ARITHMÉTIQUE,

A L'USAGE

DES ÉCOLES PRIMAIRES,

PAR J. N. NOËL,

PROFESSEUR DES SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES,
PRINCIPAL DE L'ATHÉNÉE DE LUXEMBOURG, ETC.

Servais, Sergent fut.

LUXEMBOURG,

DE L'IMPRIMERIE DE J. LAMORT, PLACE D'ARMES.

1825.

Les nombres mis entre parenthèses, indiquent l'article sur lequel s'appuie celui dont on s'occupe; et il faut relire le premier, si l'on ne se rappelle pas le rapport qu'il peut avoir avec ce que contient le second.

Les exemplaires voulus par la loi ont été déposés.

ARITHMÉTIQUE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1. On appelle *quantité* tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution. Pour avoir une idée exacte de la *grandeur* d'une quantité, il est nécessaire de la *mesurer*; ce qui se fait en cherchant combien de fois elle contient une autre quantité déterminée de même espèce, qu'on appelle *unité*. De sorte que l'unité est une quantité constante et bien connue, prise d'abord à volonté, et à laquelle on compare toutes les quantités de même nature. Par exemple, si une distance vaut *vingt aunes*, l'aune est l'unité; c'est la quantité avec laquelle on a mesuré la distance proposée.

Il est clair qu'on ne saurait comparer entre elles que des quantités de même espèce; car il serait absurde, par exemple, de vouloir chercher combien de fois une *année* contient un *florin*, ou de combien elle le surpasse.

2. On appelle *nombre*, un assemblage d'unités ou de parties d'unités dont une quantité est composée. Plusieurs choses pareilles forment un nombre : une de ces choses est l'unité ou le terme de comparaison. Rien ne limite la grandeur des nombres, puisqu'on peut toujours y ajouter une ou plusieurs unités. Une collection de choses dissemblables n'est pas un nombre; car on ne saurait comparer à une même unité des objets d'une nature différente.

3. Le nombre *entier* est la réunion de plusieurs unités égales, comme *huit jours*; le nombre *fractionnaire* est un assemblage d'unités entières et de parties d'unité, comme *sept aunes et quatre neuvièmes d'aune*; enfin, la fraction est une ou plusieurs des parties qu'on obtient

en divisant l'unité en portions égales, comme *sept douzièmes de florin.*

4. Les nombres fractionnaires et les fractions viennent de ce que, pour mesurer une quantité, qui ne contient pas exactement l'unité, on divise cette unité en portions égales, dont le nombre soit tel, que chacune soit contenue sans reste, ou avec un reste négligeable, dans la quantité proposée. Cette portion est alors une nouvelle unité, appelée *unité fractionnaire*; et l'ensemble des unités fractionnaires qui composent la quantité mesurée, est une *fraction.*

Suivant que l'unité est divisée en deux, trois, quatre, cinq, six, sept, etc. parties égales, ces parties sont des unités fractionnaires appelées *demies*, *tiers*, *quarts*, *cinquièmes*, *sixièmes*, *septièmes*, etc. D'où l'on voit que l'unité *principale* vaut deux demies, trois tiers, quatre quarts, cinq cinquièmes, six sixièmes, sept septièmes, etc. Ainsi, neuf fois la neuvième partie d'une chose, forment cette chose; et la neuvième partie, ou simplement *le neuvième*, est 9 fois plus petit que l'entier.

5. Un nombre est *concret* ou *déterminé*, lorsqu'on l'énonce en désignant l'espèce, comme *quinze hommes*; il est *abstrait* ou *indéterminé*, quand on l'énonce sans désigner l'espèce, comme *douze*, *neuf fois*, etc.

6. L'*Arithmétique* est la science des nombres; son but est de donner des moyens faciles, tant pour énoncer et écrire les nombres, que pour les composer et les décomposer, ce qu'on appelle *calculer*.

De la Numération.

7. La *numération* est l'art de former, de nommer et d'écrire tous les nombres possibles.

8. Pour former les nombres entiers, on part de l'unité ou de *un*; l'unité ajoutée à elle-même, donne un nombre nommé *deux*; celui-ci augmenté d'un, compose le

nombre *trois*; et en ajoutant successivement l'unité à chaque nombre obtenu, on forme les nombres *quatre*, *cinq*, *six*, *sept*, *huit*, *neuf*. Celui-ci augmenté d'un, donne le nombre *dix*; la collection de dix unités forme un nouvel *ordre* d'unités nommé *dizaines*; et de même qu'on a compté depuis une unité jusqu'à neuf unités, on compte aussi depuis une dizaine jusqu'à neuf dizaines; mais au lieu des mots, une dizaine, deux dizaines, trois dizaines, quatre dizaines, cinq dizaines, six dizaines, sept dizaines, huit dizaines, neuf dizaines, on dit: *dix*, *vingt*, *trente*, *quarante*, *cinquante*, *soixante*, *soixante-dix* ou *septante*, *quatre-vingt* ou *octante*, *quatre-vingt-dix* ou *nonante*.

Pour exprimer les nombres intermédiaires, on énonce successivement les dizaines et les unités, à l'exception des six premiers nombres compris entre dix et vingt; car au lieu des mots, *dix-un*, *dix-deux*, *dix-trois*, *dix-quatre*, *dix-cinq*, *dix-six*, on dit: *onze*, *douze*, *treize*, *quatorze*, *quinze*, *seize*.

La collection de neuf dizaines et de neuf unités forme le nombre *nonante-neuf*. Celui-ci augmenté d'un, donne le nombre *cent*, composé de neuf dizaines et dix unités, ou de neuf dizaines et une dizaine, ou enfin de dix dizaines. La réunion de dix dizaines, forme un nouvel ordre d'unités appelé *centaine*. On compte depuis une centaine jusqu'à neuf centaines; et pour désigner les nombres intermédiaires, on ajoute aux centaines les noms des nonante-neuf premiers nombres. Par exemple, quatre centaines, trois dizaines et sept unités forment le nombre *quatre cent trente-sept*.

On parvient ainsi au nombre *neuf cent nonante-neuf*. Celui-ci augmenté d'un, donne dix centaines, qui forment une nouvelle unité principale appelée *mille*; et de même qu'on a compté depuis une unité jusqu'à neuf cent nonante neuf unités, on compte aussi depuis un *mille* jusqu'à neuf cent nonante-neuf *mille*. Ajoutant un, on aura le nombre dix centaines de mille, ou mille mille, qu'on appelle *million*. De même, mille millions forment un *billion*; mille billions, un *trillion*; et ainsi de suite, pour les *quadrillions*, les *quintillions*, etc.

On voit que les unités des différens ordres deviennent de dix en dix fois plus grandes; et que les *unités*, les *milles*, les *millions*, les *billions*, etc. forment des *tranches* ayant chacune ses unités, ses dizaines et ses centaines. Par exemple, *sept cent vingt-quatre mille* est une tranche contenant sept centaines de mille, deux dizaines de mille et quatre unités de mille.

9. Pour écrire en abrégé tous les nombres possibles, on fait usage de caractères particuliers nommés *chiffres*, qui sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; ils signifient respectivement *un*, *deux*, *trois*, *quatre*, *cinq*, *six*, *sept*, *huit*, *neuf*.

On est convenu d'écrire en chiffres tout nombre proposé, en plaçant à la suite les uns des autres les chiffres qui indiquent le nombre des unités de chaque ordre, de manière que le chiffre des unités simples ou du 1^er^ ordre, occupe le 1^er^ rang à droite; celui des dizaines ou du 2^e^ ordre, le 2^e^ rang; celui des centaines ou du 3^e^ ordre, le 3^e^ rang; et ainsi de suite. Par exemple, le nombre *neuf mille cinq cent soixante-sept* s'écrit 9567.

Le tableau suivant est une application de la convention que l'on vient d'indiquer, et montre comment on doit placer les chiffres des différens ordres d'unités pour en former un seul nombre :

9	8	3	2	4	6	5	9	4	3	6	8	7	2	3	9	8	3	5	4
Dizaines-de-quintillions	Quintillions	Centaines-de-quadrillions	Dizaines-de-quadrillions	Quadrillions	Centaines-de-trillions	Dizaines-de-trillions	Trillions	Centaines-de-billions	Dizaines-de-billions	Billions ou MILLIARDS	Centaines-de-millions	Dizaines-de-millions	Millions	Centaines-de-mille	Dizaines-de-mille	Mille	Centaines	Dizaines	Unités

Lorsque dans le nombre proposé, il manque des unités d'un ordre inférieur, on les remplace par le chiffre auxiliaire o, nommé *zéro*, lequel n'a aucune valeur numérique par lui-même, et sert seulement à conserver aux autres chiffres, leurs rangs et leurs *valeurs relatives*. Ainsi le nombre *neuf cent sept*, composé de neuf centaines et sept unités, sans dizaines, s'écrit 907.

10. En général, *pour écrire en chiffres, un nombre énoncé en langage ordinaire, on place successivement à côté les uns des autres (en commençant par la gauche), les centaines, les dizaines et les unités de chaque tranche, et on remplace par des zéros, les unités, dizaines ou centaines qui pourraient manquer.* Par exemple, pour écrire le nombre, *soixante billions cent quatre mille vingt unités*, on observe que les soixante billions forment une tranche, où manquent les unités; que la tranche des millions est omise et doit être remplacée par trois zéros; enfin qu'il manque les dizaines dans la tranche des mille, les centaines et les unités dans la tranche des unités simples. D'après cela, on voit que le nombre proposé doit s'écrire ainsi 60,000,104,020.

On verra de même que le nombre, *vingt millions trois mille cent dix*, est représenté par 20,003,110.

Voici quelques nombres à écrire en chiffres : 1° Cinq millions vingt mille quatre; 2° Soixante mille cent; 3° Quarante billions sept mille dix; 4° Cent un millions dix-neuf; 5° Trente trillions, quatre-vingt millions, septante; 6° Douze quadrillions, vingt-deux billions, deux cent trente millions, cent quinze mille, cent douze; 7° Deux quintillions, septante millions, dix-huit; 8° Huit sextillions, douze trillions, deux cent deux mille, onze.

11. Réciproquement, *pour énoncer en langage ordinaire, un nombre écrit en chiffres, il faut le partager en tranches de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche; puis en partant de la gauche, on*

énonce chaque tranche comme si elle était seule, et on prononce après le nom qui lui est propre.

Par ex., pour énoncer le nombre 4781023451004, on observe que les trois premiers chiffres à droite expriment des *unités simples*; les trois suivans, des *mille*; les trois suivans, des *millions*; les trois suivans, des *billions*; et le suivant, des *trillions* : et comme on doit réunir entre elles les unités de même nom, il faudra réunir les chiffres de trois en trois, c'est-à-dire, partager par des virgules, le nombre proposé en tranches de trois chiffres; ce nombre deviendra donc 4,781,023,451,004; et signifie par conséquent *quatre trillions, sept cent quatre-vingt-un billions, vingt-trois millions, quatre cent cinquante-un mille, quatre unités simples.*

Il suffit, comme on voit, de bien se rappeler l'ordre dans lequel se suivent les noms des tranches *unités, mille, millions, billions, trillions, quadrillions, quintillions, sextillions, septillions*, etc. Nous laissons à énoncer en français les nombres que voici : 2407117; 40001111120074 et 389420070074560001.

12. Le *système* de numération que l'on vient d'exposer, est appelé *décimal*, parce qu'il est basé sur la convention très-simple et très-ingénieuse qu'*un chiffre placé à la gauche d'un autre exprime des unités dix fois plus grandes que celles de ce dernier*. Le nombre *dix*, qui marque combien il y a de chiffres employés, se nomme la base du système.

13. *Pour rendre un nombre* 10, 100, 1000, ..., *fois plus grand, il suffit d'écrire à sa droite* 1, 2, 3, ..., *zéros.* Par exemple, on rendra le nombre 724, cent fois plus grand, en écrivant 2 zéros à sa droite; ce qui donnera 72400. En effet, le nombre exprimait d'abord 724 unités simples, et à présent il exprime 724 centaines; il exprime donc des unités cent fois plus grandes; il est donc lui-même 100 fois plus grand.

Réciproquement, *pour rendre* 10, 100, 1000, ..., *fois plus petit un nombre terminé par des zéros, il suffira de supprimer à sa droite* 1, 2, 3, ..., *zéros.* Ainsi 730 est 1000 fois plus petit que 730000.

14. Nous savons maintenant écrire, d'une manière abrégée, tous les nombres entiers. Quant aux fractions, elles s'écrivent en chiffres au moyen de deux nombres, placés l'un sous l'autre et séparés par un trait ordinairement horizontal : le nombre inférieur, qu'on appelle *dénominateur*, désigne en combien de parties égales l'unité est divisée, et le nombre supérieur, qu'on appelle *numérateur*, indique combien on prend de ces parties égales, pour former la fraction. Ainsi, pour exprimer *quatre septièmes*, on écrit $\frac{4}{7}$: le dénominateur 7 signifie que l'unité est divisée en 7 parties égales, et le numérateur 4 montre que l'on prend 4 de ces parties égales.

Le numérateur et le dénominateur s'appellent aussi les *termes* de la fraction.

D'après cela, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{11}$, etc. signifient respectivement *une demie*, *deux tiers*, *trois quarts*, *quatre cinquièmes*, *six onzièmes*, etc.

Pour représenter le nombre fractionnaire *quatre unités huit neuvièmes*, on écrit $4\frac{8}{9}$. Réciproquement, $7\frac{12}{13}$ signifie *sept unités douze treizièmes.*

On voit que toute fraction est un *nombre entier d'unités fractionnaires*, dont le nom est indiqué par le dénominateur ; et que par conséquent, le calcul des fractions se réduit à celui des nombres entiers concrets. Par exemple, puisque 2 *pommes* plus 3 *pommes* font 5 *pommes*, de même $\frac{2}{7}$ plus $\frac{3}{7}$ font $\frac{5}{7}$; et ainsi des autres.

15. Nous avons vu (5) que *calculer*, c'est composer et décomposer les nombres. Or, on compose les nombres par l'*addition* et la *multiplication* ; et on les décompose par la *soustraction* et la *division.* Plusieurs de ces opérations exigent que les nombres proposés

soient de même espèce, c'est-à-dire, répètent la même unité. Mais comme dans toutes les questions de l'arithmétique, la nature des unités du résultat est connue d'avance, il ne s'agit toujours que d'en déterminer le *nombre*. On pourra donc toujours opérer comme si les nombres proposés étaient abstraits; ce qui est plus simple.

De l'Addition des nombres entiers.

16. L'*addition* est une opération par laquelle, prenant toutes les unités et les parties d'unité de plusieurs nombres de même espèce, on en fait un seul nombre, appelé *somme* ou *total*.

On ne peut ajouter entre elles que des quantités de même espèce : il serait absurde, par exemple, de vouloir ajouter 2 *aunes* avec 3 *jours*; le résultat serait bien 5 unités; mais ce ne serait ni 5 *aunes*, ni 5 *jours*; ce ne serait toujours que 2 aunes et 3 jours, comme auparavant, et il n'y aurait pas eu d'opération (*).

17. On indique l'addition, au moyen du signe $+$, qui veut dire *plus*, ou *augmenté de*. Ainsi, $7+4$, signifie 7 *plus* 4, ou 7 *augmenté de* 4, ou encore 7 *ajouté à* 4.

18. Pour ajouter un nombre, il suffit d'ajouter successivement chacune de ses unités. De cette manière, on sait bientôt de mémoire additionner un chiffre à un nombre quelconque. Et si l'on observe qu'*on ajoute à un tout, en ajoutant à l'une de ses parties*, et que *pour ajouter un tout, il faut ajouter chacune de ses*

(*) Cependant on doit observer que des êtres dissemblables peuvent être réunis et exprimés par un seul nombre; mais c'est en faisant abstraction des qualités qui les distinguent pour ne considérer que la propriété qui leur est commune. Ainsi, en voyant 1 pomme, 2 poires et 4 prunes, on dira : voilà 7 fruits; et l'opération n'aura porté que sur le mot fruit.

parties, on verra que pour avoir la somme de plusieurs nombres, il suffira de prendre la somme de leurs unités simples, celles de leurs dizaines, de leurs centaines, etc.; puis de réunir entre elles toutes ces sommes *partielles*. Or, toutes ces opérations reviennent à ajouter un chiffre à un nombre quelconque; ce qu'on sait faire de mémoire, et par conséquent très-vite.

19. Par exemple, pour ajouter entre eux les cinq nombres 4789, 347, 9876, 5684 et 9785; on dispose et on effectue l'opération comme il suit :

On fait d'abord la somme des unités simples, en disant : 5 et 4 font 9, et 6 font 15, et 7 font 22, et 9 font 31 : en 31 unités simples, il y a 1 unité simple, qu'on écrit au-dessous, et 3 dizaiues, qu'on retient pour les ajouter à la colonne des dizaines, parce qu'on doit ajouter entre elles les unités de même espèce. 3 dizaines de la retenue et 8 font 11, et 8 font 19, et 7 font 26, et 4 font 30, et 8 font 38 : en 38 dizaines, il y a 8 dizaines, qu'on écrit au-dessous, et 3 centaines, qu'on retient pour les ajouter à la colonne des centaines. 3 et 7 font 10, et 6 font 16, et 8 font 24, et 3 font 27, et 7 font 34 : en 34 centaines, il y a 4 centaines, qu'on écrit au-dessous, et 3 mille, qu'on retient pour les ajouter aux mille. 3 et 9 font 12, et 5 font 17, et 9 font 26 et 4 font 30 mille, qu'on écrit au-dessous.

$$\begin{array}{r} 4789 \\ 347 \\ 9876 \\ 5684 \\ 9785 \\ \hline 30481 \end{array}$$

Je dis que 30481 est la somme des cinq nombres proposés. En effet, pour former ce résultat de l'opération, on a pris toutes les unités, les dizaines, les centaines, les mille, et en général, toutes les parties des nombres proposés; donc on a pris tous ces nombres eux-mêmes; donc on a leur valeur totale ou leur somme.

On voit par cet exemple que, *pour avoir la somme de plusieurs nombres entiers, il faut les écrire les uns sous les autres, de manière que les unités de même* *ordre soient dans une même colonne verticale; et après avoir souligné le tout, faire d'abord la somme des unités simples, puis celle des dizaines, celle des centaines, etc., ayant soin d'écrire les unités de chaque somme partielle sous la colonne qui l'a fournie, et d'en retenir les dizaines pour les ajouter, comme unités, à la colonne suivante à gauche.* C'est ainsi qu'on trouve 23037 pour la somme des nombres 6903, 7854, 953 et 7327.

Remarque. La règle d'écrire les unités de même ordre dans une même colonne verticale, n'est pas de nécessité ; mais elle facilite les calculs. Une autre disposition des nombres proposés conduirait toujours à la même somme ; seulement alors il faudrait rassembler des yeux les unités de même ordre ; ce qui fatiguerait davantage et exposerait plus à se tromper.

De la Soustraction des nombres entiers.

20. La *soustraction* est une opération qui fait connaître la quantité dont un nombre en surpasse un autre de même espèce. Le résultat de cette opération s'appelle *reste*, *excès* ou *différence*.

21. Le plus petit nombre devant être ôté du plus grand, doit nécessairement se trouver dans ce plus grand, et en faire *partie* ; il doit donc être de *même espèce*. Le *reste* est l'autre *partie*.

De sorte que la soustraction est aussi une opération par laquelle, connaissant un *tout* et l'une de ses deux parties, on trouve l'autre, appelée *reste*, *excès* ou *différence*.

22. On indique la soustraction au moyen du signe —, qui signifie *moins* ou *diminué de*. Ainsi, 7 — 4, veut dire 7 *moins* 4, ou 7 *diminué de* 4, ou encore, 4 *retranché de* 7.

23. On soustraira toujours un nombre d'un autre,

en en soustrayant chacune de ses unités. Mais si le nombre à retrancher a plus d'un chiffre, ce procédé devient très-long. On y supplée alors en observant qu'*on soustrait d'un tout, en soustrayant de l'une de ses parties*, et que *pour soustraire un tout, il suffit de soustraire chacune de ses parties*. En effet, à l'aide de ces deux principes, une soustraction quelconque est ramenée à plusieurs soustractions *partielles*, qu'on sait toujours effectuer de mémoire, puisque chacune consiste à ôter un chiffre d'un nombre moindre que 19.

24. Par exemple, pour soustraire 4721 de 8964, on dispose et l'on effectue l'opération comme il suit :

$$\begin{array}{r} 8964 \\ 4721 \\ \hline 4243 \end{array}$$

1 unité ôtée de 4 unités, reste 3 unités, qu'on écrit au-dessous; 2 dizaines ôtées de 6 dizaines, reste 4 dizaines, qu'on écrit au-dessous; 7 ôté de 9, reste 2, qu'on écrit; 4 de 8, reste 4. Ainsi 4243 est la différence demandée.

En effet, on a soustrait successivement des parties du plus grand nombre, et par conséquent de ce nombre, les unités, les dizaines, les centaines, et en général, toutes les parties du plus petit; donc on en a soustrait ce plus petit lui-même; donc le résultat est la vraie différence qui existe entre ces deux nombres.

Cet exemple montre que, *pour faire la soustraction des nombres entiers, il faut écrire le plus petit nombre sous le plus grand, de manière que les unités de même ordre soient alignées; et après avoir souligné le tout, soustraire chaque chiffre du plus petit nombre du chiffre correspondant dans le plus grand, en allant de droite à gauche, et écrire le reste au-dessous, ou zéro lorsqu'il ne reste rien.*

25. Cette règle n'est plus immédiatement applicable, lorsque le chiffre à soustraire surpasse celui dont on doit le retrancher. Dans ce cas, l'opération repose sur le principe que voici : *Si, à deux nombres inégaux,*

on ajoute ou l'on retranche une même quantité, ***leur différence restera toujours la même.***

Par exemple, la différence entre 13 et 7, est 6. Si aux deux nombres 13 et 7, on ajoute un même nombre 5, la différence entre les deux sommes 18 et 12, sera encore 6, comme entre les 2 nombres proposés 13 et 7.

En général, la différence entre deux nombres est la quantité qui se trouve dans l'un sans être dans l'autre. Or, en ajoutant ou en retranchant une même quantité aux deux nombres proposés, la quantité qui se trouvait dans l'un sans être dans l'autre, reste évidemment la même; donc aussi leur différence reste la même.

26. D'après cela, qu'on ait à soustraire 3724 de 7016; on disposera et l'on effectuera l'opération comme il suit:

$$\begin{array}{r} 7016 \\ \underline{3724} \\ 3292 \end{array}$$

On dira : 4 ôté de 6, reste 2, qu'on écrit sous les unités; 2 ôté de 1, cela ne se peut : pour rendre possible cette soustraction partielle, on ajoute 10 à 1, et l'on dit, 2 de 11, reste 9, qu'on écrit sous les dizaines. Mais en ajoutant ainsi 10 au chiffre 1, qui est dans le rang des dizaines, on ajoute réellement 10 dizaines, ou 1 centaine, au plus grand nombre. Donc, pour que la différence totale ne soit pas changée, il faut aussi ajouter 1 centaine au plus petit nombre (25); et c'est ce qu'on fait en ajoutant 1 au chiffre inférieur suivant 7. 1 et 7 font 8; 8 de 10, reste 2. Mais en ajoutant ainsi 10 au chiffre 0, qui est dans le rang des centaines, on ajoute réellement 10 centaines, ou 1 mille, au plus grand nombre. Donc, pour que la différence totale ne soit pas changée, il faut aussi ajouter 1 mille au plus petit nombre. 1 et 3 font 4; 4 de 7, reste 3.

Je dis que 3292 est la vraie différence des deux nombres proposés. En effet, on a soustrait du plus grand nombre, toutes les parties du plus petit; on en a donc soustrait le plus petit lui-même. D'un autre côté, comme la centaine et le mille ajoutés à chacune des 2 nombres proposés, n'ont pas changé la différence de ces deux nombres, il s'ensuit que 3292 est cette différence (*).

Résumant les calculs que l'on vient de faire, on verra que, *si le chiffre inférieur à soustraire est plus grand que son correspondant supérieur, il faudra ajouter à celui-ci dix unités, pour rendre la soustraction partielle possible; mais pour compenser cette addition, on devra ajouter 1 au chiffre inférieur suivant.*

C'est ainsi que 700041 — 234711 donne 465330.

De la preuve de l'Addition et de la Soustraction.

27. La *preuve* d'une opération est une seconde opération que l'on fait pour s'assurer de l'exactitude du résultat obtenu par la première.

Il faut bien distinguer la *preuve* de la *démonstration*; car la démonstration fait voir l'exactitude d'un principe général, tandis que la preuve ne vérifie qu'une opération particulière.

D'ailleurs, les erreurs de calcul pouvant quelquefois se compenser dans l'opération proposée et dans celle qui en fait la preuve, cette preuve ne peut être regardée que comme une probabilité plus ou moins forte;

(*) Voici un autre procédé, qui n'a besoin d'aucune *démonstration*. Qu'il s'agisse toujours de soustraire 3724 de 7016 : on disposera et l'on effectuera l'opération comme il suit :

$$\begin{array}{r} 69 \\ 7016 \\ \underline{3724} \\ 3292 \end{array}$$

D'abord, 4 de 6, reste 2, qu'on écrit; 2 de 1, cela ne se peut. Pour rendre possible cette soustraction partielle, on prend 1 mille sur le chiffre 7 des mille, et il n'en reste plus que 6, qu'on écrit au-dessus. Ce mille valant 10 centaines, on en laisse 9 sur le zéro des centaines, et il en reste encore 1 centaine ou 10 dizaines, qu'on ajoute au chiffre 1 des dizaines; cela donne 11 dizaines. 2 de 11, reste 9, qu'on écrit. 7 de 9, reste 2, et 3 de 6, reste 3. De sorte que 3292 est réellement la différence des deux nombres proposés.

mais qui, rigoureusement parlant, ne peut jamais donner une certitude absolue, hors certains cas extrêmement simples.

28. *Pour vérifier si une addition a été bien faite, il faut la recommencer par la gauche, en additionnant en sens opposé; soustraire la valeur de la première colonne à gauche, de la partie qui lui correspond dans la somme totale, et écrire le reste (qui devra être la dernière retenue faite) à la gauche du chiffre qui correspond à la seconde colonne; cela donnera un nombre dont on retranchera la valeur de cette seconde colonne; et ainsi de suite, jusqu'à la dernière colonne à droite, qui ne devra laisser aucun reste, si l'opération a été bien faite.*

Par exemple, qu'on effectue l'addition qui suit:

Si l'on veut vérifier cette addition, on la recommencera par la gauche, ayant soin d'additionner de haut en bas, si l'on a d'abord opéré de bas en haut : on aura 36 pour la valeur de la première colonne; et soustrayant 36 centaines de la partie correspondante 40 centaines, il reste 4, qu'on écrit sous 0, à la gauche du chiffre 4 qui correspond à la seconde colonne. Comme le reste 4 est précisément la retenue ajoutée à la première colonne à gauche, on en conclue que, jusque-là, la première addition est bien faite. La valeur de la seconde colonne est 41, qui, soustraite de la partie correspondante 44, donne pour reste 3, c'est-à-dire, les trois dizaines de retenue. La somme 39 de la dernière colonne à droite, étant retranchée de la partie correspondante 39, laisse 0 pour reste. Donc la première addition a été bien faite.

$$\begin{array}{r} 789 \\ 479 \\ 653 \\ 489 \\ 743 \\ \underline{896} \\ 4049 \\ 430 \end{array}$$

En effet, par la première addition, on a fait entrer, dans 4049, la somme des unités simples, celle des dizaines et celle des centaines. Par la seconde opération, on soustrait de 4049, la somme des centaines, celle des dizaines et celle des unités. On en ôte donc tout ce qu'on y avait ajouté; il ne doit donc rien rester; car si d'un tout, on ôte toutes ses parties, il ne restera rien.

29. *Pour faire la preuve de la soustraction, il faut ajouter le reste au plus petit nombre; et si l'opération a été bien faite, on devra trouver le plus grand nombre pour somme.*

En effet, le reste et le plus petit nombre sont les deux parties du plus grand. Donc, en ajoutant le reste au plus petit nombre, on devra avoir le plus grand.

30. Les usages de l'addition et de la soustraction, seront toujours faciles à reconnaître, si l'on se rappelle bien les définitions de ces deux opérations et si l'on observe que l'une peut servir de preuve à l'autre.

Voici quelques-uns de ces usages :

Un marchand ayant vendu 7004 aunes de toile, il lui en reste 972 aunes de moins qu'il n'en a vendu; combien avait-il de toile? (Réponse : 13036 aunes).

Trouver combien trois personnes ont d'argent ensemble, sachant que sur 1000 florins que possédait la 1^re^, elle a dépensé 548^f^; que la 2^e^ a 728^f^ de plus que la 1^re^ et la 3^e^, 896^f^ de moins que la 2^e^. (R. 1916^f^.)

Quelqu'un qui devait 1724 florins à un marchand, prend chez lui pour 3827^f^ de marchandises et lui donne en paiement un billet de 4270^f^. Combien le marchand devra-t-il rendre? (R. 2167^f^.)

479 florins, 254, 879, 48 et 279 sont les prix respectifs de cinq pièces de vin, contenant respectivement 972 litrons, 358, 2789, 98 et 679. Le marchand ayant vendu de ces pièces respectives, 475^l^, 189, 974, 56 et 79, a reçu 245^f^, 176, 587, 37 et 96. Il demande combien il lui reste de vin et à combien ce vin restant lui revient. (R. 3123 litrons, à 798^f^.)

Un payeur, qui a 9876 florins en caisse, en reçoit

758. Dans 12 jours il recevra encore 978^f; 27 jours après, 8275^f, et 45 jours plus tard, 6824^f. Et comme 67 jours après ce dernier versement, il devra donner à six personnes, respectivement 275^f, 457, 872, 364, 2836 et 936, on demande combien il restera dans sa caisse et combien il se sera écoulé de jours depuis le moment de la première somme reçue jusqu'à celui où il a donné aux 6 personnes? (R. 20971^f et 151 jours.)

De la Multiplication des nombres entiers.

31. La *multiplication* est une opération par laquelle on prend ou répète un nombre, appelé *multiplicande*, autant de fois qu'il y a d'unités dans un autre nombre, nommé *multiplicateur*. Le résultat de cette opération s'appelle *produit*; le multiplicande et le multiplicateur sont les *facteurs* du produit.

Ainsi l'opération par laquelle on prend 5 fois le nombre 7 est une multiplication; 7 est le multiplicande, 5 le multiplicateur, et 5 fois 7 ou 35 le produit (*).

32. Il suit de la définition de la multiplication, que

1° *Le produit est toujours de même espèce que le multiplicande*, puisqu'il n'est qu'un certain nombre de fois ce multiplicande;

2° *Le multiplicande peut être un nombre quelconque*, puisqu'on peut toujours prendre une *chose* autant de fois qu'on le veut;

3° *Le multiplicateur désigne toujours un nombre de fois, et jamais un nombre concret;*

4° *Le produit est un tout composé d'autant de parties égales au multiplicande qu'il y a d'unités au multiplicateur;*

(*) Prendre un nombre deux fois, c'est le *doubler*; trois fois, c'est le *tripler*; quatre fois, c'est le *quadrupler*; et en général, prendre un nombre plusieurs fois, c'est le *multiplier*.

5° *Si le multiplicande est zéro, le produit sera aussi zéro ;* car zéro pris autant de fois qu'on voudra, ne donnera jamais que zéro ;

6° Enfin, *si le multiplicateur est zéro, le produit sera aussi zéro ;* car un multiplicateur nul indique qu'on ne doit pas prendre le multiplicande, ou qu'il n'y a pas de multiplication ; il n'y a donc pas non plus de produit ; le produit est donc nul.

33. On indique la multiplication à l'aide du signe $\times$, qui veut dire *multiplié par*. Ainsi, 5×3 signifie 5 *multiplié par* 3, ou 3 *multipliant* 5, ou encore 3 *fois* 5. Le signe $=$ veut dire *égal* ou *est égal à*. Les signes $>$ et $<$, signifient *plus grand que* et *plus petit que*.

34. Pour prendre un tout, il faut prendre toutes ses parties ; donc, pour prendre un tout une fois, il faut prendre chacune de ses parties une fois ; pour prendre un tout deux fois, il faut prendre chacune de ses parties deux fois, etc. Donc, en général, *pour prendre ou pour répéter un tout un certain nombre de fois, il faut prendre ou répéter chacune de ses parties ce même nombre de fois.* Par exemple, pour prendre 7 fois le tout $3+4$, on prendra 7 fois chacune des parties 3 et 4 ; ce qui donnera 7 fois 3 + 7 fois 4, ou $21 + 28$.

35. Rendre un tout 6 fois plus grand, par exemple, c'est répéter ce tout 6 fois ; c'est donc répéter chacune de ses parties 6 fois ; c'est par conséquent rendre chacune de ses parties 6 fois plus grande. Donc, *pour rendre un tout un certain nombre de fois plus grand, il suffit de rendre chacune de ses parties ce même nombre de fois plus grande.*

36. *Un produit de deux facteurs ne change pas de valeur, dans quelqu'ordre qu'on multiplie.*

Par exemple, je dis que $87 \times 41 = 41 \times 87$.

En effet, 87×41 montre qu'il faut prendre 87, 41 fois ; ce qui se fait en prenant chacune des unités de 87, 41 fois (34). Or, la première unité de 87, prise 41 fois, donne 41 fois 1 ou 41 ; la seconde donne aussi 41, de même que la troisième, la quatrième, et enfin la 87^{me}. Donc on aura en tout, 87 fois 41 ou 41×87. Donc réellement, $87 \times 41 = 41 \times 87$.

37. La multiplication n'est qu'une addition dont les nombres sont égaux. Par exemple, si l'on veut multiplier 7 par 3, c'est-à-dire, si l'on veut répéter 7, 3 fois, il suffira d'écrire 7, 3 fois, et de faire l'addition. En effet, la somme 21 étant $7 + 7 + 7$, sera 3 fois 7, ou 7 multiplié par 3.

Cette manière de chercher le produit par l'addition, serait très-longue, si le multiplicateur avait plus d'un chiffre : aussi ne l'emploie-t-on pas ; on fait dépendre toute multiplication de celle d'un chiffre par un chiffre, qu'on peut toujours effectuer par l'addition. Et si l'on veut être en état de faire très-vîte une multiplication quelconque, il est nécessaire de retenir d'abord de mémoire tous les produits d'un chiffre par un chiffre, contenus dans la table suivante :

TABLE DE MULTIPLICATION.

2 fois 2 font	4	3 fois 8 font	24	6 fois 6 font	36
3	6	9	27	7	42
4	8	4 fois 4 font	16	8	48
5	10	5	20	9	54
6	12	6	24	7 fois 7 font	49
7	14	7	28	8	56
8	16	8	32	9	63
9	18	9	36	8 fois 8 font	64
3 fois 3 font	9	5 fois 5 font	25	9	72
4	12	6	30	9 fois 9 font	81
5	15	7	35		
6	18	8	40		
7	21	9	45		

On pourrait, pour plus d'utilité, former la table de tous les produits des 12 premiers nombres entiers, multipliés deux à deux. Nous laissons cette table à construire aux élèves.

38. Connaissant de mémoire tous les produits d'un chiffre par un chiffre, rien n'est plus aisé que de multiplier plusieurs chiffres par un seul et plusieurs par plusieurs. Par exemple, qu'on ait à trouver le produit de 9756 par 8 : on disposera l'opération comme il suit :

$$\begin{array}{r} 9756 \\ \underline{8} \\ 78048 \end{array}$$

Le but de cette multiplication est de répéter le multiplicande 8 fois ; ce qui se fait en répétant toutes ses parties 8 fois (34). Or, 8 fois 6 unités font 48 unités. En 48 unités, il y a 8 unités, qu'on écrit au-dessous, et 4 dizaines, qu'on retient pour les ajouter au produit des dizaines. 8 fois 5 font 40, et 4 de retenue, font 44. En 44 dizaines, il y a 4 dizaines, qu'on écrit au-dessous, et 4 centaines, qu'on retient pour les ajouter au produit des centaines. 8 fois 7 font 56, et 4 de retenue, font 60. En 60 centaines, il y a 0 centaine, qu'on écrit au-dessous, et 6 mille, qu'on retient pour les ajouter au produit des mille. 8 fois 9 font 72, et 6 de retenue, font 78 mille, qu'on écrit au-dessous.

Je dis que 78048 est le vrai produit de 9756 par 8. En effet, on a répété 8 fois les 6 unités, 8 fois les 5 dizaines, 8 fois les 7 centaines, et en général, 8 fois toutes les parties du multiplicande; donc le multiplicande entier a été répété 8 fois (34); donc il a été multiplié par 8.

Il suit de cet exemple, que *pour multiplier un nombre composé de plusieurs chiffres par un nombre d'un seul, il faut écrire le multiplicateur sous le multiplicande ; et après avoir souligné le tout, multiplier successivement les unités, les dizaines, les centaines, et en général, tous les chiffres du multiplicande, par le multiplicateur; ayant soin d'écrire les unités de chaque produit partiel dans le rang qui lui est propre, et d'en retenir les dizaines pour les ajouter comme unités, au produit partiel suivant.*

39. Voyons maintenant comment on multiplie l'un par l'autre, deux nombres composés chacun de plusieurs chiffres. Soit proposé de multiplier 7845 par 347 : on disposera l'opération comme il suit :

Multiplicande........................	7845
Multiplicateur........................	347
Produit par 7 unités..................	54915
Produit par 40........................	31380
Produit par 300.......................	23535
Produit par 7 + 40 + 300, ou par 347..	2722215

Le but de cette multiplication est de répéter le multiplicande, 347 fois, ou 7 fois, plus 40 fois, plus 300 fois. Or, pour répéter le multiplicande, 7 fois, on répète toutes ses parties 7 fois (34), et l'on a 54915 (38). Pour répéter le multiplicande, 40 fois, ou 10 fois 4 fois, il faut le répéter d'abord 4 fois, puis le produit, 10 fois (*); ce qui se fait en rendant ce produit 10 fois plus grand, ou en écrivant ses unités dans le rang des dizaines. De même, pour répéter le multiplicande 300 fois, ou 100 fois 3 fois, il faudra le répéter 3 fois, puis le résultat, 100 fois, en écrivant ses unités dans le rang des centaines, c'est-à-dire, dans le rang du chiffre par lequel on multiplie.

Maintenant, le premier produit partiel vaut 7 fois le multiplicande; le second, 10 fois 4 fois, ou 40 fois le multiplicande; le troisième, 100 fois 3 fois ou 300 fois le multiplicande. Donc la somme de ces trois produits partiels se compose de 7 fois, plus 40 fois, plus 300 fois le multiplicande, c'est-à-dire, en tout, de 347 fois le multiplicande : cette somme 2722215 est donc le produit du multiplicande par 347.

On voit, par cet exemple, que *pour multiplier l'un*

(*) Il est évident que 10 fois 4 *fois le multiplicande* font 40 *fois le multiplicande*, comme 10 fois 4 *jours* font 40 *jours*.

par l'autre, deux nombres composés chacun de plusieurs chiffres, il faut écrire le multiplicateur sous le multiplicande, de manière que les unités de même ordre soient alignées; et après avoir souligné le tout, multiplier tout le multiplicande par les unités simples du multiplicateur (38), *puis par les dizaines, par les centaines, par les mille, etc.; ayant soin d'écrire le premier chiffre de chaque produit partiel dans le rang du chiffre par lequel on multiplie : faire ensuite la somme des produits partiels, et cette somme sera le produit total.*

40. Lorsqu'il y a des zéros entre les chiffres significatifs du multiplicateur, il ne faut pas multiplier par ces zéros, parce qu'on n'aurait que des zéros au produit, ce qui alongerait inutilement l'opération : il faut passer sur-le-champ au premier chiffre significatif à gauche, et écrire le premier chiffre du produit partiel, dans le rang du chiffre par lequel on multiplie (39). C'est ainsi qu'on effectuera les multiplications que voici :

$$\begin{array}{r} 40078 \\ 3007 \\ \hline 280546 \\ 120234 \\ \hline 120514546 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 325 \\ 90002 \\ \hline 00650 \\ 2925 \\ \hline 29250650 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 70042 \\ 90006 \\ \hline 420252 \\ 630378 \\ \hline 6304200252 \end{array}$$

41. *Pour multiplier un nombre par l'unité suivie de quelques zéros, il suffit d'écrire à la suite de ce nombre, autant de zéros qu'il y en a à la suite de l'unité.* C'est ainsi que $749 \times 100 = 74900$. En effet, le nombre 74900 exprime 749 centaines, ou 749 fois 100, ou enfin 100 fois 749; il est donc le produit de 749 par 100. De même, $407 \times 10000 = 4070000$.

42. *Lorsqu'il y a des zéros à la suite de l'un ou des deux facteurs proposés, on peut abréger en multipliant sans avoir égard aux zéros, et en écrivant à la suite du produit, autant de zéros qu'il s'en trouve*

à la suite du multiplicande et du multiplicateur. Par exemple, pour trouver le produit de 4700 par 750, on multiplie 47 par 75, et à la suite du produit 3525 on écrit trois zéros ; ce qui donne 3525000 pour le produit demandé.

En effet, le multiplicande 47 exprime des centaines ; donc le produit 3525, qui est de même espèce, doit aussi exprimer des centaines, et doit être suivi de deux zéros ; de sorte que 352500 est le produit de 4700 par 75. Mais ce n'est pas seulement 75 fois qu'on doit répéter 4700 ; c'est 750 fois ou 10 fois 75 fois ; il faut donc encore répéter les 75 fois trouvées, 10 fois ; ce qui se fait en écrivant un zéro à la droite (41), et ce qui donne 3525000. On verra de même que $79006 \times 807000 = 63757842000$ et que $9467000 \times 847600 = 8024229200000$.

$$\begin{array}{r} 4700 \\ \underline{750} \\ 235 \\ \underline{329} \\ 3525000 \end{array}$$

Nous terminerons la multiplication des nombres entiers par l'exposé de quelques principes qu'il est bon de connaître.

43. *Pour rendre un tout un certain nombre de fois plus petit, il suffit de rendre chacune de ses parties le même nombre de fois plus petite.* Ainsi, pour rendre 7 fois plus petit le tout $14 + 35$, on rendra 7 fois plus petite chacune de ses parties 14 et 35, ce qui donnera $2 + 5$.

En effet, si l'on prend 7 fois le nouveau tout $2 + 5$, ce qui se fait en prenant 7 fois chacune de ses parties 2 et 5 (34), on aura 7 fois 2 + 7 fois 5, ou $14 + 35$, c'est-à-dire le 1er tout ; donc 7 fois le nouveau tout donnent le 1er ; le nouveau tout est donc 7 fois plus petit que le 1er. De sorte qu'en rendant 7 fois plus petite chacune des parties d'un tout proposé, on rend ce tout lui-même 7 fois plus petit.

44. Prendre le 9me d'un tout, c'est rendre ce tout 9

fois plus petit ; c'est donc rendre chacune de ses parties 9 fois plus petite ; c'est par conséquent prendre le 9^{me} de chacune des mêmes parties. Ainsi, *pour prendre une certaine partie d'un tout, il suffit de prendre cette partie de chacune des parties de ce tout.* C'est ainsi que le 8^e du tout $24 + 40 + 64$, est $3 + 5 + 8$.

45. *Pour rendre un produit un certain nombre de fois plus grand ou plus petit, il suffit de rendre l'un de ses facteurs ce même nombre de fois plus grand ou plus petit.* Par exemple, pour rendre le produit 9×4, 3 fois plus petit, on rendra son multiplicande 9, 3 fois plus petit, et on aura 3×4, produit 3 fois plus petit que le premier.

En général, si l'on rend le multiplicande 3 fois plus grand ou 3 fois plus petit, on rendra toutes les parties du produit 3 fois plus grandes ou 3 fois plus petites ; donc le produit lui-même deviendra 3 fois plus grand ou 3 fois plus petit (34 et 43).

Pareillement, si l'on rend le multiplicateur 3 fois plus grand ou 3 fois plus petit, on prendra 3 fois plus ou 3 fois moins le même multiplicande ; on aura donc 3 fois plus ou 3 fois moins ; c'est-à-dire que le produit sera 3 fois plus grand ou 3 fois plus petit.

46. Lorsqu'on doit multiplier entre eux plus de deux nombres, comme dans $4 \times 7 \times 3 \times 5$, les nombres 4, 7, 3, 5, sont les *facteurs* du produit, et ce produit s'obtient en multipliant 4 par 7, le produit par 3 et le second produit par 5. Mais on peut suivre tout autre ordre dans les multiplications : le produit final sera toujours le même. (Voyez mon Arithmétique élémentaire, 3^e édition.)

De la Division des nombres entiers.

47. La *division* est une opération par laquelle on trouve combien de fois un nombre, appelé *dividende*,

en contient un autre de même espèce, nommé *diviseur*; le résultat de cette opération s'appelle *quotient* (*).

Le dividende et le diviseur doivent être de même espèce, puisque, par exemple, un nombre d'*hommes* ne saurait contenir un nombre de *jours*.

48. *Le dividende est toujours le produit du diviseur par le quotient*; car si le quotient est 13, par exemple, le dividende contiendra le diviseur 13 fois; il sera donc 13 fois le diviseur, ou le produit du diviseur par le quotient 13.

49. On indique la division à l'aide du signe :, qui veut dire *divisé par*. Ainsi 12 : 4 s'énonce 12 *divisé par* 4, et représente un quotient dont 12 est le dividende et 4 le diviseur. On indique aussi cette division en écrivant $\frac{12}{4}$ et en énonçant 12 divisé par 4.

50. Comme un nombre n'est contenu dans un autre, qu'autant de fois qu'il peut en être soustrait; il est clair que la division peut toujours se faire en soustrayant le diviseur du dividende et des restes, et en comptant le nombre de soustractions faites avant d'arriver à un reste moindre que le diviseur.

Mais cette manière d'opérer la division serait impraticable, si le quotient était un peu grand. Pour y suppléer et effectuer très-vîte une division quelconque, il suffit d'apprendre de mémoire à diviser un ou deux chiffres, au plus, par un seul; ce qui est très-facile, à l'aide de la table de multiplication.

Par exemple, si l'on veut trouver combien de fois 7 sont contenus en 63, on se rappellera que 9 fois 7 font 63, et on en conclura que 7 sont contenus 9 fois en 63.

(*) Il y a *division*, 1° lorsqu'on partage 48 en parties égales à 8, ce qui revient à chercher combien de fois 8 est contenu dans 48; 2° quand on divise 72 en 12 parties égales à P; ce qui donne 12 fois P = 72 ou P fois 12 = 72, et se réduit encore à trouver combien de fois 12 est contenu en 72.

Pareillement, si l'on veut diviser 51 par 8, on observera que 6 fois 8 ne font que 48, tandis que 7 fois 8 font 56; on en conclura donc que 8 n'est contenu que 6 fois *entier* dans 51.

51. Lorsque le quotient doit avoir plus d'un chiffre, la division repose sur le principe que voici : *Le diviseur restant le même, si le dividende devient un certain nombre de fois plus grand, le quotient deviendra le même nombre de fois plus grand.* Par exemple, dans $12 : 3 = 4$, rendons le dividende 5 fois plus grand; nous aurons $60 : 3 = 20$, et le quotient sera aussi 5 fois plus grand.

En général, supposons que le quotient soit 31; le dividende contiendra donc le diviseur 31 fois; il sera donc 31 fois le diviseur : par conséquent, 5 fois le dividende vaudront 5 fois 31 fois le diviseur, et contiendront le diviseur 5 fois 31 fois; le nouveau quotient sera donc 5 fois 31; il sera donc 5 fois plus grand que le premier 31. Ainsi, le diviseur restant le même, si le dividende devient 5 fois plus grand, le quotient deviendra aussi 5 fois plus grand (*).

52. Voyons à présent comment on trouve le quotient lorsque le dividende a plusieurs chiffres et le diviseur un seul, comme dans la division de 1468 par 4. Dans ce cas, on dispose et l'on effectue l'opération comme il suit:

On écrit d'abord le diviseur à la droite du dividende, en les séparant par un trait, et on souligne le diviseur pour écrire au-dessous les chiffres du quotient demandé. Ensuite, on cherche combien de fois le diviseur 4 est contenu dans les deux premiers chiffres 14 du dividende, en disant:

$$\begin{array}{r|l} 1468 & 4 \\ \cline{2-2} \underline{12} & 367 \\ 26 & \\ \underline{24} & \\ 28 & \\ \underline{28} & \\ 0 & \end{array}$$

(*) Supposons que le quotient soit 4 *septièmes*; le dividende contiendra donc les 4 *septièmes* du diviseur; il sera donc les

4 en 14 est contenu 3 fois, qu'on écrit. Mais si le diviseur 4 est contenu 3 fois en 14, il pourra en être soustrait 3 fois. Or, 3 fois 4 font 12, qui, soustraits de 14, donnent 2 pour reste : et comme le diviseur 4 n'est plus contenu dans ce reste, il s'ensuit que le diviseur 4 n'est contenu que trois fois entier en 14 unités. Donc, dans 14 centaines, qui sont 100 fois plus grandes que 14 unités, le diviseur 4 sera contenu 100 fois plus (51) ; il y sera donc contenu 100 fois 3 fois ou 300 fois.

A côté du reste 2 centaines, on abaisse le chiffre suivant 6 du dividende, et l'on a 26 dizaines pour second *dividende partiel.* 4 en 26 est contenu 6 fois. 6 fois 4 font 24, qui, soustraits de 26, donnent 2 pour reste : et comme le diviseur 4 n'est plus contenu dans ce reste, il s'ensuit que le diviseur 4 n'est contenu que 6 fois entier en 26 unités ; donc en 26 dizaines, qui sont 10 fois plus grandes que 26 unités, le diviseur 4 sera contenu 10 fois plus (51) ; il y sera donc contenu 10 fois 6 fois ou 60 fois, qui, avec les 300 fois qu'on avait déjà, font 360 fois.

A côté du reste 2 dizaines, on abaisse le chiffre suivant 8 du dividende, et il vient 28 unités pour troisième dividende partiel. 4 en 28, est contenu 7 fois. 7 fois 4 font 28, qui, ôtés de 28, donnent 0 pour reste. Donc le diviseur est contenu 7 fois dans le dernier dividende partiel. Ces 7 fois réunies avec les 360 fois déjà trouvées, donnent 367 fois. De sorte que le diviseur 4 est contenu exactement 367 fois dans le dividende proposé 1468.

Par des raisonnemens et des calculs tout-à-fait pareils aux précédens, on trouve : $47094 : 6 = 7849$; $611037 : 9 = 67893$; $3682 : 7 = 526$; $47576 : 8 = 5947$.

---

4 *septièmes* du diviseur : par conséquent, 8 fois ce dividende vaudront 8 fois les 4 *septièmes* du diviseur, et contiendront 8 fois les 4 *septièmes* du diviseur ; le nouveau quotient sera donc 8 fois 4 *septièmes*, c'est-à-dire, 8 fois plus grand que le 1er.

53. Occupons-nous maintenant de la division lorsque le dividende et le diviseur ont chacun plusieurs chiffres. Par exemple, proposons-nous de trouver combien de fois le nombre 273585 contient 793. Il faudra d'abord, pour faciliter les calculs, rapprocher le dividende, le diviseur et le quotient, en disposant et en raisonnant l'opération comme il suit :

273585	793
2379	345
3568	
3172	
3965	
3965	
0	

On sépare sur la gauche du dividende, les quatre 1ers chiffres 2735, qui sont nécessaires pour contenir le diviseur 793. Ensuite, au lieu de chercher combien de fois tout le diviseur est contenu dans le dividende partiel, ce qui serait trop difficile, on cherche seulement combien de fois le premier chiffre 7 du diviseur est contenu dans les deux premiers chiffres 27 du dividende partiel, en disant : 7 en 27 est contenu 3 fois. Mais si le diviseur 793 est contenu 3 fois dans le premier dividende partiel, il pourra en être soustrait 3 fois. Or, 3 fois le diviseur 793, donnent 2379, qui, soustraits de 2735, laissent 356 pour reste : et comme le diviseur 793 n'est plus contenu dans ce reste, il s'ensuit que le diviseur n'est contenu que 3 fois entier en 2735 unités. Donc, en 2735 centaines, qui sont 100 fois plus grandes, le diviseur sera contenu 100 fois plus (51); il y sera donc contenu 100 fois 3 fois ou 300 fois. Donc 3 est le chiffre des centaines du quotient demandé (*).

A côté du reste 356 centaines, abaissant le chiffre suivant 8 du dividende, on aura 3568 dizaines pour

(*) Le diviseur serait bien encore contenu dans le reste 356 centaines, considéré comme 35600 unités; mais il n'y serait pas une centaine de fois. Ainsi, le diviseur n'est contenu que 3 centaines de fois dans le dividende partiel 2735 centaines. On voit que, par cette manière d'opérer, on aura, à chaque division partielle, un chiffre du quotient demandé.

second dividende partiel. 7 en 35 est contenu 4 fois. 4 fois le diviseur 793 font 3172, qui, soustraits de 3568, donnent 396 pour reste : et comme le diviseur 793 n'est plus contenu dans ce reste, il s'ensuit que le diviseur n'est contenu que 4 fois entier en 3568 unités. Donc, en 3568 dizaines, qui sont 10 fois plus grandes, le diviseur sera contenu 10 fois plus (51); il y sera donc contenu 10 fois 4 fois ou 40 fois, qui, avec les 300 fois qu'on a déjà, font 340 fois. Et l'on voit qu'il faut écrire le second *quotient partiel* 4 à la droite du premier 3.

Abaissant à côté du reste 396, le chiffre suivant 5 du dividende, il vient 3965 unités pour 3ᵉ dividende partiel. 7 en 39 est contenu 5 fois. 5 fois le diviseur 793, font 3965, qui, soustraits de 3965, donnent 0 pour reste. Donc le diviseur est contenu 5 fois dans le dernier dividende partiel. Ces 5 fois réunies aux 340 fois déjà trouvées, donnent 345 fois. De sorte que le diviseur est contenu 345 fois dans le dividende proposé.

Et en effet, on a trouvé que le diviseur est contenu 300 fois dans la première partie du dividende, 40 fois dans la seconde et 5 fois dans la troisième ; il est donc contenu dans le dividende total, 300 fois, 40 fois et 5 fois; c'est-à-dire, en tout, 345 fois.

54. Le résumé de toutes les opérations que l'on vient de faire, offre la règle que voici : *Pour diviser un nombre de plus de deux chiffres par un autre nombre, il faut d'abord écrire le diviseur à la droite du dividende, en les séparant par un trait; puis souligner le diviseur, pour écrire au-dessous les chiffres du quotient, en allant de gauche à droite. Prendre sur la gauche du dividende total, autant de chiffres qu'il est nécessaire pour contenir le diviseur; chercher ensuite combien de fois le premier chiffre du diviseur est contenu dans le premier ou les deux premiers*

chiffres du dividende partiel; écrire ce nombre de fois au quotient; et après avoir multiplié le diviseur par ce quotient partiel, soustraire le produit du dividende partiel employé. A côté du reste, on abaissera le chiffre suivant du dividende, et l'on aura un second dividende partiel, à l'égard duquel on opérera comme à l'égard du premier. On continuera le même procédé, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de chiffres à abaisser.

En appliquant cette règle, il sera facile de s'assurer de l'exactitude des résultats suivans :

$$423405 : 485 = 873;\ 3049164 : 486 = 6274;$$
$$49561776 : 9648 = 5137;\ 841182062 : 8597 = 97846.$$

Les élèves feront bien d'appliquer à chacun de ces exemples, les raisonnemens du n° 53.

55. Lorsque le diviseur a plusieurs chiffres, on est souvent conduit à un quotient partiel trop grand. Mais dans ce cas, pour essayer si le chiffre mis au quotient peut convenir, il suffit presque toujours de multiplier par ce chiffre, les deux premiers du diviseur, multiplication que l'on peut d'ailleurs effectuer de mémoire.

56. *Le quotient partiel est exact, lorsque la soustraction peut se faire, et que le reste est moindre que le diviseur.* D'abord le quotient partiel n'est pas trop petit, puisque le reste étant moindre que le diviseur, ne contient plus une fois ce diviseur. Le quotient partiel n'est pas trop grand, puisque le diviseur ayant pu être soustrait du dividende partiel, autant de fois qu'on a mis au quotient partiel, y est nécessairement contenu ce nombre de fois. Ainsi le quotient partiel n'est ni trop petit, ni trop grand; il est par conséquent exact.

57. Au lieu d'écrire le produit du diviseur par le quotient partiel, pour le soustraire ensuite du dividende partiel, il sera beaucoup plus abrégé de faire la sous-

traction par la pensée. Par exemple, qu'on ait à diviser 15663072 par 3856 : on effectuera l'opération comme il suit :

On prend 15663 pour premier dividende partiel, et l'on dit : 3 en 15 y est 4 fois. Il faut donc soustraire 4 fois le diviseur de 15663.

15663072	3856
23907	4062
7712	
0000	

Or, 4 fois 6 font 24, qui, soustraits de 33, donnent le reste 9. Mais pour rendre la soustraction partielle possible, on a ajouté 3 dizaines au chiffre 3 du plus grand nombre, et par conséquent à ce plus grand nombre ; il faut donc, pour que le reste total ne change pas, ajouter les 3 mêmes dizaines au plus petit nombre (25) ; ce qui se fait en ajoutant 3 *unités* au chiffre suivant de ce plus petit nombre, c'est-à-dire, en retenant 3 pour le produit partiel suivant. 4 fois 5 font 20, et 3 font 23 ; de 26 reste 3. On retient 2, par la raison que l'on vient d'indiquer. 4 fois 8 font 32, et 2 font 34 ; de 36, reste 2. On retient 3. 4 fois 3 font 12, et 3 font 15 ; de 15, reste rien. De sorte que le reste total est 239. Abaissant à côté, le chiffre suivant du dividende, on aura 2390 pour second dividende partiel. Comme ce dividende partiel ne contient pas 1 fois le diviseur, il s'ensuit que le quotient total ne contient pas de *centaines* ; on doit donc mettre o au quotient partiel, et abaisser sur-le-champ le chiffre suivant 7 du dividende ; continuant l'opération, on verra que le quotient demandé est 4062.

58. Cette opération fait voir que, *si l'un des dividendes partiels ne contient pas le diviseur, il faudra mettre* o *au quotient, et abaisser sur-le-champ le chiffre suivant du dividende, pour former un nouveau dividende partiel.*

On ne multiplie pas le diviseur par le quotient o, parce qu'on n'aurait que des zéros au produit, et que o soustrait du dividende partiel, laisse pour reste ce dividende partiel, qu'on avait déjà; il est donc inutile de faire la multiplication et la soustraction. Voici quelques exemples à effectuer :

$61586184 : 789 = 78056$; $161448600 : 795 = 203080$ et $21660342 : 38 = 570009$.

59. *Pour diviser un nombre suivi de quelques zéros par l'unité suivie aussi de quelques zéros, il suffit d'effacer à la suite du dividende, autant de zéros qu'il s'en trouve à la suite de l'unité.* C'est ainsi que $75000 : 100 = 750$. Et en effet, le dividende 75000 exprime 750 centaines ou 750 fois 100; il contient donc 100, 750 fois. De même, $9800000 : 1000 = 9800$.

60. *On peut, sans changer la valeur du quotient, effacer le même nombre de zéros à la suite du dividende et du diviseur.* Par exemple, je dis que $49000 : 700 = 490 : 7$. En effet, dans le 1er cas, on divise 490 *centaines* par 7 *centaines*, et dans le 2e, 490 *unités* par 7 *unités*; or, il est évident que 490 centaines contiennent 7 centaines autant de fois que 490 unités contiennent 7 unités; le quotient est donc le même dans les deux cas.

61. En général, *le quotient reste le même quand on remplace, au dividende et au diviseur, l'unité par une autre unité différente.* Par exemple, le quotient de 24 *florins* par 6 *florins* est le même que celui de 24 *aunes* par 6 *aunes*, le même que celui de 24 *septièmes* par 6 *septièmes*, etc. Et en effet, 24 *florins* contiennent 6 *florins* 4 fois; 24 *aunes* contiennent 6 *aunes* 4 fois aussi, etc.

62. Si l'on veut chercher combien de fois 9 contient 12, on observera que 9 vaut les 9 douzièmes de 12, ou les 9 douzièmes de 1 fois 12, ou enfin 9 douzièmes de fois 12. Mais puisque 9 vaut 9 douzièmes de fois 12, il s'ensuit que 9 contient 12, 9 douzièmes de fois, et qu'ainsi $9 : 12 = \frac{9}{12}$; d'où $\frac{9}{12} = 9 : 12$.

On voit donc, 1° que *le quotient de deux nombres entiers est une fraction ayant le dividende pour numérateur et le diviseur pour dénominateur*; 2° que *toute fraction exprime le quotient de son numérateur par son dénominateur*. C'est ainsi que

$$721 : 47 = \frac{721}{47} \text{ et que } \frac{43}{8} = 43 : 8 = 5\,\frac{3}{8}.$$

Voici encore quelques principes, propres à compléter la division des nombres entiers.

63. *Le diviseur restant le même, si le dividende devient un certain nombre de fois plus petit, le quotient deviendra aussi le même nombre de fois plus petit.* Par exemple, dans $60 : 3 = 20$, si l'on rend le dividende 5 fois plus petit, on aura $12 : 3 = 4$, et le quotient sera aussi 5 fois plus petit.

64. *Le dividende restant le même, si le diviseur devient un certain nombre de fois plus grand ou plus petit, le quotient deviendra au contraire le même nombre de fois plus petit ou plus grand.* Par exemple, si dans $48 : 6 = 8$, on rend le diviseur 4 fois plus grand, on aura $48 : 24 = 2$, et le quotient sera 4 fois plus petit. Si l'on avait rendu le diviseur 2 fois plus petit, on aurait eu $48 : 3 = 16$, et le quotient aurait été 2 fois plus grand.

65. *Un quotient ne change pas de valeur, lorsqu'on multiplie ou qu'on divise le dividende et le diviseur par un même nombre.* Par exemple, on a $24 : 6 = 4$; si l'on multiplie le dividende et le diviseur par 3, il viendra $72 : 18 = 4$, et le quotient est encore le même. (Voyez l'Arithmétique élémentaire, pour les démonstrations des trois principes précédens.)

Preuves de la Multiplication et de la Division.

66. *Pour faire la preuve de la multiplication, il faut diviser le produit par l'un de ses deux facteurs; et si l'opération a été bien faite, on aura l'autre facteur au quotient.* En effet, le produit de 17 par 13 vaut 13 fois 17; il contient donc 17, 13 fois, et par conséquent $17 \times 13 : 17 = 13$. Le produit de 17 par 13 est le même que celui de 13 par 17 (36), et vaut

17 fois 13 ; il contient donc 13, 17 fois, et l'on a $17 \times 13 : 13 = 17$. D'où l'on voit que si l'on divise un produit par l'un de ses deux facteurs, on aura toujours l'autre au quotient. Ainsi les mots *facteur* et *diviseur* d'un nombre sont synonimes.

On ferait aussi la preuve de la multiplication, en doublant l'un des facteurs et en prenant la moitié de l'autre : le produit devrait toujours être le même (45).

67. *Pour faire la preuve de la division, il faut multiplier le diviseur par le quotient trouvé; ajouter au produit, le reste de la division; et si l'opération est bien faite, on aura le dividende pour somme.* En effet, quand on effectue la division, on soustrait du dividende, les produits du diviseur par chacun des quotiens partiels ; on en soustrait donc le produit du diviseur par le quotient entier ; ce produit est donc la première partie du dividende, et le reste, la seconde : par conséquent, en réunissant ces deux parties du dividende, on devra avoir ce dividende pour somme.

Voici deux divisions avec leurs preuves :

189492	375	375	75347	53	1421
1992	505	505	223	1421	53
Reste.. 117		1875	114		4263
		1875	87		7105
		117	Reste.. 34		34
		189492			75347

On ferait aussi la preuve de la division en doublant le dividende et le diviseur : alors on devrait avoir le même quotient et un reste double.

68. Un nombre entier est *divisible* par un autre, lorsqu'il le contient plusieurs fois, sans reste ; et un nombre entier en *divise* un autre, quand il y est contenu exactement plusieurs fois. Ainsi 18 est divisible par 3, et 3 divise 18.

69. On appelle *nombre premier*, tout nombre qui

n'est divisible que par lui-même et par l'unité, comme 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, etc.

70. On appelle nombres *premiers entre eux*, ceux qui n'ont d'autre *diviseur commun* que l'unité, tels que 15 et 32. D'où l'on voit que deux nombres premiers entre eux, peuvent fort bien n'être pas des nombres premiers ; tandis que deux nombres premiers sont toujours premiers entre eux.

71. On appelle *multiple* d'un nombre entier, le produit de ce nombre par un autre, aussi entier ; ainsi 4 fois 5 ou 20 est un multiple de 5. On dit qu'un nombre entier est *sous-multiple* d'un autre, lorsqu'il y est contenu exactement plusieurs fois ; par exemple, 6 est un sous-multiple de 24.

72. On appelle *nombre pair*, tout nombre entier qui peut être partagé en deux parties *entières* et pareilles ; et *nombre impair*, celui qui ne peut être partagé en deux parties entières et égales. Ainsi 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, etc. sont des nombres pairs, et 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, etc. sont des nombres impairs.

73. *Tout nombre terminé par* 0, *est divisible par* 10, *par* 2 *et par* 5 *:* Tel est 7430.

Tout nombre terminé par 5, *est divisible par* 5 *:* Par exemple 7485.

Tout nombre terminé par un chiffre pair, est divisible par 2 *:* Tel est 7534.

Un nombre est divisible par 3 *ou par* 9, *lorsque la somme de ses chiffres est un multiple de* 3 *ou de* 9. Par exemple, dans le nombre 7542, la somme des chiffres 7, 5, 4, 2, étant 18 ou un multiple de 9, ce nombre est divisible par 9.

Nota. Ces principes sont démontrés dans l'Arithmétique élémentaire ; et il est nécessaire de recourir à ces démonstrations, ainsi qu'à beaucoup d'autres, qui se trouvent dans le même ouvrage, si l'on veut connaître complétement la science des nombres.

De la détermination de l'une des parties égales d'un nombre donné.

74. *On multiplie une fraction par un nombre entier, en multipliant son numérateur par ce nombre entier.* Ainsi $\frac{4}{5} \times 8 = \frac{32}{5}$. En effet, comme 8 fois 4 aunes font 32 aunes, de même 8 fois 4 cinquièmes font 32 cinquièmes : on a donc effectivement $\frac{4}{5} \times 8 = \frac{32}{5}$.

75. On sait que 1 vaut 7 septièmes (4) ; donc 8 valent 8 fois 7 septièmes ou 56 septièmes ; la 7^e partie de 8 vaut donc la 7^e partie de 56 septièmes ou 8 septièmes ; de sorte que le 7^e de $8 = \frac{8}{7}$ et $\frac{8}{7} =$ le 7^e de 8.

On voit, 1° que *pour prendre une certaine partie d'un nombre entier, il suffit de lui donner, pour dénominateur, le nombre qui désigne l'espèce de partie demandée ;* 2° que *toute fraction est une partie de son numérateur, marquée par son dénominateur.*

Ainsi, le 12^e de $5 = \frac{5}{12}$ et $\frac{13}{11} =$ le 11^e de 13.

76. *On prend une certaine partie d'un nombre entier abstrait, en divisant ce nombre par celui qui désigne l'espèce de partie demandée.* Ainsi, pour prendre le 12^e de 96, il suffit de chercher combien de fois 12 est contenu en 96.

En effet, le dividende 96 étant le produit du diviseur 12 par le quotient cherché, sera aussi le produit du quotient cherché par le diviseur 12 (36) ; donc 12 fois le quotient cherché donnent 96 ; le quotient cherché est donc la 12^e partie de 96.

Le principe s'applique encore lorsque le quotient n'est pas entier. Par exemple, s'il s'agit de prendre le 15^e de 372, on observera que 15 est contenu 24 fois en 372, avec le reste 12, qui ne contient que les 12 quinzièmes de 15 ; et on en conclura que 24 *unités* 12 *quinzièmes* sont la 15^e partie de 372.

$$\begin{array}{r|l} 372 & 15 \\ \cline{2-2} 72 & 24\frac{12}{15} \\ 12 & \end{array}$$

En effet, 372 valent 360 plus 12 ; donc le 15^e de 372 vaudra le 15^e de 360 plus le 15^e de 12 (44). Or, le 15^e de 360 est 24 ; le 15^e de 12 est 12 quinzièmes (75) ; donc le 15^e de 372 est $24\frac{12}{15}$, comme on l'a trouvé par l'application du principe.

77. *Pour prendre une certaine partie d'un nombre entier concret, il faudra chercher combien de fois ce nombre, considéré comme abstrait, contient celui qui désigne l'espèce de partie demandée, et faire exprimer au quotient, la même espèce d'unité qu'au nombre concret proposé.* Par exemple, on aura la 24^e partie de 768 *livres*, en cherchant combien de fois 24 est contenu dans 768, et en faisant exprimer des *livres* au quotient 32.

En effet, la 24^e partie de 768 s'obtient en divisant 768 par 24 (76), et vaut par conséquent 32. Mais la 24^e partie de 768 étant 32, la 24^e partie de 768 *livres* sera nécessairement 32 *livres* ; car la partie est toujours de même nature que le tout auquel elle appartient. On trouve effectivement que 24 fois 32 *livres* font 768 *liv.*

78. *Si l'on veut prendre le* 10^e, *le* 100^e, *le* 1000^e, ..., *d'un nombre suivi de quelques zéros, il suffit d'effacer* 1, 2, 3, ..., *zéros à la suite de ce nombre.* Par exemple, le 100^e de 48000 = 480. En effet, le 100^e de 48000 = le 100^e de 100 fois 480 = 1 fois 480 = 480. On verra de même que le 1000^e de 70000 = 70.

79. *Pour prendre une certaine partie d'une fraction, il suffit de diviser le numérateur par le nombre qui désigne l'espèce de partie demandée ; ou bien, si la division n'est pas possible, il faut multiplier le dénominateur par le même nombre.* D'après cette règle, on aura le 7^e de $\frac{21}{16} = \frac{3}{16}$ et le 6^e de $\frac{4}{5} = \frac{4}{30}$.

En effet, 1° puisque le 7^e de 21 est 3, le 7^e de 21 seizièmes sera 3 seizièmes. 2° L'unité vaut 30 trentièmes ; $\frac{1}{5}$ d'unité vaut donc le 5^e de 30 trentièmes ou

6 trentièmes ; donc les $\frac{4}{5}$ d'unité valent 4 fois 6 trentièmes ou 24 trentièmes. Mais puisque $\frac{4}{5} = \frac{24}{30}$, on a aussi le 6ᵉ de $\frac{4}{5}$ = le 6ᵉ de $\frac{24}{30} = \frac{4}{30}$. Ce qu'il fallait démontrer.

80. On peut abréger la division de plusieurs chiffres par un seul, comme on va le voir. Qu'il s'agisse, par exemple, de diviser 54731 par 7 : on observera que cette division se réduit à prendre la septième partie de 54731 (76). Or, la septième partie de 54 mille est 7 mille, pour 49 mille, et il reste 5 mille, qui, avec 7 centaines, font 57 centaines ; la septième partie de 57 centaines est 8 centaines, pour 56 centaines, et il reste 1 centaine, qui, avec 3 dizaines, font 13 dizaines ; la septième partie de 13 dizaines est 1 dizaine, pour 7 dizaines, et il reste 6 dizaines, qui, avec 1 unité, font 61 unités ; la septième partie de 61 unités est 8 unités, pour 56, et il reste 5, dont la septième partie est 5 *septièmes* (75). Donc le quotient demandé est 7818 *unités* 5 *septièmes*. En effet, par cette manière d'opérer, on décompose le dividende 54731 dans les parties 49000, 5600, 70, 56 et 5, puis on prend le 7ᵉ de chacune de ces parties ; on prend donc le 7ᵉ du dividende (44) ; on le divise donc par 7 (76). On verrait de même que $\frac{5674}{8}$ = le 8ᵉ de $5674 = 709\frac{2}{8}$.

Usages des quatre premières règles de l'arithmétique.

81. Les *quatre premières règles* de l'arithmétique sont l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. Nous connaissons déjà les usages des deux premières ; voyons ceux des deux autres.

82. La multiplication a trois usages : 1° elle peut servir à vérifier la division (67) ; 2° elle sert à trouver la valeur totale de plusieurs unités de même espèce,

quand on connaît la valeur de l'une : par exemple, *à trouver ce que vaudraient* 49 *aunes de drap, si l'aune valait* 9 *florins*.

En effet, puisque l'aune coûte 9 florins, les 49 aunes coûteront 49 fois 9 fl., ou le produit de 9 fl. par 49.

3° La multiplication sert à réduire des unités d'espèce supérieure en unités d'espèce inférieure : par exemple, *à réduire* 8 *jours en heures*.

En effet, puisque le jour vaut 24 heures, les 8 jours vaudront 8 fois 24 heures, ou le produit de 24 heures par 8.

83. La division a quatre usages principaux : 1° elle peut servir à vérifier la multiplication (66); 2° elle sert à déterminer la valeur particulière d'une unité, quand on connaît la valeur totale de plusieurs : par exemple, *à trouver ce que coûterait une aune de drap, si* 36 *aunes coûtaient* 1660 *florins*.

En effet, si 36 aunes coûtent 1660^{f}, 1 aune coûtera la 36^{e} partie de 1660^{f}, ou le quotient de 1660^{f} par 36 (77). Ce quotient est 46^{f}, avec le reste 4^{f}, qui vaut 4 fois 100 cents ou 400^{c}; la 36^{e} partie de 400^{c} est 11^{c}, avec le 36^{e} de 4^{c}, qu'on peut négliger. De sorte que l'aune de drap coûte 46 florins 11 cents.

3° La division sert aussi à trouver le nombre d'unités, quand on connaît leur valeur totale et la valeur de chacune : par exemple, *à trouver combien on aurait de litrons de vin pour* 7540 *cents, si le litron coûtait* 90 *cents*.

En effet, il est évident qu'autant 90^{c}, valeur du litron, seront contenus dans 7540^{c}, autant on aura de litrons pour cette dernière somme; on trouvera donc le nombre de litrons cherché en divisant 7540^{c} par 90^{c}, ou en prenant la 90^{e} partie de 7540 litrons (77); ce qui donnera 83 litrons au quotient, avec le reste 70 litrons, qui vaut 70 fois 100 dés ou 7000 dés. Le 90^{e} de 7000 dés est 77 dés, avec le reste 70 dés, dont le 90^e peut être pris pour 1 dé. D'où l'on voit que pour les 7540^e, on aura 83 litrons 78 dés.

4° Enfin, la division sert à réduire les unités d'espèce inférieure en unités d'espèce supérieure : par exemple, *à réduire* 72410 *minutes en heures.*

En effet, l'heure vaut 60 minutes; donc autant de fois 60 minutes, valeur d'une heure, seront contenues en 72410 minutes, autant d'heures il y aura dans ces 72410 minutes. On aura donc le nombre d'heures demandé, en divisant 72410 minutes par 60 minutes; ce qui donnera 1206 au quotient, avec le reste 50, qui contient le $\frac{5}{6}$ de 60. De sorte que 72410 minutes valent 1206 heures $\frac{5}{6}$.

84. Maintenant, pour résoudre toute question numérique, il faudra toujours tâcher de la décomposer dans les problèmes élémentaires qui font l'objet des usages des quatre premières règles de l'arithmétique, et résoudre ensuite ces problèmes. Voici quelques exemples propres à montrer comment on peut appliquer la méthode que nous venons d'indiquer.

85. *Le père et le fils ont ensemble* 60 *ans, et l'âge du père vaut quatre fois celui du fils; quel est l'âge de chacun?*

Puisque l'âge du père vaut 4 fois celui du fils, il est clair que leurs deux âges réunis valent 5 fois celui du fils : mais leurs deux âges font 60 ans; donc 5 fois l'âge du fils valent 60 ans; l'âge du fils vaut donc le 5^e de 60 ans ou 12 ans : l'âge du père vaut par conséquent 4 fois 12 ans ou 48 ans. Et en effet 48 ans plus 12 ans font 60 ans.

L'âge d'un père vaut 6 fois celui de son fils et le surpasse de 40 ans; quel est l'âge de chacun? (R. 48 et 8).

Il reste à un ouvrier, qui avait 60 cents, 5 fois ce qu'il a dépensé; combien a-t-il encore? (R. 50 cents).

Partager 72 pommes à 3 enfans, de façon que le 2^e en ait 2 fois autant que le 1^{er}, et le 3^e autant que les 2 autres. Combien en auront-ils chacun? (R. 12, 24 et 36).

On doit partager 720 florins à trois personnes, de manière que quand la 1^{re} prendra 3^f, la 2^e en aura 4 et la 3^e 5. Combien en auront-elles chacune? (R. 180, 240 et 300).

86. *Quarante ouvriers, en 8 jours, ont fait 1280 aunes d'ouvrage; combien 24 ouvriers de même force feront-ils du même ouvrage, en 6 jours?*

40 ouvriers, en 8 jours, ont fait 1280 aunes;
donc 1 ouvr. en 8 j. fera le 40^e de 1280 ou 32^a;
1 ouvr. en 1 j. fera le 8^e de 32 ou 4^a;
1 ouvr. en 6 j. fera 6 fois 4 aunes ou 24^a;
24 ouvr. en 6 j. feront 24 fois 24^a ou 576^a.

Vingt ouvriers ont fait, en 6 jours, 720 aunes d'ouvrage; combien 36 ouvriers seront-ils de jours pour faire 12312 aunes? (R. 57 jours).

Neuf ouvriers, en 7 jours, ont fait 189 aunes; combien faudra-t-il d'ouvriers pour faire, en 15 jours, 3015 aunes? (R. 67).

Trente aunes de long sur 4 de large d'une certaine étoffe, ont coûté 360 fl.; quel sera le prix de 57 aunes de long sur 3 de large de la même étoffe? (R. 513^f.)

87. *On a donné 63248 florins pour un ouvrage fait par deux ouvriers. Le premier y a fait 548 aunes et le second 396. Combien chacun a-t-il reçu?*

Il est clair que pour 548 aunes plus 396 aunes, c'est-à-dire pour 944 aunes d'ouvrage, on a donné 63248^f; donc pour une aune, on a donné la 944^{me} partie de 63248^f, ou le quotient de 63248 par 944; ce qui fournit 67^f. Mais si une aune coûte 67^f; 548 aunes coûteront 548 fois 67^f ou 36716^f; et 396 aunes coûteront 396 fois 67^f ou 26532^f. Ainsi le 1^{er} ouvrier a reçu 36716^f et le 2^e 26532; ce qui donne en effet 63248^f pour somme.

Pour un ouvrage fait par deux ouvriers, on a donné 63248^f, dont le 2^e a reçu 26532^f. Combien ce 2^e a-t-il fait d'ouvrage, sachant que le travail du premier est 548 aunes? (R. 396 aunes).

Pour 944 aunes d'ouvrage, deux ouvriers ont reçu 63248^f; le 1er ayant fait 152 aunes de plus que le 2^e, a reçu 10184^f de plus que ce 2^e. Trouver l'ouvrage de chacun et la somme qu'il a reçue. (R. le 1er a fait 548^a et a reçu 36716^f.)

Combien faudra-t-il de jours à deux ouvriers pour faire ensemble un ouvrage de 231420 aunes? On sait que le 1er fait 1856^a en 64 jours, et le 2^e 2232 en 72 jours. (R. 3857 jours).

88. *On a mêlé* 50 *litrons d'un* 1er *vin avec* 72 *d'un* 2^e *et* 48 *d'un* 3^e. *Combien faut-il vendre le litron du mélange, pour gagner* 51 *florins? On sait que le* 1er *vin coûte* 68 *cents le litron, le* 2^e 170 *et le* 3^e 34c.

Ajoutant le gain 5100 cents avec les prix des trois quantités de vin, et divisant la somme par le nombre total de litrons du mélange, le quotient 136 cents sera le prix qu'il faut vendre le litron.

On en fera la preuve, en prenant pour inconnu, ou le nombre de litrons du 1er vin, ou le prix de chacun.

89. *Un boulanger achète* 1485 *fagots et n'en paie que* 1375; *combien en a-t-il eu de plus sur chaque cent qu'il a payé?*

Puisque pour 1375 fagots que le boulanger paie, il en reçoit 1485; pour 1 qu'il paiera, il recevra la 1375^e partie de 1485 ou $\frac{1485}{1375}$ (75); donc pour 100 qu'il paiera, il recevra 100 fois $\frac{1485}{1375}$ ou $\frac{148500}{1375} = 148500 : 1375 = 108$. Il reçoit donc 8 fagots de plus sur chaque 100 qu'il paie.

En voici la preuve: pour 1375 fagots que le boulanger paie, il en reçoit 1485; donc pour 100 fois 1375, il recevra 100 fois 1485 ou 148500. Mais si pour 100 fois 1375 ou pour 1375 fois 100 fagots, le boulanger en reçoit 148500 ; pour 100 fagots il recevra la 1375^e partie de 148500 ou 108 ; il reçoit donc effectivement 8 fagots de plus sur chaque 100 qu'il paie.

Un particulier achète 1375 fagots, à condition que sur chaque 100, on lui en donnera 8 de plus. Combien devra-t-il en recevoir? (R. 1485).

Quelqu'un achète des fagots, à condition que, sur chaque 100 qu'il paiera, on lui en donnera 8 par-dessus : on lui en livre 1485 ; comb. en doit-il payer? (R. 1375).

90. *Deux ouvriers ont reçu, l'un* 4320 *cents et l'autre* 3072 *: le* 1er *a travaillé* 6 *jours de plus que le* 2^e *et gagne par jour les* 9 *huitièmes de ce que gagne le dernier. Combien gagnent-ils chacun journellement?*

Puisque par jour le 1er gagne les 9 huitièmes de ce que gagne le 2^e ; si celui-ci gagnait 8 cents, le 1er en gagnerait 9. Ainsi, pendant que le 2^e gagne 8^c, le 1er en gagne 9 ; donc pendant que le 2^e gagne 3072^c ou 384 fois 8^c, le 1er en gagne 384 fois 9 ou 3456. Mais ce 1er en a gagné 4320 ; la différence 4320 — 3456 ou 864, est donc ce qu'il a gagné dans les 6 jours qu'il a travaillé de plus que le 2^e. Par conséquent, le 1er en 6 jours gagne 864^c ; en 1 jour il gagne donc 144^c ; pour gagner 4320^c, il lui aura donc fallu 4320 : 144 ou 30 jours ; le 2^e a donc travaillé 30 — 6 ou 24 jours, pour gagner 3072^c ; il gagne donc par jour le 24^e de 3072^c ou 128 cents.

Deux ouvriers ont travaillé, l'un 72 et l'autre 45 jours, à un ouvrage pour lequel ils ont reçu 72828^c. Comme 8 journées du 1er en valent 9 du 2^{me}, on demande combien chacun a gagné. (R. le 1er 46818^c et l'autre 26010).

91. Voici encore plusieurs problèmes à résoudre.

Un homme a mis 4 semaines pour faire 168 lieues, et s'est reposé les dimanches ; comb. a-t-il fait de lieues par jour? (R. 7).

12 mètres de drap, qui coûtaient 324^f, ont été vendus 432^f; combien a-t-on gagné par mètre? (R. 9^f.)

On a dépensé 5 sacs de chacun 875^c pour acheter de la toile à raison de 35^c l'aune; combien en a-t-on eu d'aunes? (R. 125).

Quelqu'un a 2595^f de revenu annuel. Combien peut-il dépenser par jour, l'un dans l'autre, pour mettre de côté 1500^f tous les ans? (R. 3^f.)

Un homme dit : si j'avais 20^f de plus, je pourrais dépenser 36^f, et il me resterait la moitié de ce que j'ai. Combien a-t-il? (R. 32^f.)

Il a fallu 80 chariots contenant chacun 450 pains pesant 3 livres de 16 onces, pour transporter le pain nécessaire à la nourriture d'une division d'infanterie pendant 4 jours. Combien y avait-il d'hommes dans cette division? On sait que la ration journalière du soldat est 24 onces de pain. (R. 18000).

On a donné 413000^f pour la poudre employée pendant un siége de 18 jours, par 34 pièces en batterie, tirant chacune 75 coups tous les jours, et la charge moyenne de chaque pièce étant de 4 livres. Comb. a coûté la livre de poudre? (R. 225^c.)

2 ouvriers ayant travaillé pendant 3 semaines, ont reçu 90^f. L'un d'eux gagne 2^f par jour; combien gagne l'autre? (R. 3^f.)

Quelqu'un ayant acheté trois pièces de drap de chacune 34 aunes, pour 1734^f, les a revendues en gagnant 51^f par pièce; combien a-t-il revendu l'aune? (R. 1850 cents).

Les gages d'un domestique augmentent chaque année de 19 florins, tandis que ses dépenses diminuent de 15^f. Combien aura-t-il au bout de 8 ans? Il avait 964^f au commencement de la première année; les gages de cette année étaient 54^f et les dépenses 196. (R. 100 florins).

Des parties décimales.

92. Lorsqu'on veut mesurer une quantité qui ne contient pas exactement celle qu'on a choisie pour unité, on divise cette unité en 10 *dixièmes*, 100 *centièmes*, 1000 *millièmes*, 10000 *dix-millièmes*, etc.; et l'on continue ce mode de division en parties égales, jusqu'à ce qu'on obtienne une partie contenue exactement dans la chose à mesurer, ou du moins laissant un reste assez petit pour être négligé sans erreur sensible. Cette partie

est alors une nouvelle unité : on l'appelle *unité* ou *partie décimale*. De sorte que les dixièmes, les centièmes, les millièmes, les dix-millièmes, les cent-millièmes, les millioniièmes, etc., sont des parties décimales (*).

93. *Les parties décimales deviennent de* 10 *en* 10 *fois plus petites*. Car puisque l'unité vaut 100 centièmes, un dixième d'unité vaudra le 10^e de 100 centièmes ou 10 centièmes ; le centième est donc 10 fois plus petit que le dixième. De même, l'unité valant 1000 millièmes, un centième d'unité vaudra le 100^e de 1000 millièmes ou 10 millièmes ; donc le millième est 10 fois plus petit que le centième. On verra de même que le dix-millième est 10 fois plus petit que le millième, et ainsi des autres.

94. Cette propriété des décimales permet de les écrire comme les nombres entiers : il suffit pour cela d'étendre au-dessous des unités simples, la convention qu'*un chiffre placé à la gauche d'un autre exprime des unités* 10 *fois plus petites que celles de cet autre* (12).

En effet, d'après cette convention, le chiffre placé à la droite des unités simples, exprimera des unités 10 fois plus petites, et par conséquent des dixièmes ; le chiffre placé à la droite des dixièmes, exprime des unités 10 fois plus petites, c'est-à-dire des centièmes ; le chiffre placé à la droite des centièmes, représente des unités 10 fois plus petites ou des millièmes ; et ainsi de suite. Mais pour ne pas confondre les unités avec les dixièmes, on fait suivre le chiffre des unités simples, par une virgule, qui signifie *unité*. D'après cela, l'expression 4, 568 veut dire : 4 *unités* 5 *dixièmes* 6 *centièmes* 8 *millièmes*.

(*) Dans les phrases : un centième vaut 10 millièmes, un cent-millième vaut 10 millioniémes, etc., il est bon, pour plus de clarté, de prononcer le nombre 10, comme s'il s'écrivait *dize*. Il serait aussi préférable d'écrire *dimillième* au lieu de *dix-millième*.

95. On appelle *nombre décimal* celui qui renferme des parties décimales, comme 42,3774 : on le nomme aussi *expression* ou *fraction décimale*. La *partie entière* est à la gauche de la virgule ; la *partie décimale*, à la droite ; et les chiffres qui suivent la virgule, sont des *chiffres décimaux*, ou simplement des *décimales*.

96. On trouve le rang d'un chiffre décimal énoncé, en partant de la virgule et prononçant sur les chiffres successifs vers la droite, les mots dixièmes, centièmes, millièmes, dimillièmes, cent-millièmes, millionièmes, etc. Ainsi l'on trouve que les cent-millièmes occupent le 5e rang après la virgule, etc.

97. *Pour énoncer un nombre décimal, il faut d'abord énoncer la partie entière, et ensuite la partie décimale, comme si c'était un nombre entier, et dire à la fin le nom de la moindre unité décimale qui s'y trouve;* ou bien, *il faut énoncer le nombre proposé comme s'il était tout-à-fait entier, en prononçant à la fin le nom de la plus petite espèce de décimale de ce nombre.* Par exemple, 47,3467 s'énonce en disant 47 *unités* 3467 *dimillièmes*; ou bien en prononçant 473467 *dimillièmes*.

En effet, chaque dixième vaut 10 centièmes; les 3 dixièmes valent donc 3 fois 10 centièmes ou 30 centièmes, qui, avec les 4 centièmes du nombre proposé, font 34 centièmes. Mais chaque centième vaut 10 millièmes ; les 34 centièmes valent donc 34 fois 10 ou 340 millièmes, qui réunis aux 6 millièmes du nombre, font 346 millièmes. Enfin, chaque millième vaut 10 dimillièmes ; les 346 millièmes valent par conséquent 3460 dimillièmes, qui, avec les 7 dimillièmes du nombre, donnent 3467 dimillièmes. Le nombre proposé doit donc, en effet, s'énoncer 47 *unités* 3467 *dimillièmes*.

Et parce que chaque unité vaut 10000 dimillièmes, les 47 unités vaudront 47 fois 10000 dimillièmes ou

470000 dimillièmes, qui, avec les 3467 dimillièmes du nombre, font 473467 dimillièmes. D'où il suit que 47,3467 signifie 473467 dimillièmes.

98. Cette seconde manière d'énoncer un nombre décimal est sur-tout employée dans les démonstrations, comme on le verra plus bas : elle réduit sur-le-champ tout nombre décimal en fraction ordinaire, puisque $7,24 = 724$ centièmes $= \frac{724}{100}$.

99. *Pour écrire un nombre décimal, il faut d'abord écrire la partie entière, et ensuite la partie décimale, de manière que le dernier chiffre à droite soit de l'ordre décimal énoncé.*

Ainsi, pour écrire 34 *unités* 54 *cent-millièmes*, on écrira d'abord les 34 unités ; ensuite, comme les cent-millièmes occupent la cinquième place après la virgule, et que, dans 54 cent-millièmes, il n'y a que deux places d'occupées, il faudra suppléer aux trois autres par trois zéros, et l'on aura 34,00054.

100. *Si le nombre décimal est énoncé comme un nombre entier, il faudra aussi l'écrire comme s'il était entier ; mais avoir soin de placer la virgule, de manière que le dernier chiffre à droite soit de l'ordre décimal énoncé.*

Ainsi, pour exprimer *cinq cent soixante-quatre centièmes*, on écrira 564 ; ensuite, comme les centièmes occupent le second rang après la virgule, on placera cette virgule entre 5 et 6, et l'on aura 5,64.

De même, pour exprimer 53 *millièmes*, on écrit 53 ; et comme les millièmes occupent le troisième rang après la virgule, on supplée aux dixièmes et aux unités qui manquent, par deux zéros, et il vient 0,053.

101. *Un nombre décimal ne change pas de valeur, lorsqu'on écrit ou qu'on supprime des zéros à sa droite ou à sa gauche.* C'est ainsi que $7,6400 = 7,64$. En effet, chacun de ces deux nombres exprime 7 unités

6 dixièmes 4 centièmes et point d'autres parties ; donc ces deux nombres sont les mêmes. Pareillement, 04,783 = 4,783000.

102. *Pour rendre un nombre décimal*, 10 *fois*, 100 *fois*, 1000 *fois*, *etc. plus grand ou plus petit*, *il suffit d'avancer la virgule de* 1, 2, 3, *etc. rangs vers la droite ou vers la gauche.* Par exemple, si l'on veut rendre 100 fois plus grand le nombre 7,4896, on avancera la virgule de deux places vers la droite, et l'on aura 748,96.

En effet, l'unité vaut 10000 dimillièmes ; donc un centième d'unité vaudra la 100^{e} partie de 10000 dimillièmes ou 100 dimillièmes ; le centième est par conséquent 100 fois plus grand que le dimillième. Cela posé, avant de déplacer la virgule, le nombre exprimait 74896 *dimillièmes*, et à présent il exprime 74896 *centièmes* ; il exprime donc des parties 100 fois plus grandes ; il est donc lui-même 100 fois plus grand (35).

On verra de même, que si, dans 578,4, on avance la virgule de 3 rangs vers la gauche, on aura 0,5784, nombre 1000 fois plus petit que le premier.

103. *Pour prendre le* 10^{e}, *le* 100^{e}, *le* 1000^{e}, ..., *d'un nombre décimal*, *il suffit d'avancer la virgule de* 1, 2, 3, ..., *rangs vers la gauche.* C'est ainsi que le 1000^{e} de 8473,62 = 8,47362.

En effet, l'unité vaut 100000 cent-millièmes ; donc un centième d'unité vaudra le 100^{me} de 100000 cent-millièmes ou 1000 cent-millièmes ; par conséquent le cent-millième est 1000 fois plus petit que le centième. Cela posé, avant de déplacer la virgule, le nombre exprimait 847362 *centièmes*, et maintenant il représente 847362 *cent-millièmes* ; il exprime donc des parties 1000 fois plus petites ; il est donc lui-même 1000 fois plus petit ou sa millième partie. De même le 10^{me} de 74,5 = 7,45.

De l'Addition et de la Soustraction des nombres décimaux.

104. Puisque dans les nombres décimaux comme dans les nombres entiers, 10 unités d'un certain ordre n'en font qu'une de l'ordre immédiatement à gauche (94), il s'ensuit que l'addition et la soustraction des nombres décimaux, s'effectueront toujours comme l'addition et la soustraction des nombres entiers. Ainsi,

105. *Pour faire l'addition des nombres décimaux, il faut écrire ces nombres les uns sous les autres, de manière que les parties de même ordre soient alignées ; et après avoir souligné le tout, on fait l'addition comme dans les nombres entiers, et l'on place la virgule à la droite du chiffre des unités de la somme.*

Par exemple, s'il faut trouver la valeur totale des 5 nombres décimaux suivans : 4,34 ; 2,085 ; 6,795 ; 19,3 et 84,347 ; on disposera et l'on effectuera l'opération comme il suit :

$$\begin{array}{r} 4,34 \\ 2,085 \\ 6,795 \\ 19,3 \\ 84,347 \\ \hline 116,867 \end{array}$$

On fait d'abord la somme des millièmes, en disant : 7 et 5 font 12, et 5 font 17. En 17 millièmes, il y a 7 millièmes, qu'on écrit au-dessous, et 10 millièmes ou 1 centième, qu'on retient pour ajouter aux centièmes. 1 et 4 font 5, et 9 font 14, et 8 font 22, et 4 font 26. En 26 centièmes, il y a 6 centièmes, qu'on écrit, et 20 centièmes ou 2 dixièmes, qu'on retient pour ajouter aux dixièmes. Continuant l'opération de la même manière, et observant que la virgule doit être à la droite du chiffre des unités simples, on trouvera que la somme des cinq nombres proposés est 116,867.

106. *Pour faire la soustraction des nombres décimaux, il faut écrire le plus petit nombre sous le plus grand, de manière que les unités de même ordre soient alignées ; puis après avoir souligné le tout, opérer la*

soustraction comme dans les nombres entiers, et placer la virgule à la droite des unités simples du reste.

Par exemple, pour soustraire 4,7968 de 12,3469, on disposera et l'on effectuera la sousraction comme il suit :

On soustrait d'abord les dix-millièmes, en disant : 8 ôté de 9, reste 1, qu'on écrit sous les dix-millièmes. 6 de 6, reste 0, sous les millièmes. 9 de 4, impossible ; mais 9 de 14, reste 5, sous les centièmes. Pour compenser les 10 centièmes, ou le dixième ajouté au plus grand nombre, il faut aussi ajouter 1 dixième au plus petit nombre (25). 1 et 7 font 8 ; de 13, reste 5. 1 et 4 font 5 ; de 12, reste 7 unités. Plaçant donc la virgule à la droite du chiffre 7 des unités, la différence cherchée sera 7,5501.

$$\begin{array}{r} 12,3469 \\ \underline{4,7968} \\ 7,5501 \end{array}$$

Si l'un des nombres proposés avait moins de décimales que l'autre, on y suppléerait par des zéros (101). C'est ainsi que $4,7 - 2,789 = 4,700 - 2,789 = 1,911$.

107. Dès qu'un nombre décimal a des chiffres décimaux d'un ordre plus petit que celui dont on a besoin, on est forcé de négliger tous ces chiffres. Mais dans ce cas, pour commettre la plus petite erreur possible, on doit pratiquer la règle que voici : *Si le chiffre qui suit celui auquel on s'arrête, est moindre que* 5, *il faut le supprimer avec tous les suivans ; s'il est* 5 *ou plus grand que* 5, *il faut ajouter* 1 *au dernier chiffre conservé.*

En effet, 1° si l'on n'a besoin que des millièmes, il est clair que le nombre 3,45648 se réduit à 3,456, à moins d'un demi-millième près ; car la partie négligée 0,00048 est moindre que 0,00050, ou qu'un demi-millième.

2° Si l'on ne veut conserver que les centièmes, le nombre 0,4756 se réduit à 0,48, à moins d'un demi-centième près ; car on a pris la partie négligée 0,0056 pour 0,01 ou pour 0,0100 ; on a donc pris de trop

0,0100 — 0,0056 ou 0,0044 ; l'erreur n'est donc pas de 0,0050, c'est-à-dire, d'un demi-centième.

De la Multiplication des nombres décimaux.

108. Puisque multiplier 8 par 6, c'est prendre 8 six fois (31), de même on peut dire que *multiplier 8 par 6 septièmes, c'est prendre 8, 6 septièmes de fois ;* le produit sera donc 6 septièmes de fois 8, ou les 6 septièmes de 1 fois 8, ou enfin les 6 septièmes de 8. De sorte que multiplier 8 par 6 septièmes, c'est prendre les 6 septièmes de 8. En général, *multiplier un nombre quelconque par une fraction, c'est en prendre cette fraction* (*). Ainsi le produit de 3,4 par 2,37 s'obtient en prenant les 237 centièmes de 3,4. De même, les 14 millièmes de $87 = 87 \times 0,014$.

109. *Pour faire la multiplication des nombres décimaux, il faut opérer sans avoir égard à la virgule, c'est-à-dire, comme si ces nombres étaient entiers, et séparer sur la droite du produit, autant de chiffres décimaux qu'il y en avait à la suite des deux facteurs proposés.* C'est ainsi qu'on effectue les multiplications que voici :

$$
\begin{array}{r}
0,47 \\
87 \\
\hline
329 \\
376 \\
\hline
40,89
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
4,12 \\
3,7 \\
\hline
2884 \\
1236 \\
\hline
15,244
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
54 \\
0,078 \\
\hline
432 \\
378 \\
\hline
4,212
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1,007 \\
0,087 \\
\hline
7049 \\
8056 \\
\hline
0,087609
\end{array}
$$

Dans le premier exemple, le multiplicande est un nombre de centièmes ; donc le produit, qui est de même espèce, exprime aussi des centièmes ; il doit donc avoir deux chiffres décimaux, c'est-à-dire autant qu'il s'en trouve à la suite des deux facteurs.

(*) Cela résulte aussi de ce que le produit s'obtient en opérant sur le multiplicande, comme le multiplicateur en opérant sur l'unité.

Dans le second exemple, le produit s'obtient en prenant les 37 dixièmes du multiplicande 4,12 (108); or le 10ᵉ de 4,12 est 0,412 (103); les 37 dixièmes de 4,12 valent donc 37 fois 0,412 ou 15,244; de sorte que le produit a trois chiffres décimaux, c'est-à-dire autant qu'il s'en trouve à la suite des deux facteurs proposés. On vérifiera de même l'exactitude des deux autres produits.

110. *Pour multiplier un nombre décimal par l'unité suivie de quelques zéros, il suffit d'avancer la virgule d'autant de rangs vers la droite qu'il y a de zéros à la suite de l'unité.* Par exemple, $4,756 \times 100 = 475,6$. En effet, en avançant la virgule de deux rangs vers la droite, dans le multiplicande, on le rend 100 fois plus grand (102); on le multiplie donc par 100. De même, $0,7891 \times 10000 = 7891$.

111. *Pour multiplier un nombre décimal par un nombre significatif suivi de quelques zéros, il faut d'abord avancer la virgule du multiplicande, d'autant de rangs vers la droite qu'il y a de zéros au multiplicateur, puis multiplier le résultat par la partie significative du multiplicateur.* D'après cette règle, on aura $1,742 \times 700 = 174,2 \times 7 = 1219,4$. En effet, pour prendre 700 fois, c'est-à-dire 7 fois 100 fois le nombre 1,742, il faut d'abord le prendre 100 fois, en avançant la virgule de deux rangs vers la droite (110); puis prendre 7 fois le résultat 174,2; ce qui donnera 1219,4. On verra de même que $0,89 \times 60 = 53,4$.

112. *Le produit de deux nombres quelconques ne change pas de valeur, dans quelqu'ordre qu'on multiplie.* Ainsi, $1,7 \times 2,89 = 2,89 \times 1,7$. En effet, dans le premier cas, le produit 17×289 exprime des millièmes (109); dans le second, le produit 289×17 exprime des millièmes aussi. Or, $17 \times 289 = 289 \times 17$ (36); donc les deux produits proposés expriment

chacun le même nombre de millièmes, et sont égaux.

De même, $4\times\frac{3}{5}=$ les $\frac{3}{5}$ de $4=3$ fois le 5^e^ de $4=$ 3 fois $\frac{4}{5}=\frac{12}{5}=4$ fois $\frac{3}{5}=\frac{3}{5}\times 4$, et ainsi des autres.

De la Division des nombres décimaux.

113. Puisqu'en divisant un produit par l'un de ses deux facteurs, on a l'autre au quotient (66); nous admettrons désormais que la *division* est une opération par laquelle, connaissant un produit, appelé *dividende*, et l'un de ses deux facteurs, nommé *diviseur*, on trouve l'autre, appelé *quotient*. D'où il suit que *le dividende est toujours le produit du quotient par le diviseur* (112); et conséquemment, si le diviseur est l'unité, le quotient sera égal au dividende.

La division des nombres décimaux présente trois cas particuliers, suivant que le dividende a plus, autant ou moins de décimales que le diviseur. Mais il vaut mieux, en écrivant des zéros à la suite du dividende, ramener les deux derniers cas au premier, parce que c'est le seul qui conduise à l'approximation des quotiens par des décimales.

114. *Pour avoir le quotient, lorsque le diviseur a moins de décimales que le dividende, il faut opérer sans avoir égard à la virgule, et séparer sur la droite du résultat, autant de chiffres décimaux qu'il y en a de plus au dividende qu'au diviseur.* C'est ainsi qu'on effectuera les trois divisions que voici :

7,364	0,8	7,2000	0,64	9,000	8
16	$9{,}20\frac{4}{8}$	80	11,25	10	1,125
04		160		20	
		320		40	
		00		0	

Dans la division de 7,364 par 0,8, le dividende 7,364 est le produit du quotient par le diviseur 0,8 (113), et vaut par conséquent les 8 dixièmes du quotient (108). Ainsi les 8 dixièmes du quotient, c'est-à-dire 8 fois le 10^{me} du quotient, donnent 7,364; donc 8 fois les $\frac{10}{10}$ du quotient, ou 8 fois le quotient, donnent 10 fois 7,364 ou 73,64; le quotient vaut donc le 8^e de 73,64, et s'obtient par conséquent en divisant 7364 par 8 et en faisant exprimer des centièmes au résultat $920\frac{4}{8}$; ce qui donne $9{,}20\frac{4}{8}$, comme on l'a trouvé en appliquant la règle.

115. *Pour diviser un nombre entier ou décimal par l'unité suivie d'un certain nombre de zéros, il suffit d'avancer la virgule d'autant de places vers la gauche, qu'il y a de zéros à la suite de l'unité.* Ainsi on trouve que $78{,}4 : 1000 = 0{,}0784$. En effet, le dividende 78,4 est le produit du quotient par le diviseur 1000; ainsi 1000 fois le quotient donnent 78,4; le quotient est donc le 1000^e de 78,4 ou 0,0784 (103). De même, $749 : 100 = 7{,}49$.

116. *Pour diviser un nombre entier ou décimal par un nombre entier, suivi de zéros, il faut d'abord avancer la virgule d'autant de rangs vers la gauche qu'il y a de zéros à la suite du diviseur, et diviser ensuite le résultat par la partie significative du diviseur.* D'après cette règle, $72{,}8 : 800 = 0{,}728 : 8 = 0{,}091$. En effet, le dividende 72,8 est le produit du quotient par le diviseur 800; donc 800 fois le quotient, c'est-à-dire 100 fois 8 fois le quotient, donnent 72,8; donc 8 fois le quotient donnent le 100^e de 72,8 ou 0,728; le quotient est donc la 8^{me} partie de 0,728 et s'obtient par conséquent en divisant 728 par 8, et en faisant exprimer des millièmes au résultat (77); ce qui donne 0,091. On verra de même que $84 : 70 = 8{,}4 : 7 = 1{,}2$.

117. *Pour approcher du quotient de deux nombres entiers ou décimaux, à moins d'une certaine décimale près, il faut préparer le dividende, de manière qu'il ait autant de décimales de plus que le diviseur, qu'on*

veut en avoir au quotient, et opérer ensuite la division. Par exemple, pour avoir, à moins d'un millième près, le quotient de 3,1 par 0,07, on prépare le dividende 3,1 de manière qu'il ait trois décimales de plus que le diviseur ; ce qui se fait en écrivant quatre zéros à la droite de ce dividende, et ce qui donne 3,10000 à diviser par 0,07. Opérant alors comme il est prescrit (114), on verra que 3,1 : 0,07 = 44,285, à moins d'un millième près.

En effet, le quotient trouvé est évidemment trop petit ; mais on ne pourrait pas mettre 6 au dernier quotient partiel, sans y mettre trop ; le quotient total trouvé ne saurait donc être augmenté d'un millième ; il est donc approché du véritable, à moins d'un millième près.

$$
\begin{array}{l|l}
3{,}10000 & 0{,}07 \\
\cline{2-2}
\;\;30 & 44{,}285 \\
\;\;\;\;20 & \\
\;\;\;\;\;\;60 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;40 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;5 &
\end{array}
$$

On verrait de même que 4 : 7 = 4,00 : 7 = 0,57, à moins d'un centième près, et que 0,23456128 : 0,09 = 0,234561 : 0,09 = 2,6062, à moins d'un dimillième près.

118. La règle précédente s'applique aussi aux fractions ; car toute fraction n'est qu'une division indiquée (62) : on a par conséquent $\frac{8}{11}$ = 8 : 11 = 8,000 : 11 = 0,727, à moins d'un millième près. Effectivement, d'après ce qui précède (75 et 76), on a $\frac{8}{11}$ = le 11^e^ de 8 = le 11^me^ de 8000 millièmes = 0,727 $\frac{3}{11}$. Et telle est la marche à suivre pour convertir les fractions ordinaires en décimales.

De quelques applications du calcul décimal.

119. L'emploi des mesures nouvelles conduit au calcul des nombres décimaux. Or, parmi les nouvelles mesures des Pays-Bas, on distingue principalement

l'*aune*, le *bonnier*, la *corde*, le *litron*, la *livre* et le *florin*.

L'*aune* est l'unité de longueur; elle est égale au *mètre*.

Dans la mesure des distances, outre l'aune, on emploie la *perche* ou 10 aunes, le *mille* ou 1000 aunes, le *palme* ou un dixième d'aune, le *pouce* ou un centième, et la *ligne* ou un millième.

Le *bonnier* sert à mesurer les terres; c'est un carré ayant 100 aunes de chaque côté; il est égal à l'*hectare* et vaut 10000 aunes carrées.

La *corde* ou l'*aune cube* est l'unité de volume; c'est un cube ayant une aune de chaque côté; elle est égale au *stère*.

Le *litron* est l'unité de capacité ou de contenance; c'est un palme cube, égal au *litre*.

Dans la mesure des denrées sèches, on emploie le litron, puis la *mesurette* ou le dixième du litron; le *boisseau* ou 10 litrons, la *rasière* ou 100 litrons et le *lest* ou 3000 litrons.

Dans la mesure des liquides, on se sert non-seulement du litron, mais aussi du *baril* ou 100 litrons, du *verre* ou un dixième de litron, et du *dé* ou un centième de litron.

La *livre* est l'unité de poids; c'est le *kilogramme*; elle se subdivise en 10 *onces*, 100 *gros*, 1000 *esterlings* et 10000 *grains*.

Enfin, le *florin* est l'unité monétaire; c'est une pièce d'argent du poids de 10 esterlings 766 millièmes d'esterling, contenant 893 millièmes d'argent fin et 107 millièmes d'alliage. Le florin se subdivise en 100 *cents*, et vaut 2 francs 11 centimes et 64 centièmes de centime, ou plus exactement, 189 florins valent 400 francs; et le franc vaut 47 cents un quart (rapport exact). [Pour plus de détails, voyez l'Arithmétique élémentaire.]

120. Pour abréger, on désigne le nom de chaque mesure par sa lettre initiale, écrite à la droite du chiffre des unités et un peu au-dessus. Par exemple, 4 *aunes* 8 *dixièmes* s'écrira $4^a,8$. Lorsque le nombre est décimal, on l'écrit aussi en le faisant suivre du nom de ses unités principales précédé de la particule *de*. Ainsi 5 *bonniers* 73 *centièmes* = 5,73 *de bonnier*.

Les applications du calcul décimal reposent sur quelques principes, qu'il faut d'abord étudier.

121. Supposons que, connaissant la valeur particulière d'une unité, il s'agisse de trouver la valeur totale de 2,54. Dans ce cas, il est clair que 2,54 ou les 254 centièmes de l'unité, valent les 254 centièmes de ce que vaut l'unité, c'est-à-dire valent le produit de ce que vaut l'unité par 2,54 (108). Ainsi, *on obtient la valeur d'un nombre quelconque d'unités, en multipliant la valeur particulière de chacune par leur nombre total* (*).

122. Et comme en divisant un produit par l'un de ses 2 facteurs on a toujours l'autre au quotient (113), il s'ensuit que, 1° *On trouve le nombre d'unités en divisant leur valeur totale par la valeur particulière de l'une* : 2° *On obtient la valeur particulière de chaque unité en divisant la valeur totale par le nombre total de ces unités*. Ainsi, 1° si l'aune de drap coûte $6^f,24$; pour $74^f,60$ on aura un nombre d'aunes égal à $74^f,60 : 6^f,24$. 2° Si en $8^j,3$ un ouvrier gagne $57^f,10$; en un jour il gagnera $57^f,10 : 8,3$.

123. Lorsqu'il faut multiplier un quotient qui n'est qu'approché, l'erreur se trouve répétée ; et il s'agit de savoir si alors on peut la négliger au produit. Suppo-

(*) D'après cela, soit v la valeur particulière de l'unité, n le nombre de ces unités et p leur valeur totale ; on aura $v \times n = p$; d'où (113) $n = p : v$ et $v = p : n$.

sons que le quotient soit 2,567836 etc., et que la partie entière de son multiplicateur ait 3 chiffres ; ce multiplicateur sera donc moindre que 1000 ; le produit cherché sera donc lui-même moindre que 1000 fois 2,567836 etc. ou que 2567,836 etc. Si donc le quotient proposé a 5 ou 6 décimales exactes, le produit précédent en aura 2 ou 3 ; donc le produit cherché, dans lequel l'erreur est moins multipliée, en aura aussi 2 ou 3. Ainsi, en général, *pour que l'erreur ne porte pas sur les centièmes, les millièmes, les dimillièmes, etc., du produit, il faut toujours calculer au quotient*, 2, 3, 4, *etc. décimales de plus qu'il n'y a de chiffres dans la partie entière du nombre qui doit multiplier ce quotient.*

124. On doit observer, au surplus, que l'on connaîtra toujours l'erreur du résultat final, si on indique d'abord les opérations, de manière que la division soit la dernière à effectuer pour résoudre le problème. Mais alors il faudra souvent recourir au calcul des quotiens, et surtout faire usage des deux principes que voici : 1° *On multiplie un quotient en multipliant son dividende, ou en divisant son diviseur ;* 2° *On divise un quotient en divisant son dividende, ou en multipliant son diviseur.* Nous ne pouvons démontrer ici ces deux principes, dont l'exactitude est prouvée d'ailleurs par la vérification des résultats auxquels ils conduisent. (Voyez la 2e partie de l'Arithmétique élémentaire.)

Au moyen de ces deux principes et en observant, par exemple, que les expressions $\frac{2,7}{0,4}$ et 2,7 : 0,4 signifient également 2,7 *divisé par* 0,4, il sera facile de comprendre les applications que nous allons donner.

125. *On donne* $25^{f},24$ *pour* $3^{liv},2$ *de tabac ; combien paiera-t-on pour* $9^{liv},54$ *?*

Puisque $3^{liv},2$ de tabac coûtent $25^{f},24$, il est clair

(122) qu'une livre coûtera $\frac{25,24}{3,2}$; donc (121) les $9^{liv},54$ coûteront $\frac{25,24}{3,2} \times 9,54 = \frac{25,24 \times 9,54}{3,2}$ (124).

La 1^{re} de ces deux expressions devient $7,8875 \times 9,54$ ou $75,24675$ ou encore $75,25$; la 2^e équivaut à $\frac{240,7896}{3,2}$ ou à $240,7896 : 3,2 = 75,24675$, comme la 1^{re}. De sorte que le prix demandé est $75^f,25$. Et on aurait trouvé cette valeur dans la 1^{re} expression, si l'on n'avait calculé que 3 décimales au quotient (123).

126. *Supposant que $7^a,2$ de drap valent $144^a,72$ de mousseline et que $3^a,5$ de mousseline coûtent $4^f,20$; on veut savoir combien coûteront $24^a,54$ de drap.*

Puisque $3^a,5$ de mousseline coûtent...... $4^f,20$;
il est évident (122) qu'une aune coûtera..... $\frac{4,20}{3,5}$;
donc (121 et 124) les $144^a,72$ coûteront $\frac{4,20 \times 144,72}{3,5}$.
Mais $7^a,2$ de drap valent $144^a,72$ de mousseline ; par conséquent $7^a,2$ de drap coûtent..... $\frac{4,20 \times 144,72}{3,5}$;
donc (122 et 124) une aune coûte.... $\frac{4,20 \times 144,72}{3,5 \times 7,2}$;
les $24^a,54$ coûtent donc....... $\frac{4,20 \times 144,72 \times 24,54}{3,5 \times 7,2}$.

Effectuant les multiplications et la division, on trouvera $5919^f,048$ pour le prix demandé.

En voici la preuve : Puisque $3^a,5$ ou 35 dixièmes d'aune de mousseline coûtent $4^f,20$, un dixième coûtera la 35^e partie de $4^f,20$, ou le quotient de $4,20$ par 35 ou enfin $1^f,2$. Mais si un dixième coûte $1^f,2$, un centième, qui est 10 fois plus petit, coûtera le 10^e de $1^f,2$ ou $0^f,12$; donc les $144^a,72$ ou 14472 centièmes d'aune coûteront 14472 fois $0^f,12$ ou $1736^f,64$. Et comme $7^a,2$ de drap valent $144^a,72$ de mousseline,

$7^a,2$ ou 72 dixièmes d'aune de drap coûtent $1736^f,64$; donc un dixième coûte la 72^e partie de $1736^f,64$ ou $24^f,12$; un centième coûte la 10^e partie de $24^f,12$ ou $2^f,412$; par conséquent $24^a,54$ ou 2454 centièmes d'aune coûteront 2454 fois $2^f,412$ ou $5919^f,048$, comme plus haut.

4 boisseaux 8 dixièmes de blé coûtent $36^f,76$ et $2^b,5$ d'orge coûtent $12^f,50$. On demande combien $47^b,25$ de blé vaudront de boisseaux d'orge. (R. $32^b,765$.)

8 aunes de long sur $0^a,5$ de large de drap coûtent $84^f,80$; combien aura-t-on d'aunes de long sur $0^a,96$ de large pour $724^f,80$? (R. $35^a,613$ environ.)

127. *Deux particuliers ont fait une entreprise dans laquelle le* 1^{er} *a mis* 240^f *pendant* 4 *mois et le* 2^e 340^f *pendant* 3 *mois. On demande combien chacun doit avoir du bénéfice qui monte à* 1200^f.

On observe d'abord que 240^f placés dans l'entreprise pendant 4 mois, produisent le même bénéfice que 4 fois 240^f ou 960^f pendant 1 mois. Car de ce qu'il y a 4 fois plus d'argent, le bénéfice est 4 fois plus grand; mais de ce que cet argent reste 4 fois moins de temps, le bénéfice devient 4 fois plus petit, et il y a compensation. De même, 340^f pendant 3 mois, produisent le même bénéfice que 3 fois 340^f ou 1020^f pendant 1 mois. D'où il suit qu'on aura les bénéfices des deux particuliers, si l'on suppose qu'ils aient mis respectivement 960^f et 1020^f pendant 1 mois, le bénéfice total étant toujours 1200^f.

Dans ce cas, il est clair que 960^f plus 1020^f ou 1980^f ont gagné 1200^f; donc 1^f a gagné le 1980^e de 1200 ou $\frac{1200}{1980}$. Par conséquent, les 960^f du 1^{er} ont gagné $\frac{1200}{1980} \times 960 = \frac{1152000}{1980} = 581^f,82$ environ; les 1020^f du deuxième ont gagné $\frac{1200}{1980} \times 1020 = \frac{1224000}{1980} = 618^f,18$ environ. La somme de ces deux bénéfices est 1200^f.

128. Trois marchands ont fait une entreprise qui a duré 2 ans et dont le bénéfice a été 4000^f. Le 1^{er} a mis 200^f et au bout de 14 mois il a remis 300^f; le 2^e a mis 300^f et 15 mois après 400^f; le 3^e 600^f et 10 mois plus tard, il a retiré 200^f. Pour surveiller les opérations, ils ont un employé ou régisseur qui a reçu $5^f,50$ pour 100 du bénéfice total. Combien chaque marchand a-t-il eu de ce bénéfice? (R. le 1^{er} $976^f,29$, le 2^e $1351^f,78$ et le 3^e $1451^f,93$.)

On a donné 1000^f pour un ouvrage fait par trois ouvriers, auquel ils ont travaillé respectivement 30, 20 et 40 jours. Le 1^{er} fait $6^a,54$ en 3 jours; le 2^e $8^a,32$ en 4 jours et le 3^e $9^a,5$ en 5 jours. Combien chacun devra-t-il recevoir des 1000^f? (R. le 1^{er} $357^f,377$, le 2^e $227^f,322$ et le 3^e $415^f,301$ environ.)

129. *On demande l'intérêt simple de* 4560^f *prêtés pendant* 2 *ans* 5 *mois, à raison de* 7 *p.* 100 *par an.*

L'*intérêt* d'une somme, nommée *capital*, est le bénéfice résultant du prêt que l'on fait de cette somme pendant un certain temps. Les intérêts sont *simples*, lorsque restant chez l'emprunteur, ils n'y portent plus intérêt. Cela posé,

Puisque 100^f en 12 mois donnent 7 d'intérêt simple,

100 en 1^m donneront le 12^e de 7 ou... $\frac{7}{12}$;

donc 100 en 2^a5^m ou en 29^m donneront 29 fois $\frac{7}{12}$, ou $\frac{203}{12}$;

1 en 29 mois donnera le 100^e de $\frac{203}{12}$, ou $\frac{203}{1200}$;

4560 en 29^m donneront 4560 fois $\frac{203}{1200}$, ou $\frac{925680}{1200} =$ $925680 : 1200 = 771^f,40$ (117).

Ajoutant cet intérêt au capital 4560^f, la somme $5331^f,40$ sera la *valeur* de ce capital au bout de 2 ans 5 mois.

130. *Quelle somme doit-on prêter à* 7 *pour* 100 *par an, pour avoir, au bout de* 2 *ans* 5 *mois,* $771^f,40$ *d'intérêt simple?*

Il est clair que l'intérêt d'un florin en $2^a\ 5^m$ ou en 29 mois, est $\frac{203}{1200}$. De sorte que, pour $\frac{203}{1200}$ d'intérêt, il faut prêter 1^f; donc pour les $\frac{1200}{203}$ de $\frac{203}{1200}$, c'est-à-dire pour 1^f d'intérêt, il faudra prêter les $\frac{1200}{203}$ de 1^f, ou $\frac{1200}{203}$ de fl.; donc pour $771^f,4$ ou 7714 fois le 10^e de 1^f d'intérêt, il faudra prêter 7714 fois le 10^e de $\frac{1200}{203} = 7714$ fois $\frac{120}{203}$ $= \frac{925680}{203} = 925680 : 203 = 4560^f$.

A combien pour 100 par an faut-il placer 3750^f pendant 2 ans 6 mois, pour recevoir, après ce temps, $719^f,25$ d'intérêt simple? (R. à $7^f,672$.)

Pendant combien de temps faut-il prêter 3750^f, à $7^f,672$ pour 100 par an, pour que les intérêts simples soient $719^f,25$? (R. pendant 2 ans 6 mois.)

128. On appelle *escompte* la retenue faite sur la valeur d'un billet, par celui qui le paie avant l'échéance. L'escompte se calcule comme les intérêts simples, à tant pour 100 par an ou par mois; mais il est *en dedans* ou *en dehors*.

L'escompte est *en dedans* lorsqu'en l'ajoutant à la somme que l'on paie, on trouve le montant du billet. Par exemple, *quel sera l'escompte d'un billet de* 360^f, *payables dans* 6 *mois*, *l'escompte en dedans étant à* $\frac{1}{2}$ *pour* 100 *par mois*?

Si l'escompte en dedans est $\frac{1}{2}$ pour 100 par mois, pour 6 mois il sera 6 fois $\frac{1}{2}$ ou $\frac{6}{2}$ ou 3. De sorte que pour 103^f de la valeur du billet, on ne paiera comptant que 100^f; donc pour 1 on paiera le 103^e de 100 ou $\frac{100}{103}$; donc pour 360^f on paiera 360 fois $\frac{100}{103}$ ou $\frac{36000}{103} = 349^f,51$ environ. L'escompte demandé est donc $360^f - 349^f,51$ ou $10^f,49$.

L'escompte est *en dehors* lorsqu'on retient sur la somme que l'on paie, les intérêts de cette même somme. Par exemple, *escompter un billet de* 1000^f *qui* *doit échoir dans 8 mois, l'escompte en dehors étant à 9 pour 100 par an.*

Si l'exemple en dehors est à 9 pour 100 en 12 mois, en 8 mois, qui sont les 2 tiers de 12 mois, l'escompte sera les 2 tiers de 9 ou 6. De sorte que pour 100^f de la valeur du billet, on ne paiera comptant que 100 — 6 ou 94^f; donc pour 1000 ou 10 fois 100, on paiera 10 fois 94 ou 940^f. L'escompte est donc 1000 — 940 ou 60^f.

Un négociant souscrit une obligation de 1200^f, payables dans 15 mois. Mais 5 mois après il veut se libérer. Combien devra-t-il donner, sachant que l'escompte en dedans est à 10 pour 100 par an? (R. $1107^f,69$ envir.)

131. Voici encore plusieurs problèmes à résoudre.

Quelqu'un dit que s'il avait 150^f de plus de revenu annuel, il aurait $4^f,50$ à dépenser par jour. Quel est son revenu? (R. $1492^f,50$.)

On a deux coupons de drap de même largeur et de même qualité; l'un, qui a $2^a,50$ de plus que l'autre, a coûté $562^f,50$ et l'autre 450^f. Combien avaient-ils de longueur chacun? (R. l'un $12^a,50$ et l'autre 10^a.)

155 aunes de toile se vendent $395^f,25$. Combien faudra-t-il vendre d'aunes pour recevoir $74^f,97$? (R. $29^a,4$.)

Un quintal de marchandise coûte 325^f. Combien devra-t-on la vendre la livre pour gagner $4^f,05$ sur 15 livres? (R. $3^f,52$.)

De quelle somme a-t-on retranché 4 cents par florin, pour qu'il n'en soit resté que $2356^f,80$? (R. de 2455^f.)

Un ouvrier dépense par jour $2^f,75$ pour l'entretien de son ménage; au bout d'un an, après après avoir payé sa dépense avec le gain qu'il fait en travaillant 25 jours par mois, il lui reste $196^f,25$. Combien gagne-t-il chaque jour qu'il travaille? (R. 4^f.)

Un fabricant vend 3 pièces de drap; la 1^{re} contient $15^a,2$; la 2^e 12^a et la 3^e $17^a,25$. Il vend la 1^{re} à $15^f,25$ l'aune, la 2^e à $19^f,20$ et la 3^e à 27^f. Sur l'argent qu'il reçoit, il prête une somme qu'on ne connaît pas, à un de ses amis; il paie 11 journées de travail à chacun des 18 ouvriers qu'il emploie à raison de $3^f,25$ par jour, et il lui reste $81^f,80$. Quelle somme a-t-il prêtée? (R. $202^f,65$.)

Un particulier achète un panier de poires qui en contient 621; il convient de les payer $10^f,50$ le 100, à condition qu'il en aura 8 par-dessus pour chaque 100. Combien a-t-il dû payer? (R. $60^f,375$.)

On a donné $63^f,75$, pour 17 jours de solde, à un détachement de 15 hommes. Un autre a reçu $74^f,75$ pour 13 jours. Combien y avait-il d'hommes dans le 2ᵉ détachement? (R. 23.)

Sur l'intérêt de 15 mois d'une propriété de 45600^f, qui rapporte tous les ans $3^f,75$ pour 100, le propriétaire a payé $31^c,25$ par florin de ce même intérêt, pour acquitter ses contributions. Combien lui reste-t-il net? (R. $1469^f,53125$.)

Quelqu'un a acheté 25 pièces de toile, contenant chacune 22 aunes, à raison de $2^f,25$ l'aune. Il en a vendu 8 pièces à $4^f,50$ l'aune, 5 pièces à $3^f,80$, 7 pièces à $2^f,95$ et 5 pièces à $1^f,20$. Combien a-t-il gagné par mètre? (R. $1^f,086$.)

De la transformation des fractions.

132. Nous avons vu (62) que toute fraction exprime le quotient de son numérateur par son dénominateur. C'est encore ce qu'on peut vérifier; car, dans $7 : 9$, le dividende 7 est le produit du quotient par le diviseur 9 (113); donc 9 fois le quotient donnent 7; le quotient est donc la 9^{me} partie de 7, ou $\frac{7}{9}$ (75). De sorte que $7 : 9 = \frac{7}{9}$; d'où réciproquement $\frac{7}{9} = 7 : 9$.

133. D'après cela, si l'on veut convertir une fraction telle que $\frac{53}{8}$, en nombre fractionnaire, il faudra diviser le numérateur 53 par le dénominateur 8. Or, 8 en 53 est contenu 6 fois, avec le reste 5, qui ne contient que les $\frac{5}{8}$ de 8; de sorte que $\frac{53}{8} = 6\frac{5}{8}$. En effet, il est clair que

$$\frac{53}{8} = \frac{48}{8} + \frac{5}{8} = 6 \text{ fois } \frac{8}{8} + \frac{5}{8} = 6 \text{ fois } 1 + \frac{5}{8} = 6\frac{5}{8}.$$

On verra de même que $\frac{7234}{57} = 126\frac{52}{57}$.

134. Réciproquement, pour réduire un nombre fractionnaire à une seule fraction, il faut ajouter le numérateur au produit du dénominateur par le nombre entier, et donner à la somme le dénominateur proposé.

Ainsi $8\frac{3}{4} = \frac{35}{4}$. En effet, l'unité valant 4 quarts, les 8 unités vaudront 8 fois 4 quarts ou 32 quarts, qui, avec les 3 quarts du nombre proposé, font 35 quarts. De même, on trouve que $7\frac{11}{12} = \frac{95}{12}$ et que $5 = \frac{30}{6}$.

135. *Une fraction ne change pas de valeur lorsqu'on multiplie ses deux termes par un même nombre.* Par exemple, si l'on multiplie par 4 les deux termes de $\frac{3}{5}$, on aura $\frac{12}{20}$, fraction qui a même valeur que la première $\frac{3}{5}$.

En effet, l'unité vaut 20 vingtièmes; donc $\frac{1}{5}$ d'unité vaudra le 5ᵉ de 20 vingtièmes ou 4 vingtièmes; les $\frac{3}{5}$ d'unité vaudront par conséquent 3 fois 4 vingtièmes ou 12 vingtièmes. De sorte que $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$.

136. On démontrerait de même qu'*une fraction ne change pas de valeur lorsqu'on divise ses deux termes par un même nombre*. D'où il suit que pour simplifier une fraction, il faut diviser ses deux termes et ceux des fractions successives par les nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc., ayant soin de diviser par chacun autant de fois de suite qu'il est possible. Par exemple, on simplifiera la fraction $\frac{756}{1260}$, en divisant les 2 termes successifs par 2, 2, 3, 3 et 7; ce qui donnera

$$\frac{756}{1260} = \frac{378}{630} = \frac{189}{105} = \frac{21}{35} = \frac{3}{5}.$$

On simplifiera, d'une manière analogue, les fractions

$$\frac{128}{256},\ \frac{441}{567},\ \frac{154}{924},\ \frac{799}{2961},\ \frac{285714}{999999}.$$

137. *Pour réduire deux fractions au même dénominateur, il suffit de multiplier les deux termes de chacune par le dénominateur de l'autre ;* ce qui ne changera pas les valeurs de ces fractions (135). C'est ainsi que les deux fractions $\frac{4}{7}$ et $\frac{3}{4}$ deviennent $\frac{16}{28}$ et $\frac{21}{28}$.

138. *Pour réduire plus de deux fractions au même*

dénominateur, il faut multiplier les deux termes de chacune par le produit des dénominateurs de toutes les autres; ce qui ne changera pas les valeurs de ces fractions. Par exemple, soient les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$ et $\frac{5}{7}$; on multipliera les deux termes de la 1^re^ par 140 (produit des dénominateurs 4, 5 et 7), les deux termes de la 2^e^ par 105, de la 3^e^ par 84 et de la 4^e^ par 60; ce qui donnera

$$\frac{280}{420},\ \frac{315}{420},\ \frac{168}{420}\ \text{et}\ \frac{300}{420},$$

fractions de même dénominateur 420, et respectivement équivalentes aux fractions proposées (135).

139. *On abrége la réduction au même dénominateur, en multipliant les deux termes de chaque fraction par le nombre de fois que son dénominateur est contenu dans le moindre multiple des dénominateurs proposés.* Par exemple, soient les fractions

$$\frac{5}{6},\ \frac{3}{4},\ \frac{7}{8},\ \frac{4}{5},\ \frac{11}{12}\ \text{et}\ \frac{13}{20}:$$

le moindre multiple des dénominateurs est 120. On multipliera donc les deux termes de la 1^re^ fraction par 20 (nombre de fois que 6 est contenu en 120), les deux termes de la 2^e^ par 30, de la 3^e^ par 15, de la 4^e^ par 24, de la 5^e^ par 10 et de la 6^e^ par 6; ce qui donnera les fractions équivalentes

$$\frac{100}{120},\ \frac{90}{120},\ \frac{105}{120},\ \frac{96}{120},\ \frac{110}{120}\ \text{et}\ \frac{78}{120}.$$

On propose de réduire au même dénominateur les groupes de fractions :

$$\frac{3}{7},\ \frac{7}{11},\ \frac{4}{5},\ \frac{11}{13};\qquad \frac{11}{12},\ \frac{14}{15},\ \frac{5}{21},\ \frac{13}{35},\ \frac{17}{20};$$

$$\frac{8}{9},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{6},\ \frac{13}{18};\qquad \frac{11}{16},\ \frac{17}{24},\ \frac{19}{18},\ \frac{17}{45},\ \frac{19}{30}.$$

140. La réduction au même dénominateur est utile

pour comparer aisément deux fractions entre elles. Par exemple, si aux deux termes de $\frac{4}{7}$, on ajoute le même nombre 3, on aura $\frac{7}{10}$: réduisant au même dénominateur les fractions $\frac{4}{7}$ et $\frac{7}{10}$, elles deviennent $\frac{40}{70}$ et $\frac{49}{70}$; de sorte que la 2^{me} est plus grande que la 1re. D'où l'on voit qu'une fraction change de valeur, lorsqu'on ajoute ou qu'on retranche un même nombre à ses deux termes.

Du calcul des fractions.

141. L'addition et la soustraction des fractions, se ramènent à l'addition et à la soustraction des nombres entiers concrets, en réduisant ces fractions au même dénominateur, c'est-à-dire à la même unité fractionnaire ; puis en prenant la somme ou la différence des nouveaux numérateurs et en donnant au résultat le dénominateur commun. D'après cette règle, on aura

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{11}{12}=\frac{9}{12}+\frac{10}{12}+\frac{11}{12}=\frac{30}{12},$$

$$\text{et}\quad \frac{8}{11}-\frac{2}{3}=\frac{24}{33}-\frac{22}{33}=\frac{2}{33}.$$

En effet, dans le 1er exemple, la réduction des fractions au même dénominateur n'en change pas les valeurs ; donc la somme des trois nouvelles fractions est la même que celle des trois 1res : et puisque $9+10+11$ font 30, de même 9 douzièmes + 10 douzièmes + 11 douzièmes, font 30 douzièmes. Ainsi $\frac{30}{12}$ sont la somme des trois nouvelles fractions, et par suite, celle des trois proposées. On démontrera de même que $\frac{2}{33}$ est la différence des fractions $\frac{8}{11}$ et $\frac{2}{3}$.

142. *Pour ajouter les nombres fractionnaires, il faut faire la somme des fractions ; extraire de cette somme les unités qu'elle renferme* (134), *et ajouter ces unités à la somme des nombres entiers qui accompa-*

gnent les fractions proposées. D'après cette règle, on trouve

$$4\tfrac{5}{6} + 3\tfrac{8}{9} + 2\tfrac{11}{12} = 4\tfrac{30}{36} + 3\tfrac{32}{36} + 2\tfrac{33}{36} = 9\tfrac{95}{36} = 11\tfrac{23}{36}.$$

143. *Pour faire la soustraction des nombres fractionnaires, il faut soustraire les fractions et ensuite les entiers.* C'est ainsi qu'on aura

$$19\tfrac{7}{8} - 11\tfrac{2}{3} = 19\tfrac{21}{24} - 11\tfrac{16}{24} = 8\tfrac{5}{24}.$$

144. *Si la fraction à soustraire est plus grande que l'autre, on ajoutera à celle-ci une unité, réduite en parties de même espèce et prise sur le nombre entier qui accompagne cette fraction.* De cette manière, on obtient

$$8\tfrac{3}{5} - 4\tfrac{14}{15} = 8\tfrac{9}{15} - 4\tfrac{14}{15} = 7\tfrac{24}{15} - 4\tfrac{14}{15} = 3\tfrac{10}{15} = 3\tfrac{2}{3},$$

$$6 - 2\tfrac{3}{4} = 5\tfrac{4}{4} - 2\tfrac{3}{4} = 3\tfrac{1}{4} \text{ et } 8 - \tfrac{7}{8} = 7\tfrac{8}{8} - \tfrac{7}{8} = 7\tfrac{1}{8}.$$

145. *Pour multiplier une fraction par un nombre entier, il faut multiplier le numérateur par le nombre entier; ou bien, si cela est possible, il faut diviser le dénominateur par le même nombre entier.* C'est ainsi que $\frac{8}{7} \times 4 = \frac{32}{7}$ et $\frac{11}{40} \times 8 = \frac{11}{5}$.

En effet, multiplier $\frac{11}{40}$ par 8, c'est prendre $\frac{11}{40}$, 8 fois. Or, 8 fois 11 font 88; donc 8 fois $\frac{11}{40}$ font $\frac{88}{40}$, ou $\frac{11}{5}$ (136), comme on l'a trouvé en appliquant la règle. De même, $\frac{10}{27} \times 3 = \frac{10}{9}$.

146. *Pour diviser une fraction par un nombre entier, il faut multiplier le dénominateur par ce nombre entier; ou bien, si cela est possible, diviser le numérateur par le même nombre entier.* Cette règle donne

$$\tfrac{8}{9} : 5 = \tfrac{8}{45} \text{ et } \tfrac{32}{13} : 8 = \tfrac{4}{13}.$$

En effet, le dividende $\frac{8}{9}$ est le produit du quotient par le diviseur 5 (113); donc 5 fois le quotient donnent $\frac{8}{9}$; le quotient est donc la 5ᵉ partie de $\frac{8}{9}$ ou $\frac{8}{45}$ (79).

On démontrera de même que le quotient de $\frac{32}{13}$ par 8 est $\frac{4}{13}$.

147. *Pour multiplier un nombre quelconque par une fraction, il faut diviser ce nombre par le dénominateur et multiplier le résultat par le numérateur de cette fraction.* D'après cette règle, on trouve

$$12 \times \frac{3}{4} = 9,\ 8 \times \frac{3}{5} = \frac{24}{5} \text{ et } \frac{14}{27} \times \frac{3}{7} = \frac{2}{9}$$

En effet, multiplier 8 par $\frac{3}{5}$, c'est en prendre les $\frac{3}{5}$ (108). Or, le 5ᵉ de 8 est $\frac{8}{5}$ (75); les $\frac{3}{5}$ de 8 sont donc 3 fois $\frac{8}{5}$ ou $\frac{24}{5}$. De même, multiplier $\frac{14}{27}$ par $\frac{3}{7}$, c'est en prendre les $\frac{3}{7}$ (108); le produit sera donc 3 fois le 7ᵉ de $\frac{14}{27}$, ou 3 fois $\frac{2}{27}$ (79), ou enfin $\frac{2}{9}$ (145), comme on l'a trouvé en appliquant la règle.

148. *Pour diviser un nombre quelconque par une fraction, il faut diviser ce nombre par le numérateur et multiplier le résultat par le dénominateur de la fraction.* Cette règle donne

$$18 : \frac{3}{7} = 42,\ 3 : \frac{6}{5} = \frac{5}{2} \text{ et } \frac{8}{15} : \frac{2}{5} = \frac{4}{3}.$$

En effet, le dividende 18 est le produit du quotient par le diviseur $\frac{3}{7}$, et vaut par conséquent les $\frac{3}{7}$ de ce quotient (108); donc les $\frac{3}{7}$ du quotient donnent 18; $\frac{1}{7}$ du quotient vaut donc le tiers de 18 ou 6; le quotient vaut par conséquent 7 fois 6 ou 42. On démontrera de même l'exactitude des deux autres quotiens $\frac{5}{2}$ et $\frac{4}{3}$.

149. Pour multiplier ou diviser l'un par l'autre deux nombres fractionnaires, il faut d'abord les réduire chacun à une seule fraction (134), puis multiplier ou diviser entre elles les deux fractions résultantes. Au moyen de cette règle, on trouve

$$4\tfrac{7}{8} \times 2\tfrac{3}{5} = \tfrac{39}{8} \times \tfrac{13}{5} = \tfrac{507}{40} = 12\tfrac{27}{40},$$

$$\text{et } 3\tfrac{2}{5} : 2\tfrac{3}{4} = \tfrac{17}{5} : \tfrac{11}{4} = \tfrac{68}{55} = 1\tfrac{13}{55}.$$

(Pour compléter le calcul des fractions, voyez l'Arithmétique élémentaire.)

150. *De quel nombre 8 neuvièmes sont-ils les 4 tiers?*

Les 4 tiers du nombre cherché valent 8 neuvièmes; $\frac{1}{3}$ vaut donc le quart de 8 neuvièmes ou 2 neuvièmes; les trois tiers, ou le nombre cherché lui-même, vaut 3 fois 2 neuvièmes ou 2 tiers.

Par quel nombre faut-il diviser 2 neuvièmes pour que le quotient soit le tiers des 6 cinquièmes de $28\frac{4}{7}$?

Quel est le nombre dont la moitié et les 3 quarts, plus 6, font 36?

151. *Un ouvrier a fait 6 aunes et demie d'ouvrage en 3 jours 5 septièmes; combien en fera-t-il en 4 jours 8 vingt-unièmes?*

Puisque l'ouvrier, en $3^j\frac{5}{7}$, fait $6^a\frac{1}{2}$ d'ouvrage, il est clair (122) qu'en 1 jour il fera $6^a\frac{1}{2} : 3\frac{5}{7}$ ou $\frac{7}{4}$ d'aune; donc (121) en $4^j\frac{8}{21}$, il fera $\frac{7}{4} \times 4\frac{8}{21} = \frac{23}{3} = 7^a\frac{2}{3}$.

152. *Combien faut-il prêter pour recevoir, après 1 an 6 mois, 720^f, tant en capital qu'intérêt simple, l'argent étant à 5 pour 100 par an?*

Il est aisé de voir que l'intérêt d'un florin en 1 an 6 mois, est $\frac{15}{200}$; et que par suite, la *valeur* de 1^f au bout de $1^a\,6^m$, est $1\frac{15}{200}$ ou $\frac{215}{200}$. Or, en multipliant cette valeur de 1^f par la somme prêtée, on trouve la somme à rendre 720^f; par conséquent (113) la somme prêtée est $720 : \frac{215}{200} = 669^f,767$ environ.

153. *On a distribué 16 aunes d'étoffe à 20 personnes; les hommes ont eu 5 sixièmes d'aune chacun et les enfans 3 quarts; combien y avait-il d'hommes et d'enfans?*

Si les 20 personnes avaient été des enfans, elles auraient reçu 20 fois $\frac{3}{4}$ ou 15 aunes, c'est-à-dire 1 aune de moins qu'elles n'ont eu réellement. Or, en remplaçant un enfant par un homme, le nombre 15 d'aunes distribuées augmente de $\frac{5}{6} - \frac{3}{4}$ ou de $\frac{1}{12}$ d'aune ; donc, pour qu'il augmente d'une aune ou de $\frac{12}{12}$, il faudra remplacer 12 enfans par 12 hommes. De sorte qu'il y avait 12 hommes, et par conséquent $20 - 12$ ou 8 enfans. Et en effet, les 20 personnes ont reçu 8 fois $\frac{3}{4}$ + 12 fois $\frac{5}{6}$, ou $6 + 10$, ou enfin 16 aunes.

Combien faut-il d'un vin à 50 cents le litron et d'un vin à 70 cents, pour faire 24 litrons à 64 cents chacun? (R. $16^l,8$ du 2^e et $7^l,2$ du 1^{er}.)

Combien faut-il de pièces de 10 cents et de 25 cents, pour payer 400 cents en 25 pièces? (R. 15 pièces de 10^c et 10 pièces de 25^c.)

154. Voici plusieurs problèmes propres à exercer :

On prend le tiers d'une somme, puis les 2 cinquièmes du restant, et alors il reste 29^f. Quelle était cette somme? (R. $72^f,50$.)

Un marchand achète de la toile qui lui revient à 9^f les cinq aunes, et il la revend à raison de 6 aunes pour 13^f. Quel est son bénéfice sur 160 aunes? (R. $58^f,67$.)

En vendant une pendule $859^f,69$, on gagne les 3 quatorzièmes de sa valeur. Quelle est cette valeur? (R. $707^f,96$.)

Partager 720 en 4 parties A, B, C, D, telles qu'en les divisant respectivement par 12, 9, 6 et 3, les quotiens soient égaux. Quelles sont ces parties? (R. 288, 216, 144 et 72.)

Dans une entreprise, j'ai gagné les 3 quatorzièmes de la somme que j'ai exposée ; les frais sont le 16^e de cette somme, et j'ai retiré en tout $4450^f,50$: quel fonds ai-je exposé? (R. 3864^f.)

Quelqu'un prête à son ami une somme d'argent pour 2 ans 6^m à 6 p. 100 par an ; celui-ci à son tour, avance à l'autre 350^f pour 2 ans à $4\frac{1}{2}$ pour 100. Le compte réglé, il se trouve que le 2^e doit encore au 1^{er} $2^f,75$ d'intérêt. Combien ce 1^{er} a-t-il prêté? (R. $228^f,33\frac{1}{3}$.)

Un homme achète la livre de ferraille à 16^c et la revend à 23^c. Si l'aune de dentelles lui coûte 2^f,84, combien devra-t-il la revendre pour gagner 10 pour 100 de plus que sur la ferraille? (R. 4^f,49.)

On achète pour 208 f. de marchandises à 7 ans 8 mois de crédit. Pour s'acquitter on souscrit une lettre de change payable dans 4 ans 3 mois. Quelle est sa valeur? L'intérêt est à 20 pour 100 par an. (R. 1668^f,12.)

Quatre amis A, B, C, D, se réunissent pour dîner en piquenique. A fournit 3 plats, B 4, et C 5. Chaque plat de B vaut $\frac{1}{2}$ plat de A, et 1 plat de C vaut les 2 tiers de 2 plats de B. Comme D n'a rien fourni, il doit donner 12^f pour son écot. Il s'agit de régler le compte de A, B, C.

On a 36 aunes 3 quarts de toile à 5 douzièmes de large, dont on prend pour doubler un manteau contenant 8 aunes 3 quarts d'un drap à 7 quarts; combien restera-t-il de toile et à combien reviendra le manteau? On sait que la toile employée coûte 4^f l'aune, le drap 30^f, et que le tailleur prend 20^f pour la façon. (R. Il ne restera point de toile et le manteau coûtera 429^f,50.)

Du calcul des nombres complexes.

155. On appelle nombre *complexe*, tout nombre composé de plusieurs espèces d'unités, dont chacune est une partie connue de celle qui la précède : tel est le nombre 4 jours 16 heures 20 minutes 40 secondes, qu'on écrit en abrégé $4^j\ 16^h\ 20'\ 40''$.

156. Les nombres complexes sont essentiellement composés de mesures anciennes. Voici quelques-unes de ces mesures, encore en usage à Luxembourg :

1° Pour les denrées sèches, le *maldre* vaut 10 *bichets*, le bichet 24 *pintes* et la pinte 2 *chopines*.

2° Pour les liquides, le *foudre* vaut 6 *aimes* ou 24 *hottes*, la hottes 50 *pintes* (à vin), la pinte 2 *chopines* et la chopine 4 *quarlets*.

3° Pour les longueurs, la *toise* (de France) vaut 6 *pieds*, le pied 12 *pouces*, le pouce 12 *lignes* et la ligne 12 *points*.

4° Pour les monnaies, le *florin* et la *livre* (tournois) se subdivisent chacun en 20 *sous* et le sou en 12 *deniers*. Le *louis* vaut 24^{tt} et la *couronne* 6.

5° Pour les poids, la *livre* (poids de marc) vaut 16 *onces*, l'once 8 *gros*, le gros 3 *deniers* et le denier 24 *grains*. Le *quintal* vaut 100 livres et le *millier* 1000.

6° Pour le temps, l'*année solaire* vaut 365 jours 5 heures 48 minutes 45 secondes ; elle contient 52 *semaines* 1 jour et vaut 12 *mois*, que nous supposerons tous de 30 jours, comme dans le commerce. Le *jour* vaut 24 *heures*, l'heure 60 *minutes*, la minute 60 *secondes*, etc. Le *siècle* vaut 100 *ans* et le *lustre* 5.

157. *Pour convertir un nombre complexe en fraction, il faut d'abord le réduire en unités de sa plus petite espèce ; puis donner au résultat, pour dénominateur, le nombre qui marque combien il y a d'unités de cette moindre espèce dans la plus grande proposée.* Par exemple, soit le nombre $5^t\ 3^p\ 4^{po}$.

On dira : la toise vaut 6 pieds ; les 5 toises valent donc 5 fois 6 pieds ou 30 pieds, qui avec les 3 pieds du nombre proposé, font 33 pieds. Mais le pied vaut 12 pouces ; les 33 pieds valent donc 33 fois 12 pouces ou 396 pouces, qui réunis aux 4^{po} du nombre, font 400 pouces. De sorte que $5^t\ 3^p\ 4^{po} = 400^{po}$. D'un autre côté, la toise vaut 6 fois 12 pouces ou 72^{po} ; donc chaque pouce est $\frac{1}{72}$ de toise ; les 400 pouces sont donc $\frac{400}{72}$ de toise. De sorte que $5^t\ 3^p\ 4^{po} = \frac{400}{72}$ de toise $= \frac{50}{9}$ de toise. On verrait de même que $6^j\ 20^h\ 40^l = \frac{247}{36}$ de jour.

$$\begin{array}{rl} 5^t\ 3^p\ 4^{po} & \\ \underline{6} & \\ 33 & \text{pieds} \\ \underline{12} & \\ 66 & \\ \underline{334} & \\ 400 & \text{pouces} \end{array}$$

158. *Pour évaluer une fraction concrète, c'est-à-dire, pour la réduire en nombre complexe, il faut diviser le numérateur par le dénominateur, en convertissant chaque reste en unités de l'espèce immédia-*

ment inférieure. D'après cette règle, soit la fraction $\frac{171}{32}$ de foudre.

Il est clair que $\frac{171}{32}$ de foudre sont la 32^e partie de 171 foudres. Or, la 32^e partie de 171^f est 5^f; et il reste 11^f, qui valent 11 fois 24 hottes, ou 264^h. La 32^e partie de 264^h est 8^h, avec le reste 8^h, qui vaut 8 fois 50 pintes ou 400^p. La 32^e partie de 400^p est 12^p, et il reste 16 pintes, qui valent 16 fois 2 chopines ou 32 chopines. La 32^e partie de 32 chopines est 1^c. On a donc $\frac{171}{32}$ de foudre $= 5^f\ 8^h\ 12^p\ 1^c$.

171^f	32
11^f	$5^f\ 8^h\ 12^p\ 1^c$
24	
44	
22	
264^h	
8^h	
50	
400^p	
80	
16^p	
2	
32 chopines	
0	

On trouvera de même que $\frac{31}{36}$ de louis $= 20^{\#}\ 13^{ſ}\ 4^{d}$.

159. L'addition et la soustraction des nombres complexes, s'opèrent comme l'addition et la soustraction des nombres entiers, pourvu qu'on ait égard au nombre d'unités de chaque espèce qu'il faut pour former l'unité de l'espèce immédiatement supérieure. Par ex., il est aisé d'effectuer les deux additions que voici :

7^t	2^p	8^{po}	9^{li}
9	5	9	10
8	3	7	11
6	4	3	7
8	4	10	8
41	3	4	9

12^q	87^{liv}	12^o	7^g
27	96	14	6
36	54	13	5
29	68	12	4
30	79	9	3
137	87	15	1

Dans la première de ces opérations, la somme de la 1^{re} colonne à droite est 45^{li}. Ces 45^{li} valent 3 pouces 9^{li}; on écrit donc les 9^{li} au-dessous, et on retient les 3 pouces, pour les ajouter à la colonne des pouces. On continue ainsi l'opération.

160. Voici également deux soustractions :

12^m	7^b	16^p		1820^a	5^m	20^j	18^h
9	8	19		1792	8	12	21
2	8	21		27	9	7	21

Dans la première de ces opérations, 19^p ne pouvant se soustraire de 16^p, on ajoute à celles-ci 1^b ou 24^p, ce qui donne 40^p. 19 hors de 40, reste 21^p, qu'on écrit au-dessous. Pour compenser, on ajoute 1 bichet aux 8 du nombre inférieur, et l'on continue l'opération de la même manière.

161. Pour faire la multiplication ou la division de deux nombres complexes, il suffit de les réduire en fractions équivalentes (157), puis de multiplier ou diviser l'une par l'autre de ces deux fractions et d'évaluer ensuite la fraction résultante (158). Par exemple, *supposant que le maldre de blé produise* $8^q\ 40^{liv}\ 10^o$ *de farine, combien produiront* $9^m\ 8^b\ 12^p$*?*

Réduisant d'abord les nombres complexes en fractions, on aura $8^q\ 40^{liv}\ 10^o = \frac{269}{32}$ de quintal et $9^m\ 8^b\ 12^p = \frac{197}{20}$ de maldre. Cela posé, puisque le maldre produit $\frac{269}{32}$ de quintal, les $\frac{197}{20}$ de maldre produiront

$$\frac{269}{32} \times \frac{197}{20} = \frac{52993}{640} = 82^q\ 80^{liv}\ 2^o\ 4^g.$$

On trouvera pareillement, que si $2^f\ 20^h\ 20^p$ de vin coûtent 50 louis $12^{\#}$, un foudre coûtera $17^l\ 17^{\#}\ 5^s\ 3^d$ environ.

162. Le desir de produire un ouvrage peu volumineux et d'un prix modique, nous a forcés d'omettre plusieurs détails et de ne présenter, dans ce qui précède, que les matières les plus directement utiles. C'est aussi pour cela que nous ne donnons pas ici la méthode des *parties aliquotes*, dont le but est d'abréger le calcul de la multiplication et de la division des nombres com-

plexes. Nous renvoyons, pour cet objet et beaucoup d'autres, à l'*Arithmétique élémentaire*, où nous croyons avoir présenté la science des nombres d'une manière complète et rigoureuse.

163. Voici quelques problèmes relatifs au calcul des nombres complexes.

Un marchand, qui avait 200 louis, a dépensé successivement $517^{\#}\ 12^{s}\ 8^{d}$, $89^{\#}\ 13^{s}\ 10^{d}$, $96^{\#}\ 17^{s}\ 11^{d}$, $316^{\#}\ 19^{s}$ et $54^{\#}\ 15^{s}\ 8^{d}$; combien a-t-il encore?

Quel âge avait une personne au 20 septembre de l'année 1825, à 8 heures du matin? On sait que cette personne est née [illegible] février de l'année 1783, à 10 heures 40' du soir.

[illegible]e lingère a fait confectionner 75 chemises, qui lui revien[illegible] à $421^{\#}\ 17^{s}\ 6^{d}$; elle les a vendues $91^{\#}\ 4^{s}$ la douzaine. Combien a-t-elle gagné par chemise?

$421^{\#}\ 17^{s}\ 6^{d}$ sont le prix coûtant de 75 chemises. Combien faut-il les vendre la douzaine pour gagner $1^{\#}\ 19^{s}\ 6^{d}$ par chemise?

Un grand ménage consomme tous les mois $8^{q}\ 60^{liv}$ de pain; combien sera-t-il de temps à consommer le pain fourni par 12 maldres de blé? On sait que $2^{m}\ 8^{b}$ de ce blé produisent $24^{q}\ 80^{liv}\ 8^{o}$ de pain.

Dans le bassin d'une fontaine, il entre $12^{f}\ 10^{h}\ 24^{p}$ d'eau en $3^{j}\ 18^{h}\ 40'$, et il en sort par jour $1^{f}\ 21^{h}$; combien faudra-t-il de temps pour que le bassin, contenant d'abord $8^{f}\ 22^{h}\ 40^{p}$ d'eau, en renferme 30^{f}?

Problèmes divers.

164. Ecrire le nombre onze cent onze millions, onze cent onze mille, onze cent onze.

Quel est le nombre dont la moitié des 3 quarts, étant diminuée des 2 tiers des 4 cinquièmes du même nombre, donne 19 pour reste?

Un homme prend tous les jours 3 huitièmes de livre de café, sa femme 7 douzièmes et ses enfans 9 dixièmes; combien seront-ils de jours pour consommer 48 livres?

Une marchande achète des poires qui lui reviennent à 5 pour 2^{s}; elle les revend à raison de 4 pour 3^{s} et gagne $3^{\#}\ 10^{s}$ sur son marché. Combien avait-elle de poires?

Quel est le nombre qui, étant multiplié par 3 quarts et le produit divisé par $4\frac{1}{2}$, donne 16 au quotient?

Combien faudrait-il de jours à 3 ouvriers pour faire ensemble un ouvrage de 720 aunes? On sait que pour faire seul cet ouvrage, le premier emploie 48 jours, le second 36 et le troisième 90.

Un marchand troque du drap pour du casimir. S'il compte son drap à raison de 40^f l'aune, le casimir, dont le prix est de 15^f, ne lui reviendra qu'à 13^f,50. Quel est le prix réel du drap?

Deux marchands veulent faire un troc : le 1^{er} [illegible] la toile qui vaut 1^f,40 l'aune en argent, et il ve[illegible] avoir 1^f,60 en troc ; le 2^e a du vin qui vaut 84^f le baril. A quel prix doit-il compter son vin pour compenser l'augmentation de la toile, et combien devra-t-il échanger de vin pour 648 aunes de toile?

Quelqu'un a placé un capital de 900^f, qui lui a rapporté en 4 ans 144^f d'intérêt simple. S'il place 9450^f au même taux, combien devra-t-il attendre de temps pour avoir 1764^f d'intérêt?

Trois personnes ont mis une somme de 1000^f à intérêt ; après 10 ans elles ont retiré, tant pour le capital que pour les intérêts simples, savoir : la 1^{re} 800^f, la 2^e 480 et la 3^e 120. Trouver les mises particulières et à combien pour 100 par an l'argent était placé.

Un élève étant resté en demi-pension depuis le 15 mars jusqu'au 27 mai, a donné pour ce temps 2 pièces de 40 francs et deux de 5 ; combien doit-on lui rendre, sachant que la demi-pension annuelle est de 100 flor.?

Trois tonneaux de tabac pèsent, avec le bois, 287^{liv}. Combien doit-on payer de livres *net*, si le vendeur rabat 8 pour 100 pour la *tare*, c'est-à-dire pour le poids du bois?

Des balles de café pesant 153^{liv}, n'ont été payées que pour 129^{liv} net : à combien pour 100 la tare a-t-elle été comptée ?

Un détachement de 350 hommes a reçu 950^f; les sous-officiers et caporaux ont eu chacun 4^f et les soldats 2^f, 50^c. Combien y avait-il de soldats ?

On a donné 1000^f pour la construction de deux murailles ayant, l'une 40 pieds de long, 10 de haut et 3 d'épaisseur, l'autre 30 pieds de long, 20 de haut et 2 d'épaisseur. Combien a coûté chaque muraille ?

60 ouvriers ont fait, en 18 jours, 354 toises d'ou-[illegible]; ils ont gagné chacun par jour, 3# 18^s 8^d. [illegible]bien revient chaque toise ?

[illegible] argent était à 5 pour 100 par an, les intérêts simples d'un capital seraient [illegible], au bout de 4 ans, qu'en les ajoutant à ce capital et plaçant la somme au taux de 7 pour 100 tous les ans, [illegible] au bout de l'année serait 3500^f. Quel est le capital primitif ?

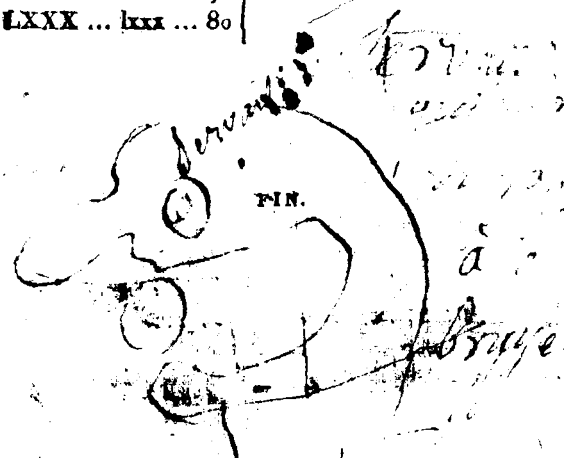
On a 45 aunes d'un même drap en trois coupons; le 1er coûte 60^f, le second 90 et le 3^e 120. Trouver le nombre d'aunes de chaque coupon.

Une cassette rectangulaire ayant 0^m, 65 de longueur, 0^m, 39 de largeur et 0^m, [illegible]3 de profondeur, coûte 6^f, 25 et pèse 0^{liv}, 96. Elle a été remplie de pièces de 40 fr., mises en rouleaux dressés sur le fond et se touchant. On demande le poids et la valeur de la cassette ainsi remplie, sachant que chaque pièce de 40^f a 0^m, 026 de largeur diamétrale, 3 demi-millimètres d'épaisseur et 12, 9032 d'esterling de pesanteur.

Trouver aussi le poids et la valeur lorsque les rouleaux sont couchés en se touchant, 1° dans le sens de la longueur, 2° dans le sens de la largeur de la cassette.

VALEURS DES CHIFFRES ROMAINS.

I	= j	= 1
II	... ij	... 2
III	... iij	... 3
IV	... iv	... 4
V	... v	... 5
VI	... vj	... 6
VII	... vij	... 7
VIII	... viij	... 8
IX	... ix	... 9
X	... x	... 10
XX	... xx	... 20
XXX	... xxx	... 30
XL	... xl	... 40
L	... l	... 50
LX	... lx	... 60
LXX	... lxx	... 70
LXXX	... lxxx	... 80
XC	= xc	= 90
C	... c	... 100
CC	... cc	... 200
CCC	... ccc	... 300
CCCC	... cccc	... 400
D ou IƆ	... d	... 500
DC	... dc	... 600
DCC	... dcc	... [illegible]
DCCC	... dccc	... [illegible]
DCCCC	... dcccc	... [illegible]
M ou CIƆ	... m	... 1000
MC	... mc	... 1100
MCC	... mcc	... 1200
MCCC	... mccc	... 1300
MCCCC	... mcccc	... 1400
MD	... md	... 1500



FIN.