.A'P'$, $BQ = r.B'Q'$, $CR = r.C'R'$, etc. Ainsi les trois rapports AP . A′P′, PQ : P′Q′ et BQ : B′Q′, sont égaux à r; donc les deux trapèzes PB et P′B′ sont semblables, comme ayant deux angles homologues égaux, compris entre trois côtés homologues proportionnels (G. p. 106. Théor. VII). On verra de même que les deux trapèzes QC et Q′C′ sont semblables, de même que les deux RD et R′D′, et les deux SE, S′E′. Donc les deux lignes brisées ABCDE et A′B′C′D′E′, sont composées d'un même nombre de droites homologues proportionnelles, comprenant le même nombre d'angles homologues égaux; donc ces deux lignes brisées sont semblables (100).

Ainsi les deux arcs ACE et A′C′E′ sont tels, qu'en inscrivant à volonté une ligne brisée dans l'un, on peut inscrire une ligne brisée semblable dans l'autre; donc ces deux arcs sont semblables (100). Et comme ces deux arcs peuvent être les courbes entières, il s'ensuit que ces deux courbes elles-mêmes sont semblables.

De là, puisque les points A et A′ sont *homologues*, on voit que dans deux courbes semblables, les points dont les coordonnées rectangulaires sont proportionnelles, sont deux points *homologues* ou semblablement placés sur ces courbes. On voit de plus que les droites AE et A′E′, terminées à des points homologues chacun à chacun, sont elles-mêmes *homologues*, car les deux trapèzes PE et P′E′ sont semblables. De même les deux arcs ACE et A′C′E′ sont *homologues*.

Il suit de là que *dans deux courbes semblables, les arcs homologues sont semblables et entre eux comme leurs cordes*. Effectivement, les arcs homologues ACE et A′C′E′, n'étant au fond que deux lignes brisées semblables, composées d'un même nombre infini de droites homologues, infiniment petites; les *segmens* compris entre ces arcs et leurs cordes, ne sont que deux polygones semblables, d'une infinité de côtés homologues. On a donc ACE + AE : A′C′E′ + A′E′ :: AE : A′E′; d'où ACE : A′C′E′ :: AE : A′E′.

Enfin, il est clair que *dans deux courbes semblables, les lignes homologues, droites ou arcs, sont proportionnelles; tandis que les aires homologues, telles que segmens ou secteurs, sont semblables et entre elles comme les carrés des droites homologues*. Par exemple, ACETP et A′C′E′T′P′ sont deux segmens homologues; et si l'on mène les droites OA, OE, O′A′, O′E′, les figures OACE et O′A′C′E′, seront deux secteurs homologues.

Deux ellipses ou deux hyperboles sont semblables, dès que leurs axes homologues sont proportionnels. Soient $2A$ et $2B$ les axes de la première courbe, et $2A'$, $2B'$ les axes homologues de la seconde. Puisque $A : A' :: B : B'$, soit r la valeur de chacun de ces rapports égaux; on aura donc $A = rA'$ et $B = rB'$. Soit (x, y) un point de la première courbe et (x', y') un point de la seconde tel, qu'on ait $x = rx'$. Il est clair qu'en multipliant par r^2 l'équation de la seconde courbe, rapportée à ses axes, et ayant égard à l'équation de la première et aux valeurs précédentes, on aura $y = ry'$. D'où il suit que dans les deux courbes proposées, les coordonnées rectangulaires de leurs différens points, sont proportionnelles; donc ces deux courbes sont semblables.

Toutes les circonférences des cercles sont donc semblables, de même que toutes les hyperboles équilatères.

Il résulte aussi de ce qu'on a vu plus haut, que dans deux ellipses ou deux hyperboles semblables, 1° les lignes homologues, telles que cordes, diamètres, excentricités, rayons vecteurs, tangentes, soutangentes, normales et sounormales, sont entre elles comme les axes homologues, de même que les arcs homologues et semblables; 2° les aires homologues et semblables, telles que segmens ou secteurs, sont comme les carrés des mêmes axes.

Il est clair aussi que si E et E' sont les aires de deux ellipses semblables, et $2A$, $2A'$ leurs premiers axes, on aura $E : E' :: A^2 : A'^2$; ce qui résulte d'ailleurs des mesures de E et E' (96). Enfin, S et S' désignant les aires de deux segmens homologues, dans deux hyperboles semblables, rapportées à leurs asymptotes, et $2A$, $2A'$ les premiers axes, on a $S : S' :: A^2 : A'^2$, ce qu'on trouve d'ailleurs par les mesures de S et S' (150).

Deux paraboles quelconques sont toujours semblables. C'est ce qu'on démontre, comme pour deux ellipses, en désignant d'abord par r le rapport des paramètres $2p$ et $2p'$.

On voit donc que dans deux paraboles quelconques, 1° les lignes homologues, droites, cordes, arcs, rayons vecteurs, tangentes, soutangentes, normales et sounormales, sont proportionnelles aux paramètres; 2° les aires homologues et semblables, segmens ou secteurs, sont comme les carrés des paramètres.

Enfin, on peut démontrer, 1° que les sections faites dans un même cône, droit ou oblique, par des plans parallèles, sont des courbes semblables; 2° que les sections faites dans deux cylindres semblables, droits ou obliques, par des plans également inclinés sur les axes, sont des ellipses semblables.

Des équations polaires des sections coniques.

Jusqu'à présent nous avons déterminé les différens points d'un plan, en les rapportant à des axes tracés dans ce plan; mais il est souvent utile, et particulièrement en astronomie, de fixer la position de chaque point

M du plan, au moyen de sa distance MF à un point donné F et de l'angle MFR que cette distance fait avec une droite FR, invariable de position, et partant du point fixe F. Ce point fixe s'appelle le *pôle* ou l'*origine* du point M, et la distance FM en est le *rayon vecteur*, que nous désignerons toujours par r. Nous désignerons aussi constamment par ω l'angle RFM que ce rayon *décrit* autour du pôle F, à partir de la droite *invariable* FR.

Les quantités r et ω, qui servent à fixer la position de chaque point M du plan, sont dites *les coordonnées polaires* du point M; et on appelle *équation polaire* d'une ligne, la relation qui existe entre les coordonnées polaires de chaque point de cette ligne.

Cherchons l'équation polaire de l'ellipse, en prenant pour pôle le foyer positif, et pour droite invariable, le prolongement positif de l'excentricité c. Nous avons vu (53) que dans ce cas, r étant le rayon vecteur du point M (fig. 9), et x l'abscisse OP du même point, on a

$$r = A - \frac{cx}{A}.$$

Mais le triangle rectangle FMP, où l'angle MFP $= \omega$, donne FP $= r\cos\omega$; donc OP ou $x = c + r\cos\omega$. Substituant cette valeur dans celle de r, et résolvant l'équation résultante par rapport à r, il viendra

$$r = \frac{A^2 - c^2}{A + c\cos\omega} \cdots (1)$$

Désignant par p le demi-paramètre $\frac{B^2}{A}$ et par e le rapport de l'excentricité c au demi-grand axe A, on aura

$$e = \frac{c}{A} \quad \text{et} \quad r = \frac{p}{1 + e\cos\omega} \cdots (2)$$

Il est clair qu'ayant $c < A$ ou $e < 1$, si l'on fait varier l'angle ω depuis o jusqu'à 360°, les valeurs de r seront toutes positives, car le plus grand cosinus est 1 ou -1; ces valeurs détermineront donc successivement tous les points de l'ellipse représentée par l'une des équations (1) et (2).

Quant à l'hyperbole, prenons encore pour pôle le foyer positif et pour droite invariable le prolongement positif de l'excentricité c. Si alors r désigne le rayon vecteur du point M (fig. 16) et x l'abscisse OP, nous avons vu (107) que

$$r = \frac{cx}{A} - A.$$

Désignant toujours par ω l'angle *décrit* XFM, observant que cos PFM $= -\cos\omega$, on verra que le triangle rectangle FMP fournit FP $= -r\cos\omega$; d'où $x = \text{OF} - \text{FP} = c + r\cos\omega$. Substituant cette valeur et posant $p = \frac{B^2}{A}$, $e = \frac{c}{A}$, l'équation résultante

$$r = \frac{c^2 - A^2}{A - c\cos\omega}, \quad \text{donnera} \quad r = \frac{p}{1 - e\cos\omega} \cdots (3)$$

Ici $c > A$ ou $e > 1$: de plus, les valeurs positives du rayon vecteur r se mesurant sur le côté mobile de l'angle décrit ω, *les valeurs négatives devront se mesurer en sens contraire, sur le prolongement du même côté;* enfin l'angle v d'une asymptote avec l'axe des x, ayant pour tangente $\frac{B}{A}$, on a $\cos v = \frac{A}{c}$. Cela posé, il est facile de voir que tant que les valeurs positives de $\cos \omega$ seront moindres que $\cos v$, c'est-à-dire, tant que le côté mobile de l'angle ω sera dans l'angle $2v$, formé en menant par le pôle F des parallèles aux asymptotes, les valeurs de r seront négatives et numériquement plus grandes que $c + A$; elles détermineront donc la branche négative de l'hyperbole représentée par l'une des équations (3). Si $\cos \omega = \frac{A}{c} = \cos v$, le rayon r coïncidera avec l'un des côtés de l'angle $2v$, et aura une valeur infinie, comme cela doit être. Enfin, si l'angle ω est plus grand que l'angle v, c'est-à-dire si $\cos \omega < \frac{A}{c}$, les valeurs de r seront positives, et elles le seront encore tant que $\cos \omega$ sera négatif; ces valeurs détermineront par conséquent la branche positive de l'hyperbole proposée.

Passons à la parabole, et cherchons son équation polaire, le pôle étant le foyer F et la droite invariable, la partie positive de l'axe (fig. 21). Comme p désigne le demi-paramètre et x l'abscisse OP, on a vu (160) que

$$r = x + \tfrac{1}{2}p.$$

Le triangle rectangle FMP, où l'angle $PFM = \omega$, donne $FP = r \cos \omega$; d'où $x = OF + FP = \frac{1}{2}p + r \cos \omega$. On a donc, pour l'équation polaire de la parabole,

$$r = \frac{p}{1 - \cos \omega} \cdots (4)$$

Il est visible que les valeurs de r sont toutes positives, puisque $\cos \omega$ ne saurait surpasser l'unité. Si $\cos \omega = 1$, c'est-à-dire si l'angle ω est nul ou 360°, le rayon vecteur sera infini, comme cela doit être (165).

Il est aisé de voir que quand le pôle est le foyer négatif, l'équation polaire de l'ellipse devient

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \omega}.$$

Cette équation polaire s'appliquera évidemment aux trois sections coniques, pourvu qu'on y suppose simplement $e < 1$ pour l'ellipse, $e > 1$ pour l'hyperbole et $e = 1$ pour la parabole.

Voyons présentement comment on passe d'un système quelconque de coordonnées *ordinaires* à un système de coordonnées polaires. Soit θ l'ange des deux axes auxquels une ligne est rapportée, par les coordonnées x et y de l'un quelconque M de ses points; soient r et ω les coordonnées polaires de M; h l'abscisse et k l'ordonnée du pôle F, et φ l'angle que la droite invariable FR forme avec l'axe des x. Il est facile de voir qu'en menant par F des parallèles aux axes proposés, on aura

$$x = h + \frac{r \sin(\theta - \varphi - \omega)}{\sin \theta} \text{ et } y = k + \frac{r \sin(\varphi + \omega)}{\sin \theta} \ldots (5)$$

Ces formules se simplifient lorsque $\theta = 90°$ et deviennent

$$x = h + r\cos(\varphi + \omega) \text{ et } y = k + r\sin(\varphi + \omega) \ldots (6)$$

Si outre $\theta = 90°$, la droite invariable est parallèle à l'axe des x, ce qui suppose $\varphi = 0$, on aura

$$x = h + r\cos\omega \text{ et } y = k + r\sin\omega \ldots (7)$$

Suivant que le pôle est sur l'axe des x, ou sur l'axe des y, ou à l'origine, on a $k = 0$, ou $h = 0$, ou à la fois $h = 0$ et $k = 0$, dans les trois systèmes de formules précédentes. Les deux derniers sont d'un usage plus fréquent que le premier.

Si donc on substitue, dans l'équation d'une ligne entre les coordonnées ordinaires x et y, l'un des trois systèmes de valeurs que l'on vient de calculer, on aura l'équation de cette ligne rapportée aux coordonnées polaires r et ω. C'est ainsi que pour la droite $y = ax + b$, l'équation polaire, déduite des formules (7), est

$$r = \frac{k - ah - b}{a\cos\omega - \sin\omega} \cdots (8)$$

Supposons le rayon vecteur r perpendiculaire à la droite $y = ax + b$, et soit α l'angle de cette droite avec l'axe des x; on aura $a = \tang \alpha$ et $\omega = 90° + \alpha$; d'où

$$\sin\omega = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} \text{ et } \cos\omega = -\sin\alpha = -\frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

D'après ces valeurs, la formule (8) donne, pour la distance r du point (h, k) à la droite $y = ax + b$,

$$r = \frac{k - ah - b}{\sqrt{1 + a^2}},$$

comme au n° 21.

L'angle v des deux droites $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$, étant le même que celui de leurs parallèles menées par l'origine; si on prend sur la parallèle $y = a'x$, un point (h, k) à la distance 1 de l'origine, que de ce point on mène la perpendiculaire s sur l'autre parallèle $y = ax$; il est clair que s sera le sinus de l'angle v et en même temps la distance du point (h, k) à la droite $y = ax$; on aura donc à la fois

$$s = \frac{k - ah}{\sqrt{1 + a^2}}, \quad h^2 + k^2 = 1 \quad \text{et} \quad k = a'h;$$

d'où l'on tire, comme au n° 17,

$$s = \frac{a' - a}{\sqrt{(1 + a^2)(1 + a'^2)}}.$$

On voit que les équations polaires peuvent conduire aux propriétés des lignes, plus simplement que les coordonnées ordinaires. C'est ainsi que l'équation polaire du cercle fournit immédiatement les propriétés des droites qui rencontrent la circonférence, en se coupant au pôle (propriétés démontrées au n° 34). De même le pôle étant au centre, l'équation polaire de l'hyperbole conduit sur-le-champ aux diamètres et aux asymptotes (114 et 115).

Voici quatre théorèmes, qui se démontrent d'une manière analogue à ceux du n° 95, page 51. (Voyez tome XVI des Annales de mathématiques, page 373.)

I. Dans tout parallélogramme circonscrit à une ellipse, les diagonales se coupent au centre et suivent les directions de deux diamètres conjugués.

II. L'ellipse est toujours partagée en quatre portions équivalentes, par un système de diamètres conjugués.

III. Le lieu des sommets de tous les parallélogrammes *conjugués* circonscrits à l'ellipse, est une autre ellipse concentrique et semblable à la première, et semblablement située.

IV. Si deux ellipses tracées sur un même plan, sont à la fois concentriques, semblables et semblablement situées sur ce plan, toute corde de la plus grande, tangente à la plus petite, sera divisée en deux parties égales par le point de contact.

Il résulte aussi du théorème I, que le lieu des sommets de tous les rectangles circonscrits à une même ellipse, est une circonférence de même centre que cette ellipse (ce qui est un cas particulier du n° 193).

Enfin, on peut démontrer, 1° que de tous les quadrilatères inscrits dans l'ellipse et ayant une diagonale dirigée suivant un diamètre, celui de plus grand périmètre, est un parallélogramme, dont la seconde diagonale est le conjugué du diamètre proposé, le périmètre maximum ayant d'ailleurs sa plus grande valeur pour le losange;

2° Que de tous les quadrilatères circonscrits à l'ellipse et ayant une diagonale dirigée suivant un diamètre, celui de plus grand périmètre, est un parallélogramme, dont la seconde diagonale est dirigée suivant le conjugué du diamètre proposé, le périmètre maximum étant d'ailleurs le plus grand possible pour le rectangle circonscrit.