TRAITÉ
D'ALGÈBRE
ÉLÉMENTAIRE.

PAR

J. N. NOËL,

PROFESSEUR DES SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES, PRINCIPAL DE L'ATHÉNÉE DE LUXEMBOURG, CORRESPONDANT DE LA SOCIÉTÉ DES LETTRES, SCIENCES ET ARTS, DE METZ.

DEUXIÈME ÉDITION,

REVUE, CORRIGÉE ET AUGMENTÉE.

LUXEMBOURG,

DE L'IMPRIMERIE DE J. LAMORT, PLACE D'ARMES

1827.

AVERTISSEMENT.

La table des matières du présent ouvrage montre assez qu'il renferme tous les objets qui, pour l'ordinaire, font partie de l'enseignement raisonné de l'algèbre. Les principes y sont éclaircis par beaucoup d'exemples et de problèmes; mais la crainte de nuire à la liaison des idées, en séparant les théories par des applications trop multipliées, n'a pas permis de faire entrer dans ce volume, toutes les questions que l'on croit propres à exercer les élèves et à leur inspirer le goût de l'étude de l'algèbre : on a réuni ces questions avec d'autres recherches, dans l'ouvrage publié cette année sous le titre de *Mélanges d'algèbre*. Plusieurs de ces recherches se rattachent à d'importantes théories, et méritent l'attention des élèves, tant par l'intérêt qui leur est propre, que par les exercices variés qu'elles fournissent.

Comme la théorie du plus grand commun diviseur algébrique dépend, sous quelque rapport, de la résolution des équations, il a paru convenable de ne s'en occuper qu'immédiatement avant l'élimination en général et la recherche des racines égales, dont elle est la base. Cette théorie, placée immédiatement après la division, offre des difficultés aux élèves, encore peu familiarisés avec les combinaisons du calcul algébrique; et comme alors elle ne sert qu'à simplifier les fractions littérales, on y supplée souvent par la décomposition en facteurs, ainsi qu'on en a donné plusieurs exemples.

Quant à la méthode du plus grand commun diviseur numérique, on n'a pas cru devoir en grossir ce volume, d'autant plus que cette méthode et les conséquences qu'elle fournit pour la divisibilité des nombres, sont données, avec toute la rigueur et les détails nécessaires, dans l'Arithmétique élémentaire. C'est aussi pour cela qu'on n'a pas parlé des proportions et de leurs applications à la solution des problèmes, qui se trouvent également dans l'Arithmétique.

Les fractions continues servant à compléter plusieurs théories algébriques, on a dû les faire entrer dans le présent ouvrage, avec leurs applications les plus importantes. De cette manière on pourra les supprimer dans l'Arithmétique, où elles reçoivent peu d'applications, et ce traité d'algèbre sera d'une utilité plus étendue; ce qui est conforme au but qu'on s'est proposé, de publier un ouvrage élémentaire, renfermant les notions et les principes propres à faciliter l'étude de la haute analyse. On a voulu en outre donner aux diverses théories, la clarté et la rigueur désirables; et le lecteur jugera jusqu'à quel point on y est parvenu.

Remarque. Les nombres mis entre parenthèses indiquent l'article sur lequel s'appuie celui dont on s'occupe.

TRAITÉ D'ALGÈBRE.

Notions préliminaires.

1. Le but d'un calcul quelconque est toujours de déterminer une ou plusieurs grandeurs inconnues, à l'aide d'un certain nombre de quantités données.

2. Si les valeurs des quantités qu'on regarde comme données, sont réellement déterminées, c'est-à-dire, sont exprimées par des nombres et en chiffres, comme en arithmétique, les opérations pourront s'effectuer à mesure que les raisonnemens y conduiront; le résultat ne conservera donc aucune trace des nombres qui l'auront fourni; et par conséquent, on ne verra pas aisément comment on pourrait obtenir ce résultat, dans les calculs de même espèce, sans recommencer les raisonnemens qui l'ont donné, et qui sont quelquefois très-compliqués.

3. Au contraire, si les quantités données sont énoncées d'une manière *indéterminée*, les raisonnemens auront lieu pour toutes les valeurs possibles de ces quantités; les résultats auront donc aussi lieu pour toutes ces valeurs; et par conséquent, ces résultats seront des *règles* pour calculer les valeurs inconnues dans toutes les *questions* de même nature (*).

4. On voit donc qu'il sera toujours très-avantageux d'énoncer les nombres donnés d'un problème, d'une manière indéterminée. Mais alors, il faudra raisonner et calculer avec ces nombres indéterminés; et c'est ce qu'on fera toujours au moyen de l'*algèbre*. Ainsi,

L'ALGÈBRE est la science du calcul des quantités énoncées d'une manière indéterminée. Son but est non-seulement de

---

(*) On distingue deux sortes de *questions*, savoir : les *théorèmes* et les *problèmes*. Dans les théorèmes, on se propose d'établir certaines propriétés de nombres, au moyen d'un raisonnement, appelé *Démonstration*. Dans les problèmes, on a pour but de trouver des nombres inconnus, à l'aide d'autres nombres donnés, qui ont avec les premiers, des *relations* indiquées par l'énoncé de la question. *Résoudre* un problème, c'est effectuer les raisonnemens et les calculs qui conduisent aux valeurs des quantités inconnues.

résoudre les questions que l'on peut proposer sur les quantités, mais aussi de donner des règles qui conviennent à tous les cas particuliers d'un même problème, quels que soient les nombres donnés de ce problème.

5. Pour remplir ce double but de l'algèbre, il est nécessaire d'exprimer les quantités indéterminées par des signes plus abrégés que ceux du langage ordinaire (*). Or, on a choisi les lettres de l'alphabet, parce qu'elles n'ont aucune valeur par elles-mêmes, et qu'on sait déjà les nommer et les écrire : on est convenu de représenter les quantités qu'on regarde comme données, par les premières lettres a, b, c, d, etc., et les quantités réellement inconnues, par les dernières lettres x, y, z, etc.

A l'égard des nombres déterminés, on les désigne par des chiffres, comme en arithmétique; ou bien, par les premières lettres a, b, c, etc., de l'alphabet, lorsque les expressions en chiffres sont encore trop longues.

Enfin, comme les phrases qui tiennent aux opérations de l'arithmétique reviennent continuellement dans le calcul, on est convenu, pour mieux abréger, de représenter les expressions, *augmenté de* ou *plus*, *diminué de* ou *moins*, *multiplié par*, *divisé par*, *est égal à* ou *égal*, *est plus grand que*, *est plus petit que*, etc., respectivement par les signes, $+$, $-$, $\times$, $:$, $=$, $>$, $<$, etc. On remplace aussi le signe $\times$ par un point, et le signe $:$ par un trait horizontal, en écrivant le dividende au-dessus et le diviseur au-dessous.

6. D'après ces conventions, on écrit dans un espace beaucoup plus petit, la phrase suivante :

Les trois quarts d'un nombre inconnu, augmentés de douze, égalent le triple du même nombre inconnu, diminué de quarante-huit.

En effet, en désignant par x l'expression *le nombre inconnu*, la phrase dont il s'agit devient :

(*) Lorsque les quantités indéterminées sont énoncées en langage ordinaire, pour peu que les relations entre les quantités connues et les quantités inconnues soient compliquées, les phrases successives des raisonnemens et des calculs deviennent très-longues; il est par conséquent très-difficile d'en saisir toutes les parties, et d'opérer toutes les combinaisons propres à conduire aux valeurs inconnues.

$$\frac{1}{4}x + 12 = 3x - 48.$$

7. Par là on voit qu'en faisant usage des abréviations précédentes et de celles qu'on pourrait encore introduire, on ne sera guère plus de temps pour écrire les phrases successives des raisonnemens et des calculs que pour les énoncer; on pourra donc mettre sous les yeux les phrases dont il s'agit; et c'est là un très-grand avantage; car, par ce moyen, non-seulement on soulagera beaucoup la mémoire, mais encore on rapprochera les objets de manière qu'il sera très-facile d'en saisir les différens rapports, et de voir ce qu'il faut faire pour arriver aux valeurs inconnues. On devra donc toujours se servir des abréviations dont il s'agit; et c'est ce que nous ferons désormais.

8. Par exemple, *connaissant la somme* 14 *et la différence* 6 *de deux nombres, trouver chacun de ces nombres?*

En désignant par x le plus petit des deux nombres cherchés; le plus grand, qui le surpasse de 6, sera $x + 6$: et comme la somme de ces deux nombres égale 14, il s'ensuit qu'on a

$$x + x + 6 = 14.$$

Mais $x + x$, c'est 2 fois x, ou $2x$; donc l'*égalité* précédente est la même chose que

$$2x + 6 = 14 \text{ (*)}.$$

Or, si du tout 14, on ôte une partie 6, il restera l'autre $2x$; et par conséquent, la 2ᵉ égalité précédente équivaut à celle-ci :

$$2x = 14 - 6 = 8.$$

Enfin, puisque 2 fois x valent 8, x seul vaudra la moitié de 8, ou 4; l'égalité qu'on vient de trouver équivaut donc à

$$x = 4.$$

Ainsi, le plus petit des deux nombres cherchés vaut 4; le plus grand vaut donc $4 + 6$, ou 10. En effet, la somme de ces deux nombres est 14, et leur différence, 6 (**).

(*) On appelle *égalité*, toute expression composée de deux quantités séparées par le signe =.

(**) La marche que nous venons de suivre ne changerait pas, si l'on résolvait, en langage ordinaire, le problème proposé; et il en résulte qu'en général, pour résoudre un problème, il faut d'abord chercher les phrases ou égalités qui expriment les relations que l'énoncé établit entre les quantités connues et les quantités inconnues; puis, transformer ces

9. Si les nombres donnés du problème étaient différens de 14 et de 6, il faudrait recommencer les raisonnemens et les calculs qu'on vient de faire, pour avoir la valeur du plus petit nombre; et cela tient à ce que la valeur 4, à laquelle on est parvenu, ne conserve aucune trace des nombres qui l'ont fournie. Mais il n'en serait pas de même si l'on énonçait les nombres donnés du problème, d'une manière indéterminée, comme il suit :

Connaissant la somme et la différence de deux nombres, trouver chacun de ces nombres?

En effet, soit a la somme donnée, b la différence donnée, et x le plus petit des deux nombres cherchés; le plus grand, qui le surpasse de b, sera donc $x+b$: et comme la somme de ces deux nombres est égale à a, il s'ensuit qu'on a

$$x+x+b=a.$$

Mais comme $x+x$, c'est $2x$, l'égalité précédente est la même chose que

$$2x+b=a.$$

Or, si du tout a, on ôte une partie b, il restera l'autre $2x$; donc

$$2x=a-b.$$

Enfin, puisque 2 fois x valent $a-b$, x seul vaudra la moitié de $a-b$, et par conséquent

$$x=\frac{a-b}{2}.$$

Ce résultat montre que, *pour avoir le plus petit nombre, il faut ôter la différence donnée de la somme donnée, et prendre la moitié du reste.*

Ainsi, le résultat des raisonnemens et des calculs précédens, est une *règle* pour calculer la valeur du plus petit nombre, dans tous les problèmes de même espèce; et cela ne pouvait manquer d'arriver, car le résultat dont il s'agit ayant été obtenu sans assigner de valeurs particulières aux nombres a et b, doit nécessairement avoir lieu pour toutes les valeurs de ces nombres.

---

phrases en une suite d'autres équivalentes, dont les dernières fassent connaître les valeurs inconnues. Mais, malgré l'emploi des signes abréviatifs, cette méthode serait souvent impraticable, si l'algèbre ne fournissait d'ailleurs des règles pour opérer les transformations que cette même méthode exige.

Donc, si l'on veut connaître la valeur du plus petit nombre, dans l'un des cas particuliers du problème proposé, il suffira de substituer, dans l'expression $x = \frac{a-b}{2}$, les valeurs que prendront a et b, et d'effectuer les opérations indiquées. Par exemple, si a vaut 14, et b, 6, le plus petit nombre x vaudra $\frac{14-6}{2}$ ou 4; si a vaut 105, et b, 57, le plus petit nombre x vaudra $\frac{105-57}{2}$ ou 6; et ainsi de suite.

10. D'après cela, on voit que l'avantage de représenter les nombres donnés du problème, par les premières lettres de l'alphabet, ne consiste pas seulement à abréger les raisonnemens; mais encore à donner des expressions montrant comment on résoudra tous les cas particuliers du problème proposé, sans recommencer aucun raisonnement.

11. On appelle *formule*, l'expression qui montre quelles opérations on doit effectuer sur des nombres donnés, pour en avoir un autre qu'on cherche. Ainsi $x = \frac{a-b}{2}$ est une formule: c'est la traduction, en signes algébriques, de la règle pour résoudre le problème qui l'a donnée.

12. D'après ce qui précède, on voit que l'algèbre est une espèce de langue qui se compose d'une suite de signes abréviatifs et généraux, au moyen desquels on exprime, d'une manière très-facile et très-abrégée, les raisonnemens et les opérations que nécessite le calcul des quantités indéterminées, c'est-à-dire, l'art de résoudre les questions numériques.

Ainsi, pour appliquer l'algèbre à la démonstration d'un théorème, ou à la solution d'un problème, il est nécessaire de connaître les opérations du calcul des quantités indéterminées. Et comme ces opérations deviennent d'autant plus faciles que les expressions des quantités sont plus simples, il faut d'abord apprendre à simplifier les expressions algébriques.

Moyens de simplifier les expressions algébriques.

13. On appelle *expression algébrique* ou *quantité littérale*, toute quantité écrite en langage algébrique, c'est-à-dire exprimée au moyen des signes abréviatifs de l'algèbre. Ainsi $3a - 4b$ est

une quantité littérale ; c'est l'expression algébrique de 3 fois le nombre donné a, moins 4 fois le nombre donné b.

14. On appelle *termes* les quantités qui, dans une expression algébrique, sont séparées par les signes $+$ et $-$; cette expression elle-même est un *polynome* ou une quantité *complexe*. Ainsi $3a - b + 2c$ est un polynome, dont les termes sont $3a$, $-b$ et $+2c$.

15. Une expression algébrique est appelée *monome*, *binome*, *trinome*, *quadrinome*, etc., suivant qu'elle est composée de 1, 2, 3, 4, etc., termes. Par exemple, $-2a$ est un monome, $a - 2b$ un binome, $2a - b - c$ un trinome, etc.

16. Le *signe* d'un terme est le signe $+$ ou le signe $-$ qui précède ce terme ; en observant que *si un terme n'a pas de signe écrit, il est censé avoir le signe* $+$. En effet, dans $+a$, le signe $+$ qui précède a, indique que a est ajouté à rien ; or, si à rien on ajoute a, on aura nécessairement a pour somme : donc $+a = a$ ou $a = +a$.

Pareillement $+2a - b = 2a - b$. D'où il suit que quand un terme, précédé du signe $+$, commence une expression algébrique, on doit, pour abréger, supprimer ce signe $+$. Mais il n'en serait pas de même, si le terme avait le signe $-$; car $-b$, par exemple, n'est pas la même chose que b.

17. Pour abréger un produit indiqué, tel que $3 \times a \times b \times c$, on sous-entend le signe $\times$, et on écrit simplement $3abc$. Réciproquement, l'expression $6abcd = 6 \times a \times b \times c \times d$.

Mais si l'on avait le produit 4×7, on ne pourrait pas supprimer le signe $\times$; car alors on aurait 47, expression identique avec celle du nombre 47, tandis que $4 \times 7 = 28$. Dans ce cas, on remplace le signe $\times$ par un point, et on écrit $4 \times 7 = 4 \cdot 7$.

18. Dans le produit $29abc$, 29 est le facteur *numérique* ; a, b et c les facteurs *littéraux*, et abc la *partie littérale*.

19. Lorsque dans un terme, il entre un facteur numérique, on le place toujours à la gauche des lettres de ce terme, sur la même ligne, et alors on l'appelle *coefficient*. Ainsi, au lieu de $a9$, on écrira $9a$, et 9 sera le coefficient.

En général, le *coefficient* d'un terme est un nombre qui, placé à la gauche des lettres de ce terme et sur la même ligne, indique combien de fois on doit prendre le nombre exprimé par ces lettres. Par exemple, dans $4ab$, le coefficient 4 indique qu'on doit prendre 4 fois le produit ab. Dans $1a$ le coefficient est 1. Mais alors on peut se dispenser de l'écrire, car $1a = a$. Réciproquement, *lorsque le coefficient n'est pas écrit, il est* 1; car $a = 1a$, $x = 1x$, etc.

20. Lorsqu'une même lettre est plusieurs fois facteur dans un produit, on est convenu, pour abréger, de n'y écrire qu'une seule fois cette lettre; mais d'indiquer, par un nombre placé à sa droite et au-dessus, combien de fois elle est facteur dans le produit proposé : ce nombre s'appelle *exposant* de la lettre. Ainsi, au lieu de $a \times a \times a \times a$, on écrit simplement a^4, qu'on énonce *a quatre*, et 4 est l'exposant de a (*).

En général, l'*exposant* d'une lettre est un nombre qui, écrit à la droite et au-dessus de cette lettre, montre combien de fois elle est facteur dans le produit. Par exemple, dans a^3b^5, l'exposant 3 de a fait voir que a est 3 fois facteur dans le produit, et l'exposant 5 de b montre que b est facteur 5 fois; de sorte que

$$a^3b^5 = a \times a \times a \times b \times b \times b \times b \times b.$$

Et l'on voit combien l'exposant abrége les expressions des produits. Si a vaut 3, et b, 2, a^3b^5 vaudra $3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ ou 864.

21. Lorsque l'exposant est 1, on se dispense de l'écrire; car on voit aussi bien que b est une fois facteur dans ab que dans ab^1. Réciproquement, *quand l'exposant n'est pas écrit, il est* 1; car dans ab, b est une fois facteur et doit avoir 1 pour exposant : on a donc $ab = ab^1$; ce qui exige que $b^1 = b$.

22. D'après la définition de l'exposant, si l'on avait ab^0, l'exposant o de b indiquerait que b n'est pas facteur avec a, ou que b ne multiplie pas a : d'où il suit que $ab^0 = a$; ce qui exige que $b^0 = 1$. Ainsi b^0, qu'on énonce *b exposant* o ou *b puissance* o, est un symbole équivalent à l'unité. En général, *toute quantité affectée de l'exposant zéro, donne l'unité.*

(*) Il faut bien prendre garde de confondre l'exposant avec le coefficient; de confondre, par exemple, a^3 avec $3a$; car a^3 est l'abréviation de $a \times a \times a$, tandis que $3a$ est l'abréviation de $a + a + a$. Si a vaut 4, a^3 vaudra 64, tandis que $3a$ ne vaudra que 12. Au reste, on ne confondra jamais l'exposant avec le coefficient, si l'on fait attention que le coefficient s'énonce toujours avant la lettre, et l'exposant toujours après.

23. On appelle *puissance* d'un nombre le produit formé par des multiplications successives de ce nombre. L'*ordre* ou le *degré* de la puissance est le nombre de facteurs égaux dont cette puissance est formée. Ainsi, b^n, qu'on énonce *b puissance n*, est la puissance $n^{ième}$ de b, et n est l'*exposant* ou le *degré* de la puissance. D'après cela, a^1, a^2, a^3, a^4, ..., sont respectivement les puissances 1re, 2^e, 3^e, 4^e, ..., de a. On dit aussi que a^2 ou $a\times a$ est le *carré* de a, et que a^3 ou $a\times a\times a$ est le *cube* de a.

24. La première puissance d'un nombre est ce nombre lui-même, puisque $a^1=a$; le carré d'un nombre est le produit de ce nombre par lui-même; le cube d'un nombre est le produit de ce nombre multiplié deux fois de suite par lui-même; en général, la puissance $n^{ième}$ de b est b multiplié $n-1$ fois de suite par lui-même.

25. Pour indiquer une opération sur un polynome, on met ce polynome entre parenthèses ( ), et l'on indique sur ces parenthèses, l'opération, comme on l'indiquerait sur une seule lettre. Ainsi, pour montrer que $a-b$ est augmenté ou diminué du binome $2a+b$, multiplié ou divisé par ce même binome, on écrit :

$$(a-b)+(2a+b),\ (a-b)-(2a+b),$$
$$(a-b)(2a+b) \text{ et } (a-b):(2a+b) \text{ ou } \frac{a-b}{2a+b}.$$

Pour indiquer la puissance $m^{ième}$ de $a-b$, on écrira $(a-b)^m$ et on énoncera, $(a-b)$ *puissance m*.

Si l'expression algébrique renfermait déjà des parenthèses, on la mettrait entre *crochets* [ ]; et si elle avait des parenthèses et des crochets, on la placerait entre deux *accolades* { }. Ainsi l'expression

$$\{2a-b[3b-(a-b)]+3\}(2a-b),$$

signifie qu'on doit ôter b de a, soustraire le reste de 3 fois b, multiplier b par le nouveau reste, retrancher le produit de 2 fois a, ajouter 3 au résultat et multiplier la somme par le reste qu'on trouve en ôtant b de 2 fois a. Cette traduction, beaucoup plus longue que l'expression algébrique qui l'a fournie, montre en quoi sont utiles les signes que nous venons d'employer.

26. Une quantité est appelée *positive* ou *négative*, suivant qu'elle est précédée du signe + ou du signe —. Ainsi $+2a$ est une quantité positive ou un terme *additif*, et $-3ab$ une quantité négative ou un terme *soustractif*.

27. Comme *la soustraction et l'addition d'un même nombre se compensent nécessairement et doivent disparaître du résultat*, nous admettrons toujours désormais que $-a+a=0$.

Et puisque *soustraire un tout, c'est soustraire chacune de ses parties*, nous conviendrons toujours d'écrire, 1° $a-(a+b)=a-a-b$; 2° $-4a=-a-a-a-a$, et en général, n soustractions successives de $a=-na$.

Les soustractions précédentes étant impossibles, les égalités que nous venons de poser ne peuvent être démontrées : ce ne sont que de pures conventions, qu'il faut néanmoins admettre, d'abord parce qu'elles n'ont rien de contraire aux définitions déjà établies, et qu'ensuite elles étendent à un plus grand nombre d'objets, les usages de deux principes de calcul; ce qui est avantageux et conforme au but qu'on se propose en algèbre.

28. Il résulte de ces conventions, que si $b>a$ et qu'on ait $b=a+d$ ou $b-a=d$, on aura

$$a-b=a-(a+d)=a-a-d=-d=-(b-a);$$

de sorte que quand b est plus grand que a, $a-b$ est négatif et égal à $-(b-a)$.

On aurait de même $10-15=10-10-5=-5=-(15-10)$. Ainsi, quoique la soustraction $10-15$ soit évidemment impossible, on peut néanmoins l'effectuer en partie; et le signe $-$ qui précède 5, dans le résultat -5, montre qu'il faudrait encore soustraire 5 unités, pour exécuter réellement la soustraction demandée. On voit donc que toute quantité négative isolée, telle que -5, indique une soustraction impossible.

29. Néanmoins, on doit soumettre ces expressions impossibles à toutes les règles du calcul des nombres. En effet, puisque les nombres abstraits sont représentés par des lettres, qui n'ont aucune valeur numérique significative et explicite, il est impossible de distinguer, dans le cours des raisonnemens et des transformations du calcul, si a, par exemple, est plus grand ou plus petit que b; on sera donc, malgré soi, entraîné à raisonner et à opérer sur $a-b$, comme sur un nombre réel, lorsque a sera moindre que b, c'est-à-dire, lorsque $a-b$ sera au fond un monome soustractif. De sorte que si l'on veut que l'algèbre ait toute la généralité dont elle est susceptible, il faut absolument soumettre au calcul des nombres, tous les monomes négatifs de la forme $-a$; et c'est ce que nous ferons désormais.

Par exemple, supposons que la solution d'un problème ait donné

$$x = a(a - b) - (2a - 9b);$$

pour que le but de l'algèbre soit rempli (4), il faut que cette formule ait lieu, quels que soient les nombres a et b. Or, supposons $a = 3$ et $b = 5$, cette formule deviendra

$$x = 3(-2) - (-39),$$

expression impossible, si l'on ne sait pas multiplier 3 par -2 et soustraire -39 du produit. Mais si l'on fait entrer dans le calcul les quantités négatives isolées, on apprendra que $x = 3(-2) - (-39)$ devient $x = -6 + 39 = 33$. De sorte que la formule proposée sera vraie pour $a = 3$ $b = 5$, et sera générale, comme l'exige l'algèbre (4).

30. *Un polynome ne change pas de valeur, dans quelqu'ordre qu'on écrive ses termes.* Par exemple, je dis que

$$8 - 12 + 6 - 9 + 10 = 8 + 6 + 10 - 12 - 9.$$

En effet, il est facile de voir que le 2ᵉ quintinome se réduit à 3. Quant au 1ᵉʳ, puisque soustraire 12, c'est soustraire 8 et 4; ajouter 6, c'est ajouter 4 et 2; soustraire 9, c'est soustraire 2 et 7; enfin, ajouter 10, c'est ajouter 7 et 3; il s'ensuit que $8 - 12 + 6 - 9 + 10 = 8 - 8 - 4 + 4 + 2 - 2 - 7 + 7 + 3$. Or, $8 - 8 = 0$, ainsi que $-4 + 4$, $+2 - 2$ et $-7 + 7$; donc le 1ᵉʳ quintinome se réduit à $+3$ ou à 3, comme le 2ᵉ.

31. Le principe précédent conduit à la réduction des termes *semblables*. On appelle ainsi les termes qui ont la même partie littérale, c'est-à-dire qui ne peuvent différer que par les signes et les coefficiens, comme $+8a^2b^3$ et $-3a^2b^3$.

32. La partie littérale étant considérée comme une certaine espèce d'unité, les termes semblables renfermeront des nombres d'unités de cette espèce, marqués par leurs coefficiens. On pourra donc ajouter ou soustraire entre eux ces nombres d'unités; et par conséquent, réduire plusieurs termes semblables en un seul, en ajoutant ou en soustrayant leurs coefficiens. C'est ainsi que si $x = 8a^3b^2 - 6a^3b^2 + 2a^3b^2$, on aura $x = 4a^3b^2$.

Ces sortes de réductions sont fort utiles; car pour avoir la valeur de x en chiffres, il faudrait effectuer 17 opérations partielles avant la réduction, et seulement 5 après.

33. *Pour opérer la réduction des termes semblables, il faut prendre la somme de tous ceux qui ont le même signe, soit + soit —, et donner à cette somme le signe commun. Mais quand deux termes semblables ont des signes contraires, on soustrait le plus petit du plus grand, et l'on donne au reste le*

signe de ce plus grand. D'après cette règle, si l'on a le polynome $5a^2b - 3bc + 4c^3 + 2a^2b - 8bc - 6c^3$,

on trouvera $7a^2b - 11bc - 2c^3$.

En effet, on peut, sans changer la valeur du polynome proposé, rapprocher les termes semblables (30); ce qui donne

$$5a^2b + 2a^2b - 3bc - 8bc + 4c^3 - 6c^3.$$

Or, il est évident que $5a^2b + 2a^2b = 7a^2b$. De même $-3bc - 8bc = -11bc$, et enfin $+4c^3 - 6c^3 = +4c^3 - 4c^3 - 2c^3 = -2c^3$. Donc le polynome proposé se réduit réellement à

$$7a^2b - 11bc - 2c^3.$$

On aurait de même $5ab^2 - 2a^2 + 3bc - 4a^2 + 2ab^2 - 9bc + 3a^2 = 7a^2b - 3a^2 - 6bc$. C'est ce qu'on vérifie en prenant, par exemple, $a = 4$, $b = 3$ et $c = 2$; car alors on trouve que le polynome proposé et le trinome qui en résulte, se réduisent chacun à 252.

34. La considération des quantités négatives dans le calcul, conduit à distinguer les opérations algébriques des opérations arithmétiques analogues. Une opération est *algébrique*, lorsqu'on a égard aux signes qui peuvent affecter les quantités. Une opération est *arithmétique*, quand on ne doit avoir égard qu'aux *valeurs absolues* des quantités, c'est-à-dire, qu'aux nombres d'unités que ces quantités renferment.

Le *calcul algébrique* a pour but de trouver la plus simple forme dont un résultat soit susceptible, lorsqu'on n'assigne aucune valeur numérique aux lettres; et on parvient à cette plus simple forme au moyen des quatre 1^res^ opérations de l'algèbre.

De l'Addition algébrique.

35. L'*addition algébrique* est une opération par laquelle on réunit plusieurs quantités de même espèce, affectées des signes $+$ et $-$, en une seule quantité appelée *somme*. De sorte que le mot *somme* exprime ici une somme d'opérations, c'est-à-dire le résultat de toutes les opérations indiquées par les expressions algébriques proposées.

36. D'après cette définition, on trouve que

$+a + (+b) = +a + b$, $-a + (+b) = -a + b$,
$+a + (-b) = +a - b$ et $-a + (-b) = -a - b$.

En effet, ajouter $+b$ à $+a$, c'est ajouter l'addition de b à l'addition de a (*); la somme sera donc composée de l'addition de a et de l'addition de b; elle sera donc $+a+b$. De sorte que $+a+(+b)=+a+b$. On démontrerait de même l'exactitude des trois autres résultats.

37. On voit, par les égalités précédentes, qu'*un terme ajouté est écrit avec son signe*. Or, pour ajouter un polynome, il est évident qu'il faut ajouter chacun de ses termes : et puisque chaque terme ajouté est écrit avec son signe, le polynome ajouté sera lui-même écrit avec ses signes. Ainsi, *pour faire l'addition des quantités algébriques, il faut les écrire les unes à la suite des autres, ou les unes sous les autres, avec leurs signes tels qu'ils sont, puis opérer la réduction des termes semblables.* Par ex., je dis que $3a+(2b-a+3c)=3a+2b-a+3c$.

En effet, ajouter à $3a$ le trinome $2b-a+3c$, c'est y ajouter le trinome $2b+3c-a$, qui a même valeur (30). Or, si on ajoute d'abord à $3a$ le tout $2b+3c$, ce qui se fait évidemment en y ajoutant chacune de ses parties $2b$ et $3c$, la somme sera $3a+2b+3c$. Mais ce n'est pas $2b+3c$ qu'il faut ajouter à $3a$, c'est $2b+3c-a$; on a donc ajouté a de trop; la somme trouvée est donc trop grande de a; il faut par conséquent la diminuer de a, et il viendra $3a+2b+3c-a$ ou $3a+2b-a+3c$, comme on l'a trouvé en appliquant la règle.

38. D'après la même règle, si l'on veut avoir la somme des quantités $3a^2b-5ab^2+4b^3$, $2ab^2+3b^3-4a^2b$ et $5b^3-4ab^2-2a^2b$, on disposera et l'on effectuera l'opération comme il suit :

$$\begin{array}{r} 3a^2b-5ab^2+4b^3 \\ 2ab^2+3b^3-4a^2b \\ 5b^3-4ab^2-2a^2b \\ \hline \text{Somme réduite} \cdots -3a^2b-7ab^2+12b^3. \end{array}$$

Si $a=2$ et $b=3$, les trinomes proposés deviennent respectivement 54, 69 et 39; leur somme est donc 162. La somme

(*) Au premier abord, il peut paraître singulier de dire qu'*on ajoute une addition* ou *une soustraction*. Mais en y réfléchissant un peu, on verra que cette manière de parler n'a rien qui puisse choquer le bon sens; car, par exemple, ajouter à 9 fr. une soustraction de 6^f, c'est réellement faire éprouver à 9^f une diminution de 6^f; le résultat est donc 9^f-6^f. De sorte que $9+(-6)=9-6$.

algébrique trouvée se réduit en effet à 162, lorsqu'on y prend $a=2$ et $b=3$.

De la Soustraction algébrique.

39. La *soustraction algébrique* est une opération par laquelle, connaissant la somme de deux quantités et l'une de ces quantités, on trouve l'autre, appelée *reste*, *excès* ou *différence*.

40. D'où il suit que le reste d'une soustraction algébrique est toujours tel, qu'en l'ajoutant à la quantité à soustraire, la somme se réduit à la quantité dont on doit soustraire.

41. D'après cela, il est clair qu'on aura

$$+a-(+b)=+a-b,\quad +a-(-b)=+a+b,$$
$$-a-(+b)=-a-b \text{ et } -a-(-b)=-a+b.$$

Car chaque reste ajouté à la quantité à soustraire, donne la quantité dont on doit soustraire (40). D'ailleurs, dans le 1[er] cas, $+a$ est la même chose que $+a+b-b$; et puisque de ce $+a$, on veut soustraire $+b$, il faut faire en sorte que $+b$ ne s'y trouve plus; il faut donc y effacer $+b$, et il restera $+a-b$. De sorte que $+a-(+b)=+a-b$. On démontrerait de même l'exactitude des trois autres résultats.

42. Les quatre égalités précédentes montrent qu'*un terme soustrait est écrit avec son signe changé*. Or, pour soustraire un polynome, il est clair qu'il faut soustraire chacun de ses termes; et puisque chaque terme soustrait est écrit avec un signe contraire, le polynome soustrait sera écrit avec des signes contraires. Donc *pour faire la soustraction des quantités algébriques, il faut changer les signes de la quantité à soustraire, et l'écrire avec ses signes ainsi changés, à la suite ou au-dessous de l'autre quantité, puis opérer la réduction des termes semblables.* C'est ainsi que $12-2-(8-7+3)=12-2-8+7-3$.

Pareillement, si de $2a^3-4a^2b+3ab^2$
on veut soustraire.. $a^3+2a^2b-5ab^2$

Il restera $2a^3-4a^2b+3ab^2-a^3-2a^2b+5ab^2$,
ou en réduisant, $a^3-6a^2b+8ab^2$.

Et en effet, en ajoutant ce reste au trinome à soustraire, la somme se réduit au trinome dont on doit soustraire; ce reste est donc le véritable (40).

Si $a=5$ et $b=3$; le premier des deux trinomes proposés se réduit à 85 et le second à 50; leur différence est donc 35. Et comme dans ce cas le reste algébrique obtenu se réduit aussi à 35, on voit que la règle employée est exacte.

De la Multiplication algébrique.

43. La *multiplication algébrique*, comme la multiplication arithmétique, est une opération par laquelle, connaissant deux quantités appelées *multiplicande* et *multiplicateur*, on en trouve une troisième en opérant sur le multiplicande, comme on a trouvé le multiplicateur en opérant sur l'unité. Cette troisième quantité s'appelle *produit*; et tous les nombres qu'il faut multiplier entre eux pour avoir le produit, sont les *facteurs* de ce produit.

44. *Le produit de deux monomes a le signe* $+$, *lorsque le multiplicande et le multiplicateur ont leurs signes les mêmes, et le signe* $-$, *quand ils ont des signes différens.* En appliquant ce principe, appelé *la règle des signes*, on aura

$$+a\times+b=+ab,\quad -a\times+b=-ab,$$
$$+a\times-b=-ab \text{ et } -a\times-b=+ab.$$

En effet, 1° suivant que le multiplicateur $+b$ ou b est un nombre entier ou une fraction, le produit est un multiple ou une fraction du multiplicande; il est donc de même nature que ce multiplicande; c'est-à-dire qu'il en a le signe (*). Par conséquent, $+a\times+b=+ab$ et $-a\times+b=-ab$.

2° Le produit se trouve en opérant sur le multiplicande, comme le multiplicateur en opérant sur l'unité : donc, puisque le multiplicateur $-b$ s'obtient en multipliant l'unité par b et en changeant le signe du résultat b; de même, le produit de $+a$ ou de $-a$ par $-b$, s'obtiendra en multipliant $+a$ ou $-a$ par b et en changeant le signe du résultat $+ab$ ou $-ab$ (1°); ce qui donnera $-ab$ ou $+ab$. D'où il suit que $+a\times-b=-ab$ et que $-a\times-b=+ab$ (**).

(*) En général, *tout multiple ou toute fraction d'un monome, a nécessairement le signe de ce monome.* La chose est évidente pour un monome qui a le signe $+$, puisque ce monome peut être écrit sans signe (16). Mais si le monome a le signe $-$, on aura, 1° 4 fois $-a=-a-a-a-a=-4a$ (27); 2° les $\frac{5}{7}$ de $-7a=$ les $\frac{5}{7}$ de 7 fois $-a$ (1°) $=5$ fois $-a=-5a$ (1°).

(**) Il est facile de vérifier qu'*on ajoute ou l'on soustrait un monome*,

45. Les quatre formules que l'on vient de démontrer, s'énoncent en abrégé en disant : $+$ par $+$ donne $+$, $-$ par $+$ donne $-$, $+$ par $-$ donne $-$, et $-$ par $-$ donne $+$. Et il en résulte, 1° qu'*un produit change toujours de signe avec l'un de ses 2 facteurs*; 2° que *le produit ne change pas de signe quand on change ceux du multiplicande et du multiplicateur.*

46. Voici encore trois conséquences importantes :

1° *Le produit d'un nombre quelconque de facteurs positifs, est positif lui-même*; car chaque facteur pouvant être écrit sans signe (16), le produit total n'aura pas de signe et sera par conséquent positif. Ainsi $+a \times +b \times +c \times +d = abcd = +abcd$.

2° *Le produit d'un nombre pair 2n de facteurs négatifs, est positif*; car en multipliant ces facteurs deux à deux, on aura n produits positifs; et en multipliant entre eux ces n produits positifs, le produit sera positif (1°).

3° *Le produit d'un nombre impair 2n + 1 de facteurs négatifs, est négatif*; car en ne considérant pas d'abord le dernier facteur négatif, il en restera un nombre pair $2n$, dont le produit sera positif (2°); multipliant ensuite ce produit positif par le dernier facteur négatif, le produit sera négatif.

47. Tout produit indiqué, comme $abcdefg$, s'obtient en multipliant a par b, le résultat par c, le second résultat par d, et ainsi de suite. Mais nous avons démontré en arithmétique, qu'on peut suivre tel autre ordre qu'on voudra dans les multiplications, et que même on peut regarder le produit $abcdefg$ comme fourni par les multiplications des produits ab, cde et fg. Ces deux principes donnent successivement

$$7a^4b^2 \times 4a^3b^3 = 7a^4b^2 4a^3b^3 = 7.4a^4a^3b^2b^3 =$$
$$28aaaaaaabbbbb = 28a^7b^5.$$

D'où l'on voit que, *pour avoir le produit de deux monomes, il faut, après avoir appliqué la règle des signes (44), multiplier l'un par l'autre les deux coefficiens, écrire à la suite du résultat une seule fois chaque lettre, comme facteur, et lui*

---

en l'écrivant avec son signe ou avec un signe contraire. Car dans $-b \times +1 = -b$, le multiplicateur $+1$ s'obtient en ajoutant l'unité; donc le produit $-b$ s'obtiendra en ajoutant le multiplicande $-b$: donc $-b$ ajouté donne $-b$. On verra de même que $-b$ soustrait fournit $+b$.

donner pour exposant, la somme des exposans qu'elle a au multiplicande et au multiplicateur. D'après cette règle, on aura

$$-9a^6b^4c^3d \times -8a^5b^2c = +72a^{11}b^6c^4d.$$

De même, $a^m \times a^v = a^{m+v}$; car a étant m fois facteur au multiplicande a^m et v fois au multiplicateur a^v, sera nécessairement $m+v$ fois facteur au produit; ce qu'on indique en lui donnant $m+v$ pour exposant, ou en écrivant a^{m+v}. En général, le produit a toujours pour facteurs tous ceux du multiplicande et ceux du multiplicateur.

48. *Pour multiplier un polynome par un monome, il faut multiplier chaque terme du polynome par le monome, comme dans la multiplication des monomes, puis réunir tous les produits partiels.* C'est ainsi qu'on trouve que

$$(a-b+c) \times -d = -ad + bd - cd.$$

En effet, supposons d'abord qu'il faille multiplier $a-b+c$ par d; cela revient à multiplier par d, $a+c-b$ (30). Or, on multiplie le tout $a+c$ par d, en multipliant chacune de ses parties par d, ce qui donne $ad+cd$. Mais ce n'est pas $a+c$ qu'on doit multiplier par d, c'est $a+c-b$; on a donc multiplié dans $a+c$ le nombre b de trop; le produit $ad+cd$ est donc trop grand de $b \times d$ ou de bd; il faut donc le diminuer de bd, et écrire $ad+cd-bd$ ou $ad-bd+cd$. De sorte que

$$(a-b+c)d = ad - bd + cd.$$

Mais puisque le multiplicateur proposé est $-d$, il s'obtient en multipliant l'unité par d et en soustrayant le résultat; donc (43) le produit de $a-b+c$ par $-d$ s'obtiendra en multipliant $a-b+c$ par d, puis en soustrayant le résultat $ad-bd+cd$; ce qui donnera $-ad+bd-cd$, comme on l'a trouvé en appliquant la règle.

49. *Pour multiplier un monome par un polynome, il faut multiplier ce monome par chaque terme du polynome, comme dans la multiplication des monomes, et réunir tous les produits partiels.* D'après cette règle, on aura

$$-d \times (a-b+c) = -ad + bd - cd.$$

En effet, puisque le multiplicateur $a-b+c$ s'obtient en multipliant l'unité par a, b et c, puis en ajoutant le premier résultat a, soustrayant le second b et ajoutant le troisième c; de même, le produit s'obtiendra en multipliant le multiplicande $-d$ par a, b et c, puis en ajoutant le premier résultat $-ad$, soustrayant le second $-bd$, et ajoutant le troisième $-cd$; ce qui donnera $-ad + bd - ed$, comme on l'a obtenu en appliquant la règle.

50. D'après la même règle, on trouve aussi que $(7-2+3)(8-5)=(7-2+3)\times 8+(7-2+3)\times -5 = 56 - 16 + 24 - 35 + 10 - 15$ (48).

En général, puisqu'on multiplie un polynome par un polynome, en réunissant tous les produits du 1[er] par chacun des termes du second (49), et par suite, en réunissant les produits de chacun des termes du 1[er] par chacun des termes du 2[e] (48), il en résulte que, *pour avoir le produit de deux polynomes, il faut multiplier chaque terme du multiplicande par chaque terme du multiplicateur, comme dans la multiplication des monomes, puis réunir tous les produits partiels et opérer la réduction des termes semblables.* D'après cette règle, on a

Multiplicande $5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2$
Multiplicateur $a^3 - 4a^2b + 2b^3$

Produit par a^3 ... $5a^7 - 2a^6b + 4a^5b^2$
Prod. par $-4a^2b$ ... $-20a^6b + 8a^5b^2 - 16a^4b^3$
Prod. par $+2b^3$ ... $+10a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$

Pr. réduit ... $5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$.

Si $a=2$ et $b=3$, le multiplicande et le multiplicateur proposés deviendront 176 et 14; donc le produit sera 2464. Le produit algébrique trouvé se réduit effectivement à 2464, lorsqu'on y fait $a=2$ et $b=3$.

On trouvera facilement, d'après la règle précédente, les valeurs de $(2a^3b^2 - 3a^2b^3)^4$ et de $(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)(a^2 - b^2)$.

51. *Le terme du produit, où une lettre a le plus haut exposant, résulte de la multiplication des termes du multiplicande et du multiplicateur, où cette même lettre a les plus hauts exposans.*

C'est d'abord ce que l'on peut voir en multipliant deux polynomes l'un par l'autre. Mais en général, soit pa^m un terme du multiplicande, et qa^v un terme du multiplicateur; il est clair que $pa^m \times qa^v$ ou pqa^{m+v} est un terme du produit, puisque chaque terme du multiplicande multiplié par un terme du multiplicateur donne un terme du produit (50). Or, si m et v sont les plus grands exposans de a au multiplicande et au multiplicateur, $m+v$ sera nécessairement le plus grand exposant de a au produit ; car la plus grande somme de deux nombres est celle formée par les deux plus grands nombres. Et comme on suppose que pa^m et qa^v soient les seuls termes du multiplicande et du multiplicateur, où la lettre a ait les plus hauts exposans m et v, il est évident que pqa^{m+v} est le seul terme des produits partiels, et par suite du produit total réduit, où la lettre a porte le plus haut exposant $m+v$. Donc, puisque $pqa^{m+v}=pa^m\times qa^v$, il en résulte le principe énoncé d'abord.

On verra de même que *le terme du produit, où une lettre a le moindre exposant, vient du terme du multiplicande, où cette lettre a le moindre exposant, multiplié par le terme du multiplicateur, où la même lettre a le moindre exposant.*

Il résulte de ce principe et du précédent, que le produit de deux polynomes ne peut jamais avoir moins de deux termes.

52. La multiplication algébrique conduit à des résultats qui sont d'un usage fréquent. Pour les faire connaître, nous effectuerons les multiplications que voici :

$$
\begin{array}{r|l|l}
a+b & a+b & a-b \\
a-b & a+b & a-b \\
\hline
a^2+ab & a^2+ab & a^2-ab \\
-ab-b^2 & \quad +ab+b^2 & \quad -ab+b^2 \\
\hline
a^2-b^2 & a^2+2ab+b^2 & a^2-2ab+b^2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
a^2+2ab+b^2 & a^2-2ab+b^2 \\
a+b & a-b \\
\hline
a^3+2a^2b+ab^2 & a^3-2a^2b+ab^2 \\
\quad +a^2b+2ab^2+b^3 & \quad -a^2b+2ab^2-b^3 \\
\hline
a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 & a^3-3a^2b+3ab^2-b^3
\end{array}
$$

La seconde de ces multiplications donne le carré de $a+b$, la 3^e le carré de $a-b$, la 4^e le cube de $a+b$, et la 5^e le cube de $a-b$; on a par conséquent les formules :

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \text{ .... } (1)$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \text{ .... } (2)$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \text{ .... } (3)$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \text{ ... } (4)$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \text{ ... } (5)$$

Observant que le double signe $\pm$, qu'on énonce *plus ou moins*, est employé pour indiquer qu'une quantité est ajoutée ou soustraite, on verra que les formules (2), (3), (4) et (5) se réduisent aux deux que voici :

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \dots\dots\dots\dots\dots (6)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \dots (7)$$

Les formules (1), (6), (7), traduites en langage ordinaire, démontrent les trois théorèmes que voici :

1° *La somme de deux quantités multipliée par leur différence, donne pour produit la différence des carrés de ces quantités.*

2° *Le carré de la somme ou de la différence de deux nombres, vaut le carré du 1er, plus ou moins le double produit du 1er par le 2e, plus le carré du 2e.*

3° *Le cube de la somme ou de la différence de deux nombres, est égal au cube du 1er, plus ou moins le triple carré du 1er multiplié par le 2e, plus le triple du 1er multiplié par le carré du 2e, plus ou moins le cube du 2e.*

Il est clair que les *inverses* de ces trois théorèmes existent, et que par exemple, au lieu de $m^2 - x^2$, on peut mettre $(m + x)(m - x)$, qui a même valeur ; et ainsi des autres.

53. Multipliant la valeur de $(a + b)^3$ par $a + b$, puis le résultat par $a + b$, et réduisant, on trouvera

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Ces deux formules en donneront deux autres analogues, si on y change b en $-b$, et qu'on ait égard aux conséquences de la règle des signes (46).

54. Nous remarquerons à cette occasion, que les règles du calcul des polynomes sont vraies quels que soient les nombres qui composent ces polynomes ; et que cela vient uniquement des quantités négatives. En effet, comme ces règles sont démontrées pour tous les cas où les différences sont positives, il suffit de faire voir que les mêmes règles s'appliquent encore lorsque les différences sont négatives. Supposons que dans $a - b$, b soit $> a$; alors $a - b$ sera négatif et égal à $-(b - a)$, (28). D'après cela, il est clair qu'on aura :

1° $p+(a-b)=p+[-(b-a)]=p-(b-a)=p-b+a$
$=p+a-b$;

2° $p-(a-b)=p-[-(b-a)]=p+(b-a)=p+b-a$
$=p-a+b$;

3° $p(a-b)=p[-(b-a)]=-p(b-a)=-pb+pa=$
$ap-bp$;

4° $(a-b)p=[-(b-a)]p=-(b-a)p=-(bp-ap)=$
$-bp+ap=ap-bp$;

5° $(a-b)(c-d)=[-(b-a)][-(d-c)]=(b-a)(d-c)$
$=bd-ad-bc+ac=ac-bc-ad+bd$.

Tous les résultats précédens s'obtiennent par l'application immédiate des règles du calcul des polynomes; ces règles sont donc vraies quelles que soient les valeurs numériques des lettres qui composent ces polynomes.

55. En général, il est fort commode de renfermer dans une seule règle ou formule, la solution de toutes les questions numériques de même nature; puisque dans ce cas, on est dispensé de recommencer à chaque fois les raisonnemens et les calculs, quelquefois longs et compliqués, qui ont fourni la règle proposée. Or, on obtient cet avantage par le calcul des quantités négatives isolées; car alors les règles ou les formules sont vraies quelles que soient les valeurs positives ou négatives des lettres qui les composent. En effet, on sait que

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2\ldots(8)$$

Si dans cette formule on fait $a=2$ et $b=7$, le 1er *membre* $(a-b)^2$ sera $(-5)^2$ ou 25; le 2^e *membre* deviendra $4-28+49$ ou encore 25, comme le 1er. Si $b=-c$, le 1er membre sera $[a-(-c)]^2$ ou $(a+c)^2$; le 2^e membre deviendra $a^2-2a\times-c+(-c)^2$ ou $a^2+2ac+c^2$; et l'on sait en effet que $(a+c)^2=a^2+2ac+c^2$. On voit donc que la formule (8) est exacte pour toutes les valeurs positives ou négatives des lettres qui la composent. Et il en est de même de toutes les formules que nous avons obtenues jusqu'à présent, ainsi que de la suivante

$$(x+\tfrac{1}{2}n)^2=x^2+nx+\tfrac{1}{4}n^2,$$

qu'on trouve en multipliant $x+\frac{1}{2}n$ par lui-même.

56. Par analogie avec les puissances, on dit qu'un produit est du *n ième degré*, lorsqu'il renferme n facteurs *littéraux*, c'est-à-dire n facteurs exprimés chacun par une lettre. Les facteurs *numériques* ne comptent pas dans l'estimation du degré.

Ainsi les produits $2a$, $3ab$, $8a^3b^2$, sont respectivement du 1er, du 2^e et du 5^e degré.

On appelle quantités ou expressions *homogènes*, celles où tous les termes sont du même degré. Ainsi $4a^3b - 2a^2b^2 + 3ab^3$ est une expression homogène du 4^e degré. On remarque que la multiplication d'une quantité homogène par une quantité homogène, donne toujours un produit homogène, d'un degré égal à la somme des degrés de ses facteurs. Voyez l'exemple du n° 50.

57. On a déjà pu remarquer (48 et 49) qu'*un produit de deux quantités algébriques quelconques, ne change pas de valeur, dans quelqu'ordre qu'on multiplie.*

La chose est évidente pour deux monomes ; car à cause de $ab = ba$, on aura

$$+a \times -b = -ab = -ba = -b \times +a, \text{ etc.}$$

A l'égard des polynomes, quel que soit celui des deux qu'on prenne pour multiplicande, l'opération reviendra toujours à multiplier chaque terme de l'un par chaque terme de l'autre (50) ; et puisque chacune de ces multiplications partielles fournit le même résultat, quel que soit l'ordre des deux facteurs monomes sur lesquels on l'effectue, il s'ensuit que le produit total sera toujours composé de l'addition des mêmes termes : donc il demeurera toujours le même.

De la Division algébrique.

58. La *division algébrique* est une opération par laquelle, connaissant un produit, appelé *dividende*, et l'un de ses deux facteurs, nommé *diviseur*, on trouve l'autre, appelé *quotient*. D'où il suit que le dividende est le produit du diviseur par le quotient ; et qu'en divisant un produit ab par l'un de ses deux facteurs b, on aura toujours l'autre facteur a au quotient ; ce qui donne $ab : b = a$.

59. De même, $ab^2cd : b^2c = ad \times b^2c : b^2c = ad$. En général, quand on supprime dans le dividende, les facteurs du diviseur, les facteurs restans forment le quotient.

60. *Le quotient de deux monomes a le signe $+$, lorque les signes du dividende et du diviseur sont les mêmes, et le signe $-$, quand leurs signes sont différens.* Ce principe, appelé *la règle des signes*, donne les quatre formules que voici :

$$+ab : +b = +a, \quad -ab : +b = -a,$$
$$+ab : -b = -a \text{ et } -ab : -b = +a.$$

En effet, le quotient doit toujours être tel, qu'en multipliant le diviseur par ce quotient, on retrouve le dividende (58). Or, d'après la multiplication eu égard aux signes, tous les quotiens précédens satisfont à cette condition; donc tous ces quotiens sont exacts.

61. Les quatre formules précédentes s'énoncent en abrégé en disant : $+$ divisé par $+$ donne $+$, $-$ divisé par $+$ donne $-$, $+$ divisé par $-$ donne $-$, $-$ divisé par $-$ donne $+$. Et il en résulte, 1° que le quotient change de signe, en même temps que l'un de ses deux termes; 2° que le quotient ne change pas de signe, quand on change ceux du dividende et du diviseur.

62. Dans la division de deux monomes, le dividende est le produit du diviseur par le quotient (58); donc le coëfficient du dividende est le produit du coefficient du diviseur par celui du quotient (47); on aura donc le coefficient du quotient, en divisant le coefficient du dividende par celui du diviseur (58).

63. De même, puisque le dividende est le produit du diviseur par le quotient, l'exposant d'une lettre au dividende est la somme des exposans de cette lettre au quotient et au diviseur (47); on aura donc l'exposant d'une lettre au quotient, en retranchant son exposant au diviseur de son exposant au dividende.

64. De là et de ce qui précède, il suit que, *pour avoir le quotient de deux monomes, il faut, après avoir appliqué la règle des signes, diviser le coefficient du dividende par celui du diviseur, puis écrire à la suite du résultat, une seule fois chaque lettre comme facteur, et lui donner pour exposant, son exposant dans le dividende moins son exposant dans le diviseur*. C'est ainsi qu'on aura

$$-27a^6b^4c^3 : -3a^2b^3c = +9a^4bc^2.$$

Et en effet, le diviseur multiplié par le quotient reproduit le dividende; ce quotient est donc exact. De même, $a^3 : a^3 = a^0$. Mais $a^3 : a^3 = 1$; donc $a^0 = 1$, comme au n° 22. On a encore

$$-12a^7b^3 : 4a^3 = -12a^7b^3 : 4a^3b^0 = -3a^4b^3;$$

car $b^0 = 1$. Pareillement

$$3a^2b^4 : -4a^2b = -\tfrac{3}{4}a^0b^3 = -\tfrac{3}{4}b^3.$$

65. La division de deux monomes est impossible, lorsque le coefficient du dividende n'est pas divisible par celui du diviseur, ou que l'exposant d'une lettre dans le diviseur est plus grand que son exposant dans le dividende, ou enfin quand le diviseur a des lettres qui ne sont pas au dividende. Dans chacun de ces cas, on indique la division et l'on simplifie l'expression du quotient, en divisant ses deux termes par les facteurs qui leur sont communs. Par ex., qu'on ait à diviser $12a^3b^6c^2$ par $8a^7b^3c^2$: cette division ne peut que s'indiquer; mais on peut simplifier l'expression du quotient, en observant que ses deux termes sont divisibles par 4, par a^3, par b^3 et par c^2; c'est-à-dire par $4a^3b^3c^2$. Effectuant donc cette division, le quotient ne changera pas de valeur, comme on le démontrera plus bas, et on aura

$$\frac{12a^3b^6c^2}{8a^7b^3c^2}=\frac{3b^3}{2a^4}.\ \text{De même, } \frac{7a^3b^2}{14a^4b^4}=\frac{1}{2ab^2},\ \text{et } \frac{6a^2bd}{8a^2bc}=\frac{3d}{4c}.$$

66. D'après la multiplication d'un polynome par un monome (48), et en observant que $\frac{a}{d}\times d=a$ (58), ainsi des autres, il est évident que

$$\left(\frac{a}{d}-\frac{b}{d}+\frac{c}{d}\right)d=a-b+c;\ \text{d'où } \frac{a}{d}-\frac{b}{d}+\frac{c}{d}=\frac{a-b+c}{d}.$$

Comparant la dernière expression à son égale, on voit que *pour diviser un polynome par un monome, il faut diviser chaque terme du polynome par le monome, comme dans la division des monomes, et réunir les quotiens partiels.* C'est ainsi qu'on a

$$(45-20+25):5=9-4+5.\ \text{De même,}$$
$$(12a^6b^2+9a^5b^3-18a^4b^6):-3a^3b^2=-4a^3-3a^2b+6ab^4.$$

On voit que la division d'un polynome par un monome est impossible, lorsque tous les termes du premier ne sont pas divisibles par le second (65).

67. *Ordonner* un polynome, c'est écrire tous ses termes par rapport à une même lettre, de manière que les exposans de cette lettre aillent en diminuant de gauche à droite. Ainsi la quantité suivante est ordonnée par rapport à la lettre a, qu'on appelle *lettre principale :*

$$a^7-3a^5b^2+4a^3b^4-11b^7.$$

68. Voyons maintenant comment on effectue la division de

deux polynomes ordonnés par rapport à une même lettre. Le dividende étant le produit du diviseur par le quotient cherché (58), il s'ensuit que le premier terme du dividende ordonné, où la lettre a le plus haut exposant, sera le produit du premier terme du diviseur ordonné, où cette lettre a le plus haut exposant, multiplié par le premier terme du quotient, où cette même lettre a le plus haut exposant (51); on aura donc ce terme du quotient, en divisant le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur, puisqu'alors on divisera un produit par l'un de ses deux facteurs (58).

Mais le dividende étant la somme des produits du diviseur par chacun des termes du quotient cherché (58 et 48); si de ce dividende on soustrait le produit du diviseur par le premier terme trouvé au quotient, ce qui restera sera le produit du diviseur par tous les autres termes inconnus du quotient.

Or, puisque ce reste est le produit du diviseur par tous les termes du quotient, excepté le premier; on peut raisonner sur ce reste comme sur le dividende proposé : et l'on voit qu'en divisant le premier terme de chaque reste ordonné par le premier terme du diviseur, on aura chaque terme du quotient cherché. Ainsi, en général,

Pour avoir le quotient de deux polynomes, il faut, après les avoir ordonnés par rapport à une même lettre, diviser le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur, comme dans la division des monomes; multiplier ensuite tous les termes du diviseur par le quotient trouvé, soustraire le produit du dividende, et opérer la réduction des termes semblables. Diviser de même le premier terme du reste, toujours ordonné, par le premier terme du diviseur, ce qui donnera le second terme du quotient cherché; multiplier tout le diviseur par ce second terme et soustraire le produit du premier reste. On divise encore le premier terme du second reste par le premier terme du diviseur; et l'on continue le même procédé dans les divisions partielles suivantes.

69. Soient à diviser l'un par l'autre les deux polynomes

$$16a^7b^3-37a^6b^4+10a^8b^2-21a^4b^6+26a^5b^5$$

$$\text{et } 4a^3b^2-7a^2b^3+2a^4b.$$

Pour cela, on ordonnera ces deux polynomes par rapport à la lettre a, et on appliquera la règle, en disposant l'opération comme il suit :

$$
\begin{array}{ll|l}
 & 10a^8b^2+16a^7b^3-37a^6b^4+26a^5b^5-21a^4b^6 & 2a^4b+4a^3b^2-7a^2b^3 \\
 & -10a^8b^2-20a^7b^3+35a^6b^4 & \overline{5a^4b-2a^3b^2+3a^2b^3} \\
\hline
1^{er}\text{ reste..} & -4a^7b^3-2a^6b^4+26a^5b^5-21a^4b^6 & \\
 & +4a^7b^3+8a^6b^4-14a^5b^5 & \\
\hline
2^{e}\text{ reste...} & +6a^6b^4+12a^5b^5-21a^4b^6 & \\
 & -6a^6b^4-12a^5b^5+21a^4b^6 & \\
\hline
3^{e}\text{ reste...} & 0 &
\end{array}
$$

Puisque le dividende est le produit du diviseur par le quotient cherché, il s'ensuit qu'après avoir ordonné le dividende et le diviseur par rapport à la lettre a, le premier terme $10a^8b^2$ du dividende, où la lettre a a le plus haut exposant, sera le produit du premier terme $2a^4b$ du diviseur, où la lettre a a le plus haut exposant, multiplié par celui des termes du quotient, où la même lettre a a le plus haut exposant (51) ; on aura donc ce terme du quotient, en divisant le premier terme $10a^8b^2$ par $2a^4b$ (58). Or, $10a^8b^2 : 2a^4b = 5a^4b$; donc $5a^4b$ est le premier terme du quotient cherché.

Mais le dividende étant la somme des produits du diviseur par chacun des termes du quotient (58 et 49) ; si de ce dividende, on soustrait le produit du diviseur par le premier terme $5a^4b$ du quotient, ce qui restera sera le produit du diviseur par tous les termes inconnus du quotient. Or, le produit du diviseur par $5a^4b$, est $10a^8b^2 + 20a^7b - 35a^6b^4$; si on soustrait ce produit, du dividende, ce qui se fait en l'écrivant au-dessous avec ses signes changés (42), et réduisant les termes semblables, il restera $-4a^7b^3 - 2a^6b^4 + 26a^5b^5 - 21a^4b^6$.

Ce reste étant le produit du diviseur par tous les termes du quotient, excepté par le premier $5a^4b$, on voit qu'en divisant le premier terme $-4a^7b^3$ de ce reste par le premier terme $2a^4b$ du diviseur, le quotient $-2a^3b^2$ sera le second terme du quotient cherché. Multipliant le diviseur par $-2a^3b^2$, et soustrayant le produit, du premier reste, on trouvera, réductions faites,

$$+6a^6b^4 + 12a^5b^5 - 21a^4b^6.$$

Ce second reste est encore le produit du diviseur par tous les termes du quotient cherché, excepté par les deux premiers. Donc, en divisant le premier terme $+6a^6b^4$ de ce reste ordonné, par le premier terme $2a^4b$ du diviseur, le quotient $+3a^2b^3$ sera le troisième terme du quotient cherché. Multipliant le diviseur par $+3a^2b^3$, et soustrayant le produit, du second reste, il ne reste rien. Donc $5a^4b-2a^3b^2+3a^2b^3$, est le quotient exact des deux polynomes proposés.

Si $a=2$ et $b=\frac{1}{2}$, le dividende proposé deviendra $768\frac{3}{4}$, et le diviseur, $20\frac{1}{2}$; donc le quotient sera $37\frac{1}{2}$: et c'est effectivement ce que donne le quotient algébrique trouvé, quand on y fait $a=2$ et $b=\frac{1}{2}$.

On peut s'exercer à diviser $a^6-3a^4n^2+3a^2n^4-n^6$ par $a^3-3a^2n+3an^2-n^3$; à diviser $a^{15}-b^{15}$ par a^3-b^3; x^6-a^6 par $x^3+2ax^2+2a^2x+a^3$; $64a^3-z^3$ par $4a-z$; et enfin $21x^3y^2+25x^2y^3+68xy^4-40y^5-56x^5-18x^4y$ par $5y^2-8x^2-6xy$.

70. *Dans toute division algébrique, le dividende est égal au produit du diviseur par le quotient trouvé, plus le reste.*

Car, en effectuant la division, on soustrait du dividende, le produit du diviseur par chacun des termes du quotient trouvé; on soustrait donc du dividende, le produit du diviseur par le quotient total trouvé (49). Par conséquent, en ajoutant le reste à ce produit, on aura le dividende.

71. Lorsque la lettre principale a le même exposant dans plusieurs des premiers termes du dividende, et le même exposant dans plusieurs des premiers termes du diviseur, il faut ordonner ces termes par rapport à une autre lettre.

Car alors, on est sûr que le premier terme du dividende, où cette seconde lettre a le plus haut exposant, est le produit du premier terme du diviseur, où cette seconde lettre a le plus haut exposant, multiplié par celui des termes du quotient, où cette seconde lettre a le plus haut exposant (51).

Sans cette attention, on n'arriverait au vrai quotient qu'après plusieurs calculs inutiles. C'est ce qu'on peut voir en effectuant la division des deux polynomes suivans, ordonnés comme ils le sont :

$$16a^3b^2-15a^3b^3-4a^3b+2a^2b^2-3a^2b^3+20ab^2-8ab+4b^2,$$
$$\text{et}\quad 2a^2b-3a^2b^2+4b :$$

Le vrai quotient est $5ab-2a+b$.

On pourrait aussi réunir en un seul, tous les multiplicateurs de chaque puissance de la lettre principale, et considérer chaque résultat comme un seul terme : alors, on aurait à opérer la division des deux polynomes suivans :

$$(16b^2-15b^3-4b)a^3+(2b^2-3b^3)a^2+(20b^2-8b)a+4b^2,$$
$$\text{et}\quad (2b-3b^2)a^2+4b.$$

De cette manière, les deux polynomes proposés n'ont pas changé de valeurs, puisqu'on n'a fait qu'indiquer des multiplications qui étaient effectuées ; mais la première division partielle exige qu'on divise un trinome en b par un binome en b, en les ordonnant tous les deux par rapport à b ; ce procédé rentre par conséquent dans celui que nous avons indiqué d'abord. Voici encore un exemple : $t^3u^3-u^3-t^3u^2-t^2u^2+2u^2+4t^2u+3tu+2u-3t-3$ à diviser par $tu^2-u^2-tu+u+3$.

72. En effectuant les divisions, il est facile de voir qu'on a

$$(a^3-b^3):(a-b)=a^2+ab+b^2,$$
$$(a^4-b^4):(a-b)=a^3+a^2b+ab^2+b^3,$$
$$(a^5-b^5):(a-b)=a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4,$$

et ainsi de suite. D'après cela, on doit avoir

$$\frac{a^m-b^m}{a-b}=a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2+\cdots+ab^{m-2}+b^{m-1}\,..(1)$$

Et en effet, si l'on multiplie la seconde expression par $a-b$, on retrouve, après les réductions faites, le dividende a^m-b^m ; donc cette seconde expression est réellement le quotient de a^m-b^m par $a-b$. Donc *toute expression de la forme* $\mathrm{a}^m-\mathrm{b}^m$ *est divisible exactement par* $\mathrm{a}-\mathrm{b}$, *et donne un quotient homogène de* m *termes positifs.*

73. L'égalité (1) ayant lieu quels que soient a et b, on peut supposer que b y représente $-c$. Or, toute puissance paire de $-c$, étant le produit d'un nombre pair de facteurs négatifs $-c$, sera positive (46) ; et toute puissance impaire de $-c$, étant le produit d'un nombre impair de facteurs négatifs $-c$, sera négative (46). Changeant donc b en $-c$, dans la formule (1), on verra, 1° que *si* m *est pair, toute expression de la forme* $\mathrm{a}^m-\mathrm{c}^m$ *est divisible exactement par* $\mathrm{a}+\mathrm{c}$, *et donne un quotient homogène, de* m *termes alternativement positifs et négatifs ;*

2° Que *si* m *est impair, toute expression de la forme* a^m

$+c^m$ est divisible exactement par $a+c$, et donne un quotient homogène, de m termes alternativement positifs et négatifs.

C'est ce qu'on peut d'ailleurs vérifier sur des exemples particuliers, comme x^5+y^5 à diviser par $x+y$ et x^6-1 à diviser par $x-1$.

74. La division de deux polynomes est impossible lorsque le diviseur renferme des lettres qui ne sont pas au dividende, ou lorsque le premier terme de l'un des dividendes partiels n'est pas divisible par le premier terme du diviseur. Dans chacun de ces cas, pour n'avoir qu'un seul terme fractionnaire au quotient, il faut indiquer la division et simplifier l'expression résultante, si cela est possible. Par exemple, en divisant $2a^3-3a^2b-3ab^2+2b^3$ par a^2-4b^2, on trouve $2a-3b$ au quotient, avec le reste $5ab^2-10b^3$. Le plus haut exposant de a, dans ce reste, étant moindre que dans le premier terme du diviseur, il faut indiquer la division sur ce même reste, et ajouter l'expression au quotient trouvé. Mais on peut simplifier cette expression; car $5ab^2-10b^3=5b^2(a-2b)$ et $a^2-4b^2=(a+2b)(a-2b)$; de sorte que le dernier dividende partiel et le diviseur ont le facteur commun $a-2b$. Supprimant donc ce facteur commun, le dernier quotient partiel ne changera pas de valeur, et deviendra $\frac{5b^2}{a+2b}$. D'où il suit qu'on a

$$\frac{2a^3-3a^2b-3ab^2+2b^3}{a^2-4b^2}=2a-3b+\frac{5b^2}{a+2b}.$$

C'est ce qu'on vérifie en faisant, par exemple, $a=6$ et $b=2$; car alors chacune des 2 expressions se réduit à 8. Et l'exemple précédent montre aussi comment on extrait les *entiers* d'une *fraction algébrique*.

Des Fractions algébriques.

75. On appelle *fraction algébrique* ou *fraction littérale*, l'expression de la division de deux quantités, qui en sont les *termes*. Ainsi $\frac{a}{c}$, qu'on énonce *a divisé par c*, est une fraction algébrique : *a* est son *numérateur* et c son *dénominateur*. Si a vaut $\frac{3}{4}$, et c, $\frac{9}{8}$, la *valeur* v de la fraction algébrique $\frac{a}{c}$ sera $\frac{2}{3}$.

76. Le calcul des fractions algébriques est le même que celui

des fractions arithmétiques ; mais les raisonnemens qui établissent le calcul de ces dernières fractions, étant fondés sur ce que leurs deux termes sont toujours des nombres entiers, ne peuvent plus s'appliquer aux fractions algébriques, dont les deux termes représentent souvent des nombres fractionnaires. Il est donc nécessaire de démontrer le calcul des fractions algébriques.

77. *Une fraction algébrique ne change pas de valeur, lorsqu'on multiplie ou qu'on divise ses deux termes par une même quantité.*

Soit $\frac{a}{c}$ la fraction proposée et v sa *valeur*, c'est-à-dire le quotient qu'on obtient en divisant le nombre que représente a par le nombre que désigne c ; on aura donc $\frac{a}{c} = v$; d'où $a = cv$ (58). Multipliant les deux quantités égales a et cv par la même quantité quelconque m, les deux produits seront égaux, et il viendra $am = cvm$, ou $am = cmv$. Divisant les deux quantités égales am et cmv par la même quantité cm, les deux quotiens seront égaux, et on aura $\frac{am}{cm} = \frac{cmv}{cm} = v$. Ainsi les deux fractions $\frac{a}{c}$ et $\frac{am}{cm}$, égales au même nombre v, sont égales entre elles, et il vient enfin $\frac{a}{c} = \frac{am}{cm}$. Donc, etc.

78. Au moyen de ce principe, on pourra simplifier toute fraction dont les deux termes auront des facteurs communs ; on pourra réduire plusieurs fractions algébriques au même dénominateur, en multipliant les deux termes de chacune par le produit des dénominateurs de toutes les autres, ou par des nombres plus petits, comme en arithmétique : chaque fois les fractions ne changeront pas de valeurs.

Par exemple, soit à simplifier la fraction

$$\frac{18a^3b^2c - 12a^2b^3c + 2ab^4c}{6a^2b^3 - 2ab^4} ;$$

on voit que tous les termes du numérateur et du dénominateur sont divisibles par 2, par a et par b^2, c'est-à-dire par $2ab^2$. Si donc on effectue ces divisions, on divisera réellement le numérateur et le dénominateur par $2ab^2$ (66) ; donc la fraction ne changera pas de valeur et deviendra

$$\frac{9a^2c - 6abc + b^2c}{3ab - b^2}.$$

Pour voir si cette fraction peut encore être simplifiée, on observe que son dénominateur est la même chose que $(3a-b)b$. On essaie ensuite de diviser son numérateur par $3a-b$, et l'on trouve le quotient exact $3ac-bc$: en sorte que la fraction proposée se réduit à

$$\frac{3ac-bc}{b}, \text{ ou à } \frac{3ac}{b} - c.$$

Voici encore quelques fractions à simplifier :

$$\frac{px+x^2}{mp+mx}, \quad \frac{5x^9+45dx^2}{10cx^9+90cdx^2} \quad \text{et} \quad \frac{30x-15y+15}{12x^2-12xy+3y^2-3}.$$

79. *Pour ajouter ou soustraire entre elles plusieurs fractions algébriques, il faut, après les avoir réduites au même dénominateur, prendre la somme ou la différence des nouveaux numérateurs, et donner au résultat le dénominateur commun.* C'est ainsi qu'on aura

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}.$$

En effet, la réduction des fractions algébriques au même dénominateur n'en change pas les valeurs ; la première des trois expressions précédentes est donc égale à la seconde. Mais celle-ci est égale à la troisième, puisqu'elle est ce qu'on obtient en effectuant la division indiquée par cette troisième (66) : donc ces trois expressions sont égales entre elles, comme on l'a trouvé en appliquant la règle énoncée d'abord.

80. Par exemple, qu'on ait à calculer l'expression que voici :

$$\frac{3a^3-4b^3}{2a^3-4a^2b+2ab^2} - \frac{5a^2-4b^2}{3a^2+3ab} + \frac{2a^3-b^3}{a^3-ab^2}.$$

Il serait très-long de réduire au même dénominateur, en multipliant les deux termes de chaque fraction par le produit des dénominateurs des deux autres. Mais on peut simplifier cette réduction, en décomposant les dénominateurs proposés dans leurs facteurs *premiers*. En effet, d'après ce qui précède, il est facile de voir que ces dénominateurs valent respectivement

$$2a(a-b)^2, \ 3a(a+b) \text{ et } a(a+b)(a-b).$$

D'où l'on voit que le moindre multiple de tous les dénominateurs est

$$6a(a+b)(a-b)^2.$$

Prenant donc ce moindre multiple pour dénominateur commun ; multipliant le numérateur de chaque fraction par le nombre de fois que son dénominateur est contenu dans ce multiple ; puis effectuant l'addition et la soustraction indiquées sur les nouvelles fractions, et réduisant les termes semblables, on trouvera, pour la valeur de l'expression proposée,

$$\frac{11a^4+17a^3b-2a^2b^2-34ab^3+2b^4}{6a(a+b)(a-b)^2}.$$

81. Opérant de la même manière, on trouvera

$$\frac{4a+b}{2ab-b^2}-\frac{5a-b}{2a^2-ab}=\frac{2a-b}{ab};$$

$$a+x-\frac{2x^2-a^2}{a-x}=\frac{2a^2-3x^2}{a-x};$$

$$\frac{2a-x}{a+x}+\frac{a-2x}{a-x}-\frac{4a^2-4ax-3x^2}{a^2-x^2}=\frac{2x^2-a^2}{a^2-x^2};$$

$$\frac{3a-z}{2a}+\frac{4a+z}{3z}-\frac{8a^2+3az}{6az-6z^2}=\frac{3z^2-14az}{6a(a-z)}.$$

Et nous laissons à calculer l'expression :

$$\frac{a^2-3au+u^2}{a^2-u^2}-\frac{3a^2-5au+u^2}{a^2-2au+u^2}+\frac{3a-u}{a-u}.$$

82. *Pour multiplier une fraction algébrique par une autre, il suffit de multiplier numérateur par numérateur, et dénominateur par dénominateur.* C'est ainsi que

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

En effet, soient u et v les valeurs des deux fractions proposées ; on aura donc $\frac{a}{b}=u$ et $\frac{c}{d}=v$; d'où $a=bu$ et $c=dv$. Ce qui donne $ac=budv=bduv$. Divisant les deux quantités égales ac et $bduv$ par la même quantité bd, les deux quotiens seront égaux, et il viendra

$$\frac{ac}{bd}=uv;\ \text{d'où}\ u\times v=\frac{ac}{bd}\ \text{et}\ \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

83. D'après la règle précédente, et en observant que $\frac{a}{1}=a$, etc., il est clair qu'on aura

$$\frac{a}{b}\times c=\frac{a}{b}\times\frac{c}{1}=\frac{ac}{b}=\frac{a}{b:c}\ (77)\ \text{et}\ a\times\frac{b}{c}=\frac{a}{1}\times\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}.$$

D'où l'on voit, 1° qu'*on multiplie une fraction algébrique par une quantité, en multipliant le numérateur par cette* *quantité;* ou bien, *en divisant le dénominateur par la même quantité;* 2° qu'*on multiplie une quantité par une fraction algébrique, en multipliant cette quantité par le numérateur et en donnant au produit le dénominateur de la fraction.*

Voici plusieurs exemples :

$$\frac{3a+x}{4a^2-8ax+4x^2}\times(2a-2x)=\frac{3a+x}{2a-2x};\ \frac{3ab^2}{14x^3}\times 7x=\frac{3ab^2}{2x^2};$$

$$\frac{2a-z}{4a}\times\frac{6a-2z}{z^2-2az}=\frac{z-3a}{2az};\ \frac{9a^4b}{8c^4}\times\frac{4c^2}{3a^2}=\frac{3a^2b}{2c^2};$$

$$\left(a-2c+\frac{a-2a^2-2c}{2a-1}\right)\left(c-\frac{2ac+c}{4a}\right)=-c^2;$$

$$\frac{26x-13}{x+2}\times\frac{15}{x-1}\times\frac{7x+14}{15}\times\frac{2}{65}=\frac{28x-14}{5x-5}.$$

84. *Pour diviser une fraction algébrique par une fraction algébrique, il faut multiplier la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.* C'est ainsi que

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

En effet, en multipliant le quotient trouvé par le diviseur, le produit est $\frac{acd}{bcd}$ et se réduit au dividende $\frac{a}{b}$; donc ce quotient trouvé est le véritable (58).

85. D'après la règle précédente, et en observant que $\frac{1}{a}$ est $\frac{a}{1}$ ou *a renversé*, il est visible qu'on aura

$$\frac{a}{b}:c=\frac{a}{b}\times\frac{1}{c}=\frac{a}{bc}=\frac{a:c}{b}\ \text{ et }\ a:\frac{b}{c}=\frac{a}{1}\times\frac{c}{b}=\frac{ac}{b}.$$

Ce qui montre, 1° qu'*on divise une fraction algébrique par une quantité, en multipliant son dénominateur par cette quantité;* ou bien *en divisant son numérateur par la même quantité;* 2° qu'*on divise une quantité par une fraction algébrique, en multipliant cette quantité par le dénominateur et en divisant le produit par le numérateur de la fraction.*

Voici quelques exemples :

$$\frac{2a^2-7ab+3b^2}{a+2b}:(2a-b)=\frac{a-3b}{a+2b};\ 8a^9x^4:\frac{4a^5x^2}{3z}=6a^4x^2z;$$

$$(ax-b):\frac{a^2x^2-b^2}{2x-a}=\frac{2x-a}{ax+b};\ \frac{9a^2u}{5x^3}:\frac{3a^3u^2}{10x^4}=\frac{6x}{au};$$

$$\frac{3p}{2p-2}:\frac{2p}{p-1}=\frac{3}{4}\ \text{ et }\ \frac{x-1}{4x}:\frac{3x}{2x+2}=\frac{x^2-1}{6x^2}.$$

Nota. Dans ce qui précède, on a indiqué les opérations sur les fractions, en plaçant les signes vis-à-vis la barre qui sépare les deux termes et sur la même ligne. Cela dispense d'employer des parenthèses qui, dans ce cas, ne manqueraient pas d'allonger les expressions.

Des Equations.

86. On appelle *équation* l'expression de l'égalité de deux quantités algébriques renfermant les nombres connus et inconnus. Ces deux quantités sont les deux *membres* de l'équation : tout ce qui est à la gauche du signe = s'appelle le *premier membre*, et tout ce qui se trouve à la droite du même signe se nomme le *second membre*. Ainsi l'expression $ax - b = 2a - bx + 4$ est une équation, dont $ax - b$ est le premier membre, et $2a - bx + 4$, le second.

87. Une équation exige toujours que les *inconnues* aient des valeurs numériques propres à faire exprimer le même nombre à ses deux membres.

88. *Résoudre* une équation, c'est en déduire la valeur de l'inconnue qui rend le premier membre égal au second.

Ainsi, pour résoudre une équation, il faut la transformer en une autre, où l'inconnue soit seule dans un membre et les quantités données dans l'autre. Mais cela exige qu'on fasse sur ces deux membres des opérations qui n'en détruisent pas l'égalité; car autrement l'inconnue devrait changer de valeur pour maintenir cette égalité; et la valeur qu'on obtiendrait ensuite ne serait plus celle de l'inconnue dans l'équation proposée. Or, puisque les deux membres sont deux quantités égales, si l'on fait la même opération sur eux, les deux résultats seront nécessairement égaux, et l'inconnue ne changera pas de valeur pour maintenir l'égalité; d'où il suit que la résolution d'une équation se réduit à faire précisément les mêmes opérations sur les deux membres.

89. *Une équation n'est pas détruite lorsqu'on passe tous les termes inconnus dans un membre et les termes connus dans l'autre, avec l'attention de changer les signes des termes qui changent de membre.* (Ce qu'on appelle *transposer*.)

C'est ainsi que l'équation

$$9x + 4 = 24 - x, \text{ devient } 9x + x = 24 - 4.$$

En effet, en effaçant $+4$ dans le premier membre, et en écrivant -4 dans le second, on diminue ces deux membres de 4; on diminue donc deux nombres égaux d'un même 3^{me}; les deux restes sont par conséquent égaux. Pareillement, en effaçant $-x$ dans le second membre et en écrivant $+x$ dans le premier, on augmente ces deux membres de x; on augmente donc deux quantités égales d'une même 3^{me} x; donc les deux sommes sont égales. On voit donc que la *transposition* des termes n'a pas détruit l'égalité.

Effectivement, la nouvelle équation étant la même chose que $10x = 20$, donne $x = 2$; et cette valeur 2, mise à la place de x, *satisfait* à l'équation proposée, puisqu'elle la réduit à $22 = 22$.

90. Transposant les termes dans l'équation

$$2ax - 3b + 4c = cx + a - x,$$

elle devient $\quad 2ax - cx + x = a + 3b - 4c.$

La transposition n'a pas détruit l'égalité; car si on retranche des deux membres de l'équation proposée, le polynome $cx - x - 3b + 4c$, formé de tous les termes qui doivent être transposés, écrits avec leurs signes, les deux restes nécessairement égaux, se réduisent aux deux membres de la nouvelle équation.

91. *Une équation n'est pas détruite lorsqu'on change les signes des termes de ses deux membres.* Par ex., l'équation

$4x - 7 = 8 - x$ est la même chose que $-4x + 7 = -8 + x$;

car cela revient à multiplier les deux membres par -1. D'ailleurs, si l'on transpose tous les termes du premier membre de l'équation proposée dans le second, et tous les termes du second dans le premier, l'égalité ne sera pas détruite (89), et il viendra $-8 + x = -4x + 7$. On peut changer l'ordre des deux membres de cette équation, sans en détruire l'égalité; car si $a = b$, réciproquement $b = a$: on a donc $-4x + 7 = -8 + x$, comme on l'a trouvé par l'application du principe.

92. *Une équation n'est pas détruite lorsqu'on réduit tous les termes des deux membres au même dénominateur, et qu'on néglige d'écrire le dénominateur commun.* (Ce qui s'appelle *chasser* ou *faire disparaître* les dénominateurs.)

Soit par exemple

$$\frac{7x}{8}-6x+\frac{3}{4}=\frac{x}{2}-\frac{5}{12}:$$

Si l'on réduit tous les termes des deux membres au même dénominateur 24, et qu'on néglige d'écrire ce dénominateur commun, on aura $21x-144x+18=12x-10$.

En effet, la réduction de tous les termes des deux membres au même dénominateur 24, ne change pas la valeur de ces termes; donc les deux membres eux-mêmes ne changent pas de valeurs, et sont encore égaux. Mais en négligeant d'écrire le dénominateur commun 24, on multiplie tous les termes des deux membres par ce dénominateur; on multiplie donc les deux membres eux-mêmes, ou deux nombres égaux, par ce dénominateur (48); donc les deux produits sont égaux, et l'on a une équation sans diviseur.

Nota. On fait aussi disparaître les diviseurs d'une équation, en multipliant tous les termes des deux membres par le moindre multiple de ces diviseurs, et en effectuant les divisions. Il est visible qu'alors l'égalité n'est pas détruite.

93. *Lorsqu'on ajoute, ou soustrait, ou multiplie, ou divise deux équations entre elles, les deux résultats sont égaux.* En effet,

1° Ajouter une équation à une autre, c'est ajouter le premier membre au premier membre et le second au second. De cette manière, comme les deux membres de la première équation représentent le même nombre, on ajoute ce nombre aux deux membres de la seconde, c'est-à-dire à deux quantités égales; donc les deux sommes sont égales. Donc si $a=b$ et $c=d$, on aura $a+c=b+d$.

2° Soustraire une équation d'une autre, c'est soustraire le premier membre du premier membre et le second du second. Dans ce cas, comme les deux membres de la première équation expriment le même nombre, on soustrait ce nombre des deux membres de la seconde, c'est-à-dire de deux nombres égaux; donc les deux restes sont égaux. Donc si $a=b$ et $c=d$, on aura $a-c=b-d$.

3° Multiplier ou diviser une équation par une autre, c'est multiplier ou diviser le premier membre par le premier membre et le second par le second. Alors, comme les deux membres de la seconde équation représentent le même nombre, on multiplie ou l'on divise par ce nombre les deux membres de la première, c'est-à-dire deux quantités égales; donc les deux produits ou les deux quotiens sont égaux. Donc si $a=b$ et $c=d$, il vient $ac=bd$ et $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

94. Les principes précédens sont nécessaires à la résolution des équations; mais ils sont loin de suffire dans tous les cas, parce que la résolution des équations dépend du nombre d'inconnues qu'elles renferment, et sut-tout de leur *degré*.

95. Une équation est du *premier degré*, lorsque l'inconnue n'est multipliée ni par elle-même, ni par d'autres nombres inconnus. Une équation est du n^{me} *degré*, quand le terme qui a le plus de facteurs inconnus, en contient n. Ainsi $3x-2y+4=y-x$ est une équation du premier degré, à deux inconnues; $3x^2-7x+8=0$ est une équation du second degré, à une inconnue; etc.

96. Une équation est *numérique*, lorsqu'elle n'a d'autres lettres que les inconnues; elle est *littérale*, quand elle contient encore d'autres lettres que les nombres cherchés : $ax-by=3a+6$ est une équation littérale, et $8x-9=5y+1$, une équation numérique.

97. On distingue trois sortes d'égalités, savoir : les égalités *vérifiées*, comme $7+2=9$, qui est aussi une *identité*; les *équations*, qui n'ont lieu que pour certaines valeurs des inconnues, et les *identités*, qui sont vraies pour toutes les valeurs qu'on veut donner aux lettres qui les composent. Ainsi $ax-b=ax-b$ est une identité, de même que $(2a-3b)4a=8a^2-12ab$. En général, il y a identité entre toute opération algébrique indiquée et le résultat qu'elle donne en l'effectuant.

De la résolution des équations du premier degré.

Voyons d'abord la résolution des équations du premier degré, à une inconnue.

98. Pour résoudre une équation quelconque du premier degré, à une inconnue, il faut chasser les dénominateurs, transposer les termes et réduire, puis égaler l'inconnue au nouveau second

membre divisé par le résultat qu'on trouve, en écrivant avec leurs signes tous les multiplicateurs de l'inconnue dans le premier. Par exemple, soit l'équation

$$\frac{bx}{2a}-b=\frac{a^2}{b}+\frac{x}{4ab}.$$

En appliquant la règle précédente, on aura successivement :

$$2b^2x-4ab^2=4a^3+x,$$
$$2b^2x-x=4a^3+4ab^2,$$
$$\text{et}\quad x=\frac{4a^3+4ab^2}{2b^2-1}.$$

En effet, on sait déjà que les deux premières transformations ne détruisent pas l'égalité des deux membres (92 et 89) : il reste donc à faire voir qu'il en est de même de la troisième. Or, dans l'équation $2b^2x-x=4a^3+4ab^2$, le premier membre est la même chose que $(2b^2-1)x$, puisqu'en effectuant la multiplication par x, on retrouve $2b^2x-x$ au produit (48); on peut donc remplacer ce premier membre par sa valeur $(2b^2-1)x$; et alors l'équation devient $(2b^2-1)x=4a^3+4ab^2$. On voit que $4a^3+4ab^2$ exprime le produit de $2b^2-1$ par x; donc en divisant ce produit par $2b^2-1$, on aura x au quotient : donc effectivement $x=\frac{4a^3+4ab^2}{2b^2-1}$.

Actuellement, puisque les transformations qu'on a fait subir aux deux membres de l'équation proposée, n'ont pas détruit leur égalité, l'inconnue x n'a pas dû changer de valeur pour maintenir cette égalité; la valeur trouvée pour x est donc celle qui rend égaux les deux membres de l'équation proposée; cette équation est par conséquent résolue.

Remplaçant x par sa valeur obtenue, on verra aisément que chacun des deux membres proposés se réduit à la même fraction algébrique : donc cette valeur est la véritable.

99. En appliquant la règle que nous venons d'établir, l'équation

$$\frac{2x}{3}-17=\frac{11x}{12}-56,$$

devient (92) $8x-204=11x-672$,

puis (89) $8x-11x=204-672$,

ensuite $-3x=-468$, ou $3x=468$,

et enfin $x=\frac{468}{3}=156$.

Voici quelques équations à résoudre, d'après la même règle :

$$\frac{x}{5}+\frac{3x}{4}+8=x+\frac{7x}{10}-7,\quad \frac{2ax}{a+b}-\frac{b^2}{a-b}=x,$$

$$\frac{x}{3}-2+\frac{3x}{4}=5+x-\frac{x}{2}\quad \text{et}\quad x-\frac{4a}{3c}=\frac{cx}{2a}-\frac{a^2}{2c}.$$

100. Lorsque les dénominateurs sont des polynomes, on peut, pour soulager l'esprit, indiquer d'abord les multiplications, et les effectuer ensuite ; ce qui est plus facile, en les voyant ainsi indiquées. Par exemple, soit à résoudre l'équation

$$\frac{a(x-b)}{a-b}+3b=\frac{bx}{3a+b}:$$

chassant les dénominateurs, et indiquant, on aura

$$a(x-b)(3a+b)+3b(a-b)(3a+b)=bx(a-b);$$

effectuant les multiplications indiquées, il viendra

$$3a^2x-3a^2b+abx-ab^2+9a^2b-9ab^2+3ab^2-3b^3$$
$$=abx-b^2x;$$

transposant et réduisant, cette équation donne

$$3a^2x+b^2x=7ab^2-6a^2b+3b^3;$$

$$\text{d'où}\quad x=\frac{7ab^2-6a^2b+3b^3}{3a^2+b^2}.$$

Si $a=2$ et $b=3$, on aura $x=\frac{135}{21}$.

Voici deux équations, avec les valeurs qu'elles fournissent

$$\frac{b(x-b^2)}{2a-3b}=a^2-\frac{ax}{2a-b},\quad x=2a^2-3ab+b^2;$$

$$\frac{2a^2x}{4a^2-b^2}+ab=\frac{a(x-b^2)}{2a-b}-\frac{bx}{4a+2b},\quad x=\frac{4a}{b}(2a+b).$$

101. *Lorsque les deux membres de l'équation ont un facteur commun, il faut le supprimer, s'il est connu ; mais s'il n'est pas connu, il faut l'égaler à zéro.* Par ex., l'équation

$$7(2x-7)=9(2x-7),$$

donne, en la résolvant, $x=\frac{7}{2}$; si on avait supprimé le facteur commun $2x-7$, on aurait eu $7=9$, résultat absurde. Mais il faut observer que l'équation proposée ne peut être vraie qu'autant qu'on y regarde $2x-7$ comme égal à zéro ; ce qui donne $x=\frac{7}{2}$. Le facteur $2x-7$ étant donc nécessairement nul, et la suppression de ce facteur nul ayant donné un résultat impossible, on voit qu'il n'est pas permis de diviser ni de multiplier les deux membres d'une équation par zéro.

102. Occupons-nous maintenant de la résolution des équations du premier degré, à plusieurs inconnues. Résoudre de telles équations, c'est trouver des quantités qui, mises à la place des inconnues, rendent le premier membre de chaque équation égal au second; et ces quantités sont une *solution* des équations proposées.

103. Une équation à deux inconnues, telle que $x-2y=12$, admet une infinité de solutions; car pour chaque valeur arbitraire de l'une des inconnues, l'équation détermine la valeur correspondante de l'autre inconnue.

104. En général, une équation ne peut faire connaître qu'une seule inconnue : donc, pour déterminer les quantités cherchées, il faut autant d'équations distinctes qu'il y a de nombres à trouver. Mais de plus, on doit d'abord faire disparaître ou *éliminer* de ces équations, assez d'inconnues, pour qu'on obtienne une équation à une inconnue, qu'on appelle *équation finale*.

105. L'*élimination* peut se faire par différentes méthodes; nous allons commencer par la méthode d'addition et de soustraction, qui est la plus simple. Soit donc à résoudre les deux équations

$$\frac{2x}{3}-1+\frac{y}{2}=\frac{x}{4}-y+16$$
$$2x-\frac{y}{4}-6=\frac{5x}{4}+\frac{y}{8}.$$

Chassant les dénominateurs, transposant et réduisant, on aura

$$\left.\begin{aligned}5x+18y&=204\\ 6x-\ \ 3y&=48\end{aligned}\right\}\ [1]$$

Rendons égaux les multiplicateurs de x, en multipliant la première équation par 6 et la seconde par 5 : les égalités ne seront pas détruites, puisque chaque fois on multipliera deux nombres égaux par un même 3^{me}; on aura donc

$$\begin{aligned}30x+108y&=1224\\ 30x-\ \ 15y&=240.\end{aligned}$$

Retranchant la seconde de ces équations de la première, les deux restes seront égaux (93), et il viendra, en réduisant,

$$123y=984;\ \text{d'où}\ y=\tfrac{984}{123}=8.$$

Substituant 8 à la place de y dans la première équation [1], l'égalité ne sera pas détruite, et deviendra $5x + 144 = 204$, puis $5x = 60$ et $x = 12$.

Mais on peut arriver directement à cette valeur de x; car si l'on rend égaux les coefficiens de y dans les équations [1], ce qui se fait en multipliant la seconde par 6, et qu'ensuite on ajoute la nouvelle équation $36x - 18y = 288$ à la première, les termes en y se détruiront, et il viendra $41x = 492$ ou $x = 12$.

106. Le résumé des calculs précédens montre, que pour résoudre deux équations du premier degré, à deux inconnues x et y, il faut d'abord chasser les dénominateurs, transposer et réduire; puis rendre égaux les multiplicateurs de x dans les deux équations résultantes, en multipliant la première par le multiplicateur de x dans la seconde, et la seconde par le multiplicateur de x dans la première, ou par des nombres plus petits, comme dans la réduction au même dénominateur. Ensuite on ajoutera ou soustraira les deux nouvelles équations, suivant que les termes en x auront des signes différens ou le même signe. Cette opération faisant disparaître les termes en x, donnera l'équation finale en y, de laquelle on déduira cette inconnue. Connaissant y, on substituera sa valeur dans l'une des deux équations sans diviseur, et l'on aura x.

Il est clair que par ce procédé, les équations subissent des transformations qui ne détruisent pas l'égalité des deux membres de chacune; donc les inconnues x et y ne changent pas de valeurs pour maintenir ces égalités, et les valeurs trouvées sont celles de x et y dans les équations proposées.

Appliquant la règle précédente aux deux groupes d'équations

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x}{3} - 2 + \frac{y}{5} = \frac{3y}{10} - \frac{5x}{6} + 10 \\ &\frac{3x}{4} - \frac{y}{2} + 1 = \frac{2x}{3} - \frac{2y}{5}, \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} &\frac{2x}{3} + \frac{y}{7} - 3 = \frac{3x}{4} \\ &\frac{5x}{6} - \frac{2y}{5} + 2 = \frac{7x}{12} - y + 29; \end{aligned}$$

on trouvera, pour le premier, $x = 12$ et $y = 20$, et pour le second, $x = 24$ et $y = 35$.

107. Si l'on a trois équations, à trois inconnues x, y, z, il faudra, pour appliquer la règle précédente, chasser les dénominateurs, transposer et réduire; puis éliminer z entre la première et la seconde équations résultantes, ainsi qu'entre la première et la troisième, en rendant les multiplicateurs égaux deux à deux. On parviendra ainsi à deux équations en x et y, entre lesquelles

on éliminera y pour avoir x et ensuite y. Connaissant x et y, on les remplacera par leurs valeurs dans l'une quelconque des trois équations sans diviseurs, et l'on aura z.

Qu'on ait par exemple les trois équations

$$\frac{5x}{6}+\frac{3y}{4}-7=z-1$$
$$\frac{2x}{3}-\frac{y}{2}+\frac{4z}{7}=y+z-1$$
$$3z-6y+18=x+\frac{3y}{4}.$$

Faisant disparaître les dénominateurs, et transposant, on aura

$$\left.\begin{aligned}10x+9y-12z&=72\\28x-63y-18z&=-42\\4x+27y-12z&=72\end{aligned}\right\}\ [2]$$

Pour éliminer z de ces équations, on multiplie la première par 3 et la seconde par 2, puis on retranche le premier résultat du second; on retranche aussi la troisième équation [2] de la première; et on a ainsi

$$26x-153y=-300$$
$$6x-18y=0 \text{ ou } x-3y=0.$$

Eliminant x de ces équations, il vient $75y=300$; d'où $y=4$. Remplaçant y par sa valeur 4 dans $x-3y=0$, il vient $x-12=0$ ou $x=12$. Substituant les valeurs 12 et 4 de x et de y dans la première des équations [2], on obtient $120+36-12z=72$, ou $z=7$. De sorte que $x=12$, $y=4$ et $z=7$, dans les équations proposées; et c'est ce qu'on peut aisément vérifier.

108. La méthode précédente s'applique à plus de trois équations, avec autant d'inconnues, même quand des inconnues n'entrent pas dans toutes les équations. Voici deux systèmes d'équations à résoudre :

$$\begin{array}{l|l}
\frac{2x}{3}+\frac{y}{4}-1=\frac{z}{2}+4 & 3u-5x=3-3y\\
x-4+\frac{3y}{4}=10+\frac{2z}{5} & x-4=2y-z\\
 & 3y+z=2u+3\\
\frac{4z}{5}-\frac{5x}{6}+2=\frac{y}{2}-4 & 2x-3u=y-8.
\end{array}$$

Dans le premier système $x=12$, $y=8$, $z=10$, et dans le second $u=4$, $x=3$, $y=2$ et $z=5$.

109. En général, si l'on a m équations à m inconnues, on combinera la plus simple de ces équations avec chacune des $m - 1$ autres, pour en éliminer la même inconnue, en rendant ses coefficiens égaux deux à deux; et l'on obtiendra $m-1$ nouvelles équations à $m-1$ inconnues. On opérera de même sur les nouvelles équations, pour en éliminer une autre inconnue; et en continuant ce procédé, on parviendra à une équation ne contenant qu'une inconnue, et de laquelle on déduira la valeur de cette inconnue. Substituant ensuite les valeurs des inconnues, qui sont déterminées, dans l'une des équations qui précèdent immédiatement celles qui contiennent ces inconnues, on aura une nouvelle inconnue; et ainsi de suite, en remontant. Cette méthode se simplifie lorsque quelqu'inconnue n'entre pas dans toutes les équations : par exemple, si l'on a

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 2z &= 13 \\ 4u - 2x &= 30 \\ 4y + 2z &= 14 \\ 5y + 3u &= 32, \end{aligned}$$

on verra aisément que l'élimination de z entre la première et la troisième, et l'élimination de u entre la seconde et la quatrième, donnent les deux équations, à deux inconnues

$$\begin{aligned} 7y - 2x &= 1 \\ 20y + 6x &= 38. \end{aligned}$$

Ajoutant la seconde de ces équations à la première multipliée par 3, on a $\quad 41y = 41$; d'où $y = 1$.

Substituant cette valeur dans $7y - 2x = 1$, il vient $x = 3$. Reportant la valeur 3 de x dans la seconde équation proposée, et la valeur 1 de y dans la troisième, on trouve $4u - 6 = 30$ et $4 + 2z = 14$; d'où $u = 9$ et $z = 5$. D'où il suit que, dans les quatre équations proposées, $x = 3$, $y = 1$, $u = 9$ et $z = 5$.

Soient encore à résoudre les deux groupes d'équations

$$\begin{array}{l|l} \frac{x}{6} + \frac{y}{4} - 3 = \frac{u}{2} - 1 & 7x - 2z + 3u = 17 \\ x - \frac{z}{3} - 8 = \frac{y}{2} - 2 & 4y - 2z + t = 11 \\ \frac{y}{8} + u - 2 = \frac{z}{3} + 1 & 5y - 3x - 2u = 8 \\ u - \frac{z}{6} + 1 = \frac{x}{12} + 3 & 4y - 3u + 2t = 9 \\ & \qquad 3z + 8u = 33. \end{array}$$

On trouve, dans le premier groupe, $x=12$, $y=8$, $z=6$, $u=4$, et dans le second, $x=2$, $y=4$, $z=3$, $u=3$ et $t=1$.

110. Si l'on veut résoudre m équations du premier degré, à m inconnues, par la méthode d'élimination, connue sous le nom de *substitution des valeurs*, on prendra, dans la plus simple de ces équations, la valeur d'une inconnue; et l'on substituera cette valeur dans toutes les autres équations; ce qui donnera $m-1$ nouvelles équations avec $m-1$ inconnues. Répétant ce procédé sur les nouvelles équations, et ainsi de suite, on finira par tomber sur une équation, à une inconnue, et qui en déterminera la valeur. Substituant cette valeur dans l'expression de l'avant-dernière inconnue, on aura celle-ci. Substituant les valeurs des deux dernières inconnues, dans l'expression de la troisième, et ainsi de suite, en remontant, on déterminera cette troisième et celles qui la précèdent.

D'après cette méthode, soient à résoudre les équations

$$\begin{aligned} 4x-3y+z&=3\\ 10x-3y+4z&=27\\ 12x-5y-3z&=-3. \end{aligned}$$

D'abord, pour éviter un dénominateur, on prend la valeur de z dans la première de ces équations, et on trouve

$$z=3-4x+3y.$$

Comme z a nécessairement la même valeur dans les deux autres équations, si on y substitue cette valeur au lieu de z, les égalités subsisteront encore, et on aura

$$\begin{aligned} 10x-3y+4(3-4x+3y)&=27\\ 12x-5y-3(3-4x+3y)&=-3. \end{aligned}$$

Ces deux équations ne renferment pas l'inconnue z, et deviennent, toute opération faite,

$$\left.\begin{aligned} 9y-6x&=15\\ 24x-14y&=6 \end{aligned}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{aligned} 3y-2x&=5\\ 12x-7y&=3. \end{aligned}\right.$$

Prenant la valeur de y dans la 1re de ces équations, on aura

$$y=\tfrac{1}{3}(5+2x).$$

Substituant cette valeur dans la 2^{e} équation, elle deviendra

$$12x-\tfrac{7}{3}(5+2x)=3;\ \text{d'où}\ x=2.$$

Maintenant, si l'on met 2 pour x dans l'expression de y, on aura $y=3$. Mettant 2 pour x et 3 pour y dans l'expression de z, on trouvera $z=4$. On a donc $x=2$, $y=3$ et $z=4$, dans les équations proposées.

Nous laissons à résoudre, d'après la même méthode, les deux groupes d'équations que voici :

$$\begin{array}{l|l} 4u-3x+2y-5z=-24 & u+x+y=z+a \\ 2u+4x-7y+3z=3 & u+x+z=y+b \\ 3u+2x-4y+3z=12 & u+z+y=x+c \\ 6u-9x-5y+4z=-25 & x+y+z=u+d. \end{array}$$

111. On élimine encore par *la comparaison des valeurs*, c'est-à-dire en prenant dans les équations proposées, la valeur d'une même inconnue, et en égalant la plus simple de ces valeurs à chacune des autres; en opérant de même sur les nouvelles équations, et ainsi de suite. Mais cette méthode est beaucoup moins simple que les deux précédentes, à cause des dénominateurs qu'il faut y faire disparaître.

112. En général, de toutes les manières d'éliminer les inconnues dans les équations du premier degré, la méthode par addition et soustraction paraît devoir être préférée, 1° parce qu'elle offre plus d'abréviations particulières; 2° parce qu'elle ne conduit pas, comme les autres méthodes, à de nouvelles équations renfermant des dénominateurs, qu'il faut chasser ensuite; 3° parce que si les coefficiens ne sont pas très-grands, on peut faire l'addition ou la soustraction en même temps que les multiplications pour les rendre égaux; et il y a encore d'autres raisons de préférence, comme on le verra plus bas. Cependant il peut arriver que la résolution des équations ne puisse se faire que par la substitution des valeurs; et c'est pour cela que nous avons aussi développé cette dernière méthode, qu'il faut absolument employer dans les deux équations $x^2+y^2=7y$ et $3x=2y$.

113. Du reste, il existe un grand nombre de manières particulières d'éliminer les inconnues; et l'habitude fera bien vite reconnaître les simplifications qui peuvent se présenter dans la résolution des équations. Par ex., soient les deux systèmes :

$$\begin{array}{l|l} x+2y+4z=24 & x+y+z=m \\ 3x+3y+2z=23 & ax+by+cz=p \\ 7x+10y+4z=60 & cx+(b+c)y+2cz=q. \end{array}$$

Il suffira, dans le premier système, de soustraire la seconde équation, multipliée par 4, de la somme des deux autres, et dans le deuxième système, d'ajouter à la seconde équation, les produits respectifs des deux autres par c et -1. (Voyez d'ailleurs les Mélanges d'Algèbre, pages 18 et suivantes.)

114. Il est bon de remarquer qu'un système de $n+p$ équations du premier degré, à n inconnues, n'est possible que dans le seul cas où p de ces équations sont des conséquences des n autres. Car ces n équations déterminant les n inconnues, si on substitue les valeurs résultantes dans les p égalités non employées, on aura p équations, nommées *équations de conditions*, parce que n'ayant plus d'inconnues, les données du système doivent y satisfaire, pour que ce système soit possible. Par exemple, soient les trois équations à trois inconnues

$$2x-3y=2,\ 5x-6y=2 \text{ et } 2x+y=14.$$

Les deux premières équations donnent $x=4$ et $y=3$; et ces valeurs ne satisfaisant pas à la troisième équation, il s'ensuit que les trois équations proposées ne sauraient exister ensemble.

115. Remarquons encore que l'équation finale qui résulte de l'élimination entre des équations du premier degré, est aussi du premier degré; car dans les transformations que subissent ces équations, les inconnues ne sont jamais multipliées que par des nombres.

116. Cela suppose néanmoins qu'il n'y ait pas d'inconnues aux dénominateurs en même temps qu'aux numérateurs; car en faisant disparaître ces dénominateurs, les inconnues seraient multipliées par des inconnues, et les équations résultantes ne seraient pas du premier degré. On ne doit donc juger du degré d'une équation qu'après avoir fait disparaître les dénominateurs inconnus.

Problèmes du premier degré.

117. Les équations servent à exprimer, d'une manière abrégée, les raisonnemens et les opérations que nécessite la *solution* d'un problème, c'est-à-dire la détermination des inconnues que ce problème renferme.

118. Tout problème est de même degré que l'équation finale qui le résout.

119. La solution d'un problème est toujours composée de

trois parties distinctes : dans la première, on met le problème en équations ; dans la seconde, on résout les équations, et dans la troisième, on fait la *preuve* du problème, c'est-à-dire, on vérifie si les valeurs trouvées pour les inconnues satisfont à toutes les conditions de la question.

120. Pour mettre un problème en équations, il suffit d'en indiquer la preuve, et voici comment : on représente d'abord les nombres donnés par des chiffres ou des lettres, et les nombres inconnus toujours par des lettres ; ensuite on s'attache à bien comprendre l'énoncé, c'est-à-dire à bien reconnaître quelles opérations on devrait effectuer sur les nombres connus et inconnus, pour vérifier ces derniers, si leurs valeurs étaient déterminées, et on indique ces opérations à mesure qu'on les découvre.

121. Par exemple, *le quantième d'un mois de* 30 *jours est égal au tiers du nombre de jours écoulés, plus la moitié de ceux qui restent à écouler ; quel est ce quantième ?*

Soit x le quantième demandé ; on est donc au x^{me} jour du mois ; il y a par conséquent $x-1$ jours écoulés et $30-(x-1)$ ou $31-x$ jours à écouler. Et puisque le quantième x est égal au tiers du nombre de jours écoulés, plus la moitié de ceux à écouler, il s'ensuit que

$$x=\frac{x-1}{3}+\frac{31-x}{2}.$$

D'où l'on voit qu'en indiquant la preuve du problème proposé, on parvient à le mettre en équation, c'est-à-dire à exprimer par des signes abréviatifs, les relations que son énoncé établit entre les quantités connues et les quantités inconnues.

Résolvant l'équation précédente, on trouve $x=13$, c'est-à-dire qu'on est au 13 du mois. Effectivement, dans ce cas, le nombre de jours écoulés est 12, le nombre de jours à écouler est 18 ; et le tiers de 12, plus la moitié de 18, forment le quantième 13, comme l'exige le problème.

122. *Combien faut-il ajouter d'eau, dont* 24 *livres contiennent* 4 *livres de sel, à* 36 *livres d'eau renfermant* 12 *livres de sel, pour que* 40 *livres du mélange ne contiennent que* 8 *livres de sel ?*

Soit x la quantité d'eau à ajouter ; le mélange aura donc $36+x$ livres d'eau : et comme 40 livres de ce mélange contiennent 8 livres de sel, 1 livre en contient $\frac{1}{5}$; donc les $36+x$

livres en contiennent $\frac{36+x}{5}$. D'un autre côté, 24 livres de la première eau proposée contenant 4 livres de sel, 1 livre en renferme $\frac{1}{6}$; donc les x livres en renferment $\frac{x}{6}$. Cette quantité de sel et les 12 livres qui se trouvent déjà dans les 36 livres de la seconde eau, donnent $12+\frac{x}{6}$ pour tout le sel du mélange. Et comme cette quantité de sel est déjà exprimée par $\frac{36+x}{5}$, il faut qu'on ait

$$12+\frac{x}{6}=\frac{36+x}{5}.$$

Cette équation donne $x=144$, et il faut ajouter 144 livres de la première eau à 36 de la seconde. En voici la preuve : 24 livres de la première eau contenant 4 livres de sel, les 144 livres en contiendront 6 fois 4 ou 24 de sel; donc les $36+144$ ou les 180 livres d'eau du mélange renfermeront $12+24$ ou 36 livres de sel, et 40 livres d'eau du mélange contiendront les $\frac{2}{9}$ de 36 ou 8 livres de sel, ainsi que le demande le problème.

123. On voit que la difficulté de traduire les problèmes en équations, consistera toujours à en indiquer la preuve, c'est-à-dire, à former les expressions algébriques des quantités que la question suppose égales; mais l'usage diminue de beaucoup cette difficulté; et les commençans ne sauraient trop s'exercer sur la mise en équations, d'après la règle du n° 120. (Voyez d'ailleurs les Mélanges d'Algèbre, pages 22 et suivantes.)

124. *L'âge d'un père est le triple de celui de son fils, et il y a 10 ans qu'il en était le quintuple; quel est l'âge du père?*

Soit x cet âge; celui du fils sera donc $\frac{x}{3}$. Il y a 10 ans, ces âges avaient chacun 10 années de moins; et puisque celui du père était alors 5 fois celui du fils, il en résulte

$$x-10=5\left(\frac{x}{3}-10\right);\ \text{d'où}\ x=60.$$

Le père a donc 60 ans; et c'est ce qu'on peut aisément vérifier.

125. *Un homme distribue* 240^c *à* 20 *mendians; il donne* 6^c *par tête aux uns, et* 16^c *par tête aux autres; on demande le nombre des uns et des autres.*

Soit x le nombre de ceux à 6^c; il y en aura $20-x$ à 16^c, et par conséquent $6x+16(20-x)=240$. De là, $x=8$. Ainsi, il y en a 8 qui reçoivent 6^c, et 12 qui en reçoivent 16.

126. *Une personne ayant dépensé* 20^f *plus le* 10^{me} *de ce qui lui est resté, se trouve avoir dépensé* 3^f *de plus que le quart de son argent. Combien avait-elle?*

Soit x le nombre de florins qu'elle avait : après avoir dépensé 20^f, il lui en reste $x-20$; sa dépense totale est donc $20+\frac{x-20}{10}$. Mais d'ailleurs cette dépense est $\frac{x}{4}+3$; il faut donc qu'on ait

$$20+\frac{x-20}{10}=\frac{x}{4}+3\,;\ \text{d'où}\ x=100.$$

127. *Trois oranges coûtent autant au-dessus de 8 sous que 5 au-dessous de 24 sous; quel est le prix* x *de chaque orange?*

Il est clair que $3x-8=24-5x$, et qu'ainsi $x=4$.

Quinze personnes, hommes et femmes, dépensent 61^f, à 5^f par tête pour les hommes et 3^f pour les femmes. Combien y a-t-il d'hommes et de femmes? (R. 8 hommes et 7 femmes.)

Le frère et la sœur ont ensemble 75^f, sur lesquels ils dépensent 35^f, et il se trouve que le frère dépense la moitié de ce qu'il avait et la sœur le tiers. Combien avaient-ils chacun? (R. 60^f et 15^f.)

Deux coupons d'un même drap coûtent respectivement 60 et 78^f. Si le prix de l'aune diminuait de 1^f, le second coupon coûterait 12^f de plus que le premier. Quel est le prix de l'aune? (R. 3^f.)

Deux personnes entrent au jeu avec la même somme d'argent, et perdent, la première 36^f et la seconde 12^f; de sorte que le tiers de ce qui reste à la première vaut le 7^{me} de ce qui reste à la seconde. Combien avaient-elles chacune? (R. 54^f.)

128. On peut se dispenser de vérifier les valeurs trouvées pour les inconnues; car les équations du problème n'étant que sa *preuve indiquée*, il est clair que les nombres qui satisfont à ces équations, satisfont aussi au problème qu'elles traduisent algébriquement. Il n'y a d'exception à cela que dans le seul cas où le problème proposé renferme des conditions particulières qui n'entrent point dans ses équations. En effet, celles-ci ne sont alors qu'une partie du problème, écrite en d'autres termes; donc les valeurs des inconnues, dans ces équations, peuvent fort bien n'être pas les valeurs des inconnues dans le problème proposé, c'est-à-dire n'être pas les valeurs demandées. C'est ce qui arrive dans la question suivante :

129. *Une personne veut distribuer une certaine somme d'argent à des pauvres; en donnant* 2^f *à chacun, il lui reste* 7^f.

Si elle donnait 4s à chaque pauvre, il lui manquerait 6 sous. Trouver le nombre de pauvres et la somme d'argent.

Soit x le nombre de pauvres ; il est clair que

$$4x - 6 = 2x + 7 ; \text{ d'où } x = \tfrac{13}{2}.$$

Cette valeur satisfait bien à l'équation ; mais elle ne satisfait pas au problème. Cela vient de la condition particulière *que le nombre de pauvres soit entier* ; car cette condition n'entrant pas et ne pouvant entrer dans l'équation proposée, l'inconnue x n'est pas assujettie à y satisfaire.

Il peut cependant arriver que les valeurs des inconnues satisfassent aussi aux conditions particulières qui n'entrent pas dans les équations ; mais alors ces conditions sont des conséquences des équations dont il s'agit.

130. *Deux écoliers devant se partager également 28 oranges, se querellent, et chacun prend de ces 28 oranges ce qu'il peut attraper. Leur querelle étant finie, le 1er reçoit le cinquième des oranges prises par le 2e, et celui-ci le tiers de celles prises par le 1er ; alors ils en ont 14 chacun. Combien chacun avait-il pris d'oranges ?*

Le premier recevant le cinquième du nombre y d'oranges prises par le second, et celui-ci le tiers du nombre x d'oranges prises par le premier, ce premier en possède donc, après cela, $x + \frac{y}{5} - \frac{x}{3}$. Or, il en possède 14 ; on a donc les deux équations

$$x + y = 28 \quad \text{et} \quad x + \frac{y}{5} - \frac{x}{3} = 14,$$

lesquelles donnent $x = 18$ et $y = 10$. De sorte que le premier avait pris 18 oranges et le second 10, comme il est aisé d'en faire la preuve.

131. *En ajoutant 36 à un nombre composé de deux chiffres, on obtient une somme égale à ce nombre renversé. En ajoutant 2 au chiffre des dizaines, la somme sera les trois quarts du chiffre des unités. Quel est le nombre qui jouit de ces propriétés ?*

Soit x le chiffre des dizaines et y celui des unités ; le nombre demandé vaut donc x *dizaines* $+ y$ *unités* ou $10x + y$, et ce nombre *renversé* vaut y *dizaines* $+ x$ *unités* ou $10y + x$; ainsi on a les deux équations :

$$10x+y+36=10y+x \text{ et } x+2=\frac{3y}{4}.$$

Résolvant ces équations, on trouve $x=4$ et $y=8$. De sorte que le nombre cherché a 4 dizaines et 8 unités; il est donc 48.

On peut remarquer que, dans ce problème et le précédent, les inconnues doivent être des nombres entiers.

132. *Un homme achète une pièce d'étoffe à un prix qu'on ignore. Si elle renfermait 4 aunes de plus, et que l'aune coûtât 3^f de moins, il paierait 40^f de moins. Si la pièce avait 2 aunes de moins et que l'aune coûtât 5^f de plus, il paierait 74^f de plus. Trouver le nombre x d'aunes et le prix y de chacune.*

Il est clair que la pièce d'étoffe coûtera x fois y ou xy. Mais par la première condition, elle coûterait $(x+4)(y-3)$, et par la seconde $(x-2)(y+5)$. Or, par la première condition, la pièce d'étoffe coûterait 40^f de moins que xy et par la seconde 74^f de plus; on a donc les deux équations

$$(x+4)(y-3)=xy-40$$
$$(x-2)(y+5)=xy+74.$$

Effectuant les multiplications, transposant et réduisant, il vient

$$4y-3x=-28$$
$$5x-2y=84,$$

équations desquelles on tire $x=20$ et $y=8$. Ainsi la pièce d'étoffe avait 20 aunes de long, à 8 florins chacune.

133. Une personne a des jetons dans les deux mains : si elle en porte un de la droite dans la gauche, il y en aura un nombre égal dans chacune; mais si elle en passe deux de la gauche dans la droite, celle-ci en contiendra le double de l'autre. Combien chaque main avait-elle de jetons? (R. 10 et 8.)

Si on prend les moutons d'un troupeau 7 à 7, il en restera 1; si on les prend 11 à 11, il en restera 10; et le nombre de fois qu'on peut y prendre 7 moutons surpasse de 3 le nombre de fois qu'on peut y en prendre 11. Combien y a-t-il de moutons dans le troupeau? (R. 43.)

On imprime un ouvrage d'un certain format; si on met à une page 3 lignes de plus, et à chaque ligne 4 lettres de plus, chaque page contiendra 228 lettres de plus; mais si on met à une page 2 lignes de moins, et à chaque ligne 3 lettres de moins, chaque page contiendra 147 lettres de moins. On demande le nombre de lignes de chaque page et le nombre de lettres de chaque ligne. (R. 27 et 36.)

Une fraction est telle, que si l'on ajoute 3 à ses deux termes, elle se réduit à 6 septièmes, et que si on retranche 3 de chacun de ses termes, elle devient 3 quarts. Quelle est cette fraction? (R. 9 onzièmes.)

134. *On a trois lingots, dans chacun desquels il entre de l'or, de l'argent et du cuivre. L'alliage est tel que, dans le 1er, sur 16 onces, il y en a 7 d'or, 8 d'argent et 1 de cuivre. Dans le 2^e, sur 16 onces, il s'en trouve 2 d'or, 9 d'argent, et 5 de cuivre. Dans le 3^e, sur 16 onces, il y en a 5 d'or, 7 d'argent et 4 de cuivre. On veut, en prenant différentes parties de ces alliages, former un 4^{me} lingot tel, que sur 16 onces, il s'en trouve 79 seizièmes en or, 122 seizièmes en argent et 55 seizièmes en cuivre. Combien faut-il prendre de chacun des trois lingots proposés pour former 16 onces du 4^{me}?*

Soient x, y, z, les nombres d'onces qu'il faut prendre sur le 1er, le 2^e et le 3^e lingot pour former 16 onces du 4^e. Puisque dans le 1er, sur 16 onces, il y en a 7 d'or, il est clair que sur une once, il y en a $\frac{7}{16}$ d'or, et sur x onces, $\frac{7x}{16}$. On trouverait de même que $\frac{2y}{16}$ et $\frac{5z}{16}$ expriment les quantités d'or, prises sur le 2^e et le 3^e lingot, lorsque le 4^e est formé. Mais d'après l'énoncé, ce 4^e doit contenir 79 seizièmes d'once d'or; on a donc, pour 1re équation et en négligeant le dénominateur commun 16,

$$7x + 2y + 5z = 79.$$

On trouverait de même, par rapport à l'argent et au cuivre,

$$8x + 9y + 7z = 122 \quad \text{et} \quad x + 5y + 4z = 55.$$

Ces trois équations fournissent $x = 4$, $y = 3$ et $z = 9$.

135. Trois hommes emploient tout ce qu'ils ont d'argent sur eux pour acquitter une dépense qu'ils ont faite en commun. Il manque au premier 8^f pour payer les 2 tiers de la dépense, au second 14^f pour en payer les 4 cinquièmes, et au troisième 17^f pour en payer les 5 sixièmes. Combien avaient-ils chacun? (R. 12^f, 10^f et 8^f.)

Si des deux termes d'une fraction, qui se réduit à 4 cinquièmes, on retranche respectivement les deux termes d'une fraction, qui se réduit à 6 septièmes, la nouvelle fraction vaudra 2 tiers, et la somme de ses deux termes sera 20. Quelles sont les 2 premières fractions? (R. $\frac{32}{40}$ et $\frac{24}{28}$.)

Trois joueurs conviennent qu'après chaque partie les deux perdans donneront au gagnant, chacun la moitié de l'argent que ce gagnant avait en commençant cette partie. Chaque joueur ayant gagné une partie, sort du jeu avec 64^f. Combien les joueurs avaient-ils en entrant au jeu? (R. 50, 65 et 77^f.)

Résolvons maintenant quelques problèmes généraux.

136. *Connaissant la somme* a *et le quotient* b *de deux nombres* x *et* y, *trouver chacun de ces nombres.* Il est clair que:

$$x+y=a \text{ et } \frac{x}{y}=b\text{; d'où } x=\frac{ab}{b+1} \text{ et } y=\frac{a}{b+1}.$$

Si $a=48$ et $b=3$, on aura $x=36$ et $y=12$.

137. *Combien faut-il prendre d'une matière à* b *fl. l'unité, et d'une matière à* d *florins, pour former un mélange de* m *unités à* p *florins chacune?*

Soit x ce qu'il faut prendre de la première matière; $m-x$ sera donc ce qu'on doit prendre de la seconde, et on aura évidemment

$$bx \text{ florins} + d(m-x) \text{ florins} = mp \text{ florins},$$

$$\text{ou } bx+d(m-x)=mp\text{; d'où } x=\frac{m(p-d)}{b-d}.$$

Cette formule est beaucoup plus simple que la règle qu'elle fournit en la traduisant en langage ordinaire; car voici cette règle : *pour savoir ce qu'on doit prendre de la* 1^re^ *matière, il faut multiplier le nombre d'unités du mélange par le rapport des différences du second prix au prix moyen et au* 1^er^ *prix.*

Lorsque $b=100$, $d=124$, $m=48$ et $p=108$, la formule précédente donne $x=32$. Cette formule résout en outre les deux problèmes que voici : 1° Combien y a-t-il d'or et d'argent dans un alliage de m onces? On sait qu'une once d'or se réduit à b dans l'eau, une once d'argent à d et une once de l'alliage à p.

2° Trouver combien il faut de pièces de b florins et de pièces de d florins pour payer mp florins, avec m de ces pièces.

On voit par là de quelle étonnante fécondité est l'algèbre, puisque cette science résout, par une simple formule, non-seulement tous les problèmes, en nombres infinis, de même espèce que le proposé, mais encore plusieurs questions générales, qui sembleraient d'abord très-différentes de la première.

138. Si dans la formule précédente on regarde successivement comme inconnue, chacune des cinq quantités b, d, m, p, x, il en résultera les solutions générales de cinq problèmes d'espèces différentes. Par exemple, si l'on prend b pour inconnue, la formule donnera

$$b=\frac{m(p-d)+dx}{x}.$$

et le problème résolu est : *dans un mélange de* m *unités, coûtant chacune* p *florins, il entre d'une matière à* d *flor. l'unité, et* x *unités d'une autre matière dont le prix* b *est inconnu;*

quel est ce prix? Si $d = 124$, $m = 48$, $p = 108$ et $x = 32$, la valeur générale de b donnera $b = 100$.

On voit qu'à l'aide de quelques transformations, une même formule pourra résoudre autant de problèmes généraux qu'elle aura de lettres différentes ; ce qui est avantageux en ce qu'on sera conduit ainsi à de nouveaux problèmes, pour lesquels on n'aura pas à recommencer les raisonnemens, quelquefois très-compliqués, qui ont donné l'équation du proposé. Cela vient uniquement de la simplicité du langage algébrique, qui, en rapprochant les objets, permet d'en saisir plus facilement les différens rapports.

139. *Depuis qu'un père avait l'âge actuel de son fils, il s'est écoulé un nombre d'années tel que l'âge du fils est devenu* a *fois ce qu'il était alors ; et quand l'âge du fils vaudra l'âge actuel du père, les deux âges réunis feront* b *années de plus qu'à présent. Trouver les âges actuels.*

Soient x et y les âges actuels du père et du fils, puisque quand le père avait l'âge actuel y du fils, celui-ci avait a fois moins d'âge qu'à présent ou $\frac{y}{a}$, la différence des deux âges était $y - \frac{y}{a}$. Or, cette différence restera toujours la même, puisque ses deux nombres augmentent tous les ans d'une unité, ainsi l'âge actuel x du père surpasse celui y du fils de $y - \frac{y}{a}$, et il vient

$$x = 2y - \frac{y}{a}.$$

Mais quand le fils aura atteint l'âge actuel x du père, l'âge de celui-ci sera $x + y - \frac{y}{a}$. Et puisqu'alors les deux âges réunis feront b années de plus qu'à présent, il s'ensuit que

$$2x + y - \frac{y}{a} = x + y + b.$$

Cette équation et la précédente fournissent

$$x = \frac{(2a-1)b}{2(a-1)} \quad \text{et} \quad y = \frac{ab}{2(a-1)}.$$

Si $a = 3$ et $b = 40$, on aura $x = 50$ et $y = 30$. Les formules précédentes, très-simples en langage algébrique, seraient très-longues énoncées en langage ordinaire. Ces énoncés seraient cependant les dernières phrases qu'il faudrait employer, si l'on résolvait le problème en langage ordinaire. On voit donc qu'une pareille solution est ici impossible, et qu'il faut nécessairement faire usage des signes abréviatifs de l'algèbre.

140. *Des héritiers doivent se distribuer une somme d'argent, de manière qu'après avoir eu sa part, chacun donnera au suivant, sur le reste, le produit de* a *florins par le rang de ce suivant, plus le* c^{me} *du nouveau resté. Par cette disposition, les héritiers reçoivent la même part. On demande la valeur de la somme* x *distribuée, celle de chaque part* y *et le nombre* z *d'héritiers.*

Le premier reçoit a flor. plus le c^{me} du reste $x-a$; sa part est donc $y=a+\frac{x-a}{c}$. Le second reçoit $2a$ flor. sur le reste $x-a-\frac{x-a}{c}$, plus le c^{me} du nouveau reste $x-3a-\frac{x-a}{c}$; sa part est par conséquent $2a+\frac{x-3a}{c}-\frac{x-a}{c^2}$. Ainsi on a

$$2a+\frac{x-3a}{c}-\frac{x-a}{c^2}=a+\frac{x-a}{c};\ \text{d'où}\ \ x=a(n-1)^2.$$

De là on tire $y=a(n-1)$ et $z=n-1$.

141. *Trois enfans ayant ensemble un nombre* a *d'années, doivent partager avec leur mère une certaine somme d'argent. Chacun d'eux, à commencer par le plus jeune, prend autant de florins qu'il a d'années et en sus le quart du reste. De cette manière, les enfans sont également partagés, et le dernier a laissé* b *florins pour la mère. Quels sont leurs âges* x, y, z, *et quelle somme* u *ont-ils partagée?*

Puisque la mère a eu b florins, les enfans se sont partagé également $u-b$; chacun a donc reçu $\frac{1}{3}(u-b)$. D'un autre côté, le plus jeune prend d'abord sur la somme u autant de florins qu'il a d'années, c'est-à-dire x florins, et en outre le quart du reste $u-x$; sa part est donc $x+\frac{1}{4}(u-x)$ ou $\frac{1}{4}(3x+u)$, et il reste $u-\frac{1}{4}(3x+u)$ ou $\frac{1}{4}(3u-3x)$. Formant de la même manière les expressions des parts des deux autres enfans, on verra aisément que le problème proposé fournit les quatre équations

$$\begin{aligned}
&x+y+z=a,\\
&\tfrac{1}{4}(3x+u)=\tfrac{1}{3}(u-b),\\
&\tfrac{1}{16}(12y+3u-3x)=\tfrac{1}{3}(u-b),\\
&\tfrac{1}{64}(48z+9u-9x-12y)=\tfrac{1}{3}(u-b).
\end{aligned}$$

Résolvant ces équations, on trouvera

$u=\frac{1}{2}(3a+5b)$, $x=\frac{1}{6}(a-b)$, $y=\frac{1}{3}a$ et $z=\frac{1}{6}(3a+b)$.

142. Les biens d'un négociant augmentent chaque année de leur c^{me} partie; combien doit-il prélever tous les ans sur une somme a qu'il a dans le commerce, pour qu'au bout de trois ans, il y ait encore la même somme? $\left(\text{La valeur simplifiée est } \frac{a}{c+1}\right)$.

Trouver les termes de deux fractions dont a est la somme et b la différence. On sait que c est la somme de leurs numérateurs x et u, et d celle de leurs dénominateurs y et v.

Trouver trois nombres tels, qu'en les divisant respectivement par m, n, p, les trois quotiens soient égaux, et qu'en les augmentant respectivement de a, b, c, la somme de leurs produits 2 à 2 soit augmentée de d.

On partage une somme a entre cinq héritiers, de manière que chacun, à compter du plus jeune, reçoit autant de florins qu'il a d'années, et en sus le c^{me} du reste. Par cette disposition, après que le cinquième a eu sa part, il ne reste rien, et tous les héritiers sont partagés également. Quels sont leurs âges?

De la discussion des Problèmes du premier degré.

143. *Discuter* un problème ou des équations, c'est interpréter les résultats singuliers auxquels on parvient, quand on donne des valeurs particulières aux lettres qui s'y trouvent.

144. Remarquons d'abord qu'*une équation du premier degré à une inconnue, ne peut jamais admettre qu'une seule valeur pour cette inconnue.*

En effet, quelle que soit l'équation proposée, on pourra toujours la ramener à la forme $ax = b$; car on pourra toujours chasser les dénominateurs, transposer les termes, réunir en un seul tous les multiplicateurs de l'inconnue x, représenter par a le nouveau multiplicateur, et par b le nombre connu qui forme le second membre : et comme ces différentes transformations ne détruisent pas l'égalité, il s'ensuit que l'inconnue x ne change pas de valeur pour maintenir cette égalité; les valeurs de x, dans l'équation résultante $ax = b$, sont donc les mêmes que dans l'équation proposée.

Or, l'inconnue x n'a qu'une seule valeur dans $ax = b$, car il n'y a qu'un seul nombre qui, multipliant a, puisse donner le produit b; donc aussi l'inconnue x n'a qu'une seule valeur dans l'équation proposée, du premier degré (*).

(*) Si x pouvait avoir deux valeurs différentes m et p, dans $ax = b$,

145. Ce raisonnement suppose que l'équation proposée ne soit pas identique, comme $mx - k = mx - k$; car si cela était, les quantités a et b seraient nulles, et l'équation deviendrait $0 . x = 0$: donc cette équation serait *satisfaite* par toutes les valeurs qu'on voudrait donner à x ; donc l'inconnue x pourrait avoir une infinité de valeurs différentes, et serait *indéterminée* dans cette équation.

Si l'on veut résoudre l'équation $0 . x = 0$, on trouvera $x = \frac{0}{0} = 0^0$. Or, quel que soit le quotient x de 0 divisé par 0, en multipliant le diviseur 0 par ce quotient, on aura toujours le dividende au produit : donc x, c'est-à-dire $\frac{0}{0}$, est tel nombre qu'on veut, et représente par conséquent *une quantité indéterminée.*

146. Si après avoir ramené l'équation du premier degré à la forme $ax = b$, le coefficient a était nul et b égal à un nombre n, l'équation proposée deviendrait $0 . x = n$ ou $0 = n$, et serait par conséquent impossible, aussi bien que le problème qui l'a donnée.

Dans ce cas, $0 . x = n$ fournit $x = \frac{n}{0}$; et alors la valeur de x est *infinie*. En effet, le dividende n restant le même, si le diviseur était successivement $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, etc., le quotient serait successivement $10n$, $100n$, $1000n$, $10000n$, etc. Donc plus le diviseur est petit, plus le quotient est grand ; si le diviseur est très-petit le quotient sera très-grand ; si le diviseur est le plus petit possible, ou 0, le quotient sera le plus grand possible, et sera par conséquent *infini*. Donc $\frac{n}{0}$ est le symbole d'une quantité infiniment grande, et ne saurait être exprimé par aucun nombre, quelque grand qu'il soit.

On se sert d'un *huit* renversé ∞ pour désigner l'*infini* ; ainsi $\frac{n}{0} = \infty$; d'où $n = \infty \times 0$ et $\frac{n}{\infty} = 0$. Il est bon de remarquer que $\frac{n}{0}$ ou ∞ est un signe d'impossibilité.

147. *Les inconnues ne peuvent avoir qu'une valeur chacune dans* m *équations du premier degré à* m *inconnues.*

---

on aurait à la fois $am = b$ et $ap = b$; donc on aurait aussi $am = ap$, ou $m = p$; ce qui est contre l'hypothèse. Donc x n'a qu'une seule valeur dans $ax = b$, et par conséquent dans l'équation proposée, du 1er degré.

En effet, les transformations que l'on fait subir aux deux membres de chaque équation, pour arriver à l'équation finale, ne détruisent pas l'égalité de ces deux membres. Donc les inconnues ne changent pas de valeurs pour maintenir cette égalité. Donc toutes les valeurs de chaque inconnue, dans les équations proposées, se trouvent encore dans les équations qui s'en déduisent, et par conséquent dans l'équation finale. Or, l'inconnue n'a qu'une seule valeur dans l'équation finale, puisque cette équation est du premier degré (144); donc aussi, la même inconnue n'a qu'une seule valeur dans les équations proposées. Et comme cette inconnue est l'une quelconque des proposées, il s'ensuit que ces inconnues n'ont qu'une seule valeur chacune.

148. Cette démonstration suppose qu'il n'y ait pas plusieurs équations proposées qui se réduisent à une seule; car si cela était, on aurait moins d'équations distinctes que d'inconnues; et comme une équation ne peut jamais déterminer qu'une seule inconnue, une au moins des inconnues proposées serait arbitraire; ces inconnues pourraient donc avoir une infinité de valeurs différentes chacune.

149. Si à l'inspection des équations proposées, on ne voyait pas que plusieurs d'entre elles se réduisent à une seule, on le reconnaîtrait par les valeurs $\frac{0}{0}$ qu'on trouverait en résolvant ces équations. Par exemple, soient les deux équations

$$3x - 6y - 45 = 0,$$
$$7y - 2x = 3y - 30.$$

Transposant et réduisant les termes, puis divisant la première par 3 et la seconde par 2, il viendra

$$\left.\begin{aligned} x - 2y &= 15, \\ 2y - x &= -15 \end{aligned}\right\} \cdots (1)$$

Pour éliminer y, il suffit d'ajouter la seconde de ces équations à la première; alors écrivant seulement les termes en x, puisque ceux en y doivent se détruire, on aura

$$x - x = 15 - 15, \text{ ou } 0.x = 0 \text{ et } x = \tfrac{0}{0}.$$

Cette valeur indéterminée nous apprend que les deux équations proposées se réduisent à une seule; et c'est ce qu'on voit par les équations (1); car la seconde n'est que la première, dans laquelle on changerait les signes des deux membres (91).

Voici trois équations, dont deux se réduisent à une seule :

$$\frac{x-10}{y+4}=\frac{2}{3},\ \frac{y-96}{x-24}=\frac{1}{2}\ \text{et}\ \frac{2x}{y-84}=4.$$

150. Lorsque plusieurs équations ne peuvent coexister, on en est averti par les valeurs infinies qu'on trouve en résolvant ces équations. Par exemple, supposons qu'on ait

$$8x-4y=36,$$
$$4x-2y=5.$$

Pour éliminer y, on multiplie la 2ᵉ par 2 et on la retranche de la 1ʳᵉ; alors en n'écrivant que les termes en x, il vient

$$8x-8x=26,\ \text{ou}\ 0.x=26\ \text{et}\ x=\tfrac{26}{0},$$

valeur infinie qui ne saurait être représentée par aucun nombre; donc les deux équations proposées sont impossibles. Et c'est ce qu'on voit en multipliant la seconde par 2; car alors ces deux équations sont une même quantité $8x-4y$ égalée à deux nombres différens 36 et 10.

C'est aussi de cette manière que les trois équations suivantes sont impossibles :

$$2y-x=8-2z,$$
$$6x+13-\tfrac{1}{2}y=4y-1+3z,$$
$$\tfrac{1}{4}y+z-x+\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}-\tfrac{2}{3}x+\tfrac{4}{6}z.$$

151. Il peut arriver qu'en résolvant un problème on soit conduit à une valeur négative de la forme $x=-v$: dans ce cas, comme on ne saurait soustraire v, la valeur de x est impossible, aussi bien que le problème proposé.

Mais il est très-important de remarquer qu'il y a cependant un problème résolu par la valeur v; car si l'on change x en $-x$ dans les équations proposées; ce sera changer x en $-x$ dans toutes les équations qui s'en déduisent (*), et par suite dans la dernière $x=-v$, qui deviendra alors $-x=-v$ ou $x=v$ (91) : la valeur de x ne sera donc plus impossible, et il y aura effectivement un problème résolu par cette valeur v. Or, quel est ce nouveau problème? Pour le trouver on observe que les

(*) En effet, si l'on désigne $-x$ par x', et qu'on remplace x par x', dans les équations proposées, il est clair que les nouvelles équations donneront en x', c'est-à-dire en $-x$, toutes les équations que les proposées donnaient en x; elles conduiront donc à $x'=-v$, c'est-à-dire à $-x=-v$; d'où $x=v$.

équations fournies par les proposées, en y changeant x en $-x$, donnent la valeur $x = v$; donc ces nouvelles équations sont celles du nouveau problème, et par conséquent, en les traduisant en langage ordinaire, on aura l'énoncé de ce nouveau problème.

Ainsi, *lorsque la résolution d'un problème conduit à une valeur négative de la forme* $x = -v$, *cette valeur* v *résout le problème que donnent les équations du proposé en y changeant* x *en* $-x$, *et en traduisant les nouvelles équations en langage ordinaire.*

152. Il n'existe point de règle générale et précise pour opérer cette traduction ; mais l'usage montrera bientôt comment elle s'effectue. Par exemple, *le poids* x *d'un corps est tel, que son triple augmenté de* 10 *livres, est égal à son double diminué de* 20 *livres. Quel est ce poids?*

L'équation de ce problème est évidemment

$$3x + 10 = 2x - 20 ;$$

et on en tire $x = -30$: donc le problème est impossible, comme on pouvait bien le prévoir d'ailleurs. Substituant $-x$ à x dans l'équation proposée, elle deviendra $-3x + 10 = -2x - 20$; ou bien, en changeant les signes des deux membres (91),

$$3x - 10 = 2x + 20.$$

Comparant cette équation à la proposée, on verra que les nombres 10 et 20 changent seuls de signes, pour le problème résolu par la valeur $x = 30$, et que ce problème est :

Le poids x *d'un corps est tel, que son triple diminué de* 10 *livres, est égal à son double augmenté de* 20 *livres. Quel est ce poids?* En résolvant directement ce nouveau problème, on trouve effectivement que $x = 30$.

153. *Un joueur donne* 4 *fr. pour chaque partie qu'il perd, reçoit* 2 *fr. pour chaque partie qu'il gagne ; et après* 12 *parties, son gain total excède sa perte totale de* 36 *fr. Trouver combien il y a eu de parties gagnées et de parties perdues.*

Soient x et y les nombres de parties gagnées et perdues, on aura

$$x + y = 12 \quad \text{et} \quad 2x - 4y = 36.$$

Ces équations donnent $x = 14$ et $y = -2$. La valeur de y ne saurait être calculée, et par conséquent le problème proposé est impossible. Mais nous avons vu qu'il doit y avoir un problème résolu par les valeurs 14 et 2; et que pour avoir ce nouveau problème, il faut changer y en $-y$ dans les équations proposées, et traduire les équations résultantes

$$x-y=12 \text{ et } 2x+4y=36.$$

Or, pour opérer cette traduction, il suffit de se rappeler que x étant le nombre de parties gagnées et y le nombre de parties perdues, $2x$ désigne le gain total et $4y$ la perte totale; alors on verra que le problème résolu par $x=14$ et $y=2$, est celui-ci:

Un joueur donne 4 francs pour chaque partie qu'il perd et reçoit 2 francs pour chaque partie qu'il gagne. Ayant gagné 12 parties de plus qu'il n'en a perdu, son gain total plus sa perte totale font 36 francs. Combien y a-t-il eu de parties gagnées et de parties perdues?

154. On voit que les valeurs négatives prouvent non-seulement l'impossibilité du problème qui les a données, mais que de plus, elles indiquent les changemens à faire dans l'énoncé pour que ce problème n'ait plus rien d'absurde et soit résolu par les valeurs trouvées. Il n'en est pas de même des valeurs infinies; elles indiquent l'impossibilité absolue du problème proposé (146), et ne conduisent à aucun problème nouveau. Nous laissons à interpréter les valeurs négatives dans les problèmes que voici:

Une cuve reçoit l'eau par deux robinets; en les ouvrant l'un 12 et l'autre 7 minutes, la cuve contient 46 litrons; si le premier est ouvert 8' et l'autre 5, la cuve renferme 30 litrons. Combien chacun verse-t-il d'eau par minute?

Quel nombre x doit-on ajouter à chacun des facteurs a et b, pour que le nouveau produit et le premier se contiennent autant de fois que les sommes de leurs facteurs?

Un rentier partage 420 flor. à 3 neveux; il donne au premier le 5e de ce que reçoivent les deux autres ensemble, et au second, 294f de moins que les 3 quarts de ce que reçoit le troisième. Combien chacun a-t-il?

155. De ce qui précède (151) il suit, que si dans la formule et les équations d'un problème proposé, on change a en $-a$, b en $-b$, c en $-c$, etc., la nouvelle formule résoudra le problème qu'on trouve en traduisant les nouvelles équations en langage ordinaire. De cette manière, une même formule peut, par un simple changement de signes dans ses données, résoudre successivement plusieurs problèmes différens, et conduire à des énoncés qui, peut-être, ne se seraient pas offerts à l'esprit. Cette

propriété très-remarquable, vient uniquement du calcul des quantités négatives isolées, et montre par conséquent le but et l'utilité de ce calcul en algèbre.

156. *Un ouvrier reçoit* d *flor. par jour de travail, donne* c *flor. par jour de repos; et après* a *jours, ayant réglé son compte, on lui redoit* b *fl. Combien de jours a-t-il travaillé?*

Soit x le nombre de jours de travail; $a - x$ sera celui des jours de repos, et on aura

$$dx - c(a-x) = b; \text{ d'où } x = \frac{b+ac}{c+d}.$$

Si dans cette équation et cette formule, on change successivement les signes des quantités b, c, d, x, prises d'abord 1 à 1, puis 2 à 2, ensuite 3 à 3, et enfin 4 à 4, on aura les équations et les formules de 15 problèmes faciles à énoncer en langage ordinaire. Par exemple, si l'on change b et d en $-b$ et $-d$, l'équation et la formule deviendront

$$dx + c(a-x) = b \text{ et } x = \frac{ac-b}{c-d} \cdots (1)$$

Donc le problème résolu est : *Un ouvrier se met en pension chez une personne, et lui donne* c *fl. par jour de repos et* d *fl. par jour de travail. Après* a *jours, ayant réglé son compte, il doit* b *fl. en tout. Combien de jours a-t-il travaillé?*

Dans ce problème, b et d désignent des *dépenses*, et n'ont plus la même *acception* que dans le proposé, où ces quantités représentent des *gains*. Si $c > d$ et $b > ac$, la valeur (1) de x sera négative, et le problème impossible. Mais en substituant $-x$ à x, l'équation et la formule (1) deviennent

$$c(a+x) - dx = b \text{ et } x = \frac{b-ac}{c-d}.$$

Le problème résolu est donc : *Un ouvrier se met en pension chez une personne; il lui donne* c *fl. par jour de repos et en reçoit* d *fl. par jour de travail. S'étant reposé* a *jours de plus qu'il n'en a travaillé, il redoit* b *florins en tout. Combien de jours a-t-il travaillé?*

On voit que x a changé de signe sans changer d'*acception*, et qu'au contraire, d a changé d'acception sans changer de signe : cela tient au produit dx, qui change de signe aussi bien quand d devient $-d$ que quand x devient $-x$.

Lorsque $c=d$ et $b=ac$, la formule (1) devient $x=\frac{0}{0}$; donc le problème est alors indéterminé (145). En effet, supposer $c=d$, c'est supposer que l'ouvrier donne, par jour de travail comme par jour de repos, c flor. pour sa pension; donc après a jours, tant de repos que de travail, la somme b qu'il devra sera ac. Or, c'est précisément ce que le problème demande, puisqu'on y suppose $b=ac$; donc ce problème sera toujours bien résolu quelque valeur qu'on donne au nombre x de jours de travail, pourvu que ce nombre ne surpasse pas a.

On voit d'ailleurs que quand $c=d$, si on avait $b>ac$, le problème serait impossible, puisque $c=d$ conduisant à $b=ac$, b devrait être à la fois plus grand que ac et égal à ac : aussi trouve-t-on, dans ce cas, $x=\infty$ (146), valeur impossible.

157. Une remarque très-importante à faire, c'est que généralement, dès qu'une quantité a est prise dans une acception contraire à ce qu'elle signifiait d'abord, cette quantité diminue tout ce qu'elle augmentait et augmente tout ce qu'elle diminuait; c'est-à-dire que a devient partout $-a$. D'où il faut conclure que *toute quantité prise en sens contraire doit être affectée du signe —, partout où elle se trouve* (*).

(*) Supposons qu'un ouvrier ait pour m flor. de biens : suivant qu'il gagnera ou qu'il perdra a flor., l'état de sa fortune sera $m+a$ ou $m-a$; dans ces deux états la quantité a aura des acceptions opposées, puisque dans l'un a désigne un *gain* et dans l'autre une *perte*. Or, l'un de ces états devient l'autre, 1° en y prenant a en *sens contraire* et en y changeant a en $-a$; 2° en y changeant a en $-a$ et en y prenant a en sens contraire. D'où il suit que, 1° *toute quantité prise dans une acception opposée, doit recevoir le signe — partout où elle se trouve;* 2° Réciproquement, *toute quantité dont la valeur a le signe —, doit être prise dans une acception contraire.*

Le premier de ces principes n'est sujet à aucune exception; et voici plusieurs exemples propres à vérifier le second :

1° Si x désigne le nombre d'années qui doivent encore s'écouler, pour qu'un père, âgé de b ans, ait 2 fois l'âge de son fils, qui a c ans; il est clair qu'on aura $b+x=2(c+x)$; d'où $x=b-2c$.

On veut que cette formule ait lieu pour toutes les valeurs de b et c (4) : donc, quand b vaudra 60 ans, et c, 32 ans, cette formule donnera $x=60-64=-4$ ans. En sorte qu'il devrait encore s'écouler -4 années pour que l'âge du père fût double de celui du fils. Mais il y a déjà 4 ans que l'âge du père était double de celui du fils, puisqu'alors l'âge du père

Par conséquent, pour avoir sur-le-champ la formule du problème qu'on obtient en prenant en sens contraire une quantité a d'un problème proposé, il suffit de changer a en $-a$ dans la formule de ce proposé ; ce qui dispense de recommencer, pour le nouveau problème, les raisonnemens et les calculs qui ont fourni la formule du premier.

158. Remarquons encore que quand une quantité a devient $-a$, elle diminue tout ce qu'elle augmentait, et augmente tout ce qu'elle diminuait ; elle change donc d'acception, c'est-à-dire devient une *dette* si d'abord elle désignait un *bien*, un temps *à venir* si elle représentait un temps *passé*, une distance *à gauche* d'un point si elle exprimait une distance *à droite* de ce point,

---

était 60 — 4 ou 56 ans, et celui du fils, 32 — 4 ou 28 ans : donc — 4 *années à écouler*, *sont réellement 4 années déjà écoulées.*

2° On sait que pour avoir les biens réels d'un homme qui a des dettes, il faut soustraire la somme qu'il doit de la somme qu'il possède. Cette règle, considérée comme vraie pour toutes les valeurs des nombres indéterminés qu'elle renferme, s'appliquera au cas où un homme aurait 12 fl. et en devrait 16 ; elle donnera donc 12 — 16 ou — 4 flor. pour les biens réels de cet homme. Mais cet homme n'ayant que 12 florins, n'en peut payer que 12 des 16 qu'il doit ; il en devra donc encore 4. D'où il suit que — *4 florins de biens font réellement 4 florins de dettes.*

3° Pour connaître de combien de lieues un voyageur placé en A, serait

B A

encore en arrière du point B, après avoir parcouru un certain chemin, il faut soustraire ce chemin de la distance AB. Ce principe appliqué au cas où AB vaudrait 7 lieues et le chemin parcouru 11 lieues, donnera 7 — 11 ou — 4 lieues, pour la distance dont le voyageur est encore en arrière du point B. Mais ce voyageur est réellement de 4 lieues en avant de ce point B, puisqu'il avait 7 lieues à faire pour être en B, et qu'il en a fait 11 : donc *être de* — *4 lieues en arrière d'un point, c'est réellement être de 4 lieues en avant de ce point.*

Il suit de ces exemples et de ceux traités plus haut, qu'en regardant les règles et les formules algébriques comme ayant lieu pour toutes les valeurs imaginables des quantités indéterminées qui les composent, on sera quelquefois conduit à des résultats impossibles, tels que les valeurs infinies et les valeurs négatives, qui montreront par conséquent l'absurdité de la supposition qui les aura donnés. Mais les valeurs négatives indiqueront de plus les changemens à faire dans le problème qui les a fournies, pour que ce problème n'ait plus rien d'impossible, et soit résolu par les valeurs obtenues. De cette manière, les calculs et les raisonnemens par lesquels on est passé, ne seront pas inutiles, puisqu'ils résoudront le nouveau problème.

et ainsi de suite. En un mot, *toute quantité qui devient négative, doit être prise en sens contraire.*

159. Mais il faut pour cela, que cette quantité x augmente ou diminue une certaine quantité concrète de même nature qu'elle; car autrement elle ne serait pas susceptible d'être prise en sens opposé; et pour avoir le problème résolu, il faudrait substituer $-x$ à x dans les équations primitives. Lorsque le problème est un peu compliqué, cette substitution est même le moyen le plus sûr d'avoir une interprétation exacte, bien qu'il puisse suffire alors de prendre l'inconnue en sens contraire (158).

C'est en changeant ainsi x en $-x$ qu'il faudra interpréter la valeur négative dans le problème que voici, où un nombre d'hommes ne saurait changer d'acception, et où l'on facilite la traduction en mettant les trois inconnues en évidence : 100 *hommes sont partagés en trois pelotons tels, que le premier a* 60 *individus de moins que le second et* 49 *de moins que le troisième; combien y a-t-il d'hommes dans chaque peloton?*

Nous pouvons maintenant discuter complétement les problèmes du premier degré, et le suivant offre à peu près toutes les circonstances qui peuvent se présenter dans cette discussion :

160. *Deux courriers, éloignés l'un de l'autre de* a *lieues, suivent la même route et vont dans le même sens; le premier fait par heure* b *lieues et le second* c *lieues. On demande après quel nombre* x *d'heures de marche, le second courrier sera encore de* d *lieues en arrière du premier.*

Il est évident qu'en x heures le premier courrier fait bx lieues et le second cx lieues. Si le second courrier n'avait pas marché, le premier aurait sur lui une avance de $a+bx$ lieues; mais en le poursuivant, le second a fait cx lieues; cette avance se réduit donc à $a+bx-cx$ lieues. Or, elle doit se réduire à d : donc

$$a+bx-cx=d;\ \text{d'où}\ x=\frac{a-d}{c-b}.$$

Cette formule déterminera le nombre x d'heures demandées, tant qu'on aura $a>d$ et $c>b$. Mais on pourrait aussi avoir $a>d$ et $c=b$, $a=d$ et $c=b$, $a>d$ et $c<b$, $a=d$ et $c<b$, $a=d$ et $c>b$, $a<d$ et $c<b$. Voyons comment il faut interpréter les valeurs de x dans les trois premiers cas.

1° Si $a>d$ et $c=b$, on aura $x=\infty$ et le problème proposé sera impossible (146). C'est ce qu'on vérifie d'ailleurs, en observant que, puisque les deux courriers vont également vîte et dans le même sens, jamais le second ne s'approchera du premier pour réduire à d la distance a qui les séparait d'abord.

2° Si $a=d$ et $c=b$, il viendra $x=\frac{0}{0}$: et comme alors l'équation proposée devient identique, il s'ensuit que $\frac{0}{0}$ représente réellement une quantité indéterminée (145), et qu'ainsi x peut être tel nombre d'heures qu'on voudra. Effectivement, puisque $c=b$, les deux courriers vont également vîte, dans le même sens; donc la distance $a=d$ qui les séparait d'abord, restera toujours d, quel que soit le nombre x d'heures de marche.

3° Si $a>d$ et $c<b$, $a-d$ sera positif et $c-b$ négatif; donc la valeur de x sera négative, et le problème proposé impossible (151). Cela devait nécessairement arriver; car le second courrier allant moins vîte que le premier, ne saurait s'en approcher, pour réduire à d la distance a qui les séparait d'abord.

Mais puisque la valeur de x est négative, elle résout le problème que donne le proposé en y prenant l'inconnue x en sens contraire (159), et par conséquent en demandant *depuis quel nombre* x *d'heures de marche le second courrier était en arrière du premier de* d *lieues*. On peut voir d'ailleurs que ce nouveau problème est possible; car ayant $a>d$ et $c<b$, le second courrier va moins vîte que le premier; donc la distance d qui séparait les deux courriers, il y a x heures, a augmenté pendant ce temps : donc elle a pu devenir a.

Changeons maintenant les acceptions de b et d, c'est-à-dire, proposons-nous ce nouveau problème : *Deux courriers, ayant* a *lieues de distance entre eux, suivent la même route, vont l'un contre l'autre, et font par heure, le premier* b *lieues et le second* c *lieues. On demande après quel nombre* x *d'heures de marche ces deux courriers se seront dépassés de* d *lieues.*

Puisque les quantités b et d du premier problème sont prises en sens contraire dans le nouveau, on aura sur-le-champ la formule de ce nouveau, en changeant b et d en $-b$ et $-d$ dans la formule du proposé (157); il viendra donc, pour le nouveau problème,

$$x=\frac{a+d}{c+b};$$

comme il serait aisé de le vérifier, en résolvant directement le nouveau problème. Et si l'on fait partout $d=0$, on aura les formules de la rencontre des courriers.

161. Ce que nous venons de dire, dans la discussion précédente, paraît suffire pour faire voir aux commençans de quelle manière l'algèbre répond à toutes les circonstances d'une question ; mais ils feront bien de s'exercer à la discussion des problèmes que voici :

Un foudre de a mesures a été rempli par deux ouvriers en b heures : le premier y faisait entrer c mesures par heure ; combien le second y faisait-il entrer dans le même temps? (On peut avoir une valeur négative, et c peut changer d'acception, ainsi que a.)

Quel nombre x de jours faut-il encore pour qu'un homme, qui voyage depuis a jours, ait marché pendant c fois autant de jours qu'un autre, qui ne doit se mettre en route que dans b jours? (a et b peuvent changer d'acception, ainsi que x ; x peut devenir infinie, indéterminée ou négative.)

Quels sont les biens x et y de deux personnes? On sait que si elles recevaient respectivement a fl. et b fl., les biens de l'une vaudraient m fois ceux de l'autre, et que si la première recevait c fl. et la seconde d fl., la première aurait p fois autant que la seconde. (Faire $a=40$, $b=8$, $c=39$, $d=12$, $m=3$ et $p=2$; changer les signes des quantités a, b, c, d, prises 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4 ; voir s'il y a des valeurs négatives, infinies ou indéterminées.)

162. Nous avons prouvé (145) qu'en général $\frac{0}{0}$ est le symbole d'une quantité indéterminée ; voyons si cette indétermination a toujours lieu. D'abord, si l'hypothèse de $a=b$, qui anéantit les deux termes de la valeur générale de x, rend nul aussi le premier membre de l'équation proposée, ramenée à la forme $M=0$, cette équation sera satisfaite quelque valeur qu'on donne à l'inconnue x ; donc cette inconnue pourra être prise à volonté et sera indéterminée, à moins que le problème n'ait des conditions particulières, propres à limiter le nombre de solutions (128).

Mais si l'hypothèse $a=b$, qui donne $x=\frac{0}{0}$, ne rendait pas nul le premier membre de l'équation proposée $M=0$, cette équation serait toujours du premier degré en x, et n'admettrait qu'une seule valeur pour cette inconnue (144) : donc $\frac{0}{0}$ ne représenterait pas alors une quantité indéterminée ; et pour avoir la vraie valeur de x, il faudrait d'abord diviser ses deux termes par le facteur $a-b$, qui doit leur être commun, puisqu'ils deviennent nuls en même temps que lui, quand $a=b$.

163. On voit, par cette discussion, que si la seule hypothèse de $a=b$ rend nuls les deux termes de la valeur de x, cette inconnue sera ou ne sera pas indéterminée, suivant que la même hypothèse rendra ou ne rendra pas nul le premier membre de

l'équation proposée, ramenée à la forme M = o. Et pour avoir la véritable valeur de x, dans le second cas, il faudra d'abord diviser ses deux termes par le facteur commun $a-b$ et faire ensuite $a=b$.

164. *Quelle somme* x *faudrait-il donner au commencement de chaque année, pour qu'en donnant aussi, à la fin de cette année,* b *flor. sur chaque* c *flor. qu'on doit pendant la même année, on eût acquitté, au bout de 2 ans, une somme* a *qu'on vient d'emprunter?*

Il est aisé de voir que l'équation de ce problème est

$$a-2x-\frac{b}{c}(a-x)-\frac{b}{c}(a-2x)+\frac{b^2}{c^2}(a-x)=o;$$

d'où l'on tire $$x=\frac{ab^2-2abc+ac^2}{b^2-3bc+2c^2}.$$

Lorsque $b=c$, cette formule devient $x=\frac{o}{o}$: et comme $b=c$ rend nul le premier membre de l'équation proposée, il s'ensuit que x serait indéterminée, si le problème n'avait pas une condition particulière, propre à limiter le nombre de solutions. Or cette condition existe; car supposer $b=c$, c'est supposer qu'au bout de chaque année, on paye b fl. sur chaque b fl. qu'on doit; on paye donc tout ce qu'on doit pendant cette année; la somme x qu'il fallait donner au commencement, doit donc être nulle. Ainsi la condition particulière est que quand $b=c$, on ait $x=o$; et le problème n'a que cette seule solution, dans ce cas.

Divisant les deux termes de la valeur générale de x par $b-c$, puis faisant $b=c$ dans la nouvelle formule $x=\frac{ab-ac}{b-2c}$, il viendra $x=o$, comme cela doit être. On aurait aussi cette nouvelle formule, soit en supprimant $1-\frac{b}{c}$ facteur du premier membre de l'équation proposée, soit en observant que la somme $a-2x-\frac{b}{c}(a-x)$, due pendant la seconde année, doit être nulle, puisqu'après en avoir retranché les $\frac{b}{c}$, c'est-à dire quelques-unes de ses parties, le reste est o.

165. Nous terminerons la discussion des problèmes du premier degré, en observant que quand les deux membres d'une équation ont un facteur commun, indépendant de l'inconnue, il faut, avant de supprimer ce facteur commun, voir s'il ne devient pas nul par des valeurs particulières des lettres qui le

composent; car s'il devenait nul, le problème serait indéterminé pour ces valeurs particulières; et la suppression du facteur n'aurait d'autre effet que de conduire à une ou plusieurs des solutions. Le problème précédent offre un exemple de cette circonstance. Car l'équation proposée pouvant se mettre sous la forme

$$\left[a-2x-\frac{b}{c}(a-x)\right]\left(1-\frac{b}{c}\right)=0;$$

dès qu'on aura $b=c$, cette équation sera satisfaite. Mais si b n'est pas égal à c, on pourra supprimer le facteur connu $1-\frac{b}{c}$, et l'équation restante donnera la seule valeur de x qui convient alors au problème proposé.

On tire les $\frac{a}{c}$ d'un tonneau de vin et on y remet b litrons de ce vin; on fait deux fois de suite ces deux opérations successives, et alors il reste dans le tonneau $3b-\frac{2ab}{c}$ litrons de vin. Combien y en avait-il d'abord dans le tonneau? (On verra aisément pourquoi ce problème est indéterminé, lorsque $c=a$.)

Formules pour la résolution des équations du premier degré à plusieurs inconnues.

166. Lorsqu'on chasse les dénominateurs et qu'on transpose les termes, on ne détruit pas l'égalité des deux membres d'une équation. D'après cela, on pourra toujours représenter deux équations du premier degré à deux inconnues, par

$$ax+by=c,$$
$$a'x+b'y=c',$$

a, b, c, a', b', c', désignant des nombres entiers, positifs ou négatifs.

Multipliant la première de ces équations par a', et la seconde par a, puis retranchant la première des nouvelles équations de la seconde, on aura

$$(ab'-ba')y=ac'-ca';\ \text{d'où}\ y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}.$$

Multipliant la première des équations proposées par b' et la seconde par b, puis retranchant la seconde des nouvelles équations de la première, il viendra

$$(ab' - ba')x = cb' - bc'; \text{ d'où } x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

167. En examinant attentivement les deux valeurs générales de x et de y, on voit que, pour former le dénominateur qui leur est commun, il faut écrire les deux arrangemens ab et ba, des deux lettres a et b; donner le signe — au second arrangement ba, et faire porter un accent à chaque seconde lettre : ce qui donnera effectivement $ab' - ba'$.

A l'égard des numérateurs, on les déduira du dénominateur commun $ab' - ba'$, en y changeant les a en c, pour x, et les b en c, pour y, et en laissant d'ailleurs les accens tels qu'ils sont; de cette manière, on aura dans le premier cas, $cb' - bc'$, c'est-à-dire le numérateur de x, et dans le second, $ac' - ca'$, c'est-à-dire le numérateur de y.

168. Pour montrer l'usage qu'on peut faire des formules ou des règles précédentes, soient les deux équations

$$5x - 7y = 34,$$
$$3x - 13y = -6.$$

En les comparant aux deux équations générales, il vient $a = 5$, $b = -7$, $c = 34$, $a' = 3$, $b' = -13$ et $c' = -6$; ainsi le dénominateur commun $ab' - ba'$ deviendra, $5 \times -13 - (-7) \times 3$, ou $-65 + 21$, ou enfin -44; le numérateur de x, savoir $cb' - bc'$, vaudra $34 \times -13 - (-7) \times -6$, ou $-442 - 42$, ou encore -484; donc on aura $x = -484 : -44 = 11$.

On trouverait semblablement $y = 3$. On voit que si l'on ne soumettait pas au calcul, les quantités négatives isolées, les formules du premier degré ne pourraient pas être appliquées à tout exemple particulier, et la plus importante de leurs propriétés n'existerait pas.

169. Trois équations quelconques du premier degré à trois inconnues, peuvent toujours, en chassant les dénominateurs et en transportant, être représentées par

$$ax + by + cz = d,$$
$$a'x + b'y + c'z = d',$$
$$a''x + b''y + c''z = d''.$$

Les calculs seraient très-longs si l'on voulait appliquer à la résolution de ces équations, l'une quelconque des méthodes d'élimination que nous avons exposées. Mais voici un moyen d'abréviation : on multipliera la première équation par une quantité indéterminée m, la seconde par une quantité indéterminée p; on ajoutera les deux nouvelles équations, et l'on retranchera de la somme, la troisième des équations proposées. L'équation résultante aura lieu pour toutes les valeurs de m et de p, puisque pour toutes ces valeurs, les trois trinomes du premier membre seront respectivement égaux aux trois monomes du second. Réunissant en un seul, tous les multiplicateurs d'une même inconnue, dans cette nouvelle équation, elle deviendra :

$$(am+a'p-a'')x+(bm+b'p-b'')y+(cm+c'p-c'')z \\ =dm+d'p-d''.$$

Cette équation ayant lieu pour toutes les valeurs de m et de p, il est évident qu'on pourra disposer de ces deux indéterminées pour faire évanouir deux quelconques des coefficiens, et par conséquent, pour éliminer deux inconnues (*). Veut-on faire disparaître x et z? Il suffira de poser

$$am+a'p=a'',$$
$$cm+c'p=c'';$$

et alors il viendra $\quad y=\dfrac{dm+d'p-d''}{bm+b'p-b''}.$

(*) Cette méthode d'élimination par *introduction d'indéterminées*, n'abrége les calculs que dans les équations générales, comme on peut s'en convaincre en résolvant, d'après cette méthode, les équations

$$10x+9y-12z=72$$
$$28x-63y-18z=-42$$
$$4x+27y-12z=72.$$

En effet, ces équations donnent d'abord

$$2(5m+14p-2)x+9(m-7p-3)y+6(2-2m-3p)z= \\ 6(12m-7p-12)\cdots(1)$$

Egalant à zéro les coefficiens de x et de y, on aura deux équations qui, résolues par l'introduction d'une nouvelle indéterminée h, donneront $m=\frac{8}{7}$ et $p=-\frac{13}{49}$; d'où $z=7$. Substituant 7 au lieu de z dans l'équation (1), on aura

$$2(5m+14p-2)x+9(m-7p-3)y=12(13m+7p-13).$$

Posant $m-7p-3=0$, ou $m=7p+3$, y disparaîtra et il viendra

$$(98p+26)x=12(98p+26);\ \text{d'où}\ x=12.$$

Prenant $5m+14p-2=0$, on aura de même $y=4$.

Si l'on résout les équations en m et en p, comme au n° 167, on obtiendra :

$$m = \frac{c'a'' - a'c''}{ac' - ca'} \quad \text{et} \quad p = \frac{ac'' - ca''}{ac' - ca'}.$$

Substituant ces valeurs dans celle de y, réduisant au même dénominateur $ac' - ca'$ tous les termes du numérateur et du dénominateur de y, et négligeant d'écrire le dénominateur commun $ac' - ca'$, ce qui multipliera les deux termes de y par $ac' - ca'$; il viendra :

$$y = \frac{ad'c'' - ac'd'' + ca'd'' - da'c'' + dc'a'' - cd'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

On trouverait x et z d'une manière absolument semblable.

Mais on peut encore abréger les calculs, en observant que, changer les b en a et réciproquement, dans les équations proposées, et par conséquent dans toutes celles qui s'en déduisent, c'est changer y en x et réciproquement, dans ces équations, et par conséquent, dans l'équation finale en y. Donc, par ces changemens de b en a et réciproquement, l'équation finale en y, c'est-à-dire, la valeur de y, devient l'équation finale en x, c'est-à-dire, la valeur de x. On verra de même qu'en changeant b en c et réciproquement, la valeur de y deviendra celle de z. Effectuant donc, dans la valeur de y, les changemens dont il s'agit, et changeant ensuite les signes du numérateur et du dénominateur de chacune des valeurs résultantes, on trouvera :

$$x = \frac{db'c'' - dc'b'' + cd'b'' - bd'c'' + bc'd'' - cb'd''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''},$$

$$z = \frac{ab'd'' - ad'b'' + da'b'' - ba'd'' + bd'a'' - db'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

170. En examinant les valeurs précédentes de x, y, z, on verra que, pour avoir le dénominateur qui leur est commun, il faut prendre les arrangemens ab, $-ba$; introduire la lettre c successivement dans la troisième, la seconde et la première place de chacun de ces arrangemens, et changer le signe chaque fois qu'on déplace la lettre c, dans un même arrangement : de cette manière, ab donnera, $abc - acb + cab$; $-ba$ donnera, $-bac + bca - cba$. Réunissant tous les résultats, et faisant porter un accent à chaque seconde lettre, et deux accens à chaque troisième, on aura :

$$ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'';$$

ce qui est effectivement le dénominateur commun aux valeurs des trois inconnues x, y, z.

A l'égard des numérateurs, on les déduira du dénominateur commun, en y changeant le coefficient de l'inconnue cherchée en la lettre des seconds membres, et en conservant d'ailleurs les accens tels qu'ils sont.

171. L'analogie montre que, si l'on résolvait quatre équations à quatre inconnues, le dénominateur commun s'obtiendrait en formant les six arrangemens, $abc - acb + cab - bac + bca - cba$; en introduisant la lettre d successivement dans toutes les places, comme dans le cas de trois inconnues, et en faisant porter un accent à chaque seconde lettre, deux à chaque trosième et trois à chaque quatrième. On aurait ainsi un dénominateur commun composé de 24 termes, et duquel on déduirait les numérateurs comme dans le cas de trois inconnues.

172. Mais nous n'en dirons pas davantage sur cet objet, parce que les cas où l'on est appelé à traiter un grand nombre d'équations à plusieurs inconnues, arrivent très-rarement; et que les cas particuliers qui peuvent se présenter, se développent ordinairement d'une manière plus abrégée que par l'application des formules générales. Il y a même plus, c'est que l'emploi des formules générales peut conduire à des valeurs qui ne conviennent pas aux équations proposées. Par exemple, soient les deux systèmes d'équations

$$\begin{array}{r|l} x + 9y + 6z = 16 & 11x - 8y + 6z = 49 \\ 2x + 3y + 2z = 7 & 5x - 12y + 9z = 16 \\ 3x + 6y + 4z = 13 & 4x - 20y + 15z = 15. \end{array}$$

Dans chacun de ces systèmes, les formules donneraient

$$x = \tfrac{0}{0},\ y = \tfrac{0}{0} \text{ et } z = \tfrac{0}{0}.$$

Cependant en opérant directement sur les équations, on trouvera, dans le premier système, $x = 1$, $y = \frac{0}{0}$, $z = \frac{0}{0}$, et dans le second, $x = 5$, $y = \infty$ et $z = \infty$. Effectivement, en prenant $x = 1$, dans le 1er système et $x = 5$ dans le second, il viendra

$$\begin{array}{r|l} 3y + 2z = 5 & 4y - 3z = 3 \\ 3y + 2z = 5 & 4y - 3z = 3 \\ 3y + 2z = 5 & 4y - 3z = 1. \end{array}$$

D'où l'on voit que les inconnues y et x sont *indéterminées* dans le 1er système, et impossibles ou *infinies* dans le second.

173. Quoique la discussion des équations du premier degré soit la même que celle des problèmes du même degré, dont on s'est déjà occupé, nous allons cependant encore discuter les valeurs générales dans deux équations du premier degré, à deux inconnues. Il est clair d'abord que ces équations générales sont la même chose que

$$ax + by - c = 0,$$
$$a'x + b'y - c' = 0.$$

Or, si l'on divise la seconde de ces équations par la première, le quotient sera $\frac{a'}{a}$, et le reste deviendra $\frac{1}{a}[(ab' - ba')y - (ac' - ca')]$; donc on aura cette *identité* :

$$a'x + b'y - c' = \frac{a'}{a}(ax + by - c) + \frac{(ab' - ba')y - (ac' - ca')}{a} \dots (1).$$

Il est évident, par cette identité, que tous les couples de valeurs de x et de y, qui satisferont aux équations proposées, satisferont aussi à l'équation $$(ab' - ba')y - (ac' - ca') = 0,$$ laquelle est par conséquent l'équation finale en y.

D'après cela, 1° si l'équation finale donne $y = \frac{0}{0}$, c'est-à-dire, si l'on a en même temps, $ab' - ba' = 0$ et $ac' - ca' = 0$, l'équation (1) deviendra

$$a'x + b'y - c' = \frac{a'}{a}(ax + by - c);$$

donc tous les couples de valeurs de x et de y, qui satisferont à l'équation $a'x + b'y - c' = 0$, satisferont aussi à l'équation $ax + by - c = 0$: et comme il y a une infinité de couples de valeurs de x et de y qui peuvent satisfaire à l'équation $a'x + b'y - c' = 0$, et par conséquent à l'équation $ax + by - c = 0$, c'est-à-dire, aux deux équations proposées; il s'ensuit que x et y auront une infinité de valeurs différentes, et seront par conséquent *indéterminés*.

Cela devait arriver; car ayant alors $b' = \frac{ba'}{a}$ et $c' = \frac{ca'}{a}$, la seconde équation proposée se réduit à la première, et les deux équations n'en font qu'une (149).

Réciproquement, si x et y sont *indéterminés*, c'est-à-dire, si les deux équations proposées sont satisfaites par toutes les valeurs qu'on voudra donner à x et à y; on verra, par l'identité (1), que l'équation finale en y aura aussi lieu pour toutes les valeurs de y et donnera par conséquent $y = \frac{0}{0}$.

2° Si l'équation finale en y donne $y=\frac{n}{0}$, c'est-à-dire, si l'on a $ab'-ba'=0$ et $ac'-ca'=n$, l'équation (1) deviendra

$$a'x+b'y-c'=\frac{a'}{a}(ax+by-c)-\frac{n}{a}.$$

Donc il n'y aura aucun couple de valeurs de x et de y capable de satisfaire aux deux équations proposées; car si cela était, on aurait nécessairement $n=0$; ce qui est contre l'hypothèse. Ainsi, les deux équations proposées ne peuvent avoir lieu en même temps et sont impossibles. Et en effet, il n'est pas difficile de voir que, puisque x et y ont respectivement même valeur dans les deux équations proposées, ces deux équations sont une même quantité égalée à deux quantités différentes, lorsque $ab'-ba'=0$, et $ac'-ca'=n$.

Réciproquement, si les deux équations proposées sont impossibles, les valeurs de x et de y qui satisferont à l'une, ne satisferont pas à l'autre, et par conséquent, on n'aura jamais $(ab'-ba')y-(ac'-ca')=0$; ce qui exige qu'on ait $y=\frac{n}{0}$.

3° Supposons que y puisse avoir deux valeurs m et p, qui, avec des valeurs de x, satisfassent aux deux équations proposées; l'identité (1) montre que ces mêmes valeurs satisferont aussi à l'équation finale $(ab'-ba')y-(ac'-ca')=0$; ce qui est impossible, puisque cette équation est du premier degré en y (144). Donc y n'aura qu'une valeur dans les équations proposées; et cette valeur devant satisfaire à l'équation finale, sera donnée par la résolution de cette équation. Si on éliminait y, on verrait de même que, dans les équations proposées, x n'a qu'une seule valeur donnée par l'équation finale en x.

174. Les propositions précédentes ont lieu aussi pour trois équations du premier degré à trois inconnues, puisque, par l'élimination d'une inconnue, ces trois équations se réduisent à deux, ne contenant que deux inconnues. Mais il serait très-long d'arriver aux propositions dont il s'agit, par la discussion des valeurs générales des inconnues. Nous examinerons seulement le cas où les trois termes connus sont nuls à-la-fois. Dans ce cas, les trois numérateurs seront évidemment nuls; donc, si le dénominateur commun n'est pas nul, on aura $x=0$, $y=0$ et $z=0$. Mais si le dénominateur commun est nul, les inconnues deviendront $\frac{0}{0}$ et seront indéterminées.

C'est ce qu'on peut voir d'ailleurs, car les équations proposées étant alors

$$\left.\begin{aligned} ax+by+cz&=0\\ a'x+b'y+c'z&=0\\ a''x+b''y+c''z&=0 \end{aligned}\right\}\ \text{d'où}\ \left\{\begin{aligned} ax'+by'&=-c\\ a'x'+b'y'&=-c'\\ a''x'+b''y'&=-c'', \end{aligned}\right.$$

en posant $x=x'z$ et $y=y'z$. Les deux premières donnent

$$x' = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}, \quad y' = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'};$$

et il faut que ces valeurs satisfassent à la troisième équation (114); ce qui arrive, puisqu'elles la réduisent au dénominateur commun égalé à zéro, lequel est effectivement nul, par hypothèse. Donc dans ce cas, les trois équations se réduisent aux deux premières, lesquelles ne peuvent déterminer que les rapports x' et y' des deux premières inconnues x et y à la troisième z. Ces trois inconnues sont donc réellement indéterminées.

Des inégalités.

175. Lorsqu'on n'a égard qu'aux *valeurs absolues* des quantités, on peut traiter les inégalités d'après les principes établis pour les équations; car *en effectuant les mêmes opérations sur deux quantité inégales, le plus grand résultat doit correspondre à la plus grande quantité.* Mais si l'on a égard aux signes des quantités, ce principe présente des exceptions, que nous ferons connaître après avoir établi deux propositions, dont on fait un grand usage en algèbre.

176. Il est clair qu'on a successivement

$$9 - 9 = 0, \quad 9 - 12 = -3 \quad \text{et} \quad 9 - 23 = -14.$$

Or, le nombre dont on soustrait restant le même, plus le nombre à soustraire est grand, plus le reste est petit. Ce principe considéré comme vrai, lorsque le nombre à soustraire surpasse l'autre, fait voir que, le reste -3 est plus petit que le reste 0, et le reste -14 plus petit que le reste -3; c'est-à-dire qu'on a $-3 < 0$ et $-14 < -3$. Ces inégalités montrent, 1° que *toute quantité négative est plus petite que zéro;* 2° que *plus une quantité négative a d'unités, plus elle est petite.*

177. Quoique ces deux principes paraissent d'abord absurdes (*), il faut néanmoins les admettre, si l'on veut soumettre les

(*) Il n'existe point de quantités plus petites que zéro; et plus une quantité a d'unités, plus elle est grande. Mais il faut observer que $-b$ n'est pas une quantité ! c'est simplement l'indication d'une soustraction à faire. Et cette remarque suffit pour montrer d'où provient l'absurdité apparente des deux propositions énoncées plus haut; c'est de ce qu'on a donné à $-b$ le nom de *quantité* qui ne lui convient pas. Il est clair d'ailleurs que ces deux propositions sont vraies d'*une manière relative*, c'est-à-dire, en regardant les quantités négatives comme diminuant une certaine grandeur fixe, de même espèce. Par exemple, puisque les dettes *expressions négatives* aux mêmes opérations que les nombres absolus. En effet, il est évident que si une quantité est plus petite qu'une autre, en leur ajoutant une même troisième quantité, le premier résultat sera plus petit que le second. D'après cela, si l'on admet que $-13<0$ et $-9<-4$; en ajoutant 13 de part et d'autre, il viendra $0<13$ et $4<9$; ce qui est exact. Mais si l'on avait supposé $-13>0$ et $-9>-4$; en ajoutant 13 à chaque membre, on aurait eu $0>13$ et $4>9$; ce qui est absurde. Enfin, puisqu'il faut ajouter 4 à -4, pour avoir 0, il s'ensuit que $-4<0$. De même, puisqu'il faut ajouter 6 à -10, pour avoir -4, il en résulte que $-10<-4$.

178. Maintenant il est très-facile de comprendre les diverses transformations que l'on peut faire subir aux inégalités, et de connaître les exceptions dont ces transformations sont susceptibles.

1° On peut, sans aucune exception, ajouter, aux deux membres d'une inégalité, ou en retrancher une même quantité; l'inégalité subsiste toujours dans le même sens. C'est ainsi que $8>3$, donne $8+2>3+2$ et $8-1>3-1$. De même l'inégalité $-12<-4$, fournit $-12+3<-4+3$ et $-12-4<-4-4$.

2° On peut, sans exception, ajouter membre à membre, plusieurs inégalités établies dans le même sens; l'inégalité résultante subsiste dans le même sens que les proposées. En effet, de $8>5$, $7>3$ et $9>6$, il résulte évidemment $8+7+9>5+3+6$.

---

diminuent les biens, celui qui doit 6 francs de plus qu'il ne possède, a -6 francs de biens. Or, il a *moins que rien*; car il devrait encore gagner 6 francs pour ne rien avoir : donc $-6<0$. De même, si deux hommes doivent l'un 12 fr. de plus qu'il ne possède et l'autre 8 francs, ils auront respectivement -12 fr. et -8 fr. de biens. Or, le premier est *moins riche* que le second; car pour avoir 2 francs, il devrait gagner 14 fr. et le second seulement 10 fr.; donc $-12<-8$.

Si l'on regardait l'inégalité $-4<2$, comme ayant lieu d'une manière absolue, on en conclurait que $12:-4>12:2$, ou que $-3>6$; ce qui est absurde. Cela vient de ce que l'inégalité $-4<2$ n'a lieu que d'une manière relative, c'est-à-dire en sous-entendant devant -4 et $+2$, une certaine quantité de même espèce, telle que 10 par exemple. Autrement, -4 serait d'une nature différente de $+2$; et il n'y aurait pas de comparaison à établir entre ces deux choses; c'est-à-dire que l'inégalité $-4<2$ serait impossible, aussi bien que $-4<0$.

Pareillement, de $-4<-1$ et $-5<-3$, on tire $-4-5<-1-3$.

Mais il n'en est pas toujours de même, si l'on soustrait, membre à membre, deux inégalités établies dans le même sens. Par exemple, les inégalités $12>7$ et $4>2$ donnent bien $12-4>7-2$; mais les inégalités $8>5$ et $6>3$ fournissent $8-6=5-3$.

3° Si l'on multiplie ou divise les deux membres d'une inégalité par un nombre positif, cette inégalité ne sera pas détruite; mais si on les multiplie ou divise par une quantité négative, l'inégalité subsistera en sens contraire. Par exemple, l'inégalité $8<11$, donne bien $8\times3<11\times3$; mais en multipliant les deux membres par -3, elle donne au contraire, $-24>-33$ (176).

4° Il n'est pas permis de changer les signes des deux membres d'une inégalité, à moins qu'on n'établisse l'inégalité résultante en sens contraire; car cela revient à multiplier les deux membres par -1. Ainsi $4<9$ donne $-4>-9$ (176).

5° Si les membres de plusieurs inégalités, établies dans le même sens, sont tous positifs, on pourra multiplier ou diviser ces inégalités membre à membre, ou élever les deux membres de l'une à une même puissance; l'inégalité résultante subsistera toujours dans le même sens que les proposées. Mais il n'en serait pas toujours de même, si quelques membres étaient négatifs. Par exemple, les inégalités $3>-2$ et $-3>-5$, donnent, en les élevant successivement au carré et au cube, $9>4$ et $9<25$; puis $27>-8$ et $-27>-125$. De même, en multipliant entre elles les deux inégalités $-4>-7$ et $4>2$, on aurait $-16<-14$.

179. Au moyen des principes que l'on vient d'exposer, il est facile de résoudre les inégalités, qu'on appelle alors *inéquations*. *Résoudre* une inégalité, c'est en déduire une des deux *limites* de l'inconnue, c'est-à-dire une des deux valeurs plus grande ou plus petite que l'inconnue. Soit par exemple, l'inéquation $7x-\frac{1}{2}>\frac{3x}{4}+27$; on en tire successivement : $28x-2>6x+108$; $28x-6x>108+2$; $22x>110$ et $x>5$.

180. Le système de deux inégalités en x, donne toujours deux limites de x; et le problème qui conduit à ces inégalités,

peut être déterminé, indéterminé, ou impossible. En voici des exemples :

1° Supposons que x doive être un nombre entier dans les deux inégalités

$$\frac{5x}{6}-\frac{9}{4}>\frac{2x}{3}+3 \quad \text{et} \quad \frac{3x}{4}-1<\frac{5x}{12}+10.$$

Résolvant ces deux inéquations, on aura $x>31\frac{1}{2}$ et $x<33$. Tous les nombres compris entre $31\frac{1}{2}$ et 33, seront les valeurs de x dans les inégalités proposées. Mais comme x doit être un nombre entier, on n'a que la seule valeur $x=32$.

2° Soient les deux inégalités $2x-5<25$ et $3x-7>2x+4$; on en tire $x<15$ et $x>11$. Donc on peut prendre pour x, tous les nombres entiers ou fractionnaires compris entre 15 et 11 ; et par conséquent le problème est indéterminé dans ce cas.

3° Si $\frac{3x}{4}-5<5$ et $\frac{2x}{3}-2>\frac{x}{5}+5$, on trouvera $x<13\frac{1}{3}$ et $x>15$. Il est clair qu'alors le problème n'admet aucune solution.

181. Lorsqu'on ne peut pas déterminer directement la valeur d'une inconnue x, on a quelquefois recours aux inégalités, pour démontrer que cette inconnue ne peut être ni plus grande, ni plus petite qu'une quantité connue a; d'où l'on conclut que $x=a$. Mais pour opérer avec plus de facilité, on se sert des signes $\ngtr$ et $\nless$, qui signifient *ne peut pas être plus grand que* et *ne peut pas être plus petit que*.

D'après cela, si l'on a les deux relations

$$2x+7 \ngtr 19 \quad \text{et} \quad 3x-5 \nless 13;$$

la première donnera $2x \ngtr 19-7$, $2x \ngtr 12$ et $x \ngtr 6$. La seconde fournira $3x \nless 13+5$, $3x \nless 18$ et $x \nless 6$. Ainsi, puisque $x \ngtr 6$ et que $x \nless 6$, il s'ensuit que $x=6$.

Voici deux problèmes à résoudre :

1° Trouver un nombre d'oranges tel, que son triple augmenté de 2, surpasse son double augmenté de 61, et que son quintuple diminué de 70, soit moindre que son quadruple diminué de 9.

2° Combien y a-t-il de pièces de 20 francs dans une bourse? On sait que le double du nombre de ces pièces, diminué de 4, ne peut surpasser 2, et que le quintuple du même nombre, diminué de 7, ne peut être moindre que 3.

De l'analyse indéterminée du premier degré.

182. Lorsqu'on a moins d'équations que d'inconnues, ces inconnues ont une infinité de valeurs différentes. Mais il arrive souvent que de toutes ces valeurs, les entières et positives seules peuvent convenir au problème proposé. Il est donc utile de connaître les procédés propres à faire trouver ces valeurs entières et positives; et tel est le but général de l'*analyse indéterminée*.

Lorsque les équations sont d'un degré supérieur au premier, la recherche des valeurs entières offre de grandes difficultés et sort tout-à-fait des élémens. C'est pourquoi nous ne parlerons ici que de l'analyse indéterminée du premier degré, en nous bornant à ce qu'elle a de plus essentiel.

183. On sait que toute équation du premier degré à deux inconnues, peut être ramenée à la forme $ax+by=c$, a, b, c, désignant des nombres entiers positifs ou négatifs. Or, *si les coefficiens* a *et* b *ont un commun diviseur* d, *qui ne divise pas* c, x *et* y *ne pourront jamais être des nombres entiers.*

En effet, divisons par d les deux nombres de l'équation $ax+by=c$; nous aurons

$$\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}y=\frac{c}{d}.$$

Puisque d divise a et b, par hypothèse, il est clair que si x et y pouvaient être des nombres entiers, le premier membre de l'équation précédente serait aussi un nombre entier, ainsi que le second; d diviserait donc c, ce qui est contre l'hypothèse. Donc x et y ne seront jamais des nombres entiers.

On supposera donc, dans tout ce qui va suivre, que a et b sont des nombres *premiers entre eux*, parce que s'ils avaient un facteur commun, celui-ci devrait aussi diviser c; et alors il faudrait le supprimer dans l'équation.

184. Le cas le plus simple de la recherche des valeurs entières, a lieu quand le coefficient d'une inconnue est l'unité, comme dans $x-3y=13$; car alors, en ne prenant que des valeurs entières pour la seconde inconnue y, on n'aura pareillement que des valeurs entières pour la premiere inconnue x. Tout se réduit donc à faire dépendre les inconnues proposées,

de celles d'une équation où une inconnue ait l'unité pour coefficient. Voici comment on peut y parvenir :

On prendra dans l'équation proposée, la valeur de l'inconnue qui a le moindre coefficient ; on extraira les entiers contenus dans le terme inconnu de cette valeur ; on égalera la fraction restante de la même valeur, à une nouvelle inconnue, et l'on aura une nouvelle équation, sur laquelle on opérera comme sur la première, et ainsi de suite.

D'après cette marche, si on a l'équation

$$20x - 31y = 7 \ldots (1)$$

on prendra d'abord la valeur de x, qui sera $x = \frac{31y+7}{20}$; on extraira les entiers contenus dans le terme inconnu $\frac{31y}{20}$ de cette valeur, ce qui revient à diviser 31 par 20, et l'on aura $x = y + \frac{11y+7}{20}$. Egalant la fraction restante à une nouvelle inconnue u, il viendra

$$\frac{11y+7}{20} = u \quad \text{et} \quad x = y + u.$$

Traitant la première équation en u comme la proposée, on trouve $y = \frac{20u-7}{11} = u + \frac{9u-7}{11}$; puis

$$\frac{9u-7}{11} = u' \quad \text{et} \quad y = u + u'.$$

La première équation en u' donne successivement

$$u = \frac{11u'+7}{9} = u' + \frac{2u'+7}{9},$$

$$\frac{2u'+7}{9} = u'' \quad \text{et} \quad u = u' + u''.$$

La 1re équation en u'' fournit successivement les suivantes :

$$u' = \frac{9u''-7}{2} = 4u'' + \frac{u''-7}{2},$$

$$\frac{u''-7}{2} = u''' \quad \text{et} \quad u' = 4u'' + u''.$$

Enfin la première équation en u''' donne $u'' = 2u''' + 7$. Nous voici donc parvenus à une équation *auxiliaire* où le coefficient d'une *indéterminée* u'' est l'unité (*). Substituant la valeur de u'' dans celle de u', cette dernière dans celle de u, et ainsi de suite, en remontant aux valeurs de y et x, on trouvera

$$y = 20u''' + 63 \quad \text{et} \quad x = 31u''' + 98 \ldots (2)$$

Ces valeurs substituées dans l'équation proposée (1), la réduisent à $7 = 7$. De sorte que quelle que soit la valeur qu'on donne à u''', x et y prendront toujours des valeurs qui satisferont à l'équation (1); et si u''' est entière, x et y le seront pareillement. Or, il est aisé de voir, par les formules (2), que -3 est la plus petite valeur qu'on puisse donner à u''', pour que x et y soient des nombres entiers positifs. Prenant donc successivement $u''' = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$, etc., on aura successivement

$$y = 3,\ 23,\ 43,\ 63,\ 83,\ 103,\ 303,\ 503, \text{ etc.}$$
$$x = 5,\ 36,\ 67,\ 98,\ 129,\ 160,\ 191,\ 222, \text{ etc.}$$

De sorte que rien ne limite le nombre de solutions entières et positives de l'équation proposée $20x - 31y = 7$.

185. On peut abréger les calculs en prenant des restes négatifs dans l'extraction des entiers, ou en décomposant le numérateur en facteurs, etc. Par exemple, qu'on ait l'équation

$$17x - 49y = -8 :$$

on en tire d'abord $x = \frac{49y - 8}{17}$. Mais au lieu de considérer $49y$ comme égal à $34y + 15y$, il sera plus abrégé de prendre $49y = 51y - 2y$; et alors il viendra :

(*) Le procédé qu'on vient de suivre conduira toujours à une pareille équation; car pour extraire les entiers contenus dans le terme inconnu de chaque valeur, on divise le plus grand coefficient 31 par le plus petit 20; le plus petit 20 par le premier reste 11; le premier reste 11 par le second 9 et le second reste 9 par le troisième 2. On cherche donc réellement le plus grand commun diviseur entre les coefficiens 31 et 20 des inconnues, dans l'équation proposée. Et puisque ces coefficiens sont premiers entre eux (183), leur plus grand commun diviseur est l'unité. Mais ce plus grand commun diviseur est celui des restes qui divise exactement le précédent : donc on finira toujours par avoir un reste égal à 1. Or, chaque reste est le coefficient d'une indéterminée dans l'équation auxiliaire suivante; donc on arrivera toujours à une équation où une inconnue aura l'unité pour coefficient. On voit même que le nombre d'équations auxiliaires sera toujours moindre que le plus petit des deux coefficiens proposés.

$$x = \frac{51y - 2y - 8}{17} = 3y - \frac{2(y+4)}{17}.$$

Et comme 17 est premier avec le facteur 2, pour que 17 divise le produit $2(y+4)$, il faut que 17 divise $y+4$ (Arithmét.). Posant donc

$$\frac{y+4}{17} = u, \text{ on aura } x = 3y - 2u.$$

D'où il suit que les valeurs de y et de x sont :

$$y = 17u - 4 \quad \text{et} \quad x = 49u - 12.$$

On voit que le nombre de solutions entières et positives dont est susceptible l'équation proposée, est illimité ; et que la plus petite aura lieu pour $u = 1$.

Voici trois problèmes à résoudre : 1° De combien de manières peut-on faire 49 livres avec des poids de 5 et de 3 liv. ? (R. De trois manières.)

2° Partager le nombre 997 en deux parties dont l'une soit divisible par 16 et l'autre par 11. (Cinq solutions.)

3° Une fruitière disait à un jeune algébriste : Pourrez-vous deviner combien il y a de pommes dans ce panier ? Il y en a plus de 100 et moins de 300. En les comptant par 3, il n'en reste point ; par 7, il en reste une, et par 10, il en reste 6. (Le panier contient 246 pommes.)

186. Si l'on avait une solution entière, rien ne serait plus facile que de trouver toutes les autres. En effet, considérons l'équation

$$ax + by = c \; \ldots \; (1)$$

Soient p et q deux valeurs entières de x et de y, dans cette équation ; on aura donc $ap + bq = c$. Retranchant cette équation de la précédente, il vient

$$a(x-p) + b(y-q) = 0; \text{ d'où } x - p = \frac{b(y-q)}{a}.$$

Pour que le second membre soit un nombre entier $x-p$, il faut que a divise $q-y$, car a est premier avec b ; il faut donc qu'on ait $q - y = au$; ce qui donne $x - p = bu$, et par suite

$$y = q - au, \quad x = p + bu \; \ldots \; (2)$$

Ces valeurs satisfont effectivement à l'équation proposée (1) ; et les termes en u y sont de signes contraires ou de mêmes signes, suivant que les coefficiens a et b sont de mêmes signes ou de signes opposés. On voit en outre que, *dans les solutions entières de l'équation* ax + by = c, *les valeurs d'une inconnue augmentent ou diminuent successivement du coefficient de* *l'autre inconnue*. (Ce qu'on reconnaît d'ailleurs dans les exemples des nos 184 et 185) (*).

187. Il suit de là que la résolution de l'équation proposée en nombres entiers positifs, se réduit à trouver une solution entière, positive ou négative ; ce qui est souvent facile. Par exemple, si l'on a

$$7x + 4y = 128;$$

on observera que 4 divise exactement 128, et que par conséquent la première solution est $x = 0$ et $y = 32$. Ce qui donne, pour calculer toutes les autres, les deux formules

$$x = 4u \text{ et } y = 32 - 7u.$$

Si l'on avait l'équation $5x + 11y = 172$; en y faisant $y = 2$, on trouverait $x = 30$; et les solutions en nombres entiers positifs seraient fournies par les formules

$$x = 30 - 11u \text{ et } y = 2 + 5u.$$

Enfin, dans l'équation $11x - 7y = 52$, si l'on faisait $x = 1$ et $y = 1$, le premier membre se réduirait à 4, et serait contenu 13 fois dans le second 52 : donc en prenant x et y chacun 13 fois plus grand, le premier membre se réduira au second. De sorte que $x = 13$ et $y = 13$ est une solution, et qu'on a, pour déterminer les autres,

$$x = 13 + 7u \text{ et } y = 13 + 11u.$$

(*) Quelles que soient les valeurs entières et positives x' et y' de x et de y, qui satisfont à l'équation proposée (1), les formules (2) donneront toujours à u une même valeur entière qui, si elle avait d'abord été substituée dans les équations (2), aurait fourni les valeurs x' et y'. En effet, soient v et v' les valeurs de u, dans les équations (2), quand on y fait $y = y'$ et $x = x'$; on aura donc $y' = q - av$ et $x' = p + bv'$. Substituant ces valeurs dans l'équation proposée (1), et observant que, par hypothèse, $ax' + by' = c$, on trouvera $ab(v - v') = 0$; ce qui exige que $v' = v$. De sorte que pour $x = x'$ et $y = y'$, les équations (2) donnent à u une seule valeur v. De plus, cette valeur est entière ; car si elle était une fraction $\frac{n}{d}$, d devrait diviser a et b ; ce qui est impossible, puisque a et b sont premiers entre eux. Or si l'on substitue cette valeur entière v pour u, dans les équations (2), il est clair qu'on retrouvera les valeurs x' et y' qui l'ont donnée ; ces valeurs sont donc fournies par l'une des valeurs entières de u dans les formules (2). D'où il suit que *pour avoir toutes les valeurs entières et positives de* x *et de* y, *dans la proposée* (1), *il suffira de chercher toutes les valeurs entières et positives de* x *et de* y, *dans les formules* (2).

188. Pour ne pas faire des calculs inutiles, il est bon de savoir d'avance si l'équation proposée admet des solutions entières et positives. Or, 1° toute équation de la forme $ax + by = c$ n'a jamais qu'un nombre limité de solutions; et de plus, elle est impossible, lorsqu'en rejetant les valeurs zéro, la somme des coefficiens a et b est plus grande que c, comme dans $13x + 7y = 17$. 2° Toute équation de la forme $ax - by = c$ peut avoir une infinité de solutions; car les nombres entiers positifs ax et by croissant indéfiniment, leur différence peut conserver la même valeur c. 3° Enfin toute équation de la forme $ax + by = -c$, est impossible; car la somme des deux nombres positifs ax et by ne donnera jamais le nombre négatif $-c$.

189. Si l'on a deux équations à trois inconnues chacune, on en déduira d'abord une équation à deux inconnues, qu'on traitera d'après la méthode (184 ou 186). Et quand on aura les deux inconnues de cette équation, exprimées en *fonctions entières* d'une même indéterminée (*), on substituera leurs valeurs dans la plus simple des équations proposées, et l'on obtiendra une équation à deux inconnues, qu'il faudra encore traiter d'après la méthode. Par exemple, soient les équations

$$3x + 5y + 7z = 560$$
$$9x + 25y + 49z = 2920:$$

l'élimination de z donnera $12x + 10y = 1000$, où

$$6x + 5y = 500.$$

Comme 500 est divisible par le coefficient de y, il est clair que $x = 0$ et $y = 100$ est une première solution, et qu'ainsi on a (187) $\quad x = 5u$ et $y = 100 - 6u$.

Substituant ces valeurs dans la première équation proposée, qui est la plus simple, elle deviendra $7z - 15u = 60$; ce qui donne $z = 15v$ et $u = 7v - 4$. Substituant la dernière valeur dans celles déjà trouvées pour x et y, on verra que les solutions entières et positives des équations proposées sont données par les formules

$$x = 35v - 20,\quad y = 124 - 42v \quad \text{et} \quad z = 15v.$$

(*) On appelle *fonction* d'une lettre, considérée comme *variable*, toute quantité algébrique composée de cette lettre. La fonction est *entière*, lorsqu'elle n'a point de diviseur.

Pour n'avoir que des valeurs entières et positives, v doit être > 0 et < 3. Prenant donc $v = 1$ et $v = 2$, on aura $x = 15$, $y = 82$, $z = 15$, puis $x = 50$, $y = 40$ et $z = 30$.

190. Lorsque dans les deux équations à résoudre, le coefficient de l'une des trois inconnues est l'unité, on abrége les calculs en éliminant d'abord cette inconnue. Soient par exemple, les équations

$$5x + y + 4z = 272 \quad \text{et} \quad 8x + 3y + 9z = 656;$$

éliminant y, on aura $7x + 3z = 160$; d'où $x = 3u + 1$ et $z = 51 - 7u$. Substituant dans la première équation proposée, elle donnera $y = 13u + 68$. On a donc ainsi, par une seule application de la méthode, les trois inconnues, exprimées en fonctions entières de l'indéterminée u. Ce qui n'aurait pas eu lieu en éliminant d'abord une autre inconnue. On voit d'ailleurs que les équations proposées n'admettent que huit solutions entières et positives.

191. Si l'on avait trois équations à quatre inconnues, on en déduirait d'abord deux équations à trois inconnues, qu'on exprimerait en fonctions entières de u (190). Substituant les valeurs résultantes dans la plus simple des équations proposées, il sera facile d'en tirer les valeurs des quatre inconnues en fonctions entières d'une nouvelle indéterminée v. Voici 3 problèmes à résoudre.

On distribue 6 francs à 30 pauvres; les hommes reçoivent 80 centimes chacun, les femmes 7 centimes et les enfans 3. Combien y a-t-il d'hommes, de femmes et d'enfans? (R. 6 hommes, 12 femmes et 12 enfans.)

Un berger interrogé sur le nombre de ses moutons, répondit : Si vous les comptez 4 à 4, il en restera 3; 5 à 5, il en restera 4; 7 à 7, il en restera 5, et leur nombre est moindre que 200. Combien le berger avait-il de moutons? (R. 19 ou 159.)

La somme des quatre chiffres d'un nombre inconnu est 16; si l'on remplace les trois derniers par trois zéros, le nombre résultant contiendra 125 fois celui formé par les deux derniers chiffres du nombre inconnu; enfin le premier chiffre de ce nombre est contenu 183 fois dans le nombre formé par les trois derniers. Quel est le nombre qui jouit de ces propriétés? (R. 4732.)

192. Lorsqu'on n'a qu'une équation à trois inconnues $ax + by + cz = d$, on passe le terme cz dans le second membre; on fait $d - cz = d'$ et on n'a plus à traiter que l'équation $ax + by = d'$. Une fois parvenu à l'équation où le coefficient d'une inconnue est l'unité, on remonte aux valeurs de x et y, en substituant $d - cz$ au lieu de d'. Et si u est la dernière des incon-

nues auxiliaires, les expressions de x et de y renfermeront alors deux nombres entiers z et u que l'on pourra prendre arbitrairement.

Par exemple, l'équation $3x - 7y + 11z = 80$, donne d'abord $3x - 7y = 80 - 11z = c'$, et ensuite

$$x = \frac{c' + 7y}{3} = \frac{c' + y}{3} + 2y = u + 2y,$$

$$\frac{c' + y}{3} = u, \text{ puis } y = 3u - c' = 3u - 80 + 11z.$$

Substituant cette valeur dans celle de x, l'équation proposée se trouvera remplacée par les deux

$$x = 160 - 5u - 22z \text{ et } y = 3u + 11z - 80.$$

On peut disposer ici des deux indéterminées u et z, mais de manière cependant qu'il n'en résulte que des valeurs entières et positives pour x et y. Or, si l'on prenait u négatif, il faudrait qu'on eût $11z > 80 + 3u$ et $22z < 160 + 5u$, ou $22z > 160 + 6u$ et $22z < 160 + 5u$; ce qui est visiblement impossible. Ainsi u ne saurait être que positif, et tel qu'on ait $22z + 5u < 160$, $11z + 3u > 80$. Faisant dans ces inégalités successivement $z = 1, 2, 3, 4, 5$ et 6, on verra que u ne peut avoir que 14 valeurs, et que par conséquent l'équation proposée n'est susceptible que de 14 solutions entières et positives.

193. Les problèmes qui conduisent à une équation finale contenant plus de deux inconnues, sont nommés *plus qu'indéterminés*. Tels sont les suivans :

On propose de payer 5700 fr. avec des billets de 700, 900 et 1100 fr. Comment effectuer ce paiement? (R. En prenant 4 billets de 700 fr., 2 de 900 et 1 de 1100.)

Un fermier achète 100 pièces de bétail pour 100 louis, savoir : des bœufs à 10 louis la pièce, des vaches à 5 louis, des veaux à 2 louis et des moutons à un demi-louis. Combien a-t-il eu d'animaux de chaque espèce? (Il y a dix solutions effectives.)

De l'extraction de la racine carrée des nombres.

194. Les équations les plus faciles à résoudre, après celles du premier degré, sont de la forme $x^2 = a$; et en conséquence nous allons nous occuper de la résolution de ces équations.

195. On sait (23) que le *carré* d'un nombre est le produit

de ce nombre par lui-même. Ainsi les carrés des neuf premiers nombres entiers, sont : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 et 81.

Le carré de 10 est 100, le carré de 100 est 10000, le carré de 1000 est 1000000, le carré de 10000 est 100000000, et en général, le carré de 1 *suivi de* n *zéros* est 1 *suivi de* 2n *zéros*.

Le carré d'un nombre composé de deux parties a et b est donné par la formule $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (52). Si $b=1$, il viendra $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$.

196. La *racine carrée* ou la *racine deuxième* d'un nombre, est un autre nombre qui, élevé au carré ou multiplié par lui-même, reproduit le premier. Ainsi 4 est la racine carrée de 16, parce que 4×4 ou 4^2 donne 16. De même, la racine carrée de 100 est 10, la racine carrée de 10000 est 100, la racine carrée de 1000000 est 1000, et en général, la racine carrée de 1 *suivi de* 2n *zéros* est 1 *suivi de* n *zéros*.

197. Soit x la racine carrée de a; on aura donc $x^2 = a$ ou $a = x^2$. De sorte que tout nombre est le carré de sa racine carrée, et contient par conséquent le carré du premier chiffre de cette racine, celui des 2, des 3, des 4, ..., premiers chiffres. Et comme le produit a augmente, dès que l'un de ses facteurs x augmente, on voit que *plus un nombre* a *est grand*, *plus sa racine carrée* x *est grande*, *et réciproquement*. Et si a devenait, par exemple, 9 fois plus grand, sa racine carrée x ne deviendrait que 3 fois plus grande.

198. On indique la racine carrée d'un nombre a en plaçant devant a le signe $\sqrt{\ }$, qu'on appelle *radical*. Ainsi $\sqrt{a}$ veut dire : *racine carrée de a*. De là et de la définition des racines carrées, il suit que $(\sqrt{a})^2 = a = \sqrt{a^2}$.

199. *La racine carrée d'un nombre entier a toujours autant de chiffres que ce nombre contient de tranches de deux chiffres chacune, sauf la première à gauche qui peut n'avoir qu'un seul chiffre.*

Soit le nombre de 4 tranches $a = 78,45,71,81$. Il est évident que $a > 1000000$ et $a < 100000000$. Extrayant la racine carrée de part et d'autre, on aura $\sqrt{a} > 1000$ et $\sqrt{a} < 10000$. La racine carrée du nombre proposé a n'a donc que 4 chiffres, c'est-à-dire autant que ce nombre a de tranches.

200. *Le plus grand carré contenu dans les* p *premières*

tranches du nombre proposé, est toujours le carré des p *premiers chiffres de la racine carrée de ce nombre.*

Soit le nombre $a = 8,71,63,41,79$. Puisque ce nombre a 5 tranches de chiffres, sa racine carrée aura 5 chiffres (199). Soit x les trois premiers chiffres à gauche de cette racine; x sera donc un nombre de *centaines*; son carré x^2 sera un nombre de *dizaines-de-mille*, et ne pourra se trouver que dans les trois premières tranches, qui expriment aussi des *dizaines-de-mille*. De plus, comme la racine carrée n'a que x centaines, elle est moindre que $(x+1)$ centaines; donc son carré, ou le nombre proposé a, est moindre que $(x+1)^2$ dizaines-de-mille; les dizaines-de-mille de ce nombre a, c'est-à-dire ses trois premières tranches, ne contiennent donc pas $(x+1)^2$. D'où il suit que le plus grand carré contenu dans les trois premières tranches est x^2, c'est-à-dire le carré des trois premiers chiffres x de la racine carrée. On verra de même que le plus grand carré contenu dans les deux premières tranches, est le carré des deux premiers chiffres de la racine, et ainsi des autres.

201. Voyons maintenant comment on peut extraire la racine carrée d'un nombre entier, comme 589824. Pour cela, on partage ce nombre en tranches de deux chiffres chacune, en allant de droite à gauche, puis l'on dispose et l'on effectue l'opération ainsi qu'il suit :

58,98,24	768. Racine carrée.	
49		
99,8	146	1528
876	6	8
12224	876.	12224.
1222,4		
0		

1° On sait (200) que le plus grand carré 49 contenu dans la première tranche 58, est le carré du premier chiffre de la racine; de sorte que le premier chiffre est 7. Soustrayant 49 de 58, il reste 9. A côté de ce reste 9 abaissant la seconde tranche 98, il vient 998. Mais le plus grand carré contenu dans les deux 1res tranches, étant celui des deux 1ers chiffres a et x de la racine (200), ce plus grand carré est $(a+x)^2$, ou $a^2 + 2ax + x^2$. Et puisqu'on vient de soustraire de ces deux tranches, le carré 49 ou a^2 du premier chiffre, le reste 998 doit renfermer $2ax$

$+x^2$. Or le premier chiffre a désigne des dizaines par rapport au second x; donc $2ax$ exprime aussi des dizaines, et ne peut se trouver que dans les 99 dizaines de 998, qui contiendront en outre les dizaines fournies par les autres parties du carré de la racine. Mais puisque $2ax$ se trouve seul dans 99, il est clair qu'en divisant 99 par $2a$ ou 14, double du premier chiffre 7 de la racine, le quotient sera le second chiffre x; car sauf les dizaines fournies, on divisera un produit par l'un de ses deux facteurs : 14 est bien contenu 7 fois en 99; mais à cause de la retenue, il ne faut mettre que 6 au quotient.

2° Pour vérifier si le quotient 6 est le second chiffre x de la racine cherchée, il faut soustraire du reste 998 la quantité qu'il doit renfermer, savoir $2ax+x^2$ ou $(2a+x)x$. Or, comme a ou 7 exprime des dizaines par rapport à x ou 6, et qu'on ajoute un chiffre d'unités à des dizaines en l'écrivant à la droite de celles-ci, on voit que pour vérifier la racine trouvée 76, il faut écrire le second chiffre 6 à côté du double 14 du premier 7; multiplier le résultat 146 par 6, et soustraire le produit 876 de 998; ce qui donnera 122 pour reste. Mais en opérant ainsi, on soustrait $2ax+x^2$ du reste 998 des deux premières tranches, et par conséquent de ces deux tranches : et comme déjà on en a soustrait a^2, il s'ensuit qu'en tout on a soustrait des deux premières tranches $a^2+2ax+x^2$ ou $(a+x)^2$, c'est-à-dire le carré de la racine trouvée 76. Donc, puisque le reste 122 est moindre que $2(76)+1$, les deux premières tranches elles-mêmes sont moindres que $(76)^2+2(76)+1$, ou que $(76+1)^2$, ou enfin que $(77)^2$. D'où il suit que le plus grand carré contenu dans les deux premières tranches est $(76)^2$: et comme ce plus grand carré est celui des deux premiers chiffres de la racine (200), il s'ensuit que 76 exprime ces deux premiers chiffres (*).

3° Pour avoir le troisième chiffre, il suffit de recommencer

(*) Si le reste était $=$ ou $>2(76)+1$, les deux premières tranches seraient $=$ ou $>(77)^2$: et comme ces deux tranches expriment des centaines, elles seraient $=$ ou $>(77)^2$ centaines, $=$ ou $>(770)^2$. Le nombre proposé serait donc $>(770)^2$; la racine carrée de ce nombre serait donc >770 ou que 77 dizaines, et la racine trouvée 76 serait trop petite d'une unité au moins. En principe, la racine trouvée n'est exacte en nombre entier, que quand le reste est moindre que le double de cette racine trouvée, plus l'unité.

les raisonnemens précédens. Ainsi abaissant la troisième tranche 24 à côté du reste 122, ce qui donne 1222,4, et divisant 1222 par 152, double des deux premiers chiffres 76 de la racine, le quotient 8 exprimera le troisième chiffre ou un chiffre plus grand. Pour vérifier ce quotient, on l'écrit à côté de 152, double des deux premiers chiffres, on multiplie le résultat 1528 par 8, et l'on soustrait le produit 12224 du reste 12224 des trois premières tranches. De cette manière, on a soustrait de ces trois tranches le carré de la racine trouvée 768; donc, puisqu'il ne reste rien, cette racine trouvée est exactement la racine carrée du nombre proposé 589824.

202. Le résumé de toutes les opérations que l'on vient de faire, conduit à la règle que voici : Pour extraire la racine carrée d'un nombre entier, il faut le partager en tranches de deux chiffres chacune, en allant de droite à gauche; extraire ensuite la racine carrée du plus grand carré contenu dans la première tranche, et cette racine sera le premier chiffre de la racine cherchée. Après avoir soustrait le carré de ce premier chiffre de la première tranche, on abaisse la seconde à côté du reste, on sépare le dernier chiffre à droite par une virgule, on divise la partie à gauche de la virgule par le double de la racine trouvée, et le quotient exprime le second chiffre ou un chiffre plus grand. Pour vérifier ce quotient, on l'écrit à côté du double du premier chiffre, on multiplie le résultat par ce quotient, et l'on soustrait le produit du reste de la première tranche réuni à la seconde : le nouveau reste doit être moindre que le double de la racine trouvée, plus l'unité (201, 2°). On abaisse de même la 3^{me} tranche à côté du reste des deux 1res, et l'on continue le même procédé jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de tranches à abaisser.

D'après cette règle, on trouve que $\sqrt{76807696} = 8764$ et que $\sqrt{759278025} = 27555$. Les élèves feront bien de recommencer sur ces exemples, les raisonnemens qui ont conduit à la règle proposée.

203. Remarquons que si l'on voulait opérer l'extraction de la racine carrée en commençant par la droite; comme le carré du premier chiffre à droite de la racine cherchée peut avoir un ou deux chiffres, on ne saurait s'il faut chercher ce carré dans le 1er ou dans les deux 1ers chiffres à droite du nombre proposé : donc il est nécessaire de commencer l'extraction par la gauche.

204. On abrége beaucoup l'extraction de la racine carrée, lorsqu'on fait par la pensée, les opérations que les vérifications exigent. Et s'il arrive que la partie à gauche de la virgule ne contienne pas le double de la racine trouvée, on met 0 à la racine et on abaisse sur-le-champ la tranche suivante. C'est ainsi qu'on trouve aisément la racine carrée du nombre 543000000000.

Voici l'opération :

5,43,00,00,00,00	233023. Racine.			
14,3	43	463	46602	466043
140,0	3	3	2	3
11000,0	129.	1389.	93204.	1398129.
167960,0				
Reste... 281471				

Puisque cette opération laisse un reste, la racine trouvée est trop faible; mais comme on ne saurait mettre 4 à la dernière racine partielle, sans y mettre trop, il s'ensuit que la racine totale 233023 ne saurait être augmentée d'une unité; elle est donc approchée de la véritable, à moins d'une unité près.

205. *Pour extraire la racine carrée d'une fraction, il faut diviser la racine carrée du numérateur par celle du dénominateur.* C'est ainsi qu'on aura

$$\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{a^2}{c^2}}=\frac{a}{c}.$$

Effectivement, si on élève chaque résultat au carré, on retrouve le nombre qui l'a donné.

La règle précédente n'est plus immédiatement applicable, lorsque les deux termes ne sont pas des *carrés parfaits*, c'est-à-dire les carrés de nombres entiers : alors la racine carrée ne peut plus s'obtenir que par approximation.

206. Pour trouver la racine carrée d'un nombre quelconque a, à moins de $\frac{1}{n}$ près, il faut multiplier ce nombre par n^2; puis extraire la racine carrée du plus grand carré r^2 contenu dans la partie entière du résultat an^2, et donner à cette racine r, le nombre n pour dénominateur. De sorte que $\sqrt{a}=\frac{r}{n}$, à moins de $\frac{1}{n}$ près.

En effet, puisque r^2 est le plus grand carré contenu dans an^2, le carré de $r+1$ n'y est pas; on a donc

$an^2 > r^2$ et $an^2 < (r+1)^2$; d'où $a > \frac{r^2}{n^2}$ et $a < \frac{(r+1)^2}{n^2}$.

Extrayant la racine carrée de part et d'autre, il vient (197)

$$\sqrt{a} > \frac{r}{n} \quad \text{et} \quad \sqrt{a} < \frac{r}{n} + \frac{1}{n}.$$

On voit que la racine carrée de a ne surpasse pas $\frac{r}{n}$ de $\frac{1}{n}$; on a donc effectivement $\sqrt{a} = \frac{r}{n}$, à moins de $\frac{1}{n}$ près, comme on l'a trouvé en appliquant la règle proposée.

207. Au moyen de cette règle, on pourra toujours trouver un nombre aussi approché qu'on voudra de la racine carrée d'un nombre donné. Mais l'approximation par les décimales étant la plus importante, nous allons d'abord nous en occuper. Soit donc proposé de trouver la racine carrée de 7,451, à moins d'un millième près.

D'après la règle précédente, on multiplie 7,451 par le carré de 1000, ou par 1000000, ce qui donne 7451000; on extrait la racine carrée du plus grand carré contenu dans la partie entière du nombre résultant, c'est-à-dire dans 7451000, ce qui fournit 2729; enfin, on donne à cette racine 2729, le nombre 1000 pour dénominateur, ce qui se fait en séparant trois chiffres décimaux sur sa droite; et l'on a ainsi $\sqrt{7,451} = 2,729$, à moins d'un millième près.

C'est ce qu'on peut d'ailleurs démontrer directement, en observant que $7,451 > (2,729)^2$ et que $7,451 < (2,730)^2$.

208. De même, si l'on veut avoir la racine carrée de $13\frac{5}{6}$, à moins d'un centième près, on multipliera $13\frac{5}{6}$ par 10000, carré de 100; ce qui donnera, réductions faites, $138333\frac{1}{3}$: la racine carrée de 138333 étant 371, à moins d'une unité près, il en résulte que $\sqrt{13\frac{5}{6}} = 3,71$, à moins d'un centième près.

209. En appliquant la même règle, on trouve : $\sqrt{\frac{7}{8}} = 0,9354$, à moins de 0,0001 près; $\sqrt{7\frac{8}{11}} = 2,779$, à moins de 0,001 près; $\sqrt{3\frac{3}{4}} = \frac{116}{60}$, à moins de $\frac{1}{60}$ près, et $\sqrt{223} = \frac{597}{40}$, à moins de $\frac{1}{40}$ près.

210. Lorsque le nombre proposé a plus de deux tranches de chiffres, on peut toujours achever l'extraction de la racine carrée par une simple division. En effet, soit k un nombre dont les n derniers chiffres de la racine carrée sont à trouver; soit x ces n

derniers chiffres, et a ceux déjà calculés; ces chiffres calculés forment donc un nombre *a suivi de n zéros* ou $a.10^n$ (*); on a par conséquent $a.10^n + x = \sqrt{k}$. Elevant les deux membres au carré, on obtient

$$a^2.10^{2n} + 2ax.10^n + x^2 = k;$$

d'où en retranchant de part et d'autre $a^2.10^{2n}$ et x^2, il vient

$$2ax.10^n = k - a^2.10^{2n} - x^2.$$

Divisant enfin les deux membres par $2a.10^n$, on trouve

$$x = \frac{k - a^2.10^{2n}}{2a.10^n} - \frac{x^2}{2a.10^n} \cdots (1)$$

Puisque x a n chiffres, x est moindre que le plus petit nombre de $(n+1)$ chiffres, qui est 1 *suivi de* n *zéros* ou 10^n; on a donc $x < 10^n$ et $x^2 < 10^{2n}$. Or, tant que a n'aura pas plus de chiffres que x, la seconde fraction du second membre de (1) pourra surpasser l'unité. Mais si a contient seulement un chiffre de plus que x, c'est-à-dire $(n+1)$ chiffres; en prenant la plus petite valeur de a, qui est le moindre nombre de $(n+1)$ chiffres ou 10^n, la seconde fraction dont il s'agit deviendra $\frac{x^2}{2.10^{2n}}$ et aura sa plus grande valeur; donc, puisque $x^2 < 10^{2n}$, cette seconde fraction sera toujours moindre que $\frac{1}{2}$; on aura donc toujours

$$x = \frac{k - a^2.10^{2n}}{2a.10^n}, \text{ à moins de } \tfrac{1}{2} \text{ près.}$$

De là et de ce que x a moins de chiffres que a, il résulte que s'il reste à trouver moins de chiffres à la racine qu'il n'y en a de calculés, on achevera l'extraction en abaissant toutes les tranches non employées à côté du reste des premières, puis en divisant le nombre résultant $k - a^2.10^{2n}$ par le double de la racine trouvée a suivi d'autant de zéros qu'il y a de chiffres à déterminer, en poussant le quotient jusqu'aux unités seulement (**). Alors

(*) Il est clair que $100 = 10^2$, $1000 = 10^3$, $10000 = 10^4$, et en général, 1 *suivi de* n *zéros* $= 10^n$. Multipliant a par chacune de ces expressions égales, on aura *a suivi de n zéros* $= a.10^n$.

(**) On voit par là que si la racine carrée doit avoir $2n+1$ chiffres, la valeur des n chiffres à droite du nombre proposé n'influera pas sur la valeur de la racine carrée de ce nombre. Ainsi, en s'arrêtant aux unités, la racine carrée de 7413589467281 est la même que celle de 7413589467000.

on aura la racine carrée du nombre proposé k, à moins d'une demi-unité près de l'ordre le moins élevé de cette racine.

211. Ainsi la racine carrée de 1111088889 devant avoir cinq chiffres, on en calculera d'abord les trois premiers, suivant la règle ordinaire, ce qui donnera 333; puis on divisera le reste 2198889 par 66600, en poussant le quotient jusqu'aux unités, et ce quotient sera 33. De sorte que $\sqrt{1111088889} = 33333$, à moins d'une demi-unité près. Et en effet, 33333 est exactement la racine carrée de 1111088889. C'est ainsi qu'on trouve facilement que

$$\sqrt{2} = 1,414213562\,37 \text{ et que } \sqrt{3} = 1,7320508076.$$

212. *Si deux nombres, composés d'un même nombre de chiffres, ont plus de la moitié de leurs chiffres formant un même nombre vers la gauche, la demi-somme de ces deux nombres ne surpassera pas la racine carrée de leur produit d'un huitième d'unité.*

Soit a le plus petit des deux nombres proposés et d leur différence; le plus grand sera $a+d$ et leur demi-somme $a+\frac{1}{2}d$. Or, il est clair qu'on a $(a+\frac{1}{2}d)^2 > a^2+ad$ et $a+\frac{1}{2}d > \sqrt{a(a+d)}$: D'où l'on voit que la demi-somme des deux nombres proposés est plus grande que la racine carrée de leur produit. Soit x la différence, on aura donc

$$a+\tfrac{1}{2}d = \sqrt{a(a+d)} + x.$$

Elevant de part et d'autre au carré, et réduisant, il vient

$$\tfrac{1}{4}d^2 = 2x\sqrt{a^2+ad} + x^2; \text{ d'où } 8ax < d^2.$$

Soit n le nombre des chiffres qui forment la partie non-commune des deux nombres proposés; ces deux nombres auront donc au moins $2n+1$ chiffres, et leur différence d n'en aura que n; ainsi $d < 10^n$ et $d^2 < 10^{2n}$. D'ailleurs, puisque le plus petit nombre a contient au moins $2n+1$ chiffres, on a $a > 10^{2n}$; d'où $8ax > 8x.10^{2n}$. Or, $8ax < d^2$ et $8ax < 10^{2n}$; donc, à plus forte raison, $8x.10^{2n} < 10^{2n}$; d'où $x < \frac{1}{8}$. Ce qu'il fallait démontrer.

Le principe s'applique aussi au cas où les deux nombres proposés exprimeraient des décimales de même ordre, en prenant pour unité la partie de la moindre espèce.

Notions sur les irrationnelles et les imaginaires.

213. On appelle *quantité incommensurable*, toute quantité qui n'a point de mesure commune avec l'unité, c'est-à-dire qui ne peut jamais contenir sans reste l'une des parties égales de l'unité. Ainsi une quantité incommensurable ne saurait être ex-

primée exactement par un nombre ; car tout nombre contient exactement l'une des parties égales de l'unité : cette quantité n'a donc point de *rapport* exact avec l'unité ; et c'est pourquoi on l'appelle aussi *quantité irrationnelle.*

214. Tous les nombres entiers et fractionnaires ont une commune mesure avec l'unité ; ils sont donc *commensurables* ou *rationnels.* Par exemple, 29 *huitièmes* est un nombre rationnel, parce que sa commune mesure avec l'unité est un huitième.

215. *On peut toujours trouver un nombre aussi approché qu'on veut a une quantité incommensurable.* Car soit p l'une des parties égales de l'unité, n le plus grand nombre entier de fois que cette partie p est contenue dans l'incommensurable a, et r le reste ; on aura donc $a = np + r$. Or, la partie p peut être prise aussi petite qu'on voudra ; et comme $r < p$, il en résulte que le nombre np diffère de a d'une quantité r aussi petite qu'on veut.

216. *Si la racine carrée d'un nombre entier* a, *n'est pas un nombre entier, cette racine sera incommensurable.* Car, si la racine carrée de a pouvait être une fraction irréductible $\frac{n}{d}$, on aurait successivement

$$\sqrt{a} = \frac{n}{d},\ a = \frac{n^2}{d^2} \text{ et } ad = \frac{n^2}{d}.$$

Or, d est premier avec n, par hypothèse ; donc d est premier avec chacun des facteurs du produit n^2 ; d ne divisera donc jamais ce produit (Arithmétique), et ne donnera pas le nombre entier ad au quotient. Ainsi la dernière égalité précédente est impossible ; il en est donc de même de la première, c'est-à-dire que la racine carrée de a n'est pas égale à une fraction. Déjà elle n'est pas égale à un nombre entier ; donc cette racine ne saurait être exprimée exactement par aucun nombre ; elle est par conséquent incommensurable (213).

Ainsi $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, etc., sont des quantités incommensurables, qu'on ne saurait exprimer exactement en nombres ; mais dont on peut approcher au point, que la véritable valeur numérique n'aurait aucun avantage réel sur la valeur approchée.

217. *La racine carré d'une fraction irréductible est incommensurable, dès que l'un des termes de cette fraction n'est pas un carré parfait.* Considérons, par exemple, la racine

carrée de la fraction irréductible $\frac{a}{c}$. D'abord cette racine carrée ne sera pas un nombre entier, puisque le carré d'un nombre entier ne peut jamais donner une fraction irréductible. Si cette racine carrée pouvait être une fraction irréductible $\frac{n}{d}$, on aurait

$$\sqrt{\frac{a}{c}}=\frac{n}{d}; \text{ d'où } \frac{a}{c}=\frac{n^2}{d^2} \text{ et } a=\frac{cn^2}{d^2}.$$

Si un nombre premier p pouvait diviser n^2 et d^2, il devrait diviser aussi n et d, puisque ne divisant pas n et d, il ne diviserait pas non plus les produits n^2 et d^2 (Arithmétique) : p diviserait donc n et d, et la fraction $\frac{n}{d}$ ne serait pas irréductible, contrairement à l'hypothèse. Donc n^2 et d^2 sont premiers entre eux. Par conséquent, puisque d^2 divise le produit cn^2, il faut qu'il divise le facteur c, et il vient $c=qd^2$; d'où $a=qn^2$. Mais a et c étant premiers entre eux, n'ont d'autre facteur commun que l'unité : donc $q=1$; ce qui donne $a=n^2$ et $c=d^2$. D'où il suit que les deux termes de $\frac{a}{c}$ seraient des carrés parfaits; ce qui est contre l'hypothèse. On voit donc que la racine carrée de $\frac{a}{c}$ ne saurait être exprimée exactement par aucun nombre, et qu'ainsi elle est incommensurable.

218. *Le calcul des nombres incommensurables se fait d'après les mêmes règles que celui des nombres rationnels.* Car on ne saurait trouver que par approximation les valeurs numériques des quantités incommensurables. Or, on peut toujours concevoir que chaque nombre irrationnel soit remplacé par une fraction exacte, qui en diffère d'une quantité moindre que toute quantité donnée (215), et tellement petite, qu'on ne doive avoir aucun égard à l'erreur que l'on commet en négligeant cette petite quantité. De cette manière, les nombres incommensurables proposés ne sont plus que des nombres commensurables, qu'on doit soumettre conséquemment à toutes les règles du calcul des nombres rationnels.

219. Donc, puisqu'un produit de plusieurs facteurs commensurables quelconques, ne change pas de valeur dans quelqu'ordre qu'on multiplie (Arithmétique), la même chose aura lieu pour des facteurs irrationnels. Et il en est de même de toutes les règles établies pour le calcul des entiers et des fractions.

De là résultent plusieurs principes pour les puissances et les racines. Voyons d'abord ceux relatifs aux *carrés* et aux *racines carrées*, et rappelons-nous que, d'après la définition de ces racines, on a $(\sqrt{a})^2 = a = \sqrt{a^2}$.

220. Soit abc un produit dans lequel a, b, c, sont des nombres quelconques, rationnels ou irrationnels ; d'après ce qu'on a vu (219), il est clair que

$$(abc)^2 = abcabc = aabbcc = a^2b^2c^2.$$

Comparant la première de ces expressions égales à la dernière, et réciproquement, on verra, 1° que *le carré d'un produit est égal au produit des carrés de ses facteurs ;* 2° que *le produit des carrés de plusieurs nombres est égal au carré du produit de ces nombres.* Ainsi

$$(2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 \text{ et } (\tfrac{4}{3})^2(\tfrac{15}{4})^2 = (\tfrac{4}{3} \times \tfrac{15}{4})^2 = 3^2.$$

221. Le dernier de ces principes et celui du n° 219 font voir que le carré de $\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}$ est abc ; il faut donc qu'on ait

$$\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c} = \sqrt{abc}.$$

Donc, 1° *la racine carrée d'un produit est égale au produit des racines carrées de ses facteurs ;* 2° *le produit des racines carrées de plusieurs nombres est égal à la racine carrée du produit de ces nombres.* Par exemple, on a

$$\sqrt{72} \times \sqrt{8} = \sqrt{(72.8)} = \sqrt{(36.16)} = 6.4 = 24.$$

222. Le second principe que l'on vient d'établir donne

$$\sqrt{\frac{a}{c}} \times \sqrt{c} = \sqrt{a}\text{; d'où l'on tire } \sqrt{\frac{a}{c}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}.$$

Ainsi, 1° *la racine carrée d'un quotient s'obtient en divisant la racine carrée du dividende par celle du diviseur ;* 2° *le quotient des racines carrées des deux nombres est égal à la racine carrée du quotient de ces mêmes nombres.* Appliquant ces principes, on trouve

$$\sqrt{(25:64)} = 5:8\text{; } \sqrt{96}:\sqrt{6} = \sqrt{16} = 4 \text{ et}$$
$$\sqrt{18}:\sqrt{8} = \sqrt{(18:8)} = \sqrt{(9:4)} = 3:2.$$

223. *Toute racine carrée doit être précédée du double signe* $\pm$. Car la racine carrée de 9, par exemple, est un monome qui, multiplié par lui-même, reproduit 9 ; or, -3×-3 donne $+9$, aussi bien que $+3 \times +3$; donc -3 est la racine

carrée de 9, aussi bien que $+3$: donc enfin $\sqrt{9} = \pm 3$. En général, si v désigne la valeur numérique de la racine carrée de a, on aura $\sqrt{a} = \pm v$.

224. *La racine carrée d'une quantité négative n'existe pas.* Car il n'y a aucun monome qui, multiplié par lui-même, donne un résultat négatif, puisque $-$ par $-$ donne $+$, aussi bien que $+$ par $+$ (45) : donc la racine carrée de -16 n'existe pas ou est impossible.

Ainsi $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-a}$, etc. sont des symboles algébriques, qui présentent des opérations impossibles et qu'on appelle *expressions* ou *quantités imaginaires*. Ces symboles, quoique vides de sens, se rencontrent fréquemment dans la résolution des problèmes, et y sont même très-utiles, comme signes d'absurdité, ainsi que nous le verrons dans la suite.

225. De même que les quantités négatives, les imaginaires doivent être soumises à toutes les règles du calcul des nombres; car puisque les lettres n'ont aucune valeur numérique déterminée, il est impossible de connaître d'avance si a, par exemple, est plus grand ou plus petit que b; on est donc conduit, bon gré mal gré, à raisonner et à opérer sur $\sqrt{(a-b)}$, comme si c'était toujours un nombre absolu et réel, même lorsque $a<b$, c'est-à-dire lorsque $\sqrt{(a-b)}$ est au fond une imaginaire. On voit donc qu'il faut opérer sur les imaginaires comme sur les nombres réels : autrement, on devrait toujours supposer $a>b$, dans les formules contenant $\sqrt{(a-b)}$; et l'algèbre n'aurait pas toute la généralité qui en fait le principal avantage.

Ainsi on aura $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1$, et $(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1}) = a^2 - b^2(\sqrt{-1})^2 = a^2 + b^2$.

226. D'après ces résultats, considérons le produit

$$(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1}) \cdots (1)$$

Si l'on multiplie entre eux les deux premiers facteurs, puis les deux derniers, le produit (1) deviendra

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2).$$

Si l'on multiplie entre eux le premier et le troisième facteurs, puis le second et le quatrième, le produit (1) prendra la forme

$$[(ac-bd)+(ad+bc)\sqrt{-1}][(ac-bd)-(ad+bc)\sqrt{-1}];$$

ce produit se réduit donc à $(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$. On a par conséquent l'identité

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2.$$

Cette identité est exacte, comme il est facile de le vérifier, en effectuant les opérations dans les deux membres. Ainsi on voit que la convention d'opérer sur les imaginaires comme sur les quantités réelles, conduit à des résultats exacts, et que par conséquent cette convention est légitime.

227. Ce n'est d'abord qu'avec beaucoup de circonspection que les Algébristes ont opéré sur les quantités négatives et imaginaires, comme sur des nombres réels. Mais l'exactitude des résultats qu'ils ont obtenus de cette manière, et auxquels ils pouvaient parvenir par des moyens plus rigoureux, mais beaucoup plus longs, leur a prouvé qu'on peut, sans aucun inconvénient, traiter les quantités négatives et imaginaires comme de véritables nombres. C'est d'ailleurs le seul moyen de conserver aux règles et aux formules la propriété d'être générales. Or, cette propriété est extrêmement utile en algèbre; car d'abord elle dispense de recommencer, pour chaque cas particulier, les raisonnemens et les calculs, quelquefois très-compliqués, qui ont donné les règles et les formules proposées; elle rend inutile la distinction, si un nombre donné peut être plus grand ou plus petit qu'un autre; enfin elle conduit souvent à des conséquences et à des questions auxquelles peut-être n'aurait-on pas pensé.

De la racine carrée des quantités littérales.

228. D'après la multiplication des monomes, il est clair que

$$(3a^ub^v)^2=3a^ub^v\times 3a^ub^v=9a^{2u}b^{2v}.$$

Ainsi *pour obtenir le carré d'un monome, il faut former le carré du coefficient numérique et doubler les exposans des autres facteurs.* C'est ainsi que $(-7a^3b^2)^2=49a^6b^4$.

229. Le carré d'un polynome quelconque est toujours composé du carré du premier terme, du double produit du premier terme par le second et du carré du second, du double produit des deux premiers termes par le troisième et du carré du troisième, du double produit des trois premiers termes par le quatrième et du carré du quatrième; ainsi de suite.

En effet, si l'on considère $a+b$ comme un seul terme, le carré de $a+b+c$ sera le carré d'un binome; on aura donc

$$(a+b+c)^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2=$$
$$a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2.$$

De là, en considérant $a+b+c$ comme un seul terme, on trouve

$$(a+b+c+d)^2=(a+b+c)^2+2(a+b+c)d+d^2=$$
$$a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2.$$

On pourrait continuer ce procédé sur $(a+b+c+d+e)^2$. Mais pour établir d'une manière générale la *loi* qu'on vient d'énoncer, soit $a+b+c+d+\cdots+i+k$ un polynome composé de $m+1$ termes, et considérons les m premiers comme n'en formant qu'un seul; nous aurons évidemment

$$(a+b+c+\cdots+i+k)^2=$$
$$(a+b+c+\cdots+i)^2+2(a+b+c+\cdots+i)k+k^2.$$

Donc si la loi énoncée est vraie pour un polynome de m termes, elle sera vraie aussi pour un polynome de $m+1$ termes. Or, cette loi est démontrée pour un polynome de quatre termes; donc elle sera vraie pour un polynome de cinq termes. Etant vraie pour un polynome de cinq termes, elle sera vraie aussi pour un polynome de six termes, puis pour un de sept, de huit, et en général, d'un nombre quelconque de termes.

230. Au moyen de cette loi de formation, on obtient le carré d'un polynome beaucoup plus simplement que par la multiplication. Par ex., d'après cette loi, on trouve sur-le-champ que

$$(3a^2-2ab+4b^2)^2=$$
$$9a^4-12a^3b+4a^2b^2+24a^2b^2-16ab^3+16b^4.$$

231. Maintenant, puisque $(4a^vb^u)^2=16a^{2v}b^{2u}$, il en résulte que $\sqrt{16a^{2v}b^{2u}}=4a^vb^u$ (196). Donc, *pour avoir la racine carrée d'un monome, il faut extraire la racine carrée du coefficient numérique et prendre la moitié des exposans des lettres*. C'est ainsi qu'on aura

$$\sqrt{25a^8b^6}=5a^4b^3 \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{100a^4}{36b^8}}=\frac{10a^2}{6b^4} \text{ (205)},$$

car chaque résultat élevé au carré reproduit le monome proposé.

232. Après avoir soustrait d'un polynome le carré des N premiers termes de sa racine carrée ordonnée, si l'on divise le premier terme du reste R aussi ordonné, par le double du pre-

mier terme de cette racine, le quotient sera le $(N+1)$ième terme de la même racine.

En effet, soit xa^m+u les N premiers termes de la racine carrée ordonnée, xa^m étant le premier, et soit v les termes suivans; cette racine sera donc $(xa^m+u)+v$; son carré, ou le polynome proposé, sera par conséquent

$$(xa^m+u)^2+2(xa^m+u)v+v^2.$$

Et puisqu'on a soustrait de ce polynome, le carré des N premiers termes de sa racine carrée, c'est-à-dire $(xa^m+u)^2$, le reste R est

$$R=2(xa^m+u)v+v^2 \quad \text{ou} \quad R=(2xa^m+2u+v)v.$$

Donc le premier terme du reste R, où la lettre a a le plus haut exposant, est le produit de $2xa^m$ par le premier terme du multiplicateur v, où la lettre a a le plus haut exposant (51). Or, le premier terme de v est le $(N+1)$ième terme de la racine cherchée; donc le premier terme du reste R est le produit de $2xa^m$, double du premier terme de la racine, multiplié par le $(N+1)$ième; donc en divisant le 1er terme du reste R par le double du 1er terme de la racine, on aura le $(N+1)$ième (58).

233. D'après ce principe, il est facile de voir comment on peut extraire la racine carrée d'un polynome donné. En effet, en supposant d'abord ce polynome et sa racine carrée, tous les deux ordonnés par rapport à la même lettre a; comme ce polynome est le produit de sa racine carrée par elle-même, le premier terme de ce polynome, où la lettre a a le plus haut exposant, sera le produit du premier terme de la racine par lui-même; c'est-à-dire, sera le carré du premier terme de la racine cherchée (51). On aura donc ce premier terme de la racine, en extrayant la racine carrée du 1er terme du polynome proposé.

Soustrayant du polynome le carré du premier terme de sa racine, et divisant le premier terme du reste ordonné, par le double du premier terme de cette racine, le quotient sera le $(1+1)$ième ou le second terme (232).

Ecrivant ce second terme à côté du double du premier, multipliant le résultat par le même second terme, et soustrayant le produit du premier reste, on aura un second reste. Or, en opérant ainsi, on soustrait du premier reste, c'est-à-dire du polynome proposé, le double produit du premier terme de la racine par le second et le carré du second. Et comme déjà on a soustrait le carré du premier terme, il s'ensuit qu'on a soustrait du polynome, toutes les parties du carré, et par conséquent le carré des deux premiers termes de sa racine carrée ; donc en divisant le premier terme du second reste ordonné, par le double du premier terme de cette racine, le quotient sera le $(2+1)$ième ou le troisième terme (232).

Ecrivant ce troisième terme à côté du double des deux premiers, multipliant le résultat par ce troisième terme, et continuant comme dans le cas précédent, on aura le quatrième terme de la racine. On aura de même le cinquième, le sixième, et ainsi de suite.

234. De là résulte évidemment la règle que voici : Pour extraire la racine carrée d'un polynome, il faut, après avoir ordonné ce polynome, extraire la racine carrée de son premier terme, et cette racine sera le premier terme de la racine cherchée. Soustraire du polynome proposé le carré de ce premier terme de la racine et diviser le premier terme du reste par le double du premier terme trouvé à la racine : le quotient en sera le second terme. Après avoir écrit ce quotient à la droite du double du premier terme de la racine, on multipliera le résultat par ce quotient et l'on soustraira le produit du premier reste. On divisera de même le premier terme du second reste ordonné, par le double du premier terme de la racine, et l'on continuera le même procédé dans tout le cours de l'opération.

D'après cette règle, si l'on a le polynome $4a^4b^2-12a^3b^3+9a^2b^4+16a^2b^3c^3-24ab^4c^3+16b^4c^6$, on en extraira la racine carrée, en disposant l'opération comme il suit :

$4a^4b^2-12a^3b^3+9a^2b^4+16a^2b^3c^3-24ab^4c^3+16b^4c^6$	$2a^2b-3ab^2+4b^2c^3.$
$-4a^4b^2$	$4a^2b-3ab^2$
$-12a^3b^3+9a^2b^4+16a^2b^3c^3-24ab^4c^3+16b^4c^6$	$-3ab^2$
$+12a^3b^3-9a^2b^4$	$-12a^3b^3+9a^2b^4.$
$+16a^2b^3c^3-24ab^4c^3+16b^4c^6$	$4a^2b-6ab^2+4b^2c^3$
$-16a^2b^3c^3+24ab^4c^3-16b^4c^6$	$+4b^2c^3$
0.	$16a^2b^3c^3-24ab^4c^3+16b^4c^6.$

D'où l'on voit que $2a^2b-3ab^2+4b^2c^3$ est la racine carrée exacte du polynome proposé.

Il est facile d'appliquer cette méthode à l'extraction de la racine seconde du polynome $9a^6b^2 - 12a^5b^3 + 28a^4b^4 - 28a^3b^5 + 24a^2b^6 - 16ab^7 + 4b^8$.

235. L'extraction de la racine carrée d'un monome est impossible, lorsque le coefficient n'est pas un carré parfait, ou que tous les exposans ne sont pas des nombres pairs. Quant à la racine carrée d'un polynome, on ne saurait la trouver exactement, dès que le 1$^{\text{er}}$ terme n'est pas un carré parfait, ou dès qu'on obtient autant de termes qu'il y en a dans le polynome proposé, car celui-ci doit toujours avoir plus de termes que sa racine (229). Dans chacun de ces cas, on indique l'extraction et l'on soumet l'expression radicale résultante à toutes les règles du calcul des nombres ; ce qui conduit au calcul des radicaux du 2$^{\text{e}}$ degré.

Du calcul des radicaux du second degré.

236. On appelle *radical du second degré* ou *quantité radicale*, toute racine carrée indiquée au moyen du signe $\sqrt{}$.

Le calcul des radicaux du second degré a pour objet de transformer les expressions des inconnues, de manière que l'extraction de la racine carrée soit la dernière des opérations à effectuer pour résoudre le problème proposé.

237. On sait (221) que $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$; donc si le nombre a était un carré parfait m^2, l'expression proposée se réduirait à $m\sqrt{b}$. C'est en cela que consiste la *simplification* des radicaux du second degré ; et il en résulte que

$$\sqrt{27a^3b^2c^7} = \sqrt{9a^2b^2c^6 . 3ac} = 3abc^3\sqrt{3ac}.$$

Cet exemple fait voir que, *pour simplifier un radical du second degré, lorsque cela est possible, il faut décomposer la quantité sous le radical en deux facteurs, dont l'un soit un carré parfait, et multiplier la racine carrée de ce facteur carré par la racine indiquée de l'autre facteur.*

Au moyen de cette règle, il sera facile de comprendre toutes les réductions que voici :

1° $\sqrt{\dfrac{75a^3b}{98c^3}} = \sqrt{\dfrac{25a^2}{49c^2} \cdot \dfrac{3b}{2c}} = \dfrac{5a}{7c}\sqrt{\dfrac{3b}{2c}} = \dfrac{5a}{14c^2}\sqrt{6bc}$;

2° $3a\sqrt{-16a^2} = 3a\sqrt{16a^2 \times -1} = 12a^2\sqrt{-1}$;

3° Réduisant d'abord au même dénominateur tout ce qui est sous le radical, développant et réduisant les termes, on verra que $\sqrt{\frac{b(2a-b)^2}{4(a-2b)^2}-\frac{ab}{a-2b}}=\sqrt{\frac{b^3+4ab^2}{4(a-2b)^2}}=$

$$\sqrt{\frac{b^2}{4(a-2b)^2}\cdot(b+4a)}=\frac{b}{2(a-2b)}\sqrt{b+4a}.$$

Le but de ces transformations n'est pas seulement de simplifier la quantité soumise au radical ; mais aussi de rendre les expressions plus propres au calcul algébrique.

238. Les mêmes motifs portent aussi à faire entrer sous le radical, la quantité qui le multiplie : pour cela, il suffit d'élever cette quantité au carré, et de multiplier par ce carré, la quantité sous le radical. En effet, d'après ce qui précède, il est clair que

$$2a^2b\sqrt{3abc}=\sqrt{4a^4b^2}\sqrt{3abc}=\sqrt{4a^4b^2.3abc}.$$

C'est ainsi que $3a\sqrt{\frac{2b}{3a}}=\sqrt{\frac{2b}{3a}\cdot 9a^2}=\sqrt{6ab}.$

Cette transformation est utile dans les applications numériques, pour bien connaître le degré d'exactitude du résultat. Car si dans $x=120\sqrt{3}$, on extrayait la racine carrée de 3, à moins d'un cent-millième près, on ne serait pas sûr que la valeur qui en résulterait pour x, fût approchée de la véritable, à moins d'un millième d'erreur ; tandis qu'en prenant $x=\sqrt{3.14400}$ $=\sqrt{43200}$, on connaîtra toujours de combien on est approché de la vraie valeur de x (206).

239. Deux radicaux du second degré sont nommés *semblables*, lorsque la quantité sous le signe radical est la même pour tous les deux. Ainsi $4a\sqrt{3ab}$ et $-2b\sqrt{3ab}$ sont deux radicaux semblables : les multiplicateurs $4a$ et $2b$ en sont les *coefficiens*.

Les radicaux $3a\sqrt{2ab^3}$ et $2b\sqrt{8a^3b}$ ne paraissent pas semblables ; mais ils le deviennent en les simplifiant l'un et l'autre (237) ; car alors ils se réduisent respectivement à $3ab\sqrt{2ab}$ et $4ab\sqrt{2ab}$.

240. L'addition et la soustraction des radicaux ne peuvent se faire que quand ils sont semblables ; alors *il suffit d'ajouter ou de soustraire leurs coefficiens et de multiplier le résultat par la quantité radicale commune.* C'est ainsi que

$$3a\sqrt{5a}+2b\sqrt{5a}-6b\sqrt{5a}=(3a-4b)\sqrt{5a}.$$

De même, $\sqrt{\frac{ab^3}{c^2}}+\frac{1}{2c}\sqrt{a^3b-4a^2b^2+4ab^3}=\frac{a}{2c}\sqrt{ab}.$

241. Maintenant, puisque $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ (221), il en résulte que pour multiplier entre eux plusieurs radicaux du second degré, il suffit de multiplier entre elles les quantités qui leur sont soumises, et d'affecter le produit du signe radical commun. Et si les radicaux avaient des coefficiens, il faudrait multiplier ceux-ci l'un par l'autre. D'après cette règle, on aura

$$2a\sqrt{3a}\times 3b\sqrt{6ab}=6ab\sqrt{18a^2b}=18a^2b\sqrt{2b}.$$

242. La même règle donne

$$\sqrt{\frac{a}{c}}\times\sqrt{c}=\sqrt{\frac{ac}{c}}=\sqrt{a};\ \text{d'où}\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}=\sqrt{\frac{a}{c}}.$$

Donc *pour diviser deux radicaux du second degré l'un par l'autre, il suffit de prendre le quotient des quantités qui leur sont soumises, et d'affecter ce quotient du signe radical commun.* C'est ainsi qu'on aura

$$6ab\sqrt{15ab} : 3b\sqrt{3b}=2a\sqrt{5a}\ \text{et}\ \sqrt{-4} : \sqrt{-2}=\sqrt{2}.$$

243. La règle de la multiplication des radicaux du second degré présente une exception, lorsque ces radicaux sont imaginaires. En effet, d'après cette règle, on a $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}=\sqrt{a^2}=\pm a$ (223). De sorte qu'il y a incertitude sur le signe dont a doit être affecté, pour former le produit demandé. Cependant le véritable produit est $-a$; car il est clair d'ailleurs que $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}=(\sqrt{-a})^2=-a$ (225).

En général, *le produit de deux radicaux imaginaires du second degré, est toujours négatif et réel*; car il est visible que

$$\sqrt{-a}\sqrt{-b}=\sqrt{a\times-1}\sqrt{b\times-1}=$$
$$\sqrt{ab(-1)^2}=-\sqrt{ab}.$$

La règle de la division des radicaux présente aussi une exception lorsque le dividende étant réel, le diviseur est imaginaire; car d'après cette règle, on trouve $\sqrt{6}:\sqrt{-3}=\sqrt{-2}$, tandis qu'on doit avoir $\sqrt{6}:\sqrt{-3}=-\sqrt{-2}$.

244. Lorsque le dénominateur d'une fraction est irrationnel, il faut, pour savoir, dans les applications numériques, de combien on est approché de la vraie valeur de la fraction, rendre

4° Les parts sont $2a$, $4a$, $6a$, $8a$, ..., $2na$; diminués respectivement de la moitié, du quart, du sixième, du huitième, ..., du $2n$ième du reste correspondant, le dernier étant b;

5° Les parts sont $2a$, $4a$, $6a$, $8a$, ..., $2na$, diminués respectivement du *unième*, du tiers, du cinquième, du septième, ..., $(2n-1)$ième du reste correspondant, le dernier étant b;

6° Les parts sont le nombre a diminué successivement de la moitié, du quart, du sixième, ..., du $2n$ième du reste correspondant;

7° Enfin, les parts sont le nombre a diminué successivement du tiers, du cinquième, du septième, ..., du $(2n+1)^{me}$ du reste correspondant.

165. *On distribue à* n *pauvres une certaine somme d'argent: on donne au* 1^{er} a *florins, plus le* c^{me} *de ce qui reste; au* 2^e 2a *fl., plus le* c^{me} *de ce qui reste; au* 3^e 3a *fl., plus le* c^{me} *de ce qui reste; ainsi de suite: alors il reste* b *fl. Quelle somme a-t-on distribuée?*

Soit x_v ce qui reste de la somme avant que le v^{me} pauvre reçoive sa part, et x_{v+1} ce qui reste après; il est clair qu'on aura

$$x_v - av - \frac{x_v - av}{c} = x_{v+1}, \text{ ou } x_v - \frac{c}{c-1}\, x_{v+1} = av.$$

Cette équation est résoluble par addition (149), et donne, toutes réductions faites,

$$x_1 = a(c-1)^2 + [b + an(c-1) - a(c-1)^2]\left(\frac{c}{c-1}\right)^n.$$

Il est facile de résoudre le même problème,

1° Lorsque les premières portions des parts des pauvres successifs étant a, $3a$, $5a$, ..., $(2n-1)a$, les secondes portions sont le c^{me} des restes, ou encore 2 fois le $(2c+1)^{me}$;

1° Lorsque les premières portions des parts étant $2a$, $4a$, $6a$, ..., $2na$, les secondes portions sont le c^{me} des restes;

2° Lorsque les premières portions étant $1a$, $4a$, $7a$, ..., $(3n-2)a$, les secondes portions sont 3 fois le $(3c+1)^{me}$ des restes;

4° Enfin, lorsque les premières portions étant $1.2a$, $2.3a$, $3.4a$, ..., $n(n+1)a$, les secondes portions sont le c^{me} des restes.

166. Voici encore plusieurs problèmes à résoudre par les équations à indices:

Les nombres à soustraire croissent comme les nombres pairs 2, 4, 6, 8, etc.; les nombres dont on soustrait, sont: 3 fois un nombre donné a, 5 fois le 1^{er} reste, 7 fois le 2^e, 9 fois le 3^e, ..., $(2n+1)$ fois le $(n-1)^{me}$, et le n^{me} reste vaut b. Trouver le premier nombre z à soustraire.

On ajoute constamment le nombre donné a à un nombre inconnu; au tiers de la somme, aux 3 cinquièmes de la 2^e somme, aux 5 septièmes de la 3^e, ainsi de suite, et il vient, après la n^{me} opération, le n^{me} résultat qu'on obtient en ajoutant a au nombre inconnu cherché, aux 2 quarts de la somme, aux 4 sixièmes de la 2^e somme, aux 6 huitièmes de la 3^e, ainsi de suite. Quel est ce nombre inconnu?

Une personne gagne, au bout de chaque année, la moitié de ses biens pendant cette année, et dépense à la fin a francs. Après n années, elle possède autant qu'elle aurait eu au bout de n années, si elle avait dépensé à la fin de chaque année a francs de moins que la moitié de son bien pendant cette année. Combien avait-elle d'abord?

Quel nombre x faut-il retrancher constamment d'un nombre donné a, des 4 demies du premier reste, des 5 tiers du second, des 6 quarts du troisième, ..., de $(n+2)$ fois le n^{me} du $(n-1)^{me}$ reste, pour que le dernier vaille b?

Quel nombre x faut-il ajouter au tiers d'un nombre donné a, aux 2 quarts de la 1^{re} somme, aux 3 cinquièmes de la 2^e, aux 4 sixièmes de la 3^e, aux 5 septièmes de la 4^e, ..., à n fois le $(n+2)^{me}$ de la $(n-1)^{me}$ somme, pour que la dernière vaille b? [Même problème, lorsque les dénominateurs des fractions successives, sont : m, $m+1$, $m+2$, $m+3$, ..., $m+n-1$.]

Une personne dépense, pendant chaque année, a fois ce qu'elle a dépensé l'année immédiatement précédente, et gagne a fois ce qu'elle a gagné et dépensé cette même année précédente. Combien possédera-t-elle au bout de la n^{me} année? On sait que n'ayant rien au commencement de la première année, elle gagne b flor. et dépense c flor. pendant cette année.

Une personne gagne, pendant chaque année, une partie de son bien marquée par le rang de cette année, et dépense à la fin de cette même année, le produit de a fl. par le rang de l'année suivante. Quels seront les biens de cette personne à la fin de la n^{me} année, sachant qu'elle possédait b florins au commencement de la première?

Dans des additions de chacune deux nombres, les nombres à ajouter croissent comme les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, ..., n; les nombres auxquels on ajoute sont : 2 fois un nombre donné a, 3 fois la 1^{re} somme, 4 fois la 2^e, 5 fois la 3^e, ..., $(n+1)$ fois la $(n-1)^{me}$, et la n^{me} somme vaut b. Quel est le premier nombre x à ajouter?

On prend successivement le double d'un nombre inconnu et le double de a, les 4 tiers du résultat et les 4 tiers de a, les 6 cinquièmes du second résultat et les 6 cinquièmes de a, ..., $2n$ fois le $(2n-1)^{me}$ du $(n-1)^{me}$ résultat et $2n$ fois le $(2n-1)^{me}$ de a : alors le dernier résultat vaut b. Quel est le nombre inconnu?

On retranche constamment le nombre a, de la moitié d'un nombre inconnu, plus la moitié de a; du quart du premier reste, plus le quart de a; du sixième du second reste, plus le sixième de a; ...; du $2n^{me}$ du $(n-1)^{me}$ reste, plus le $2n$ ième de a : alors il reste b. Quel est ce nom-

Des équations du second degré.

247. On sait qu'une équation est du second degré, lorsque le terme qui a le plus de facteurs inconnus, en contient deux (95).

Une équation du second degré à une inconnue est *incomplète* ou à *deux termes*, lorsqu'elle ne renferme que le carré de l'inconnue, avec des nombres donnés ; elle est *complète* ou à *trois termes*, quand elle contient les deux premières puissances de l'inconnue : $2x^2 + 3 = 5x^2 - 9$ est une équation incomplète, et $5x^2 - 4 = 3x$ est une équation complète.

248. Considérons d'abord une équation incomplète en x. Il est clair que si l'on remplaçait x^2 par u, cette équation serait du premier degré en u ; ainsi on pourra toujours résoudre l'équation proposée par rapport à x^2, comme si elle était du premier degré ; ce qui donnera un résultat de la forme $x^2 = a$.

On voit que x est la racine carrée de a (196) : et comme toute racine carrée doit être précédée du double signe $\pm$, il s'ensuit que $x = \pm \sqrt{a}$.

Il suit de là que pour résoudre une équation incomplète du second degré, il faut la transformer en une autre, où le carré de l'inconnue soit seul et positif dans le premier membre, puis égaler cette inconnue à plus ou moins la racine carrée du second.

D'après cette règle, si l'on a l'équation

$$\frac{x^2}{3} + 2 = \frac{3x^2}{5} - 58, \text{ on en déduira } x = \pm 5.$$

De même, on tire de l'équation

$$\frac{acx^2}{4b^2} - \frac{a^2}{3c} + 2b = \frac{c^2x^2}{3b} + \frac{3b^2c}{a^2}, \quad x = \pm \frac{2a^2b - 6b^2c}{ac\sqrt{3a - 4bc}}.$$

249. Si l'on extrait les racines carrées des deux membres de l'équation $x^2 = a$, ces deux racines seront nécessairement égales : et comme toute racine carrée doit avoir le double signe $\pm$, on aura $\pm x = \pm \sqrt{a}$; ce qui donne, en combinant les signes,

$$+x = +\sqrt{a}, \quad +x = -\sqrt{a},$$
$$-x = -\sqrt{a}, \quad -x = +\sqrt{a}.$$

Changeant les signes des deux membres, dans les deux dernières valeurs, elles deviennent les deux premières (91); donc les quatre valeurs se réduisent à ces deux premières, c'est-à-dire à $x = \pm \sqrt{a}$. Ainsi, *quand on extrait la racine carrée des deux membres d'une équation, on ne doit donner le double signe $\pm$ qu'à la racine carrée du second membre;* car on n'aurait rien de plus en donnant aussi le double signe $\pm$ à la racine carrée du premier, comme on vient de le voir.

250. *Une équation complète du second degré peut toujours être ramenée à la forme* $x^2 + nx = p$.

Il suffit pour cela, de faire disparaître les dénominateurs, de transposer et réduire les termes, de dégager x^2 de son multiplicateur, de rendre x^2 positif, s'il se trouvait négatif, de représenter par n le coefficient de x, et par p l'ensemble des nombres connus du second membre. Et comme ces diverses transformations ne détruisent pas l'égalité des deux membres, l'inconnue x ne change pas de valeurs pour maintenir cette égalité; les valeurs de x dans l'équation résultante $x^2 + nx = p$, sont donc les mêmes que dans l'équation proposée.

Par exemple, soit l'équation

$$\frac{2x}{x-5} - 7 = \frac{2}{7-x} + 3;$$

on en déduit, en faisant disparaître les dénominateurs,

$$14x - 2x^2 - 84x + 245 + 7x^2 = 2x - 10 + 36x - 105 - 3x^2;$$

en transposant et réduisant les termes,

$$8x^2 - 108x = -360;$$

enfin, en dégageant x^2 de son multiplicateur 8; ce qui se fait en divisant les deux membres par 8,

$$x^2 - \frac{108}{8}x = -\frac{360}{8}.$$

Cette équation est effectivement de la forme $x^2 + nx = p$.

251. Voyons maintenant comment on peut résoudre les équations complètes du second degré, ramenées à la forme

$$x^2 + nx = p, \ldots (1)$$

n et p étant deux nombres quelconques, positifs ou négatifs.

D'abord, si l'on compare le premier membre $x^2 + nx$ au carré d'un binome dont x serait le premier terme, on verra que x^2 est le carré du premier terme x de ce binome; et que $+nx$

est le produit du premier terme x par le double du second ; ce second vaut par conséquent $+\frac{1}{2}n$. Or, le carré de $x+\frac{1}{2}n$ est $x^2+nx+\frac{1}{4}n^2$. Ainsi, on voit qu'en ajoutant $\frac{1}{4}n^2$ aux deux membres de l'équation proposée, le premier sera le carré exact de $x+\frac{1}{2}n$; on aura donc

$$(x+\tfrac{1}{2}n)^2=p+\tfrac{1}{4}n^2.$$

Extrayant les racines carrées des deux membres, et observant que celle du second doit seule être précédée du double signe $\pm$, il viendra

$$x+\tfrac{1}{2}n=\pm\sqrt{p+\tfrac{1}{4}n^2}\ \ldots\ (2)\ (^*)$$

Transposant $\frac{1}{2}n$, on trouve enfin

$$x=-\tfrac{1}{2}n\pm\sqrt{p+\tfrac{1}{4}n^2}.$$

Comparant cette formule à l'équation (1), on verra que, pour résoudre une équation complète du second degré, ramenée à la forme $x^2+nx=p$, il faut égaler l'inconnue x à la moitié du coefficient n du second terme nx, pris en signe contraire, plus ou moins la racine carrée du résultat qu'on trouve en ajoutant au second membre p le carré de cette même moitié.

D'après cette règle, l'équation $x^2-4x=5$ donne sur-le-champ

$$x=+2\pm\sqrt{5+4}=2\pm\sqrt{9}=2\pm3\,;$$

d'où résultent $x=5$ et $x=-1$. Et en effet, chacune de ces valeurs réduit l'équation proposée à $5=5$.

La même règle appliquée à l'équation

$$x^2-\frac{108}{8}x=-\frac{360}{8},$$

fournit

$$x=\frac{54}{8}\pm\sqrt{-\frac{360}{8}+\frac{2916}{64}}.$$

Réduisant les fractions sous le radical au même dénominateur

(*) Si l'on extrait la racine carrée du premier membre de l'équation (1), on trouvera $x+\frac{1}{2}n$ pour racine, et $-\frac{1}{4}n^2$ pour reste ; de sorte que si l'on avait d'abord ajouté $\frac{1}{4}n^2$ aux deux membres de l'équation (1), $+\frac{1}{4}n^2$ et $-\frac{1}{4}n^2$ se seraient détruits dans l'extraction de la racine carrée du premier membre de la nouvelle équation ; et cette racine aurait été $x+\frac{1}{2}n$ exactement. Et comme la racine du second membre doit seule avoir le double signe, il en résulte l'équation (2) du texte. Ce procédé peut servir à abaisser au second degré, quelques équations du quatrième, comme on le verra plus bas.

64; effectuant la soustraction des deux nouvelles fractions, et extrayant la racine carrée du reste $\frac{36}{64}$, on aura

$$x = \frac{54}{8} \pm \frac{6}{8};\ \text{d'où}\ x = \frac{60}{8} = 7\tfrac{1}{2}\ \text{et}\ x = \frac{48}{8} = 6.$$

252. Soit à résoudre l'équation littérale

$$\frac{x^2}{b} + \frac{2bx}{a} + a = \frac{x^2}{a} + \frac{2ax}{b} + b;$$

Cette équation devient successivement

$$ax^2 + 2b^2x + a^2b = bx^2 + 2a^2x + ab^2,$$
$$(a-b)x^2 - 2(a^2-b^2)x = -ab(a-b),$$
$$x^2 - 2(a+b)x = -ab,$$
$$\text{et}\ x = a + b \pm \sqrt{a^2+b^2+ab}.$$

253. Au moyen de la méthode précédente, il sera facile de résoudre les équations que voici :

$$\frac{3x}{x-3} + 2 = \frac{x-24}{10-x};\ \frac{x^2}{12} - \frac{7x}{8} + \frac{1}{4} = \frac{x^2}{15} - \frac{7x}{10} + 10;$$
$$a^2x^2 = 2a(a+b)x - (a-b)^2;\ x(a-x) + 2a^2 = 9ab - 9b^2;$$
$$\frac{x+4}{x-4} - 1 = \frac{6x-20}{x+2};\ \frac{x^2}{4} - \frac{5x}{6} + 1 = \frac{2x^2}{9} - \frac{x}{2};$$
$$\frac{x^2}{b} + \frac{2bx}{a} + a = \frac{x^2}{a} + \frac{2ax}{b} + b;\ \frac{(x+a)^2}{(x-b)^2} = ab,\ \text{et enfin}$$
$$\frac{2(a+b)x}{a-b} + \frac{ax^2}{a+b} = \frac{bx^2}{a-b} - \frac{2abx^2}{a^2-b^2} - 1.$$

254. Lorsque l'inconnue entre sous un radical du second degré, il faut d'abord faire disparaître ce radical, en le laissant seul dans un membre, puis en élevant au carré de part et d'autre. D'après cela, l'équation $2x - 3\sqrt{x} = 2$, devient successivement : $2x - 2 = 3\sqrt{x}$, $4x^2 - 8x + 4 = 9x$ et $x^2 - \frac{17}{4}x = -1$; d'où $x = 4$ et $x = \frac{1}{4}$.

La première valeur satisfait à l'équation proposée ; mais la seconde n'y satisfait pas : elle résout l'équation $2x + 3\sqrt{x} = 2$. Cela vient de ce que cette équation et la proposée donnent une même équation sans radical. Voici encore trois équations :

$$3x - 2\sqrt{8-x} = 8,\ x = c^2 + 2a\sqrt{x} - a^2,$$
$$1 + \sqrt{(x^2 + 3x - 2)} = \sqrt{(x^2 + 4x + 4)}.$$

On ferait aussi disparaître un radical en l'égalant à une nouvelle inconnue. C'est même le moyen le plus simple de résoudre l'équation proposée, lorsque l'inconnue est au premier degré sous le radical. Ainsi dans l'équation

$$\sqrt{x+4}+\sqrt{x^2+9x-34}=x+4,$$

on fera $\sqrt{x+4}=u$; d'où $x=u^2-4$.

255. Si l'on a deux équations à deux inconnues, l'une du premier degré et l'autre du second, on prendra, dans la première, la valeur d'une inconnue, et l'on substituera cette valeur dans l'autre équation ; ce qui donnera une équation du second degré. C'est ainsi qu'on résoudra chacun des deux systèmes d'équations :

$$3x-2y=6 \text{ et } x^2-3xy+2y^2-y+5=0,$$
$$y+ax=b-ac \text{ et } x^2+y^2=b^2+c^2.$$

Le dernier fournit des valeurs rationnelles à x et à y, aussi bien que le premier.

256. Lorsque les deux équations contiennent chacune les carrés des deux inconnues, il faut en éliminer le carré de l'une d'elles, puis prendre la valeur de cette inconnue dans l'équation résultante, et substituer cette valeur dans l'une des équations proposées. Par exemple, soient les deux équations

$$x^2+y^2=axy \text{ et } x^2-y^2=b:$$

Ajoutant ces deux équations, et prenant la valeur de y dans l'équation résultante $2x^2=axy+b$, cette valeur, substituée dans la seconde équation proposée, donnera

$$(a^2-4)x^4-(a^2-4)bx^2=-b^2.$$

Cette équation du quatrième degré, se résout comme celles du second, en prenant x^2 pour inconnue, ou bien en posant $x^2=u$ et $x^4=u^2$. On pourra faire $a=2\frac{1}{8}$ et $b=-5$.

Voici deux groupes d'équations à résoudre :

$$c^2x^2=b^2+y^2 \text{ et } x^2=b^2+(y-a)^2,$$
$$x^2+y^2=22 \text{ et } xy=7.$$

257. Si l'on résout par substitution les deux dernières équations, on aura

$$x=\pm\sqrt{11\pm6\sqrt{2}},$$

expression qui, d'après ce qu'on a vu précédemment (246), se réduit à
$$x = \pm(3 \pm \sqrt{2}).$$

On obtient cette dernière valeur en résolvant les équations proposées par addition et soustraction.

258. Considérons les deux équations
$$ax = by - y^2 \text{ et } x^2 = b^2 + 2by - 2y^2.$$

Si l'on prend la valeur de x dans la première, et qu'on substitue cette valeur dans la seconde équation, il viendra
$$y^4 - 2by^3 + (2a^2 + b^2)y^2 - 2a^2by = a^2b^2.$$

Cette équation finale du quatrième degré est *complète*, et nous ne pouvons la résoudre, d'après ce qui précède, qu'en la ramenant au second degré. Or pour cela, le moyen qui s'offre d'abord, est d'extraire la racine carrée du premier membre ; ce qui donnera $y^2 - by + a^2$ pour racine, et $-a^4$ pour reste. Si donc on ajoute a^4 aux deux membres de l'équation finale ; $+a^4$ et $-a^4$ se détruiront dans l'extraction de la racine carrée du premier membre de la nouvelle équation, et cette racine sera exactement $y^2 - by + a^2$: d'ailleurs celle du second membre $a^2b^2 + a^4$ se réduit à $a\sqrt{a^2 + b^2}$; on a par conséquent
$$y^2 - by + a^2 = \pm a\sqrt{a^2 + b^2},$$
équation du second degré, qu'on sait résoudre.

On parviendrait immédiatement à une équation finale du second degré en x, en soustrayant le double de la première équation proposée de la seconde. On peut faire $a = 3$ et $b = 4$.

259. On simplifie quelquefois la résolution des équations proposées par la manière dont on opère l'élimination. Considérons, par exemple, les deux équations
$$x^2 - y = a(xy - 1),$$
$$y^2 - x = b(xy - 1).$$

Ajoutant la seconde à la première multipliée par y, et la première à la seconde multipliée par x, nous aurons
$$x^2y - x = (xy - 1)(ay + b), \text{ ou } (xy - 1)(ay + b - x) = 0,$$
$$xy^2 - y = (xy - 1)(bx + a), \text{ ou } (xy - 1)(bx + a - y) = 0.$$

Ces deux équations sont satisfaites par $xy - 1 = 0$, ou bien par $ay + b - x = 0$ et $bx + a - y = 0$. Ces dernières équations donnent à x et à y, des valeurs qui satisfont effectivement aux deux équations proposées. Quant à l'équation $xy-1=0$, ou $xy=1$, elle réduit les deux proposées à $x^2-y=0$ et $y^2-x=0$. L'élimination de y, entre ces deux équations, donne $x(x^3-1)=0$; d'où l'on tire d'abord $x=0$ et $y=0$. Mais ces valeurs ne conviennent pas aux équations proposées. On a aussi $x^3-1=0$, ou bien, en décomposant en facteurs, $(x-1)(x^2+x+1)=0$; de là résulte d'abord $x=1$, d'où $y=1$, valeurs qui satisfont aux équations proposées : il vient ensuite $x^2+x+1=0$. Cette équation et $x^2-y=0$, donnent à x et à y, des valeurs imaginaires, qui ne peuvent résoudre aucun problème (224), mais qui conviennent d'ailleurs aux équations proposées.

Si l'on avait pris la valeur de y dans la première équation proposée, et qu'on eût substitué cette valeur dans la seconde équation, on aurait eu, en posant $p=\frac{a^2+b}{ab-1}$,

$$x^4+px^3-x-p=0, \text{ ou } (x+p)(x^3-1)=0.$$

Cette méthode conduit aux mêmes valeurs que la première; mais elle exige plus de calculs. En général, l'élimination par addition et soustraction doit être préférée, et devient indispensable pour abaisser au second degré les équations $x^4+y^4=97$ et $xy=6$. [Voyez les Mélanges d'algèbre, pour les équations résolubles comme celles du second degré, pages 38 et suivantes.]

Problèmes du second degré.

260. *Des voyageurs louent une voiture pour 175 francs. Arrivés à leur destination, deux d'entre eux s'échappent sans payer, et augmentent par leur fuite, de 10 fr. ce que chacun des autres voyageurs avait à payer avant. Combien y avait-il d'abord de voyageurs ?*

Soit x le nombre de voyageurs cherché : Il est clair que chacun avait à payer d'abord $\frac{175}{x}$ de franc. Mais puisque deux d'entre eux s'échappent sans payer, il n'en reste plus que $x-2$ pour acquitter le prix 175 francs; donc alors chacun donne $\frac{175}{x-2}$ de franc. Mais alors chacun donne 10 fr. de plus qu'auparavant; donc on a l'équation :

$$\frac{175}{x-2}=\frac{175}{x}+10.$$

Cette équation peut se simplifier en divisant ses deux membres par 5; et on en tire, en la résolvant (251),

$$x=7 \text{ et } x=-5.$$

La valeur positive résout le problème proposé; car 7 voyageurs payant 175 francs, chacun donne le septième de 175 fr. ou 25 fr. Mais deux s'échappent sans payer; il n'en reste donc plus que cinq pour acquitter les 175 fr.; chacun donnera donc 35 fr., c'est-à-dire 10 fr. de plus qu'auparavant, comme l'exige le problème proposé.

Quant à la valeur négative $x=-5$, comme un nombre de voyageurs ne saurait être pris en *sens contraire*, il faut, pour trouver l'énoncé du problème résolu par cette valeur, substituer $-x$ à x dans l'équation proposée (159); ce qui donnera

$$\frac{175}{-x-2}=\frac{175}{-x}+10;\ -\frac{175}{x+2}=-\frac{175}{x}+10;\ \text{puis}\,(91)$$

$$\frac{175}{x+2}=\frac{175}{x}-10.$$

Voilà l'équation du problème résolu par la valeur 5, trouvée avec le signe —. Comparant cette équation à la proposée, on verra que le nouveau problème dont il s'agit est celui-ci : *Des voyageurs louent une voiture pour 175 francs. Ils rencontrent en route deux personnes, qu'ils y admettent, à condition qu'elles paieront comme eux; alors chaque voyageur paye 10fr de moins qu'auparavant. Combien y en avait-il d'abord?*

On voit que dans ce problème nouveau l'inconnue x n'est pas prise en sens contraire, mais bien les nombres 2 et 10. Si l'on résolvait ce nouveau problème, on trouverait $x=5$ et $x=-7$; et la valeur négative 7, qui ne résout pas le nouveau problème, résout le proposé.

261. *On a employé deux ouvriers gagnant des salaires différens : le premier ayant été payé après un certain nombre de jours de travail, a reçu 48 fr.; et le second ayant travaillé deux jours de moins, n'a reçu que 20 fr. Si le premier avait travaillé 4 jours de moins, et le second 6 jours de plus, ils auraient reçu tous les deux la même somme. On demande combien de jours chacun a travaillé et le prix de sa journée.*

Soit x le nombre de jours de travail du premier ouvrier, et y celui du second. Le gain journalier du premier ouvrier sera donc $\frac{48}{x}$ et celui du second $\frac{20}{y}$. Si le premier ouvrier avait travaillé 4 jours de moins, et le second 6 jours de plus, ils auraient reçu respectivement

$$\frac{48\,(x-4)}{y} \quad \text{et} \quad \frac{20\,(y+6)}{y}.$$

Mais alors ils auraient reçu tous les deux la même somme; et le second ouvrier a d'ailleurs travaillé 2 jours de moins que le premier; on a donc les deux équations

$$y = x - 2 \quad \text{et} \quad \frac{48\,(x-4)}{x} = \frac{20\,(y+6)}{y}.$$

Ces équations fournissent $x = 12$ et $y = 10$; $x = \frac{8}{7}$ et $y = -\frac{6}{7}$.

Le premier couple de valeurs résout le problème proposé, et donne 4 fr. et 2 fr. pour les gains journaliers des deux ouvriers. Quant au second couple, puisque la valeur de y est négative, elle résout le problème que donnent les équations proposées en y changeant y en $-y$ (151). Or, par ce changement, ces deux équations deviennent d'abord

$$-y = x - 2, \quad \frac{48\,(x-4)}{x} = \frac{20\,(6-y)}{-y};$$

ensuite, comme $x-4$ et $x-2$ sont négatifs et égaux à $-(4-x)$ et à $-(2-x)$, ces deux équations se changent en celles-ci:

$$-y = -(2-x), \quad \frac{-48\,(4-x)}{x} = \frac{20\,(6-y)}{-y};$$

et deviennent enfin, en changeant les signes des deux membres,

$$y = 2 - x \quad \text{et} \quad \frac{48\,(4-x)}{x} = \frac{20\,(6-y)}{y}.$$

Comparant ces deux équations aux deux proposées, on verra que le problème résolu par les deux valeurs $x = \frac{8}{7}$ et $y = \frac{6}{7}$, est celui-ci: *On a employé deux ouvriers gagnant des salaires différens: le premier a été payé au bout d'un certain nombre de jours de travail, et a reçu 48 fr.; le second ayant travaillé 2 jours moins les jours du travail du premier, n'a reçu que 20 fr. Si le premier ouvrier avait travaillé 4 jours moins les jours de son premier travail, et le second 6 jours moins les* *jours de son premier travail, ils auraient reçu tous les deux la même somme. On demande combien de jours chacun a travaillé, et le prix de sa journée.*

On pourrait résoudre le problème proposé en n'employant qu'une inconnue ; mais alors il serait impossible de trouver le problème résolu par la valeur négative. Généralement, l'interprétation des valeurs négatives devient plus facile, lorsque toutes les inconnues sont en évidence. Si donc, dans le problème proposé, on désigne par x' et y' les gains journaliers des deux ouvriers, on aura les quatre équations $xx'=48$, $yy'=20$, $y=x-2$ et $x'(x-4)=y'(y+6)$, dans lesquelles il devient aisé d'interpréter les valeurs négatives de y et y'. Et l'on peut remarquer que, dans le nouveau problème, y' n'est pas pris en *sens contraire* ; mais cela tient à ce qu'au fond y' n'a pas changé de signe.

262. *Un laboureur ayant semé* 3 *mesures de blé, en a recueilli une quantité inconnue* x ; *ayant semé cette quantité et* 4 *mesures de plus, la seconde année, il a récolté* 6 *mesures de moins que la semence de cette année. Combien le laboureur a-t-il récolté la première année, sachant que les récoltes ont été proportionnelles aux semences ?*

Cet énoncé conduit évidemment à la proportion

$$3 : x :: x+4 : x+4-6.$$

Cette proportion fournit l'équation du second degré $x^2+(4-3)x=3(4-6)$, de laquelle on tire, en indiquant d'abord les opérations, afin de mieux voir comment l'inconnue se compose des nombres donnés,

$$x=-\frac{4-3}{2}\pm\sqrt{\frac{(4-3)^2}{4}+3(4-6)};$$

d'où $x=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-23}$. Ces valeurs étant imaginaires ou impossibles (224), il en est de même du problème proposé.

Effectivement, les récoltes ayant été proportionnelles aux semences, et la semence $x+4$ de la seconde année étant plus grande que celle 3 de la première, quel que soit le nombre x, il s'ensuit que la récolte $x+4-6$ de la seconde année devrait être plus grande que la récolte x de la première. Or, au contraire, elle est plus petite ; le problème est donc impossible.

En général, lorsqu'on tente de résoudre un problème, on ne sait pas d'abord si ce problème est possible ou absurde; on est donc obligé d'exprimer algébriquement toutes les conditions de la question, quoiqu'il y en ait peut-être qui se contredisent sans qu'on s'en aperçoive; et si après avoir examiné tout ce qui peut conduire à la solution, on arrive à une valeur infinie, négative ou imaginaire, on peut en conclure avec certitude que le problème proposé est absurde, et que par conséquent ce problème est résolu.

De même que les valeurs négatives, les expressions imaginaires conduisent à résoudre de nouveaux problèmes, sans qu'on ait à recommencer les calculs et les raisonnemens qui ont fourni ces expressions. Il suffit pour cela, de rendre positive la quantité sous le radical, en y changeant le signe de l'un des nombres qui la composent. Or, si dans l'exemple qui nous occupe, on change 6 en -6, la proportion et l'expression qu'elle a donnée deviendront $3 : x :: x + 4 : x + 4 + 6$ et

$$x = -\frac{4-3}{2} \pm \sqrt{\frac{(4-3)^2}{4} + 3(4+6)};$$

d'où $x = 5$ et $x = -6$.

Il est clair que la valeur 5 résout le problème que voici : *Un laboureur ayant semé* 3 *mesures de blé, en a recueilli une quantité inconnue* x; *ayant semé cette quantité et* 4 *mesures de plus, la seconde année, il a récolté* 6 *mesures de plus que la semence de cette année. Combien a-t-il récolté la première année, sachant que les récoltes ont été proportionnelles aux semences?*

A l'égard de la valeur négative $x = -6$, en changeant x en $-x$, la proportion précédente peut se mettre sous la forme

$$3 : x :: x - 4 : 6 - (x - 4);$$

le problème résolu par $x = 6$ est donc : *Un laboureur ayant semé* 3 *mesures de blé, en a recueilli une quantité inconnue* x; *ayant semé cette quantité moins* 4 *mesures, la seconde année, il a récolté* 6 *mesures moins la semence de cette année. Combien a-t-il récolté la première année, sachant que les récoltes ont été proportionnelles aux semences?*

Le radical imaginaire deviendrait encore réel, si on y changeait, 1° 3 en -3; 2° 3 et 4 en -3 et -4; 3° 4 et 6 en -4 et -6. Dans le premier cas, la proportion devient $3 : x$

$:: x+4 : 6-(x+4)$, pour la valeur positive de x, et $3 : x :: 4-x : 6-(4-x)$, pour la valeur négative ; dans le second cas, il vient, pour la valeur positive de x, $3 : x :: x-4 : 6-(x-4)$, et pour la valeur négative, $3 : x :: x+4 : x+4+6$; enfin dans le troisième cas, on a $3 : x :: x-4 : x-4+6$, pour la valeur positive, et $3 : x :: x+4 : 6-(x+4)$, pour la valeur négative. Il est facile d'énoncer les problèmes résolus dans ces diverses circonstances.

263. Voici encore plusieurs problèmes où les élèves pourront s'exercer à énoncer les questions résolues par les valeurs négatives et imaginaires :

Un particulier achète une ferme ; il la revend ensuite pour 4160 fr., et gagne autant pour 100 du prix de l'achat qu'il est marqué par la millième partie de ce prix. Quel est-il? (R. 4000 fr. ou — 10400.)

Une personne emploie un certain nombre d'ouvriers, auxquels elle paye 320 fr. ; elle emploie cinq ouvriers de plus, mais donne 2 fr. de moins à chacun de ceux qu'elle fait travailler, et alors elle paye en tout 270 fr. Combien y avait-il d'abord d'ouvriers? (R. 40 ou — 20.)

Quel est le nombre dont le double moins le carré donne 3? (R. Imaginaire.)

Par quel nombre faut-il diviser 20, pour que le diviseur augmenté du quotient, donne 8? (R. Imaginaire.)

Un marchand achète un certain nombre de pièces de drap pour 162 louis. Il y a trois qualités différentes, mais le même nombre de chaque sorte. Chaque pièce de la première espèce coûte autant de louis qu'il y a de pièces de cette espèce ; une de la seconde revient à 3 louis de moins, et une de la troisième vaut la moitié d'une de la seconde. Combien y a-t-il de pièces de chaque espèce? (R. 9 ou — 7,2.)

Le produit de deux nombres est 16, et si on ajoute chacun à 6, le produit des deux sommes sera 88. Quels sont ces deux nombres? (R. Imaginaires.)

Deux marchands partent au même instant de leur endroit pour aller au marché, à 6 milles de là. Le premier fait par heure un mille de plus que l'autre, et arrive une heure avant lui. Combien de milles chacun a-t-il fait par heure? (R. Le premier 3 ou — 2 et le second 2 ou — 3.)

Un homme place 7000^f à intérêts composés, et au bout de deux ans on lui doit une somme telle, qu'en l'ajoutant aux intérêts de la première année, on obtient 9170^f pour résultat. A combien pour 100 l'argent était-il placé? (R. à 10 ou à — 310.)

Deux négocians ont vendu l'un 26 et l'autre 24 aunes d'étoffe. Le premier a donné une aune de moins pour 30^f que le second, et il a reçu 36^f de plus que ce second. Combien chacun a-t-il vendu d'aunes pour 30^f? (R. Le premier 5 ou — 4 et le second 6 ou — 3.)

De la discussion des racines dans les équations du second degré à une inconnue.

264. Les valeurs de l'inconnue, dans une équation du second degré, ne s'obtenant que par une extraction de racine carrée, sont appelées *racines* de cette équation. En général, on appelle *racine* d'une équation, toute valeur qui, mise à la place de l'inconnue, rend le premier membre égal au second.

265. Voyons d'abord comment on peut connaître, à la seule inspection des coefficiens d'une équation du second degré, de quelle nature seront les racines de cette équation. Il est clair que, quelle que soit l'équation proposée, on peut toujours, sans changer les valeurs de l'inconnue, la ramener à l'une des quatre formes que voici :

$x^2+nx=p$; d'où $x=-\frac{1}{2}n\pm\sqrt{(\frac{1}{4}n^2+p)}$;
$x^2-nx=p$; d'où $x=\frac{1}{2}n\pm\sqrt{(\frac{1}{4}n^2+p)}$;
$x^2+nx=-p$; d'où $x=-\frac{1}{2}n\pm\sqrt{(\frac{1}{4}n^2-p)}$;
$x^2-nx=-p$, d'où $x=\frac{1}{2}n\pm\sqrt{(\frac{1}{4}n^2-p)}$.

Dans les deux premières de ces équations, x aura toujours une valeur positive et une valeur négative réelle ; car puisque $\frac{1}{4}n^2<\frac{1}{4}n^2+p$, on aura toujours $\frac{1}{2}n<\sqrt{(\frac{1}{4}n^2+p)}$; donc les signes des valeurs de x seront toujours ceux du radical, c'est-à-dire seront toujours $+$ pour une valeur et $-$ pour l'autre. De plus, on voit que ces deux valeurs seront toujours réelles ; car la quantité sous le radical sera toujours positive.

Dans la troisième équation les deux valeurs de x seront toujours négatives, et dans la quatrième, toujours positives ; car puisque $\frac{1}{4}n^2>\frac{1}{4}n^2-p$, il s'ensuit que $\frac{1}{2}n>\sqrt{(\frac{1}{4}n^2-p)}$; donc les signes des deux valeurs de x seront toujours ceux de $\frac{1}{2}n$; c'est-à-dire seront toujours $-$ dans la troisième équation, et $+$ dans la quatrième.

Dans les équations $x^2+nx=-p$ et $x^2-nx=-p$, les deux valeurs de x seront imaginaires, si $\frac{1}{4}n^2<p$; car alors la quantité $\frac{1}{4}n^2-p$, soumise au radical, sera négative. Dans les mêmes équations, les deux valeurs de x seront *égales*, c'est-à-dire, se réduiront à une seule $-\frac{1}{2}n$ ou $+\frac{1}{2}n$, si $\frac{1}{4}n^2=p$; car alors la quantité $\frac{1}{4}n^2-p$, soumise au radical, deviendra zéro. On peut observer que, dans le cas de $\frac{1}{4}n^2=p$, les deux

équations $x^2 + nx = -p$ et $x^2 - nx = -p$, deviennent respectivement $(x + \frac{1}{2}n)^2 = 0$ et $(x - \frac{1}{2}n)^2 = 0$.

Résumant tout ce qui vient d'être dit, on en conclura 1° que les racines des équations de la forme $x^2 + nx = p$ et $x^2 - nx = p$, seront toujours réelles, l'une positive et l'autre négative;

2° Que les racines des équations de la forme $x^2 + nx = -p$, seront toujours négatives; réelles si $\frac{1}{4}n^2 > p$, égales si $\frac{1}{4}n^2 = p$, et imaginaires si $\frac{1}{4}n^2 < p$;

3° Que les racines des équations de la forme $x^2 - nx = -p$, seront toujours positives; réelles si $\frac{1}{4}n^2 > p$, égales si $\frac{1}{4}n^2 = p$, et imaginaires si $\frac{1}{4}n^2 < p$.

266. Prenons maintenant une équation du second degré, plus générale, et observons d'abord que, quelle que soit cette équation, on peut toujours, en chassant les dénominateurs et en transposant, la ramener à la forme $ax^2 + bx + c = 0$. Or, résolvons cette équation, et soient x', x'', ses deux racines; nous aurons successivement :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0; \ldots (1)$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}};$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}; \ldots (2)$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} \\ x'' &= \frac{-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} \end{aligned}\right\} \ldots (3)$$

Si a et c sont de même signe, les deux valeurs de x seront réelles, tant qu'on aura $b^2 > 4ac$; elles seront égales si $b^2 = 4ac$; mais si $b^2 < 4ac$, elles seront imaginaires, et par suite, le problème proposé sera impossible.

Or, dans ce cas même, si l'une des quantités a ou c pouvait changer de signe, les deux valeurs de x deviendraient réelles, et résoudraient par conséquent un problème. Mais si l'on change le signe de a, c'est-à-dire, si l'on substitue $-a$ au lieu de a, l'équation et la formule proposées deviendront

$$ax^2 - bx - c = 0 \quad \text{et} \quad x = \frac{1}{2a}\left(b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}\right).$$

Ainsi en traduisant la nouvelle équation en langage ordinaire, on aura l'énoncé du problème résolu par les nouvelles valeurs de x.

De même, si l'on change c en $-c$, et qu'on traduise la nouvelle équation en langage ordinaire, on aura l'énoncé d'un troisième problème résolu par les nouvelles valeurs de x.

On voit donc que quand un radical est imaginaire, si l'on change le signe de la quantité qui lui est soumise, en donnant le signe $-$ à l'une a des lettres qui composent cette quantité; la nouvelle formule résoudra le problème qu'on trouve en changeant a en $-a$, dans les équations proposées, et en traduisant les nouvelles équations en langage ordinaire. Et cette manière d'interpréter les racines imaginaires, n'est qu'une extension de l'interprétation des valeurs négatives (151).

267. Lorsque $c=0$ les deux valeurs de x deviennent $x'=0$, et $x''=-\frac{b}{a}$, comme cela doit être. Mais si $a=0$, les deux valeurs de x sont $x'=\frac{0}{0}$ et $x''=-\infty$. Or, x ne doit pas avoir de valeur indéterminée, puisqu'en faisant $a=0$ dans l'équation $ax^2+bx+c=0$, on trouve seulement $x=-\frac{c}{b}$. Il faut donc que la résolution de cette équation ait introduit un facteur étranger, devenant nul lorsque $a=0$ (163).

Pour trouver ce facteur commun, il suffit de multiplier les deux termes de la formule générale (2), par le résultat que donne le numérateur, en y changeant le signe du radical. En effet, en multipliant les deux termes de la formule proposée (2) par $-b\mp\sqrt{(b^2-4ac)}$, le nouveau numérateur sera nécessairement $b^2-[\sqrt{(b^2-4ac)}]^2$ ou b^2-b^2+4ac, ou enfin $4ac$; ce nouveau numérateur et le nouveau dénominateur auront donc le facteur $2a$ commun, facteur qui s'évanouit dès que $a=0$. Supprimant ce facteur commun, la formule sera

$$x=\frac{2c}{-b\mp\sqrt{(b^2-4ac)}}.$$

La supposition de $a=0$ dans cette formule, ne donne plus $x=\frac{0}{0}$; mais elle conduit à $x=-\frac{c}{b}$ et à $x=\infty$, valeurs qu'on devait trouver. On pourrait encore examiner le cas où $a=0$ et $b=0$, et celui où a, b, c, sont nuls en même temps.

268. Ajoutant et multipliant entre elles les valeurs (3) de x' et de x'', on aura, en réduisant

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x'x'' = \frac{c}{a}.$$

Ces relations remarquables montrent que dans toute équation du second degré, ramenée à la forme (1), la somme des deux racines vaut le coefficient du second terme, pris en signe contraire, et le produit de ces mêmes racines est égal au terme tout connu.

Prenant dans les relations que l'on vient de trouver, les valeurs $b = -a(x' + x'')$ et $c = ax'x''$, puis substituant ces valeurs dans $ax^2 + bx + c$, il viendra successivement :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x^2 - xx' - xx'' + x'x'') \\ &= a[x(x-x') - x''(x-x')]; \text{ ou bien} \\ ax^2 + bx + c &= a(x-x')(x-x'') \cdots (4) \end{aligned}$$

Cette identité montre comment on peut remplacer tout trinome du second degré par un produit de trois facteurs; ce qui est quelquefois utile.

269. La même identité fait voir que non seulement il existe deux valeurs de x qui satisfont à l'équation $ax^2+bx+c=0$; mais de plus qu'il n'en existe que deux. En effet, s'il y avait une troisième racine v, différente des deux premières x' et x'', on aurait $(v-x')(v-x'')=0$. Donc le produit de deux quantités différentes de zéro, serait zéro ; ce qui est évidemment impossible. Donc réellement, l'inconnue x n'a que les deux valeurs x' et x'' dans l'équation $ax^2+bx+c=0$; et par suite, dans l'équation proposée. Donc enfin, *toute équation du second degré a deux racines et jamais plus.*

270. Substituons les valeurs (3) de x' et x'' dans l'identité (4); nous en déduirons facilement

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}[(2ax+b)^2 + 4ac - b^2] \cdots (5)$$

Supposons que les deux racines x' et x'' soient égales ou imaginaires ; les équations (3) montrent qu'alors $b^2 - 4ac$ est nul ou négatif; donc $4ac - b^2$ sera nécessairement nul ou positif; d'ailleurs $(2ax+b)^2$ reste positif pour toutes les valeurs réelles de x. Donc le multiplicateur de $\frac{1}{4a}$ sera toujours positif; donc le trinome ax^2+bx+c conservera le signe de a pour toutes les valeurs réelles de x. Donc si les deux valeurs x' et x'' de x, qui rendent nul le trinome du second degré ax^2+bx+c, sont égales ou imaginaires, ce trinome conservera le signe de a pour toutes les valeurs réelles qu'on voudra donner à x.

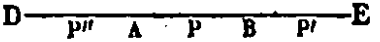
271. Réciproquement, supposons que le trinome ax^2+bx+c, conserve le signe de a pour toutes les valeurs réelles de x; il faudra donc que $4ac-b^2$ soit positif; car s'il était négatif, en prenant $2ax=-b$, le multiplicateur de $\frac{1}{4a}$ deviendrait négatif : faisant ensuite croître x, positivement ou négativement, on finirait par rendre ce multiplicateur positif; ce multiplicateur changerait donc de signe, ainsi que le trinome proposé; ce qui est contre l'hypothèse. Donc $4ac-b^2$ est nécessairement positif; et par suite, les deux valeurs x', x'' de x, sont égales ou imaginaires. Donc si le trinome du second degré ax^2+bx+c conserve le signe de a pour toutes les valeurs réelles de x, on aura $4ac-b^2$ positif, et les deux valeurs x', x'' de x, qui rendent nul ce trinome, seront égales ou imaginaires.

272. Extrayant la racine carrée du trinome ax^2+bx+c, et égalant à zéro le reste indépendant de x, on aura la condition pour que le trinome proposé soit un carré parfait. Cette condition est $b^2-4ac=0$: si elle est remplie, les valeurs x', x'' de x, qui rendent nul ce trinome, sont égales. Réciproquement, quand $x'=x''$, l'identité (4) fait voir que le trinome ax^2+bx+c est le carré exact de $(x-x')\sqrt{a}$.

273. Pour terminer cette discussion, soit m la *valeur absolue* du plus grand des coefficiens a, b, c, dans ax^2+bx+c; on aura nécessairement le nombre $bx+c<mx+m$, ou $<\frac{m(x+1)(x-1)}{x-1}$, ou $<\frac{mx^2}{x-1}-\frac{m}{x-1}$; d'où $\frac{mx^2}{x-1}>bx+c$.

Posant $ax^2=\frac{mx^2}{x-1}$, d'où $x=1+\frac{m}{a}$, on aura toujours $ax^2>bx+c$; et si l'on prend $x>1+\frac{m}{a}$, d'où $ax^2>\frac{mx^2}{x-1}$, il viendra, à plus forte raison, $ax^2>bx+c$. D'où il résulte que dans tout trinome du second degré ax^2+bx+c, on peut toujours trouver pour x, un nombre $1+\frac{m}{a}$, qui rende le premier terme ax^2 plus grand que le nombre formé par les deux autres $bx + c$, et toute valeur $> 1 + \frac{m}{a}$, jouira, à plus forte raison, de cette propriété.

274. Résolvons maintenant quelques problèmes généraux du second degré. En voici un dont la discussion offre de l'intérêt : *Deux corps lumineux* A *et* B *sont éloignés l'un de l'autre de* d *mètres, et fournissent à un mètre de distance, le premier* a *et le second* b *unités de lumière. Trouver sur la droite* DE *qui passe par ces deux corps, un point* P *qui en soit également éclairé. On sait qu'à* m *fois plus de distance, un même corps répand* m² *fois moins de lumière.*



Soit x la distance AP du point cherché P au point A ; sa distance à B sera $d - x$. Cela posé, puisqu'à un mètre de distance, le corps A répand a unités de lumière ; à x mètres, c'est-à-dire à x fois plus de distance, il répandra x^2 fois moins de lumière ou $\frac{a}{x^2}$. De même, à $d - x$ mètres de distance, le corps B répandra $\frac{b}{(d-x)^2}$ de lumière. Or, à ces distances, les lumières fournies au point P, par les deux corps A et B, doivent être égales ; on a donc

$$\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(d-x)^2}.$$

Cette équation se réduit sur-le-champ à une équation du premier degré en extrayant la racine carrée de ses deux membres ; car en faisant $\sqrt{a} = a'$ et $\sqrt{b} = b'$, il viendra (249)

$$\frac{a'}{x} = \pm \frac{b'}{d-x}; \text{ d'où l'on tire } x = d\frac{a'}{a' \pm b'}.$$

On peut supposer $d = 24$, $a = 16$ et $b = 9$. Mais voyons quelle position la formule précédente assignera au point cherché, quand on aura $a > b$, ou $a < b$ ou $a = b$.

1° Si $a > b$; on aura aussi $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ ou $a' > b'$; donc x aura deux valeurs positives, l'une plus petite que d et plus grande que $\frac{1}{2}d$, et l'autre plus grande que d. Donc il y aura deux points P et P' également éclairés chacun par les lumières A et B, l'un entre ces lumières et l'autre au-dehors, mais tous les deux plus près de la lumière B la moins *intense*, comme cela doit être.

On peut voir d'ailleurs pourquoi l'équation proposée détermine deux points ; car à cause que $(d-x)^2$ est identique avec $(x-d)^2$; en désignant par x la distance AP', on trouverait une équation identique avec la proposée. Cette proposée ne devait donc pas donner AP plutôt que AP' ; mais devait donner ces deux distances.

2° Si $a < b$, on aura aussi $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ ou $a' < b'$; donc x aura une valeur positive et une négative. La valeur positive étant $< \frac{1}{2}d$, détermine un point P entre les deux corps lumineux A et B, mais plus près de la lumière A la moins *intense*, comme cela doit être. Quant à la valeur négative, elle résout le problème que donne le proposé en y prenant l'inconnue x en sens contraire (158) ; c'est-à-dire, en mesurant la distance x de A vers D, au lieu de la mesurer de A vers E. Ainsi cette valeur négative détermine un second point P'', qui recevra la même lumière de chacun des corps A et B. Et en effet, en calculant ces quantités de lumière, d'après les conditions du problème et à l'aide de la valeur absolue de AP'', on les trouve égales chacune à $d(b'-a')$.

3° Si $a=b$, on aura aussi $a'=b'$; d'où $x=\frac{1}{2}d$ et $x=\infty$, comme cela doit être, puisque quand $a=b$, les deux corps A et B fournissent la même lumière à des distances égales. Mais le point qui répond à $x=\infty$, étant infiniment éloigné du corps A, sa position ne saurait être déterminée, et le problème n'a réellement que la seule solution $x=\frac{1}{2}d$, qui est le point milieu de AB.

Si a ou b était o, il faudrait remonter à l'équation proposée pour avoir la vraie valeur de x, qui alors est infinie.

Si on avait résolu l'équation proposée, sans extraire d'abord la racine carrée des deux membres, on aurait trouvé

$$x=\frac{d\left(a \pm \sqrt{ab}\right)}{a-b}.$$

La supposition de $a=b$ dans cette expression, donnerait $x=\frac{0}{0}$ et $x=\infty$, tandis qu'alors on doit avoir $x=\frac{1}{2}d$ et $x=\infty$. Cela provient du facteur $a-b$, commun aux deux termes, et qu'on mettra en évidence, soit par le procédé du n° 267, soit en remplaçant a et b par leurs valeurs a'^2 et b'^2 : alors on retrouvera la formule considérée d'abord.

275. Voici trois problèmes que l'on peut discuter comme le précédent :

1° Partager le nombre donné d en deux parties telles, que le rapport des carrés de ces parties soit égal au rapport de a à b.

2° Deux courriers éloignés l'un de l'autre de d lieues, partent en même temps, vont l'un contre l'autre, et marchent tellement, qu'au moment de leur rencontre, il faudrait a heures au premier pour faire le chemin du second, et b heures à celui-ci pour faire le chemin du premier. Combien le premier fait-il de lieues par heure?

3° Deux maquignons fournissent d chevaux à un régiment, et rapportent la même somme chacun, quoique le second ait fourni plus de chevaux que le premier. Le premier dit au second : si j'avais vendu tes chevaux j'en aurais retiré a louis; et moi, lui répond le second, si j'avais vendu les tiens, je n'en aurais retiré que b louis. Combien ont-ils fourni de chevaux chacun? (On peut supposer $a=600$, $b=216$ et $d=48$.)

276. *Un homme achète un cheval qu'il vend au bout de quelque temps pour* a *francs. A cette vente, il perd autant pour* b *fr. du prix de l'achat que le cheval lui a coûté. Combien l'a-t-il payé?*

Soit x ce que le cheval a coûté : on a donc perdu x sur b du prix de l'achat, c'est-à-dire que b du prix de l'achat se réduisent à $b-x$ par la vente; donc 1 du prix de l'achat se réduit à $\frac{b-x}{b}$, et x prix de l'achat se réduit à $\frac{(b-x)x}{b}$. Mais on suppose que le prix x de l'achat se réduit à a par la vente; il faut donc qu'on ait

$$\frac{(b-x)x}{b}=a;\ \text{d'où}\ x=\tfrac{1}{2}b\pm\sqrt{b\left(\tfrac{1}{4}b-a\right)}.$$

On peut faire $a=27$ et $b=144$. Les deux valeurs générales de x sont positives tant que $\frac{1}{4}b$ reste plus grand que a; et par conséquent le problème a deux solutions dans ce cas. Mais si $\frac{1}{4}b<a$, la quantité soumise au radical sera négative; les deux valeurs de x seront donc imaginaires, et le problème impossible, comme on le verrait d'ailleurs en faisant $x=\frac{1}{2}b\pm u\sqrt{b}$; car alors l'équation proposée se réduit à $\frac{1}{4}b-u^2=a$.

Quoique le problème proposé soit impossible quand $\frac{1}{4}b<a$, cependant si l'on interprète les valeurs imaginaires, c'est-à-dire, si l'on change le signe de a ou celui de b, le radical deviendra réel, et la nouvelle formule résoudra le problème que donne l'équation proposée en y changeant a en $-a$, ou b en $-b$ (266).

Or, 1° si l'on change le signe de a, l'équation et la formule proposées deviendront :

$$\frac{(x-b)x}{b}=a \text{ et } x=\tfrac{1}{2}b\pm\sqrt{b(\tfrac{1}{4}b+a)}:$$

donc, en observant que $x-b=b-(2b-x)$, on verra que le problème résolu par la valeur positive de x, qu'on vient de trouver, est celui-ci : *Un homme achète un cheval, qu'il vend au bout de quelque temps pour* a *fr. A cette vente, il perd pour* b *fr., le double de* b *diminué du prix de l'achat. Combien a-t-il payé le cheval?*

2° Si l'on change b en $-b$, l'équation et la formule proposées deviendront

$$\frac{(b+x)x}{b}=a \text{ et } x=-\tfrac{1}{2}b\pm\sqrt{b(\tfrac{1}{4}b+a)};$$

et le problème résolu par la valeur positive est celui-ci : *Un homme achète un cheval, qu'il vend au bout de quelque temps pour* a *francs. A cette vente, il gagne autant pour* b *que le cheval lui a coûté. Combien l'a-t-il payé?*

277. On peut remarquer que la valeur négative, dans le dernier problème, résout le précédent, et que la valeur négative, dans ce précédent, résout le dernier. On discuterait, d'une manière semblable, les problèmes que voici : 1° Connaissant les extrêmes a et b d'une proportion, dont l'un a soit la somme des moyens, trouver ces deux moyens.

2° Etant donnée la distance a entre deux points d'une droite, trouver sur cette droite, un troisième point tel, que le produit de ses distances aux deux premiers, ait la valeur connue ab. (On peut faire $a=64$ et $b=7$.)

3° Quel nombre x doit-on ajouter à deux nombres donnés a et b, pour qu'en l'ôtant du premier a et en en ôtant le second b, le produit des deux sommes et celui des deux restes soient entre eux comme a est à b? (On peut supposer $a=30$ et $b=5$.)

278. *Trouver un nombre tel, que si on lui ajoute* a *et qu'on en retranche* b, *le produit des deux résultats vaille* c *fois le carré du nombre cherché.*

Soit x ce nombre ; on aura donc $(x+a)(x-b)=cx^2$. Cette équation donne, toute réduction faite,

$$x=\frac{a-b\pm\sqrt{(a+b)^2-4abc}}{2(c-1)}.$$

On peut faire $a=30$, $b=2$ et $c=4$. Pour discuter les valeurs de x sous les trois hypothèses $c>1$, $c<1$ et $c=1$, il suffira de poser $c=1+d$, et de faire d positif dans le premier cas, d négatif dans le second, et $d=0$ dans le troisième.

Les valeurs de x sont imaginaires, lorsque $4abc > (a+b)^2$. Mais ces valeurs deviennent réelles en changeant le signe de a, ou de b, ou de c, ou à la fois les signes de a, b, c; ce qui, par l'interprétation des valeurs négatives, résoudra de nouveaux problèmes analogues au proposé.

279. Voici des problèmes que l'on peut discuter comme le précédent :

1° Partager le nombre donné a en deux parties telles, que si l'on multiplie leurs carrés par les nombres donnés b et c, la différence des deux produits soit égale au cube de a.

2° Trouver de laquelle de ses parties l'eau d'un vase doit diminuer pendant chaque heure, pour qu'en y ajoutant b litres à la fin de chacune, il y reste c litres au commencement de la troisième. On sait qu'il y avait d'abord a litres d'eau dans le vase.

Questions de maximums et de minimums.

280. On peut voir dans les Mélanges d'algèbre, pages 56 et suivantes, la théorie complète des *maximums* et des *minimums* du second degré. Nous nous bornerons ici à résoudre quelques questions qui s'y rapportent, lesquelles donneront une idée suffisante de cette théorie.

281. *Partager 20 en deux parties dont la somme des carrés soit la moindre possible.*

Soit $2a$ la somme des carrés des deux parties cherchées, et x la première ; la seconde sera $20-x$, et on aura

$$x^2+(20-x)^2=2a.$$

Cette équation devient : $2x^2-40x+400=2a$, $x^2-20x=a-200$ et $x=10\pm\sqrt{a-100}$.

Plus a diminue, plus aussi $a-100$ diminue ; et a ne peut diminuer que jusqu'à devenir égal à 100 ; car si a diminuait encore, $a-100$ deviendrait négatif, et x serait imaginaire ou impossible. La plus petite valeur de a, et conséquemment celle de $2a$, répond donc à $a=100$; ce qui donne $a-100=0$, $x=10$ et $20-x=10$. D'où il suit que les deux parties cherchées sont égales chacune à 10.

Effectivement, si l'on partage 20 en deux autres parties quelconques, la somme des carrés de ces deux parties sera toujours plus grande que celle des carrés des deux parties 10 et 10.

282. *Partager le nombre donné a en deux carrés dont le produit des racines soit le plus grand possible.*

Soient x^2 et y^2 les deux carrés cherchés ; on aura

$$x^2+y^2=a \quad \text{et} \quad xy=b.$$

Retranchant le double de la seconde de ces équations de la première, on trouvera

$$x-y=\sqrt{a-2b}.$$

Comme a est un nombre donné et que b peut être pris à volonté, on voit que si b augmente, $a-2b$ diminuera ; et b ne saurait augmenter que jusqu'à donner $2b=a$; car si b augmentait encore, $2b$ serait plus grand que a ; donc $a-2b$ serait négatif et $x-y$ imaginaire ou impossible (224). La plus grande valeur de b donne donc $2b=a$ ou $b=\frac{1}{2}a$; et il en résulte $x-y=0$; d'où $x=y=\frac{1}{2}\sqrt{2a}$.

C'est ce qu'on vérifie en posant

$$x=\tfrac{1}{2}\sqrt{2a}+u \quad \text{et} \quad y=\tfrac{1}{2}\sqrt{2a}-u\,;$$

car alors la seconde équation proposée devenant $\frac{1}{2}a-u^2=b$, on voit que le *maximum* de b répond à $u=0$; ce qui donne les valeurs précédentes.

Si b était donné et que a fût *variable*, le *minimum* de a serait $a=2b$, et on aurait $x=y=\sqrt{b}$, comme il serait aisé de le vérifier d'ailleurs.

283. *On veut creuser un réservoir d'eau à faces rectangulaires, qui ait un mètre de profondeur et dont la surface du fond vaille celle qui aurait a mètres de long sur un de large. Mais comme on désire que le mur qui revêtira le contour de ce réservoir, coûte le moins possible, on demande quelles doivent être pour cela, la longueur x et la largeur y du réservoir à creuser.*

Le mur qui revêtira le contour du réservoir, devant avoir partout un mètre de hauteur, et sa longueur étant égale au contour de la surface du fond, il est clair que pour que ce mur coûte le moins possible, il faut que sa longueur, et par conséquent le contour dont il s'agit, ait la plus petite valeur possible.

Or, soit $4c$ le contour : puisque x est sa longueur et y sa largeur, on aura évidemment

$$2x+2y=4c.$$

Mais la surface du fond ayant x mètres de long sur y mètres de large, équivaut à une surface qui aurait y fois plus de long sur y fois moins de large, c'est-à-dire xy mètres de long sur 1 de large : et puisque la surface du fond vaut aussi celle qui aurait a mètres de long sur 1 de large, il s'ensuit que

$$xy = a.$$

Cette équation et la précédente donnent

$$y = 2c - x,\quad 2cx - x^2 = a \quad \text{et} \quad x = c \pm \sqrt{(c^2 - a)} \cdots (1)$$

Comme a est donné et que le contour $4c$ peut être pris à volonté, on voit que la plus petite valeur de c, et par conséquent de $4c$, répond à $c^2 = a$; et il en résulte $c = \sqrt{a}$, $x = c = y = \sqrt{a}$. De sorte que la longueur et la largeur du réservoir à creuser, doivent être égales entre elles et à $\sqrt{a}$.

Si le contour $4c$ est donné et que la surface du fond soit *variable*, a sera aussi variable; et la formule (1) montre que la plus grande valeur de a est $a = c^2$; ce qui donne $x = c = y$. Ces valeurs résolvent donc ce problème : *Parmi les réservoirs à faces rectangulaires, qui ont un mètre de profondeur et qu'on peut entourer d'un mur de 4c mètres de long, trouver celui dont la surface du fond est la plus grande possible, et par conséquent celui qui contient le plus d'eau.*

284. Voici quelques problèmes, faciles à résoudre, d'après ce qui précède : Partager 24 en deux parties dont le produit soit le plus grand possible. (Les parties sont égales chacune à 12.)

Partager 18 en deux parties dont la somme des racines carrées soit la plus grande possible. (Les deux parties sont égales.)

Trouver deux nombres dont la somme soit la plus grande possible, lorsque 72 est la somme de leurs carrés. (Les deux nombres sont égaux chacun à 6.)

Trouver deux nombres dont la somme soit 14 et dont la somme des quotiens, obtenus en divisant chacun par l'autre, soit la moindre possible. (Les deux nombres valent 7 chacun.)

Partager le nombre donné a en deux parties telles, que leur différence divisée par la différence de leurs racines carrées, donne le plus grand quotient possible. (Les deux parties sont égales.)

Décomposer un produit donné a en deux facteurs positifs tels, que leur somme divisée par la différence de leurs racines carrées, donne le moindre quotient possible.

285. *Soit proposé de trouver la plus grande ou la plus petite valeur de* m *dans l'équation* $x^2 - 2x - 11 = 4mx - 5m^2$.

Pour cela, si l'on résout cette équation par rapport à x, on aura

$$x = 1 + 2m \pm \sqrt{12 + 4m - m^2}.$$

Or, si la variable était dans la partie négative sous le radical, il est clair que son *maximum* rendrait nul ce radical; et si elle était dans la partie positive seule, son *minimum* anéantirait le même radical. Mais ici la variable m se trouve dans la partie positive et dans la partie négative; on ignore donc encore dans quel cas il y a *maximum* ou *minimum* pour m. Voici comment on peut le trouver : la quantité sous le radical proposé étant variable et devant être positive ou nulle, pour que x soit réelle, on peut égaler cette quantité sous le radical à la quantité variable et positive u^2; ce qui donnera

$$12 + 4m - m^2 = u^2; \text{ d'où } m = 2 \pm \sqrt{16 - u^2}.$$

Or, quelque valeur positive ou négative qu'on donne à u, le carré u^2 sera toujours positif; donc $16 - u^2$ sera toujours moindre que 16. De sorte que la plus grande valeur du radical de m est 4, et répond à $u = 0$. Mais le radical ayant sa plus grande valeur, la somme $2 +$ *ce radical* sera la plus grande possible, et le reste $2 -$ *le radical* sera le moindre possible : d'où il suit, 1° que le maximum de m est $m = 2 + 4 = 6$ et donne $x = 13$; 2° que le minimum de m est $m = 2 - 4 = -2$ et fournit $x = -3$.

Au moyen de la méthode que nous venons d'employer, on trouve aisément le maximum ou le minimum de m, dans $x^2 + 4x + 4m = 2mx + 3$, ainsi que dans $x^2 + 4a^2 + 5m^2 = 2ax + 4mx$.

286. *Partager le nombre donné* a *en trois parties dont la somme des cubes soit la moindre possible.*

Soient x, y, z, les trois parties cherchées et m la somme de leurs cubes; on aura les deux équations

$$x + y + z = a \text{ et } x^3 + y^3 + z^3 = m.$$

Prenant la valeur de z dans la première, et substituant cette valeur dans la seconde, il viendra, toute réduction faite,

$$a^3 - 3a^2(x+y) + 3a(x^2 + 2xy + y^2) - 3xy(x+y) = m \ldots (1)$$

Résolvant cette équation par rapport à x, on trouve d'abord

$$x^2 - (a-y)x = \frac{m - (a-y)^3 - y^3}{3(a-y)},$$

puis $\quad x = \frac{1}{2}(a-y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4m-(a-y)^3-4y^3}{3(a-y)}}.$

Supposons que l'inconnue y ait la valeur qui répond au minimum de m; on voit que ce minimum rendra nulle la quantité sous le radical précédent, et donnera par conséquent

$$4m-(a-y)^3-4y^3=0 \quad \text{et} \quad x=\tfrac{1}{2}(a-y);$$

d'où $\quad m-2x^3-y^3=0 \quad \text{et} \quad 2x=a-y \ldots (2)$

Résolvant l'équation (1) par rapport à y, on verra de même que le minimum de m donne

$$m-2y^3-x^3=0 \quad \text{et} \quad 2y=a-x \ldots (3)$$

Les équations $2x=a-y$ et $2y=a-x$ fournissent $x=y=\frac{1}{3}a$; d'où la première équation proposée donne aussi $z=\frac{1}{3}a$. D'où il suit que, pour le minimum de m, les trois parties cherchées sont égales entre elles; et ce minimum est $\frac{1}{9}a^3$.

La valeur générale de x prouve que si m était donnée et a variable, le maximum de a conduirait aux équations (2). La valeur générale de y montre aussi que le maximum de a donne les équations (3). De sorte que, pour ce maximum, on a $x=y=z$. D'où il suit que *s'il faut trouver trois nombres tels, que la somme de leurs cubes étant un nombre donné* m, *la somme de ces trois nombres soit la plus grande possible, on devra prendre ces trois nombres égaux entre eux.* C'est ce qu'on vérifie en posant $x=\frac{1}{3}a+u$ et $y=\frac{1}{3}a-u$; car ces valeurs substituées dans l'équation (1), donnent

$$m=\tfrac{1}{9}a^3+2au^2.$$

Or, puisque les deux parties $\frac{1}{9}a^3$ et $2au^2$ doivent toujours donner la même somme m, il est clair que quand l'une $2au^2$ sera la moindre possible ou nulle, l'autre sera la plus grande possible; le maximum de $\frac{1}{9}a^3$ et conséquemment celui de a, répond donc à $u=0$; ce qui donne les valeurs trouvées par l'autre méthode.

287. Voici quelques problèmes à résoudre, d'après la première des méthodes que nous venons d'employer :

Décomposer le produit donné a^3 en trois facteurs positifs tels, qu'en ajoutant à chacun le même nombre b, la somme des carrés des trois sommes soit un minimum. (Les trois facteurs cherchés sont égaux.)

Partager le nombre donné a en trois ou quatre parties dont la somme des carrés soit un minimum. (Les parties cherchées sont égales entre elles.)

Trouver trois nombres positifs tels, que la somme de leurs carrés étant un nombre donné a, la somme de leurs produits deux à deux soit un maximum. (Les trois nombres cherchés sont égaux.)

Partager un nombre donné a en trois ou quatre parties dont le produit soit un maximum.

Décomposer le produit a^4 en quatre facteurs positifs dont la somme des produits deux à deux soit un minimum.

On veut faire construire un meuble à faces rectangulaires, qu'on puisse recouvrir avec un morceau d'acajou en forme de rectangle, ayant 40 palmes de long sur 10 de large. Comme les douze côtés du meuble seront recouverts de petites bandes d'argent, d'une largeur et d'une épaisseur données, on désire, pour diminuer les frais autant qu'il se peut, que la somme des douze côtés soit la moindre possible. Quelles doivent être être pour cela, la longueur x, la largeur y et la hauteur z du meuble à construire?

Nota. La formule qui montre quand une variable est à son minimum, montre aussi quand une autre variable est à son maximum, et réciproquement. On propose d'énoncer, dans les problèmes précédens, ceux qui sont relatifs aux nouvelles variables.

Principes sur les puissances et les racines.

288. On sait que la puissance m^{me} d'un monome a^v, est un produit de m facteurs égaux à ce monome (23). On indique cette puissance en écrivant $(a^v)^m$. On dit qu'une puissance est *paire* ou *impaire*, suivant que son exposant est un nombre *pair* ou *impair*.

289. *Les puissances des quantités positives sont toujours positives;* car ce sont des produits dont les facteurs peuvent s'écrire sans signes. Ainsi

$$(+a)^3 = aaa = a^3 \text{ et } (+a)^4 = aaaa = a^4.$$

290. *Les puissances paires des quantités négatives sont positives;* car chacune de ces puissances est le produit d'un nombre pair de facteurs négatifs (46). Par exemple,

$$(-a)^6 = -a \times -a \times -a \times -a \times -a \times -a = +a^6.$$

291. *Les puissances impaires des quantités négatives sont négatives;* car chacune de ces puissances est le produit d'un nombre impair de facteurs négatifs (46). C'est ainsi que

$$(-a)^5 = -a \times -a \times -a \times -a \times -a = -a^5.$$

292. Soit abc un produit de trois facteurs quelconques, ra-

tionnels ou irrationnels ; d'après ce qu'on a vu (219), il est clair qu'on aura

$$(abc)^4 = abcabcabcabc = aaaabbbbcccc = a^4b^4c^4.$$

En général, puisqu'on peut rapprocher les facteurs de même nom sans changer la valeur du produit proposé (219), il en résulte que la puissance m^{me} de abc, qui est un produit de m facteurs égaux à abc, sera le produit de m facteurs a, multiplié par le produit de m facteurs b, multiplié par le produit de m facteurs c ; elle sera donc $a^m \times b^m \times c^m$. Ainsi on a

$$(abc)^m = a^m b^m c^m.$$

Cette identité fait voir, 1° que *la puissance* m^{me} *d'un produit est égale au produit des puissances* m^{mes} *de ses facteurs* ; 2° que *le produit des puissances* m^{mes} *de plusieurs nombres est égal à la puissance* m^{me} *du produit de ces nombres.*

293. L'application de ce dernier principe fournit

$$\left(\frac{a}{c}\right)^m \times c^m = a^m ; \text{ d'où l'on tire } \left(\frac{a}{c}\right)^m = \frac{a^m}{c^m}.$$

Donc 1° pour *élever un quotient ou une fraction à une certaine puissance, il suffit d'élever chacun de ses termes à cette puissance ;* 2° *le quotient des puissances* m^{mes} *de deux nombres est égal à la puissance* m^{me} *du quotient de ces deux nombres.*

294. Cherchons maintenant à développer la puissance m^{me} du binome $x + a$; et pour cela, considérons d'abord les expressions

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$
$$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$
$$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4.$$

Il est clair qu'on peut écrire ces valeurs comme il suit :

$$(x+a)^2 = x^2 + \frac{2}{1}ax + \frac{2.1}{1.2}a^2$$

$$(x+a)^3 = x^3 + \frac{3}{1}ax^2 + \frac{3.2}{1.2}a^2x + \frac{3.2.1}{1.2.3}a^3$$

$$(x+a)^4 = x^4 + \frac{4}{1}ax^3 + \frac{4.3}{1.2}a^2x^2 + \frac{4.3.2}{1.2.3}a^3x + \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}a^4.$$

L'inspection attentive de ces valeurs conduit à penser que, quel que soit l'exposant m, entier et positif, on aura toujours

$$(x+a)^m = x^m + \frac{m}{1} a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} a^2 x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^3 x^{m-3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} a^4 x^{m-4} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5} a^5 x^{m-5} + \ldots + a^m \ldots (1)$$

En effet, pour abréger, représentons cette formule par

$$(x+a)^m = x^m + m a x^{m-1} + \mathrm{A} a^2 x^{m-2} + \mathrm{B} a^3 x^{m-3} + \mathrm{C} a^4 x^{m-4} + \mathrm{D} a^5 x^{m-5} + \ldots + a^m.$$

Multipliant de part et d'autre par $x+a$ et réunissant les multiplicateurs d'une même puissance de x, dans le second membre, on aura

$$(x+a)^{m+1} = x^{m+1} + (m+1) a x^m + (\mathrm{A}+m) a^2 x^{m-1} + (\mathrm{A}+\mathrm{B}) a^3 x^{m-2} + (\mathrm{B}+\mathrm{C}) a^4 x^{m-3} + (\mathrm{C}+\mathrm{D}) a^5 x^{m-4} + \ldots + a^{m+1}.$$

Substituant les valeurs de A, B, C, D, ..., et décomposant en facteurs, on trouvera successivement

$$\mathrm{A}+m = \frac{m(m-1)}{1.2} + m = \left(\frac{m-1}{1.2} + 1\right) m = \frac{(m+1)m}{1.2};$$

$$\mathrm{A}+\mathrm{B} = \frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} = \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3};$$

$$\mathrm{B}+\mathrm{C} = \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{1.2.3.4};$$

$$\mathrm{C}+\mathrm{D} = \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4};$$

et ainsi de suite. Avec ces valeurs, il vient

$$(x+a)^{m+1} = x^{m+1} + (m+1) a x^m + \frac{(m+1)m}{1.2} a^2 x^{m-1} + \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3} a^3 x^{m-2} + \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{1.2.3.4} a^4 x^{m-3} + \ldots + a^{m+1}.$$

Cette formule est précisément ce que devient la formule (1), quand on y change m en $m+1$. D'où il suit que si la formule (1) est exacte pour une certaine valeur entière de l'exposant m, elle sera vraie pour une valeur plus grande d'une unité. Or, la formule (1) est démontrée pour $m=4$; elle est donc vraie aussi pour $m=5$. Etant vraie pour $m=5$, elle aura donc encore lieu pour $m=6$, puis pour $m=7$, $m=8$, et en général, pour toutes les valeurs entières et positives de l'exposant m.

La formule (1) est nommée le *binome de Newton* (*); elle fournit plusieurs conséquences importantes, que nous développerons plus bas.

295. *Lorsqu'un nombre* a *surpasse l'unité, sa puissance* m^{me} *peut devenir aussi grande qu'on veut, en prenant* m *suffisamment grand.*

En effet, puisque a surpasse l'unité, on a nécessairement $a = 1 + x$, d'où $a^m = (1 + x)^m = 1 + mx +$ etc.; ce qui donne $a^m > 1 + mx$. Or, m pouvant avoir une valeur aussi grande qu'on voudra, il en est de même de $1 + mx$, et à plus forte raison, de a^m. On voit même que si m était infini, a^m le serait aussi, et qu'on aurait $a^\infty = \infty$.

296. *Lorsqu'un nombre* a *est moindre que l'unité, sa puissance* m^{me} *peut devenir aussi petite qu'on veut, en prenant* m *suffisamment grand.*

En effet, le cas le plus défavorable est celui où $a = \frac{v}{v+1}$. Divisant les deux termes par v et faisant $d = 1 + \frac{1}{v}$, on aura $a = \frac{1}{d}$ et $a^m = \frac{1}{d^m}$ (293). Or $d > 1$; donc d^m est aussi grand qu'on veut, en prenant m suffisamment grand (295). Donc au contraire, $\frac{1}{d^m}$ ou a^m est aussi petit qu'on veut, et peut devenir moindre que toute quantité donnée, quelque petite qu'elle soit. Enfin, si m est infini, d^m le sera aussi (295); $\frac{1}{d^m}$ ou a^m sera donc infiniment petit et pourra être regardé comme nul. D'où il suit que si $a < 1$, on aura $a^\infty = 0$, principe qui nous servira dans la suite.

297. La *racine* r^{me} d'un nombre est un autre nombre qui,

(*) Newton est le premier qui ait fait connaître la formule du binome: il n'en a pas donné de démonstration; mais il paraît être arrivé à cette formule par la méthode qui nous a conduits à la formule (1). « Cette manière de s'élever aux lois générales, par la considération de cas particuliers, se nomme *induction*. Elle est la source de presque toutes les découvertes dans l'analyse et dans la nature. Mais en faisant usage de cette méthode, il faut éviter de généraliser trop promptement; car il arrive quelquefois qu'une loi, qui se soutient dans un assez grand nombre de valeurs particulières, est démentie par les valeurs suivantes. Ainsi la méthode d'induction, quoique excellente pour découvrir des vérités générales, ne doit pas dispenser de les démontrer avec rigueur. »

élevé à la puissance r^{me}, reproduit le premier. Ainsi, x désignant la racine r^{me} de a, on aura $x^r = a$ ou $a = x^r$; c'est-à-dire que tout nombre est la puissance r^{me} de sa racine r^{me}.

298. On indique la racine r^{me} de a, en plaçant devant a le signe $\sqrt{\ }$, et en mettant entre les branches de ce signe, le nombre r qui marque l'*ordre* ou le *degré* de la racine à extraire. Ainsi, $\sqrt[r]{a}$ signifie : *racine r^{me} de a* : c'est un *radical du r^{me} degré*, dont r est l'*indice*. Le nombre r est aussi l'*indice* ou l'*exposant* de la racine indiquée.

Quand l'indice du radical n'est pas écrit, il est 2; de sorte que $\sqrt{7}$ désigne la racine carrée de 7, aussi bien que $\sqrt[2]{7}$. La racine est dite *paire* ou *impaire*, suivant que son indice est un nombre pair ou impair.

299. D'après la définition des racines, il est clair que

$$(\sqrt[r]{a})^r = a = \sqrt[r]{a^r}.$$

300. *Toute racine paire d'une quantité positive doit être précédée du double signe* $\pm$. Par exemple,

$$\sqrt[4]{256} = \pm 4,\ \sqrt[6]{64} = \pm 2,\ \sqrt[8]{1} = \pm 1, \text{ etc.}$$

En général, r étant un nombre pair, on a vu (290) que $(\pm a)^r = a^r$. Mais puisqu'il faut élever $\pm a$ à la puissance r^{me} pour avoir a^r, il s'ensuit que $\pm a$ est la racine r^{me} de a^r (297). Donc, etc.

301. *Les racines impaires des quantités n'ont que le signe de ces quantités.* Ainsi on a

$$\sqrt[3]{125} = 5,\ \sqrt[5]{-243} = -3,\ \sqrt[7]{-128} = -2, \text{ etc.}$$

En effet, r désignant un nombre impair, on sait (291) que $(\pm a)^r = \pm a^r$. Par conséquent (297) $\sqrt[r]{(\pm a^r)} = \pm a$.

302. *Les racines paires des quantités négatives n'existent pas ou sont imaginaires.* Car il n'y a aucune quantité qui, élevée à une puissance paire, donne un résultat négatif (290). Par exemple, il n'existe aucun monome dont la puissance 6^{me} donne -64, puisque toute puissance paire d'une quantité positive ou négative est positive (290); la racine 6^{me} de -64 est donc impossible.

Ainsi, $\sqrt{-1}$, $\sqrt[4]{-16}$, $\sqrt[6]{-1}$, $\sqrt[8]{-a^8}$, etc., sont des symboles d'opérations inexécutables, nommés expressions imaginaires, et qu'on soumet aux règles du calcul des nombres, pour conserver à l'algèbre toute la généralité dont elle est susceptible (225).

303. Il résulte des nos 299 et 292, que si l'on élève le produit $\sqrt[r]{a}\sqrt[r]{b}\sqrt[r]{c}$ à la puissance r^{me}, on aura abc; par conséquent (297)

$$\sqrt[r]{a}\sqrt[r]{b}\sqrt[r]{c}=\sqrt[r]{abc}.$$

Comparant la seconde de ces expressions à la première, et réciproquement, on verra, 1° que la racine r^{me} d'un produit est égale au produit des racines r^{mes} de ses facteurs; 2° que le produit des racines r^{mes} de plusieurs nombres est égal à la racine r^{me} du produit de ces nombres. C'est ainsi qu'on a

$$\sqrt[3]{64.729}=\sqrt[3]{64}\sqrt[3]{729}=4.9=36,$$
$$\sqrt[4]{54}\sqrt[4]{24}=\sqrt[4]{54.24}=\sqrt[4]{81.16}=3.2=6.$$

304. Le dernier des deux principes précédens donne

$$\sqrt[r]{\frac{a}{c}}\times\sqrt[r]{c}=\sqrt[r]{a}; \text{ d'où } \sqrt[r]{\frac{a}{c}}=\frac{\sqrt[r]{a}}{\sqrt[r]{c}}.$$

Donc, 1° la racine r^{me} d'un quotient ou d'une fraction s'obtient en divisant la racine r^{me} du dividende par celle du diviseur; 2° le quotient des racines r^{mes} des deux nombres est égal à la racine r^{me} du quotient de ces deux nombres. Ainsi

$$\sqrt[5]{243:32}=\sqrt[5]{243}:\sqrt[5]{32}=3:2=\tfrac{3}{2},$$
$$\sqrt[3]{162}:\sqrt[3]{6}=\sqrt[3]{162:6}=\sqrt[3]{27}=3.$$

305. *Lorsque la racine* r^{me} *d'un nombre entier* a *n'est pas un nombre entier, elle est incommensurable.* Car si la racine r^{me} de a pouvait être exprimée exactement par une fraction irréductible $\frac{n}{d}$, on aurait successivement

$$\sqrt[r]{a}=\frac{n}{d},\ a=\frac{n^r}{d^r} \text{ et } ad^{r-1}=\frac{n^r}{d}.$$

Or d est premier avec n, par hypothèse; donc d est premier avec chacun des facteurs du produit n^r; d ne divisera donc pas ce produit et ne donnera pas le nombre entier ad^{r-1} au quotient. Ainsi la dernière égalité précédente est impossible; il en est donc de même de la première. De sorte que la racine r^{me} de a n'est pas égale à une fraction : déjà elle n'est pas égale à un nombre entier; donc elle ne saurait être exprimée exactement par aucun nombre ; elle est par conséquent incommensurable, et ne peut s'obtenir que par approximation.

306. *La racine* r^{me} *d'une fraction irréductible* $\frac{a}{c}$ *est incommensurable, dès que l'un des deux termes de cette fraction n'est pas une puissance* r^{me} *parfaite.* C'est ce qu'on démontre en raisonnant tout-à-fait comme au n° 217.

De l'extraction des racines cubiques.

307. On sait (23) que le cube d'un nombre est le produit de trois facteurs égaux à ce nombre, ou le produit de ce même nombre par son carré. Ainsi les cubes des neuf premiers nombres entiers, sont : 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512 et 729.

Le cube de 10 est 1000, le cube de 100 est 1000000, le cube de 1000 est 1000000000, et en général, le cube de 1 *suivi de* n *zéros* est 1 *suivi de* 3n *zéros.*

Le cube d'un nombre composé de deux parties a et x est donné par la formule $(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$ (52). Si $x = 1$, on aura $(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$.

308. La *racine troisième* ou la *racine cubique* d'un nombre a est un autre nombre x qui, élevé au cube, reproduit le 1er a. De sorte que $x^3 = a$ ou $a = x^3$, c'est-à-dire que *tout nombre est le cube de sa racine cubique*, et contient par conséquent le cube du premier chiffre, celui des 2, des 3, des 4, ..., premiers chiffres de cette racine. Et comme le produit a ou x^3 ne peut augmenter que quand l'un de ses facteurs x augmente, on voit que plus un nombre a est grand, plus sa racine cubique x est grande, et réciproquement.

309. *La racine cubique d'un nombre entier a toujours autant de chiffres que ce nombre contient de tranches de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche, excepté la première à gauche, qui pourrait avoir moins de trois chiffres.*

Soit le nombre de quatre tranches $a = 911{,}456{,}789{,}381$. Il est évident que $a > 1000000000$ et $a < 1000000000000$. Extrayant la racine cubique de part et d'autre, il viendra $\sqrt[3]{a} > 1000$ et $\sqrt[3]{a} < 10000$. La racine cubique du nombre proposé a n'a donc que quatre chiffres, c'est-à-dire autant que ce nombre contient de tranches.

310. *Le plus grand cube contenu dans les* p *premières tranches du nombre proposé, est le cube des* p *premiers chiffres de la racine cubique de ce nombre.*

Soit le nombre $a = 61,782,311,415,567$. Puisque ce nombre a cinq tranches de chiffres, sa racine cubique aura cinq chiffres. Soit x les trois premiers chiffres à gauche de cette racine; x sera donc un nombre de *centaines*, car il y a deux chiffres après; son cube x^3 sera donc un nombre de *millions*, et ne pourra se trouver que dans les trois premières tranches, qui expriment aussi des *millions*. De plus, comme la racine cubique n'a que x centaines, elle est moindre que $(x+1)$ centaines; donc son cube, ou le nombre proposé a, est moindre que $(x+1)^3$ millions; les millions de ce nombre a, c'est-à-dire ses trois premières tranches ne contiennent donc pas $(x+1)^3$. D'où il suit que le plus grand cube contenu dans les trois premières tranches est x^3, c'est-à-dire le cube des trois premiers chiffres x de la racine cubique. On verra de même que le plus grand cube contenu dans les deux premières tranches, est le cube des deux premiers chiffres de la racine, et ainsi des autres.

311. Il est maintenant facile d'extraire la racine cubique d'un nombre entier, tel que 401947272. Pour cela, on partage ce nombre en tranches de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche; puis l'on dispose et l'on effectue l'opération comme il suit :

401,947,272	738. Racine.	213	2198
343		3	8
	147 ou $3(7)^2$		
589,47		639 ... R	17584
46017	15339 ... S	147	15987
129302,72	639 ... R	15339 ... S	1616,84
12930272	9 ... x^2	3	8
0	15987 ... $3(73)^2$	46017 ... Sx	12930272.

1° On sait (310) que le plus grand cube 343 contenu dans la première tranche 401, est le cube du premier chiffre de la racine cubique; de sorte que ce premier chiffre est 7. Soustrayant 343 de 401, il reste 58; à côté de ce reste abaissant la seconde tranche 947, il vient 58947. Mais le plus grand cube contenu dans les deux premières tranches, étant celui des deux premiers chiffres a et x de la racine cubique (310), ce plus grand cube est $(a+x)^3$ ou $a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$. Et puisqu'on vient de soustraire de ces deux tranches le cube 343 ou a^3 du premier chiffre, le reste 58947 doit renfermer $3a^2x+3ax^2+x^3$. Or, le premier chiffre a exprime des dizaines par rapport au second x; donc $3a^2x$ est un nombre de centaines, et ne peut se trouver que dans les centaines du reste 58947. Divisant donc ces 589 centaines par $3a^2$ ou 147, triple carré du premier chiffre 7 ou a de la racine, on aura le second chiffre x au quotient; car sauf les centaines fournies par le restant du cube de la racine, on divisera un produit de $3a^2x$ par l'un de ses deux facteurs $3a^2$: le quotient serait bien 4, mais à cause des centaines fournies, il ne faut mettre que 3 (*).

2° Pour vérifier si le quotient 3 est réellement le second chiffre x de la racine cubique cherchée, il faut soustraire du reste 58947 la quantité qu'il doit renfermer, savoir : $3a^2x+3ax^2+x^3$, ou $[3a^2+(3a+x)x]x$; ce qui se réduit à Sx, en posant $R=(3a+x)x$ et $S=3a^2+R$. Or, a exprime des dizaines par rapport à x et $3a^2$ des centaines; ainsi, pour vérifier la racine trouvée 73, on écrit le second chiffre x ou 3 à côté du triple 21 du premier a ou 7, on multiplie le résultat par le second chiffre 3, on ajoute le produit R à 147 centaines, c'est-à-dire aux centaines marquées par le triple carré $3a^2$ du 1er chiffre 7, on multiplie la somme S par le second chiffre 3, et l'on soustrait le produit 46017 ou Sx du reste 58947; ce qui donne 12930 pour nouveau reste. Mais en opérant ainsi, on soustrait $3a^2x+3ax^2+x^3$ du reste 58947 des deux premières tranches, et par conséquent de ces deux tranches : et comme déjà on en a soustrait a^3, il s'ensuit qu'en tout on a soustrait des deux premières tranches, $a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$, ou $(a+x)^3$, c'est-à-dire le cube de la racine trouvée 73; et il faut comparer le reste 12930 au trinome $3(73)^2+3(73)+1$.

(*) Pour vérifier le quotient 3, on pourrait soustraire des deux premières tranches 401947 le cube de la racine trouvée 73; car si cette soustraction est possible et que les deux premières tranches soient moindres que le cube de 74, il est clair que le cube de 73 sera le plus grand de tous ceux contenus dans les deux premières tranches, et par conséquent 73 exprimera les deux premiers chiffres de la racine cherchée (310). Mais cette vérification exige beaucoup plus de calculs que celle que nous employons dans le texte.

Or, on forme aisément ce trinome, en observant que $R = 3ax + x^2$ et que $S = 3a^2 + 3ax + x^2$; car en ajoutant x^2 à la somme des deux nombres R et S, déjà calculés, on verra que $S + R + x^2 = 3(a+x)^2 =$ le triple carré de la racine trouvée 73. Si donc on fait la somme des trois nombres S, R et x^2, on verra que $3(73)^2 = 15987$. Et comme $3(73) + 1 = 220$, il s'ensuit que le trinome $3(73)^2 + 3(73) + 1$ se réduit à 16207. Ainsi après avoir soustrait $(73)^3$ hors des deux premières tranches, le reste 12930 est moindre que 16207 ou $3(73)^2 + 3(73) + 1$; donc les deux premières tranches elles-mêmes sont moindres que $(73)^3 + 3(73)^2 + 3(73) + 1$, ou que $(73+1)^3$, ou enfin que $(74)^3$. Par conséquent $(73)^3$ est le plus grand cube contenu dans les deux premières tranches. Et comme ce plus grand cube est celui des deux premiers chiffres de la racine (310), il s'ensuit que 73 exprime ces deux premiers chiffres (*).

3° On aura le troisième chiffre, en recommençant les raisonnemens pour le second. Ainsi abaissant la troisième tranche 272 à côté du reste 12930, ce qui donnera 12930272, et divisant 129302 par 15987, triple carré des deux premiers chiffres 73 de la racine, le quotient 8 exprimera le troisième chiffre, ou un chiffre plus grand. Pour vérifier ce quotient 8, on l'écrit à côté du triple 219 des deux premiers chiffres 73, on multiplie le tout par 8, on ajoute au produit 17584, les centaines marquées par le triple carré des deux premiers chiffres, c'est-à-dire 15987 centaines, on multiplie la somme 1616284 par 8 et l'on soustrait le produit 12930272 du reste des trois premières tranches. De cette manière on soustrait de ces trois tranches $3(73)^2 . 8 + 3(73) . 8^2 + 8^3$: et comme déjà on en a soustrait $(73)^3$, il s'ensuit qu'on a soustrait de ces tranches ou du nombre proposé, $(73)^3 + 3(73)^2 . 8 + 3(73) . 8^2 + 8^3$, ou $(738)^3$, c'est-à-dire le cube de la racine trouvée 738 : donc, puisqu'il ne reste rien,

(*) Si le reste était $=$ ou $> 3(73)^2 + 3(73) + 1$, les deux premières tranches seraient $=$ ou $> (74)^3$. Et comme ces tranches expriment des mille, le nombre proposé serait $> (74)^3$ mille, ou $> (740)^3$; donc la racine cubique de ce nombre vaudrait au moins 740 ou 74 dizaines, et la racine trouvée 73 serait trop petite d'une unité au moins. En général, la racine trouvée n'est exacte en nombre entier, que quand le reste est moindre que le triple carré de cette racine trouvée, plus trois fois cette même racine, plus l'unité.

cette racine est exactement la racine cubique du nombre proposé 401947272.

312. Le résumé des calculs précédens fait voir que, pour extraire la racine cubique d'un nombre entier, il faut, après l'avoir partagé en tranches de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche, prendre la racine cubique du plus grand cube contenu dans la première tranche, et cette racine sera le premier chiffre de la racine cherchée. Soustraire le cube de ce premier chiffre hors de la première tranche, abaisser la seconde tranche à côté du reste, séparer les deux derniers chiffres à droite, par une virgule, et diviser la partie à gauche par le triple carré du premier chiffre de la racine; le quotient exprimera le second chiffre, ou un chiffre plus grand. Pour vérifier ce quotient, on l'écrit à côté du triple du premier chiffre, on multiplie le tout par le même quotient, on ajoute au produit les centaines marquées par le triple carré du premier chiffre, on multiplie la somme par le quotient, et l'on soustrait le produit hors du reste de la première tranche réuni à la seconde : le nouveau reste doit être moindre que le triple carré de la racine trouvée, plus trois fois cette même racine, plus l'unité. A côté de ce second reste, on abaisse la troisième tranche, on sépare les deux derniers chiffres à droite, on divise la partie à gauche par le triple carré des deux chiffres trouvés à la racine, et le quotient, vérifié comme le précédent, exprime le troisième chiffre. On continuera le même procédé jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de tranche à abaisser.

Au moyen de cette règle, on trouvera que $\sqrt[3]{8755000000} = 2061$, à moins d'une unité près, et que $\sqrt[3]{671507968841} = 8756$, à moins d'une unité près. Les élèves doivent répéter sur ces deux exemples, les raisonnemens que nous avons employés dans l'opération précédente (311). Et il est aisé de voir pourquoi il faut commencer l'extraction de la racine cubique par la gauche, plutôt que par la droite.

313. *Pour avoir la racine cubique d'une fraction, il suffit de prendre la racine cubique de chacun de ses termes* (303).

C'est ainsi que $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$ et que $\sqrt[3]{\frac{a^3}{c^3}} = \frac{a}{c}$.

Effectivement, si on élève chaque résultat au cube, on retrouve le nombre qui l'a donné.

314. Dès que l'un des termes de la fraction n'est pas un *cube parfait*, c'est-à-dire n'est pas le cube exact d'un nombre entier, la règle précédente ne doit pas s'appliquer, parce qu'elle ne donnerait, le plus souvent, qu'une approximation insuffisante; et il faudrait même, pour savoir jusqu'à quel point on est approché de la racine cubique cherchée, rendre le dénominateur un cube parfait, en multipliant les deux termes de la fraction par le carré de ce dénominateur. C'est ainsi qu'on aura

$$\sqrt[3]{\frac{7}{9}}=\sqrt[3]{\frac{567}{9^3}}=\frac{1}{9}\sqrt[3]{567}=\frac{8}{9}, \text{ à moins de } \frac{1}{9} \text{ près.}$$

315. Si l'on veut avoir la racine cubique d'un nombre quelconque a, à moins de $\frac{1}{n}$ près, il faudra multiplier ce nombre a par n^3, puis prendre la racine cubique b du plus grand cube b^3 contenu dans la partie entière du résultat an^3 et donner à cette racine b le nombre n pour dénominateur. De sorte que $\sqrt[3]{a}=\frac{b}{n}$, à moins de $\frac{1}{n}$ près.

En effet, puisque b est la racine cubique du plus grand cube b^3 contenu dans la partie entière de an^3, et par conséquent dans an^3, cette racine b ne peut être augmentée que d'une quantité $x<1$, pour donner la véritable racine; on aura donc

$$\sqrt[3]{an^3}=b+x\,;\ \text{d'où (303) } n\sqrt[3]{a}=b+x, \text{ et } \sqrt[3]{a}=\frac{b}{n}+\frac{x}{n}.$$

Ainsi en prenant $\frac{b}{n}$ pour la racine cubique de a, l'erreur est $\frac{x}{n}$: et puisque $x<1$, cette erreur est moindre que $\frac{1}{n}$; on a donc effectivement $\sqrt[3]{a}=\frac{b}{n}$, à moins de $\frac{1}{n}$ près, comme on l'a trouvé en appliquant la règle proposée.

316. Au moyen de cette règle, on pourra toujours trouver un nombre aussi approché qu'on voudra de la racine cubique d'un nombre donné. Par exemple, cherchons la racine cubique de 2,7, à moins d'un centième près. Il faut donc multiplier 2,7 par le cube de 100, c'est-à-dire par 1000000, ce qui donne 2700000; puis extraire la racine cubique du plus grand cube contenu dans la partie entière du résultat, c'est-à-dire dans 2700000, ce qui fournit 139; enfin, donner à cette racine 139 le nombre 100 pour dénominateur, ce qui se fait en séparant deux chiffres décimaux sur sa droite, et l'on a ainsi $\sqrt[3]{2,7}=$

1,39, à moins d'un centième près, comme on peut le vérifier d'ailleurs, en observant que $2,7 < (1,40)^3$ et que $2,7 > (1,49)^3$.

D'après la même règle, on trouve : $\sqrt[3]{7\frac{3}{11}} = 1,937$, à moins d'un millième près ; $\sqrt[3]{0,6715079688437} = 0,8756$, à moins d'un dimillième près, et $\sqrt[3]{67} = 4$, à moins de $\frac{1}{14}$ près.

317. Lorsque le nombre proposé a plus de deux tranches de chiffres, on peut achever l'extraction de la racine cubique par la simple division. En effet, soit k un nombre dont les n derniers chiffres de la racine cubique sont à trouver ; soit x ces n derniers chiffres et a ceux déjà calculés ; a est donc un nombre significatif suivi de n zéros et vaut $a.10^n$; on a par conséquent $\sqrt[3]{k} = a.10^n + x$; d'où l'on tire $k = a^3.10^{3n} + 3a^2x.10^{2n} + 3ax^2.10^n + x^3$, et

$$x = \frac{k - a^3.10^{3n}}{3a^2.10^{2n}} - \left(\frac{1}{a.10^n} + \frac{x}{3a^2.10^{2n}}\right)x^2 \ldots (1)$$

Pour que le dernier terme du second membre soit < 1, il faut que a ait au moins un chiffre de plus que x, c'est-à-dire $(n+1)$ chiffres. Dans ce cas, puisque a renferme au moins $n+1$ chiffres, on a $a > 10^n$. D'ailleurs, puisque x n'a que n chiffres, la plus grande valeur de x est $x = 10^n - 1$. Prenant donc la plus grande valeur de x et la plus petite valeur de a, qui est 10^n ; on verra que le second terme de (1) aura sa plus grande valeur et que cette plus grande valeur est < 1. Ainsi dans tous les cas, on a

$$x = \frac{k - a^3.10^{3n}}{3a^2.10^{2n}}, \text{ à moins d'une unité près.}$$

Donc, puisque a renferme plus de chiffres que x, on voit que s'il reste à trouver, dans la racine cubique, moins de chiffres qu'il n'y en a de calculés, on achevera l'extraction en divisant le reste $k - a^3.10^{3n}$ par le triple carré de la racine trouvée a suivi de deux fois autant de zéros qu'il y a de chiffres à déterminer, et en poussant le quotient jusqu'aux unités : alors on aura la racine cubique du nombre proposé, à moins d'une unité près de l'ordre le moins élevé de cette racine. C'est ainsi qu'on trouve que la racine cubique du nombre 5264627832723456 est 173962, en nombre entier (*).

(*) Par là on voit que si la racine cubique doit avoir $2n+1$ chiffres, la valeur des n chiffres à droite du nombre proposé n'influera jamais sur la valeur entière de la racine cubique de ce nombre.

318. Maintenant que nous savons extraire la racine cubique des nombres, indiquons les principes pour trouver celle des polynomes.

Si l'on développe $(a+b+c+d)^3$, comme le cube d'un binome dont $a+b+c$ est le premier terme ; que dans le résultat, on développe $(a+b+c)^3$, comme le cube d'un binome dont $a+b$ est le premier terme, et qu'enfin, dans le nouveau résultat, on remplace $(a+b)^3$ par sa valeur, on verra que

$$(a+b+c+d)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a+b)^2c+ \\ 3(a+b)c^2+c^3+3(a+b+c)^2d+3(a+b+c)d^2+d^3.$$

Cette formule conduit à un énoncé général, au moyen duquel on trouve le cube d'un polynome beaucoup plus simplement que par deux multiplications successives.

319. *Après avoir soustrait d'un polynome proposé le cube des* N *premiers termes de sa racine cubique ordonnée, si l'on divise le premier terme du reste* R, *aussi ordonné, par le triple carré du premier terme de cette racine, le quotient sera le* $(N+1)^{me}$ *terme de la même racine.* C'est ce qu'on démontre comme au n° 232.

320. De là il est aisé de conclure, que pour extraire la racine cubique d'un polynome donné, il faut, après avoir ordonné ce polynome, extraire la racine cubique de son premier terme, et cette racine sera le premier terme de la racine cubique cherchée. Soustrayant du polynome le cube de ce premier terme et divisant le premier terme du reste par le triple carré du terme trouvé à la racine, le quotient en exprimera le second terme. Après avoir soustrait du polynome proposé le cube des deux premiers termes de la racine, on divisera le premier terme du reste ordonné par le triple carré du premier terme de la même racine, et le quotient sera le troisième terme. Soustrayant du polynome le cube des trois termes trouvés à la racine, et continuant le même procédé, on aura le quatrième terme, le cinquième, etc.

D'après cette règle, si l'on a le polynome

$$a^6-9a^5x+21a^4x^2+9a^3x^3-42a^2x^4-36ax^5-8x^6,$$

on verra que sa racine cubique est $a^2-3ax-2x^2$. De même u^3-2u^2+3u-1 est la racine cubique du polynome

$$u^9-6u^8+21u^7-47u^6+75u^5-84u^4+66u^3-33u^2+9u-1.$$

De l'extraction des racines des nombres.

321. Lorsqu'on sait extraire les racines carrées et les racines cubiques, on peut trouver assez facilement les racines *quatrièmes*, les racines *sixièmes*, les racines *huitièmes*, les racines *neuvièmes*, et même les racines *douzièmes*. En effet, la racine quatrième s'obtient en prenant la racine carrée de la racine carrée du nombre proposé ; car $\sqrt{(\sqrt{a^4})} = \sqrt{a^2} = a = \sqrt[4]{a^4}$.

La racine 6^{me} se trouve en prenant la racine cubique de la racine carrée du nombre ; car $\sqrt[3]{(\sqrt{a^6})} = \sqrt[3]{a^3} = a = \sqrt[6]{a^6}$.

On verra de même que la racine 8^{me} s'obtient par trois extractions successives de racines carrées ; la racine 9^{me} par deux extractions de racines cubiques, et la racine 12^{me}, par deux extractions de racines carrées suivies d'une extraction de racine cubique.

322. Comme l'extraction des racines exige que l'on connaisse les puissances des neuf premiers nombres entiers, voici les puissances de ces nombres, depuis la quatrième jusqu'à la septième, inclusivement :

1, 16, 81, 256, 625, 1296, 2401, 4096, 651 ;
1, 32, 243, 1024, 3125, 7776, 16807, 32768, 59049 ;
1, 64, 729, 4096, 15625, 46656, 117649, 262144, 531441 ;
1, 128, 2187, 16384, 78125, 279936, 823543, 2097152, 4782969.

323. Puisque le produit a toujours autant de zéros à sa droite qu'il s'en trouve à la suite de tous ses facteurs, il s'ensuit que la puissance r^{me} de 1 *suivi de* n *zéros* est 1 *suivi de* nr *zéros*, et que réciproquement, la racine r^{me} de 1 *suivi de* nr *zéros* est 1 *suivi de* n *zéros*.

324. *La racine* r^{me} *d'un nombre* a *contient toujours autant de chiffres que ce nombre renferme de tranches de* r *chiffres chacune, en allant de droite à gauche, excepté la première à gauche qui peut avoir moins de* r *chiffres.*

Soit n le nombre de tranches ; le nombre a contiendra donc nr chiffres, au plus, et $nr - r + 1$ chiffres, au moins ; a sera donc plus grand que le plus petit nombre de $nr - r + 1$ chiffres, qui est 1 *suivi de* nr — r *zéros*, et qu'on désigne, pour abréger, par $1\,(nr - r)\,0$; on aura par conséquent $a > 1\,(nr - r)\,0$. Extrayant la racine r^{me} de part et d'autre, on aura $\sqrt[r]{a} > 1\,(n - 1)\,0$. Or, $1\,(n - 1)\,0$ est le moindre nombre de n chiffres ; donc la racine r^{me} de a, qui est plus grande, aura au moins n chiffres. Mais elle n'en aura pas plus ; car si elle avait $n + 1$ chiffres, elle serait au moins $1\,(n)\,0$; donc sa puissance r^{me}, ou le nombre proposé a, serait au moins $1\,(nr)\,0$; ce nombre aurait donc $nr + 1$ chiffres ; ce qui est absurde, puisqu'il a nr chiffres, au plus. Donc la racine r^{me} de a n'aura que n chiffres, c'est-à-dire autant que ce nombre a de tranches.

325. *La plus grande puissance* r^{me} *contenue dans les* p *premières tranches du nombre proposé est la puissance* r^{me} *des* p *premiers chiffres de la racine* r^{me} *de ce nombre.*

Supposons que le nombre proposé renferme $p + q$ tranches de chiffres ; sa racine r^{me} aura $p + q$ chiffres (324). Soit x les p premiers chiffres à gauche de cette racine ; ces p premiers chiffres seront donc un nombre significatif x *suivi de* q *zéros*, car il y a q chiffres après ; leur puissance r^{me} sera donc un nombre significatif x^r *suivi de* qr *zéros* ; cette puissance r^{me} x^r ne peut donc se trouver que dans les p premières tranches, qui sont aussi un nombre significatif *suivi de* qr *zéros*, car il y a q tranches de r chiffres après. Ainsi x^r, puissance r^{me} des p premiers chiffres de la racine, se trouve dans les p premières tranches. De plus, je dis que x^r est la plus grande puissance r^{me} contenue dans les mêmes tranches; car si $(x+1)^r$ pouvait s'y trouver, $(x+1)^r$ serait un nombre *suivi de* qr *zéros*, comme appartenant à un nombre *suivi de* qr *zéros*; et le nombre proposé a, qui est plus grand que ses p premières tranches, serait plus grand, à plus forte raison, que le nombre $(x+1)^r\,(qr)\,0$ contenu dans ces p tranches; on aurait donc $a>(x+1)^r\,(qr)\,0$ et $\sqrt[r]{a}>(x+1)\,(q)\,0$. La racine r^{me} de a aurait donc au moins $x+1$ unités suivies de q zéros; ce qui est absurde, puisqu'on a désigné par x toutes les unités de cette racine qui sont suivies de q zéros. Donc réellement, x^r est la plus grande puissance r^{me} contenue dans les p premières tranches. On voit donc que la plus grande puissance r^{me} contenue dans les p premières tranches du nombre proposé, est x^r, c'est-à-dire la puissance r^{me} des p premiers chiffres de la racine r^{me} de ce nombre.

326. Nous pouvons maintenant trouver comment on calcule la racine r^{me} d'un nombre entier donné. Partageons d'abord ce nombre en tranches de r chiffres, de droite à gauche : la plus grande puissance r^{me} contenue dans la première tranche sera celle du premier chiffre de la racine cherchée (325); donc la racine r^{me} de cette plus grande puissance r^{me} exprimera le premier chiffre lui-même.

Supposons qu'on ait les p premiers chiffres; ôtons leur puissance r^{me} des p premières tranches du nombre, et à côté du reste, abaissons la $(p+1)^{me}$; il viendra un nombre M. Or, la plus grande puissance r^{me} contenue dans les $(p+1)$ premières tranches, est la puissance r^{me} des $p+1$ premiers chiffres de la racine (325), et peut se représenter par $a^r+ra^{r-1}x+\dots+x^r$, a désignant les p premiers chiffres de la racine et x le $(p+1)^{me}$. Et puisqu'on vient de soustraire de ces $p+1$ premières tranches, la puissance r^{me} des p premiers chiffres, ou a^r, le reste M doit renfermer $ra^{r-1}x+\frac{1}{2}r(r-1)a^{r-2}x^2+\text{etc.}$ Mais les p premiers chiffres a de la racine désignent des dizaines par rapport au $(p+1)^{me}\,x$; donc $ra^{r-1}x$ exprimera des unités *suivies de* $(r-1)$ *zéros*, et ne pourra se trouver que dans les unités de même ordre de M, c'est-à-dire dans la partie de M qui est à gauche de ses $r-1$ derniers chiffres. Divisant donc cette partie à gauche par ra^{r-1}, c'est-à-dire par r fois la puissance $(r-1)^{me}$ des p premiers chiffres a de la racine, on aura très-probablement le $(p+1)^{me}\,x$ au quotient; car sauf la retenue, on divisera un produit par l'un de ses deux facteurs.

Cependant, comme le quotient pourrait surpasser le $(p+1)^{me}$ chiffre, il est nécessaire de vérifier ce quotient, en retranchant des $p+1$ premières tranches du nombre proposé la puissance r^{me} de la racine trouvée u; car si la soustraction est possible et que les $(p+1)$ premières tranches soient moindres que $(u+1)^r$, il est visible que u^r sera la plus grande puissance r^{me} contenue dans ces $p+1$ premières tranches; u exprimera par conséquent les $p+1$ premiers chiffres de la racine cherchée (325). Mais si les $(p+1)$ premières tranches n'étaient pas moindres que $(u+1)^r$, la racine trouvée u devrait être augmentée au moins d'une unité.

Par ce procédé, après avoir trouvé le premier chiffre de la racine, on aura les deux premiers, puis les trois premiers, les quatre premiers, et ainsi de suite. Donc il en résulte la règle que voici :

327. Pour avoir la racine r^{me} d'un nombre entier, il faut le partager en tranches de r chiffres chacune, en allant de droite à gauche. Prendre la racine r^{me} de la plus grande puissance r^{me} contenue dans la première tranche à gauche, et cette racine r^{me} sera le premier chiffre de la racine cherchée. Soustraire de la première tranche la puissance r^{me} du chiffre trouvé à la racine, et à côté du reste abaisser la seconde tranche; ce qui donnera un nombre dont on séparera par une virgule les $r-1$ derniers chiffres : divisant la partie à gauche de la virgule par r fois la puissance $r-1$ ième du premier chiffre de la racine, le quotient exprimera le second chiffre ou un chiffre plus grand. Pour vérifier ce quotient, il faut retrancher des deux premières tranches la puissance r^{me} de la racine trouvée; et si la soustraction est possible et que les deux premières tranches soient moindres que la puissance r^{me} du nombre immédiatement plus grand que la racine trouvée; cette racine exprimera les deux premiers chiffres de la racine cherchée. A côté du reste on abaissera la troisième tranche; on séparera les $r-1$ derniers chiffres du nombre résultant, et l'on divisera la partie à gauche par r fois la puissance $(r-1)^{me}$ des deux chiffres trouvés à la racine, et le quotient, vérifié comme le précédent, exprimera le troisième chiffre. On continuera ce procédé jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de tranches à abaisser.

Au moyen de cette règle, on trouve que la racine cinquième de 4567834561 45 est 215, à moins d'une unité près.

328. Si l'on veut avoir la racine r^{me} d'un nombre quelconque a, à moins de $\frac{1}{n}$ près, il faudra multiplier ce nombre par n^r, puis extraire la racine r^{me} de la plus grande puissance r^{me} contenue dans la partie entière du nombre résultant an^r, et donner à cette racine b le nombre n pour dénominateur. De sorte que $\sqrt[r]{a}=\frac{b}{n}$, à moins de $\frac{1}{n}$ près.

C'est ce qu'on démontre en raisonnant comme au n° 315. Ainsi on aura $\sqrt[5]{39}=2,0807$, à moins de 0,0001 près.

329. L'extraction des racines conduit à résoudre les équations qui ne contiennent qu'une seule puissance de l'inconnue, et qu'on appelle équations *binomes* ou à *deux termes*, parce qu'on peut

toujours les ramener à la forme $x^m = a$. Qu'on ait, par exemple, l'équation

$$\frac{5x^5}{48} - \frac{3}{2} + \frac{7x^5}{32} = \frac{15x^5}{64} - \frac{13}{3}.$$

Si l'on prend, dans cette équation, la valeur de x^5, comme dans une équation du premier degré, on trouvera $x^5 = -32$; ce qui donne $x = -2$.

De même, si l'on a l'équation

$$\frac{5x^4}{36} - 40 = \frac{7x^4}{108} + 56,$$

on en déduira $x^4 = 1296$ et $x = \pm 6$ (300).

330. Au moyen de l'extraction des racines, on peut aussi résoudre toutes les équations ne contenant que deux puissances de l'inconnue, ayant l'une un exposant double de celui de l'autre. Ces équations peuvent donc toujours se ramener à la forme $x^{2m} + px^m = q$.

Pour résoudre cette équation générale, il faut y supposer $x^m = u$; ce qui la réduit à $u^2 + pu = q$, équation du second degré. Connaissant les valeurs u' et u'' de u, dans cette dernière équation, on en conclura $x^m = u'$ et $x^m = u''$, équations à deux termes, qu'on sait résoudre.

C'est ainsi qu'on traitera chacune des équations

$$x^9 + 81x^5 = 82x \quad \text{et} \quad \frac{3x^6}{16} - \frac{5x^3}{8} + 4 = \frac{7x^6}{32} - \frac{x^3}{4} - 1.$$

Du calcul des radicaux.

331. Pour élever un monome à une puissance donnée, il faut élever son coefficient à cette puissance et multiplier l'exposant de chaque lettre par celui de la puissance. C'est ainsi qu'on aura $(3a^4b^3)^4 = 81a^{16}b^{12}$.

En effet, $(3a^4b^3)^4 = 3a^4b^3 \times 3a^4b^3 \times 3a^4b^3 \times 3a^4b^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3a^4a^4a^4a^4b^3b^3b^3b^3 = 81a^{16}b^{12}$.

332. Pour extraire une certaine racine d'un monome, il faut prendre cette racine du coefficient et diviser l'exposant de chaque lettre par l'indice de la racine à extraire. Ainsi

$$\sqrt[5]{-32a^{10}b^{15}} = -2a^2b^3.$$

Effectivement, si on élève $-2a^2b^3$ à la puissance 5^{me}, on retrouve le monome proposé $-32a^{10}b^{15}$. De même, on a

$$\sqrt[6]{729a^6x^{18}} = \pm 3ax^3.$$

333. Lorsque la racine demandée ne peut s'obtenir exactement, il est nécessaire de l'indiquer et de soumettre l'expression radicale résultante à toutes les règles du calcul des nombres; ce qui conduit au calcul des radicaux de tous les degrés.

Le but de ce calcul est de combiner les expressions radicales de manière que l'extraction des racines soit la dernière des opérations à effectuer pour avoir la quantité cherchée, ce qui permet d'apprécier le degré d'approximation obtenu; tandis que si l'on opérait sur les racines approchées, l'erreur pourrait se multiplier au point de n'être plus négligeable dans le résultat final.

334. Il est clair (303) que $b\sqrt[r]{a} = \sqrt[r]{b^r}\sqrt[r]{a} = \sqrt[r]{ab^r}$. Donc pour faire entrer sous un radical du r^{me} degré, le facteur qui le multiplie, il suffit d'élever ce facteur à la puissance r^{me}, et de multiplier, par cette puissance, la quantité sous le radical proposé. D'après cela, on aura

$$2a\sqrt[5]{\frac{3x^3}{8a^2}} = \sqrt[5]{\frac{3x^3}{8a^2} \times 32a^5} = \sqrt[5]{12a^3x^3}.$$

335. La valeur numérique d'une expression radicale ne change pas, lorsqu'on multiplie ou qu'on divise par un même nombre, l'indice du radical et les exposans des facteurs de la quantité qui lui est soumise. En effet, soit $x = \sqrt[r]{a^n}$; on aura donc $x^r = a^n$. Élevant de part et d'autre à la puissance v^{me}, il viendra $x^{rv} = a^{nv}$. Extrayant la racine rvième des deux membres, et remplaçant x par son expression, on aura

$$x = \sqrt[rv]{a^{nv}} \text{ et } \sqrt[r]{a^n} = \sqrt[rv]{a^{nv}}. \text{ Donc, etc.}$$

336. Ce principe donne le moyen de simplifier une expression radicale, en divisant par un même nombre, l'indice du radical et les exposans des facteurs de la quantité qui lui est soumise. C'est ainsi, par exemple, qu'on aura

$$\sqrt[6]{8a^9x^3} = \sqrt{2a^3x}.$$

337. Il existe une autre manière de simplifier une expression radicale : elle se réduit à décomposer la quantité sous le signe

en deux facteurs dont l'un soit une puissance parfaite de l'ordre de la racine à extraire ; car alors l'expression proposée est égale à la racine du premier facteur multipliée par la racine indiquée du second (303). Par exemple, il est clair qu'on a

$$\sqrt[3]{-81a^5b^7} = \sqrt[3]{-27a^3b^6 \cdot 3a^2b} = -3ab^2\sqrt[3]{3a^2b}.$$

338. Deux radicaux sont *semblables*, lorsqu'ayant le même indice, les quantités qu'ils affectent, sont les mêmes. Des radicaux, qui ne paraissent pas semblables, peuvent le devenir en les simplifiant (336 et 337). Par exemple, en simplifiant les radicaux $3\sqrt[8]{9a^6x^{12}}$ et $2a\sqrt[4]{243a^7x^2}$, ils deviennent $3x\sqrt[4]{3a^3x^2}$ et $6a^2\sqrt[4]{3a^3x^2}$, et sont par conséquent semblables. Le multiplicateur d'un radical en est le *coefficient*.

339. L'addition et la soustraction des radicaux ne peuvent s'effectuer que quand ces radicaux sont semblables ; et dans ce cas, il suffit d'ajouter ou de soustraire les coefficiens et de multiplier le résultat par la quantité radicale commune. Par exemple, si l'on veut ôter $-4a\sqrt[3]{3a^2x}$ de la somme des deux quantités $2a\sqrt[3]{3a^2x}$ et $-3b\sqrt[3]{3a^2x}$, on écrira $(2a - 3b + 4a)$ $\sqrt[3]{3a^2x}$, ou plutôt $(6a - 3b)\sqrt[3]{3a^2x}$.

340. Puisque $\sqrt[r]{a} \times \sqrt[r]{b} = \sqrt[r]{ab}$ et que $\sqrt[r]{a} : \sqrt[r]{b} = \sqrt[r]{\frac{a}{b}}$, on voit que pour multiplier ou diviser entre eux des radicaux de même indice, il faut multiplier ou diviser entre elles les quantités qui leur sont soumises, et couvrir le résultat du signe radical commun. Ainsi

$$\sqrt[3]{3a^2z^2} \times \sqrt[3]{18a^2z^4} = \sqrt[3]{54a^4z^6} = 3az^2\sqrt[3]{2a},$$

$$\sqrt[4]{64x^{10}y^9} : \sqrt[4]{4x^2y} = \sqrt[4]{16x^8y^8} = \pm 2x^2y^2.$$

341. Si les radicaux avaient des indices différens, il faudrait, pour effectuer la multiplication et la division, les réduire d'abord au même indice, en multipliant l'indice de chacun et les exposans des facteurs placés sous lui, par le produit des indices de tous les autres radicaux, ou par des nombres plus petits, comme dans la réduction des fractions au même dénominateur : il est clair qu'alors les expressions radicales proposées conserveraient toujours leurs valeurs numériques (335). Par exemple,

$$\sqrt{2a^3}\times\sqrt[4]{12a^2}=\sqrt[4]{4a^6}\times\sqrt[4]{12a^2}=\sqrt[4]{48a^8}=\pm 2a^2\sqrt[4]{3}.$$

342. Pour élever une expression radicale à une certaine puissance, il faut multiplier les exposans des facteurs sous le radical par l'exposant de la puissance; ou bien, s'il est possible, diviser l'indice du radical par le même exposant. En effet,

1° Soit $x=\sqrt[r]{a^n}$; il est clair qu'on aura successivement

$$x^r=a^n,\ x^{vr}=a^{nv},\ x^v=\sqrt[r]{a^{nv}}\ \text{ et }\ (\sqrt[r]{a^n})^v=\sqrt[r]{a^{nv}}.$$

2° D'après cela, $(\sqrt[rv]{a^n})^v=\sqrt[rv]{a^{nv}}=\sqrt[r]{a^n}$ (335).

La règle précédente donne

$$(2a\sqrt[6]{a^5u})^3=8a^3\sqrt{a^5u}=8a^5\sqrt{au}.$$

343. Pour extraire une certaine racine d'une expression radicale, il faut multiplier l'indice du radical par celui de la racine à extraire; ou bien, s'il est possible, diviser par cet indice, les exposans des facteurs sous le radical proposé. En effet,

1° Soit $x=\sqrt[v]{\sqrt[r]{a^n}}$; il est visible qu'on aura successivement

$$x^v=\sqrt[r]{a^n},\ x^{vr}=a^n,\ x=\sqrt[rv]{a^n}\ \text{ et }\ \sqrt[v]{\sqrt[r]{a^n}}=\sqrt[rv]{a^n}.$$

2° De là $\sqrt[v]{\sqrt[r]{a^{nv}}}=\sqrt[rv]{a^{nv}}=\sqrt[r]{a^n}$ (335).

D'après la règle qu'on vient d'établir, il est clair qu'on a

$$\sqrt[4]{81\sqrt[3]{16}}=3\sqrt[3]{2}\ \text{ et }\ \sqrt{(8\sqrt[3]{16\sqrt{2}})}=4\sqrt[4]{2}.$$

344. Dans les règles des quatre numéros précédens, si les radicaux avaient des coefficiens, il faudrait opérer sur ces coefficiens. On peut remarquer que les règles du calcul des radicaux reposent sur le principe que toute quantité est égale à la racine r^{me} de sa puissance r^{me} (299). Or, ce principe, qui est vrai tant qu'on ne considère que des nombres absolus, ne l'est pas toujours pour les diverses expressions auxquelles peut conduire l'algèbre, ou du moins il donne lieu à des distinctions, sans lesquelles il cesserait d'être exact. Par exemple, si l'on n'a égard qu'à la valeur *arithmétique*, il est évident que $2=\sqrt{4}$; mais si l'on devait considérer la valeur négative de $\sqrt{4}$, qui est -2, il est clair qu'on n'aurait plus $2=\sqrt{4}$.

345. On appelle valeurs *arithmétiques*, les nombres entiers, fractionnaires et irrationnels; et valeurs *algébriques*, les expressions négatives, infinies et imaginaires.

346. Une expression radicale n'a jamais qu'une seule valeur arithmétique; mais elle peut avoir plusieurs valeurs algébriques, dont le nombre augmente ou diminue toujours, suivant qu'on multiplie ou qu'on divise par un même nombre l'indice du radical et les exposans des facteurs de la quantité qui lui est soumise. C'est ce qu'on peut aisément vérifier; car si l'on pose

$$x = \sqrt[3]{a^3} \text{ et } y = \sqrt[6]{a^6},$$

on en déduira $x^3 - a^3 = 0$ et $y^6 - a^6 = 0$.

Or, on peut résoudre chacune de ces équations par la décomposition en facteurs. D'abord la première devient $(x-a)(x^2 + ax + a^2) = 0$. Et puisqu'un produit est nul dès que l'un de ses facteurs est zéro, on voit que l'équation $x^3 - a^3 = 0$ donne $x - a = 0$ et $x^2 + ax + a^2 = 0$; d'où $x = a$ et $x = \frac{1}{2}a(-1 \pm \sqrt{-3})$. De sorte que la racine cubique de a^3 a trois valeurs, dont une seule est arithmétique.

L'équation $y^6 - a^6 = 0$, étant identique avec

$$(y^3 - a^3)(y + a)(y^2 - ay + a^2) = 0,$$

elle fournit à y les trois mêmes valeurs que celles qu'on a trouvées pour x; mais de plus elle donne à y trois autres valeurs, qu'on obtient en résolvant les équations $y + a = 0$ et $y^2 - ay + a^2 = 0$.

Ainsi on voit qu'en multipliant par 2 l'indice du radical et l'exposant de a, dans $\sqrt[3]{a^3}$, la nouvelle expression $\sqrt[6]{a^6}$ aura la même valeur arithmétique a que la première; elle aura aussi deux valeurs algébriques communes avec elle; mais de plus elle renfermera trois autres valeurs qui ne se trouvent pas dans $\sqrt[3]{a^3}$.

347. En général, *la racine* r^{me} *d'un nombre a toujours* r *valeurs, dont une seule arithmétique*. C'est ce dont on fait aisément la preuve pour les racines 2^e, 3^e, 4^e et 6^e, en opérant comme dans l'exemple précédent. Pour montrer que $\sqrt[5]{a}$ a cinq valeurs, soit $x = \sqrt[5]{a}$; nous aurons donc $x^5 - a = 0$. Posant $a = c^5$, il viendra $x^5 - c^5 = 0$; d'où

$$(x - c)(x^4 + cx^3 + c^2x^2 + c^3x + c^4) = 0.$$

Ce qui donne d'abord $x=c$, et ensuite

$$x^4+cx^3+c^2x^2+c^3x+c^4=0.$$

Divisant les deux membres de cette équation par x^2, et prenant

$$x+\frac{c^2}{x}=u,\ \text{d'où}\ x^2+\frac{c^4}{x^2}=u^2-2c^2,$$

on aura $u^2-2c^2+cu+c^2=0$, ou $u^2+cu=c^2$.

Cette équation donne à u deux valeurs réelles u' et u'', qui étant substituées dans $x+\frac{c^2}{x}=u$, fourniront deux équations du second degré en u, desquelles on tirera quatre valeurs algébriques pour x. De sorte que $\sqrt[5]{a}$ a cinq valeurs, dont une seule arithmétique.

348. Dans $x=\sqrt[8]{256}$, on trouvera $x=\pm 2$, $x=\pm 2\sqrt{-1}$, $x=\pm 2\sqrt[4]{-1}$ et $x=\pm 2\sqrt{-\sqrt{-1}}$.

De $x=\sqrt[9]{a^9}$, on tire $(x^3-a^3)(x^6+a^3x^3+a^6)=0$; d'où il n'est pas difficile d'obtenir les neuf valeurs de x.

Enfin l'expression $x=\sqrt[10]{1}$, donnant $(x^5-1)(x^5+1)=0$, fournit à x ou à $\sqrt[10]{1}$, dix valeurs dont une est égale à 1.

349. Pour vérifier si $-\frac{1}{2}\sqrt[6]{-1}\,(1+\sqrt{-3})$ est l'une des six racines 6^{mes} de -1, il faut l'élever à la puissance 6^{me}; or la 6^{me} puissance du premier facteur est $-\frac{1}{64}$, et la 6^{me} puissance du second facteur s'obtient en prenant le cube de son carré, et donne 64; donc la 6^{me} puissance cherchée est $-\frac{1}{64}\times 64$ ou -1, comme cela doit être.

350. Pour former les puissances d'une imaginaire du second degré, telle que $\sqrt{-a}$, il suffit d'observer que l'exposant de la puissance ne peut avoir que l'une des quatre valeurs $4q$, $4q+1$, $4q+2$ et $4q+3$, q étant entier, et que les puissances de $\sqrt{-1}$, marquées par ces quatre valeurs, sont respectivement 1, $\sqrt{-1}$, -1 et $-\sqrt{-1}$. Par exemple, 14 étant de la forme $4q+2$, la 14^e puissance de $\sqrt{-a}$ ou de $\sqrt{a}\sqrt{-1}$, vaudra $a^7(\sqrt{-1})^{14}$ ou $-a^7$. La règle du n° 342 donnerait $\sqrt{a^{14}}$ ou $\pm a^7$. Cette règle présente donc une exception lorsque l'expression radicale est imaginaire.

351. En général, les règles du calcul des radicaux peuvent conduire à des résultats fautifs lorsque ces radicaux sont imagi-

naires. Par exemple, les règles de la multiplication et de la division des radicaux donnent $\sqrt[4]{-1} \times \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1} = 1$, et $\sqrt[6]{2} : \sqrt[6]{-1} = \sqrt[6]{-2}$; tandis que les véritables résultats doivent être $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt[6]{-2}$.

On remarque que si r est le double d'un nombre impair, on aura $\sqrt[r]{-1} = \sqrt{-1}$.

352. Le calcul des radicaux conduit à rendre rationnels les dénominateurs de certaines fractions, que l'on veut évaluer numériquement. D'abord si le dénominateur est le monome $\sqrt[r]{a}$, il suffira de multiplier les deux termes de la fraction par $\sqrt[r]{a^{r-1}}$, et le nouveau dénominateur sera a.

Mais si le dénominateur proposé est le binome $a \pm \sqrt[n]{b}$, il faudra multiplier les deux termes de la fraction par le quotient de la division des deux binomes $a^n - b$ et $a \pm \sqrt[n]{b}$, ou $a^n \mp b$ et $a \pm \sqrt[n]{b}$, suivant que n sera pair ou impair; et le nouveau dénominateur sera $a^n - b$, dans le premier cas, et $a^n \pm b$, dans le second. Ainsi on trouve

$$\frac{5}{2+\sqrt[3]{3}} = 4 - 2\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} = 4 - (2 - \sqrt[3]{3})\sqrt[3]{3},$$

$$\text{et} \quad \frac{7}{2-\sqrt[4]{2}} = 4 - 2\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{4} - \tfrac{1}{2}\sqrt[4]{8}.$$

Si le dénominateur était $\sqrt{3} - \sqrt[3]{2}$, on le remplacerait par sa valeur $\sqrt[6]{27} - \sqrt[6]{4}$, et on prendrait, pour multiplier les deux termes, le quotient de $27 - 4$ par $\sqrt[6]{27} - \sqrt[6]{4}$.

Lorsque le dénominateur a plus de deux termes, dont deux au moins soient des radicaux d'un degré supérieur au second, il est impossible de rendre rationnel ce dénominateur.

Des exposans négatifs.

353. Les exposans m et ν étant deux nombres entiers, si $m > \nu$, on vérifie aisément que $a^m : a^\nu = a^{m-\nu}$; car en multipliant le diviseur par le quotient, on reproduit le dividende. Mais si $m < \nu$, on ignore encore à quoi répond l'expression

a^{m-v}. Pour le trouver, on observe d'abord que $a^m = \frac{a^m}{a^v} \times a^v$ (58); on remarque ensuite que d'après la définition des exposans (20), l'expression a^{m-v} indique qu'il faut diminuer de v l'exposant m de a dans a^m, ou qu'il faut diminuer de v le nombre m des facteurs a du produit a^m; il faut donc supprimer v facteurs a, ou a^v, dans ce produit a^m ou dans $\frac{a^m}{a^v} \times a^v$; il reste par conséquent $\frac{a^m}{a^v}$ ou $a^m : a^v$. D'où il suit que

$$a^{m-v} = a^m : a^v \ldots (1)$$

Cette formule sera vraie pour toutes les valeurs numériques des exposans entiers m et v : seulement, quand m sera moindre que v, a^{m-v} et $a^m : a^v$ seront deux manières d'indiquer la division de a^m par a^v, comme $\frac{7}{100}$ et 0,07 sont deux manières d'indiquer la division de 7 par 100.

354. Si $m = v$, la formule (1) devient $a^{v-v} = a^v : a^v$, ou $a^0 = 1$, comme au n° 22. Si $m = 0$, la même formule donne $a^{0-v} = a^0 : a^v$, ou $a^{-v} = 1 : a^v$. De sorte que l'exposant négatif $-v$ de a, indique la division de l'unité par le produit de v facteurs égaux à a (*).

355. Et comme le dividende 1 est le produit du diviseur a^v par le quotient a^{-v}, si l'on divise ce produit 1 par l'un de ses deux facteurs a^{-v}, on aura l'autre a^v au quotient; de sorte que $a^v = 1 : a^{-v}$. Déjà $a^{-v} = 1 : a^v$; donc

$$a^{\pm v} = 1 : a^{\mp v}.$$

Ainsi toute quantité affectée d'un exposant entier, est égale à l'unité divisée par cette même quantité affectée du même exposant pris en signe contraire; et réciproquement. Ce qui donne le moyen de mettre une fraction sous la forme d'un nombre entier, et réciproquement.

356. Ce principe, la formule (1) du n° 353 et le calcul des fractions, donnent successivement :

(*) On voit que l'exposant positif v indiquant la multiplication de l'unité par le produit de v facteurs a, l'exposant négatif $-v$ aura une signification contraire, c'est-à-dire indiquera la division de l'unité par le produit de v facteurs a; ce qui est conforme à l'interprétation des valeurs négatives (158).

$$a^m \times a^{-v} = a^m \times \frac{1}{a^v} = \frac{a^m}{a^v} = a^{m-v};$$

$$a^{-m} \times a^v = \frac{1}{a^m} \times a^v = \frac{a^v}{a^m} = a^{v-m} = a^{-m+v};$$

$$a^{-m} \times a^{-v} = \frac{1}{a^m} \times \frac{1}{a^v} = \frac{1}{a^{m+v}} = a^{-m-v}.$$

D'ailleurs $a^m \times a^v = a^{m+v}$: cette formule et les trois précédentes, montrent que

$$a^{\pm m} \times a^{\pm v} = a^{\pm m \pm v}.$$

De là, et en multipliant de part et d'autre par $a^{\pm u}$, puis par $a^{\pm n}$, etc., on verra, que quels que soient les signes des exposans entiers d'une même lettre, dans les facteurs proposés, on doit n'écrire qu'une seule fois cette lettre comme facteur au produit, et lui donner pour exposant, la somme algébrique de tous ses exposans dans les facteurs du produit demandé. C'est ainsi qu'on aura

$$-7a^{-4}b^6 \times -2a^{-2}b^{-3} = 14a^{-6}b^3.$$

D'après cela, il est évident que les règles de la multiplication des polynomes doivent encore s'appliquer, lorsqu'il y a des exposans négatifs. Ainsi on trouvera que

$$\begin{aligned}&(4a^{-1}b^{-2} - 3a^{-2}b^{-1} + 2a^{-3})(3a^{-1}b^{-2} - 2a^{-2}b^{-1} + 3a^{-3})\\ &= 6a^{-6} - 13a^{-5}b^{-1} + 24a^{-4}b^{-2} - 17a^{-3}b^{-3} + 12a^{-2}b^{-4}.\end{aligned}$$

357. Il est facile de vérifier que m et v étant entiers, on aura

$$a^{\pm m} : a^{\pm v} = a^{\pm m - (\pm v)};$$

car en multipliant le diviseur par le quotient obtenu, on reproduit le dividende (356). Il suit de là que, pour diviser l'une par l'autre deux puissances entières, positives ou négatives, d'une même lettre, il faut n'écrire qu'une seule fois cette lettre au quotient, et lui donner pour exposant son exposant dans le dividende moins son exposant dans le diviseur. Ainsi on aura

$$-12a^{-4}b^2 : 4a^2b^{-3} = -3a^{-6}b^5.$$

Il est clair, d'après cela, que les règles de la division des polynomes s'appliquent encore, lorsqu'il y a des exposans négatifs, en observant que plus un exposant négatif a d'unités, plus il est petit (176). Ainsi on obtiendra :

$$(a^{-12}-b^{-12}):(a^{-4}-b^{-4})=a^{-8}+a^{-4}b^{-4}+b^{-8},$$

et $(2a^5x-3a^4x^3-6a^2x^3+17ax^4-12x^5):(2a^3x-3a^2x^2)$
$$=a^2x-3a^{-1}x^2+4a^{-2}x^3.$$

358. Lorsqu'on arrive à un reste où le plus haut exposant de la lettre principale est moindre que son exposant dans le dernier terme du dividende moins son exposant dans le dernier terme du diviseur, la division ne saurait se terminer.

Soit pa^m le dernier terme du dividende et qa^n le dernier terme du diviseur. Supposons que, dans un reste, le plus haut exposant de a soit moindre que $m-n$; je dis que la division ne se terminera pas.

En effet, si en continuant cette division, on pouvait arriver à un reste nul; alors, comme l'exposant de a est toujours plus petit dans le quotient partiel que dans le premier terme du dividende partiel, le dernier terme du quotient serait donc de la forme ra^{m-n-v}. Or, le dividende est le produit du diviseur par le quotient; et le terme pa^m de ce produit, où la lettre a a le moindre exposant, vient du terme qa^n du multiplicande, où la lettre a a le moindre exposant, multiplié par le terme ra^{m-n-v} du multiplicateur, où la lettre a a le moindre exposant (51): donc on aurait
$$pa^m=qra^{m-v}\ \dots (1)$$

Cette égalité devrait être vraie pour toutes les valeurs de a; de sorte qu'en y faisant $a=1$, ce qui ne change pas les quantités p, q, r, qui ne contiennent pas a, on aurait $p=qr$; et par suite, l'égalité (2) se réduirait à $a^m=a^{m-v}$, égalité évidemment impossible. Donc la division ne se terminera pas.

359. Par exemple, qu'on ait à diviser a^3-x^3 par a^2-x^2: en observant que $-1<0$, $-2<-1$, $-3<-2$, etc., on pourra appliquer la règle du n° 68; et le troisième reste sera $+a^{-1}x^4-a^{-2}x^5$. Le plus haut exposant -1 de a, dans ce reste, étant moindre que $0-0$, c'est-à-dire que l'exposant de a dans le dernier terme du dividende moins l'exposant de a dans le dernier terme du diviseur, il s'ensuit que la division ne se terminera pas, et donnera le quotient que voici :

$$a+a^{-1}x^2-a^{-2}x^3+a^{-3}x^4-a^{-4}x^5+\text{etc., à l'infini.}$$

Si l'on avait indiqué la division sur le premier reste $+ax^2$

$-x^3$, où l'exposant de a est moindre que dans le premier terme du diviseur, on aurait trouvé :

$$\frac{a^3-x^3}{a^2-x^2}=a+\frac{ax^2-x^3}{a^2-x^2}=a+\frac{x^2}{a+x}.$$

Appliquant la règle de l'extraction de la racine carrée des polynomes (233), on trouvera, pour la racine carrée de a^2+1, la suite infinie (235)

$$a+\tfrac{1}{2}a^{-1}-\tfrac{1}{8}a^{-3}+\tfrac{1}{16}a^{-5}-\tfrac{5}{128}a^{-7}+\tfrac{7}{256}a^{-9}-\text{etc.}$$

Du calcul des exposans d'une nature quelconque.

360. Si l'on veut former la puissance m^{me} du monome $a^{\pm v}$, c'est-à-dire si l'on veut former un produit de m facteurs égaux à $a^{\pm v}$, il faudra écrire une seule fois la lettre a au produit, et lui donner pour exposant, la somme algébrique des m exposans $\pm v$ qu'elle a dans les m facteurs $a^{\pm v}$ (356). Or, cette somme étant m fois $\pm v$ ou $\pm v \times m$, on a

$$(a^{\pm v})^m=a^{\pm v\times m}.$$

Il suit de là et de la définition de l'exposant négatif (355), que

$$(a^{\pm v})^{-m}=1:(a^{\pm v})^m=1:a^{\pm v\times m}=a^{\pm v\times -m}.$$

Cette valeur et la précédente démontrent que

$$(a^{\pm v})^{\pm m}=a^{\pm v\times \pm m}.$$

Ainsi pour élever un monome à une puissance entière, il suffit de multiplier les exposans de ce monome par celui de la puissance, quels que soient d'ailleurs les signes de tous ces exposans.

Cette règle et le principe du n° 292, fournissent :

$$(-a^3b^{-2})^{-4}=a^{-12}b^8 \text{ et } (-a^{-2}b^{-4})^{-3}=-a^6b^{12}.$$

361. Il est facile de voir, d'après ce qui précède (360 et 299), que m et r désignant deux nombres entiers, positifs ou négatifs, on aura

$$\sqrt[r]{a^{mr}}=\sqrt[r]{(a^m)^r}=a^m=a^{mr:r};$$

d'où il résulte que pour extraire une racine d'un monome, il faut diviser les exposans de ce monome par l'indice de la racine à extraire, quels que soient d'ailleurs les signes des exposans et de l'indice.

Au moyen de cette règle et du principe du n° 303, on trouve

$$\sqrt[-4]{a^8} = \pm a^{-2}, \sqrt[3]{-a^6b^{-9}} = -a^2b^{-3}$$

$$\text{et } \sqrt[-2]{-a^{-4}b^{-2}} = a^2b\sqrt[-2]{-1}.$$

362. En appliquant la règle précédente, on obtient

$$\sqrt[r]{a^{\pm m}} = a^{\pm\frac{m}{r}} \ldots (1)$$

Si m n'est pas divisible par r, l'exposant de a sera une fraction. Or, comme l'énoncé : *a deux tiers de fois facteur*, signifie plutôt $\frac{2}{3}a$ que $a^{\frac{2}{3}}$, qu'on énonce a puissance deux tiers, on voit que les exposans fractionnaires ne sauraient désigner des nombres de facteurs, et que par suite la formule (1) ne saurait être démontrée, lorsque m n'est pas multiple de r.

Mais puisque le second membre de cette formule exprime la racine r^{me} de $a^{\pm m}$, lorsque m contient exactement r, rien n'empêche de lui faire indiquer la même chose, lorsque m n'est pas divisible par r; car l'expression $a^{\pm\frac{m}{r}}$ n'offrant aucun sens par elle-même, on est maître de lui faire signifier ce qui n'est pas contraire aux conventions établies. Nous supposerons donc toujours désormais, que $a^{\pm\frac{m}{r}}$ désigne la racine r^{me} de $a^{\pm m}$, et en conséquence nous écrirons

$$a^{\pm\frac{m}{r}} = \sqrt[r]{a^{\pm m}}.$$

Cette formule définit l'*exposant fractionnaire*, et fournit deux manières différentes d'indiquer la racine r^{me} de $a^{\pm m}$.

363. Élevant les deux membres de l'identité précédente à la puissance r^{me}, celle du second sera $a^{\pm m}$ (299); donc il en sera de même de celle du premier. Ainsi pour élever une quantité affectée d'un exposant fractionnaire, à une puissance marquée par le dénominateur de cet exposant, il suffit d'y effacer ce dénominateur.

364. Soit $x = a^{\pm\frac{m}{r}}$; en élevant de part et d'autre à la puissance r^{me}, puis à la puissance v^{me}, on aura d'abord $x^r = a^{\pm m}$ (363), et ensuite $x^{rv} = a^{\pm mv}$ (360). Extrayant la racine rv^{me} des deux membres (362), puis remplaçant x par sa valeur primitive, il viendra

$$a^{\pm\frac{m}{r}} = a^{\pm\frac{mv}{rv}}.$$

On peut donc multiplier ou diviser par un même nombre les deux termes de l'exposant fractionnaire, sans changer la valeur numérique de l'expression proposée.

365. Cette expression n'a jamais qu'une seule valeur arithmétique ; mais elle peut avoir plusieurs valeurs algébriques, dont le nombre augmente ou diminue toujours, suivant qu'on multiplie ou qu'on divise par un même nombre les deux termes de l'exposant fractionnaire ; ce qui ne change pas d'ailleurs la valeur arithmétique. Dans tout ce qui va suivre, la quantité affectée d'un exposant fractionnaire sera un nombre positif, et nous n'aurons égard qu'à la seule valeur numérique que puisse fournir l'expression proposée.

366. Au moyen du principe établi plus haut (364), il sera toujours possible de réduire plusieurs exposans fractionnaires au même dénominateur, sans altérer les valeurs arithmétiques des expressions proposées ; car cette réduction consistera toujours à multiplier par un même nombre les deux termes de chaque exposant fractionnaire.

367. Les exposans fractionnaires ne désignant pas des nombres de facteurs, leur calcul ne saurait se démontrer comme celui des exposans entiers, quoiqu'il soit absolument le même, ainsi qu'on va le faire voir, en énonçant d'abord chaque règle et la vérifiant ensuite.

368. Pour élever un monome à une puissance quelconque, il suffit de multiplier les exposans de ce monome par celui de la puissance, quels que soient d'ailleurs tous ces exposans.

En effet, soit $x = a^{\pm\frac{m}{r}}$; on aura $x^r = a^{\pm m}$ (363). Élevant de part et d'autre à la puissance $\pm n$, il viendra $x^{\pm nr} = a^{\pm m \times \pm n}$ (360). Extrayant la racine rvième des deux membres (362), puis supprimant le facteur r des deux termes de l'exposant de x, et observant que dans la division de $\pm m \times \pm n$ par rv, le quotient peut se mettre sous la forme $\pm\frac{m}{r} \times \pm\frac{n}{v}$, on trouvera :

$$x^{\pm\frac{n}{v}} = a^{\pm\frac{m}{r}\times\pm\frac{n}{v}};\ \text{d'où}\ \left(a^{\pm\frac{m}{r}}\right)^{\pm\frac{n}{v}} = a^{\pm\frac{m}{r}\times\pm\frac{n}{v}}.$$

369. Pour extraire une racine quelconque d'un monome, il faut diviser les exposans de ce monome par celui de la racine à extraire, quels que soient d'ailleurs tous ces exposans. Ainsi, n et v désignant des nombres entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs, on aura $\sqrt[v]{a^n} = a^{n:v}$. Car si on élève à la puissance v^{me} l'expression $a^{n:v}$, on retrouvera le monome proposé a^n (368).

370. Pour multiplier entre elles plusieurs puissances fractionnaires d'une même lettre, il suffit d'écrire une seule fois cette lettre au produit, et de lui donner pour exposant, la somme algébrique des exposans qu'elle a dans les facteurs proposés.

C'est ainsi que
$$a^{\pm\frac{m}{r}} \times a^{\pm\frac{n}{v}} = a^{\pm\frac{m}{r}\pm\frac{n}{v}}.$$

En effet, si l'on élève chacune de ces deux expressions à la puissance rvième (292), et qu'on réduise les exposans (364 et 356), les deux résultats seront égaux : donc réellement, ces deux expressions sont égales ; car il n'y a que deux quantités égales qui, élevées à la même puissance, puissent donner deux résultats égaux.

371. Pour diviser l'une par l'autre deux puissances quelconques d'une même lettre, il suffit d'écrire une seule fois cette lettre au quotient et de lui donner, pour exposant, son exposant dans le dividende moins son exposant dans le diviseur. Ainsi, m et v étant deux nombres entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs, on aura $a^m : a^v = a^{m-v}$. Effectivement, si l'on multiplie le diviseur par le quotient, on retrouve le dividende.

372. D'après la règle qu'on vient d'énoncer, u étant un nombre quelconque, positif ou négatif, il viendra $a^0 : a^u = a^{-u}$, ou $1 : a^u = u^{-a}$. Donc l'unité divisée par une quantité ayant un exposant quelconque, équivaut à cette quantité affectée du même exposant, pris en signe contraire ; et réciproquement. De là on déduit que

$$\sqrt[-2]{-1} = (-1)^{-\frac{1}{2}} = 1 : (-1)^{\frac{1}{2}} = 1 : \sqrt{-1} = -\sqrt{-1}.$$

En général, on trouve que $\sqrt[-2n]{-a} = 1 : \sqrt[2n]{-a}$.

373. Il est bon de remarquer que le calcul des radicaux peut se faire par celui des exposans fractionnaires, en remplaçant chaque radical par l'exposant fractionnaire équivalent (362). Mais il faut des règles particulières pour opérer immédiatement sur les radicaux, tandis qu'il n'en est pas de même des exposans fractionnaires, dont le calcul ne diffère pas des exposans entiers; et cela montre combien le choix du signe d'une opération peut influer sur la simplicité du calcul.

374. Au moyen du calcul des exposans fractionnaires, il est aisé de résoudre les deux problèmes que voici : 1° Si l'on multiplie la puissance — 5 sixièmes de 729 par la puissance 2 tiers de 27, et qu'on élève le produit à la puissance — 3 neuvièmes; combien aura-t-on? (R. 3.)

2° Si l'on multiplie la puissance — 3 quarts de 1296 par la puissance 3 demies de 9, et qu'on prenne la racine — 6 cinquièmes du produit élevé à la puissance — 2; combien aura-t-on? (R. $\frac{1}{32}$.)

Les principes des n^{os} 295 et 296, conduisent à résoudre ce problème : quelles sont les valeurs des radicaux dont les indices sont ∞, $-\infty$ et 0, la quantité a soumise à ces radicaux, étant $>$ ou $<$ 1?

375. *Le calcul des exposans irrationnels se fait d'après les mêmes règles que le calcul des exposans fractionnaires.* En effet, on ne peut obtenir que par approximation la valeur numérique d'un exposant incommensurable (215) : donc opérer sur un exposant irrationnel, ce n'est réellement opérer que sur l'exposant rationnel, qui en est la valeur aussi approchée qu'on le veut; donc le calcul du premier exposant se réduit à celui du second, et se fait par conséquent d'après les mêmes règles. On connaît donc déjà le calcul des exposans irrationnels; et il est d'ailleurs facile de se donner des exemples de ce calcul.

376. Quant aux exposans imaginaires; comme ce n'est que par convention que l'on opère sur eux d'après les mêmes règles que pour les exposans réels, il n'y a évidemment lieu à aucune démonstration.

Il est nécessaire de bien retenir le calcul des exposans d'une nature quelconque, parce qu'il est employé dans un grand nombre de circonstances. Nous allons en faire usage pour résoudre les équations exponentielles, sur lesquelles est basée l'importante théorie des logarithmes.

Des équations exponentielles.

377. On appelle *équation exponentielle*, toute équation où l'inconnue est à l'exposant.

378. La résolution des équations exponentielles est fondée sur le principe que voici : Si une quantité b est plus grande que l'unité, 1° les valeurs de ses puissances positives augmentent ou diminuent, suivant que les exposans de ces puissances augmentent ou diminuent ; 2° réciproquement, si les valeurs des puissances augmentent ou diminuent, les exposans eux-mêmes augmenteront ou diminueront.

En effet, 1° puisque $b > 1$, il est clair qu'on aura

$$b^n > 1, \quad \sqrt[r]{b^n} > 1, \quad b^{\frac{n}{r}} > 1 \quad \text{et} \quad b^{\frac{n}{r}+\frac{m}{\nu}} > b^{\frac{m}{\nu}}.$$

2° Réciproquement, si $b^x > b^n$, on n'aura pas $x = n$, sans quoi on aurait aussi $b^x = b^n$; ce qui est contre la supposition : on n'aura pas non plus $x < n$, puisqu'alors, d'après la proposition directe (1°), il viendrait $b^x < b^n$; ce qui est encore contre la supposition. Donc on aura nécessairement $x > n$.

Si b était plus petit que l'unité, les propriétés contraires auraient lieu : l'exposant positif de la puissance augmentant ou diminuant, la valeur numérique de la puissance diminuerait ou augmenterait ; et réciproquement.

379. Cherchons la valeur de x dans l'équation

$$8^x = \tfrac{1}{32}.$$

On voit d'abord que x ne saurait avoir de valeur positive ; car en faisant $x = 0$, on aurait un nombre $1 > \frac{1}{32}$; et x surpassant 0, 8^x surpasserait à plus forte raison $\frac{1}{32}$: donc x doit être négatif. Prenant donc $x = -u$, il viendra

$$8^{-u} = \frac{1}{32}, \text{ ou } \frac{1}{8^u} = \frac{1}{32}, \text{ ou enfin } 8^u = 32.$$

Les hypothèses $u = 1$ et $u = 2$ donnent $8^1 < 32$ et $8^2 > 32$; donc $8^u > 8^1$ et $8^u < 8^2$; donc $u > 1$ et $u < 2$ (378). Par conséquent on peut faire $u = 1 + \frac{1}{y}$, y étant plus grand que l'unité. Substituant cette valeur de u dans $32 = 8^u$, on aura successivement, d'après le calcul des exposans fractionnaires,

$$32 = 8^{1+\frac{1}{y}} = 8^1 \times 8^{\frac{1}{y}};\ \text{d'où}\ 4 = 8^{\frac{1}{y}}\ \text{et}\ 4^y = 8.$$

Les suppositions de $y=1$ et $y=2$, donnent $4^1<8$ et $4^2>8$; donc $4^y>4^1$ et $4^y<4^2$; donc $y>1$ et $y<2$ (378). On peut donc faire $y=1+\frac{1}{v}$, v étant plus grand que 1. Substituant cette valeur de y dans l'équation $4^y=8$, on aura

$$8 = 4^{1+\frac{1}{v}} = 4^1 \times 4^{\frac{1}{v}};\ \text{d'où}\ 2 = 4^{\frac{1}{v}}\ \text{et}\ 2^v = 4.$$

Il est évident que $v=2$, dans cette dernière équation. Or, $y=1+\frac{1}{v}$; donc $y=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$. Mais $u=1+\frac{1}{y}$; donc $u=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$. Ainsi on a $x=-u=-\frac{5}{3}$: telle est donc la valeur de x dans l'équation $8^x=\frac{1}{32}$.

C'est ce qu'on peut vérifier aisément; car à cause de $8=2^3$, il est clair qu'on aura successivement :

$$8^x = 8^{-\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{8^{-5}} = \sqrt[3]{2^{-15}} = 2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}.$$

Par une marche analogue à la précédente, les deux équations $128^x=4096$ et $243^y=2187$, donneront $x=\frac{12}{7}$ et $y=\frac{7}{5}$.

380. Considérons maintenant l'équation générale $a^x=b$, dans laquelle a et b sont des nombres positifs donnés et $a>1$. D'abord, on observe que dans cette équation, x ne saurait avoir qu'une seule valeur réelle; car si x avait deux valeurs réelles m et v, on aurait à la fois $a^m=b$ et $a^v=b$; d'où $a^m=a^v$ et par suite $m=v$; ce qui est absurde.

381. Actuellement, pour avoir la valeur réelle de x dans l'équation $a^x=b$, on commencera par substituer au lieu de x, successivement les nombres 0, 1, 2, 3, 4, etc.; et si les deux nombres m et $m+1$ donnent $a^m<b$ et $a^{m+1}>b$, on en conclura que $a^x>a^m$ et $a^x<a^{m+1}$; d'où $x>m$ et $x<m+1$ (378): par conséquent $x=m+\frac{1}{y}$, y étant nécessairement plus grand que 1. Substituant cette valeur dans l'équation $b=a^x$, on en déduira, en faisant $b:a^m=c$,

$$b = a^{m+\frac{1}{y}} = a^m \times a^{\frac{1}{y}};$$

$$b : a^m = a^{\frac{1}{y}};\ c = a^{\frac{1}{y}}\ \text{et}\ c^y = a.$$

Par hypothèse, $a^m < b$; donc le quotient c de b divisé par a^m est plus grand que l'unité. Ainsi $c^y = a$ est une équation pareille à celle qui contient x; on trouvera donc y précisément comme on a trouvé x; et ainsi de suite. Par ce procédé, on aura la suite de valeurs :

$$x = m + \frac{1}{y},\ y = n + \frac{1}{z},\ z = p + \frac{1}{v},\ v = q + \frac{1}{u}, \text{ etc.}$$

Si l'on arrête cette suite de valeurs à $u = r$; u sera trop petit; donc $\frac{1}{u}$ sera trop grand, ainsi que v; $\frac{1}{v}$ sera donc trop petit, de même que z; $\frac{1}{z}$ sera donc trop grand, ainsi que y; $\frac{1}{y}$ sera donc trop petit, de même que la valeur x' qui en résultera pour x. Mais si l'on arrête la suite de valeurs à $t = s$, on aura t trop petit, $\frac{1}{t}$ trop grand, u trop grand, $\frac{1}{u}$ trop petit, v trop petit, $\frac{1}{v}$ trop grand, z trop grand, $\frac{1}{z}$ trop petit, y trop petit, $\frac{1}{y}$ trop grand, ainsi que la valeur x'' qui en résultera pour x. Ainsi la valeur de x sera toujours comprise entre deux valeurs consécutives x' et x''; elle différera donc moins de l'une de ces valeurs, que celles-ci ne diffèrent entre elles : par conséquent, on pourra toujours connaître le degré d'approximation obtenu.

Nota. En continuant plus loin le procédé, on trouve des valeurs de plus en plus approchées de la véritable; car si l'on remplace dans x, chaque inconnue auxiliaire par l'expression de sa valeur, on aura pour x, cette fraction continue

$$x = m, n, p, q, r, s, \text{ etc.}$$

dans laquelle on sait que les réduites successives approchent de plus en plus de la vraie valeur de x, et que l'erreur commise en prenant une réduite pour cette valeur, est toujours moindre que l'unité divisée par le carré du dénominateur de cette même réduite. (Voyez l'Arithmétique.)

382. Cherchons maintenant les conditions nécessaires pour que x soit commensurable dans l'équation $a^x = b$, a et b étant deux nombres entiers positifs. Supposons $x = \frac{m}{r}$, m et r étant entiers; alors il viendra $a^{\frac{m}{r}} = b$ et $a^m = b^r$. Soit p un des facteurs premiers de a; en divisant les deux membres de $a^m = b^r$ par p, le premier quotient sera un nombre entier; le second en sera donc un aussi; ce qui exige que p divise b; car si p ne divisait pas b, p serait premier avec chacun des facteurs du produit b^r; donc il ne diviserait pas ce produit; ce qui est ab-

surde : donc p divise b. On voit par là que a et b admettent précisément les mêmes facteurs premiers.

Soient p et q ces facteurs ; on aura donc $a = p^n q^v$ et $b = p^u q^z$; d'où en substituant dans l'équation $a^m = b^r$, il vient

$$p^{mn} q^{mv} = p^{ru} q^{rz}.$$

Si l'on pouvait avoir $mn > ru$, ou $mn = ru + t$, en divisant les deux membres par p^{mn}, le premier quotient serait un nombre entier, tandis que le second, qui se réduit à $q^{rz} : p^t$, serait un nombre fractionnaire, puisque les deux nombres q^{rz} et p^t sont premiers entre eux : donc les deux quotiens ne seraient pas égaux ; ce qui est absurde. Donc mn ne saurait être plus grand que ru. On verrait de même que mn ne saurait être plus petit que ru : donc $mn = ru$. On aura pareillement $mv = rz$. Cette équation et la précédente donnent

$$\frac{m}{r} = \frac{u}{n} = \frac{z}{v}.$$

On voit donc que si x est commensurable dans l'équation $a^x = b$, 1° a *et* b *renfermeront précisément les mêmes facteurs premiers ; 2° les rapports des exposans des facteurs premiers de* b *aux exposans des mêmes facteurs premiers dans* a, *seront égaux, et* x *vaudra l'un de ces rapports.*

Si ces deux conditions ne sont pas satisfaites, x sera incommensurable ; car si x avait alors une valeur rationnelle, on vient de voir que les deux conditions dont il s'agit seraient satisfaites.

383. *Toutes les fois que les facteurs premiers de* a *se trouvent au premier degré, dans* $a^x = b$, *les valeurs rationnelles de* x *sont des nombres entiers ;* car ayant alors $n = 1$ et $v = 1$, il vient $x = \frac{m}{r} = u = z$, et $b = p^u q^z = (pq)^u = a^u$.

Ainsi, à cause de $10 = 2.5$, les valeurs commensurables de x, dans $10^x = b$, sont des nombres entiers, qui rendent b une puissance parfaite de 10 ; et x n'est rationnel que dans ce cas.

384. Qu'on ait par exemple, à résoudre l'équation $10^x = 2$. On voit d'abord que x est incommensurable, et que les suppositions de $x = 0$ et $x = 1$, donnent deux résultats, l'un plus petit et l'autre plus grand que 2 ; de sorte que x est compris entre 0 et 1, et qu'on a $x = \frac{1}{u}$, u étant plus grand que 1. Sub-

stituant cette valeur, il vient $10^{\frac{1}{u}} = 2$; d'où $10 = 2^u$. Il est facile de voir que les hypothèses $u = 3$ et $u = 4$, donnent $2^3 < 10$ et $2^4 > 10$; donc il en résulte $2^u > 2^3$ et $2^u < 2^4$, ou $u > 3$ et $u < 4$ (378). Par conséquent, $u = 3 + \frac{1}{v}$. Substituant cette valeur, on aura

$$10 = 2^{3+\frac{1}{v}} = 2^3 \times 2^{\frac{1}{v}} = 8 \times 2^{\frac{1}{v}}; \text{ d'où } \tfrac{5}{4} = 2^{\frac{1}{v}} \text{ et } (\tfrac{5}{4})^v = 2.$$

On trouve aisément que v est compris entre 3 et 4, et que par conséquent $v = 3 + \frac{1}{y}$. On a donc

$$2 = \left(\frac{5}{4}\right)^{3+\frac{1}{y}} = \frac{125}{64}\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{y}}; \ \frac{128}{125} = \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{y}} \text{ et } \left(\frac{128}{125}\right)^y = \frac{5}{4}.$$

Après un petit nombre d'essais, on trouve que $y = 9 + \frac{1}{z}$. On pourrait continuer plus loin les calculs ; mais en s'arrêtant à $y = 9$ et remontant aux valeurs de v, u, x, on aura successivement $v = 3 + \frac{1}{9} = \frac{28}{9}$, $u = 3 + \frac{9}{28} = \frac{93}{28}$ et $x = \frac{28}{93} = 0{,}30107$.

En continuant suffisamment les calculs, on aurait obtenu, à moins d'un dix-millionième près, $x = 0{,}3010300$; d'où il suit qu'on a, d'une manière très-approchée,

$$10^{0{,}3010300} = 2.$$

En appliquant la méthode précédente, on verra que l'équation $10^x = 3$, donne $x = 0{,}477$, à moins d'un millième près, et que l'équation $5^x = \frac{2}{3}$ fournit $x = -0{,}25$, à moins d'un centième près.

385. Lorsque a et b peuvent être négatifs, la résolution de l'équation $a^x = b$ se fait encore d'après la méthode précédente, pourvu qu'on ait égard aux signes qu'il faut donner aux puissances et aux racines (291 et 300). Par exemple, si l'on a les équations

$$4^x = -\tfrac{1}{8},\ (-8)^y = -32,\ (-32)^z = 16384,\ (-16)^u = 2048,$$

on trouvera $x = -\frac{3}{2}$, $y = \frac{5}{3}$, $z = \frac{14}{5}$ et u imaginaire.

386. Lorsqu'on peut décomposer en facteurs les nombres ou les deux membres de l'équation exponentielle, sa résolution devient beaucoup plus facile. Qu'on ait, par exemple, l'équation

$$9 \cdot 16^x + 64 \cdot 16^{x-1} - 256 \cdot 16^{x-2} = 384;$$

on observera que $64 \cdot 16^{x-1} = 4 \cdot 16 \cdot 16^{x-1} = 4 \cdot 16^x$, et que $256 \cdot 16^{x-2} = 16^2 \cdot 16^{x-2} = 16^x$; l'équation deviendra donc $(9 + 4 - 1)\,16^x = 384$, ou $12 \cdot 16^x = 384$ et $16^x = 32$. De là, en décomposant 16 et 32 en facteurs, on aura $2^{4x} = 2^5$; ce qui donne $4x = 5$ et $x = \frac{5}{4}$.

Si l'on avait $5^{2^x} = 390625$, on décomposerait le second membre en facteurs, et il viendrait $5^{2^x} = 5^8$; d'où $2^x = 8$ et $x = 3$. L'équation $4 \cdot 4^{x^2} = 32^x$ se traite d'une manière analogue.

L'équation $162 \cdot 8^x + 5 \cdot 27^x = 37 \cdot 27^x$, devient $81 \cdot 8^x = 16 \cdot 27^x$; d'où $(\frac{2}{3})^{3x} = (\frac{2}{3})^4$, $3x = 4$ et $x = \frac{4}{3}$.

Si l'on avait $8^x - 128 = 960 \cdot 8^{4-x}$, on multiplierait les deux membres par 8^{x-4}, puis on prendrait $8^{x-2} = u$, et l'on aurait $u^2 - 2u = 960$; d'où $u = 32$ et $u = -30$. La première valeur de u donne $3x - 6 = 5$ ou $x = \frac{11}{3}$, et la seconde rend x imaginaire. Voici encore une équation à résoudre :

$$\sqrt[x]{27^{2x-1}} = \sqrt{9^{3x-1}}.$$

Posant $9^x = y$, dans l'équation $5 \cdot 9^x + 3 \cdot 81^x = 42$, elle deviendra $5y + 3y^2 = 42$.

387. Il n'est pas difficile de résoudre chacun des systèmes d'équations que voici :

$$5^v = 625 \text{ et } x^2 - 5x + 10 = v,$$
$$3 \cdot 2^x - 4 \cdot 3^y = -12 \text{ et } 5 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^y = 58.$$

On ne sait encore résoudre que par tâtonnemens les équations de l'une des formes $ax^m b^{nx} = c$ et $px^{mx} = q$.

Généralement, les équations exponentielles que l'on peut ramener à la forme $a^x = b$, sont les seules que l'on sache résoudre directement. Telles seraient, par exemple, toutes les équations analogues aux cinq que voici :

$$pa^x + qa^{x-m} = r,\ pa^{mx} + qb^{nx} = rb^{nx-c},$$
$$a^{c^x} = b,\ a^{x^c} = b \text{ et } a^{nx^2} = pb^{mx}.$$

Des progressions par différence.

388. On appelle *progression par différence*, ou *progression arithmétique*, une suite de nombres dont chacun surpasse celui qui le précède immédiatement, ou en est surpassé, de la même

quantité, appelée *raison* de la progression. Ainsi la suite de nombres

4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, etc.,

est une progression par différence ; car chaque nombre surpasse celui qui le précède immédiatement de la même différence 3, qui est la raison. On indique cette progression en écrivant

$$\div 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13 \cdot 16 \cdot 19 \cdot 22 \cdot 25 \cdot \text{ etc.},$$

et en énonçant, 4 est à 7 comme 7 est à 10, comme 10 est à 13, etc. Mais cette indication est fort peu utile.

Les nombres qui entrent dans la progression, en sont les *termes* ; et cette progression est *croissante* ou *décroissante*, suivant que ses termes vont en augmentant ou en diminuant.

389. Cherchons la règle pour calculer un terme quelconque d'une progression par différence, sans passer par tous les termes intermédiaires. Soit a le premier terme, r la raison et t le n^{me} terme de la progression proposée. Si cette progression est croissante, chaque terme surpassera celui qui le précède immédiatement de la raison r ; donc chaque terme sera égal au précédent augmenté de r. Ainsi le premier terme étant a, le second sera $a+r$, le 3ᵉ $a+2r$, le 4ᵉ $a+3r$, le 5ᵉ $a+4r$, le 6ᵉ $a+5r$, et en général, le $n$ième terme t sera

$$t=a+(n-1)r.$$

Si la progression était décroissante, la raison devrait être retranchée de chaque terme pour avoir le suivant ; les termes successifs seraient donc a, $a-r$, $a-2r$, $a-3r$, $a-4r$, etc., et le $n$ième terme t deviendrait

$$t=a-(n-1)r.$$

Cette formule et la précédente font voir, qu'*un terme quelconque d'une progression par différence est égal au premier, plus ou moins autant de fois la raison qu'il y a de termes avant celui que l'on cherche, suivant que la progression est croissante ou décroissante.*

D'après cela, le douzième terme de la progression croissante 5, 9, 13, 17, ..., est $5+(12-1)4$ ou 49. Le onzième terme de la progression décroissante 100, 97, 94, ..., est $100-(11-1)3$ ou 70. C'est ce qu'on vérifie aisément en formant les termes successifs.

390. Cherchons maintenant la règle pour calculer sur-le-champ la somme des termes d'une progression arithmétique. Soit a le premier terme, t le dernier, r la raison, n le nombre de termes et S leur somme ; si la progression est croissante, les termes successifs seront a, $a+r$, $a+2r$, $a+3r$, $a+4r$, $a+5r$, ..., t (*) ; on aura donc

$$S = a + (a+r) + (a+2r) + (a+3r) + \cdots + t.$$

Prenant la progression dans l'ordre inverse, elle sera décroissante et les termes successifs seront t, $t-r$, $t-2r$, $t-3r$, $t-4r$, $t-5r$, ..., a ; il viendra alors

$$S = t + (t-r) + (t-2r) + (t-3r) + \cdots + a.$$

Ajoutant cette égalité à la précédente, et réduisant les r dans la somme des termes qui se correspondent, on aura $a+t$ pour chaque somme partielle ; et comme il y a n de ces sommes partielles, c'est-à-dire autant que de termes dans la progression, il en résulte que leur somme 2S vaut n fois l'une ; on a donc

$$2S = n(a+t) ; \text{ d'où } S = \tfrac{1}{2}n(a+t).$$

On obtiendrait la même expression, si la progression était d'abord décroissante ; et il en résulte, que *la somme de tous les termes d'une progression arithmétique est égale à la somme des termes extrêmes multipliée par la moitié du nombre de termes.*

Par exemple, le 15e terme de la progression 860, 850, 840, ..., étant 860—(15—1)10 ou 720, la somme des 15 premiers termes sera

$$\tfrac{15}{2}(860 + 720) \text{ ou } 11700 ;$$

comme on pourrait d'ailleurs le vérifier, en formant les 15 premiers termes et en les additionnant.

391. De même, à l'aide de la règle précédente, on trouve

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \tfrac{1}{2}n(n+1),$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) = n^2,$$
$$2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n = n(n+1).$$

La première de ces valeurs est la somme des n premiers nom-

(*) Les trois points représentent toujours la suite des termes qui ne sont pas écrits. Ainsi dans la *série* 1, 2, 3, 4, ..., 11, les trois points signifient 5, 6, 7, 8, 9, 10. Nous avons déjà fait usage de cette notation dans ce qui précède (72 et 294).

bres entiers, la seconde celle des n premiers nombres impairs, et la troisième celle des n premiers nombres pairs.

392. Les équations $t = a + (n-1)r$ et $S = \frac{1}{2}n(a+t)$ serviront à calculer deux des cinq nombres qui les composent, dès que les trois autres seront connus ; et il en résulte dix problèmes généraux, dans lesquels il faut trouver, 1° t et S ; 2° a et S ; 3° r et S ; 4° r et t ; 5° a et t ; 6° r et n ; 7° n et S ; 8° a et r ; 9° a et n ; 10° n et t. Les deux derniers seuls conduisent à des équations du second degré. Voici quelques applications.

393. Insérer six *moyens arithmétiques* entre 3 et 31, c'est-à-dire, placer six nombres entre 3 et 31, de manière que les huit termes résultans forment une progression par différence. Pour cela, si l'on prend la formule $t = a + (n-1)r$, dans laquelle $a = 3$, $t = 31$ et $n = 8$, on aura $31 = 3 + 7r$; d'où $r = 4$. La progression cherchée est donc 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31.

Et si entre les termes consécutifs de cette progression, on insère trois moyens arithmétiques, la raison de chacune des progressions partielles sera 1 ; donc toutes ces progressions partielles n'en font qu'une, qui est

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, etc.

En général, *si entre les termes consécutifs d'une progression par différence, on insère le même nombre de moyens arithmétiques, ces termes et les moyens réunis, formeront une nouvelle progression par différence.*

Il n'est pas difficile de démontrer que dans toute progression arithmétique, la somme des deux termes également éloignés des extrêmes, est égale à la somme de ces extrêmes. Cela résulte immédiatement de la formule pour calculer le n^{me} terme.

394. *Trouver le nombre x des années qui doivent encore s'écouler pour qu'un fermier ait retiré 7350 francs d'une métairie qui lui rapporte 100 fr. la première année, et dont le rapport de chaque année augmente de 10 fr. l'année suivante.*

Puisque le rapport de chaque année augmente de 10 fr. l'année suivante, ce rapport étant 100 fr. la première année, sera 110 fr. la seconde, 120 fr. la troisième, 130 fr. la quatrième, et ainsi de suite. Par conséquent le rapport pendant les x années cherchées, sera la somme des x premiers termes de la progression arithmétique croissante 100, 110, 120, 130, 140, ... Mais ce rapport est aussi 7350 ; ainsi, dans cette progression, le premier terme $a = 100$, la raison $r = 10$, le nombre de termes $n = x$ et la somme des termes $S = 7350$. On a par conséquent

$$t = 100 + (x - 1)10 \quad \text{et} \quad 7350 = \tfrac{1}{2}x(100 + t).$$

Résolvant ces équations, on trouve $x = 30$ et $t = 390$, $x = -49$ et $t = -400$. Les valeurs positives résolvent le problème proposé. Quant aux valeurs négatives, pour avoir le problème qu'elles résolvent, il faut changer x et t en $-x$ et $-t$ dans les équations proposées ; ce qui donnera

$$t = (x + 1)10 - 100 \quad \text{et} \quad 7350 = \tfrac{1}{2}x(t - 100).$$

Ces équations n'appartiennent pas à une progression arithmétique ; mais en les résolvant, on trouve $x = 49$ et $t = 400$, $x = -30$ et $t = -390$.

395. Voici quelques problèmes, faciles à résoudre :

Combien un propriétaire doit-il être d'années pour que l'entretien d'une vigne, qu'il vient de planter, lui ait coûté 30 louis ? On sait que les frais de chaque année seront moindres d'un louis et que ceux de la première montent à 8 louis. (R. 5 ans ou 12 ans.)

Quelle est la progression arithmétique dont 9, 141 et 900 sont les sommes respectives des deux premiers termes, des deux derniers et de tous les termes ? (R. $a = r = 3$, $t = 72$ et $n = 24$.)

Deux voyageurs partent du même endroit, l'un 5 jours avant l'autre, et vont dans le même sens. Le premier fait une lieue le premier jour et chaque jour une lieue de plus que la veille. Combien le second, qui fait 12 lieues tous les jours, sera-t-il de temps pour atteindre le premier ? (R. 15 ou 8 jours.)

Si le 1er partait 6 jours avant l'autre, le problème serait imaginaire.

Un jardinier doit planter une rangée de 150 arbres dont chacun sera éloigné de son voisin de 4 mètres ; combien fera-t-il de chemin pour cela et combien recevra-t-il ? On sait qu'il doit mettre au pied de chaque arbre une brouettée de terreau, prise sur le prolongement de la ligne des arbres et à 20 mètres du premier, et que chaque brouettée lui est payée 2 centimes de plus que la précédente, la première coûtant 4 centimes. (R. Il fera 95420 mètres, et recevra 22950 centimes.)

Des progressions par quotient.

396. On appelle *progression par quotient*, ou *progression géométrique*, une suite de nombres dont chacun est égal à celui qui le précède immédiatement multiplié par un nombre constant, nommé *raison* de la progression. Ainsi la suite de nombres

4, 12, 36, 108, 324, 972, 2916, etc.,

est une progression par quotient, dont 3 est la raison. On indique quelquefois cette progression en écrivant $\div 4 : 12 : 36 : 108 : 324 : 972$, etc., et en énonçant 4 est à 12, comme 12 est à 36, comme 36 est à 108, etc. Mais cette indication est inutile.

Les nombres qui composent la progression géométrique en sont les *termes*; et cette progression est *croissante* ou *décroissante*, suivant que ses termes vont en augmentant ou en diminuant.

397. Soit r la raison de la progression proposée; chaque terme sera donc égal au précédent multiplié par r (396). Ainsi le 1er terme étant a, le 2e sera ar; le 3e ar^2; le 4e ar^3; le 5e ar^4; le 6e ar^5; et en général, le n^{me} terme t sera $t = ar^{n-1}$.

Donc *un terme quelconque d'une progression par quotient est égal au premier multiplié par une puissance de la raison, marquée par le nombre de termes qui précèdent celui que l'on cherche*. Au moyen de ce principe, si l'on a la progression géométrique croissante 2, 6, 18, 54, ..., le 10e terme sera

$$2 \times 3^{10-1} \text{ ou } 39366,$$

comme on peut le vérifier, en formant les termes successifs.

398. Soit S la somme des n premiers termes d'une progression par quotient; nous venons de voir que ces n termes sont $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots, ar^{n-1}$; ainsi on a

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1};$$

d'où $$rS = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^n.$$

Retranchant la première de ces égalités de la seconde, et observant que tous les termes du nouveau second membre se détruisent deux à deux, excepté le premier $-a$ et le dernier ar^n, on aura

$$rS - S = -a + ar^n, \text{ ou } (r-1)S = ar^n - a.$$

Le n^{me} terme $t = ar^{n-1}$; d'où $rt = ar^n$ et $(r-1)S = rt - a$. Il vient donc, en divisant par $r-1$,

$$S = \frac{rt-a}{r-1}.$$

Ainsi *on calculera la somme des termes d'une progression géométrique, en multipliant le dernier terme par la raison,* *en soustrayant du produit le premier terme et en divisant le reste par la raison moins l'unité.*

Cette règle est encore applicable lorsque la progression est décroissante. Mais dans ce cas, pour faciliter les calculs, *il faut d'abord former le dernier terme de la progression, et la prendre ensuite à rebours*. Par exemple, s'il est question de trouver la somme des neuf premiers termes de la progression 2187, 729, 243, ..., dans laquelle la raison r est $\frac{1}{3}$; on cherchera d'abord le neuvième terme, qui sera $2187\left(\frac{1}{3}\right)^{9-1}$ ou 1; et alors, la progression prise à rebours sera 1, ..., 243, 729, 2187. Donc, puisque le premier terme de cette progression croissante est $a=1$, la raison $r=3$ et le dernier terme $t=2187$, il s'ensuit que la somme S de tous ses termes est

$$S=\frac{2187\times3-1}{3-1}=3280,$$

comme il est aisé de le vérifier directement.

399. On peut déterminer les formules pour calculer aisément les valeurs de S', S'', S''', dans les trois égalités :

$$S'=a+2a^2+3a^3+4a^4+5a^5+\cdots+na^n,$$
$$S''=a+3a^3+5a^5+7a^7+\cdots+(2n-1)a^{2n-1},$$
$$S'''=2a^2+4a^4+6a^6+8a^8+\cdots+2na^{2n}.$$

Il suffit, pour cela, de retrancher la première de son produit par a, la seconde de son produit par a^2, ainsi que la troisième; puis de remplacer chaque progression géométrique résultante par sa valeur (398). Les formules qui donnent S', S'', S''', deviennent $\frac{0}{0}$, dès que $a=1$; mais alors elles se réduisent respectivement aux valeurs du n° 391. Et si $r=1$, au n° 398, on aura $S=an$, bien que la formule devienne d'abord $S=\frac{0}{0}$.

400. Les deux équations $t=ar^{n-1}$ et $S=\dfrac{rt-a}{r-1}$, serviront à calculer deux des cinq nombres qui les composent, dès que les trois autres seront donnés; et il en résulte dix problèmes généraux. Mais ceux où n est inconnu, ne peuvent être résolus, d'après ce qui précède. Voici quelques applications.

401. Insérer cinq *moyens proportionnels* entre 9 et 6561, c'est-à-dire, placer cinq nombres entre 9 et 6561, de manière que l'ensemble des sept nombres résultans forme une progression par quotient. Pour cela, il faut employer la formule $t=$

ar^{n-1}, dans laquelle $a=9$, $t=6561$ et $n=7$; alors on aura $6561=9\cdot r^6$; d'où $r^6=729=3^6$ et $r=3$. Ainsi la progression demandée est 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561.

Il est facile de démontrer, 1° que si entre les termes consécutifs d'une progression géométrique, on insère le même nombre de moyens proportionnels, ces termes et les moyens réunis, formeront une progression par quotient; 2° que dans toute progression géométrique, le produit de deux termes également éloignés des extrêmes, est égal au produit de ces extrêmes. Et si p désigne le produit de tous les termes, a étant le premier et t le n^{me}, on aura $p^2=(at)^n$.

402. *On demande la somme des* n *premiers termes de la série* 6, 66, 666, 6666, 66666, 666666, etc.

Il est visible que le 6^{me} terme de cette série est la même chose que $6(111111)$, ou que $6(1+10+10^2+10^3+10^4+10^5)$, ou enfin que $\frac{6}{9}(10^6-1)$. D'où l'on peut conclure que la valeur du v^{me} terme est $\frac{6}{9}(10^v-1)$. Prenant successivement, dans cette valeur, $v=1$, 2, 3, 4, ..., n, et ajoutant entre eux les n résultats, il viendra, pour la somme x cherchée,

$$x=\tfrac{6}{9}(10+10^2+10^3+10^4+\cdots+10^n-n)=\tfrac{20}{27}(10^n-1)-\tfrac{2}{3}n.$$

On trouverait, d'une manière analogue, la somme des n premiers termes de chacune des séries

72, 7272, 727272, 72727272, 7272727272, ...
135, 135135, 135135135, 135135135135, ...

En général, si a désigne un nombre de m chiffres, et qu'on forme une série de termes en écrivant le nombre a une fois, puis deux fois de suite, trois fois de suite, quatre fois de suite, etc., la somme x des n premiers termes de la série résultante sera

$$x=\frac{a}{10^m-1}\left[\frac{10^m(10^{mn}-1)}{10^m-1}-n\right].$$

403. *On partage une somme d'argent à* n *pauvres, de manière que chacun reçoit* b *francs plus le* a^{me} *de ce qu'a laissé le précédent, et le dernier laisse un reste égal à* c *fr. Quelle somme* x *a-t-on partagée?*

Pour faciliter la solution de ce problème, soit R ce qui reste avant que le v^{me} pauvre reçoive sa part. On donne à ce pauvre b francs plus le a^{me} du reste R précédent; on lui donne donc $b+\frac{R}{a}$; il reste par conséquent $R-b-\frac{R}{a}$, ou $R\left(1-\frac{1}{a}\right)-b$, ou encore $Rm-b$, en faisant $1-\frac{1}{a}=m$.

L'expression $Rm - b$ montre que, *pour avoir ce qui reste après qu'un pauvre a eu sa part, il faut multiplier par* m *ce qui restait au paravant et retrancher* b *du produit.*

D'après cela, comme x désigne ce qui restait avant que le premier pauvre reçût sa part, il s'ensuit qu'on a, pour les restes successifs :

$$\begin{array}{l} mx - b \\ m^2x - bm - b \\ m^3x - bm^2 - bm - b \\ m^4x - bm^3 - bm^2 - bm - b \\ \text{etc} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Sans qu'il soit besoin de continuer ces résultats, on voit que le reste c après que le n^{me} pauvre a eu sa part, est exprimé par

$$m^n x - bm^{n-1} - bm^{n-2} - \cdots - bm^2 - bm - b;$$

et qu'on a conséquemment

$$m^n x - b(1 + m + m^2 + \cdots + m^{n-1}) = c;$$

$$\text{d'où} \quad m^n x - b\left(\frac{m^n - 1}{m - 1}\right) = c.$$

Observant que $m = 1 - \frac{1}{a} = \frac{a-1}{a}$, d'où $m - 1 = -\frac{1}{a}$, il viendra, toute réduction faite,

$$x = (ab + c)\left(\frac{a}{a-1}\right)^n - ab.$$

Si $a = 2$, $b = 10$, $c = 4$ et $n = 5$, on aura $x = 748$ francs, comme il est aisé d'en faire la preuve. On peut changer a en $-a$ ou b en $-b$!

404. A *donne le* c^{me} *de ses jetons à* B *et reçoit le* c^{me} *de ceux de ce dernier. Après avoir répété* (n — 1) *autres fois cette opération*, A *et* B *ont l'un* a *et l'autre* b *jetons. Quels nombres* x *et* y *de jetons avaient-ils d'abord?*

A cause de $x + y = a + b$ ou de $y = a + b - x$, si l'on opère comme dans le problème précédent, on trouvera

$$x = \tfrac{1}{2}(a + b) + \tfrac{1}{2}(a - b)\left(\frac{c}{c-2}\right)^n.$$

Si $a = 12$, $b = 10$, $c = 3$, et $n = 2$, on aura $x = 20$ et $y = 2$.

405. On trouve, dans les Mélanges d'algèbre, pages 69 et suivantes, un grand nombre de problèmes résolubles par les progressions. En voici encore quelques autres, faciles à traiter, d'après ce qui précède.

Un homme gagne chaque année le a^{me} de ce qu'il possède pendant cette année; et quoiqu'il prélève b francs tous les ans sur son bien, pour sa dépense, il possède après n années, c fois ce qu'il avait d'abord. Quelle somme x avait-il? $\left[\text{R. } x=\frac{bm(m^n-1)}{m^n-c} \text{ et } m=1+\frac{1}{a}\right]$.

A donne à B, c fois autant de jetons que B en a, et B en rend à A, c fois autant que A en a gardé; cette double opération étant répétée $(n-1)$ autres fois, A et B ont alors l'un a et l'autre b jetons. Quels nombres x et y de jetons avaient-ils d'abord? $\left[\text{R. } x=\frac{a-bd}{(d+1)d^{2n}}+\frac{d(a+b)}{d+1}, \; d=c+1.\right]$

Les biens d'une personne augmentent tous les ans de leur c^{me} partie, et elle dépense a francs sur ces mêmes biens, au bout de chaque année; après n années, elle possède b fr. Quelle somme x avait-elle d'abord? $\left[\text{R. } x=\frac{ac}{c+1}+(b-a)\left(\frac{c}{c+1}\right)^n.\right]$

Si l'on multiplie par n successivement la racine r^{me} de n, la racine r^{me} du produit, la racine r^{me} du second produit, la racine r^{me} du troisième, et ainsi de suite; quelle sera la racine r^{me} du v^{me} produit?

Quelle est la progression géométrique dont 2049 est la somme des termes extrêmes, 2048 leur produit, et 4095 la somme de tous les termes? (R. 1, 2, 4, 8, 16, 32, ..., 2048.)

Quelle est la somme x des n premiers termes d'une série, dont chaque terme vaut a fois la somme de tous ceux qui le précèdent, le premier étant 1? [R. $x=(1+a)^{n-1}$.]

406. *Proposons-nous maintenant de trouver la somme* S *de tous les termes d'une progression géométrique, lorsque cette progression décroît sans jamais s'arrêter.*

Dans ce cas, il est clair que la raison $r<1$ et que le nombre n de termes est infini. L'infinième terme est donc $ar^{\infty-1}$, et il vient

$$S=a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{\infty-1}.$$

Soustrayant de cette égalité son produit par r, et réduisant, on aura

$$S-rS=a-ar^{\infty}.$$

Or, $r<1$; donc r^{∞} est infiniment petit ou nul (296), aussi bien que ar^{∞}; il vient donc $S-rS=a$, ou $(1-r)S=a$; d'où

$$S=\frac{a}{1-r}.$$

Ainsi on aura la somme de tous les termes d'une progression géométrique décroissante et continuée à l'infini, en divisant le premier terme par l'unité moins la raison. Cette règle donne

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}+\text{etc., à l'infini,} = \frac{2}{3} : \left(1-\frac{2}{3}\right) = 2.$$

C'est ce qu'on vérifie en observant que 2 valent 2 tiers + 4 tiers, que 4 tiers = 4 neuvièmes + 8 neuvièmes, 8 neuvièmes = 8 vingt-septièmes + 16 vingt-septièmes, 16 vingt-septièmes = 16 quatre-vingt-unièmes + 32 quatre-vingt-unièmes, et ainsi de suite, à l'infini.

407. Les raisonnemens qui ont fourni la règle précédente, ne supposent pas que r soit positif; cette règle s'applique donc encore lorsque la raison est négative, mais < 1. Ainsi on aura

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}+\text{etc., à l'infini,} = \frac{1}{2} : \left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}.$$

C'est ce dont on fait la preuve en réduisant les termes de 2 en 2, ou bien en convertissant $\frac{1}{3}$ en parties de 2 en 2 fois plus petites, et en prenant tous les quotiens *en dehors*.

Réduisant les fractions de 3 en 3, on obtiendra

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{2}{4^5}+\frac{3}{4^6}+\text{etc.} = \frac{27}{4^3}+\frac{27}{4^6}+\text{etc.} = \frac{3}{7};$$

$$\frac{2}{5}-\frac{4}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\frac{2}{5^4}-\frac{4}{5^5}+\frac{1}{5^6}+\text{etc.} = \frac{31}{5^3}+\frac{31}{5^6}+\text{etc.} = \frac{1}{4}.$$

On vérifie le premier résultat en réduisant $\frac{3}{7}$ en parties de 4 en 4 fois plus petites et en prenant tous les quotiens *en dedans*. Réduisant de même $\frac{1}{4}$ en parties de 5 en 5 fois moindres, et ne prenant *en dehors* que les quotiens 2^e^, 5^e^, 8^e^, 11^e^, etc., on retrouvera la seconde série précédente.

408. Si l'on divise a par $1-r$ ou par a^0-r, il viendra

$$\frac{a}{1-r} = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \text{etc., à l'infini} \ldots (1)$$

Mais cette identité n'est exacte qu'en supposant le second membre complété par un terme de la forme $\frac{ar^n}{1-r}$. En effet, si l'on négligeait ce terme, lorsque $r=2$, on aurait

$$-a = a + 2a + 4a + 8a + 16a + \text{etc., à l'infini;}$$

ce qui est évidemment impossible.

Lorsque $r<1$, le terme complémentaire $\frac{ar^n}{1-r}$ diminue à mesure que n augmente et s'anéantit à l'infini (296); alors l'égalité (1) est rigoureusement exacte, et conduit à la règle du n° 406.

409. Il est aisé de s'assurer, par des multiplications successives, que quand $r < 1$, on a

$$(1+r)(1+r^2)(1+r^4)(1+r^8)(1+r^{16}) \text{ etc., à l'infini, } =$$
$$1+r+r^2+r^3+r^4+r^5+r^6+ \text{ etc., à l'infini, } = \frac{1}{1-r}.$$

On voit donc que le produit d'une infinité de facteurs, tous plus grands que l'unité, n'est pas toujours infini.

Divisant l'unité par le produit précédent et par sa valeur, on verra facilement que le produit d'une infinité de facteurs, tous plus petits que l'unité, n'est pas toujours infiniment petit.

Ainsi, bien qu'il paraisse évident que s'il y a dans le produit, une infinité de facteurs, tous plus grands, ou tous plus petits que l'unité, ce produit est infiniment grand ou infiniment petit, on voit que cette proposition pourrait être fausse, et qu'elle a besoin d'être démontrée, dans tous les cas.

410. Voici deux problèmes que l'on peut résoudre par les progressions à l'infini, ou plutôt par les séries que fournit la division :

Trouver ce que vaut en argent comptant, un bien-fonds dont le revenu annuel est a florins. Un florin en produit r d'intérêt par an, et l'on doit avoir égard aux intérêts des intérêts. (R. $\frac{a}{r}$ florins.)

Un ouvrier, qui travaille toujours également vite, aurait mis a heures à sortir l'eau b contenue d'abord dans un bassin, et a été c heures pour sortir l'eau b et celle qui est arrivée uniformément dans le bassin pendant ce temps. On demande combien il arrive d'eau dans le bassin pendant que l'ouvrier en ôte un litron ? (R. $1-\frac{a}{c}$; valeur négative, lorsque $c < a$.)

Des premières puissances des nombres naturels.

411. Pour abréger, nous désignerons par S_1 la somme des n premiers nombres entiers, et par S_2, S_3, S_4, ..., celles de leurs carrés, de leurs cubes, de leurs puissances 4^{mes}, etc. S_1, S_2, S_3, S_4, ..., s'énoncent en disant : S premier, S deuxième, S troisième, S quatrième, etc.

Cela posé, on a déjà vu (391) que $S_1 = \frac{1}{2}n(n+1)$. Je dis maintenant que $S_2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

En effet, pour vérifier cette expression, prenons la valeur pareille $v(v+1)(2v+1)$; changeons-y v en $v-1$, ce qui donnera $(v-1)v(2v-1)$, puis retranchons ce résultat de l'expression qui l'a donné ; nous aurons

$$\nu(\nu+1)(2\nu+1)-(\nu-1)\nu(2\nu-1)\cdots(1)$$

Or, d'après la multiplication des polynomes, on a

$$\nu(\nu+1)(2\nu+1)=(\nu^2+\nu)(2\nu+1)=2\nu^3+3\nu^2+\nu,$$
$$(\nu-1)\nu(2\nu-1)=(\nu^2-\nu)(2\nu-1)=2\nu^3-3\nu^2+\nu.$$

Retranchant le second résultat du premier, on verra que le reste (1) se réduit à $6\nu^2$, et que par suite, on a, pour toutes les valeurs de ν,

$$6\nu^2=\nu(\nu+1)(2\nu+1)-(\nu-1)\nu(2\nu-1).$$

Faisant successivement $\nu=1, 2, 3, 4, \ldots, n$, on aura

$$6.1^2=1.2.3$$
$$6.2^2=2.3.5-1.2.3$$
$$6.3^2=3.4.7-2.3.5$$
$$6.4^2=4.5.9-3.4.7$$
$$6.5^2=5.6.11-4.5.9$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$6n^2=n(n+1)(2n+1)-(n-1)n(2n-1).$$

Ajoutant ces n égalités entre elles, et observant que tous les termes des seconds membres se détruisent deux à deux, à l'exception de $n(n+1)(2n+1)$, il viendra

$$6(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\cdots+n^2)=n(n+1)(2n+1);$$

d'où l'on tire $\quad S_2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$

412. Par une méthode tout-à-fait semblable à la précédente, on fera voir que

$$S_3=\tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$$
$$S_4=\tfrac{1}{30}n(n+1)(2n+1)[3n(n+1)-1]$$
$$S_5=\tfrac{1}{6}n^2(n+1)^2[n(n+1)-\tfrac{1}{2}]$$
$$S_6=\tfrac{1}{42}n(n+1)(2n+1)\{3n[n^2(n+1)-1]+1\}.$$

Ces formules font parties des séries numériques que nous avons considérées dans les Mélanges d'algèbre, pages 84 et suivantes.

413. Le principal usage des premières puissances des nombres naturels, est de *sommer* toute série dont le *terme général* en ν est une fonction entière et rationnelle de ν. Par exemple, pour avoir la somme de la série dont le terme général est $\frac{1}{2}\nu(\nu+1)$, on développera ce terme, ce qui donnera $\frac{1}{2}\nu(\nu+1)=\frac{1}{2}\nu^2+\frac{1}{2}\nu$. Prenant successivement, dans cette identité, $\nu=1, 2, 3, 4, \ldots, n$,

et ajoutant entre elles les n égalités résultantes, on aura

$$1+3+6+10+15+\cdots+\tfrac{1}{2}n(n+1)=\tfrac{1}{2}S_2+\tfrac{1}{2}S_1.$$

Remplaçant S_2 et S_1 par leurs valeurs, et décomposant en facteurs, il viendra

$$1+3+6+10+15+\cdots+\frac{n}{2}(n+1)=\frac{n}{6}(n+1)(n+2).$$

Le premier membre de cette formule est la série des n premiers *nombres triangulaires*, et le second membre, la somme de ces n nombres.

414. Opérant d'une manière absolument semblable sur les termes généraux $\frac{v}{6}(v+1)(v+2)$ et $\frac{v}{24}(v+1)(v+2)(v+3)$, on trouvera les deux formules :

$$1+4+10+20+35+56+\cdots+\tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$
$$=\tfrac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3);$$
$$1+5+15+35+70+\cdots+\tfrac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)$$
$$=\tfrac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).$$

La première de ces formules est la somme des n premiers *nombres pyramidaux*, et la seconde celle des n premiers *nombres figurés* du *cinquième ordre*. Voici quelques applications.

415. *Deux courriers partent du même endroit, au même instant et vont dans le même sens ; le premier fait 22 lieues $\frac{1}{2}$ par jour, et l'autre n'ayant parcouru qu'une lieue le premier jour, fait chaque jour de plus que la veille, un nombre de lieues égal au rang de ce jour. Combien sera-t-il de jours pour atteindre le premier courrier ?*

Soit n le nombre de jours cherché, x_v et x_{v+1} les nombres respectifs de lieues parcourues le v^{me} et le $(v+1)^{me}$ jour, par le second courrier ; on aura, d'après l'énoncé,

$$x_{v+1}=x_v+v+1\,;\ \text{d'où}\ x_{v+1}-x_v=v+1.$$

Faisant successivement $v=1, 2, 3, 4, \ldots, m-1$, et ajoutant entre elles les égalités résultantes, réduisant dans le premier membre, observant que $x_1=1$, et transposant 1, on aura

$$x_m=1+2+3+4+\cdots+m=\tfrac{1}{2}m(m+1).$$

Prenant successivement $m=1, 2, 3, 4, \ldots, n$, et ajoutant les n égalités, le nouveau premier membre sera le nombre total x de lieues parcourues en n jours par le second courrier, et le nouveau second membre sera la somme des n premiers nombres triangulaires ; on aura donc (413)

$$x = \tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

Le premier courrier faisant 22 lieues $\tfrac{1}{2}$ ou $\tfrac{45}{2}$ lieues par jour, en n jours il fera $\tfrac{45}{2}n$. Or, pour que le second courrier atteigne le premier, il faut qu'il fasse le même chemin que ce premier ; il faut donc qu'on ait

$$\tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2) = \tfrac{45}{2}n\,;\ \text{d'où}\ n = 10\ \text{et}\ n = -13.$$

Ainsi le second courrier atteindra le premier après 10 jours de marche.

416. *Un particulier achète tous les ans un pigeon femelle qui lui donne un pigeon femelle chaque année suivante ; et comme chaque pigeon femelle né une année produit chaque année qui suit trois pigeons mâles, on demande combien le particulier aura de pigeons en tout au bout de* n *années?*

Soient x_v et x_{v+1} les nombres respectifs de pigeons femelles nés avant et après la v^{me} année, et y_v, y_{v+1} les nombres de pigeons mâles produits avant et après la même année. Puisque chaque pigeon acheté une année donne un pigeon femelle chaque année suivante, les v pigeons achetés au bout de la v^{me} année, donneront v pigeons femelles pendant la $(v+1)^{me}$; on a par conséquent

$$x_{v+1} = x_v + v\,;\ \text{d'où}\ x_{v+1} - x_v = v.$$

Posant successivement $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, n-1$ et ajoutant, puis observant que $x_1 = 0$, car il n'est pas né de pigeons la première année, il viendra

$$x_n = \tfrac{1}{2}(n-1)n.$$

D'un autre côté, comme chaque pigeon femelle né une année produit trois pigeons mâles chaque année suivante, il s'ensuit que les x_v pigeons femelles nés la v^{me} année, produiront $3x_v$ pigeons mâles pendant la $(v+1)^{me}$; ainsi on a

$$y_{v+1} = y_v + 3x_v\,;\ \text{d'où}\ y_{v+1} - y_v = \tfrac{3}{2}(v-1)v.$$

Prenant $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, n-1$ et ajoutant, observant que $y_1 = y_2 = 0$, et que le second membre de l'égalité résultante est trois fois la somme des $n-2$ premiers nombres triangulaires (403), on aura

$$y_n = \tfrac{1}{2}n(n-2)(n-1)n.$$

On voit que le nombre x de pigeons que le particulier possède au bout de n années, est $x = n + x_n + y_n$; d'où, en substituant et réduisant,

$$x = n + \tfrac{1}{2}n(n-1)^2.$$

417. *Quel nombre x d'hommes y aura-t-il dans une société au bout de n années? On sait que le fondateur enrôle chaque année un premier membre, et que pendant chacune des années qui suivent celle de son enrôlement, chaque premier membre en enrôle 2 deuxièmes, chaque deuxième, 3 troisièmes, et chaque troisième, 4 quatrièmes, qui n'enrôlent personne.*

Il est d'abord clair que la société contiendra n premiers membres, au bout de n années. Or, soient x_v, y_v et z_v les nombres respectifs de deuxièmes, troisièmes et quatrièmes membres contenus dans cette société au bout de v années, et x_{v+1}, y_{v+1}, z_{v+1} les nombres contenus après la $(v+1)^{me}$. Puisque chaque premier membre en enrôle 2 deuxièmes, les v premiers membres de la v^{me} année, en enrôleront $2v$ deuxièmes pendant la $(v+1)^{me}$, et il vient

$$x_{v+1} = x_v + 2v.$$

De même, on aura $y_{v+1} = y_v + 3x_v$,

et $z_{v+1} = z_v + 4y_v$.

Ces équations *à indices* étant résolues comme celles du problème précédent, ou d'après les méthodes exposées pages 97 et suivantes, des Mélanges d'algèbre, on en déduira

$$x_n = n(n-1),\ y_n = n(n-1)(n-2)$$
$$\text{et } z_n = n(n-1)(n-2)(n-3).$$

Substituant ces valeurs dans $x = 1 + n + x_n + y_n + z_n$ et réduisant, il viendra définitivement

$$x = 1 + n + n(n-1)[n(n-4) + 5].$$

418. On peut varier d'un grand nombre de manières, l'énoncé du problème que nous venons de résoudre. Par exemple, on peut supposer que *le fondateur enrôle chaque année a membres qui, eux-mêmes, enrôlent chacun, pendant chacune des années suivantes, a nouveaux membres, enrôlant à leur tour chacun a membres, pendant chacune des années qui suivent celle de leur enrôlement, et ainsi de suite, pour chaque membre enrôlé.* Dans ce cas, si l'on désigne par x_v et x_{v+1} les nombres d'hommes contenus dans la société après les années v^{me} et $(v+1)^{me}$, on aura $x_{v+1} = (1+a)x_v$; d'où, en observant que $x_1 = 1 + a$, on déduira

$$x_n = (1+a)^n.$$

Si le fondateur et chaque membre de la société devait enrôler chaque année un nombre d'hommes égal au rang de cette année, à partir de l'époque où la société a commencé; au bout de n années, le nombre de membres serait $2.3.4.5.6.7\ldots(n+1)$.

On peut encore supposer que *le fondateur enrôle chaque année un nombre d'hommes égal au rang de cette année, et que chaque homme qu'il a enrôlé une année, enrôle à son tour, un nombre d'hommes égal au rang de cette même année, pendant chacune des années suivantes.* Alors au bout de n années, les hommes qui composent la société, sont au nombre de
$$1+\tfrac{1}{12}n(n+1)[n(n-1)+6].$$

Enfin on peut supposer que *le fondateur enrôle chaque année un premier membre et que les premiers membres en enrôlent des deuxièmes et ceux-ci d'autres, de manière que chaque premier ou deuxième membre enrôlé une année, enrôle chaque année suivante un nombre de membres égal au rang de l'année de son enrôlement.* Dans ce cas, au bout de n années, le nombre total x de membres est
$$x=1+\tfrac{1}{8}n(n+1)[n(n-3)+6].$$

Des Logarithmes.

419. Dans l'équation exponentielle $b^x=n$, on sait toujours trouver pour x une valeur exacte ou aussi approchée qu'on le veut (381), pourvu que b et n soient positifs et qu'on ait $b>$ ou <1, jamais $b=1$. Or, si on laisse toujours la même valeur à b, et qu'on donne à n successivement toutes les valeurs entières 1, 2, 3, 4, 5, etc., il en résultera autant de valeurs pour x, soit positives, soit négatives. Écrivant ensuite toutes les valeurs de n dans des colonnes, et à côté, les valeurs correspondantes de x, on formera des *tables* ou un *système* de logarithmes. La valeur de b, d'après laquelle on calcule toutes les valeurs de x, est la *base* du système de logarithmes. Enfin, les exposans x, dont les valeurs dépendent de celles des nombres n, sont, pour cette raison, appelés les *logarithmes* de ces nombres n. Ainsi,

420. *Les logarithmes des nombres sont les exposans des puissances auxquelles il faut élever un nombre invariable* b, *pour obtenir successivement tous ces nombres. Le nombre invariable* b *est la base du système ou des tables de logarithmes.* Par exemple, dans $b^x=n$, b est la base des tables et x le logarithme de n.

421. Désormais nous désignerons *logarithme de* par la lettre initiale l; et au lieu de $x=$ logarithme de n, nous écrirons

$x = ln$. Pour indiquer le logarithme du résultat d'une ou de plusieurs opérations, on met ce résultat entre parenthèses, que l'on fait précéder de l. Ainsi $l(a-b)$ veut dire : logarithme de la différence $a-b$. Dans tout ce qui va suivre, la base sera positive et >1.

422. *Dans tout système de logarithmes, le logarithme de la base est l'unité, le logarithme de l'unité est zéro, et le logarithme de zéro est l'infini négatif.* En effet, à cause de $b>1$, qui donne $\frac{1}{b}<1$ ou $b^{-1}<1$, on a $(b^{-1})^{\infty}=0$ (296), ou $b^{-\infty}=0$. Et comme $b^1=b$ et $b^0=1$, il s'ensuit que 1, 0 et $-\infty$ sont les exposans des puissances auxquelles il faut élever la base b, pour avoir b, 1 et 0 ; donc 1, 0 et $-\infty$ sont les logarithmes de b, 1 et 0 (420) ; c'est-à-dire qu'on a

$$lb=1,\ l1=0 \text{ et } l0=-\infty.$$

Si b était <1, le logarithme de 0 serait ∞.

423. *Le logarithme du produit de plusieurs nombres est égal à la somme des logarithmes de ces nombres ; et réciproquement.*

En effet, soient m, n, p, etc. plusieurs nombres quelconques ; leurs logarithmes sont désignés par lm, ln, lp, etc. Or, ces logarithmes sont les exposans des puissances auxquelles il faut élever la base b pour avoir les nombres m, n, p, etc. (420) ; on a donc

$$b^{lm}=m,\ b^{ln}=n,\ b^{lp}=p, \text{ etc.}$$

Multipliant ces équations entre elles et ayant égard à la règle des exposans (370), on obtiendra

$$b^{lm+ln+lp}=mnp.$$

Mais d'après la définition (420) l'exposant $lm+ln+lp$ de la puissance à laquelle il faut élever la base b pour avoir le nombre mnp, est le logarithme de ce nombre ; par conséquent

$$l(mnp)=lm+ln+lp.$$

424. Élevant les deux membres de l'équation $b^{lm}=m$, à la puissance quelconque v, on aura (368) $b^{vlm}=m^v$. Ainsi vlm est l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever la base b pour avoir le nombre m^v ; donc vlm est le logarithme de ce nombre (420) ; c'est-à-dire qu'on a $l(m^v)=vlm$. D'où l'on voit que *le logarithme d'une puissance quelconque d'un nom-*

bre est égal au produit du logarithme de ce nombre multiplié par l'exposant de la puissance.

425. Soit q le quotient de a par c; on aura donc $q = \frac{a}{c}$ et $cq = a$. Prenant les logarithmes des deux membres, on aura (423) $lc + lq = la$; d'où $lq = la - lc$ et $l\left(\frac{a}{c}\right) = la - lc$. Ainsi *le logarithme d'un quotient est égal au logarithme du dividende moins le logarithme du diviseur.*

426. Soit x la racine v^{me} de a; on aura $x^v = a$. Prenant les logarithmes de part et d'autre, il viendra (424) $vlx = la$; d'où $lx = \frac{la}{v}$ et $l(\sqrt[v]{a}) = \frac{la}{v}$. Ainsi *le logarithme d'une racine quelconque d'un nombre est égal au quotient qu'on trouve en divisant le logarithme de ce nombre par l'exposant de la racine.*

427. Les quatre principes précédens renferment tout le calcul des logarithmes; ils ont lieu quelle que soit la base b. Mais les logarithmes dont on se sert ordinairement sont ceux dont la base est 10; on les nomme *logarithmes ordinaires*, et ils vont seuls nous occuper. Ainsi, *le logarithme ordinaire d'un nombre est l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever la base* 10 *pour avoir ce nombre.* De sorte que ln étant le logarithme ordinaire du nombre n, on a $10^{ln} = n$.

428. On sait que $10^n = 1$ *suivi de* n *zéros*; donc n est le logarithme ordinaire de 1 *suivi de* n *zéros*. Les logarithmes ordinaires des nombres 1, 10, 100, 1000, 10000, etc., sont donc 0, 1, 2, 3, 4, etc. Quant aux logarithmes ordinaires des nombres compris entre 1 et 10, entre 10 et 100, entre 100 et 1000, etc., on peut les trouver par la résolution des équations exponentielles. Par exemple, x désignant le logarithme ordinaire de 2, on aura à résoudre l'équation $10^x = 2$. Or, c'est ce qu'on a déjà fait (384); et on a trouvé $l2$ ou $x = 0,3010300$. Les logarithmes ordinaires des autres nombres premiers s'obtiennent d'une manière absolument semblable.

Cette méthode de calcul est fort pénible; mais elle l'est encore moins que celle employée par les inventeurs des logarithmes. Aussi les tables furent-elles d'abord peu volumineuses. On a trouvé depuis, comme on le verra plus bas, des formules qui conduisent très-promptement aux logarithmes des nombres premiers. Quant aux logarithmes des nombres non-premiers on les obtient par de simples additions; car, par exemple, $l(210) = l(3.7.10) = l3 + l7 + 1$; $l(1600) = l(100.2^4) = 2 + 4l2$, etc. Enfin, il suffit de placer dans les tables des logarithmes des nombres entiers, puisqu'avec ces logarithmes, on a facilement ceux des fractions (425).

429. Connaissant les logarithmes des nombres dans un système dont b est la base, il est facile d'en déduire les logarithmes des mêmes nombres dans un autre système dont c serait la base. En effet, soit n un nombre, x son logarithme dans le système donné et y son logarithme dans le système cherché; on aura donc $n = b^x$ et $n = c^y$; d'où $c^y = b^x$. Prenant de part et d'autre les logarithmes relatifs à la base b, lb sera 1, et l'on aura

$$ylc = x = ln, \quad \text{ou} \quad y = \frac{ln}{lc} = ln \times \frac{1}{lc}.$$

Or, $\frac{1}{lc}$ étant un nombre qui restera toujours le même, quel que soit n, on voit qu'une première table étant déjà formée, si l'on veut en construire une nouvelle, on n'aura qu'à multiplier les logarithmes du premier système par la quantité constante $\frac{1}{lc}$.

Cette quantité constante, qui sert à passer d'une table à une autre, s'appelle *module* de la nouvelle table par rapport à l'ancienne.

430. Soit la proportion géométrique $a : b :: c : d$; on en déduit successivement $ad = bc$, $la + ld = lb + lc$ et $ld = lb + lc - la$; c'est-à-dire que dans toute proportion géométrique, le logarithme d'un extrême est égal à la somme des logarithmes de deux moyens, moins le logarithme de l'autre extrême.

431. Considérons la progression par quotient

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ aq^4,\ \ldots,\ aq^{n-1};$$

si l'on prend les logarithmes de ses termes, ces logarithmes formeront la progression par différence que voici :

$$la,\ la + lq,\ la + 2lq,\ la + 3lq,\ la + 4lq,\ \ldots,\ la + (n-1)lq.$$

D'où l'on voit que quand des nombres sont en progression géométrique, leurs logarithmes sont en progression par différence.

Et de là résulte que les logarithmes sont une suite de nombres en progression arithmétique, qui correspondent, terme à terme, à une autre suite de nombres en progression géométrique.

C'est là précisément la définition des logarithmes adoptée par leurs inventeurs, et qu'on retrouve encore dans quelques traités d'Arithmétique. Ainsi la définition des logarithmes, d'après les exposans, et la définition d'après les progressions, rentrent l'une dans l'autre et n'en font qu'une.

De l'usage des tables ordinaires.

432. L'usage des tables de logarithmes ordinaires suppose plusieurs principes. D'abord, soient m et p deux nombres et lm, lp leurs logarithmes; on aura donc $b^{lm} = m$ et $b^{lp} = p$. Si $m > p$, on aura aussi $b^{lm} > b^{lp}$, et par suite $lm > lp$ (378). D'où il suit que *plus un nombre est grand, plus son logarithme est grand; et réciproquement.*

433. Les logarithmes ordinaires sont exprimés en décimales, et renferment une *partie entière*, appelée *caractéristique*, parce qu'elle a toujours une unité de moins que le nombre n'a de chiffres entiers; ce qui permet de fixer ce nombre de chiffres, lorsque la caractéristique est donnée, et réciproquement. Par exemple, si la caractéristique a trois unités, le nombre aura quatre chiffres entiers.

En général, soit a un nombre de n chiffres entiers; ce nombre sera donc $>$ 1 *suivi de* $(n-1)$ *zéros* ou $> 10^{n-1}$, qui est le moindre nombre de n chiffres, et a sera $<$ 1 *suivi de* n *zéros* ou $< 10^n$, qui a $n+1$ chiffres entiers; on aura donc $a > 10^{n-1}$ et $a < 10^n$. Prenant les logarithmes de part et d'autre, il viendra $la > n-1$ et $la < n$. Ainsi le logarithme du nombre a, composé de n chiffres entiers, est compris entre $n-1$ et n; ce logarithme n'a donc que $n-1$ unités entières; sa caractéristique est par conséquent $n-1$. Ce qu'il fallait démontrer.

434. Il est clair, d'après ce qui précède (423 et 428), qu'on a $l(a.10) = la + 1$, $l(a.100) = la + 2$, $l(a.1000) = la + 3$, et en général, $l(a.10^r) = la + r$. Donc, *si l'on multiplie un nombre* a *par* 10, *par* 100, *par* 1000, *etc., son logarithme augmentera de* 1, 2, 3, *etc. unités.* Réciproquement, *si le logarithme d'un nombre* a *augmente de* 1, 2, 3, *etc. unités, ce nombre sera multiplié par* 10, *par* 100, *par* 1000, *etc.*

435. Prenant le logarithme de chaque quotient (325), il viendra $l(a:10) = la - 1$, $l(a:100) = la - 2$, $l(a:1000) = la$

-3, et en général, $l(a : 10^r) = la - r$. On voit que *si l'on divise un nombre* a *par* 10, *par* 100, *par* 1000, *etc.*, *son logarithme diminuera de* 1, 2, 3, *etc. unités*. Réciproquement, *si l'on diminue de* 1, 2, 3, *etc. unités le logarithme d'un nombre* a, *ce nombre sera divisé par* 10, *par* 100, *par* 1000, *etc.*

Les principes de ce numéro et des deux précédens n'ont pas lieu dans un autre système; et c'est sur-tout ce qui fait préférer les logarithmes ordinaires.

436. *Les différences des nombres sont entre elles comme les différences de leurs logarithmes.* Cette proportion n'est pas rigoureusement exacte; mais voici comment on peut s'assurer qu'elle est vraie par approximation :

En examinant les tables de logarithmes, on voit que quand les nombres consécutifs sont un peu grands, les accroissemens de leurs logarithmes ne diffèrent pas d'un cent-millième d'unité. Et ces accroissemens seraient encore moins différens, si les nombres, au lieu de croître successivement d'une unité, ne croissaient que de la quantité $d < 1$. Ainsi, en supposant que la totalité des augmentations de chaque nombre ne surpasse pas l'unité, *on pourra toujours admettre, sans erreur sensible, que chaque fois que le nombre croîtra de* d, *son logarithme croîtra de* d': donc, si le nombre a augmente de b fois d ou de c fois d, son logarithme x augmentera de b fois d' ou de c fois d'; on aura par conséquent

$$la = x,\ l(a + bd) = x + bd' \text{ et } l(a + cd) = x + cd'.$$

Or, bd et cd sont les différences du premier nombre a aux deux autres $a + bd$ et $a + cd$; bd' et cd' sont les différences du premier logarithme x aux deux suivans $x + bd'$ et $x + cd'$: donc, puisqu'on a évidemment

$$bd : cd :: bd' : cd',$$

il s'ensuit que la proportion énoncée est vraie, d'une manière approchée, tant que les nombres sont un peu grands et qu'ils ne diffèrent pas entre eux de plus d'une unité.

437. Nous verrons plus bas, que pour les nombres au-dessus de 1000, l'erreur de la proportion ne porte jamais sur les millièmes du nombre cherché, ni sur les millioniémes du logarithme demandé. Dans ce qui va suivre, nous supposerons entre les mains des élèves, les petites tables composées par Lalande ou

celles de Mr Reynaud. Les tables de Callet seraient préférables ; mais elles sont beaucoup plus chères.

438. *Étant donné un nombre, trouver son logarithme.*

Ce problème présente plusieurs cas particuliers, que nous allons examiner successivement.

Premier cas. Si le nombre proposé est un nombre décimal $p+p'$, p étant sa partie entière et p' sa partie décimale ; on observera que les différences p' et 1 du nombre p aux deux nombres $p+p'$ et $p+1$, sont entre elles comme les différences du logarithme de p aux logarithmes de $p+p'$ et de $p+1$ (436), et que par conséquent

$$p' : 1 :: l(p+p')-lp : l(p+1)-lp;$$
$$\text{d'où} \quad l(p+p') = lp + p'[l(p+1)-lp].$$

Ainsi, pour avoir le logarithme d'un nombre décimal donné, il faut ajouter au logarithme de la partie entière, le produit de la partie décimale par la différence entre le logarithme de la partie entière et celui du nombre entier immédiatement supérieur, différence qui est toujours calculée dans les tables. C'est ainsi qu'on aura $l(2159,8) = l(2159) + 0,8 \times 0,00020 = 3,33425 + 0,00016 = 3,33441$.

Second cas. Comme la règle précédente donne des résultats d'autant plus exacts que les nombres sont plus grands, il faudra toujours avancer la virgule d'assez de rangs vers la droite, pour que la partie entière soit l'un des plus grands nombres des tables, et chercher le logarithme du nombre décimal résultant. Or, en avançant la virgule de trois rangs vers la droite, par exemple, on multiplie le nombre proposé par 1000 ; son logarithme augmente donc de 3 unités (434) ; par conséquent, pour avoir le logarithme demandé, il faut diminuer celui qu'on a trouvé, de trois unités ; c'est-à-dire, d'autant d'unités que la virgule a été avancée de rangs vers la droite. Par ce procédé, on trouve que $l(21,598) = l(2159,8 : 100) = l(2159,8) - 2 = 1,33441$.

De même, $l(0,021598) = l(2159,8) - 5 = 3,33441 - 5$. Au lieu de soustraire le plus petit nombre du plus grand et de donner au reste le signe —, il est préférable de rendre la caractéristique seule négative, en retranchant 3 de 5 ; mais pour indiquer que le reste 2 est négatif, on met le signe — au-dessus et non avant ; de sorte qu'on a $l(0{,}21598) = \bar{2}{,}33441 = -2 + 0{,}33441$.

Le logarithme d'une fraction ordinaire est aussi négatif, lorsque le dénominateur surpasse le numérateur (425). Dans ce cas, pour que la caractéristique soit seule négative, on ajoute au logarithme du numérateur assez d'unités pour que la soustraction indiquée devienne possible, et on retranche le même nombre d'unités du logarithme restant. C'est ainsi qu'on aura $l\left(\frac{37}{175}\right) = l37 - l175 = 1{,}56280 - 2{,}24304 = \bar{1}{,}32516$.

Troisième cas. Si le nombre proposé surpasse le plus grand des tables, on avancera la virgule d'assez de rangs vers la gauche pour que la partie entière soit l'un des plus grands nombres *tabulaires*, et on cherchera le logarithme du nombre décimal résultant. Mais en avançant ainsi la virgule de deux rangs vers la gauche, par exemple, on divise le nombre proposé par 100 ; son logarithme diminue donc de deux unités (435) ; par conséquent, pour avoir le logarithme cherché, il faut ajouter à celui trouvé, deux unités ; c'est-à-dire autant d'unités que la virgule a été avancée de rangs vers la gauche. De cette manière on trouve que $l(21598) = l(2159{,}8) + 1 = 4{,}33441$.

439. *Étant donné un logarithme ordinaire, trouver le nombre qui lui appartient.*

Ce problème présente aussi plusieurs cas à examiner.

Premier cas. Si l'on ne trouve dans les tables que les premiers chiffres du logarithme donné ln, le nombre correspondant n sera compris entre les deux nombres entiers consécutifs p et $p+1$, le premier ayant un logarithme plus petit que le logarithme donné ln, et le second un logarithme plus grand. Or, les différences $n-p$ et 1 du nombre p aux deux n et $p+1$, sont entre elles comme les différences du logarithme de p à ceux de n et de $p+1$ (436) ; donc on a la proportion

$$n-p : 1 :: ln - lp : l(p+1) - lp ;$$

$$\text{d'où} \quad n = p + \frac{ln - lp}{l(p+1) - lp}.$$

Cette formule fait voir que, pour trouver le nombre qui correspond à un logarithme donné, dont les derniers chiffres ne sont pas dans les tables, il faut prendre le nombre appartenant au logarithme immédiatement inférieur, et ajouter à ce nombre la fraction ayant pour numérateur, la différence entre le logarithme donné et celui qui est immédiatement plus petit dans les tables, et pour dénominateur, la différence des logarithmes tabulaires qui comprennent le proposé. C'est ainsi qu'on aura le nombre correspondant au logarithme 3,45936 : on verra que ce logarithme tombe entre 3,45924 et 3,45939, qui sont les logarithmes de 2879 et 2880 ; et on en conclura que le nombre cherché est $2879\frac{12}{15}$ ou 2879,8.

Second cas. Comme la règle précédente donne des résultats d'autant plus exacts que les nombres sont plus grands, il faudra toujours ajouter assez d'unités à la caractéristique du logarithme donné, pour qu'elle soit la plus grande des tables, et chercher le nombre correspondant au nouveau logarithme. Or, en ajoutant, par exemple, 4 unités au logarithme donné, on multiplie le nombre correspondant par 10000 (434) ; on aura donc le nombre demandé en divisant le nombre trouvé par 10000 ; ce qui se fait en avançant la virgule de quatre rangs vers la gauche ; c'est-à-dire d'autant de rangs qu'on a ajouté d'unités à la caractéristique du logarithme proposé. Par ex., si $ln = 0,86784$, on ajoutera 3 unités à la caractéristique, et l'on trouvera, comme au numéro précédent, que le nombre correspondant au nouveau logarithme 3,86784 est 7376,3. Par conséquent le nombre cherché $n = 7,3763$. Si l'on avait $ln = \bar{2},86784$, on en déduirait $n = 0,073763$.

Enfin, si l'on a $ln = -0,82074$, on ajoutera 4 unités et on effectuera la soustraction, ce qui donnera $3,17926 = l(1511)$; le nombre cherché est donc $n = 0,1511$.

Troisième cas. Si la caractéristique excède la plus grande des tables, on en soustraira assez d'unités pour qu'elle lui soit égale, puis on cherchera le nombre correspondant au nouveau logarithme. Or, en ôtant ainsi 2 unités du logarithme donné ln, on divise le nombre n par 100 (435) ; on aura donc ce nombre n en multipliant le nombre trouvé par 100 ; ce qui se fera en avançant la virgule de deux rangs vers la droite ; c'est-à-dire d'autant de rangs qu'on a ôté d'unités de la caractéristique. D'après ce procédé, on trouve que si $ln = 4,47659$, on aura $n = 29963$. En effet, il est clair que $ln = 4,47659 = 3,47659 + 1 = l(2996,3) + l10 = l(2996,3 \times 10) = l(29963)$.

440. Il est d'usage de réduire en décimales la fraction qu'il

faut joindre au nombre tabulaire pour avoir celui que l'on cherche. Mais alors, en se servant des tables de LALANDE, on ne doit pousser l'opération que jusqu'aux dixièmes, parce que c'est le seul chiffre décimal dont on soit sûr. En effet, on voit dans les tables de CALLET, que quand les nombres surpassent 40 ou 50 mille, les logarithmes consécutifs ne diffèrent pas d'une demi-unité décimale du 5^{me} ordre; et par conséquent, si les tables employées n'ont que cinq décimales, il arrivera nécessairement que plusieurs nombres consécutifs au-dessus de 50000 auront le même logarithme. Si donc ce logarithme était donné, on ne serait pas sûr, avec ces tables, de trouver le nombre correspondant à moins d'une unité près. En général, lorsqu'on cherche le nombre qui correspond à un logarithme, on n'est pas sûr de l'avoir à moins d'une unité près, quand ce nombre doit être composé d'autant de chiffres qu'il y a de décimales dans le logarithme donné.

441. On appelle *logarithme limite relatif* à une table, le plus grand de tous ceux qui font trouver les nombres correspondans à moins d'une unité près; de manière que pour les logarithmes supérieurs, on ne serait pas certain, en général, d'avoir le nombre à ce degré d'exactitude.

On voit que le logarithme limite peut avoir plusieurs valeurs. Mais comme on sait de mémoire que 0,3010300 est le logarithme de 2, on est convenu de former le logarithme limite en prenant deux fois celui de 2, plus autant d'unités moins une qu'il y a de décimales dans ce logarithme. Ainsi pour les tables de Lalande, le logarithme limite est 4,60206; qui répond au nombre 40000. Pour les tables à 6 décimales, le logarithme limite est 5,602060, et pour celles de Callet il est 6,602600. Au delà de cette limite on ne peut plus compter en général, à moins d'une unité, sur le nombre trouvé, quoique l'on puisse encore y compter pour quelques nombres.

442. Le résultat de l'addition et de la soustraction de plusieurs logarithmes peut s'obtenir par une seule addition, à l'aide des *complémens arithmétiques*. On appelle complément arithmétique d'un logarithme, ce qu'il faut ajouter à ce logarithme pour avoir 10 unités entières; en d'autres termes, c'est le reste qu'on obtient en soustrayant le logarithme proposé de 10.

On trouve le complément arithmétique, en retranchant le premier chiffre à droite de 10, s'il est significatif, et tous les autres de 9. Ce complément peut donc être formé, pour ainsi dire, d'après l'inspection du logarithme, ou d'après sa dictée.

Cela posé, voici l'usage des complémens arithmétiques. Soit $lx = la + lb - lc - ld - le$, et désignons, pour abréger, par $l'c$ le complément arithmétique de lc, et ainsi des autres ; nous aurons évidemment, à cause de $lc = 10 - l'c$, etc., $lx = la + lb - (10 - l'c) - (10 - l'd) - (10 - l'e)$; d'où $lx = la + lb + l'c + l'd + l'e - 30$.

De sorte que *pour avoir le logarithme cherché, il faut faire la somme des logarithmes additifs et des complémens des logarithmes soustractifs, puis retrancher de cette somme autant de fois* 10 *qu'on a pris de complémens.*

D'après cette règle, la proportion $37 : 259 :: 497 : x$, donnant $lx = l259 + l497 - l37$; on en déduira

$$lx = l259 + l497 + l'37 - 10 = 2,41330 + 2,69636 + 8,43180 - 10 = 3,54146. \text{ D'où } x = 3479,1, \text{ à } 0,1 \text{ près.}$$

443. Nous devons faire observer que, comme on n'a considéré et calculé dans les tables, que les logarithmes des nombres absolus, il n'y a pas lieu à chercher le logarithme d'un monome soustractif. Cependant, le logarithme d'une quantité négative peut exister ; car si la base est 9, le logarithme de -3 sera $\frac{1}{2}$; et si la base était 64, le logarithme de -32 serait $\frac{5}{6}$. Lors donc qu'on sera conduit à une expression négative, on ne pourra en trouver la valeur numérique à l'aide des logarithmes, qu'après avoir fait disparaître le signe $-$. Et comme une expression négative désigne une impossibilité (151), il en sera de même du logarithme d'une quantité négative.

Application de la théorie des logarithmes.

444. Les logarithmes abrégent tellement le calcul des nombres, que par leur moyen les multiplications, les divisions, les élévations aux puissances et les extractions de racines, se changent respectivement en additions, soustractions, multiplications et divisions très-simples. Aussi fait-on un grand usage des logarithmes, quoique leur emploi ne soit indispensable que quand l'inconnue fait partie des exposans. Par exemple, si l'on a

$$x = \frac{28672 \sqrt[3]{164025}}{675 \sqrt[5]{74088}},$$

on prendra les logarithmes de part et d'autre, et on aura

$$lx = l28672 + \tfrac{1}{3} l164025 - l675 - \tfrac{1}{5} l74088,$$

$$\text{ou } lx = 2,61236 \text{ ; d'où } x = 409,6.$$

Cette valeur est exacte, comme on peut le vérifier en décomposant les nombres proposés dans leurs facteurs premiers.

445. Opérant par logarithmes, on verra que, dans les deux expressions,

$$x = \frac{78425}{72}\sqrt[3]{54 \times 0{,}864} \quad \text{et} \quad y = \frac{54\sqrt[3]{1728}\sqrt{28224}}{\sqrt{576}\sqrt[4]{243 \cdot 2187}},$$

on a $x = 3921{,}25$ et $y = 168$, valeurs exactes.

446. Le logarithme de $a \pm b$ n'est pas $la \pm lb$. En général, les logarithmes n'abrégent le calcul d'une expression numérique, qu'autant que cette expression peut se décomposer en facteurs; il faudra donc toujours tâcher d'effectuer cette décomposition. Et c'est à quoi l'on parviendra le plus souvent, à l'aide d'*inconnues auxiliaires*. Par exemple, si l'on a

$$(2a^3 - b^2c + 4c^3)\,x = a^2b - bc^2;$$

on en déduira d'abord

$$[2a^3 - c(b+2c)(b-2c)]\,x = b(a+c)(a-c).$$

Ensuite, si l'on pose $c(b+2c)(b-2c) = 2a^2u$, il viendra

$$2a^2(a-u)\,x = b(a+c)(a-c).$$

La valeur de u pouvant se calculer aisément par logarithmes, il en sera de même de celle de x.

De même, si l'on avait à calculer par logarithmes, les valeurs de x, y, z, dans les trois équations

$$x^2 = a^2 + b^2,\; y = (a^3 - b^3)^m \;\text{et}\; (a^4 - b^4)\,z = (a^3 + b^3)^n;$$

la première de ces équations donnerait

$$t^2 = 2ab \;\text{ et }\; x^2 = (a+b+t)(a+b-t);$$

et l'on décomposerait les deux autres équations en facteurs, d'une manière analogue.

447. La résolution des équations exponentielles s'opère facilement par logarithmes, pourvu que ces équations puissent se décomposer en facteurs, ou bien se ramener à l'une des formes

$$pa^x = q,\; pa^{mx^c} = b^{x^{2c}},\; a^x = pb^{x-m},\; a^{mx-n} = pb^{x^2}, \text{ etc.}$$

Par exemple, si on a $a^{2x} + c^{3x} = 2a^{2x+1}$, on en déduira

$$c^{3x} = a^{2x}(2a-1).$$

Prenant les logarithmes des deux membres, on obtiendra

$$3xlc = 2xla + l(2a-1),$$

équation du premier degré en x.

Pour avoir la valeur de x dans l'équation
$a^{x-4}=b\sqrt[r]{\left(\frac{2a^2}{a-c}\right)^n}-2bc$, on posera $y=\sqrt[r]{\left(\frac{2a^2}{a-c}\right)^n}$.

Si l'on avait $a^{2x}=a\sqrt[3]{a^2b}\,(\sqrt{ab})^{x^2}$, on en déduirait

$$2xla=la+\tfrac{1}{3}(2la+lb)+\tfrac{1}{2}x^2(la+lb),$$

équation du second degré, qu'on sait résoudre.

Si l'équation à résoudre était *double exponentielle*, comme $a^{b^x}=c$, on en tirerait d'abord $b^x la=lc$, $b^x=\frac{lc}{la}=d$, et ensuite $xlb=ld$. On traite de même les équations triples exponentielles.

On peut s'exercer à résoudre par logarithmes, les équations que voici :

$$8^{x^3}=1469;\ 3\cdot2^{x-1}=6144;\ 3^{x-1}=17\tfrac{1}{3}+3^{x-3};$$
$$11^{x^2-2x}=1331;\ \sqrt[x]{6^{6x-1}}=2^{4x}\cdot3^{3x-1};\ (\sqrt[3]{8^6})^x=4^{9x-8}$$
$$\text{et }\ 27\cdot3^{x^2-3x}=\sqrt[x]{19683}.$$

448. *Trouver la somme à rendre au bout de* n *années, pour une somme* a *qu'on vient d'emprunter. L'intérêt annuel de* 1 *est* r, *et l'on a égard aux intérêts des intérêts.*

Il est clair que 1^f au commencement de l'année, vaut à la fin $1+r$. Soit b cette valeur, ou $b=1+r$: puisque 1^f vaut b, a vaudra a fois b ou ab. D'où il suit que *la somme à rendre au bout de l'année s'obtient en multipliant le capital de cette année par* b. Mais les intérêts étant composés, la somme à rendre à la fin de chaque année est le capital de l'année suivante ; par conséquent, le capital de la première année étant a, les sommes à rendre au bout des années 1re, 2e, 3e, ..., $n$me, seront ab, ab^2, ab^3, ..., ab^n. Si donc S désigne la somme à rendre au bout de la $n$me année, on aura $S=ab^n$.

Prenant les logarithmes de part et d'autre, cette formule conduit aux quatre suivantes :

$$lS=la+nlb,\quad la=lS-nlb,$$
$$lb=\frac{lS-la}{n}\quad\text{et}\quad n=\frac{lS-la}{lb}.$$

Ces quatre formules résolvent quatre problèmes généraux, dont voici des cas particuliers : 1° Trouver ce que deviendra la somme 376f, prêtée à 6 p. $\frac{2}{3}$ par an, pendant 20 ans, les intérêts étant composés. (R. 1205f, 88.)

2° Quelle somme devrait-on prêter pendant 25 ans, à 5 p. 100, pour recevoir 3386f, tant en capital qu'intérêts composés? (R. 1000f.)

3° A combien p. 100 par an devrait-on prêter 1500f pendant 3 ans, pour recevoir 2592f, tant en capital qu'intérêts composés? (R. à 20.).

4° Pendant combien d'années doit-on placer une somme a, à intérêts composés, à 5 et à 10 pour 100 par an, pour recevoir $2a$? (R. Pendant 14 ans 76 jours, à 5, et pendant 7 ans 93 jours, à 10.)

449. *Une personne doit une somme* a, *et demande combien elle doit payer au bout de chaque année, pour qu'après* n *années, elle ait acquitté sa dette avec les intérêts composés pendant ce temps. L'intérêt annuel de* 1 *est* r.

Soit x la somme à payer au bout de chaque année et b la valeur annuelle $1+r$ de 1f : il est clair que la somme x, payée à la fin de la v^{me} année, reste $n-v$ années chez le prêteur, et y vaut, au bout de la n^{me}, xb^{n-v} (448). Prenant dans cette valeur, successivement $v=1, 2, 3, 4, \ldots, n$, on aura successivement les valeurs, au bout de la n^{me} année, des sommes x payées à la fin des années 1re, 2e, 3e, 4e, ..., n^{me}; ces valeurs sont donc

$$xb^{n-1},\ xb^{n-2},\ xb^{n-3},\ xb^{n-4},\ \ldots,\ xb^0 \text{ ou } x.$$

Or, la somme de ces valeurs doit former ab^n, qui est ce que vaut la dette a après n années (448). Mais la somme des mêmes valeurs, prises à rebours, est une progression géométrique dont le premier terme est x, le dernier xb^{n-1} et la raison b; on a donc (398)

$$\frac{xb^n-x}{b-1}=ab^n \ldots (1)$$

Posant $y=b^n=(1+r)^n$, et prenant les logarithmes de part et d'autre, on aura

$$ly=nl(1+r) \text{ et } lx=l(ar)+ly-l(y-1)\ldots(2)$$

Par ex., si $a=864^f$, $r=0{,}05$ ou $ar=43{,}20$ et $n=15$, on trouvera $x=83{,}2529$ ou simplement $x=83^f{,}25$.

Pour trouver a, on a les deux formules

$$ly=nl(1+r) \text{ et } la=lx+l(y-1)-ly-lr.$$

Par exemple, si $n = 3$, $x = 1331$ et $r = 0,1$, on aura $a = 3310$.

Enfin, si l'on veut avoir n, l'équation (1) donnera d'abord

$$(1 + r)^n = \frac{x}{x - ar}, \text{ puis } n = \frac{lx - l(x - ar)}{l(1 + r)}.$$

Lorsque $x < ar$, $x - ar$ est négatif et la formule conduit à prendre le logarithme d'un monome négatif; ce qui ne saurait avoir lieu, puisque les tables ne renferment que les logarithmes des nombres. Cette circonstance fait soupçonner une impossibilité lorsque $x < ar$ ou que $x < a(b - 1)$.

Et en effet, on voit qu'alors le premier membre de l'équation (1) est moindre que le second; cette équation est donc impossible, ainsi que le problème qui l'a fournie.

450. *Trouver quelle somme* S *un débiteur redevra après* n *années, s'il paye* x *au bout de chaque année sur une somme* a *qu'il vient d'emprunter? L'intérêt annuel de* 1 *est* r, *et l'on a égard aux intérêts des intérêts.*

Il est clair, d'après le problème précédent, qu'on aura

$$S = ab^n - \frac{x}{r}(b^n - 1),\ b = 1 + r.$$

Si le débiteur, au lieu de payer x^f au bout de chaque année, empruntait au contraire x^f, x deviendrait $-x$ dans la formule précédente. Suivant que cette formule donnera S positif, nul ou négatif, le débiteur redevra, se sera acquitté, ou on lui redevra.

451. *Un particulier qui, pendant* n *années, a placé une somme* a *au commencement de chaque année, veut se faire rembourser ce qui lui est dû à la fin de la* n^me^, *en* m *paiemens égaux, effectués au commencement de chacune des* m *années qui suivent la* n^me^. *On demande la valeur* x *de chaque remboursement.*

Il est clair que la somme des valeurs des n placemens, au bout de la $(n + m)^{me}$ année, doit être égale à la somme des valeurs des m remboursemens, à la même époque : on a donc l'équation

$$ab^{m+n-1} + ab^{m+n-2} + \cdots + ab^m = xb^{m-1} + xb^{m-2} + \cdots + x.$$

De cette équation, où $b = 1 + r$, on tire

$$(b^m - 1)x = ab^m(b^n - 1).$$

Si $a = 231700$, $n = 2$, $m = 3$ et $r = 0,1$, on aura $x = 195657$.

Faisant successivement $m = n$ et $m = \infty$, on aura successivement
$$x = ab^m \text{ et } x = a(b^n - 1).$$

452. *Un particulier, âgé de* m *années, place une somme* a *en rente viagère. On demande la valeur* x *de cette rente, dans l'hypothèse que ce particulier doit encore vivre* n *années.* Dans ce problème, il s'agit de rembourser la somme a et ses intérêts composés en n paiemens égaux effectués à la fin de chaque année; chaque paiement sera la valeur x de la *rente viagère.* On aura x par la formule (2) du n° 449.

Lorsqu'un homme place une somme a en rente viagère, il ignore combien il a encore d'années à vivre; mais on détermine ce nombre n au moyen de la table de mortalité que voici :

0.	5.	10.	15.	20.	25.	30.	35.	40.	45.	50.	55.	60.	65.	70.	75.	80.	85	ans.
25.	43.	41.	37.	35.	31.	29.	27.	24.	20.	18.	14.	12.	10.	8.	5.	4.	3.	

Dans cette table on a mis sous chaque âge, le temps qui reste à vivre, d'après les *probabilités.* Cette table n'est applicable qu'à un grand nombre d'individus, parce que les uns gagnent en durée de la vie ce que les autres perdent. Par exemple, les probabilités indiquent qu'une personne âgée de 45 ans, a encore 20 ans à vivre; pour déterminer le taux de la rente viagère qui correspond à cette probabilité, on fait $a = 100$, $n = 20$ et $r = 0,05$ dans la formule (2), et on trouve $x = 8$; de sorte que la rente viagère est à 8 p. $\frac{0}{0}$.

453. Quelle somme doit-on placer à présent, pour retirer pendant 12 ans et à la fin de chaque année une somme de 1500f, de manière à être remboursé du capital et de ses intérêts composés au bout de ces 12 années, l'argent étant à 7f,50 par an? (R. 11602,91.)

Quelle somme doit-on donner au bout de chaque année, pour acquitter en 10 ans une dette de 14000f, avec ses intérêts composés pendant ces 10 ans, l'argent étant à 5 pour 100 par an? (R. 1813f.)

Un particulier qui doit 3310f, voudrait s'acquitter en donnant 1331f au bout de chaque année. A quelle époque ne devra-t-il plus rien? L'argent étant à 10 p. $\frac{0}{0}$ et les intérêts étant composés, (R. Dans 3 ans.)

Une population augmente chaque année de la 100e partie de ce qu'elle était l'année précédente; combien faudrait-il encore d'années pour qu'elle fût 10 fois plus grande? (R. 231, environ.)

Des arrangemens et des combinaisons.

454. Lorsque des expressions, sommes ou produits, sont composées de lettres semblables ou différentes, placées dans divers ordres, chacun de ces assemblages est appelé un *arrangement* des lettres qui le composent; mais si l'une au moins de ces lettres est différente dans chaque expression et qu'on n'ait pas égard aux rangs des lettres, ces expressions se nomment des *combinaisons*. Ainsi trois lettres a, b, c, ajoutées 2 à 2, donnent les six arrangemens $a+b$, $b+a$, $a+c$, $c+a$, $b+c$, $c+d$, et seulement les trois combinaisons $a+b$, $a+c$, $b+c$. Les mêmes lettres multipliées 3 à 3, donnent les six arrangemens ou *permutations* abc, bac, acb, cab, bca, cba, et seulement la combinaison abc.

On distingue les *permutations* des *arrangemens*, en ce qu'on réserve le premier nom aux arrangemens de p lettres entre elles, ou p à p : mais cette distinction est fort peu utile.

455. *Trouver le nombre* x_n *de tous les arrangemens différens que l'on peut former avec* m *lettres, prises* n *à* n.

Soient x_v et x_{v+1} les nombres respectifs de tous les arrangemens différens que l'on peut former avec m lettres, placées v à v et $v+1$ à $v+1$. Si l'on prend l'un des arrangemens de v lettres, et qu'on écrive à sa droite, successivement chacune des $m-v$ lettres restantes, on formera $m-v$ arrangemens différens de $v+1$ lettres : et si l'on agit de même pour chacun de x_v arrangemens différens de v lettres, on aura à chaque fois $m-v$ arrangemens différens de $v+1$ lettres; donc en tout, on aura $(m-v)x_v$ arrangemens de $v+1$ lettres : or, ces arrangemens diffèrent tous; car si deux d'entre eux étaient égaux à $cdef\ldots ab$, on aurait écrit deux fois de suite la même lettre b à côté de l'arrangement $cdef\ldots a$ de v lettres; ce qui est contre l'hypothèse : les mêmes arrangemens sont tous ceux qu'on peut former avec m lettres, prises $v+1$ à $v+1$; car si un arrangement, tel que $defg\ldots ck$, ne s'y trouvait pas, il faudrait qu'on eût oublié d'écrire la lettre k à la droite de l'arrangement $defg\ldots c$ de v lettres; ce qui est encore contre l'hypothèse. Donc réellement, $(m-v)x_v$ est le nombre x_{v+1} de tous les arrangemens différens que l'on peut former avec m lettres, placées $v+1$ à $v+1$, et l'on a $\quad x_{v+1}=(m-v)x_v.$

Faisant successivement $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, n-1$; multipliant entre elles les $n-1$ équations résultantes, supprimant les facteurs communs aux deux membres et observant que m lettres, prises 1 à 1, donnent m arrangemens différens d'une lettre, d'où $x_1 = m$, il viendra

$$x_n = m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-n+1).$$

Ainsi le nombre de tous les arrangemens différens que l'on peut former avec m choses, en les plaçant n à n, est égal au nombre m multiplié par le produit de tous les $n-1$ nombres entiers immédiatement inférieurs à m.

D'après cela, les nombres de tous les arrangemens différens de m lettres, prises 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4, etc., sont respectivement: $m(m-1)$, $m(m-1)(m-2)$, $m(m-1)(m-2)(m-3)$, etc.

456. *Déterminer le nombre y_n de toutes les combinaisons différentes que l'on peut former avec* m *lettres, en les plaçant* n *à* n.

Si dans chaque combinaison de n lettres, on arrange ces lettres n à n, on aura, d'après ce qui précède (455), $n(n-1)(n-2)\ldots 2.1$ arrangemens différens, pour chaque combinaison de n lettres; donc, pour les y_n combinaisons, on aura $1.2.3\ldots(n-1)ny_n$ arrangemens. Or, puisque toutes les y_n combinaisons diffèrent au moins d'une lettre, le même arrangement n'est pas répété dans tous ceux qu'on vient de former : de plus, on ne saurait en former d'autres; car chaque nouvel arrangement ne pourrait renfermer que n des m lettres proposées; il se trouverait donc avoir précisément les mêmes lettres que l'une des y_n combinaisons, et serait par conséquent l'un des arrangemens fournis par cette combinaison. D'où il suit que le nombre de tous les arrangemens différens que l'on peut former avec m lettres, prises n à n, est $1.2.3\ldots(n-1)ny_n$: et puisque ce nombre est aussi $m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$, (455), il en résulte

$$y_n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n} \ldots (1)$$

Ainsi pour avoir le nombre de toutes les combinaisons différentes que l'on peut former avec m lettres, prises n à n, il faut multiplier le nombre m par le produit de tous les $n-1$ nombres entiers immédiatement inférieurs à m, puis diviser le produit par celui de tous les nombres entiers, depuis 1 jusqu'à n, inclusivement.

D'après cette règle, les nombres de combinaisons différentes (sommes ou produits), qu'on peut former avec m lettres, prises 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4, etc., sont respectivement :

$$\frac{m(m-1)}{1.2},\quad \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3},\quad \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4},\ \text{etc.}$$

457. Changeant n en $n-1$ dans la formule (1), on verra que la valeur de y_n a le facteur $\frac{m-n+1}{n}$ de plus que la valeur de y_{n-1}; de sorte qu'on a

$$y_n = \frac{m-n+1}{n} y_{n-1}.$$

De là résulte le moyen de passer du nombre de combinaisons de m lettres, $n-1$ à $n-1$, au nombre de combinaisons de m lettres, n à n.

458. On a $y_p = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{1.2.3\ldots p}$.

Si $n > p$, tous les facteurs de y_p entreront dans y_n, qui pourra conséquemment s'écrire comme il suit :

$$y_n = y_p \times \frac{(m-p)(m-p-1)\ldots(m-n+1)}{(p+1)(p+2)\ldots n}.$$

Prenons $p = m-n$; alors les facteurs du numérateur de la fraction qui multiplie y_p, pris dans l'ordre inverse, seront tous égaux à ceux du dénominateur; cette fraction se réduira donc à l'unité, et il viendra

$$y_n = y_p \quad \text{ou} \quad y_n = y_{m-n};$$

c'est-à-dire que m *lettres, prises* n *à* n, *donnent le même nombre de combinaisons que ces* m *lettres, prises* m—n *à* m—n. Ce principe sert à rendre plus faciles les calculs des nombres de combinaisons; car s'il fallait trouver le nombre de tous les résultats fournis par 20 lettres, combinées 17 à 17, il serait beaucoup plus simple de chercher le nombre de résultats que donnent ces 20 lettres, combinées 3 à 3, nombre qui est le même que l'autre et qui se réduit à 1140.

459. Il est aisé de s'assurer que le nombre de combinaisons de $m+1$ lettres, prises n à n, est égal à la somme des nombres de combinaisons de m lettres, prises n à n et $n-1$ à $n-1$.

460. Parmi les m lettres proposées, on peut en désigner m', et chercher le nombre x des combinaisons n à n, dont chacune renferme précisément n' des lettres désignées.

Pour abréger, représentons par $[m\,C\,n]$ le nombre de toutes les combinaisons de m lettres, n à n. Cela posé, on observe que chacune des combinaisons cherchées contient n lettres, dont n' sont prises parmi les m' lettres désignées et les $n-n'$ autres parmi les $m-m'$ non désignées. Opérant donc toutes les y combinaisons des m' lettres, n' à n', et les z combinaisons des $m-m'$ lettres, $n-n'$ à $n-n'$, on aura

$$y=[m'\,C\,n'] \quad \text{et} \quad z=[(m-m')\,C\,(n-n')].$$

A la droite de chacune des combinaisons de m' lettres, n' à n', écrivons chacune des combinaisons de $m-m'$ lettres, $n-n'$ à $n-n'$; alors, comme chaque combinaison de m' lettres, n' à n', en fournira z, n à n, contenant chacune n' lettres désignées; les y combinaisons, n' à n', en fourniront yz, n à n, contenant chacune n' des m' lettres désignées. Toutes ces combinaisons diffèrent évidemment, et on ne saurait en trouver d'autres de n lettres, contenant chacune n' des lettres désignées : car chaque nouvelle combinaison de cette espèce, qu'on voudrait former, devant contenir n' des m' lettres désignées, serait la combinaison de n lettres fournie par la combinaison de ces n' lettres. Ainsi on a $x=yz$,

$$\text{ou} \quad x=[m'\,C\,n']\times[(m-m')\,C\,(n-n')].$$

461. Cette formule résout les cinq problèmes particuliers que voici :

1° Dans combien de combinaisons entre la lettre a? Alors $m'=n'=1$ et $x=[(m-1)\,C\,(n-1)]$. Par exemple, 10 lettres se combinent 4 à 4 de 210 façons, dont 84 contiennent a.

2° Combien de combinaisons contiennent a sans b et b sans a? $m'=2$, $n'=1$ et $x=2\times[(m-2)\,C\,(n-1)]$. Des 210 combinaisons de 10 lettres 4 à 4, il en est 112 qui contiennent a sans b et b sans a.

3° Combien y a-t-il de combinaisons renfermant a et b ensemble? $m'=n'=2$ et $x=[(m-2)\,C\,(n-2)]$. Dans notre exemple, il y a 28 combinaisons contenant a et b.

4° Combien y a-t-il de combinaisons ne contenant ni a, ni b? $m'=2$ et $n'=0$; d'où $x=[(m-2)\,C\,n]$. Il y a 70 combinaisons de 10 lettres 4 à 4, sans a ni b.

5° Sur les combinaisons de m lettres n à n, combien en est-il qui contiennent deux des trois lettres a, b, c? $m'=3$, $n'=2$ et $x=3\times[(m-3)\,C\,(n-2)]$. Voyez le vol. II du Cours de Mathématiques pures de M. Francœur, 2ᵉ édition.

De la formation des puissances des polynomes.

462. Occupons-nous d'abord des puissances des binomes, et observons que, pour mieux connaître la composition de ces puissances, il est nécessaire d'empêcher les réductions qui proviennent de l'égalité des facteurs. Or, c'est à quoi l'on parvien-

dra en multipliant entre eux plusieurs binomes qui n'aient que le premier terme de commun, tels que $x+a$, $x+b$, $x+c$, etc.

En effet, si l'on effectue ces multiplications et qu'on réunisse en un seul tous les multiplicateurs d'une même puissance de x, on trouvera :

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$;
$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$;
$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+(a+b+c+d)x^3+$
$(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2+(abc+abd+acd+bcd)x+abcd$;

et ainsi de suite. Mais sans continuer plus loin ces produits, on peut déjà reconnaître la *loi* de leur formation; et en général, on voit que,

Si l'on multiplie entre eux m binomes dont le premier terme x est commun, tels que $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$, etc., et qu'on réunisse en un seul tous les multiplicateurs d'une même puissance de x, on obtiendra un produit de $m+1$ termes. Dans le premier, x aura un exposant m égal au nombre de binomes; et cet exposant diminuera successivement d'une unité, jusqu'au dernier terme, où il sera zéro. Le coefficient de x, dans le premier terme du produit, sera l'unité; dans le second, il sera la somme des m seconds termes des binomes; dans le troisième, la somme de tous les produits des m seconds termes combinés 2 à 2; dans le quatrième, la somme de tous les produits des m seconds termes combinés 3 à 3; et ainsi de suite, jusqu'au dernier terme, où x^0 aura pour coefficient le produit des m seconds termes des binomes.

De sorte que le produit des m binomes proposés, peut être représenté par

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\cdots$$
$$+Mx^{m-n+1}+Nx^{m-n}+\cdots+Zx^0.$$

Multipliant ce produit par un nouveau binome $x+h$, on obtiendra,

$$x^{m+1}+(A+h)x^m+(B+Ah)x^{m-1}+(C+Bh)x^{m-2}$$
$$+\cdots+(N+Mh)x^{m-n+1}+\cdots+Zhx^0.$$

Ce nouveau produit ayant $m+1$ facteurs binomes $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$, ..., $x+g$, $x+h$, on voit que les exposans de x suivent la loi énoncée. Mais les coefficiens de x

suivent aussi, dans ce produit, la même loi que dans le précédent. En effet,

1° A étant la somme des seconds termes des m premiers binomes, $A + h$ sera la somme des $m + 1$ seconds termes de ces binomes et du nouveau $x + h$.

2° A étant la somme des m premiers seconds termes, Ah sera la somme de tous les produits des $m + 1$ seconds termes, combinés 2 à 2, où h se trouve : mais déjà B est la somme de tous les produits des $m + 1$ seconds termes, combinés 2 à 2, où h n'entre pas ; donc $B + Ah$ est la somme de tous les produits des $m + 1$ seconds termes, combinés 2 à 2.

3° B étant la somme de tous les produits différens des m seconds termes, combinés 2 à 2, Bh sera la somme de tous les produits des $m + 1$ seconds termes, combinés 3 à 3, où h se trouve. Mais déjà C est la somme de tous les produits différens des $m + 1$ seconds termes, combinés 3 à 3, où h n'entre pas ; donc $C + Bh$ est la somme de tous les produits des $m + 1$ seconds termes, combinés 3 à 3.

4° En général, M étant la somme de tous les produits des m premiers seconds termes, combinés $n - 1$ à $n - 1$, Mh sera la somme de tous les produits des $m + 1$ seconds termes, combinés n à n, où h se trouve. Mais N est la somme de tous les produits des $m + 1$ seconds termes, combinés n à n, où h n'entre pas ; donc $N + Mh$ est la somme de tous les produits des $m + 1$ seconds termes, combinés n à n.

5° Enfin, Z étant le produit des m premiers seconds termes, Zh sera le produit des $m + 1$ seconds termes des binomes.

On voit donc, que si la loi énoncée, pour les exposans et les coefficiens de x, est vraie dans un produit de m binomes, elle sera vraie aussi pour un produit de $m + 1$ binomes. Or, cette loi est démontrée pour un produit de 4 binomes ; elle est donc aussi démontrée pour un produit de 5 binomes. Étant vraie pour un produit de 5 binomes, elle le sera donc encore pour le produit de 6 binomes, et par conséquent pour le produit de 7 binomes, de 8, de 9, et en général, pour le produit d'un nombre quelconque de binomes.

463. Au moyen de cette loi, il est aisé de trouver la formule pour calculer une puissance quelconque d'un binome. En effet,

supposons qu'il y ait m facteurs égaux entre eux et à $x+a$; leur produit sera donc $(x+a)^m$, et l'on aura d'abord

$$(a+x)^m = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \cdots + Mx^{m-n+1} + Nx^{m-n} + \cdots + Z.$$

Le coefficient A du second terme, étant la somme de m lettres égales à a, sera ma. Le coefficient B du troisième terme étant la somme de tous les produits de m lettres égales à a, combinées 2 à 2, renfermera, comme on l'a vu (456), $\frac{m(m-1)}{1.2}$ produits: et comme tous ces produits sont égaux à a^2, il s'ensuit que

$$B = \frac{m(m-1)}{1.2}a^2.$$

Le coefficient C du quatrième terme, étant la somme de tous les produits différens de m lettres égales à a, combinées 3 à 3, contiendra $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$ produits (456): et puisque tous ces produits sont égaux à a^3, il en résulte que $C = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3$.

En général, le coefficient M du n^{me} terme, étant la somme de tous les produits de m lettres égales à a, combinées $n-1$ à $n-1$, renfermera $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}$, ou P produits, tous égaux à a^{n-1} (456), et on aura $M = Pa^{n-1}$. De même, le coefficient N du $(n+1)^{me}$ terme, sera $N = P\frac{m-n+1}{n}a^n$.

Enfin, le dernier terme Z, étant le produit de m lettres égales à a, sera a^m. On a par conséquent la formule

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2..3}a^3x^{m-3} + \cdots + Pa^{n-1}x^{m-n+1} + P\frac{m-n+1}{n}a^nx^{m-n} + \cdots + a^m.$$

Dans cette formule, $P\frac{m-n+1}{n}a^nx^{m-n}$ est le terme qui en a n avant lui : c'est le *terme général*, puisqu'en y faisant successivement $n = 1, 2, 3, 4, \ldots, m$, on en déduit successivement les termes 2^e, 3^e, 4^e, 5^e, ..., $(m+1)^{me}$; et il faut bien remarquer que la formule n'a jamais que $m+1$ termes.

464. Le terme général étant comparé au terme précédent, fait voir que, *pour passer d'un terme quelconque de la valeur de* $(x+a)^m$, *à celui qui le suit immédiatement, il faut multi-*

plier le coefficient du terme donné par l'exposant de x *dans ce même terme; diviser le produit par le rang de ce terme; puis augmenter de* 1 *l'exposant de* a, *et diminuer de* 1 *celui de* x : *le résultat sera le terme cherché.*

C'est dans cette loi que consiste principalement le binome de Newton : elle sert à développer une puissance particulière, sans qu'on soit même obligé d'avoir recours à la formule générale. Par exemple, si l'on veut trouver, d'après cette loi, le développement de $(x+a)^6$, on formera d'abord les deux premiers termes x^6+6ax^5, ce qui n'a aucune difficulté, d'après les premiers termes de la formule générale; ensuite, on multipliera le coefficient 6 du second terme par l'exposant 5 de x dans ce terme, on divisera le produit 30 par le rang 2 de ce même terme, on augmentera de 1 l'exposant de a et diminuera de 1 celui de x, et il viendra $15a^2x^4$ pour le troisième terme cherché. On aura de même le quatrième terme $20a^3x^3$, à l'aide du troisième. Continuant cette manière d'opérer, on verra que

$$(x+a)^6=x^6+6ax^5+15a^2x^4+20a^3x^3+15a^4x^2+6a^5x+a^6.$$

465. Ce développement conduit à penser, que *dans la valeur de la puissance* m^{me} *d'un binome* $x+a$, *les coefficiens en* m *des termes également distans des extrêmes, sont égaux entre eux.*

C'est en effet ce qui a toujours lieu; car dans $(x+a)^m$, Qa^nx^{m-n} est le terme qui en a n avant lui, tandis que $Q'a^{m-n}x^n$ est le terme qui en a n après lui. Or, il est clair que $(x+a)^m$ reste le même lorsqu'on y change x en a et a en x; donc son développement doit aussi rester le même, dans ce cas. Mais par ce changement de a en x et de x en a, le terme Qa^nx^{m-n} du développement devient $Qa^{m-n}x^n$; car Q, qui ne contient ni a ni x, ne change pas. Donc, puisque le développement reste le même, il s'ensuit qu'il renfermait déjà le terme $Qa^{m-n}x^n$. Et comme ce développement contient le terme $Q'a^{m-n}x^n$, et que d'ailleurs, il ne peut avoir qu'un seul terme en $a^{m-n}x^n$, il faut que les deux termes n'en fassent qu'un seul, et qu'on ait $Q=Q'$. Ce qu'il fallait démontrer.

L'égalité $Q=Q'$ prouve aussi le principe du n° 458.

466. Il suit du principe qui vient d'être démontré, que pour avoir le développement de $(x+a)^m$, il suffira de calculer les

coefficiens en m des termes de la première moitié; et ces coefficiens seront, dans un ordre inverse, ceux des termes de l'autre moitié. C'est ce qu'on verrait encore dans les développemens de $(x+a)^7$ et $(x+a)^8$.

Si l'on veut développer $(2a^3b-3a^2b^2)^5$, on posera $2a^3b=x$ et $3a^2b^2=y$; puis après avoir développé $(x-y)^5$, on substituera les valeurs de x et de y, et on formera les puissances indiquées des deux monomes $2a^3b$ et $3a^2b^2$.

467. Le binome de Newton peut servir à développer les puissances d'un polynome quelconque. En effet, supposons qu'il faille trouver la puissance 4^{me} du quadrinome $a+b+c-d$. On fera d'abord $b+c-d=x$, et l'on aura à développer $(a+x)^4$; ce qui donnera

$$(a+x)^4=a^4+4a^3x+6a^2x^2+4ax^3+x^4.$$

Remplaçant x par le binome $b+y$, et formant les puissances 2^e, 3^e, 4^e, de ce binome, on aura le développement de $(a+b+y)^4$. Remplaçant enfin y par sa valeur $c-d$, et formant les puissances 2^e, 3^e, 4^e de $c-d$, on aura le développement cherché de $(a+b+c-d)^4$.

De la méthode des coefficiens indéterminés, appliquée à la recherche de quelques séries.

468. Voici le principe sur lequel cette méthode est basée.

Si un polynome ordonné par rapport aux puissances positives d'une variable* x, *est égal à zéro pour toutes les valeurs possibles de cette variable, les coefficiens de diverses puissances de la même variable, seront nuls séparément.

Par exemple, supposons qu'on ait toujours, quel que soit x,

$$a+bx+cx^2+dx^3+\text{etc.}=0\ldots(1)$$

Puisque cette équation a lieu pour toutes les valeurs de x, si l'on y fait $x=0$, l'égalité subsistera encore, et deviendra $a=0$. Mais a étant indépendant de x, l'hypothèse $x=0$ ne le change pas; donc avant cette hypothèse, on avait aussi $a=0$. Supprimant a dans (1) et divisant les deux membres par x, on aura $b+cx+dx^2+\text{etc.}=0$. Opérant sur cette égalité comme sur la première, on en déduira $b=0$, puis $c=0$, $d=0$, et ainsi de suite (*).

(*) Cette démonstration laisse peut-être quelque chose à désirer; car bien que la variable x puisse devenir aussi petite qu'on voudra, il pourrait se faire néanmoins qu'elle ne dût jamais devenir nulle. Dans ce cas, voici comment on démontre le principe énoncé.

L'égalité (1) est évidemment la même chose que

$$a=-bx-cx^2-dx^3-\text{etc.}$$

Soit ϕ la valeur numérique du plus grand des coefficiens du second membre. Comme il ne s'agit ici que des valeurs absolues, a sera nécessairement moindre que ce que devient le second membre, lorsqu'on y suppose tous les coefficiens positifs et égaux à ϕ; on aura donc

$$a<\phi\,(x+x^2+x^3+\dots+x^n);\ \dots (2)$$

$$\text{d'où}\quad a<\phi\left(\frac{x-x^{n+1}}{1-x}\right).$$

Puisque la variable x peut avoir telle valeur on voudra, si on prend $x<1$, les coefficiens a et ϕ, qui ne renferment pas x, resteront toujours les mêmes; et que n soit infini ou non, il viendra, à plus forte raison,

$$a<\frac{\phi x}{1-x}.$$

Cette inégalité doit subsister quelque petite que soit la variable x; et puisque a et ϕ sont des nombres constans, je dis que a est nul. Car si a pouvait avoir une valeur m au-dessus de zéro, on pourrait toujours prendre la variable x assez petite pour que $\frac{\phi x}{1-x}$ fût moindre que m; on n'aurait donc pas m ou $a<\frac{\phi x}{1-x}$; ce qui est absurde. Donc réellement $a=0$. Supprimant a dans (1) et divisant les deux membres par x, puis raisonnant comme on vient de le faire, on trouvera $b=0$. On verra pareillement que $c=0$, $d=0$, et ainsi de suite.

De $a=0$, il résulte, que si une égalité (1) est vraie, quelque petite qu'on y suppose la variable x, elle sera vraie encore lorsqu'on y fera $x=0$. Et si l'égalité résultante $a=0$ avait aussi lieu quelque petite qu'on y supposât une autre variable y, cette égalité existerait encore quand on y prendrait $y=0$; et ainsi de suite. Donc en général, *si une égalité est vraie quelque petites qu'on y suppose les variables qu'elle renferme, cette égalité sera vraie encore lorsqu'on y supposera nulles les mêmes variables.*

Ce principe conduit à la méthode des limites, et serait encore vrai si la variable x était affectée d'un exposant fractionnaire positif; car à cause de $x<1$, la puissance fractionnaire de x serait moindre que la puissance entière ayant son exposant immédiatement inférieur à l'exposant fractionnaire, et l'on aurait encore l'inégalité (2).

469. Si l'on avait $a + bx + cx^2 + \text{etc.} = a' + b'x + c'x^2 + \text{etc.}$, et que cette égalité dût subsister pour toutes les valeurs de x ; alors en passant tous les termes dans le premier membre, la nouvelle égalité serait vraie aussi pour toutes les valeurs de x : donc on aurait $a - a' = 0$, $b - b' = 0$, $c - c' = 0$, etc. ; d'où $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, etc. On voit donc, que *si une égalité est vraie quelque valeur qu'on attribue à la variable* x, *les coefficiens d'une même puissance de cette variable, dans les deux membres, seront égaux entre eux.* Et ce principe est au fond le même que le précédent.

470. Voici maintenant l'objet principal de la méthode des coefficiens indéterminés : c'est de développer les fonctions en séries, en faisant trouver les valeurs particulières que l'on doit donner à des coefficiens inconnus, pour rendre *identiques* les deux membres d'une équation.

Par exemple, soit proposé de développer le quotient de $1 - x^3$ divisé par $1 - x$. Il est clair qu'on peut représenter ce quotient par $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$; et qu'ainsi on aura, quel que soit x,

$$1 - x^3 = (1 - x)(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}).$$

Il s'agit donc de trouver les valeurs des coefficiens A, B, C, D, E, etc., qui rendent identiques les deux membres de l'équation précédente. Or, en effectuant la multiplication par $1 - x$, et ordonnant par rapport à x, cette équation devient

$$1 - x^3 = A + (B - A)x + (C - B)x^2 + (D - C)x^3 + (E - D)x^4 + \text{etc.}$$

Pour que les deux membres de cette équation soient identiques, il faut que les coefficiens d'une même puissance de x soient les mêmes de part et d'autre ; il faut donc qu'on ait

$$A = 1,\ B - A = 0,\ C - B = 0,\ D - C = -1,\ E - D = 0,\ \text{etc.};$$
$$\text{d'où}\quad A = 1,\ B = 1,\ C = 1,\ D = 0,\ E = 0,\ \text{etc.}$$

De sorte que le développement de $1 - x^3$ divisé par $1 - x$, se réduit à $1 + x + x^2$, comme on pouvait aisément le prévoir.

471. On voit que quand on introduit dans le développement, des termes qui ne doivent pas y entrer, on trouve zéro pour les valeurs de leurs coefficiens. Mais si l'on omettait quelques termes, l'algèbre en avertirait en conduisant à des équations impossibles. C'est ce qui arriverait, p. ex., si dans la division de

$1-x^4$ par $1-x$, on représentait le quotient par $A+Bx+Cx^3+Dx^4+Ex^5+$ etc.; car alors on trouverait

$$A=1,\ B=1,\ B=0,\ C=0,\ D=0,\ E=0, \text{ etc.}$$

472. Ordinairement, lorsqu'on veut développer en série une certaine fonction de x, on suppose que le développement procède suivant les diverses puissances ascendantes de cette variable, à partir de x^0; et si cette forme n'est pas convenable, on en est averti par des résultats absurdes. Mais on abrége les calculs en cherchant à connaître à *priori* la forme du développement; ce qui se fait à l'aide des propriétés de la fonction donnée.

Par exemple, si l'on voulait développer la fonction $\frac{1}{x^2+x^4}$, on observerait d'abord que cette fonction étant la même chose que $\frac{x^{-2}}{1+x^2}$, son développement devra contenir x^{-2} : et comme la fonction ne change pas lorsqu'on y change x en $-x$, il en sera de même de son développement, qui devra conséquemment ne contenir que des puissances paires de x; on devra donc poser

$$\frac{1}{x^2+x^4}=Ax^{-2}+Bx^0+Cx^2+Dx^4+Ex^6+\text{ etc.}$$

De là on déduira $A=1$, $B=-1$, $C=1$, $D=-1$, $E=1$, $F=-1$, etc.

473. Appliquons maintenant la méthode des coefficiens indéterminés, et proposons-nous en premier lieu d'élever le binome $1+x$ à une puissance quelconque $\frac{p}{q}$, p et q étant des nombres entiers.

D'abord remarquons que le premier terme du développement de cette puissance est $1^{\frac{p}{q}}$, car c'est à quoi ce développement se réduit dès que $x=0$. Et comme $1^{\frac{p}{q}}$ a une valeur arithmétique égale à 1 et $q-1$ valeurs algébriques, nous prendrons seulement la valeur arithmétique, et nous poserons

$$(1+x)^{\frac{p}{q}}=1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\cdots\ (1),$$

A, B, C, D, ..., étant des quantités indépendantes de x. Pour déterminer ces quantités, on observe qu'elles ne changeront pas si l'on remplace x par y, et qu'ainsi

$$(1+y)^{\frac{p}{q}}=1+Ay+By^2+Cy^3+Dy^4+\cdots\ (2)$$

Prenant $(1+x)^{\frac{p}{q}} = u^p$ et $(1+y)^{\frac{p}{q}} = v^p$, on aura $1+x = u^q$ et $1+y = v^q$; d'où $x-y = u^q - v^q$. D'après ces valeurs, si l'on retranche (2) de (1), il viendra

$$u^p - v^p = A(x-y) + B(x^2-y^2) + C(x^3-y^3) + D(x^4-y^4) + \cdots (3)$$

Avant d'aller plus loin, il faut distinguer deux cas, suivant que p est positif ou négatif. 1° Si p est positif, on divisera l'égalité (3), d'un côté par $u^q - v^q$ et de l'autre par sa valeur $x-y$: observant alors que tous les termes du second membre sont divisibles par $x-y$ (72), et que $u-v$ divise aussi les deux termes de la fraction $\frac{u^p - v^p}{u^q - v^q}$, il viendra, en effectuant toutes ces divisions,

$$\frac{u^{p-1} + vu^{p-2} + v^2u^{p-3} + \cdots + v^{p-1}}{u^{q-1} + vu^{q-2} + v^2u^{q-3} + \cdots + v^{q-1}} =$$

$$A + B(x+y) + C(x^2+xy+y^2) + D(x^3+x^2y+xy^2+y^3) + \cdots$$

Cette équation étant vraie pour toutes les valeurs de x et y, si on y prend $x=y$, ce qui donne $u=v$, le premier membre devient $\frac{pu^{p-1}}{qu^{q-1}}$ ou $\frac{pu^p}{qu^q}$. De sorte qu'en multipliant de part et d'autre par u^q, l'égalité précédente se réduit à

$$\frac{p}{q}u^p = (A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \cdots)u^q \ldots (4)$$

2° Si p est négatif et égal à $-r$, le 1er membre de (3) sera

$$u^{-r} - v^{-r}, \text{ ou } \frac{1}{u^r} - \frac{1}{v^r}, \text{ ou enfin } -\frac{1}{u^r v^r}(u^r - v^r).$$

Si donc on divise d'un côté par $u^q - v^q$ et de l'autre par sa valeur $x-y$, les deux termes de la fraction du premier membre seront divisibles par $u-v$: effectuant toutes les divisions, puis prenant $x=y$, ce qui donne $u=v$, le premier membre devient

$$-\frac{1}{u^{2r}} \cdot \frac{ru^{r-1}}{qu^{q-1}}, \text{ ou } \frac{-ru^{-r}}{qu^q}, \text{ ou encore } \frac{pu^p}{qu^q}.$$

Multipliant donc de part et d'autre par u^q, on retrouvera l'identité (4), qui a lieu conséquemment pour toutes les valeurs entières de p, positives ou négatives, ainsi que l'égalité (1).

Cela posé, remettant au lieu de u^p, dans (4), le développement (1) de sa valeur $(1+x)^{\frac{p}{q}}$, et au lieu de u^q, sa valeur

$1+x$; effectuant les multiplications, et posant, pour abréger, $m=\frac{p}{q}$, on aura

$$m+Amx+Bmx^2+Cmx^3+Dmx^4+\dots=A+$$
$$(A+2B)x+(2B+3C)x^2+(3C+4D)x^3+(4D+5E)x^4+\dots$$

Cette équation a été obtenue sans assigner aucune valeur particulière à x; elle aura donc lieu quelle que soit cette indéterminée; ce qui exige que les coefficiens d'une même puissance de x, dans les deux membres, soient égaux entre eux (469). Ainsi, en comparant ces coefficiens, on aura, $A=m$, puis

$$A+2B=Am,\ \text{d'où}\ B=\tfrac{1}{2}A(m-1);$$
$$2B+3C=Bm,\ \text{d'où}\ C=\tfrac{1}{3}B(m-2);$$
$$3C+4D=Cm,\ \text{d'où}\ D=\tfrac{1}{4}C(m-3);$$
$$4D+5E=Dm,\ \text{d'où}\ E=\tfrac{1}{5}D(m-4);$$

et ainsi de suite.

La loi d'après laquelle les coefficiens A, B, C, D, E, etc. dérivent les uns des autres, est facile à saisir, et on peut trouver autant qu'on voudra de ces coefficiens. Reportant donc leurs valeurs dans le développement (1), où $\frac{p}{q}=m$, on aura

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}x^4+\text{etc.}\ \dots\ (A)$$

Telle est donc la formule du binome, qui se trouve démontrée, par les raisonnemens précédens, pour toutes les valeurs entières ou fractionnaires, positives ou négatives de l'exposant m. Mais cette formule étant vraie pour toutes les valeurs rationnelles de m, sera vraie aussi lorsque l'exposant m sera incommensurable (375). Et la généralité de l'algèbre conduit à faire usage de la même formule, lorsque l'exposant m est imaginaire.

Remarquons d'ailleurs que quand $m=\frac{p}{q}$, la formule du binome a une infinité de termes. Et si l'on veut avoir égard aux q valeurs arithmétiques et algébriques de $(1+x)^m$, il faudra multiplier le second membre de la formule précédente par l'expression des q valeurs de 1^m; car en désignant par ϕ cette expression, et opérant comme nous l'avons fait, on aurait $A=m\phi$, et ϕ serait facteur commun à tous les termes du second membre de la formule résultante.

Enfin, comme $(a+b)^m = a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m = a^m(1+x)^m$, en faisant $\frac{b}{a}=x$; on voit que le développement de la puissance m^{me} de $a+b$ est ramené à celui de $(1+x)^m$.

On peut voir, pages 316 et suivantes des *Mélanges d'analyse*, par M. de Stainville, une démonstration très-belle et très-générale de la formule du binome, à l'aide de la méthode des indéterminées.

474. Après les séries *binomiales* que nous venons d'établir, les plus utiles à considérer sont les séries *exponentielles*. Proposons-nous donc de développer en série la valeur de a^x. Pour cela, si nous prenons d'abord $a=1+v$, nous aurons

$$a^x=(1+v)^x=1+xv+\frac{x(x-1)}{1.2}v^2+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}v^3+\text{etc.}$$

Ce résultat fait voir que, quelle que soit la variable x, on a

$$a^x=1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\text{etc.} \quad (5)$$

A, B, C, D, ..., étant des coefficiens fonctions de v, qu'il s'agit de déterminer. Pour y parvenir, on observe que ces coefficiens sont indépendans de x, et que par conséquent on a aussi

$$a^y=1+Ay+By^2+Cy^3+Dy^4+\text{etc.} \quad (6)$$

et $a^{x+y}=1+A(x+y)+B(x+y)^2+C(x+y)^3+\text{etc.} \quad (7)$

Or, quel que soit y, on aura toujours $a^{x+y}=a^x a^y$; donc le développement (7) sera toujours égal au produit des développemens (5) et (6), et par conséquent le coefficient de la première puissance de y, dans (7), sera toujours égal au coefficient de la première puissance de y, dans le produit de (5) par (6); il vient donc, en identifiant ces deux coefficiens,

$$A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+\cdots=A+A^2x+ABx^2+ACx^3+\cdots$$

Cette égalité étant vraie pour toutes les valeurs qu'on voudra donner à x, il en résulte (469)

$$2B=A^2,\ 3C=AB,\ 4D=AC,\ 5E=AD,\ \text{etc.};$$

d'où l'on tire aisément

$$B=\frac{A^2}{2},\ C=\frac{A^3}{2.3},\ D=\frac{A^4}{2.3.4},\ E=\frac{A^5}{2.3.4.5},\ \text{etc.}$$

Substituant ces valeurs dans l'identité (5), elle devient

$$a^x = 1 + Ax + \frac{A^2x^2}{2} + \frac{A^3x^3}{2.3} + \frac{A^4x^4}{2.3.4} + \text{etc.}$$

Posons $a = e^A$ et $x = \frac{z}{A}$; nous aurons, réductions faites,

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} + \frac{z^5}{2.3.4.5} + \text{etc. (B)},$$

série dont la loi est évidente jusqu'à l'infini.

475. De là il est aisé de tirer les séries *logarithmiques*; car à cause de $a = e^A$ et de $a = 1 + v$, on a $e^A = 1 + v$; ce qui donne $e^{Ax} = (1 + v)^x$. Substituant dans cette identité, les développemens de ses deux membres, il viendra, en supprimant 1 de part et d'autre, et en divisant par x,

$$A + \frac{A^2x}{2} + \text{etc.} = v + \frac{x-1}{2}v^2 + \frac{(x-1)(x-2)}{2.3}v^3 + \text{etc.}$$

Puisque les deux membres de cette égalité sont identiques, ce qui est indépendant de x est le même de part et d'autre. Or, on aura ce qui est indépendant de x en faisant $x = 0$, hypothèse qui est d'ailleurs permise, puisque l'égalité précédente a lieu quel que soit x : on a donc

$$A = v - \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} - \frac{v^4}{4} + \frac{v^5}{5} - \frac{v^6}{6} + \text{etc.}$$

Mais $e^A = 1 + v$, donne $A\,le = l(1 + v)$; donc enfin

$$l(1+v) = le\left(v - \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} - \frac{v^4}{4} + \frac{v^5}{5} - \frac{v^6}{6} + \text{etc.}\right) \cdots \text{(C)}$$

476. Cherchons actuellement la valeur numérique de e; et pour cela, observons que le nombre e est indépendant de z, dans la formule (B), et qu'ainsi, en faisant $z = 1$, e ne changera pas, et aura pour expression

$$e = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \text{etc.}$$

Quoique cette série s'étende à l'infini, elle a cependant une valeur finie. En effet, si pour abréger on prend $d = 2.3.4 \ldots v$, le v^{me} terme sera évidemment $\frac{1}{d}$; soit donc S la somme de tous ceux qui le suivent; il est clair qu'on aura

$$S = \frac{1}{d(v+1)} + \frac{1}{d(v+1)(v+2)} + \frac{1}{d(v+1)(v+2)(v+3)} + \text{etc.}$$

Remplaçant par $v+1$ tous les facteurs $v+2$, $v+3$, etc., les dénominateurs diminueront; donc les fractions augmenteront, ainsi que leur somme; et S, qui était égal à la première somme, sera moindre que la seconde; on aura par conséquent

$$S < \frac{1}{d(v+1)} + \frac{1}{d(v+1)^2} + \frac{1}{d(v+1)^3} + \text{etc.}$$

Le second membre est la somme des termes d'une progression géométrique décroissante, continuée à l'infini. Si donc on prend l'expression de cette somme (406), on verra que

$$S < \frac{1}{dv}, \text{ ou que } S < \text{le } v^{me} \text{ de } \frac{1}{d}.$$

De sorte que la somme de tous les termes qui suivent le v^{me}, est moindre que la v^{me} partie de ce v^{me}, dans la série qui donne e. Donc, puisque le treizième terme est moindre que 0,000000003, il s'ensuit que la somme de tous ceux qui le suivent est < 0,00000000003. Réduisant donc les treize 1ers termes de e en décimales, jusqu'aux dix-billioniémes inclusivement, ce qui est facile, en prenant respectivement le tiers, le quart, le cinquième, le sixième, ..., des résultats successifs, la somme de ces 13 premiers termes donnera $e = 2,7182818285$. En poussant plus loin les calculs, on aurait

$$e = 2,718281828459045 23536.$$

477. Les formules (A), (B), (C), sont susceptibles d'un grand nombre d'applications importantes; mais avant d'en faire usage, il est essentiel de remarquer que quand une expression en x, que nous désignerons par $f(x)$, et qui s'énonce *fonction de x*, est développée en série, on n'a rigoureusement

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.},$$

qu'autant que l'on conçoit, en s'arrêtant à l'un des termes du second membre, la série complétée par une certaine expression de x.

Si dans les applications particulières, la série est *décroissante*, le terme complémentaire peut être conçu aussi petit qu'on veut, et peut par conséquent être négligé. Mais si la série est *croissante*, le terme complémentaire devient de plus en plus grand, et on ne saurait se dispenser d'y avoir égard. Voilà pourquoi les séries croissantes ne peuvent jamais servir à l'évaluation approchée des nombres. C'est aussi pour cela que les algébristes appellent *convergentes*, les séries dont les termes vont en diminuant, et *divergentes* celles dont les termes vont en augmentant. Dans les premières, plus on prend de termes, plus la somme approche d'être numériquement égale à l'expression dont la série est le développement, tandis qu'au contraire, dans les autres, plus on prend de termes, plus leur somme diffère de l'expression réduite en série.

478. On voit qu'une série ne doit être employée aux évaluations numériques, que quand ses termes vont en diminuant. Mais dans ce cas même, comme elle a une infinité de termes, il est nécessaire de s'assurer que la somme de tous ceux qu'on néglige n'influera pas sur la valeur trouvée. Or, si tous les termes sont positifs, il suffira de comparer la somme de tous ceux qu'on néglige à une progression géométrique décroissante, continuée à l'infini, comme nous l'avons déjà fait dans le calcul du nombre e (476).

479. *Mais si les termes de la série sont alternativement positifs et négatifs, et vont en diminuant, la somme des* n *premiers termes différera de la somme de tous les termes, d'une quantité moindre que le* $(n+1)^{me}$ *terme*. En effet, soit S la valeur totale de la série; puisque ses termes sont alternativement positifs et négatifs, et vont en diminuant, il est clair que deux termes consécutifs quelconques donneront un nombre positif ou négatif, suivant que le premier sera positif ou négatif. D'après cela, si l'on prend la valeur v de tous les termes, jusqu'à un terme négatif, inclusivement, tous ceux qui suivront feront un nombre positif; donc on aura la série $S > v$. Et si à v on ajoute le terme positif t suivant, tous les autres feront un nombre négatif; donc on aura $S < v + t$. Par conséquent, $S = v$, à moins du terme t près. Si l'on avait pris la valeur v jusqu'à un terme négatif $-t$, exclusivement, on aurait eu $S < v$ et $S > v - t$; d'où $S = v$, à moins de t près.

480. Nous pouvons maintenant appliquer les séries à la solution de quelques problèmes. Proposons-nous d'abord de trouver une formule propre à calculer aisément les tables de logarithmes.

Pour cela, on observe que la formule (C) a lieu quel que soit v, et qu'on peut y changer v en $-v$; ce qui donne

$$l(1-v)=le\left(-v-\frac{v^2}{2}-\frac{v^3}{3}-\frac{v^4}{4}-\frac{v^5}{5}-\text{etc.}\right).$$

Soustrayant ce résultat de la formule (C), on aura

$$l\left(\frac{1+v}{1-v}\right)=2le\left(v+\frac{v^3}{3}+\frac{v^5}{5}+\frac{v^7}{7}+\text{etc.}\right)\cdots\text{(D)}.$$

Posant $\frac{1+v}{1-v}=1+\frac{d}{n}$; ce qui donne $v=\frac{d}{2n+d}$ et $l\left(\frac{1+v}{1-v}\right)$ $=l(n+d)-ln$, la formule (D) devient

$$l(n+d)-ln=2le\left[\frac{d}{2n+d}+\frac{1}{3}\left(\frac{d}{2n+d}\right)^3+\text{etc.}\right]\cdots\text{(E)}$$

De là on tire, en faisant $d=1$,

$$l(n+1)=ln+2le\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\text{etc.}\right]\cdots\text{(F)}$$

Cette formule fera connaître le logarithme de $n+1$, dès que ceux de e et de n seront connus.

481. Cherchons la limite de la somme S de tous les termes qui suivent le $v$ième entre crochets, dans la formule (E). Soit $h=\frac{d}{2n+d}$; le $(v+1)^{me}$ terme sera $T=\frac{h^{2v+1}}{2v+1}$, et il est visible qu'on aura

$$S=\frac{h^{2v+1}}{2v+1}+\frac{h^{2v+3}}{2v+3}+\frac{h^{2v+5}}{2v+5}+\text{etc.};$$

d'où l'on tire successivement

$$S<T(1+h^2+h^4+\text{etc.}),\ \ S<T\times\frac{1}{1-h^2}$$

$$\text{et}\ \ S<T\times\frac{(2n+d)^2}{4n(n+d)}.$$

482. Revenons à la formule (F), et prenons-y successivement $n=1$ et $n=4$; à cause de $l1=0$ et de $l4=2l2$, nous aurons

$$l2=2le\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}+\frac{1}{7.3^7}+\text{etc.}\right]$$

$$l5=2l2+2le\left[\frac{1}{9}+\frac{1}{3.9^3}+\frac{1}{5.9^5}+\text{etc.}\right].$$

D'après la limite de S, trouvée au numéro précédent, la somme de tous les termes qui suivent le 7^{me} entre crochets, dans la 1^{re} de ces deux séries, est moindre que 0,000000003, et dans la seconde, la somme des termes qui suivent le 4^{me} est plus petite que 0,000000001. Négligeant donc ces deux sommes, et réduisant en décimales tous les termes qui les précèdent, on aura

$$l2 = 0{,}6931472 \,.\, le,$$
$$l5 = 1{,}6094379 \,.\, le;$$

d'où $l10 = l2 + l5 = 2{,}3025851 \,.\, le.$

Pour abréger les calculs algébriques, on prend ordinairement le nombre e pour base du système de logarithmes, ce qui donne $le = 1$; et alors les logarithmes sont nommés *Népériens*. Mais comme ici nous ne considérons que les logarithmes *ordinaires*, nous aurons $l10 = 1$, et par conséquent

$$le = 1 : 2{,}3025851 = 0{,}4342945.$$

On voit que $le < \frac{1}{2}$. Si l'on effectuait tous les calculs jusqu'à 20 décimales, on trouverait

$$le = 0{,}43429448190325182765.$$

Avec cette valeur de le, qui est le *module* des logarithmes ordinaires, la formule (F) donnera aisément les logarithmes ordinaires de tous les nombres premiers des tables, en y faisant successivement $n = 1, 2, 4, 6, 10, 12, 16, 18, 22, 28$, etc. Et comme la somme S de tous les termes qui suivent le premier, dans le multiplicateur de $2le$, est moindre que 1 divisé par $12n(n+1)(2n+1)$, valeur plus petite que 0,0000005, lorsque $n = 100$, on voit que si l'on veut obtenir les logarithmes ordinaires avec 7 décimales exactes, la formule (F) donnera, pour tous les nombres n au-dessus de 100,

$$l(n+1) = ln + \frac{2le}{2n+1} \cdots (\mathrm{G})$$

D'où il est aisé de se convaincre que quand $n > 50000$, les logarithmes de deux nombres consécutifs ne diffèrent pas d'une demi-unité décimale du cinquième ordre (440).

Il existe, pour calculer les logarithmes, des formules encore plus expéditives que la formule (F), et qui servent à exprimer des logarithmes en fonctions d'autres déjà connus. Mais ce qui précède suffit pour donner une idée de la facilité avec laquelle on pourrait construire des tables.

483. Maintenant soit proposé de calculer l'erreur que l'on commet en établissant la proportion que prescrit l'usage des tables de logarithmes. Soient n, $n + d$ et $n + 1$ trois nombres quelconques, dans lesquels on suppose $d < 1$. Soient $ln = x$,

$l(n+d)=x+ac$ et $l(n+1)=x+a$; il est clair que $c<1$, et qu'on aura, d'après la définition des logarithmes, b étant la base,

$$n=b^x,\ n+d=b^{x+ac} \text{ et } n+1=b^{x+a}.$$

La dernière de ces équations et la première fournissent

$$b^a=\frac{n+1}{b^x}=1+\frac{1}{n}.$$

Elevant de part et d'autre à la puissance c, et multipliant ensuite par l'équation $b^x=n$, on aura

$$b^{ac+x}=n\left(1+\frac{1}{n}\right)^c \text{ ou } n+d=n\left(1+\frac{1}{n}\right)^c.$$

Développant le second membre d'après la formule du binome, et effaçant n de part et d'autre, on trouve, en observant que $c<1$,

$$d=c-\frac{c(1-c)}{2n}+\frac{c(1-c)(2-c)}{2.3.n^2}-\frac{c(1-c)(2-c)(3-c)}{2.3.4.n^3}+\text{etc.}$$

Les termes de cette série sont alternativement positifs et négatifs, et vont d'ailleurs en diminuant; donc si l'on prend seulement le premier, l'erreur sera moindre que le second, et à plus forte raison, moindre que $\frac{1}{2n}$; on aura donc

$$d=c-<\frac{1}{2n}, \cdots (6)$$

résultat auquel on parviendrait d'ailleurs en observant que tous les termes qui suivent le 1er c, dans la série, font une somme négative $<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\text{etc., à l'infini}\right)$.

Cela posé, 1.° pour trouver le logarithme ordinaire de $n+d$, on fait la proportion :

$$1 : d :: l(n+1)-ln : l(n+d)-ln, \text{ ou } 1 : d :: a : ac;$$

et on en tire $ac=ad$. Mais d'après la valeur (6), on doit avoir $ac=ad+<\frac{a}{2n}$; l'erreur due à la proportion est donc $<\frac{a}{2n}$.

Or, a désigne la différence entre deux logarithmes consécutifs; et quand les nombres sont plus grands que 1000; cette différence est moindre que 0,00045. D'où il suit que pour tous les nombres au-dessus de 1000, la proportion donne au logarithme cherché, une valeur qui ne diffère pas de la véritable d'une quantité égale à

$$\frac{0{,}00045}{2000} \text{ ou à } 0{,}00000023.$$

Ainsi *pour tous les nombres plus grands que* 1000, *l'erreur de la proportion ne portera jamais sur les millionièmes du logarithme cherché.*

2° Lorsqu'on veut trouver le nombre correspondant au logarithme donné $l(n+d)$, on fait la proportion

$$1 : d :: l(n+1) - ln : l(n+d) - ln, \quad \text{ou} \quad 1 : d :: a : ac.$$

et on en tire $d = c$. Mais d'après l'équation (6), on doit avoir $d = c - < \frac{1}{2n}$; l'erreur due à la proportion est donc moindre que $\frac{1}{2n}$ ou que 0,0005, lorsque $n > 1000$. Ainsi *pour tous les nombres au-dessus de* 1000, *l'erreur de la proportion ne portera jamais sur les millièmes du nombre demandé.*

Ce que nous venons de dire se rapporte aux tables de Lalande. A l'égard de celles de Callet, on trouve, d'une manière analogue, que quand les nombres sont au-dessus de 10000, l'erreur de la proportion n'est pas de 0,00005 pour le nombre, et de 0,0000000025 pour le logarithme. Ce principe et le précédent supposent néanmoins que les logarithmes consécutifs diffèrent dans les dernières décimales conservées. Autrement l'erreur de la proportion pourrait porter même sur les unités du nombre cherché (440).

On trouve dans les Mélanges d'algèbre, un grand nombre d'applications des séries, et entre autres, l'extraction des racines des nombres au moyen des séries binomiales.

De la composition des équations.

484. Jusqu'à présent les algébristes ont fait des efforts inutiles pour résoudre généralement les équations des degrés supérieurs au quatrième; et les formules qu'ils ont obtenues pour les valeurs de l'inconnue dans les équations du troisième et du quatrième degré, sont si compliquées et d'un usage si peu commode, lorsque toutefois on peut les appliquer, ce qui n'est pas toujours possible, qu'on doit regarder le problème de la résolution des

équations générales de degrés supérieurs au second, comme n'étant réellement d'aucune utilité. Aussi les analystes ont-ils dirigé principalement leurs recherches vers la résolution des *équations numériques*; et ils ont trouvé des méthodes au moyen desquelles une équation numérique quelconque étant donnée, on peut toujours déterminer les racines qu'elle renferme. Nous allons nous occuper de ces méthodes; mais nous ne parlerons pas de la recherche des racines imaginaires, parce qu'elle nous paraît beaucoup plus curieuse qu'utile.

485. Quelle que soit l'équation à une inconnue x, on peut toujours, sans altérer les valeurs de cette inconnue, chasser les dénominateurs, transposer les termes dans le premier membre, réduire et diviser par le coefficient de la plus haute puissance de x; ce qui donnera une équation de la forme

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \cdots + Tx + U = 0,$$

P, Q, ..., T et U étant des nombres positifs, nuls ou négatifs. Nous supposerons toujours qu'on ait préparé l'équation ainsi qu'on vient de l'indiquer; et pour abréger, nous représenterons l'équation transformée par $X = 0$.

On sait qu'une *racine* de l'équation $X = 0$, est une quantité a qui, mise à la place de x, réduit X à zéro, ou donne

$$a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} + \cdots + Ta + U = 0.$$

Or, une équation devant toujours être considérée comme la traduction algébrique des relations qu'ont entre elles les données et l'inconnue d'un problème, on est conduit naturellement au principe que *toute équation a au moins une racine*. A la vérité, les conditions de l'énoncé peuvent être incompatibles; mais alors on doit supposer qu'on en serait averti par quelques symboles d'absurdité, tels que des expressions infinies ou imaginaires, et il n'en existerait pas moins une expression algébrique qui, substituée à la place de x, dans l'équation, y satisferait. Nous admettrons donc le principe précédent, qui sera d'ailleurs vérifié pour le plus grand nombre d'équations.

486. Soit a une quantité prise au hasard : divisons le polynome X par $x-a$, soit q le quotient et r le reste, qui sera indépendant de x; nous aurons l'identité $X = q(x-a) + r$.

Si l'on fait $x = a$, le reste r ne changera pas, puisqu'il ne contient pas x : et comme alors on aura $X = r$, il s'ensuit que

r est précisément ce que devient le polynome proposé X lorsqu'on y change x en a. D'après cela, si a est ou n'est pas racine de $X=0$, le reste r sera ou ne sera pas nul; et le polynome X sera ou ne sera pas divisible exactement par $x-a$. Réciproquement, si X est ou n'est pas divisible exactement par $x-a$, le reste r sera ou ne sera pas nul, et a sera ou ne sera pas racine de $X=0$. Donc *si* a *est une racine de l'équation* $X=0$, *le premier membre* X *sera divisible exactement par* $x-a$, *et ne le sera que dans ce cas.*

Si l'on effectue réellement la division du polynome X par $x-a$, le quotient q sera de la forme

$$q=x^{m-1}+P'x^{m-2}+Q'x^{m-3}+\cdots+T'x+U',$$

et on verra que, dans ce quotient, on a $P'=a+P$;

$Q'=a^2+aP+Q$, ou $\quad Q'=aP'+Q$;

$R'=a^3+a^2P+aQ+R$, ou $\quad R'=aQ'+R$;

$S'=a^4+a^3P+a^2Q+aR+S$, ou $\quad S'=aR'+S$;

et ainsi de suite.

D'où il suit qu'*on aura un coefficient quelconque du quotient de* X *par* $x-a$, *en multipliant le coefficient précédent par* a, *et en ajoutant au produit le coefficient qui, dans le dividende, occupe le même rang que celui que l'on cherche.* C'est ainsi que, dans la division de x^3-5x^2+4x-6 par $x-2$, on trouve, pour les coefficiens successifs du quotient : 1, puis $1\times2-5$ ou -3, et $-3\times2+4$ ou -2 : le reste est $-2\times2-6$ ou -10. Et en effet, on obtient x^2-3x-2 pour quotient et -10 pour reste.

487. Nous venons de voir que l'équation $X=0$ ayant a pour racine, le premier membre X est divisible exactement par $x-a$, et donne un quotient q du degré $m-1$ en x : on a donc

$$X=q(x-a).$$

Si b est racine de l'équation $q=0$, q sera divisible exactement par $x-b$, et donnera un quotient q' du degré $m-2$ en x; de sorte qu'on aura $q=q'(x-b)$ et

$$X=(x-a)(x-b)q'.$$

De même, c étant racine de l'équation $q'=0$, q' sera divisible exactement par $x-c$, et il viendra $q'=q''(x-c)$; d'où

$$X=(x-a)(x-b)(x-c)q''.$$

Raisonnant de même pour $q''=0$, $q'''=0$, et ainsi de suite, on verra que le plus haut exposant de x diminue continuellement d'une unité dans les quotiens successifs q, q', q'', q''', ...; et qu'après $m-2$ divisions, il y aura $m-2$ facteurs binomes en évidence, et un quotient du second degré, décomposable lui-même en $(x-h)(x-l)$. Donc, *en admettant que toute équation ait une racine, le polynome* X *sera formé du produit de* m *facteurs binomes du premier degré en* x, et l'on aura

$$X=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\cdots(x-h)(x-l)\cdots(1).$$

Cette équation est *identique*, c'est-à-dire qu'il n'y a d'autre différence entre les deux membres que dans leur expression analytique, différence qui cesse dès qu'on exécute les opérations indiquées.

488. Maintenant, si a' est différent de chacune des quantités a, b, c, d, ..., l, je dis que le polynome X ne sera pas divisible exactement par $x-a'$. En effet, si cette division était possible; en désignant par A le quotient exact, on aurait $X=A(x-a')$: donc, en faisant $x=a'$, il viendrait $X=0$, et par suite

$$(a'-a)(a'-b)(a'-c)(a'-d)\dots(a'-l)=0\dots(2)$$

Or, a' n'étant pas égal à a, $a'-a$ n'est pas nul : de même, aucun des facteurs $a'-b$, $a'-c$, $a'-d$, ..., $a'-l$, n'est zéro. Donc en divisant les deux membres de l'équation (2), successivement par chacun des facteurs du premier, à l'exception de $a'-l$, tous les quotiens successifs du second membre seront nuls, et l'on aura $a'-l=0$, ou $a'=l$, ce qui est contre l'hypothèse. Donc X n'est pas divisible par $x-a'$. Donc enfin, *tout polynome du degré* m *en* x *a* m *facteurs binomes du premier degré, et ne peut en avoir davantage.*

489. L'identité (1) montre que l'équation $X=0$ est satisfaite par chacune des m valeurs $x=a$, $x=b$, $x=c$, $x=d$, ..., $x=l$. Mais elle ne peut l'être par aucune autre valeur différente; car l'existence d'une racine a' différente de a, b, c, d, ..., l, entraine l'existence d'un diviseur $x-a'$ différent de $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-d$, ..., $x-l$; ce qui est impossible (488). Donc en général, *toute équation du degré* m *a* m *racines, et ne peut en avoir davantage.*

Ce principe est vrai encore quand l'équation $X=0$ a n facteurs égaux à $x-a$, p facteurs égaux à $x-b$, etc.; mais alors on dit que cette équation a n *racines égales à* a, p *racines égales à* b, etc.

490. Multipliant deux à deux, trois à trois, etc., les m diviseurs binomes de X, lesquels sont du premier degré en x, on formera $\frac{1}{2}m(m-1)$ diviseurs du second degré (456), $\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)$ du troisième, et ainsi de suite.

491. L'identité (1) étant la même chose que

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\cdots=(x-a)(x-b)(x-c)\cdots(x-l);$$

si l'on effectue la multiplication des m facteurs du second membre, les coefficiens d'une même puissance de x, dans les deux membres, seront nécessairement égaux (468) : donc, en se rappelant la loi établie (462) pour avoir le produit de m facteurs binomes, et observant que les seconds termes de ceux que nous considérons ici, sont sous la forme négative, on verra que,

1° Le coefficient P du second terme, pris en signe contraire, est la somme des m racines; 2° le coefficient Q du troisième terme est la somme de tous les produits différens des racines, combinées deux à deux; 3° le coefficient R du quatrième terme, pris en signe contraire, est la somme de tous les produits des racines; combinées trois à trois; et ainsi de suite. Enfin, le dernier terme U, pris en signe contraire, si le degré est impair, est le produit de toutes les racines (*). C'est ce qu'on vérifie aisé-

(*) Les relations que nous venons d'énoncer entre les racines et les coëfficiens d'une équation, ne suffisent pas pour déterminer les racines de cette équation. Par exemple, considérons l'équation du troisième degré $x^3+Px^2+Qx+R=0$, et soient a, b, c, ses trois racines, nous aurons donc

$$a+b+c=-P,\quad ab+ac+bc=Q \quad\text{et}\quad abc=-R.$$

Multipliant la première de ces équations par a^2, la seconde par $-a$, et ajoutant la troisième à la somme des deux résultats, il viendra $a^3+Pa^2+Qa+R=0$. On aurait de même, $b^3+Pb^2+Qb+R=0$ et $c^3+Pc^2+Qc+R=0$. De sorte qu'on doit résoudre une équation semblable à la proposée, soit pour avoir a, soit pour avoir b ou c. Et c'est ce qui devait arriver; car les quantités a, b, c, étant toutes disposées de la même manière dans chacune des trois équations à résoudre, il n'y a pas de raison pour que l'une soit déterminée par une équation différente de celle qui détermine l'autre; les trois quantités a, b, c, doivent donc être racines d'une même équation qui, par conséquent, doit être du troisième degré. En général, *lorsque des inconnues entrent de la même manière dans des équations, ces inconnues sont toutes racines de la même équation finale.*

ment dans l'équation $x^4 - x^3 - 25x^2 + 37x + 60 = 0$, dont les racines sont $4, -1, +3$ et -5.

Au moyen de ces relations, on trouve facilement l'équation dont les racines sont données, et l'on ramène au second degré les problèmes que voici :

1° Résoudre une équation du troisième degré dont les racines sont en progression géométrique, comme $x^3 - 14x^2 - 84x + 216 = 0$.

2° Résoudre l'équation du quatrième degré dont les racines forment une équidifférence, telle que $x^4 - 14x^3 + 67x^2 - 126x + 72 = 0$.

3° Résoudre une équation du quatrième degré dont les racines sont en proportion géométrique, comme $x^4 - 20x^3 + 108x^2 - 360x + 324 = 0$.

4° Enfin, résoudre une équation dont les racines sont en progression arithmétique, telle que $x^5 - 40x^4 + 595x^3 - 4040x^2 + 12164x - 12320 = 0$.

De la transformation des équations.

492. Le but général de la transformation des équations, est de les ramener à d'autres plus faciles à traiter ; ce qui donne lieu à plusieurs questions, dont nous allons examiner les plus importantes.

Proposons-nous d'abord *de transformer une équation en une autre dont tous les coefficiens soient entiers, et dont celui du premier terme soit l'unité.* Pour cela, on commence par chasser les dénominateurs et par transposer les termes dans le premier membre, ce qui donne une équation de la forme

$$Nx^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \dots + Tx + U = 0 ; \dots (1)$$

Ensuite, on pose $x = \frac{y}{N}$, et il vient

$$\frac{y^m}{N^{m-1}} + \frac{Py^{m-1}}{N^{m-1}} + \frac{Qy^{m-2}}{N^{m-2}} + \dots + \frac{Ty}{N} + U = 0 ;\ \text{d'où}$$

$$y^m + Py^{m-1} + NQy^{m-2} + \dots + N^{m-2}Ty + N^{m-1}U = 0,$$

équation demandée dont les racines sont N fois plus grandes que celles de l'équation proposée (1), car $y = Nx$. Ainsi pour transformer une équation en une autre dont tous les coefficiens soient des nombres entiers et celui du premier terme l'unité, il faut, après avoir chassé les dénominateurs et avoir transposé, égaler l'inconnue à une autre divisée par le coefficient N du premier terme; calcul qui revient à multiplier les coefficiens, à partir du second terme, par N^0, N^1, N^2, ..., N^{m-1}.

Soit par exemple, $x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{7}{2} = 0$; on en déduira d'abord $12x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 9x - 42 = 0$; faisant ensuite $x = \frac{1}{12}y$, c'est-à-dire, multipliant les coefficiens 10, 9 et 42 par 12, 12^2 et 12^3, il viendra *la transformée*

$$y^4 - 8y^3 + 120y^2 - 1296y - 72576 = 0.$$

493. On peut quelquefois obtenir une transformée ayant des coefficiens plus simples que par la méthode précédente : il suffit, pour cela, dans $x = \frac{y}{D}$, de choisir D de manière que D^m étant divisible par N, l'expression $\frac{PD^m}{N}$ soit un multiple de D^{m-1}. Dans l'exemple précédent, on prendra $x = \frac{1}{6}y$, et la transformée sera $y^4 - 4y^3 + 30y^2 - 162y - 4536 = 0$.

D'après cette méthode, si l'on avait les équations

$$x^3 - \frac{7x^2}{3} + \frac{11x}{36} - \frac{26}{72} = 0 \text{ et } x^5 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{5x^2}{12} - \frac{7x}{9} + \frac{23}{108} = 0,$$

on poserait $x = \frac{1}{6}y$ dans la première et $x = \frac{1}{12}y$ dans la seconde.

Si l'on avait $x^4 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{11}{15}x^2 + \frac{7}{150}x - \frac{113}{9000} = 0$, on prendrait $x = \frac{1}{30}y$.

494. *Etant donnée une équation, trouver sa réciproque.*

Soit $Nx^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \dots + Tx + U = 0$ l'équation donnée. Si l'on fait $x = \frac{1}{y}$, les plus grandes valeurs de x répondront aux plus petites de y, et réciproquement : la transformée sera donc la *réciproque* de la proposée, et deviendra

$$Uy^m + Ty^{m-1} + \dots + Qy^2 + Py + N = 0.$$

Ce calcul revient, comme on voit, à distribuer les puissances de y en ordre inverse de celles de x. Et si l'on veut en outre chasser le coefficient U, on posera $x = \frac{U}{y}$, transformation qui remplit d'un seul coup les deux conditions imposées.

495. *Faire évanouir le second terme d'une équation.*

Soit $Nx^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \dots + Tx + U = 0$ l'équation proposée. Faisons $x = u + y$; développons d'après le binome de Newton, et ordonnons par rapport aux puissances descendantes de y; nous aurons

$$\left.\begin{array}{r} Ny^m + mNuy^{m-1} + \frac{m}{2}(m-1)Nu^2y^{m-2} + \dots + Nu^m \\ + \quad Py^{m-1} + \quad (m-1)\ Puy^{m-2} + \dots + Pu^{m-1} \\ + \qquad\qquad Qy^{m-2} + \dots + Qu^{m-2} \\ + \dots + \dots\dots \\ + \text{ etc.} \end{array}\right\} = 0.$$

Comme u est arbitraire, on peut en disposer pour satisfaire à l'équation $mNu + P = 0$, condition qui fait évanouir le second terme de la transformée en y, et qui donne $u = -\frac{P}{mN}$; d'où $x = y - \frac{P}{mN}$. Ainsi pour faire disparaître le second terme d'une équation, il faut remplacer l'inconnue par une autre, augmentée du coefficient du second terme, pris en signe contraire et divisé par autant de fois le degré de l'équation qu'il y a d'unités dans le coefficient du premier terme.

Par exemple, si l'on a l'équation $2x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 7 = 0$, et qu'on veuille faire disparaître le second terme, on posera $x = y + \frac{4}{2.4} = y + \frac{1}{2}$, et la transformée en y sera $2y^4 + 2y^2 + 3y - \frac{49}{8} = 0$.

496. Au lieu de faire disparaître le second terme, on peut demander que l'équation soit privée du troisième, du quatrième, etc. Il suffit, pour cela, d'égaler à zéro le coefficient de y^{m-2}, de y^{m-3}, etc.; ce qui conduit à résoudre une équation du second, du troisième degré en u, et il en résulte par conséquent plusieurs valeurs de u qui satisfont à la condition demandée.

Enfin, pour faire disparaître le dernier terme, il faudra résoudre l'équation

$$Nu^m + Pu^{m-1} + Qu^{m-2} + \dots + Tu + U = 0,$$

qui n'est autre chose que la proposée, dans laquelle on a remplacé x par u. Et en effet, égaler à zéro le dernier terme de la transformée en y, terme qui est le produit de toutes les valeurs de y, c'est supposer nulle une de ces valeurs; la valeur correspondante de x est donc $x = u$.

Il est bon de remarquer que les racines de la transformée en y, trouvée plus haut, sont égales à celles de l'équation proposée, diminuées chacune de u.

497. *Trouver une méthode pour obtenir aisément, dans la pratique, le polynome que fournit la supposition de* $x=u+y$ *dans un polynome donné.*

Soit $Nx^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\dots+Tx+U$ le polynome proposé. Si l'on y fait $x=u+y$, et qu'on développe, d'après la formule du binome, on aura, en ordonnant suivant les puissances ascendantes de y,

$$\begin{array}{l}
Nu^m+mNyu^{m-1}+\frac{m}{2}(m-1)Ny^2u^{m-2}+\dots+Ny^m\\
+Pu^{m-1}+(m-1)Pyu^{m-2}+\frac{m-1}{2}(m-2)Py^2u^{m-3}+\dots\\
+Qu^{m-2}+(m-2)Qyu^{m-3}+\frac{m-2}{2}(m-3)Qy^2u^{m-4}+\dots\\
+\dots\dots+\dots\dots\dots\dots+\dots\dots\dots\dots\dots\dots+\dots\\
+Tu\quad+\quad Ty\\
+U
\end{array}$$

Ce résultat peut être représenté par

$$X+X_1y+\tfrac{1}{2}X_2y^2+\tfrac{1}{6}X_3y^3+\dots+Ny^m,$$

en faisant

$$\begin{array}{l}
X=Nu^m+Pu^{m-1}+Qu^{m-2}+\dots+Tu+U,\\
X_1=mNu^{m-1}+(m-1)Pu^{m-2}+(m-2)Qu^{m-3}+\dots+T,\\
X_2=m(m-1)Nu^{m-2}+(m-1)(m-2)Pu^{m-3}+\dots\\
X_3=m(m-1)(m-2)Nu^{m-3}+(m-1)(m-2)(m-3)Pu^{m-4}+\dots\\
\text{etc.}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

On voit que X désigne le polynome proposé, après avoir changé x en u; que X_1 *se déduit du polynome* X *en multipliant chaque terme de ce polynome par l'exposant de* u *dans ce même terme, et en diminuant cet exposant d'une unité*; sur quoi il faut observer que U ou Uu^0 devient alors $0\cdot Uu^{-1}$ ou 0. De même, X_2 se déduit de X_1 d'après la loi que l'on vient d'énoncer pour déduire X_1 de X; X_3 se déduit de X_2, d'après la même loi; et ainsi de suite. De sorte que les quantités X, X_1, X_2, X_3, etc., se déduisent les unes des autres d'après une loi constante. Cette propriété leur a fait donner le nom de *fonctions dérivées* : X_1 est la *dérivée* de X, X_2 la *dérivée* de X_1, et ainsi des autres. En général, la *dérivée* d'un polynome en x est un autre polynome formé en multipliant chaque terme du premier par l'exposant de x dans ce même terme, et en diminuant cet exposant d'une unité.

498. Pour appliquer cette loi, proposons-nous de faire évanouir le second terme de l'équation

$$x^4 - 12x^3 + 17x^2 - 9x + 7 = 0.$$

D'après la règle du n° 495, il faut poser $x = y + 3$, ce qui donnera une transformée du quatrième degré de la forme

$$X + X_1 y + \tfrac{1}{2}X_2 y^2 + \tfrac{1}{6}X_3 y^3 + y^4 = 0\,;$$

et tout se réduit à calculer X, X_1, X_2 et X_3, d'après la loi précédente. Or, X est ce que devient le premier membre de l'équation proposée en y remplaçant x par 3 ; ainsi

$$\begin{array}{ll}
X = 3^4 - 12.3^3 + 17.3^2 - 9.3 + 7\,; & \text{d'où } X = -110\,; \\
X_1 = 4.3^3 - 36.3^2 + 34.3 - 9\,; & \text{d'où } X_1 = -123\,; \\
X_2 = 12.3^2 - 72.3 + 34\,; & \text{d'où } \tfrac{1}{2}X_2 = -37\,; \\
X_3 = 24.3 - 72\,; & \text{d'où } \tfrac{1}{6}X_3 = 0.
\end{array}$$

Donc la transformée devient

$$y^4 - 37y^2 - 123y - 110 = 0.$$

Nous aurons dans la suite de fréquentes occasions d'employer les polynomes dérivés ; et il est par conséquent utile de retenir la loi de leur formation.

Des limites des racines.

499. On appelle *limite supérieure* des racines positives d'une équation, tout nombre qui surpasse la plus grande de ces racines positives ; et l'on nomme *limite inférieure*, le nombre moindre que la plus petite racine positive.

500. Soit $A - B$ une équation du degré m, dans laquelle A désigne la somme de tous les termes positifs et B celle de tous les termes négatifs. Soit S le plus grand coefficient et n le plus grand exposant pris parmi les termes négatifs ; la somme B de ces termes sera donc moindre que si tous leurs coefficiens étaient égaux au plus grand S d'entre eux ; et on aura

$$B < S(x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x + 1)\,;\ \text{d'où}$$

$$B < S\frac{x^{n+1}-1}{x-1} \quad \text{et} \quad B < \frac{Sx^{n+1}}{x-1}.$$

Soit Rx^r un terme positif de l'équation proposée, dans lequel $r > n$; il est clair que $A > Rx^r$. Prenons x de manière qu'on ait

$$Rx^r > \frac{Sx^{n+1}}{x-1}, \quad \text{ou} \quad (x-1)x^{r-n-1} > \frac{S}{R} \cdots (1)$$

Il est clair, à plus forte raison, qu'on aura $Rx^r > B$ et $A > B$. Mais $x^{r-n-1} > (x-1)^{r-n-1}$; donc $(x-1)x^{r-n-1} > (x-1)^{r-n}$. Si donc on pose

$$(x-1)^{r-n} = \frac{S}{R}, \quad \text{ou} \quad x = 1 + \sqrt[r-n]{\frac{S}{R}} = L,$$

l'inégalité (1) sera satisfaite; et toute valeur de x plus grande que la précédente L, satisfera, à plus forte raison, à cette inégalité, et donnera conséquemment $A > B$. D'où il suit que L et tout nombre plus grand, mis à la place de x, dans l'équation $A - B = 0$, rendent la partie positive A supérieure à la partie négative B, et donnent constamment $A - B > 0$. Donc L est une limite supérieure des racines positives de l'équation proposée.

501. Si $R = 1$, c'est-à-dire, si R est le coefficient du premier terme de l'équation $A - B = 0$; comme ce premier terme est x^m, on aura $r = m$, et la limite supérieure des racines positives sera $1 + \sqrt[m-n]{S}$.

D'ailleurs, la racine $(m-n)^{me}$ de S étant moindre que S, cette limite sera, à plus forte raison, $1 + S$, ou l'*unité augmentée du plus grand coefficient négatif.*

Soit l'équation $x^5 + 10x^4 + 8x^3 - 7x^2 - 12x - 40 = 0$: d'après la première limite L trouvée plus haut (500), il est clair que dans cette équation, on aura toujours $x < 1 + \sqrt{4}$ ou $x < 3$; c'est-à-dire que la plus grande racine positive est moindre que 3. La seconde limite trouvée au numéro précédent donnerait $x < 1 + \sqrt{40}$ ou $x < 5$; et la troisième $1 + S$ fournirait $x < 41$.

502. La limite $1 + S$ jouissant de la propriété de rendre le premier terme x^m de l'équation, supérieur à la somme arithmétique de tous les autres, on la préfère quand il ne s'agit que de démontrer des propositions générales, parce qu'elle se forme à vue et sans aucun calcul. Mais lorsqu'on procède à la recherche

des valeurs numériques des racines, il importe beaucoup de choisir pour limite supérieure un nombre le moins élevé possible et le plus près qu'il se peut de la plus grande racine. Il est donc plus avantageux d'employer, quand il est possible, la première limite $1 +$ *la racine* $(r-n)^{me}$ *de* $\frac{S}{R}$, ou encore la seconde, $1 +$ *la racine* $(m-n)^{me}$ *de* S. On doit même chercher à s'en procurer une plus petite que ces dernières; et c'est à quoi l'on parvient souvent par une transformation exécutée sur l'équation proposée. Par exemple, si l'on a l'équation

$$x^5 - 3x^4 + 8x^3 - 25x^2 + 4x - 39 = 0,$$

on la mettra sous la forme

$$x^4(x-3) + 8x^2(x - \tfrac{25}{8}) + 4(x - \tfrac{39}{4}) = 0.$$

Sous cette forme on voit qu'en mettant pour x, 10 ou tout autre nombre plus grand, on obtiendra constamment un résultat positif; donc 10 est une limite des racines positives.

L'équation $x^5 - 5x^4 - 13x^3 + 17x^2 - 69 = 0$, étant mise sous la forme $x^3(x^2 - 5x - 13) + 17(x^2 - \frac{69}{17}) = 0$, on voit que si la moindre valeur positive de x, qui rend nul le trinome $x^2 - 5x - 13$, rend positif le binome $x^2 - \frac{69}{17}$, cette moindre valeur sera une limite supérieure. Or, $x^2 - 5x - 13 = 0$ donne $x = \frac{13}{2}$ et $x = -\frac{3}{2}$: et comme $(\frac{13}{2})^2 > \frac{69}{17}$, il s'ensuit que $x < 7$, dans l'équation proposée.

503. La méthode *des transformations* consiste, comme on voit, à décomposer le premier membre en plusieurs produits de deux facteurs, dont le premier soit un monome positif et le second un binome ou un trinome en x; puis à déterminer x de manière que tous les facteurs entre parenthèses soient positifs.

Par exemple, l'équation

$$x^6 - 20x^5 + 260x^4 + 3x^3 - 1000x^2 - 40000x - 8600 = 0,$$

peut s'écrire comme il suit :

$$x^4(x^2 - 20x + 100) + 160x^4 + 3x^3 - 1000x^2 - 40000x - 8600 = 0.$$

Or, le trinome $x^2 - 20x + 100$ étant le carré de $x - 10$, sera positif pour toutes les valeurs réelles de x; donc il suffit de prendre x de manière que $160x^4$ soit $>$ que la partie négative; on doit donc faire usage de la première limite (500), et on verra que $x < 1 + \sqrt{\frac{40000}{160}}$; d'où $x < 16$.

Considérons encore l'équation

$$x^5 - 10x^4 - 11x^3 + 7x^2 - 29x + 35 = 0\,;$$

elle devient $x^3(x^2 - 10x - 11) + 7(x^2 - \frac{29}{7}x + 5) = 0$.

Les racines de $x^2 - \frac{29}{7}x + 5 = 0$ étant imaginaires, le second trinome sera positif pour toutes les valeurs positives de x; il suffit donc de chercher les valeurs de x qui rendent nul le trinome $x^2 - 10x - 11$. Or, ces valeurs sont $x = 11$ et $x = -1$; 11 est donc la limite supérieure des racines positives de l'équation proposée.

L'équation $x^6 - 8x^5 + 17x^4 - 30x^3 + 300x^2 - 480x + 40 = 0$, devient $x^4(x^2 - 8x + 17) - 30x(x^2 - 10x + 16) + 40 = 0$.

Le premier trinome sera toujours positif et plus grand que le second; si donc on prend $x^4 = 30x$, d'où $x < 4$, le premier membre sera nécessairement positif; 4 est donc une limite supérieure des racines positives.

504. La méthode qui fournit la limite la plus simple, bien qu'elle donne lieu à des calculs assez longs, est celle des *dérivées successives*, due à Newton. Voici cette méthode : Dans l'équation proposée, faisons $x = u + y$, u étant quelconque; la transformée sera (497) $X + X_1 y + \frac{1}{2}X_2 y^2 + \cdots + Ny^m = 0$. Prenant l'arbitraire u telle que tous les coefficiens X, X_1, X_2, etc. soient positifs, aucune valeur positive de y ne pourra satisfaire à cette équation; les valeurs réelles de x correspondent donc à des racines négatives de $y = x - u$; u sera donc plus grand que x. D'où il suit que *tout nombre* u, *qui mis à la place de* x *dans l'équation* $X = 0$ *et dans ses dérivées successives* X_1, X_2, *etc., n'en rend aucune négative, est une limite supérieure des racines positives de cette équation.*

Par exemple, soit l'équation

$$x^4 - 5x^3 - 6x^2 - 19x + 7 = 0.$$

Comme u est un signe indéterminé, on peut conserver la lettre x dans la formation des polynomes dérivés, et il vient

$$X = x^4 - 5x^3 - 6x^2 - 19x + 7,$$
$$X_1 = 4x^3 - 15x^2 - 12x - 19,$$
$$\tfrac{1}{2}X_2 = 6x^2 - 15x - 6,$$
$$\tfrac{1}{6}X_3 = 4x - 5.$$

On voit que $x=2$ rend le dernier polynome positif : 2 substitué dans le polynome du second degré, donne un résultat négatif ; il en est de même de 3 ; mais 4 ou tout nombre >4, donne un résultat positif : 4 substitué dans le polynome du 3^{me} degré, donne un résultat négatif, mais 5 donne un résultat positif ; et il en serait de même de tout nombre plus grand. Enfin, 5 substitué dans X, donne un résultat négatif, et il en est de même de 6 ; mais $x=7$ donne un résultat positif. Donc 7 est la limite supérieure des racines positives de la proposée ; et c'est la plus simple en nombre entier, puisque $x=6$ donne un résultat négatif.

505. Cherchons maintenant la limite numériquement supérieure des racines négatives, et les limites inférieures des racines positives et négatives.

1° Si dans l'équation $X=0$, on fait $x=-y$, ce qui donne la transformée $Y=0$, qu'on trouve en changeant simplement les signes des termes à puissances impaires de $X=0$, il est clair que les racines négatives de x répondent aux racines positives de y, et réciproquement. Si donc L' est la limite supérieure des racines positives, dans $Y=0$, $-L'$ sera *la limite numériquement supérieure des racines négatives de* x, *dans* $X=0$.

2° Si dans $X=0$, on fait $x=\frac{1}{y}$, aux plus grandes valeurs positives de y répondront les plus petites de x, et réciproquement : donc L étant la limite supérieure des racines positives de la transformée $Y=0$, d'où $y<L$, on aura $x>\frac{1}{L}$, et $\frac{1}{L}$ sera *la limite inférieure des racines positives de* x.

3° Enfin, si dans $X=0$, on fait $x=-\frac{1}{y}$, et qu'on cherche la limite supérieure L des racines positives de y dans la transformée $Y=0$, $-\frac{1}{L}$ sera *la limite inférieure des racines négatives de la proposée.*

De l'existence des racines réelles.

506. L'existence des racines réelles d'une équation est fondée sur le principe que voici : *Si deux nombres substitués à la place de* x, *dans une équation numérique, donnent deux ré-*

sultats de signes contraires, ces deux nombres interceptent au moins une racine réelle de la proposée.

Soit $Nx^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \cdots + Tx + U = 0$ l'équation. Son premier membre renfermant en général des termes positifs et des termes négatifs, désignons par A l'ensemble des termes positifs, et par — B l'ensemble des termes négatifs; l'équation prend alors la forme $A - B = 0$.

Supposons d'abord que les nombres p et q, substitués à x, soient positifs, et qu'on ait $p < q$; supposons de plus que $x = p$ donne un résultat négatif ou $A < B$, et que $x = q$ donne un résultat positif ou $A > B$. Comme les quantités A et B ne contiennent que des termes additifs, et des puissances entières et positives de x, il est clair que ces quantités croissent l'une et l'autre à mesure que x augmente : concevant donc que l'on fasse croître x par degrés insensibles, depuis p jusqu'à q, les quantités A et B augmenteront aussi par degrés insensibles (*). Cependant, puisque A, d'abord plus petit que B, devient ensuite plus grand, il faut nécessairement qu'il ait un accroissement plus rapide que B, qui détruise insensiblement l'excès que B avait sur A, et finisse par produire un excès en sens contraire. On conçoit, d'après cela, que du passage de $A < B$ à $A > B$, il doit y avoir un point intermédiaire où A devient égal à B; donc le nombre positif qui produit cette égalité de A à B, donnant $A - B = 0$, est nécessairement une racine positive de l'équation proposée $A - B = 0$.

Supposons maintenant que les nombres substitués à x soient négatifs, et posons $x = -y$: il est clair qu'en faisant $y = p$

(*) En effet, considérons le polynome A, par exemple, soit fait $x = a$ et $x = a + u$, les résultats A' et $A' + Bu + Cu^2 + Du^3 +$ etc. ont pour différence $u(B + Cu +$ etc.$)$; il s'agit de trouver pour u, une valeur qui rende cette différence moindre que toute quantité h donnée. Tout est ici positif, u très-petit et < 1; donc

$$u(B + Cu + \text{etc.}) < u(B + C + \text{etc.}).$$

Si donc on prend pour u une valeur telle que $u(B + C + \text{etc.}) = h$, valeur nécessairement finie et au-dessus de o, on aura réellement la différence $u(B + Cu + \text{etc.}) < h$. On peut donc toujours donner à x une suite de valeurs telles, que les polynomes A et B croissent de quantités aussi petites qu'on voudra, et finissent par différer l'un de l'autre d'une quantité moindre que toute grandeur donnée.

et $y=q$, dans la transformée, on aura précisément les mêmes résultats qu'en faisant $x=-p$ et $x=-q$ dans la proposée; on aura donc deux résultats de signes contraires. Par conséquent, d'après ce qu'on vient de voir, l'équation en y aura au moins une racine réelle positive, comprise entre p et q; donc l'équation en x aura au moins une racine réelle négative entre $-p$ et $-q$.

Enfin, supposons que les deux nombres substitués à x, soient l'un positif et l'autre négatif; en faisant $x=0$ dans l'équation, son premier membre se réduit à son dernier terme, qui est nécessairement d'un signe contraire à celui que donne $x=p$ ou $x=-q$; il y a donc au moins une racine réelle comprise entre o et p, ou entre o et $-q$.

On voit donc, dans tous les cas, que *si deux nombres etc.*

507. Il est bon d'observer qu'il pourrait exister plusieurs racines réelles a, b, c, etc., entre les deux nombres substitués p et q. Or, soit $f(x)$ le produit des facteurs simples en x correspondant aux racines réelles non interceptées et aux racines imaginaires. Le premier membre de l'équation proposée sera nécessairement de la forme

$$f(x)(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots.$$

Substituons maintenant p et q à la place de x, nous aurons

$$f(p)(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)\ldots, \quad (1)$$
$$f(q)(q-a)(q-b)(q-c)(q-d)\ldots. \quad (2)$$

Les deux quantités $f(p)$ et $f(q)$ sont nécessairement de même signe, puisqu'autrement, en vertu du principe précédent, $f(x)=0$ aurait au moins une racine réelle comprise entre p et q, ce qui est contre l'hypothèse.

Cela posé, p étant supposé moindre que q, et les racines a, b, c, etc., se trouvant entre p et q, il s'ensuit que p est moindre que chacune de ces racines et q plus grand; donc tous les facteurs $q-a$, $q-b$, $q-c$, ..., sont positifs, et le produit (2) a le même signe que $f(q)$ ou que $f(p)$: tous les facteurs $p-a$, $p-b$, $p-c$, ..., sont négatifs; donc suivant que le nombre de ces facteurs est impair ou pair, le produit (1) a un signe contraire ou un signe pareil à celui de $f(p)$, c'est-à-dire à celui du produit (2). Par conséquent, *suivant que le nombre des racines réelles, comprises entre les nombres substitués* p *et* q, *est impair ou pair, les résultats* (1) *et* (2) *des substitutions sont de signes contraires ou de même signe.*

On voit par là que si deux nombres substitués à la place de x, dans une équation, donnent deux résultats de signes contraires, ils interceptent au moins une racine réelle; mais ils peuvent aussi en intercepter un nombre impair quelconque : et s'ils donnent deux résultats de même signe, ou ils n'interceptent pas de racines, ou bien ils en comprennent un nombre pair quelconque.

Le principe fondamental que nous avons considéré (506) fournit plusieurs conséquences importantes que nous allons faire connaître.

508. *Toute équation de degré impair, dont les coefficiens sont réels, a au moins une racine réelle de signe contraire à son dernier terme.*

En effet, soit $Nx^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\ldots+Tx+U=0$ l'équation proposée, et considérons d'abord le cas où le dernier terme est négatif. En faisant $x=0$ dans l'équation, le premier membre se réduit à $-U$: d'un autre côté, si l'on substitue à la place de x, $S+1$, c'est-à-dire le plus grand coefficient de l'équation augmenté de l'unité, le premier terme Nx^m sera positif et plus grand à lui seul que la somme arithmétique de tous les autres termes (501); le résultat de la substitution sera par conséquent positif. Donc il y a au moins une racine réelle comprise entre 0 et $S+1$, laquelle racine est positive, c'est-à-dire de signe contraire au dernier terme.

Supposons actuellement le dernier terme positif; en faisant toujours $x=0$, on trouve pour résultat $+U$: mais en mettant pour x, $-(S+1)$, on obtiendra nécessairement un résultat négatif, puisque le premier terme Nx^m devient négatif par cette substitution, et donne son signe à toute l'expression (501) : donc l'équation a au moins une racine réelle comprise entre 0 et $-(S+1)$, c'est-à-dire négative ou de signe contraire au dernier terme.

509. *Toute équation de degré pair, à coefficiens réels, dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles, l'une positive et l'autre négative.*

En effet, soit $-U$ son dernier terme; en faisant $x=0$, on trouve pour résultat $-U$; mais en substituant à x, soit $S+1$, soit $-(S+1)$, S étant toujours le plus grand coefficient; alors, comme m est pair, le premier terme Nx^m sera positif : d'ailleurs il devient plus grand, par ces substitutions, que la somme de tous les autres (501); donc les deux résultats sont positifs et de signes contraires à celui que donne $x=0$. Ainsi l'équation a au moins deux racines réelles, l'une comprise entre 0 et $S+1$ ou positive, et l'autre entre 0 et $-(S+1)$ ou négative.

510. En rapprochant les conséquences précédentes, on voit qu'il est prouvé, sans se fonder sur le théorème du n° 487, que *toute équation a au moins une racine réelle* : le seul cas où cette proposition ne soit pas démontrée, est celui où le degré de l'équation est pair et le dernier terme U positif; car alors, en substituant à x, $S+1$ ou $-(S+1)$, les deux résultats sont positifs et de même signe que le nombre U fourni par $x=0$: donc on ne peut rien en conclure pour l'existence d'une racine réelle. Mais si dans ce cas, les racines de l'équation ne sont pas réelles, on conçoit du moins qu'elles peuvent être imaginaires, comme on le voit dans les équations du second degré. On est donc fondé à admettre le principe que *toute équation a une racine*. C'est d'ailleurs ce que MM. DE STAINVILLE et CAUCHY ont démontré; mais leurs démonstrations ne sont pas de nature à trouver place dans les élémens.

511. *Lorsqu'un polynome* X, *fonction de* x, *égalé à zéro, n'a pas de racines réelles, il conserve le signe de son dernier terme, quelque nombre qu'on y substitue pour* x. Car on peut toujours donner à x une valeur telle, que le premier terme Nx^m surpasse la somme de tous les autres (501); et alors le polynome aura le signe de ce premier terme. Si ensuite une autre valeur substituée à x pouvait changer le signe du polynome X, l'équation $X=0$ aurait au moins une racine réelle comprise entre les deux nombres substitués; ce qui est contre l'hypothèse.

La réciproque de ce théorème est fausse, c'est à dire que des polynomes en x, qui ne peuvent jamais changer de signe, sont quelquefois réduits à zéro par des valeurs réelles de x. L'équation $(x-3)^4(x-1)^2=0$ est dans ce cas.

512. Toute équation qui n'a que des permanences de signe, c'est-à-dire, dont tous les termes sont positifs, ne peut avoir pour racines réelles que des nombres négatifs; car tout nombre positif mis à la place de x, rendrait le premier membre essentiellement positif.

513. Toute équation complète dont les termes sont alternativement positifs et négatifs, c'est-à-dire, qui n'a que des variations de signe, ne peut avoir pour racines réelles que des nombres positifs; car il est aisé de reconnaître que tout nombre négatif mis à la place de x dans la proposée, rend tous les termes positifs, si l'équation est de degré pair, et tous les termes négatifs, si l'équation est de degré impair. Donc, dans aucun cas, la somme des termes ne peut devenir nulle.

Il en est de même de toute équation incomplète, telle que, si l'on y change x en $-y$, il en résulte une transformée n'ayant que des permanences.

De la recherche des racines commensurables.

514. Nous observerons d'abord que *toute équation dont le premier terme a pour coefficient l'unité et dont tous les autres coefficiens sont des nombres entiers, ne peut avoir pour racines commensurables que des nombres entiers.*

Soit en effet l'équation

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \cdots + Tx + U = 0,$$

dans laquelle P, Q, ..., T, U, sont des nombres entiers, et supposons qu'elle puisse avoir pour racine une fraction commensurable et irréductible $\frac{a}{c}$; nous aurons par conséquent

$$\frac{a^m}{c^m} + \frac{Pa^{m-1}}{c^{m-1}} + \frac{Qa^{m-2}}{c^{m-2}} + \cdots + \frac{Ta}{c} + U = 0.$$

Multipliant par c^{m-1} et transposant, il viendra

$$\frac{a^m}{c} = -Pa^{m-1} - Qca^{m-2} - \cdots - Tac^{m-2} - Uc^{m-1}.$$

Or, c étant premier avec a, c est premier avec chacun des facteurs du produit a^m; c ne divisera donc jamais ce produit; l'équation précédente est donc impossible, puisque le premier membre est une fraction et le second un nombre entier. Ainsi l'équation ne peut avoir pour racine une fraction commensurable et irréductible.

515. Et comme on peut toujours ramener une équation dont les coefficiens sont des fractions rationnelles, à une autre dont les coefficiens sont entiers et le premier l'unité (492), on voit

que la recherche des racines commensurables d'une équation se réduit à trouver les racines entières de la transformée.

On y parviendra sans doute en remplaçant l'inconnue par tous les nombres entiers positifs ou négatifs, depuis 1 et — 1 jusqu'aux limites supérieures $+ L$ et $- L'$ (500 et 505); car les nombres qui satisferont à l'équation à résoudre seront reconnus racines. Mais on conçoit que ces essais deviendront souvent longs et pénibles; et il faut chercher une méthode plus expéditive et plus facile à pratiquer.

516. Pour mieux fixer les idées, considérons l'équation

$$x^5 + Px^4 + Qx^3 + Rx^2 + Sx + T = 0.$$

Soit a une de ses racines; on aura

$$a^5 + Pa^4 + Qa^3 + Ra^2 + Sa + T = 0;$$

$$\text{d'où } \frac{T}{a} = -S - Ra - Qa^2 - Pa^3 - a^4.$$

Le second membre de cette égalité étant un nombre entier, il faut que $\frac{T}{a}$ soit aussi un nombre entier. Ainsi *les racines entières d'une équation sont comprises parmi les diviseurs du dernier terme.*

Maintenant, passons $-S$ dans le premier membre de la dernière égalité précédente, et faisons pour abréger $\frac{T}{a} + S = S'$, il viendra, en divisant les deux membres par a,

$$\frac{S'}{a} = -R - Qa - Pa^2 - a^3;$$

d'où l'on conclut que $\frac{S'}{a}$ doit être un nombre entier.

Passant $-R$ dans le premier membre, faisant $\frac{S'}{a} + R = R'$ et divisant de part et d'autre par a, on obtient

$$\frac{R'}{a} = -Q - Pa - a^2;$$

d'où l'on conclut que $\frac{R'}{a}$ doit être un nombre entier.

Transposant $-Q$, prenant $\frac{R'}{a} + Q = Q'$ et divisant par a, il vient

$$\frac{Q'}{a} = -P - a;$$

ainsi $\frac{Q'}{a}$ doit être un nombre entier.

Passant enfin $-P$ dans le premier membre, et faisant $\frac{Q'}{a}+P=P'$, on trouve $P'=-a$

En rapprochant les conditions précédentes, on verra que pour qu'un nombre entier a, positif ou négatif, soit racine de l'équation proposée, il faut, 1° que ce nombre a soit un des diviseurs du dernier terme; 2° qu'en ajoutant au quotient le coefficient de x, pris avec son signe, la somme soit divisible par a; 3° qu'en ajoutant au second quotient le coefficient de x^2, pris toujours avec son signe, la somme soit divisible par a; 4° qu'en ajoutant au troisième quotient le coefficient de x^3, la somme soit divisible par a; et ainsi de suite. Enfin, qu'en ajoutant le coefficient du second terme de l'équation, au quotient précédent, la somme soit égale au diviseur a, pris en signe contraire.

Tout nombre qui satisfera à ces épreuves réunies, sera racine, et ceux qui n'y satisferont pas devront être rejetés.

517. De là résulte la méthode suivante, pour déterminer à la fois toutes les racines entières d'une équation donnée :

Après avoir trouvé tous les diviseurs du dernier terme, qui sont compris entre les limites $+L$ et $-L'$, on écrit ces diviseurs sur une même ligne horizontale, et tant avec le signe $+$ qu'avec le signe $-$; on place au-dessous de ces diviseurs les quotiens du dernier terme par chacun d'eux; on ajoute ensuite à chacun de ces quotiens le coefficient de x, ce qui donne des sommes qu'on écrit au-dessous des quotiens qui leur correspondent. On divise de même chacune de ces nouvelles sommes par le diviseur placé dans la même colonne, et on écrit le quotient sous le dividemle, ayant soin de rejeter les quotiens fractionnaires et les diviseurs qui les ont donnés. On ajoute aussi le coefficient de x^2, et l'on continue le même procédé, en observant que si quelques termes manquaient dant l'équation particulière proposée, on en tiendrait compte, en regardant chacun de leurs coefficiens comme égal à zéro.

518. D'après cette méthode, cherchons les valeurs entières de x dans l'équation

$$x^4-5x^3-6x^2+46x-24=0.$$

D'abord on observe qu'il est inutile d'appliquer le procédé aux diviseurs $+1$ et -1, parce qu'on les éprouve plus facilement par leur substitution immédiate dans l'équation proposée : on trouve ainsi qu'ils ne satisfont pas à cette équation. Et puisque $x > 1$ donne $46x > 24$, on voit que la limite supérieure des racines positives est la valeur positive de x qui rend nul le trinome $x^2 - 5x - 6$; cette limite est donc 6. Changeant x en $-y$, on verra que la limite supérieure des racines négatives est $-(1 + \sqrt{46})$ ou -8 (501). Ainsi on doit soumettre aux épreuves tous les diviseurs positifs de 24 compris entre 1 et 6, et tous les diviseurs négatifs entre -1 et -8 ; il faut donc employer les diviseurs 2, 3, 4, -2, -3, -4 et -6. Voici le tableau des calculs où * marque les diviseurs à rejeter :

+ 4	+ 3	+ 2	− 2	− 3	− 4	− 6
− 6	− 8	− 12	+ 12	+ 8	+ 6	+ 4
+ 40	+ 38	+ 34	+ 58	+ 54	+ 52	+ 50
+ 10	*	+ 17	− 29	− 18	− 13	*
+ 4		+ 11	− 35	− 24	− 19	
+ 1		*	*	+ 8	*	
− 4				+ 3		

La 1re ligne horizontale est celle des diviseurs ; la seconde celle des quotiens du dernier terme -24 par chacun des diviseurs ; la troisième ligne est celle des quotiens que l'on vient d'obtenir, augmentés du coefficient $+46$ de x, et la quatrième celle des quotiens de ces sommes par les diviseurs correspondans : cette seconde condition exclut les diviseurs 3 et -6. La cinquième ligne est celle des derniers quotiens, augmentés du coefficient -6 de x^2, et la sixième celle des quotiens des nouvelles sommes par chacun des diviseurs : cette troisième condition exclut les diviseurs 2, -2 et -4. Enfin la septième ligne est celle des troisièmes quotiens, augmentés du coefficient -5 du second terme de la proposée. Comme alors les deux sommes -4 et $+3$ sont respectivement égales aux diviseurs $+4$ et -3, pris en signes contraires, ces diviseurs sont les seules racines entières de la proposée, et l'on a $x = 4$ et $x = -3$.

Divisant $x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 46x - 24$ par $(x-4)(x+3)$ ou par $x^2 - x - 12$, on aura le quotient exact $x^2 - 4x + 2$ qui, égalé à zéro, donnera $x = 2 \pm \sqrt{2}$ pour les deux autres racines de l'équation proposée.

Nous laissons à résoudre, d'après la méthode précédente, les trois équations :

$$x^4 - 4x^3 - 16x^2 + 115x - 150 = 0,$$
$$x^5 - 11x^4 + 32x^3 + 4x^2 - 128x + 192 = 0,$$
$$x^4 - 5x^3 + 25x - 21 = 0.$$

519. Lorsque le nombre des diviseurs du dernier terme, qui se trouvent compris entre les limites $+L$ et $-L'$, est très-grand, il est fort important de restreindre ce nombre. Or, soit l'équation

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \dots + Tx + U = 0.$$

Soit a l'une de ses racines, le premier membre sera divisible exactement par $x - a$, et il viendra l'identité

$$x^m + Px^{m-1} + \dots + U =$$
$$(x-a)(x^{m-1} + P'x^{m-2} + Q'x^{m-3} + \dots + U').$$

D'après la loi de formation des coefficiens P', Q', ..., U' (486), ces coefficiens sont entiers, avec P, Q, R, ..., U. Cela posé, l'identité précédente ayant lieu quel que soit x, si l'on y fait $x = 1$, et qu'ensuite on divise de part et d'autre par $a - 1$, on aura

$$\frac{1 + P + Q + \dots + U}{a - 1} = -(1 + P' + Q' + \dots + U').$$

Le second membre de cette équation est un nombre entier; donc il en est de même du premier. Ainsi a étant un nombre entier positif ou négatif, ne peut être racine, qu'autant que $a - 1$ divise le résultat de la substitution de $+1$ dans la proposée. On verra de même, en faisant $x = -1$, que $a + 1$ doit diviser le résultat de la substitution de -1; d'où résulte la règle que voici :

Substituez successivement $+1$ et -1 dans la proposée, et soient M et M' les deux résultats : 1° Tout diviseur positif du dernier terme, qui, diminué de 1, ne divise pas M, ou qui, augmenté de 1, ne divise pas M', doit être rejeté; 2° Tout diviseur négatif, dont la valeur numérique augmentée de 1, ne divise pas M, et diminuée de 1, ne divise pas M', doit être rejeté.

520. Soit proposé, par exemple, de déterminer les racines entières de l'équation

$$x^4 - x^3 - 80x^2 + 138x + 432 = 0.$$

Il est clair que le premier membre de cette équation sera positif pour toutes les valeurs positives de x égales ou plus grandes que celle qui rend nul le trinome $x^2 - x - 80$; la limite supérieure des racines positives est donc 10. Quant à la limite supérieure des racines négatives, elle est $-(1 + \sqrt{138})$ ou -13. Donc les diviseurs de 432, que l'on doit soumettre aux épreuves du n° 519, sont : 2, 3, 4, 6, 8, 9, -2, -3, -4, -6, -8, -9 et -12.

Substituant $+1$ et -1 au lieu de x, dans la proposée, les résultats seront $M = 490 = 10 \cdot 7^2$ et $M' = 216 = 2^3 \cdot 3^3$. Cela posé, examinons les diviseurs positifs : $9 - 1$ ou 8 ne divise pas $M = 490$; ainsi 9 doit être rejeté : $8 - 1$ ou 7 divise M, et $8 + 1$ ou 9 divise $M' = 216$; donc 8 doit être conservé. On rejetera 6 et 4, et l'on conservera 3 et 2. A l'égard des diviseurs négatifs, comme $12 + 1$ ou 13 ne divise pas 490, 12 doit être rejeté ; et il en est de même de 8. Mais 9 doit être conservé, ainsi que 6 et 4, tandis qu'il faut rejeter 3 et 2. On voit donc qu'on ne doit soumettre aux épreuves de la méthode du n° 518, que les diviseurs 8, 3, 2, -4, -6 et -9. De cette manière, on trouvera $x = 8$ et $x = -9$; d'où l'on déduit $x = 1 \pm \sqrt{7}$.

On peut traiter d'après la méthode que nous venons d'indiquer, les deux équations :

$$x^4 - 5x^3 - 37x^2 + 257x - 360 = 0,$$
$$x^5 - 4x^4 - 97x^3 + 472x^2 + 204x - 2160 = 0.$$

Dans la dernière équation, les limites supérieures sont 13 et -11.

521. On sait maintenant trouver les racines commensurables de toute équation dont les coefficiens sont rationnels, entiers ou fractionnaires. Mais dans ce dernier cas, il faudra d'abord ramener l'équation à n'avoir que des coefficiens entiers, et 1 pour celui du premier terme (492). Cependant, si l'inconnue proposée ne doit avoir que des valeurs entières, on n'aura pas à opérer cette transformation, qui a l'inconvénient de conduire à des coefficiens très-grands ; il suffira d'appliquer sur-le-champ la méthode du n° 518 ; et lorsqu'on sera parvenu à la dernière des conditions, le résultat, au lieu d'être $-a$, devra être $-aN$, N étant le coefficient du premier terme.

C'est ainsi que, dans l'équation $6x^3 + 5x^2 - 33x + 18 = 0$, on verra qu'après avoir ajouté aux derniers quotiens le coefficient 5 du second terme, la somme correspondante au diviseur -3, sera $+18$, ou le produit de $+3$ par le coefficient 6 du premier terme; donc -3 est une racine entière de l'équation proposée, laquelle admet en outre les deux racines fractionnaires $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$.

D'après ce qu'on vient de dire, il sera aisé de résoudre les trois problèmes qui suivent, dans lesquels les inconnues doivent être des nombres entiers positifs :

Quelle est la base x du système de numération dans lequel le nombre cinq cent trente-huit est exprimé par les caractères (4123)? [R. $x=5$.].

Quelle est la base x du système dans lequel 81479, système décimal, est représenté par (456356), système cherché? [R. $x=7$.]

Les trois chiffres d'un nombre sont tels, 1° que leur produit fait 54; 2° que le chiffre du milieu vaut la sixième partie de la somme des deux autres; 3° qu'en les écrivant dans l'ordre inverse, le nombre résultant surpasse de 594 le nombre proposé. Quel est ce nombre? [R. 923.]

522. La recherche des racines commensurables sert à trouver, quand cela se peut, la racine n^{me} d'une expression telle que $a \pm \sqrt{b}$, comme on le voit dans les Mélanges d'algèbre, pages 78 et suivantes. Pour donner une idée de la méthode que nous avons suivie dans ces Mélanges, et qui est plus simple que celle dont on fait ordinairement usage, proposons-nous d'*extraire, s'il est possible, la racine cubique de* $a \pm \sqrt{b}$.

D'abord, puisque le cube de $(1+\sqrt{2})\sqrt[3]{3}$ est $21+\sqrt{450}$, on voit que la forme la plus générale de la racine cubique demandée est $x\sqrt[3]{z}$, et que par conséquent on a $\sqrt[3]{(a \pm \sqrt{b})} = x\sqrt[3]{z}$. Elevant de part et d'autre au cube, puis faisant disparaître le radical carré, il vient $a^2 - 2azx^3 + z^2x^6 = b$; d'où

$$x^3 + \frac{a^2-b}{z^2x^3} = \frac{2a}{z}.$$

On peut disposer de l'arbitraire z pour que le second terme du premier membre de cette équation soit un cube parfait de la forme $\frac{c^3}{x^3}$; ce qui se fera en posant

$$c^3 = \frac{a^2-b}{z^2}; \text{ d'où il vient } x^3 + \frac{c^3}{x^3} = \frac{2a}{z}.$$

Faisant $x + \frac{c}{x} = u$, puis élevant au cube de part et d'autre, on aura

$$x^3 + 3cx + \frac{3c^2}{x} + \frac{c^3}{x^3} = u^3; \text{ d'où } u^3 - 3cu - \frac{2a}{z} = 0.$$

Et comme $x+\frac{c}{x}=u$ donne $x=\frac{1}{2}u\pm\sqrt{\frac{1}{4}u^2-c}$, on voit que u doit être rationnel pour que la racine demandée soit possible. Ainsi on a, pour résoudre le problème proposé,

$$c=\frac{1}{z}\sqrt[3]{(a^2-b)z},\quad u^3-3cu-\frac{2a}{z}=0$$

$$\text{et}\quad \sqrt[3]{a\pm\sqrt{b}}=\left(\tfrac{1}{2}u\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}u^2-c}\right)\sqrt[3]{z}.$$

Par exemple, s'il faut trouver la racine cubique de $78-\sqrt{6075}$, on aura $a=78$, $b=6075$ et $a^2-b=9$; d'où, en prenant $z=3$, on a $c=1$ et $u^3-3u-52=0$. La seule racine commensurable de cette équation étant $u=4$, on en conclut que $\sqrt[3]{(78-\sqrt{6075})}=(2-\sqrt{3})\sqrt[3]{3}$.

On peut chercher la racine cubique de $52+30\sqrt{3}$ et celle de $2+2\sqrt{-1}$.

523. La méthode des racines commensurables (518) sert aussi à faire connaître combien chacune des racines de cette espèce entre de fois dans l'équation proposée : il suffit pour cela, de diviser le premier membre par le produit des binomes qui proviennent des racines a, b, c, ..., déjà mises en évidence, et de soumettre la nouvelle équation aux épreuves de la méthode ; ou bien, après avoir divisé le premier membre par $x-a$, on divisera le quotient par $x-a$, le second quotient par $x-a$, et ainsi de suite, jusqu'à ce que la division soit impossible. Par exemple, soit l'équation

$$x^5-12x^4+57x^3-134x^2+156x-72=0.$$

Cette équation complète n'ayant que des variations de signes, n'a point de racines négatives (513). La limite des racines positives est 12 ; et si l'on soumet l'équation aux épreuves de la méthode (518), on aura d'abord les deux racines $x=2$ et $x=3$. Divisant le premier membre par $(x-2)(x-3)$, il vient pour résultat

$$x^3-7x^2+16x-12=0,$$

équation qui a encore pour racines $x=2$ et $x=3$. Divisant cette équation par $(x-2)(x-3)$, le quotient exact sera $x-2$, Donc l'équation proposée peut se mettre sous la forme

$$(x-2)^3(x-3)^2=0.$$

On résoudra, d'après cette méthode, les deux équations :

$$x^5+5x^4-5x^3-45x^2+108=0,$$
$$9x^6+30x^5+22x^4+10x^3+17x^2-20x+4=0.$$

Le procédé que nous venons d'employer ne détermine que les *racines égales* qui sont rationnelles ; pour obtenir aussi les racines égales irrationnelles ou imaginaires, il faut connaître la recherche du plus grand commun diviseur algébrique, qui va nous occuper.

Du plus grand commun diviseur algébrique.

524. Dans tout ce qui va suivre nous ne considérerons que des polynomes *entiers* et *rationnels*, c'est-à-dire des polynomes dans lesquels il n'y a ni divisions ni racines indiquées. Ces polynomes ne contiendront par conséquent que des coefficiens entiers et des exposans entiers positifs.

525. Lorsqu'en divisant un polynome par un autre, le quotient est *entier*, le premier polynome est divisible par le second, et le second *divise* le premier. Ce second polynome est alors *facteur exact* ou simplement *facteur* de l'autre.

526. Un polynome est *premier* lorsqu'il n'est divisible que par lui-même et par l'unité, comme $a-2b$, $2a+3b-c$, etc.

A proprement parler, il n'y a que les polynomes du premier degré qui puissent être regardés comme *premiers* ; car tous les autres sont décomposables en facteurs, ainsi que le prouve la théorie des équations. Par exemple, soit le trinome $a^2-2ab-b^2$. Pour le décomposer en facteurs, égalons-le à zéro, et résolvons l'équation résultante par rapport à a ; nous aurons $a=b\pm b\sqrt{2}$. D'où l'on tire (487)

$$a^2-2ab-b^2=(a-b-b\sqrt{2})(a-b+b\sqrt{2}).$$

Soit encore le polynome

$$2ac^2+2a^2b-3ab^2+abc-4bc^2+3b^2c+c^3.$$

Si on l'égale à zéro, et qu'on résolve l'équation résultante par rapport à a, on verra que ce polynome revient à

$$(ab-bc+c^2)(2a-3b+c).$$

En général, tant que le polynome égalé à zéro, donne une équation qu'on sait résoudre par rapport à l'une des lettres qui s'y trouvent, on peut décomposer ce polynome en facteurs, d'après la méthode que nous venons d'employer.

On voit que tous les polynomes d'un degré supérieur au premier peuvent se décomposer en facteurs. Mais comme nous ne voulons considérer désormais que des *facteurs rationnels et entiers*, il est clair que nous aurons des polynomes *premiers* de degrés quelconques.

527. Deux polynomes sont *premiers entre eux*, lorsqu'ils n'ont d'autres diviseurs communs que l'unité, comme $a^2 - b^2$ et $x^2 - 2ax + a^2$.

528. Le *plus grand commun diviseur* de deux polynomes est le produit de tous les facteurs premiers communs à ces deux polynomes (*).

D'où il suit, 1° que *deux polynomes ne peuvent avoir qu'un seul plus grand commun diviseur*, car les facteurs premiers communs à ces deux polynomes ne donnent jamais qu'un seul produit ;

2° Que *si l'on divise deux polynomes par leur plus grand commun diviseur, les deux quotiens seront premiers entre eux*, car s'ils avaient un facteur commun, ce facteur serait aussi commun aux deux polynomes proposés ; et le plus grand commun diviseur de ces polynomes ne serait pas le produit de tous leurs facteurs premiers communs ; ce qui est contre la définition.

A l'avenir, p. g. c. d. signifiera *plus grand commun diviseur*.

529. *Le plus grand commun diviseur de deux polynomes* A *et* B *est toujours celui du plus petit* B *et du reste* R *de leur division.*

Car soit Q le quotient entier de cette division et D le p. g. c. d. de A et B ; on aura donc

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \frac{A}{D} = \frac{B}{D}Q + \frac{R}{D}.$$

Puisque D divise A et B, D divise aussi R ; D est donc commun diviseur à B et R ; et il est le plus grand. Car si Dx pouvait diviser B et R, Dx diviserait aussi A ; Dx serait donc commun diviseur aux deux polynomes A et B ; ce qui est impossible, puisque D est le p. g. c. d. de ces polynomes. Donc D est aussi le p. g. c. d. de B et R.

530. Il résulte de ce principe, que la recherche du p. g. c. d.

(*) Soit x le produit de tous les facteurs premiers communs aux deux quantités P et Q, et y le *p. g. c. d.* de ces deux quantités ; y est donc facteur commun à P et Q ; y doit donc se trouver dans x, qui est le produit de tous les facteurs premiers communs à P et Q. Et si x avait d'autres facteurs que ceux de y, x serait plus grand que y ; y ne serait donc pas le *p. g. c. d.* de P et Q ; ce qui est contre l'hypothèse. Donc x renferme tous les facteurs de y et n'en contient pas d'autres ; donc $x = y$.

de deux polynomes doit s'opérer d'après la même règle que pour les nombres. Mais comme le principe suppose que tous les quotiens obtenus soient entiers, ce qui souvent n'a pas lieu lorsqu'on opère sur des polynomes, il faut, pour trouver le plus grand commun diviseur algébrique, d'après la même règle que pour les nombres, faire en sorte que tous les quotiens soient entiers; il faut par conséquent mettre en pratique les deux préceptes que voici :

1° Rendre la division possible en multipliant tout le dividende par un facteur qui n'ait point de facteur commun à tous les termes du diviseur, et qui soit tel que le premier terme du produit soit divisible par le premier terme du diviseur;

2° Supprimer le facteur commun à tous les termes de l'une des quantités, lorsqu'il ne l'est pas à tous les termes de l'autre, et qu'il n'a point de facteur commun avec eux.

Par ces deux préceptes, on introduit ou l'on supprime dans l'une des quantités proposées, un facteur qui n'est pas facteur de l'autre quantité, et qui n'a point de facteurs communs avec elle. Donc les facteurs communs à ces deux quantités ne sont ni augmentés ni diminués (*); par conséquent, le p. g. c. d., qui est le produit de tous les facteurs communs, n'est pas changé.

531. Par ex., cherchons le p. g. c. d. des deux polynomes

$$18a^4 - 19a^2c^2 + 6c^4$$
$$8a^3 - 10a^2c - 12ac^2 + 15c^3.$$

Nous diviserons le premier de ces polynomes par le second. Mais il faut d'abord rendre la division partielle possible; ce qui se fera en multipliant tout le dividende par 4, et le produit sera

$$40a^4 - 76a^2c^2 + 24c^4.$$

Par cette multiplication le plus grand commun diviseur cherché n'est pas changé, puisque 4 n'est pas facteur du diviseur et

(*) Cette assertion est assez claire pour n'avoir pas besoin de démonstration; car elle suppose qu'un produit n'ait jamais d'autres facteurs premiers que ceux contenus dans le multiplicande et le multiplicateur; et ce principe me paraît évident. On le démontre d'ailleurs pour les nombres, en arithmétique; mais je crois très-difficile de l'établir rigoureusement pour les quantités algébriques, considérées dans leur état général.

Voyez d'ailleurs la divisibilité des *fonctions entières*, dans l'Algèbre de M. Bourdon, 4me édition, pages 384 et suivantes.

n'a point de facteur commun avec lui. Le premier quotient partiel sera $5a$, et le reste, $50a^3c - 16a^2c^2 - 75ac^3 + 24c^4$.

Comme le p. g. c. d. des deux polynomes proposés est toujours celui du plus petit et du reste (529), ce p. g. c. d. ne changera pas, si on divise le reste par c et si on le multiplie par 4; car c et 4 ne sont pas facteurs du diviseur. De cette manière, le nouveau dividende partiel sera $200a^3 - 64a^2c - 300ac^2 + 96c^3$. Donc le second reste deviendra $186a^2c - 279c^3$.

Pour simplifier l'opération, on supprime $93c$, facteur du second reste, sans l'être du diviseur, et il vient $2a^2 - 3c^2$. Cette suppression ne change pas le p. g. c. d., lequel est par conséquent celui du diviseur et du second reste simplifié $2a^2 - 3c^2$. On aura donc ce p. g. c. d., en déterminant celui des deux polynomes

$$8a^3 - 10a^2c - 12ac^2 + 15c^3 \quad \text{et} \quad 2a^2 - 3c^2.$$

Or, ce dernier p. g. c. d. est $2a^2 - 3c^2$, puisque $2a^2 - 3c^2$ divise l'autre quantité; donc aussi $2a^2 - 3c^2$ est le p. g. c. d. demandé.

532. La recherche que l'on vient d'expliquer fournit plusieurs remarques très-importantes :

I. Pour avoir des quotiens entiers dans la première division, on a multiplié le dividende et le premier reste chacun par 4 : on aurait eu les mêmes résultats, si l'on avait d'abord multiplié le dividende par le carré de 4, ou par 16; et la marche aurait été plus directe. Désormais nous multiplierons le dividende proposé par le facteur propre à rendre la première division partielle possible, élevé à une puissance marquée par le nombre de divisions partielles à effectuer avant d'arriver au *reste* de la division proposée.

II. Si l'on avait oublié de supprimer le facteur $93c$, commun aux deux termes du second reste $186a^2c - 279c^3$; en continuant la recherche, on serait parvenu à un reste ne contenant plus que la première puissance de a, et qui aurait été pris pour diviser $186a^2c - 279c^3$: ce diviseur et tous les suivans n'auraient donc pas conduit au véritable p. g. c. d., puisque celui-ci est en a^2. D'ailleurs le reste $186a^2c - 279c^3$ serait devenu diviseur dans une nouvelle division; et alors pour rendre la première division partielle possible, il aurait fallu multiplier le dividende par $93c$, facteur dans tous les termes du diviseur; donc le p. g. c. d. aurait été changé. Cette remarque prouve qu'il faut absolument faire usage du second précepte (530); ce qui peut conduire à chercher le p. g. c. d. entre plus de deux quantités.

III. On trouverait immédiatement le p. g. c. d. des deux polynomes proposés, en observant que le premier décomposé en facteurs (526), devient $(5a^2-2c^2)(2a^2-3c^2)$, et que le second divisé par $2a^2-3c^2$, prend la forme $(4a-5c)(2a^2-3c^2)$; alors $5a^2-2c^2$ et $4a-5c$ étant premiers entre eux, on voit que le p. g. c. d. des deux polynomes est $2a^2-3c^2$, comme par l'autre méthode.

A l'aide de l'une ou de l'autre méthode, on trouvera que $x-y$ est le p. g. c. d. des deux polynomes

$$3x^3-3x^2y+xy^2-y^3$$
$$\text{et}\quad 4x^2y-5xy^2+y^3.$$

533. Lorsque l'exposant de la lettre principale est le même dans les deux ou trois premiers termes du diviseur, il faut, pour que le plus haut exposant de cette lettre diminue dans chaque reste, réunir en un seul, tous les multiplicateurs de la plus haute puissance de cette lettre dans le diviseur; essayer ensuite, avant de rendre la division possible, si le nouveau multiplicateur ne serait pas facteur de tous les autres termes du diviseur.

Si on négligeait d'opérer la réunion qu'on vient de prescrire, le produit du diviseur par le premier quotient partiel, renfermerait plusieurs termes où l'exposant de la lettre principale serait le même que dans le premier terme du dividende; un seul de ces termes détruirait le premier du dividende; et par conséquent le plus haut exposant de la lettre serait encore le même dans le reste que dans le dividende proposé.

Au moyen de l'observation que l'on vient d'énoncer, on trouve $c-2a$ et $2x^2+3y$ pour les p. g. c. d. respectifs des deux couples de polynomes

$$20a^4-10a^3c-12a^2c+6ac^2 \text{ et } 6a^3-3a^2c+10ac^2-5c^3;$$
$$6x^5y+9x^3y^2-10x^2y^3-15y^4 \text{ et } 8x^3-6x^2y+12xy-9y^2.$$

Mais ces deux p. g. c. d. se trouveraient aussi par la décomposition en facteurs (526).

534. *Lorsqu'un polynome a un diviseur indépendant de la lettre principale, ce diviseur divise exactement chacun des coefficiens des puissances successives de cette lettre.*

En effet, soit $a+bx+cx^2+dx^3+$ etc. un polynome ordonné par rapport à x, et supposons que ce polynome soit divisible par une quantité v indépendante de x; le quotient sera nécessairement de la forme $a'+b'x+c'x^2+d'x^3+$ etc., c'est-à-dire, aura autant de termes en x que le dividende; car v ne contenant pas x, la multiplication du quotient par v ne changera pas les exposans de x. Ainsi on aura

$$a+bx+cx^2+dx^3+\text{etc.}=a'v+b'vx+c'vx^2+d'vx^3+\text{etc.}$$

Les quantités séparées par le signe $=$ devant être *les mêmes*, quelle que soit la valeur de x, il faut qu'on ait, pour cela, $a=a'v$, $b=b'v$, $c=c'v$, $d=d'v$, etc. D'où il suit que le diviseur v indépendant de x divise chacun des coefficiens a, b, c, d, etc.

535. Ce principe conduit à trouver le p. g. c. d. indépendant de la lettre principale x. En effet, ce p. g. c. d. divise les deux polynomes proposés; il divise donc les coefficiens des diverses puissances de x dans ces deux polynomes; il est par conséquent le p. g. c. d. de ces coefficiens. Or, pour trouver ce p. g. c. d., on pourra chercher celui d entre les deux premiers coefficiens, celui d' entre d et le troisième coefficient, celui d'' entre d' et le quatrième coefficient, ainsi de suite; et le dernier p. g. c. d. obtenu sera celui de tous les coefficiens proposés. Ce qu'on démontre comme en arithmétique. (Voyez l'Arithmét. élément., 2^{me} partie.)

Par exemple, qu'on ait les deux polynomes

$$x^4y^2+xy^5-2x^4yz+x^4z^2+xy^3z^2-2xy^4z,$$
$$2x^4y^2-5x^2y^4+3y^6-2x^4z^2+5x^2y^2z^2-3y^4z^2;$$

si l'on réunit les multiplicateurs des diverses puissances de x, ces deux polynomes ne changeront pas de valeurs et deviendront

$$(y^2-2yz+z^2)x^4+(y^5-2y^4z+y^3z^2)x,$$
$$(2y^2-2z^2)x^4+(5y^2z^2-5y^4)x^2+3y^6-3y^4z^2.$$

Pour avoir le p. g. c. d. des coefficiens de x, on pourrait appliquer la règle qui vient d'être énoncée; mais il sera plus court de décomposer ces coefficiens en facteurs; ce qui est facile; et les deux polynomes deviendront ainsi

$$(y-z)^2x^4+y^3(y-z)^2x,$$
$$2(y^2-z^2)x^4-5y^2(y^2-z^2)x^2+3y^4(y^2-z^2).$$

Sous cette forme on voit que $y-z$ est le p. g. c. d. de tous les coefficiens; $y-z$ est donc aussi le p. g. c. d. sans x des deux polynomes proposés.

Pour avoir le p. g. c. d. affecté de x, on simplifiera d'abord l'opération, en divisant les deux polynomes précédens par $y-z$; ce qui donnera

$$(y-z)x^4+(y-z)xy^3,$$
$$2(y+z)x^4-5(y+z)x^2y^2+3(y+z)y^4.$$

On peut supprimer le facteur $(y-z)x$ dans le premier de ces polynomes et le facteur $y+z$ dans le second; et alors on trouvera aisément que $x+y$ est le p. g. c. d. des deux quantités résultantes

$$x^3+y^3 \text{ et } 2x^4-5x^2y^2+3y^4.$$

D'où l'on voit que le p. g. c. d. des deux polynomes proposés est $(y-z)(x+y)$, ou $xy+y^2-xz-yz$.

536. La manière la plus facile d'obtenir le p. g. c. d. est, 1° de déterminer le p. g. c. d. monome et de le supprimer ensuite; 2° de chercher le p. g. c. d. indépendant de la lettre principale, dans les deux quantités restantes, et de l'y supprimer également; 3° enfin, après avoir trouvé le p. g. c. d. des deux nouvelles quantités, il faut le multiplier par le produit des diviseurs communs supprimés; et le résultat exprime le p. g. c. d. demandé. De cette manière, on trouve $3ab(2b+c)(a+b)$, pour le p. g. c. d. des deux polynomes

$$12a^3b^3-12ab^5-3a^3bc^2+3ab^3c^2,$$
$$18a^4b^3-3a^4b^2c-6a^4bc^2+18ab^6-3ab^5c-6ab^4c^2.$$

537. Si l'on parvenait à un reste ne contenant pas la lettre principale, il est clair que le p. g. c. d. ne dépendrait point de cette lettre. Et si une lettre se trouvait dans l'un des polynomes proposés, sans être dans l'autre, le p. g. c. d. cherché serait celui qui existe entre le second polynome et les coefficiens des diverses puissances de cette lettre dans le premier.

538. Remarquons aussi que quand le reste du second degré en x donne, en l'égalant à zéro, une valeur rationnelle v à x, et que cette valeur, mise à la place de x, rend nul le reste précédent du troisième degré; $x-v$ est un diviseur commun aux deux polynomes proposés. En général, la résolution des équations peut conduire au p. g. c. d., plus facilement que la méthode ordinaire. Par exemple, soient les deux polynomes

$$x^5-2ax^4+4a^3x^2-4a^4x,$$
$$x^4-4ax^3+6a^2x^2+4a^3x.$$

Résolvant par rapport à x le second polynome égalé à zéro, ce qui se fera par extraction de racine carrée (258), on verra que ce polynome est la même chose que $x(x-2a)(x^2-2ax+2a^2)$.

Divisant le 1er polynome par $x^2-2ax+2a^2$, on verra que ce polynome revient à
$$x(x^2-2a^2)(x^2-2ax+2a^2).$$

Le p. g. c. d. cherché est donc $x(x^2-2ax+2a^2)$.

Des racines égales et des équations qui s'abaissent à d'autres de degrés moindres.

539. Soit $X=0$ une équation du m^{me} degré en x, et soient $a, b, c, d, \ldots, l$, ses m racines; on aura
$$X=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots(x-l).$$

Cette identité ayant lieu quel que soit x, on ne la détruira pas si l'on y change x en $x+u$; ce qui donnera, en ordonnant le premier membre par rapport aux puissances ascendantes de u,
$$X+X_1u+\tfrac{1}{2}X_2u^2+\cdots+u^m=$$
$$(u+x-a)(u+x-b)\cdots(u+x-l);$$
X_1 étant la dérivée de X, X_2 la dérivée de X_1, etc. (497).

Regardant chacune des quantités $x-a$, $x-b$, $x-c$, ..., $x-l$, comme un monome, le second membre de l'identité que l'on vient de trouver sera le produit de m facteurs binomes, ayant tous le premier terme u commun, et pourra être représenté par $u^m+Au^{m-1}+Bu^{m-2}+\cdots+Tu+U$ (462); il viendra donc $X+X_1u+\frac{1}{2}X_2u^2+\cdots=U+Tu+Su^2+\cdots$

Cette identité ayant lieu pour toutes les valeurs de u, même quand $u=0$, il s'ensuit que les coefficiens d'une même puissance de u dans les deux membres, sont égaux; on a donc
$$X=U,\ X_1=T,\ \tfrac{1}{2}X_2=S, \text{ etc.}$$
Or, T est la somme de tous les produits différens des m seconds termes $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-d$, ..., $x-l$, combinés $m-1$ à $m-1$; donc *pour former* T, *valeur de* X_1, *il faudra, dans le produit* U *ou* X *de ces* m *seconds termes, omettre successivement chacun des* m *facteurs, et ajouter entre eux les* m *résultats.*

540. D'après cela, supposons que l'équation proposée $X=0$ ait n racines égales à a et p à b; il viendra donc

$$X = (x-a)^n (x-b)^p (x-c)(x-d) \ldots (x-l).$$

On vient de voir que pour avoir X_1, il faut, dans le second membre, 1° omettre successivement chacun des n facteurs $x-a$ et ajouter entre eux les n résultats, ce qui donne $n(x-a)^{n-1}(x-b)^p(x-c)(x-d)\ldots(x-l)$; 2° omettre successivement chacun des p facteurs $x-b$, et ajouter entre eux les p résultats, ce qui fournit $p(x-a)^n(x-b)^{p-1}(x-c)(x-d)\ldots(x-l)$; 3° omettre successivement chacun des facteurs $x-c$, $x-d$, ..., $x-l$, et ajouter les résultats, ce qui produit $(x-a)^n(x-b)^p\mathrm{R}$, R désignant la somme des produits qui restent en supprimant successivement chacun des facteurs dans $(x-c)(x-d)\ldots(x-l)$; 4° enfin, ajouter entre elles toutes les valeurs obtenues de cette manière, ce qui fournira

$$X_1 = (x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1}[Q + R(x-a)(x-b)],$$

Q désignant $n(x-b)(x-c)\ldots(x-l) + p(x-a)(x-c)\ldots(x-l)$.

Il est clair que chacun des facteurs $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-d$, ..., $x-l$, manquent dans un terme de la quantité entre crochets; donc aucun de ces binomes ne divise cette quantité : par conséquent le p. g. c. d. entre X et X_1 est $(x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1} = D$. Ainsi *le plus grand commun diviseur entre l'équation proposée et sa dérivée, se compose du produit des facteurs qui entrent plusieurs fois dans cette proposée, élevés respectivement à une puissance moindre d'une unité.*

541. De là on peut conclure la méthode suivante :

Pour connaître si une équation $X = 0$ a des racines égales, il faut former sa dérivée X_1, puis chercher le p. g. c. d. entre X et X_1; s'il est l'unité ou $(x-a)^0(x-b)^0$, ce qui suppose $n=1$ et $p=1$, l'équation n'a pas de racines égales ou de facteurs égaux. Mais s'il y a un diviseur commun D, fonction de x, on cherchera le plus grand commun diviseur E entre D et sa dérivée D_1; puis le p. g. c. d. F entre E et sa dérivée E_1, le p. g. c. d. G entre F et sa dérivée F_1, et ainsi de suite. Soit p_1 le produit des facteurs inégaux ou *simples* de la proposée $X=0$; soient p_2, p_3, p_4, ..., les produits des facteurs *doubles*, *triples*, *quadruples*, ..., c'est-à-dire des facteurs élevés, dans X, aux puissances 2^e, 3^e, 4^e, ...; il est clair qu'on aura le tableau que voici :

$X = p_1 (p_2)^2 (p_3)^3 (p_4)^4 (p_5)^5 \ldots$	$\frac{X}{D} = q_1 = p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 \ldots$
$D = p_2 (p_3)^2 (p_4)^3 (p_5)^4 \ldots$	$\frac{D}{E} = q_2 = p_2 p_3 p_4 p_5 \ldots$
$E = p_3 (p_4)^2 (p_5)^3 \ldots$	$\frac{E}{F} = q_3 = p_3 p_4 p_5 \ldots,$
$F = p_4 (p_5)^2 \ldots$	$\frac{F}{G} = q_4 = p_4 p_5 \ldots$
$G = p_5 \ldots$	
etc. ...	etc...........

D'où l'on voit qu'en divisant q_1 par q_2, q_2 par q_3, q_3 par q_4, et ainsi de suite, les quotiens seront respectivement p_1, p_2, p_3, etc. On a donc ainsi les expressions algébriques des produits p_1, p_2, p_3, ... ; et la résolution de la proposée $X = 0$, se réduit à traiter les équations beaucoup plus simples $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0$, etc., lesquelles ont toutes des racines inégales.

542. Considérons, par exemple, l'équation

$$X = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4 = 0;$$

nous aurons donc, d'après la méthode précédente,

$$\begin{array}{ll} D = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2; & q_1 = q_2 = x^2 - x - 2, \\ E = x^2 + 2x + 1 & q_3 = q_4 = x + 1, \\ F = x + 1, & q_5 = 1 = q_6, \text{ etc.} \\ G = 1 = H, \text{ etc.} & \end{array}$$

Ce qui donne $p_1 = 1$, $p_2 = x - 2$, $p_3 = p_5 = 1$, $p_4 = x + 1$. Ainsi on voit que $X = 0$ n'a point de facteurs simples, ni de facteurs triples, etc.; mais que X a deux facteurs égaux à $x - 2$ et quatre facteurs égaux à $x + 1$: et comme $(x+1)^4 (x-2)^2$ est de même degré que X, il en résulte $X = (x+1)^4 (x-2)^2$.

543. Soit encore l'équation

$$X = x^{10} - 4x^9 + 5x^8 - 8x^7 + 10x^6 + 10x^4 + 8x^3 + 5x^2 + 4x + 1 = 0;$$

on en déduit

$$D = x^6 - 2x^5 + x^4 - 4x^3 - x^2 - 2x - 1,\ E = x^2 + 1,$$
$$F = 1 = G, \text{ etc},\ q_1 = x^4 - 2x^3 - 2x - 1 = q_2,$$
$$q_3 = x^2 + 1,\ q_4 = 1 = q_5, \text{ etc.}$$

D'où résulte $p_1 = 1$, $p_2 = x^2 - 2x - 1$, $p_3 = x^2 + 1$, $p_4 = p_5 = 1$. Donc $X = (x^2+1)^3 (x^2 - 2x - 1)^2$.

Ce procédé conduit, comme on voit, aux racines imaginaires et incommensurables de l'équation proposée.

On peut s'exercer sur les équations

$$x^3 - 27x + 54 = 0,$$
$$x^6 + 4x^5 - 3x^4 - 16x^3 + 11x^2 + 12x - 9 = 0,$$
$$x^7 + 5x^6 + 6x^5 - 6x^4 - 15x^3 - 3x^2 + 8x + 4 = 0,$$
$$9x^6 + 30x^5 + 22x^4 + 10x^3 + 17x^2 - 20x + 4 = 0.$$

544. Si le polynome $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ était une puissance 4^{me} exacte, de la forme $(x + z)^4$, sa dérivée serait $4(x + z)^3$; par conséquent cette dérivée diviserait exactement le produit du polynome proposé par 16. Effectuant donc cette division, le reste sera

$$(8b - 3a^2)x^2 + 2(6c - ab)x + (16d - ac).$$

Et puisque la division doit se faire exactement, ce reste est nul, quel que soit x; ce qui exige qu'on ait séparément

$$8b - 3a^2 = 0,\quad 6c - ab = 0 \quad\text{et}\quad 16d - ac = 0;$$

d'où l'on tire $b = \frac{3}{8}a^2$, $c = \frac{1}{16}a^3$ et $d = \frac{1}{256}a^4$.

Substituant ces valeurs dans le polynome proposé, on verra qu'alors il se réduit au développement de $(x + \frac{1}{4}a)^4$.

Par cette manière d'opérer, on trouvera toujours les relations qui doivent exister entre les coefficiens d'un polynome *complet* du n^{me} degré en x, pour que ce polynome soit la puissance n^{me} exacte d'un binome de la forme $x + z$. Et l'on peut obtenir aisément les conditions pour que $ax^3 + bx^2 + cx + d$ soit un cube parfait.

545. Nous avons vu (541) que quand une équation a des racines égales, elle peut s'*abaisser* à d'autres de degrés moins élevés. Or, la décomposition d'une équation en d'autres plus simples, s'opère facilement lorsque cette équation a des racines égales deux à deux et de signes contraires, comme

$$(x^2 - a^2)(x^2 + b^2) \times f(x) = 0.$$

En effet, si dans cette équation l'on change x en $-x$, ce qui donne $(x^2 - a^2)(x^2 + b^2) \times f(-x) = 0$, le p. g. c. d. entre la nouvelle équation et la proposée sera $(x^2 - a^2)(x^2 + b^2)$ ou le produit des binomes résultans des racines qui sont égales 2 à 2 et de signes contraires. Si donc on cherche ce p. g. c. d. et qu'on l'égale à zéro, ainsi que le quotient $f(x)$ qu'il donne en divisant par lui l'équation proposée, les racines de cette équation seront celles des deux équations beaucoup plus simples

$$(x^2-a^2)(x^2+b^2)=0 \text{ et } f(x)=0.$$

546. Qu'on ait, par exemple, l'équation

$$x^7+5x^6-24x^4-13x^3+7x^2-12x+36=0;$$

en y changeant x en $-x$, la transformée sera

$$-x^7+5x^6-24x^4+13x^3+7x^2+12x+36=0.$$

Le plus grand commun diviseur entre cette équation et la proposée est x^4-3x^2+4. Divisant l'équation proposée par ce p. g. c. d., le quotient sera x^3+5x^2+3x-9. Ainsi l'équation proposée est abaissée aux deux

$$x^4-3x^2+4=0 \text{ et } x^3+5x^2+3x-9=0.$$

Les racines de cette équation sont par conséquent 2, -2, $\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$, -3, -3, 1.

On peut traiter d'une manière semblable l'équation

$$x^{10}+4x^9-8x^8-48x^7-18x^6+120x^5+92x^4-112x^3-103x^2+36x+36=0.$$

547. Parmi les équations susceptibles d'abaissement, on distingue les *équations réciproques*, ainsi nommées, parce que leurs racines sont *inverses* ou *réciproques* deux à deux, en sorte qu'une racine étant a, l'autre est $\frac{1}{a}$. Ces équations doivent donc rester les mêmes quand on y change x en $\frac{1}{x}$, et il faut par conséquent que les coefficiens des termes également distans des extrêmes soient égaux entre eux (494).

548. Considérons d'abord l'équation réciproque de degré pair

$$Nx^8+Px^7+Qx^6+Rx^5+Sx^4+Rx^3+Qx^2+Px+N=0.$$

Divisant les deux membres par x^4, l'équation pourra se mettre sous la forme

$$N\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)+P\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+Q\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+R\left(x+\frac{1}{x}\right)+S=0.$$

Posant $x+\frac{1}{x}=u$; d'où $x^2+\frac{1}{x^2}=u^2-2$, $x^3+\frac{1}{x^3}=u^3-3u$ et $x^4+\frac{1}{x^4}=u^4-4u^2+2$, il viendra, réductions faites,

$$Nu^4+Pu^3+(Q-4N)u^2+(R-3P)u+2N-2Q+S=0.$$

Cette équation, d'un degré deux fois moindre que celui de la proposée, fera connaître les quatre valeurs du u, au moyen desquelles l'équation $x+\frac{1}{x}=u$ ou $x^2-ux=-1$ fournira les huit valeurs de x.

549. On résoudra d'une manière analogue, 1° toute équation réciproque de degré pair; 2° toute équation de degré pair dont les termes également éloignés des extrêmes ont leurs coefficiens égaux et tels, que ceux qui suivent celui du milieu ont alternativement des signes contraires et des signes pareils à ceux des coefficiens égaux qui précèdent, comme dans l'équation

$$Nx^6+Px^5+Qx^4+Rx^3-Qx^2+Px-N=0.$$

550. Quant aux équations réciproques de degrés impairs, elles sont toujours divisibles par $x+1$, et le quotient égalé à zéro, est une équation réciproque de degré pair. C'est de quoi l'on se convaincra en opérant sur l'équation

$$Nx^7+Px^6+Qx^5+Rx^4+Rx^3+Qx^2+Px+N=0.$$

On traitera de même toute équation de degré impair dont les coefficiens des termes également distans des extrêmes, sont égaux et de signes contraires, comme

$$Nx^5+Px^4+Qx^3-Qx^2-Px-N=0.$$

551. Voici des équations à résoudre, d'après les méthodes que nous venons d'indiquer :

$$24x^6-122x^5-43x^4+606x^3-43x^2-122x+24=0,$$
$$12x^7-28x^6-79x^5+131x^4+131x^3-79x^2-28x+12=0,$$
$$32x^6-288x^5+714x^4-99x^3-714x^2-288x-32=0,$$
$$6x^5-13x^4-29x^3+43x^2-x-6=0.$$

552. Les principes précédens peuvent aussi servir à résoudre les équations à deux termes, comme on l'a déjà vu dans le calcul des radicaux (347). En effet, l'une des racines de l'équation $x^m-1=0$ est $x=1$; et si l'on divise cette équation par $x-1$, le quotient égalé à zéro, sera une équation réciproque, réductible à une équation d'un degré deux fois moindre, au moins. Par exemple, l'équation $x^5+1=0$ donne d'abord $x=-1$, puis $x^4-x^3+x^2-x+1=0$; d'où $u^2-u=1$, en posant $x+\frac{1}{x}=u$. De là on tire aisément les quatre valeurs de x.

On peut donc résoudre complétement l'équation $x^{10}+31x^5-32=0$, ainsi que $nx^{10}+cpx^8+c^2qx^6-c^3qx^4-c^4px^2-c^5n=0$.

De l'Elimination.

553. On sait que *résoudre* deux équations à deux inconnues x et y, de la forme $A=0$ et $B=0$, c'est déterminer tous les *couples* ou *systèmes* de valeurs de ces inconnues, capables de *satisfaire* à ces équations, c'est-à-dire, de rendre nuls leurs premiers membres A et B. Or, cela exige qu'on sache *éliminer* une inconnue, de manière à trouver une équation *finale*, ne contenant plus que l'autre inconnue et des nombres donnés.

554. Si les équations à résoudre contenaient des radicaux, on ferait d'abord disparaître ces radicaux, à l'aide d'inconnues *auxiliaires*. Par exemple, qu'on ait les deux équations

$$\sqrt[3]{(u+z)^2}-3\sqrt{u-z}+2=0 \text{ et } uz+u-z-16=0;$$

pour faire disparaître les radicaux, on posera

$$u+z=x^3 \text{ et } u-z=y^2;$$

$$\text{d'où } u=\tfrac{1}{2}(x^3+y^2) \text{ et } z=\tfrac{1}{2}(x^3-y^2).$$

Avec ces valeurs, les deux équations proposées deviennent

$$x^2-3y+2=0 \text{ et } x^6-y^4+4y^2-64=0.$$

On peut éliminer x de ces équations, en prenant la valeur de x^2, dans la première, et substituant cette valeur dans la 2^e équation.

Désormais nous ne résoudrons que des équations à coefficiens entiers et où les exposans des inconnues seront des nombres entiers positifs.

555. Soient d'abord les deux équations

$$2x^2+3xy-2xy^2-3y^3=0,$$
$$x^2+3x-2xy-6y=0.$$

Comme l'inconnue y est au premier degré, dans la seconde de ces équations, il convient de la résoudre par rapport à cette inconnue, et on aura

$$y=\frac{x^2+3x}{2x+6}, \text{ ou } y=\frac{x(x+3)}{2(x+3)}.$$

Avant de simplifier l'expression de y, en supprimant le facteur $x+3$, commun à ses deux termes, il faut égaler ce facteur à zéro; car $x+3$ étant nécessairement facteur aussi du premier membre de la seconde équation proposée, en égalant $x+3$ à zéro, cette équation sera satisfaite. Or, $x+3=0$ donne $x=-3$; substituant -3 à x dans la première équation proposée, elle deviendra

$$y^3-2y^2+3y-6=0, \text{ ou } (y-2)(y^2+3)=0.$$

Cette équation donne $y=2$ et $y=\pm\sqrt{-3}$. Ces valeurs et $x=-3$ satisfont effectivement aux équations à résoudre.

Supprimant le facteur $x+3$ dans les deux termes de l'expression générale de y, ce qui donnera $y=\frac{1}{2}x$, et substituant dans la première équation proposée, elle deviendra

$$x^3-4x^2=0, \text{ ou } x^2(x-4)=0.$$

Cette équation et $y=\frac{1}{2}x$ donnent $x=0$ et $y=0$, $x=0$ et $y=0$, $x=4$ et $y=2$.

De sorte que les deux équations proposées admettent les six *solutions* que voici :

$$\begin{array}{l} y=2,\ \sqrt{-3},\ -\sqrt{-3},\ 0,\ 0,\ 2, \\ x=-3,\ -3,\ -3,\ 0,\ 0,\ 4; \end{array}$$

et rien n'aurait indiqué les trois premières si, dans la vue de simplifier, on avait supprimé le facteur $x+3$, sans l'égaler d'abord à zéro.

556. Considérons actuellement les deux équations

$$\begin{array}{l} x^3+2x^2y+2xy^2-4xy+y^3-4=0, \\ x^2+2xy+2y^2-5y+2=0. \end{array}$$

Bien que ces équations ne soient pas du premier degré en x ou en y, elles conduisent cependant à une telle équation, par rapport à x, en retranchant de la première le produit de la seconde par x, car alors on trouve

$$xy-2x+y^2-4=0; \text{ d'où } x=-\frac{y^2-4}{y-2}.$$

Avant de supprimer le facteur commun $y-2$, on l'égale à zéro, et l'on substitue la valeur $y=2$ qui en résulte, dans la seconde équation proposée, laquelle se réduit à $x^2+4x=0$, et donne $x=0$ et $x=-4$.

Supprimant le facteur commun $y-2$, ce qui donnera $x=-y-2$, et substituant dans la seconde équation proposée, on aura $y^2-5y+6=0$; d'où $y=3$ et $y=2$.

Ainsi les équations proposées se résolvent par les quatre systèmes :

$$x=0,\ -4,\ -5,\ -4,$$
$$y=2,\quad 2,\quad 3,\quad 2.$$

557. Il est toujours possible, par des éliminations successives d'un ou de plusieurs termes, de tirer de deux équations proposées, une équation du premier degré, par rapport à une inconnue. Mais les calculs ne sont guères praticables, en général, que pour les équations du second ou du troisième degré. Prenons par ex., les équations générales du troisième degré que voici :

$$x^3+px^2+qx+r=0,$$
$$x^3+p'x^2+q'x+r'=0.$$

Dans ces équations, p, q, r, p', q', r', sont des fonctions de y et de nombres donnés. Retranchant la seconde équation de la première, et posant, pour abréger $p-p'=e$, $q-q'=e'$ et $r-r'=e''$, on aura

$$ex^2+e'x+e''=0\ \ldots\ (1).$$

Soustrayant de cette équation multipliée par x, la première proposée multipliée par e, il viendra

$$(e'-ep)x^2+(e''-eq)x-er=0\ \ldots\ (2).$$

Eliminant x^2 entre les deux équations (1) et (2), on trouve

$$[e'(e'-ep)-e(e''-eq)]x+e''(e'-ep)+e^2r=0;$$

d'où l'on tire $$x=\frac{e''(e'-ep)+e^2r}{e(e''-eq)-e'(e'-ep)}.$$

Substituant dans l'équation (1), chassant les dénominateurs, et décomposant en facteurs les deux termes multipliés par e' et e'', on aura

$$[e(e''-eq)-e'(e'-ep)][ee'r+e''(e''-eq)]+$$
$$[e''(e'-ep)+e^2r]^2=0\ \ldots\ (3).$$

Telle est l'équation finale en y; et il est facile d'en conclure que x a aussi pour expression

$$x=-\frac{ee'r+e''(e''-eq)}{e''(e'-ep)+e^2r}\ \ldots\ (4).$$

Posant $r' = 0$, ce qui répond aux deux équations

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$
$$x^2 + p'x + q' = 0,$$

les formules (3) et (4), deviendront, réductions faites,

$$(r - eq')^2 + (e' - ep')(e'q' - rp') = 0,$$
$$x = -\frac{r - eq'}{e' - ep'} = \frac{e'q' - rp'}{r - eq'}.$$

Enfin, si dans ces dernières formules, on prend $r = 0$, il viendra

$$x^2 + px + q = 0, \quad x^2 + p'x + q' = 0,$$
$$e'^2 + e(pq' - qp') = 0 \text{ et } x = \frac{eq'}{e' - ep'} = -\frac{e'}{e},$$

Ces formules rentrent dans celles qu'on trouve, pages 122 et suivantes des Mélanges d'algèbre, et dont nous avons donné alors plusieurs applications.

558. Toutes les fois que les équations à résoudre peuvent se décomposer en facteurs, fonctions de l'une ou des deux inconnues, il ne faut pas manquer d'opérer cette décomposition; car alors en combinant chaque facteur d'une équation, égalé à zéro, avec chaque facteur de l'autre équation, égalé aussi à zéro, on n'a plus à éliminer qu'entre des équations de degrés moins élevés; et les procédés de l'élimination deviennent beaucoup plus simples. Prenons, par exemple, les deux équations

$$x^3y - 6x^2 - xy + 6 = 0,$$
$$2x^3 - 3x^2y - 2xy^2 + 3y^3 = 0.$$

Si l'on réunit les multiplicateurs de xy et de -6, dans la première, et les multiplicateurs de $2x$ et de $-3y$, dans la seconde, on verra facilement que ces équations se réduisent aux deux que voici :

$$(xy - 6)(x + 1)(x - 1) = 0,$$
$$(x + y)(x - y)(2x - 3y) = 0.$$

Or, un produit est nul dès que l'un de ses facteurs est zéro; les deux équations précédentes sont donc satisfaites par les neuf systèmes d'équations qui suivent :

$xy - 6 = 0$ et $x + y = 0$; $xy - 6 = 0$ et $x - y = 0$;
$xy - 6 = 0$ et $2x - 3y = 0$; $x + 1 = 0$ et $x + y = 0$;
$x + 1 = 0$ et $x - y = 0$; $x + 1 = 0$ et $2x - 3y = 0$;

$$x-1=0 \text{ et } x+y=0;\quad x-1=0 \text{ et } x-y=0;$$
$$x-1=0 \text{ et } 2x-3y=0.$$

De ces neuf systèmes d'équations, on tire aisément les douze couples de valeurs :

$$y=\pm\sqrt{-6},\ \pm\sqrt{6},\ \pm 2,\quad 1,\ -1,\ -\tfrac{2}{3},\ -1,\ 1,\ \tfrac{2}{3};$$
$$x=\mp\sqrt{-6},\ \pm\sqrt{6},\ \pm 3,\ -1,\ -1,\ -1,\quad 1,\ 1,\ 1;$$

et chacun de ces couples de valeurs satisfait en effet aux deux équations proposées, qu'on pourrait aussi résoudre, mais par des calculs beaucoup plus compliqués, d'après la méthode du n° 555.

559. On voit combien il importe de décomposer les équations à résoudre, en facteurs inconnus, lorsque cela est possible; mais l'habitude du calcul peut seule indiquer comment il faut opérer cette décomposition. Par ex., si l'on avait les deux équations

$$2x^2-3xy-2y^2-3x+6y=0,$$
$$x^3-4xy-x^2y+4y^2+x^2-4y=0;$$

on observerait que les deux derniers termes de la première sont la même chose que $-3(x-2y)$; et que si l'on divise les trois premiers par $x-2y$, le quotient est exactement $2x+y$; d'où il est aisé de voir que la première équation revient à

$$(x-2y)(2x+y-3)=0.$$

A l'égard de la seconde, si l'on y réunit les multiplicateurs de $-4y$, on verra ensuite qu'elle équivaut à

$$(x^2-4y)(x-y+1)=0.$$

Il est donc aisé de résoudre ces équations, en combinant chaque facteur de la première, égalé à zéro, avec chaque facteur de la seconde, égalé aussi à zéro.

560. Considérons encore les deux équations

$$x^3-(3y+9)x^2+(3y^2+18y+23)x-y^3-9y^2-23y-15=0,$$
$$x^3+(3y-3)x^2+(3y^2-6y-1)x+y^3-3y^2-y+3=0.$$

Les premiers termes de ces équations donnent l'idée de comparer la première au cube de $x-(y+3)$ et la seconde à celui de $x+(y-1)$; alors si l'on ajoute ou retranche à ces cubes les termes nécessaires pour les réduire aux deux équations proposées, et si l'on observe qu'en général $a^3-ab^2=a(a+b)(a-b)$ on verra que ces équations peuvent s'écrire comme il suit:

$$(x-y-3)(x-y-1)(x-y-5)=0,$$
$$(x+y-1)(x+y+1)(x+y-3)=0.$$

On peut aussi résoudre par la décomposition en facteurs les deux systèmes d'équations :

$$x^3-(3y-3)x^2+(3y^2-6y-1)x-y^3+3y^2+y-3=0,$$
$$x^2+(2y+4)x+y^2+4y+3=0;$$
$$x^4-4x^3y+6x^2y^2-4(y^3+2)x+y^4+8y=0,$$
$$x^3+(3y-3)x^2+(3y^2-6y-1)x+y^3-3y^2-y+3=0.$$

561. Soient à résoudre les deux équations

$$x^3-y^3=a \quad \text{et} \quad x^2y-xy^2=b.$$

Ces deux équations peuvent se traiter par diverses méthodes. On pourrait substituer dans la première la valeur de x tirée de la seconde ; ce qui donnerait une équation contenant un radical qu'il faudrait faire disparaître : on pourrait aussi employer des inconnues auxiliaires et poser $x=u+v$ et $y=u-v$. Mais ce second procédé, quoique plus simple que l'autre, exige encore assez de calculs. Voici la marche la plus facile :

Retranchant de la première équation proposée, le triple de la seconde et extrayant la racine cubique de part et d'autre, on aura

$$x-y=\sqrt[3]{a-3b}.$$

La deuxième équation étant la même que $xy(x-y)=b$, elle devient $xy\sqrt[3]{(a-3b)}=b$. Cette équation et celle en $x-y$, feront connaître aisément x et y. On peut faire $a=26$ et $b=6$.

Voici encore deux équations à résoudre

$$x^4+2x^2y^2+y^4=a=169,$$
$$x^3y-x^2y^2+xy^3=b=42.$$

562. Presque toutes les méthodes précédentes d'élimination ne conviennent qu'à de certaines équations et ne sont point générales ; mais il est bon de les connaître, parce que souvent elles donnent, avec peu de calculs, les valeurs que les méthodes générales ne fourniraient que par des opérations longues et compliquées. Il existe d'ailleurs, dans la manière d'éliminer les inconnues, des simplifications accidentelles, que l'habitude du calcul algébrique fait bien vite apercevoir, et dont nous avons donné beaucoup d'exemples dans nos Mélanges d'algèbre.

563. La méthode d'élimination qui paraît devoir être préférée, en général, est celle du commun diviseur, que nous allons, en conséquence, présenter avec les détails convenables.

564. Soit donc à éliminer x entre les deux équations $A=o$ et $B=o$, qui ne contiennent que des puissances entières et positives de x et de y. Si l'on connaissait une des valeurs *convenables* de y, en substituant cette valeur dans les équations proposées, celles-ci ne contiendraient plus d'inconnues que x, et seraient satisfaites par la même valeur $x=a$: donc leurs premiers membres A et B seraient divisibles par $x-a$, et auraient par conséquent un commun diviseur en x. Ainsi en traitant A et B comme pour en trouver le plus grand commun diviseur en x, les vraies valeurs de y rendront nul le reste R indépendant de x, et seront données par l'équation $R=o$. Mais puisque le reste précédent Q est alors le plus grand commun diviseur entre A et B ; en posant $Q=o$, A et B auront un facteur nul, et par conséquent les équations proposées $A=o$ et $B=o$ seront satisfaites. D'où il suit que l'équation $Q=o$ donnera les vraies valeurs de x, après qu'on y aura substitué celles de y, tirées de $R=o$.

On voit donc, que pour résoudre deux équations à deux inconnues x et y, il faut chercher le plus grand commun diviseur en x des premiers membres A et B, et continuer l'opération jusqu'à ce qu'on soit parvenu à un reste ne contenant plus d'inconnue que y. Ce reste égalé à zéro, sera l'équation finale, qu'il faudra résoudre. Substituant ensuite les valeurs de y, tirées de cette équation, dans l'avant-dernier reste égalé à zéro, il en résultera les valeurs correspondantes de x.

565. Qu'on ait, par exemple, les deux équations

$$x^2-(2y+5)x+y^2+5y+6=o,$$
$$x^2-4xy+4y^2-1=o.$$

Divisant le premier membre de la première par le premier membre de la seconde, on aura 1 pour quotient et pour reste

$$(2y-5)x-3y^2+5y+7.$$

Pour éviter les quotiens et les restes fractionnaires, il faut multiplier le diviseur, qui doit devenir dividende, par $(2y-5)^2$: de cette manière, on pourra faire deux divisions partielles consécutives, sans introduire de nouveaux facteurs (532). Effectuant ces deux divisions partielles, on tombera sur le reste indépendant de x, $y^4-10y^3+35y^2-50y+24$.

Ainsi, tous les couples de valeurs de x et de y, capables de satisfaire aux équations proposées, seront donnés par les deux équations $y^4-10y^3+35y^2-50y+24=0$,

$$(2y-5)x-3y^2+5y+7=0 \ldots (1).$$

La première de ces équations, qui est l'équation finale en y, étant résolue par la méthode des diviseurs commensurables, donne $y=1$, $y=2$, $y=3$, $y=4$. Substituant ces valeurs dans l'équation (1), il vient, pour les valeurs correspondantes de x, $x=3$, $x=5$, $x=5$ et $x=7$. De sorte que les équations proposées admettent les quatre systèmes de valeurs :

$$y=1,\ 2,\ 3,\ 4,$$
$$x=3,\ 5,\ 5,\ 7;$$

Et en effet, chacun de ces systèmes, satisfait aux deux équations qu'il fallait résoudre.

566. La règle que nous venons d'appliquer, ne paraît d'abord devoir offrir d'autres difficultés que la longueur des calculs; néanmoins elle est susceptible de plusieurs modifications importantes, sans lesquelles on obtiendrait souvent une équation finale compliquée de *facteurs étrangers* à la question.

En effet, reprenons les équations $A=0$ et $B=0$, et opérons sur les polynomes A et B, comme pour en trouver le plus grand commun diviseur en x. Soient M, M′, M″, M‴, etc., les facteurs introduits dans les dividendes successifs, pour avoir des quotiens entiers (532); ces facteurs seront des nombres donnés ou des *fonctions* de y seul. Désignons par Q, Q′, Q″, Q‴, etc., les quotiens successifs, et par R, R′, R″, R‴, etc., les restes correspondans; on aura cette suite d'identités :

$$MA = BQ + R$$
$$M'B = RQ' + R'$$
$$M''R = R'Q'' + R''$$
$$M'''R' = R''Q''' + R'''$$
$$\text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pour fixer les idées, supposons que R‴ soit le reste indépendant de x. Puisque toutes les quantités qui composent les identités précédentes, sont *entières* et ne renferment que des puissances entières et positives de x et de y, aucune de ces quantités ne deviendra infinie. D'après cela, on voit que tous les couples de valeurs de x et de y, qui réduiront A et B à zéro, donneront aussi $R=0$, $R'=0$, $R''=0$ et $R'''=0$. Ces couples réduisant donc à zéro tous les restes successifs, seront donnés par les équations $R''=0$ et $R'''=0$, l'une du premier degré en x et l'autre indépendante de x. Ainsi après avoir résolu l'équation $R'''=0$, il faudra substituer les valeurs de y dans l'équation $R''=0$, et il en résultera les valeurs correspondantes de x.

De cette manière, on aura tous les couples de valeurs de x et de y, capables de satisfaire aux équations proposées $A=0$ et $B=0$. Mais on pourra aussi en avoir d'autres; car bien que les valeurs $x=a$ et $y=b$, tirées de $R''=0$ et $R'''=0$, donnent $M'''R'=0$, cependant ces valeurs pourraient fournir $M'''=0$, sans donner $R'=0$; ou bien, si elles fournissaient $R'=0$, et par suite $M''R=0$, elles pourraient conduire à $M''=0$, sans donner $R=0$; etc. Supposons, par exemple, que ces valeurs donnent $M''=0$, sans annuler le reste R; alors ces mêmes valeurs ne satisferont pas aux équations proposées $A=0$ et $B=0$. Car si cela était, on aurait aussi $R=0$; ce qui est contre l'hypothèse. Et comme les équations $R'''=0$ et $M''=0$, ne renferment pas x, la valeur $y=b$, qui satisfait à la première, doit aussi satisfaire à la seconde; ces deux équations sont donc divisibles par $y-b$; elles ont par conséquent $y-b$ pour facteur commun.

567. Il suit de là que les solutions étrangères, telles que $x=a$ et $y=b$, viennent de ce que les coefficiens des premiers termes des diviseurs successifs, ont des facteurs fonctions de y, communs avec l'équation finale $R'''=0$. En effet, si ces coefficiens n'avaient pas de facteurs communs avec R''', tout système de valeurs, tel que $x=a$ et $y=b$, qui satisferaient aux équations $R'''=0$ et $R''=0$, ne rendrait nul aucun des coefficiens des premiers termes des diviseurs; et par conséquent ne ferait évanouir aucune des quantités M, M', M'', M''', etc., qui sont des puissances ou des facteurs de ces coefficiens. Car si $y=b$ donnait $M''=0$, par exemple, M'' serait divisible par $y-b$ et aurait $y-b$ pour facteur commun avec R'''; ce qui est contre la supposition. Mais puisqu'aucune des quantités M, M', M'',

M''', etc., ne sera annulée par les systèmes de valeurs, tirées des équations $R'''=0$ et $R''=0$, il s'ensuit que tous ces systèmes donneront $R'=0$, $R=0$, $B=0$ et $A=0$; ces systèmes satisferont donc aux équations proposées $A=0$ et $B=0$, et seront par conséquent les véritables.

568. Ainsi, en général, *si aucun des facteurs des premiers termes de chaque diviseur ne divise le dernier reste, ce reste et l'avant-dernier, égalés à zéro, fourniront tous les couples de valeurs de* x *et de* y, *capables de satisfaire aux équations proposées, et n'en donneront point d'autres.* Par conséquent, avant de résoudre l'équation finale, il faudra la débarrasser, par la division, des facteurs qu'elle pourrait avoir de communs avec les premiers termes de diviseurs, parce que ces facteurs fournissent seuls les solutions étrangères. Par exemple, soient les deux équations

$$x^3y-3x+1=0 \quad \text{et} \quad x^2(y-1)+x-2=0.$$

Pour avoir le plus grand commun diviseur en x, multiplions la première par $(y-1)^2$, et divisons par la deuxième : le premier reste sera

$$-x(y^2-5y+3)+y^2-4y+1.$$

Multipliant le premier diviseur par $(y^2-5y+3)^2$, et divisant par le premier reste, le second reste sera

$$y^5-10y^4+37y^3-64y^2+52y-16.$$

Avant d'égaler ce reste à zéro, il faut le débarrasser des facteurs qu'il peut avoir de communs avec les premiers termes des diviseurs. Or, ce deuxième reste n'est pas divisible par y^2-5y+3; mais on trouve qu'il l'est par $(y-1)^2$ (*), et l'on a, pour équation finale.

(*) *Le facteur introduit pour rendre une division possible, est toujours diviseur du reste de la division suivante.* En effet, l'équation $M''=0$ en y seul, donne des valeurs telles que $y=\beta$: substituons-les dans R', R'', R''', qui deviendront fonctions de x seul. Par sa nature, M'' est facteur de a dans $R'=ax^v+bx^{v-1}+\dots$, et $M''=0$ abaisse R' au degré $v-1$, qui est celui de R''. Ainsi les équations $R'=0$ et $R''=0$, pour $y=\beta$, ont chacune $v-1$ valeurs de x, qui doivent être les mêmes respectivement, puisque dès que M'' est nul avec R', R'' l'est aussi, d'après les identités du n° 566, et réciproquement. Mais alors R''' est nul; ce qui suppose qu'en faisant $y=\beta$ dans $R'''=0$, on peut tirer de

$$y^3 - 8y^2 + 20y - 16 = 0.$$

Cette équation donne $y = 4$, 2 et 2. Substituant ces valeurs dans le premier reste égalé à zéro, il viendra $x = -1$, 1 et 1.

Si l'on n'avait pas dégagé l'équation finale du facteur $(y-1)^2$, elle aurait été annulée par $(y-1)^2 = 0$, équation qui, avec l'avant-dernier reste égalé à zéro, aurait donné les deux systèmes de solutions étrangères $y = 1$ et $x = 2$, $y = 1$ et $x = 2$.

569. *Lorsque l'un* R'' *des restes successifs a un facteur* k *fonction de* y, *sans l'être de* x, *il faut égaler à zéro ce facteur* k, *ainsi que le reste précédent* R', *puis résoudre les deux équations résultantes* $k = 0$ *et* $R' = 0$. *Continuer ensuite l'opération de l'élimination*. De cette manière, on obtiendra des couples de valeurs beaucoup plus simplement que par la méthode générale. Et si k n'a point de facteurs communs avec les premiers termes des diviseurs employés R', R et B, les valeurs trouvées ne pouvant annuler les quantités M, M', M'' (566), donneront nécessairement $R = 0$, $B = 0$ et $A = 0$, et satisferont par conséquent aux équations proposées.

Mais si k contenait des facteurs communs avec les premiers termes des diviseurs employés, il faudrait, pour reconnaître les vrais couples de valeurs, les substituer successivement dans les équations à résoudre.

570. Pour appliquer la règle précédente, reprenons les équations déjà résolues au n° 560, savoir :

$$x^3 - (3y+9)x^2 + (3y^2+18y+23)x - y^3 - 9y^2 - 23y - 15 = 0,$$
$$x^3 + (3y-3)x^2 + (3y^2-6y-1)x + y^3 - 3y^2 - y + 3 = 0.$$

Effectuant la première division, on aura pour reste :

---

cette équation, du degré $v-2$ en x, toutes les $v-1$ valeurs de x; chose impossible (489), à moins que $y = g$ ne rende nul R''' sans le secours d'aucune valeur de x, c'est-à-dire, à moins que $y - g$ ne divise R'''. Donc R''' est divisible par tous les facteurs de M''; il l'est donc par M'' lui-même.

Ce principe est général; et si l'on a les deux équations

$$y^3x^2 - 3y^3x - y^2 + 2 = 0,$$
$$(y^2 - 3y + 2)x^2 + (y-1)x - 3y + 1 = 0,$$

et qu'en éliminant x, on prenne la première pour dividende, on verra que le reste indépendant de x sera divisible par $(y^2 - 3y + 2)^2$.

$$-(6y+6)x^2+(24y+24)x-2y^3-12y^2-22y-18\ldots(1)$$

Avec un peu d'attention, on reconnaît que $2(y+1)$ est facteur de ce reste ; car $y=-1$ fait évanouir la partie indépendante de x. Et comme $2(y+1)$ n'a pas de facteur commun, fonction de y, avec le coefficient 1 du premier terme du diviseur, il faut poser $y+1=0$ ou $y=-1$; ce qui réduit le diviseur égalé à zéro, à l'équation

$$x^3-6x^2+8x=0;\ \text{d'où}\ x=0,\ x=4\ \text{et}\ x=2.$$

On trouve effectivement que chacune de ces valeurs avec $y=-1$, satisfait aux équations proposées.

Supprimant le facteur $2(y+1)$, dans le premier reste, et changeant les signes, il vient, pour second diviseur,

$$3x^2-12x+y^2+2y+9;\ \ldots(2)$$

et l'on a, pour second reste,

$$(24y^2+48y)x-48y^2-96y.\ \ldots(3)$$

Il est aisé de voir que $24y(y+2)$ est facteur de ce second reste. Egalant donc ce facteur à zéro, ainsi que le second diviseur (2), il viendra deux équations, qui fourniront les quatre systèmes de valeurs $y=0$ et $x=3$, $y=0$ et $x=1$, $y=-2$ et $x=3$, $y=-2$ et $x=1$. Et ces quatre systèmes satisfont aux équations proposées, parce qu'en effet, le facteur $24y(y+2)$ n'a point de facteurs, fonctions de y, qui soient communs aux premiers termes des diviseurs employés.

Supprimant le facteur $24y(y+2)$ dans le second reste (3), il vient $x-2$ pour troisième diviseur ; et l'on trouve, pour reste indépendant de x, y^2+2y-3. Les équations

$$y^2+2y-3=0\ \text{ et }\ x-2=0,$$

donnant les deux couples de valeurs $y=-3$ et $x=2$, $y=1$ et $x=2$, on en conclut que les proposées sont vérifiées par les neuf systèmes de valeurs :

$$\begin{array}{l}y=-1,\ -1,\ -1,\ 0,\ 0,\ -2,\ -2,\ -3,\ +1,\\ x\ =\ \ 0,\ +4,\ +2,\ 3,\ 1,\ +3,\ +1,\ +2,\ +2.\end{array}$$

571. On voit par cet exemple, combien il importe, pour la simplicité des calculs, de supprimer les facteurs fonctions de y, lorsqu'il s'en rencontre ; mais on voit aussi qu'il ne faut opérer la suppression, qu'après avoir égalé ces facteurs à zéro ; car au-

trement, on ferait disparaître plusieurs solutions. Nous laissons à traiter, d'après la même méthode, 1° les équations

$$\left.\begin{array}{r} x^3-2x^2+y^2=0 \\ (y-2)x^2+xy=0 \end{array}\right\}\text{ d'où }\left\{\begin{array}{l} y=0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 4, \\ x=0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ -2; \end{array}\right.$$

2° Les deux équations

$$x^3-(3y-3)x^2+(3y^2-6y-1)x-y^3+3y^2+y-3=0,$$
$$x^3+(3y-3)x^2+(3y^2-6y-1)x+y^3-3y^2-y+3=0,$$

qui donnent les neuf systèmes de valeurs :

$$\begin{array}{l} y=1,\ 1,\ \ \ 1,\ 0,\ \ \ 0,\ 2,\ \ \ 2,\ 3,\ -1, \\ x=0,\ 2,\ -2,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 0,\ \ \ 0; \end{array}$$

3° Enfin les équations

$$3x^3-2yx^2-3y^2x+2y^3=0,$$
$$(y^3-y)x-6y^2+6=0,$$

qui admettent les douze solutions :

$$\begin{array}{l} y=1,\ \ \ 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ 3,\ -3,\ \pm\sqrt{6},\ \pm\sqrt{-6}, \\ x=1,\ -1,\ \tfrac{2}{3},\ \ \ 1,\ -\tfrac{2}{3},\ 2,\ -2,\ \pm\sqrt{6},\ \mp\sqrt{-6}. \end{array}$$

Il est bon d'observer que les trois systèmes d'équations, que nous venons d'énoncer, pourraient se résoudre par d'autres méthodes que celle du commun diviseur.

572. L'élimination par le plus grand commun diviseur, donne lieu à plusieurs remarques, qu'il est bon de connaître.

I. *A chaque valeur que l'équation finale donne à* y, *il ne peut répondre d'autres valeurs de* x *que celles fournies par l'avant-dernier reste égalé à zéro.* Car après avoir remplacé y par une de ses valeurs, chaque valeur de x, qui répond à cette valeur, réduit les deux équations proposées à zéro; elle réduit donc aussi à zéro tous les restes et par conséquent l'avant-dernier; elle est donc fournie par cet avant-dernier reste égalé à zéro.

Il n'y a d'exception que quand plusieurs valeurs de x répondent à une valeur de y; alors ces valeurs de x ne peuvent être données par l'avant-dernier reste égalé à zéro, qui est du premier degré en x. Et comme pour chacune de ces valeurs de x ce reste doit être zéro, il devient nul de lui-même par la valeur de y, et donne $x=\frac{0}{0}$. Suivant donc qu'il y a 2, 3, 4, ..., valeurs de x qui répondent à une même valeur de y, cette valeur de y rend nuls d'eux-mêmes les restes où x est au 1er, 2^e, 3^e, ..., degré. Mais cette circonstance n'a lieu que quand, dans la recherche du plus grand commun diviseur, on a négligé de supprimer, dans l'un des restes, le facteur fonction de y, après l'avoir égalé à zéro (569).

Réciproquement, lorsque l'une des vraies valeurs de y rend nul de lui-même l'avant-dernier reste, et donne par conséquent $x=\frac{0}{0}$, le reste précédent, qui est du second degré en x, devient le plus grand commun diviseur des deux équations proposées. Ainsi en égalant ce reste à zéro, ces deux proposées sont satisfaites, puisqu'un de leurs facteurs est nul : donc il en résulte deux valeurs de x, correspondantes à la valeur de y.

Si cette valeur de y faisait encore évanouir le reste du second degré en x, le reste précédent, du troisième degré en x, deviendrait plus grand commun diviseur aux deux équations proposées; elles seraient donc annulées en égalant ce reste à zéro; il y aurait conséquemment trois valeurs de x, qui, avec la valeur de y, satisferaient aux équations proposées : ainsi de suite.

II. Si l'on arrive à un reste R$''$ du premier degré en x, en égalant ce reste à zéro, le reste précédent deviendra diviseur commun aux deux équations proposées, qui seront par conséquent satisfaites par $R'=0$. Substituant dans $R'=0$, la valeur de x, tirée de $R''=0$, on aura l'équation finale en y, car toutes les valeurs de y, qui satisferont à cette équation $R'=0$, satisferont aussi aux équations proposées. De cette manière, on abrége quelquefois le procédé de l'élimination. C'est ainsi qu'on résoudra les deux équations

$$2x^3y+(2y^2-4y-2)x^2+(2y^4-6y^3-2y^2+6y+1)x-2=0,$$
$$x^2y+(y^2-2y-1)x+y^4-3y^3-y^2+3y=0.$$

III. Si l'on trouve un reste ne contenant que des nombres donnés, il n'y aura aucun couple de valeurs de x et de y, capable de satisfaire aux équations proposées; car toutes les valeurs de x et de y, qui réduiraient à zéro les deux équations proposées, réduiraient aussi à zéro tous les restes successifs (566); ce qui est impossible, puisque le dernier sera toujours un nombre donné. Dans ce cas, les deux équations à résoudre sont incompatibles et ne peuvent coexister. Telles sont les deux équations

$$x^3y-(y^3-3y-1)x+y=0 \quad \text{et} \quad x^2-y^2+3=0.$$

IV. Lorsque l'une des vraies valeurs de y réduit l'avant-dernier reste à un nombre connu, et donne par conséquent $x=\infty$, il n'y a qu'une valeur infinie de x, qui, avec cette valeur de y, puisse satisfaire aux équations proposées; car toute autre valeur de x ne pourrait pas réduire à zéro l'avant-dernier reste, qui est un nombre connu. Par exemple, les deux équations

$$x^3y^3+xy^3(y-1)-1=0 \quad \text{et} \quad x^2y^2+y^3-y^2-1=0,$$

ont pour équation finale $y^2(y-1)=0$, et pour avant-dernier reste, $xy-1=0$: donc $y=0$ et $x=\infty$, $y=1$ et $x=1$.

V. Supposons que l'un R''' des restes successifs s'évanouisse de lui-même. Dans ce cas, le reste précédent R'', devient réellement diviseur commun aux deux équations proposées, qui prennent par conséquent la forme

$$N\times R''=0 \quad \text{et} \quad P\times R''=0.$$

Ces deux équations sont donc satisfaites par $R''=0$. Or, si R'' ne renferme que x, y pourra être pris à volonté; si R'' contient x et y, on pourra donner à y telle valeur qu'on voudra : de sorte que dans l'un et l'autre cas, *le problème est indéterminé*, à moins que $R''=0$ ne fournisse que des valeurs impossibles, comme cela arriverait si R'' était x^4+16 ou x^2+y^2+1. Les solutions déterminées sont données par les équations $N=0$ et $P=0$, qui vérifient aussi les proposées.

Par exemple, en traitant les deux équations

$$x^3-3x^2y+3xy^2-5x^2+10xy-y^3-5y^2-6y+6x=0$$
$$x^3-5x^2y+8xy^2-x-4y^3+y=0,$$

le reste de la seconde division pourra se mettre sous la forme

$$(y^4-10y^3+35y^2-50y+24)(x-y). \ldots (1)$$

Supprimant le multiplicateur de $x-y$, et divisant le reste précédent par $x-y$, on aura un quotient exact. Donc $x-y$ est un diviseur commun aux deux équations proposées; et conséquemment x et y ont une infinité de valeurs, dans ces équations.

Les solutions déterminées fournies par $N=0$ et $P=0$, sont précisément celles que donne le multiplicateur de $x-y$ dans (1), quand on l'égale à zéro, ainsi que le reste précédent, débarrassé du facteur $x-y$. Car si l'on divisait les proposées par leur facteur commun $x-y$, et qu'on opérât sur les quotiens

N et P, pour en trouver le plus grand commun diviseur en x, les restes des divisions successives n'auraient pas le facteur $x-y$, qui n'est pas dans N et P ; ces restes s'obtiendraient donc en divisant par $x-y$ ceux de l'élimination de x entre les équations proposées.

Si l'on traitait les deux équations

$$x^3-(3y-1)x^2+(y^2-2y)x+y^2+y=0$$
$$x^3-(y-1)x^2-(y-1)x+1=0,$$

le second reste pourrait se mettre sous la forme

$$(y^4-5y^2+2y-1)(x+1),$$

et le reste précédent serait divisible exactement par $x+1$.

VI. Bezout a remarqué le premier que le degré de l'équation finale ne peut être plus grand que le produit des degrés des deux équations proposées ; et qu'il est justement égal à ce produit, lorsque les équations sont les plus générales de leur degré.

Il nous serait impossible de démontrer ici cette proposition ; mais on peut aisément en reconnaître l'exactitude sur les exemples que nous avons traités, et sur ceux qu'on pourrait se proposer d'ailleurs ; et il en résulte que si le degré de l'équation finale surpasse le produit des degrés des équations proposées, cette équation finale sera compliquée de facteurs étrangers.

573. Pour terminer ce que nous avions à dire sur l'élimination, nous ferons observer que dès qu'on sait éliminer une inconnue entre deux équations, il est facile de comprendre comment on peut éliminer entre m équations à m inconnues. En effet, dans ce cas, il suffit de combiner la plus simple des équations proposées, successivement avec chacune des $m-1$ autres, pour en chasser une même inconnue ; puis de répéter le même procédé sur les nouvelles équations, et ainsi de suite. Mais les calculs se compliquent singulièrement à mesure que le degré et le nombre d'équations deviennent plus considérables. Par ex., pour trois équations complètes du troisième degré, à trois inconnues, l'équation finale devrait s'élever au 81^{me} degré. Il arrive cependant quelquefois que l'on peut abréger les calculs par la manière d'éliminer les inconnues. Voyez, par exemple, l'emploi des *inconnues auxiliaires*, dans les Mélanges d'algèbre, pages 46, 47, 81, 82, 83, etc.

De la recherche des racines réelles incommensurables d'une équation numérique.

574. Après avoir trouvé toutes les racines commensurables, égales et inégales, d'une équation numérique, et après l'avoir débarrassée de ces racines par la division, il reste encore les racines incommensurables *réelles* ou *imaginaires*. Les valeurs incommensurables réelles, ont une partie entière suivie d'une fraction; il faudra donc déterminer d'abord la partie entière, et ensuite la partie fractionnaire, avec un certain degré d'approximation.

Pour avoir la partie entière, le moyen qui s'offre naturellement à l'esprit, est de substituer à la place de x, tous les nombres consécutifs $0, 1, 2, 3, \ldots, -1, -2, -3, \ldots$, compris entre les limites $+L$ et $-L'$; et toutes les fois que deux nombres consécutifs donneront deux résultats de signes contraires, on en conclura que ces deux nombres interceptent au moins une racine réelle (506), et que par conséquent, la partie entière de cette racine est le plus petit de ces deux nombres.

575. Mais cette opération est souvent insuffisante pour mettre en évidence toutes les racines réelles, puisqu'il peut s'en trouver plusieurs entre deux nombres consécutifs (507) : il faut donc mettre entre les nombres à substituer, un intervalle tel qu'il ne puisse tomber qu'une seule racine entre deux substitutions successives. Or, *cet intervalle doit être moindre que la plus petite différence des racines réelles de la proposée.* En effet, soient M et M' deux nombres dont la différence est moindre que la plus petite différence des racines réelles a, b, c, d, etc., de la proposée $X=0$; supposons qu'en faisant $x=M$ et $x=M'$, on ait deux résultats de signes contraires; il y aura donc au moins une racine réelle a comprise entre M et M', et il viendra $M<a$ et $M'>a$. Mais je dis qu'il n'y aura pas une seconde racine b comprise entre M et M'; car si cela était, on aurait aussi $M<b$ et $M'>b$; donc, puisque $M'>a$, il viendrait $M'-b>a-b$, et, à plus forte raison, $M'-M>a-b$, ce qui est contre l'hypothèse. Donc en général, si δ est moindre que la plus petite différence entre les racines réelles, et que, partant de la limite inférieure l, on substitue les nombres l, $l+\delta$, $l+2\delta$, ..., jusqu'à la limite supérieure L, on obtiendra autant de résultats de signes différens qu'il y a de racines réelles. Chaque changement

de signe accusera l'existence d'une seule racine entre les deux nombres substitués ; et il n'y en aura pas d'intermédiaire, si les signes des résultats sont les mêmes.

576. Il reste à déterminer l'intervalle δ. On y parviendra, quoique ne connaissant pas les racines de la proposée, si on peut cependant former une autre équation, dont les valeurs de l'inconnue soient toutes les différences des racines de la proposée, prises 2 à 2 ; car la limite inférieure des racines de la nouvelle équation sera la valeur cherchée de δ. Or, soit a une des racines de l'équation proposée $X=0$, et faisons $x=a+y$; nous aurons (497)

$$X+X_{,}y+\tfrac{1}{2}X_{,,}y^2+\cdots+Ny^m=0.$$

Et puisque a est racine de l'équation $X=0$, le premier terme X disparaît ; divisant le reste par y, il vient

$$X=0 \text{ et } X_{,}+\tfrac{1}{2}X_{,,}y+\cdots+Ny^{m-1}=0 \ldots \text{(d)}.$$

Ces deux équations sont entre les deux inconnues a et y : et comme $y=x-a$; *y est la différence entre la racine* a *et chacune des autres* b, c, d, *etc.*, *représentées par* x. Eliminons a entre les deux équations (d), il viendra l'équation $Y=0$, dont l'inconnue y sera la différence entre deux quelconques des racines de la proposée $X=0$; car l'équation $Y=0$ ne renfermant que l'inconnue y et les coefficiens de la proposée, est précisément la même que l'on obtiendrait si l'on faisait $x=b+y$, $x=c+y$, etc., c'est-à-dire, si y désignait la différence entre la racine b et chacune des autres, entre la racine c et chacune des autres, etc. Donc, réellement, l'équation $Y=0$ a pour racines toutes les différences des m racines a, b, c, d, etc., prises deux à deux ; elle a donc $m(m-1)$ racines (455) ; elle est par conséquent du $m(m-1)^{me}$ degré en y.

De plus, cette même équation $Y=0$ ne doit contenir que des puissances paires de y ; car ses racines $y=a-b$, $y=b-a$, $y=a-c$, $y=c-a$, $y=a-d$, $y=d-a$, etc., sont égales deux à deux et de signes contraires ; de sorte que si l'on a $y=a'$, $y=b'$, $y=c'$, etc., on aura aussi $y=-a'$, $y=-b'$, $y=-c'$, etc., et par suite, $Y=0$ sera de la forme

$$(y^2-a'^2)(y^2-b'^2)(y^2-c'^2)\cdots=0,$$

$$\text{ou } y^{2n}+py^{2n-2}+qy^{2n-4}+\cdots+ty^2+u=0.$$

On peut donc poser $y^2=z$ sans introduire de radicaux ; et l'on aura ainsi une équation $Z=0$, dont l'inconnue z est le carré de toutes les différences des racines de la proposée $X=0$: et c'est ce qui a fait nommer $Z=0$, l'*équation aux carrés des différences*.

577. Voyons maintenant l'usage de l'équation $Z=0$ pour calculer l'intervalle δ. D'abord, comme δ doit être la moindre différence des racines réelles de $X=0$, et que le carré de la différence de deux nombres réels est toujours positif, on voit qu'il suffit de chercher la limite inférieure des racines positives de $Z=0$. Faisant donc $z=\frac{1}{u}$, dans $Z=0$, puis déterminant la limite supérieure l des racines positives de la transformée $U=0$; $\frac{1}{l}$ sera la limite inférieure des racines positives de $Z=0$; c'est-à-dire, qu'on aura toujours $z>\frac{1}{l}$ ou $y>\frac{1}{\sqrt{l}}$. Ainsi, en posant $\delta=\frac{1}{\sqrt{l}}$, on aura l'intervalle à mettre entre deux substitutions successives.

Il peut se faire que l soit <1 ; dans ce cas, $\delta>1$, et en substituant pour x tous les nombres entiers positifs et négatifs compris entre les limites $+L$ et $-L'$, on aura le nombre de toutes les racines réelles, et la partie entière de chacune. Mais en général, $l>1$, et par suite $\delta<1$. Et comme $\sqrt{l}$ est le plus souvent incommensurable, il faudra prendre le nombre entier h immédiatement au-dessus, ce qui donne $\delta=\frac{1}{h}$, et $\frac{1}{h}$ sera l'intervalle cherché entre deux substitutions successives. On fera donc, dans $X=0$, successivement :

$$x=0,\ \frac{1}{h},\ \frac{2}{h},\ \frac{3}{h},\ \ldots,\ -\frac{1}{h},\ -\frac{2}{h},\ -\frac{3}{h},\ \ldots.$$

Enfin, on peut éviter la substitution de nombres fractionnaires dans l'équation $X=0$, en y faisant d'abord $x=\frac{v}{h}$ ou $v=hx$, ce qui donnera une transformée $V=0$, dont les racines seront chacune h fois plus grandes que celles de la proposée. Or, soit $a-b$ la plus petite différence des racines de $X=0$; on aura donc $a-b>\frac{1}{h}$ ou $ah-bh>1$, et par conséquent, toutes les différences des racines de $V=0$ sont plus grandes que l'unité. D'où il suit que si l'on fait successivement $v=0$, $1, 2, 3, \ldots, -1, -2, -3, \ldots$, on sera sûr d'obtenir autant de changemens de signes que $V=0$ a de racines réelles.

578. Récapitulant ce qui vient d'être dit, on verra que, pour mettre en évidence toutes les racines réelles incommensurables d'une équation, et obtenir la partie entière de chacune, il faut, 1° former l'équation aux carrés des différences $Z=0$; 2° déterminer la limite inférieure des racines positives de $Z=0$, et prendre la fraction commensurable $\frac{1}{h}$ immédiatement au-dessous de la racine carrée de cette limite ; 3° faire dans la proposée $x=\frac{v}{h}$, ce qui donne la transformée $V=0$; 4° substituer dans $V=0$, à la place de v, les nombres consécutifs 0, 1, 2, 3, ..., -1, -2, -3, ..., compris entre les limites supérieures des racines positives et négatives de cette dernière équation.

Observons d'ailleurs que $\frac{1}{h}$ se tire de $Y=0$, en y posant $y^2=\frac{1}{v}$, et qu'ainsi l'équation $Z=0$ est inutile à former. De plus, dès qu'on a la partie entière des racines de $V=0$, on a les racines de $X=0$, à une fraction $\frac{1}{h}$ près.

579. Par exemple, considérons l'équation $x^3-12x^2+41x-29=0$. Pour avoir l'équation aux carrés des différences, posons $x=a+y$; nous aurons

$$X+X_1y+\tfrac{1}{2}X_2y^2+y^3=0,$$

équation dans laquelle

$$\begin{aligned}X&=a^3-12a^2+41a-29,\\ X_1&=3a^2-24a+41,\\ \tfrac{1}{2}X_2&=3a-12.\end{aligned}$$

D'après ces valeurs, et en observant que a est une racine de la proposée, il vient

$$a^3-12a^2+41a-29=0,$$
$$\text{et}\quad 3a^2-24a+41+(3a-12)y+y^2=0.$$

Eliminant a entre ces deux équations, on trouvera, pour l'équation aux carrés des différences,

$$y^6-42y^4+441y^2-49=0.$$

Posant $y^2=\frac{1}{u}$, il viendra, pour la transformée, $U=0$,

$$49u^3-441u^2+42u-1=0,\ \text{ou}\ 49u^2(u-9)+42(u-\tfrac{1}{42})=0.$$

On voit que la limite supérieure des racines positives de cette équation, est $u=9$; d'où $y<\frac{1}{3}$. Faisant donc, dans l'équation proposée, $x=\frac{v}{3}$, on aura, pour la transformée $V=0$,

$$v^3-36v^2+369v-783=0.$$

Telle est l'équation qu'il s'agit de résoudre. Elle n'a pas de racines négatives; et la limite supérieure de ses racines positives, est 36. Faisant donc $v=0, 1, 2, 3, \ldots, 35$, on verra que v est entre 2 et 3, entre 16 et 17, et entre 17 et 18. Donc x est entre 1 et $\frac{2}{3}$, entre $\frac{16}{3}$ et $\frac{17}{3}$, et entre $\frac{17}{3}$ et 6; en sorte que x a deux racines comprises entre 5 et 6, qui n'auraient pas été aperçues sans ce calcul.

La méthode que nous venons d'employer est générale, et ne laisserait rien à désirer, si elle n'entraînait pas dans des calculs tellement laborieux, que, passé le quatrième degré, ils sont impraticables. Mais pour ce qui regarde la théorie, elle est claire, complète et sans embarras, et conduira toujours à la partie entière de chacune des racines de la proposée.

580. Occupons-nous maintenant de la détermination de ces racines, avec un certain degré d'approximation. Il existe pour cela les méthodes de Lagrange, de Newton, de Legendre, de Budan, etc.; mais nous ne rapporterons que celles de Lagrange et de Newton, qui suffiront au but que nous nous sommes proposé.

Méthode de Lagrange. Soit $X=0$ une équation dont toutes les racines réelles ont une partie entière différente, que l'on suppose déjà déterminée; soient a et $a+1$ deux nombres entiers consécutifs qui ne comprennent qu'une *seule* racine réelle, dont la partie entière est a : il faut tâcher d'obtenir cette racine par approximation.

Pour cela, faisons $x=a+\frac{1}{y}$, dans l'équation $X=0$, et désignons par $Y=0$ la transformée, qui est de même degré que la proposée, et qui a par conséquent m racines. Une seule de ces m valeurs de y est plus grande que l'unité; car s'il y en avait plusieurs, alors x ou $a+\frac{1}{y}$, aurait plusieurs valeurs comprises entre a et $a+1$; ce qui est contre l'hypothèse. Il suffira donc de substituer au lieu de y, dans la transformée $Y=0$, la série des nombres naturels $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$, et tôt ou tard on aura les nombres b et $b+1$ qui donneront deux résultats de signes contraires ; et par conséquent ces deux nombres intercepteront la valeur cherchée de y.

On peut donc faire $y=b+\frac{1}{y'}$, dans $Y=0$, ce qui donnera la transformée $Y'=0$. Cette équation n'aura encore qu'une seule racine positive plus grande que l'unité ; et l'on mettra cette racine en évidence par la substitution des nombres naturels 1, 2, 3, 4, ..., dans $Y'=0$. Soient c et $c+1$ les deux nombres qui interceptent la valeur cherchée de y', et soit fait $y'=c+\frac{1}{y''}$, dans $Y'=0$, on aura une nouvelle équation $Y''=0$, sur laquelle il faudra opérer comme sur les précédentes ; et ainsi de suite. Par cette manière d'opérer, on obtiendra cette suite de valeurs :

$$x=a+\frac{1}{y},\ y=b+\frac{1}{y'},\ y'=c+\frac{1}{y''},\ y''=d+\frac{1}{y'''},\ \text{etc.};$$

d'où l'on déduira cette fraction continue $x=a,\ b,\ c,\ d$, etc. (Voyez ci-après la théorie des fractions continues.)

Or, on sait que dans une fraction continue, plus on prend de fractions intégrantes, plus on approche de la valeur du nombre réduit en fraction continue ; et l'erreur commise est moindre que l'unité divisée par le carré du dénominateur de la dernière réduite employée (598 et 599) ; donc la méthode précédente donnera la valeur cherchée de x, *avec tel degré d'approximation que l'on voudra.*

581. Appliquons cette méthode à l'équation

$$x^3-6x-7=0.$$

Il faut d'abord déterminer la partie entière. Or, la limite supérieure des racines positives de cette équation, est évidemment 3. Changeant x en $-y$, il vient $y^3-6y+7=0$, équation dont les racines positives ont encore 3 pour limite supérieure ; ainsi -3 est le limite supérieure des racines négatives de la proposée. Il faut donc d'abord substituer les nombres 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3 :

$x=0$ donne	-7,	$x=0$ donne	-7,
$x=1$	-12,	$x=-1$	-2,
$x=2$	-11,	$x=-2$	-3,
$x=3$	$+2$,	$x=-3$	-16;

on voit, par ces substitutions, que 2 et 3 sont les seuls nombres qui donnent des signes contraires. Formons l'équation aux carrés des différences ; nous aurons (576)

$$y^6 - 36y^4 + 324y + 459 = 0.$$

Posons $y^2 = \frac{1}{u}$; il en résulte

$$u^3 + \frac{324}{459}u^2 - \frac{36}{459}u + \frac{1}{459} = 0,$$

$$\text{ou}\quad u^3 + \frac{36u}{459}(9u - 1) + \frac{1}{459} = 0;$$

or, il est visible que $u = \frac{1}{9}$ rend le premier membre essentiellement positif; ainsi la limite supérieure l des racines positives de cette équation est < 1 ; d'où l'on peut conclure que $\frac{1}{\sqrt{l}} > 1$. Donc les différences entre les racines réelles de la proposée sont plus grandes que l'unité ; d'ailleurs, la substitution des nombres naturels n'a produit qu'un changement de signe. Donc l'équation proposée n'a qu'une seule racine réelle, comprise entre les deux nombres 2 et 3.

582. Cherchons la valeur approchée de cette racine. Reprenons l'équation $x^3 - 6x - 7 = 0$, et faisons $x = 2 + \frac{1}{y}$; il en résulte

$$Xy^3 + X_1y^2 + \tfrac{1}{2}X_2y + 1 = 0,$$

et les coefficiens X, X_1 et $\frac{1}{2}X_2$ ont pour valeurs (497)

$$\begin{aligned} X &= (2)^3 - 6(2) - 7 = -11, \\ X_1 &= 3(2)^2 - 6 \cdots\cdots = 6, \\ \tfrac{1}{2}X_2 &= 3(2) \cdots\cdots\cdots\cdots = 6. \end{aligned}$$

Ainsi, la transformée est, en changeant les signes,

$$11y^3 - 6y^2 - 6y - 1 = 0.$$

Pour mettre en évidence la seule racine positive plus grande que l'unité, de cette équation, soit fait $y = 1, 2, 3, \ldots$: $y = 1$ donne -2 et $y = 2$ donne $+51$; ainsi la valeur cherchée est comprise entre 1 et 2. Posons donc $y = 1 + \frac{1}{y'}$; on obtient un résultat de la forme

$$\begin{aligned} Xy'^3 + X_1y'^2 + \tfrac{1}{2}X_2y' + 11 &= 0, \\ X = 11(1)^3 - 6(1)^2 - 6(1) - 1 &= -2, \\ X_1 = 33(1)^2 - 12(1) - 6 \cdots\cdots &= 15, \\ \tfrac{1}{2}X_2 = 33(1) - 6 \cdots\cdots\cdots\cdots &= 27, \end{aligned}$$

ce qui donne, pour la transformée, en changeant les signes,

$$2y'^3 - 15y'^2 - 27y' - 11 = 0;$$

comme cette équation revient à $y'^2(2y'-15)-27y'-11=0$, on doit supposer y' au moins égal à 8, pour obtenir des résultats positifs. Soit donc $y'=8, 9, 10, \ldots$: $y'=8$ donne -163, $y'=9$ fournit -11 et $y'=10$ donne $+219$; ainsi la valeur de y' est comprise entre 9 et 10.

Posons $y'=9+\frac{1}{y''}$; il vient, pour nouvelle transformée,

$$\begin{aligned}
&Xy''^3 + X_1 y''^2 + \tfrac{1}{2}X_2 y'' + 2 = 0,\\
&X = 2(9)^3 - 15(9)^2 - 27(9) - 11 = -11,\\
&X_1 = 6(9)^2 - 30(9) - 27 \cdots\cdots\cdots = 189,\\
&\tfrac{1}{2}X_2 = 6(9) - 15 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = 39;
\end{aligned}$$

d'où
$$11y''^3 - 189y''^2 - 39y'' - 2 = 0,$$
ou
$$y''^2(11y''-189) - 39y'' - 2 = 0;$$

$y''=17$ donne -1243 et $y''=18$ fournit $+2212$; ainsi la valeur de y'' est comprise entre 17 et 18.

Rapprochons actuellement les équations

$$x = 2+\frac{1}{y},\ y = 1+\frac{1}{y'},\ y' = 9+\frac{1}{y''},\ y'' = 17+\frac{1}{y'''};$$

on obtient la fraction continue

$$x = 2,\ 1,\ 9,\ 17, \text{ etc.}$$

Les quatre premières réduites sont $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{29}{10}$, $\frac{496}{171}$; la troisième réduite $\frac{29}{10}$, ou 2,9, donne un degré d'approximation marqué par $\frac{1}{10\times 171}$, ou $\frac{1}{1710}$; c'est-à-dire que 2,9 représente la vraie valeur de x à 0,001 près; la quatrième réduite $\frac{496}{171}$, ou 2,9005, exprime la valeur de x, à $\frac{1}{(171)^2}$, ou à 0,0001 près; et en effet, si dans la proposée $x^3-6x-7=0$, on fait successivement $x=2{,}9005$ et $x=2{,}9006$, on obtient deux résultats de signes contraires.

583. La méthode d'approximation que nous venons d'employer, suppose que l'équation proposée n'ait pas plusieurs racines comprises entre deux nombres entiers consécutifs n et $n+1$. Mais si cela était, il faudrait commencer par transformer l'équation dont il s'agit en une autre dont les différences des

racines fussent toutes plus grandes que l'unité; ce qu'on peut faire en posant $x=\frac{y}{h}$, puis en donnant à h les valeurs 2, ou 3, ou 4, ou 5, etc. C'est même là un moyen d'éviter la formation de l'équation *aux carrés des différences*, si souvent impraticable par la longueur des calculs qu'elle exige.

584. Considérons, par exemple, l'équation

$$8x^3-6x-1=0.$$

Les limites supérieures des racines positives et négatives étant $+1$ et -1, on voit que si cette équation a plusieurs racines réelles, leurs différences seront moindres que l'unité. Ainsi, pour mettre ces racines en évidence, il faudrait recourir à l'équation *aux carrés des différences*, qui est

$$64y^6-288y^4+324y^2-81=0.$$

Mais on peut éviter la formation de cette équation, en posant dans la proposée, $x=\frac{y}{2}$; car alors la transformée étant

$$y^3-3y-1=0,$$

on trouve que cette transformée a ses trois racines réelles, l'une entre 1 et 2, l'autre entre 0 et -1, et la troisième entre -1 et -2.

Appliquant donc la méthode de Lagrange, on trouvera, à moins de 0,0001 près,

$$y=1,8794,\ y=-0,3474 \text{ et } y=-1,5320;$$

d'où $x=0,9397$, $x=-0,1737$ et $x=-0,7660$.

585. *Méthode de Newton.* Soient p et $p+1$ deux nombres qui interceptent une *seule* racine positive de l'équation $X=0$. Si l'on fait $x=q$, q étant entre p et $p+1$, on jugera par le signe du résultat, si la racine est comprise entre p et q, ou entre q et $p+1$. Supposons que le premier de ces cas ait lieu. Faisant de nouveau $x=q'$, q' étant entre p et q, on saura si la racine est entre p et q', ou entre q' et q; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à une valeur a qui ne diffère pas de 0,1 de celle de x. En désignant par y l'erreur, on a $x=a+y$. Introduisons ce binome dans la proposée $X=0$, ou $Nx^m+Px^{m-1}+\dots+Tx+U=0$; nous aurons

$$X+X_1y+\tfrac{1}{2}X_2y^2+\dots+Ny^m=0.$$

Mais y est par supposition une petite quantité; la méthode de Newton consiste à regarder les termes affectés de y^2, y^3, ..., comme assez petits pour pouvoir être négligés ; ce qui réduit la transformée à $X + X_1 y = 0$; d'où $y = -\frac{X}{X_1}$, ou

$$y = -\frac{Na^m + Pa^{m-1} + \dots + Ta + U}{mNa^{m-1} + (m-1)Pa^{m-2} + \dots + T} \dots (1).$$

Appelons a' cette fraction, ou seulement sa valeur approchée ; nous aurons $x = a + a'$ pour seconde approximation. Faisant $a + a' = b$, et $x = b + y'$, y' sera donné par la fraction (1), après y avoir remplacé a par b ; et ainsi de suite.

586. Soit l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$; si l'on y substitue pour x la série des nombres entiers 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3, on trouve que $x = 2$ et $x = 3$ donnent -1 et $+16$; donc il y a une racine réelle positive entre 2 et 3, plus proche de 2 que de 3. Comme $x = 2,1$ donne 0,061, on reconnaît que 2,1 est plus grand que x, et plus voisin de la racine que 2. Ainsi, 2,1 est la valeur de cette racine, à moins de 0,1 près. Faisant $a = 2,1$, dans la fraction (1), il vient

$$y = -\frac{a^3 - 2a - 5}{3a^2 - 2} = -\frac{0,061}{11,23} = -0,0054.$$

Ainsi, en se bornant aux dix-millièmes, on a $x = 2,0946$. Faisons de nouveau $a = 2,0946$; nous aurons

$$y = -\frac{0,000541550536}{11,16204748} = -0,00004851.$$

Ainsi la quatrième décimale était défectueuse, et on trouve $x = 2,09455149$. On pourrait de même pousser le calcul plus loin, corriger les dernières décimales, ou s'assurer de leur exactitude.

587. Cet exemple suffit pour donner une idée de la méthode de Newton et de l'approximation rapide qu'elle fournit. Cependant cette méthode est quelquefois en défaut, ainsi que Lagrange le prouve dans son *traité de la résolution des équations numériques*, et auquel nous renvoyons. Mais comme les cas d'exception sont rares et se manifestent en fournissant des valeurs successives, d'abord croissantes, puis décroissantes, ou réciproquement, on l'emploie ordinairement à cause de sa grande facilité.

On a d'ailleurs un moyen de s'assurer, à la fin de chaque opération, si la méthode a donné le degré d'approximation que l'on désirait; car si après avoir remplacé l'inconnue x par la valeur trouvée, on substitue ensuite cette valeur augmentée ou diminuée d'une unité de la dernière décimale, et que la seconde substitution donne un signe contraire à celui fourni par la première, il est clair que la valeur cherchée sera comprise entre les deux nombres substitués. S'il n'y avait pas de changement de signes, il faudrait augmenter ou diminuer le dernier chiffre décimal, jusqu'à ce qu'on parvînt à deux résultats de signes différens.

588. La méthode d'approximation de Lagrange, quoiqu'en général moins expéditive que celle de Newton, a sur celle-ci l'avantage de donner à chaque opération une approximation toujours certaine : elle peut servir à trouver exactement les racines commensurables, même lorsque quelques-uns des coefficiens sont irrationnels; tandis qu'il n'en est pas de même de la méthode de Newton.

En appliquant l'une ou l'autre méthode à l'équation

$$x^3 - 5x - 3 = 0,$$

on trouvera $x = 2,4908$, $x = -0,6566$ et $x = -1,8342$. De même, en résolvant l'équation

$$3x^6 + 16x^5 - 24x^4 - 238x^3 - 259x^2 + 174x + 72 = 0,$$

on aura $x = -3$, $x = -3$. $x = \frac{2}{3}$, $x = 3,7505$, $x = -0,3099$ et $x = -3,4405$.

589. Nous terminerons ce que nous avions à dire sur la résolution des équations numériques, en observant qu'on peut toujours réduire à de telles équations, les *équations homogènes* qui ne renferment que deux lettres a et x. Par exemple, soit l'équation homogène

$$x^4 + ax^3 - 7a^2x^2 - a^3x + 6a^4 = 0;$$

si l'on fait, dans cette équation, $x = ay$, elle deviendra

$$y^4 + y^3 - 7y^2 - y + 6 = 0.$$

Cette équation numérique donne $y = 1, -1, 2$ et -3; donc il en résulte $x = a, -a, 2a$ et $-3a$.

De même, en faisant $x = ay$, l'équation $x^m - a^m = 0$ devient $y^m - 1 = 0$.

Des fractions continues.

590. On appelle *fraction continue*, une expression composée d'un entier (qui peut être o), plus une fraction qui a pour numérateur l'unité et pour dénominateur un nombre entier, plus une fraction qui a elle-même pour numérateur l'unité et pour dénominateur un entier, plus une fraction formée de la même manière, et ainsi de suite. Telle est l'expression

$$x = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{9 + \text{etc.}}}}}$$

Nous appellerons *termes* de la fraction continue, les nombres entiers 2, 3, 4, 7, 9, etc. : les fractions $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$, etc., sont nommées *fractions intégrantes*.

591. *Pour réduire une fraction ordinaire en fraction continue, il faut diviser le numérateur par le dénominateur, celui-ci par le premier reste, le premier reste par le second, le second par le troisième, et ainsi de suite : les quotiens successifs seront les termes de la fraction continue demandée.*

En effet, soit $x = \frac{a}{b}$ la fraction proposée ; soient u, u', u'', u''', etc., les quotiens successifs, et r, r', r'', r''', etc. les restes correspondans ; on aura évidemment

$$x = \frac{a}{b} = u + \frac{r}{b} = u + \frac{1}{b:r},$$

$$b : r = u' + \frac{r'}{r} = u' + \frac{1}{r:r'},$$

$$r : r' = u'' + \frac{r''}{r'} = u'' + \frac{1}{r':r''},$$

$$r' : r'' = u''' + \frac{r'''}{r''} = u''' + \frac{1}{r'':r'''},$$

etc. ....

Substituant chaque valeur dans celle qui la précède immédiatement, il en résulte

$$x = u + \cfrac{1}{u' + \cfrac{1}{u'' + \cfrac{1}{u''' + \text{etc.}}}}$$

592. Désormais nous écrirons cette fraction continue sous la forme abrégée et plus commode

$$x = u,\ u',\ u'',\ u''',\ \ldots,\ z,\ z',\ z'',\ \text{etc.}$$

z, z', z'', etc. seront des termes successifs de *rangs* quelconques. Si donc on réduit $x = \frac{65}{149}$ en fraction continue, on trouvera

$$x = 0,\ 2,\ 3,\ 2,\ 2,\ 1,\ 2.$$

593. Voyons maintenant comment on convertit une fraction continue en fraction ordinaire. D'abord, si l'on arrête la fraction continue successivement aux termes

$$u,\ u',\ u'',\ u''',\ \ldots,\ z,\ z',\ z'',\ \text{etc.},$$

on aura successivement pour x des fractions que nous désignerons par

$$\frac{a}{a'},\ \frac{b}{b'},\ \frac{c}{c'},\ \frac{d}{d'},\ \ldots,\ \frac{m}{m'},\ \frac{n}{n'},\ \frac{p}{p'},\ \text{etc.}$$

ces fractions sont appelées *réduites* ou *convergentes*.

Il est facile de s'assurer qu'on a

$$\frac{a}{a'} = \frac{u}{1},\ \frac{b}{b'} = \frac{uu'+1}{u'} \text{ et } \frac{c}{c'} = \frac{uu'u''+u''+u}{u'u''+1}.$$

On voit que, pour avoir le numérateur de $\frac{c}{c'}$, il suffit de multiplier $uu'+1$ par u'' et d'ajouter u au produit; que pour avoir le dénominateur, on multiplie u' par u'' et on ajoute 1 au produit. Donc on est conduit à cette *loi* de formation :

Le numérateur d'une réduite quelconque se trouve en multipliant le terme auquel on arrête la fraction continue, par le numérateur de la réduite précédente et en ajoutant au produit le numérateur de la réduite qui précède de deux rangs celle que l'on veut former. Le dénominateur s'obtient d'après la même loi, au moyen des deux dénominateurs précédens. Cette loi s'étend d'ailleurs à toute la série des convergentes.

En effet, supposons que cette loi soit vérifiée pour trois réduites consécutives quelconques $\frac{m}{m'}$, $\frac{n}{n'}$, $\frac{p}{p'}$; de manière que z'' étant l'entier auquel on a terminé la fraction continue pour avoir $\frac{p}{p'}$, on ait $$p = nz'' + m \text{ et } p' = n'z'' + m'.$$

Prenons un nouveau terme z''' et soit $\frac{q}{q'}$ la réduite qui en proviendra; on aura donc

$$\frac{p}{p'} = u, u', u'', \ldots, z, z', z'', \text{ et } \frac{q}{q'} = u, u', u'', \ldots, z, z', z'', z'''.$$

On voit que l'on passera de la valeur de $\frac{p}{p'}$ à celle de $\frac{q}{q'}$, en remplaçant z'' par $z'' + \frac{1}{z'''}$; il viendra par conséquent

$$\frac{q}{q'} = \frac{n\left(z'' + \frac{1}{z'''}\right) + m}{n'\left(z'' + \frac{1}{z'''}\right) + m'} = \frac{(nz'' + m)\,z''' + n}{(n'z'' + m')\,z''' + n'} = \frac{pz''' + n}{p'z''' + n'}.$$

Ainsi $\frac{q}{q'}$ se déduit des deux réduites précédentes $\frac{n}{n'}$ et $\frac{p}{p'}$, d'après la loi énoncée plus haut. Donc, si cette loi est démontrée pour trois réduites consécutives quelconques, elle aura lieu également pour la réduite suivante. Or, cette même loi est vérifiée pour les trois premières réduites; donc elle a lieu pour la quatrième, puis pour la cinquième, la sixième, et en général, pour toutes les réduites.

Au moyen de cette loi, si l'on a la fraction continue $x = 2, 1, 3, 2, 4$, on trouve cette suite de réduites : $\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{11}{4}, \frac{25}{9}, \frac{111}{40}$. La dernière est précisément la valeur de x.

594. D'après la loi que l'on vient d'établir, on aura toujours $p = nz'' + m$ et $p' = n'z'' + m'$. Donc *les deux termes de chaque réduite sont respectivement plus grands que ceux de la réduite précédente.*

595. En substituant les valeurs précédentes de p et de p' dans $pn' - np'$, on aura

$$\frac{p}{p'} - \frac{n}{n'} = \frac{pn' - np'}{p'n'} = \frac{mn' - nm'}{p'n'};$$

d'ailleurs $$\frac{n}{n'} - \frac{m}{m'} = \frac{nm' - mn'}{m'n'}.$$

Donc on voit que, *si l'on retranche chaque réduite de celle qui la suit immédiatement, les numérateurs de deux différences consécutives seront égaux et de signes contraires.*

Mais $\frac{uu'+1}{u'} - \frac{u}{1} = \frac{1}{u'}$; ainsi le numérateur de la première différence est 1; donc, d'après ce qu'on vient de voir, le numérateur de la seconde différence est -1; celui de la troisième est 1; celui de la quatrième -1; et en général, *le numérateur d'une différence quelconque est* 1 *ou* -1, *suivant que la seconde des réduites que l'on considère est de rang pair ou de rang impair.*

596. Il suit de là qu'*une réduite quelconque* $\frac{p}{p'}$ *est toujours irréductible.* Car si p et p' avaient un diviseur commun h; comme d'ailleurs, d'après le principe précédent, on a $pn'-np' = 1$, il viendrait, en divisant de part et d'autre par h,

$$\frac{p}{h}n' - n\frac{p'}{h} = \frac{1}{h};$$

et un nombre entier serait égal à une fraction; ce qui est absurde. Ainsi, *la dernière réduite est toujours la plus simple expression de la fraction ordinaire qui a fourni la fraction continue.*

597. Les réduites sont alternativement plus petites et plus grandes que le nombre x réduit en fraction continue. En effet, l'expression de x, dans le n° 591, montre d'abord que $\frac{u}{1} < x$. Mais si l'on arrête la fraction continue au terme u', ce terme sera trop petit; donc $\frac{1}{u'}$ sera trop grand, ainsi que $u + \frac{1}{u'} = \frac{uu'+1}{u'}$. Donc la seconde réduite est plus grande que x. On verra de même que la troisième réduite est $< x$, la quatrième $> x$, et ainsi de suite. En général, à cause de

$$\frac{p}{p'} = \frac{nz''+m}{n'z''+m'} = u,\ u',\ u'',\ \ldots,\ z,\ z',\ z'',$$

si l'on remplace z'' par la valeur y de la fraction continue, prise depuis z'' jusqu'à la fin, d'où $y = z''$, z''', etc., il est clair qu'au lieu d'avoir une réduite, on aura la valeur totale x de la fraction continue, et qu'il viendra

$$x = \frac{ny+m}{n'y+m'}.$$

Or, $\frac{m}{m'}$ et $\frac{n}{n'}$ sont deux réduites consécutives : supposons que la première soit de rang impair et la seconde de rang pair; on aura donc $nm' - mn' = 1$ (595) ou $nm'y - mn'y = y$. Avec ces valeurs on trouve

$$\left.\begin{aligned} x - \frac{m}{m'} &= \frac{ny+m}{n'y+m'} - \frac{m}{m'} = \frac{y}{m'(n'y+m')} \\ \frac{n}{n'} - x &= \frac{n}{n'} - \frac{ny+m}{n'y+m'} = \frac{1}{n'(n'y+m')} \end{aligned}\right\} \cdots (1).$$

Ainsi l'on voit que $x > \frac{m}{m'}$ et $< \frac{n}{n'}$. Si $\frac{m}{m'}$ était de rang pair et $\frac{n}{n'}$ de rang impair, on aurait d'abord $mn' - nm' = 1$, et ensuite $x < \frac{m}{m'}$ et $x > \frac{n}{n'}$. Donc, en général, *la valeur totale de la fraction continue est toujours comprise entre deux réduites consécutives quelconques : elle est plus grande que chaque réduite de rang impair et plus petite que chaque réduite de rang pair.*

598. Il est clair que $y > 1$; et comme d'ailleurs $n' > m'$ (594), on voit par les différences (1), qu'on a, $x - \frac{m}{m'} > \frac{n}{n'} - x$; donc $\frac{n}{n'}$ est plus approché de x que $\frac{m}{m'}$. Donc les *réduites successives approchent de plus en plus de la valeur du nombre réduit en fraction continue :* et c'est de là qu'elles tirent leur nom de *convergentes.*

599. Puisque $y > 1$, il s'ensuit que $n'(n'y + m') > n'(n' + m')$; et par suite, la seconde différence (1) donne

$\frac{n}{n'} - x < \frac{1}{n'(n'+m')}$; d'où $\frac{n}{n'} - x < \frac{1}{n'n'}$ et $x = \frac{n}{n'} - < \frac{1}{n'n'}$.

Ainsi *l'erreur commise en prenant une réduite pour la valeur totale de la fraction continue, est toujours moindre que l'unité divisée par le carré du dénominateur de cette réduite.*

600. Soient $\frac{m}{m'}$, $\frac{n}{n'}$ deux réduites consécutives, et soit $\frac{t}{t'}$ une fraction comprise entre elles ; je dis que $\frac{t}{t'}$ est plus compliquée que ces deux réduites. En effet, puisque $\frac{t}{t'}$ est comprise entre les deux réduites proposées, $\frac{t}{t'}$ diffère moins de l'une de ces deux réduites que celles-ci ne diffèrent entre elles ; on a donc (595)

$$\frac{tm' - mt'}{m't'} < \frac{1}{m'n'} \quad \text{et} \quad \frac{nt' - tn'}{n't'} < \frac{1}{m'n'}.$$

On ne saurait avoir $tm' = mt'$, puisqu'alors en divisant de part et d'autre par $m't'$, il viendrait $\frac{t}{t'} = \frac{m}{m'}$, ce qui est contre l'hypothèse. Donc les numérateurs $tm' - mt'$ et $nt' - tn'$ ne sont pas nuls ; et comme ils sont nécessairement entiers, ils valent 1, au moins ; ce qui exige qu'on ait $m't' > m'n'$ et $n't' > m'n'$, ou $t' > n'$ et $t' > m'$.

A cause de $\frac{t}{t'} > \frac{m}{m'}$ et de $\frac{t}{t'} < \frac{n}{n'}$, il vient $\frac{t'}{t} < \frac{m'}{m}$ et $\frac{t'}{t} > \frac{n'}{n}$; donc la fraction $\frac{t'}{t}$ est comprise entre les deux $\frac{m'}{m}$ et $\frac{n'}{n}$. Par conséquent, on a aussi $t > n$ et $t > m$. Donc la fraction $\frac{t}{t'}$ est plus compliquée que les deux réduites $\frac{m}{m'}$ et $\frac{n}{n'}$. Donc toute fraction plus simple que ces deux réduites, ne saurait tomber entre elles. Donc enfin, *chaque réduite approche plus de la valeur totale* x *de la fraction continue, que toute autre fraction conçue en termes plus simples.*

601. Les fractions continues doivent leur naissance à l'évaluation approchée des fractions dont les termes sont trop considérables et premiers entre eux. Pour en montrer l'usage, considérons la fraction $x = \frac{314159}{100000}$. Si l'on réduit cette expression en fraction continue, on trouvera (591)

$$x = 3,\ 7,\ 15,\ 1,\ 25,\ 1,\ 7,\ 4.$$

Ainsi les réduites consécutives seront (593) :

$$\frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{9208}{2931},\ \frac{9563}{3044},\ \frac{76149}{24239},\ \frac{314159}{100000}.$$

En prenant d'abord $\frac{22}{7}$ pour la valeur du nombre proposé, on commettrait une erreur moindre que $1 : 7(7+1)$ ou que $\frac{1}{56}$ (599) ; mais cette réduite donne encore une approximation plus considérable ; car x étant compris entre $\frac{22}{7}$ et $\frac{333}{106}$, il s'ensuit que $\frac{22}{7}$ diffèrent de x d'une quantité $< \frac{22}{7} - \frac{333}{106}$ ou $\frac{1}{742}$; ainsi l'erreur commise est beaucoup moindre que $\frac{1}{100}$.

La quatrième réduite $\frac{355}{113}$, qui n'est guère plus compliquée que la troisième, donne une valeur bien plus approchée ; car x étant compris entre $\frac{355}{113}$ et $\frac{9208}{2931}$, il s'ensuit que $x = \frac{355}{113}$, à moins de $\frac{1}{113 \times 2931}$ près, c'est-à-dire, à moins de 0,00001 près. Les réduites suivantes sont trop compliquées pour être substituées avec avantage à la fraction proposée. Cette fraction est d'ailleurs le rapport approché de la circonférence à son diamètre, comme on le voit en géométrie.

602. On peut réduire un nombre donné en fraction continue, par un procédé qu'il est bon de connaître. Soit a le nombre donné et a' sa partie entière ; le reste $a-a'$ étant <1, le quotient b de 1 par $a-a'$ sera >1. Soit b' la partie entière de b ; le reste $b-b'$ sera donc <1, et le quotient c de 1 par $b-b'$ sera >1. Soit c' la partie entière de c ; le reste $c-c'$ étant <1, le quotient d de 1 par $c-c'$ sera >1 ; et ainsi de suite. On a par conséquent

$$b=\frac{1}{a-a'},\quad c=\frac{1}{b-b'},\quad d=\frac{1}{c-c'},\quad e=\frac{1}{d-d'},\ \text{etc.}$$

Ces équations donnent

$$a=a'+\frac{1}{b},\quad b=b'+\frac{1}{c},\quad c=c'+\frac{1}{d},\quad d=d'+\frac{1}{e},\ \text{etc.}$$

Ainsi on a cette fraction continue :

$$a=a',\ b',\ c',\ d',\ e',\ \text{etc.}$$

603. Cette méthode s'applique aussi aux racines carrées irrationnelles. Mais alors, pour évaluer la partie entière de chaque quotient, il faut multiplier les deux termes de ce quotient par ce que devient son diviseur en y changeant le signe du terme *soustractif*. Par exemple, cherchons à réduire $\sqrt{3}$ en fraction continue : on aura donc $a=\sqrt{3}$. La partie entière de a est évidemment $a'=1$; d'où $a-a'=\sqrt{3}-1$, puis $a=1+\frac{1}{b}$ et $b=\frac{1}{\sqrt{3}-1}$.

Multipliant les deux termes de ce quotient par $\sqrt{3}+1$, il ne changera pas de valeur ; et comme $(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)=(\sqrt{3})^2-1=3-1=2$, il viendra

$$b=\tfrac{1}{2}(\sqrt{3}+1).$$

On voit que la partie entière de b est $b'=1$; d'où $b-b'=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)-1=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$, puis $b=1+\frac{1}{c}$ et $c=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{2}=\sqrt{3}+1$.

Il est clair que la partie entière de c est $c'=2$; ce qui donne $c-c'=\sqrt{3}-1$, puis $c=2+\frac{1}{d}$ et $d=\frac{1}{\sqrt{3}-1}$.

Cette valeur de d est absolument la même que celle de b ; donc, puisqu'on a trouvé $b=1+\frac{1}{c}$ et $c=2+\frac{1}{d}$, on obtiendra de même $d = 1 + \frac{1}{e}$, $e = 2 + \frac{1}{f}$, et ainsi de suite, à l'infini. On a par conséquent cette fraction continue *périodique :*

$$\sqrt{3} = 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ \text{etc. à l'infini.}$$

On trouverait de même $\sqrt{2} = 1,\ 2,\ 2,\ 2$, etc. à l'infini, et $\sqrt{5} = 2,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4$, etc. à l'infini.

604. Cherchons maintenant les nombres générateurs des fractions continues périodiques. Comme les *périodes* de ces fractions peuvent être composées d'une, de deux, de trois, de quatre, ..., fractions intégrantes, soit d'abord $x = a,\ b,\ b,\ b,\ b,\ b$, etc.; nous aurons

$$x - a = \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \text{etc.}}}}$$

Puisque le nombre de fractions intégrantes est infini, il est clair que tout ce qui suit le dénominateur b de la première, forme une fraction continue parfaitement égale à celle dont la valeur est $x - a$; on a par conséquent

$$x - a = \frac{1}{b + x - a};\ \text{d'où}\ (x-a)^2 + b(x-a) = 1.$$

Résolvant cette équation du second degré, on en déduira la formule

$$a,\ b,\ b,\ b,\ b,\ b,\ \text{etc.} = a - \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4}.$$

Soit maintenant $x = a,\ b,\ c,\ b,\ c,\ b,\ c,\ b,\ c$, etc. Si l'on raisonne comme dans le cas précédent, on verra que

$$a,\ b,\ c,\ b,\ c,\ b,\ c,\ b,\ c,\ \text{etc.} = a - \tfrac{1}{2}c + \sqrt{\tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{c}{b}}.$$

Enfin, si l'on pose

$$x = a,\ b,\ c,\ d,\ b,\ c,\ d,\ b,\ c,\ d,\ b,\ c,\ d,\ \text{etc.},$$
$$y = a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ b,\ c,\ d,\ e,\ b,\ c,\ d,\ e,\ \text{etc.},$$

on verra que les valeurs x et y de ces fractions continues périodiques sont données par les équations

$$(bc+1)(x-a)^2 + (bcd + b + d - c)(x-a) = cd + 1 \quad \text{et}$$
$$(bcd + b + 1)(y-a)^2 + (bcde + bc + be + de - cd)(y-a) = cde + c + e.$$

Au moyen des formules précédentes, il est aisé de s'assurer qu'on a

$$3, 6, 6, 6, 6, 6, \text{ etc.} = \sqrt{10};$$
$$2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, \text{ etc.} = \sqrt{6};$$
$$3, 3, 6, 3, 6, 3, 6, 3, 6, \text{ etc.} = \sqrt{11};$$
$$1, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, \text{ etc.} = \sqrt{\tfrac{5}{3}},$$
$$\text{et } 2, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \text{ etc.} = \sqrt{7}.$$

On peut vérifier ces résultats en opérant comme au n° 603.

605. Les propriétés des fractions continues fournissent une méthode pour calculer les solutions entières de l'équation

$$ax + by = c, \ldots (1)$$

a, b, c, étant des nombres entiers, positifs ou négatifs, et a et b premiers entre eux (183). En effet, convertissons la fraction $\frac{b}{a}$ en fraction continue, et soit $\frac{q}{p}$ la réduite qui précède la dernière $\frac{b}{a}$; nous aurons (595)

$$aq - bp = \pm 1; \text{ d'où } acq - bcp = \pm c.$$

1° Si $aq - bp = +1$, on aura $acq - bcp = c$; donc l'une des solutions entières de l'équation (1) sera $x = cq$ et $y = -cp$. Ainsi les autres solutions se déduiront des formules (186)

$$x = cq - bu \text{ et } y = au - cp.$$

2° Si $aq - bp = -1$, il viendra $-acq + bcp = c$; donc l'une des solutions entières de l'équation (1) sera $x = -cq$ et $y = cp$. Les autres solutions sont déterminées par les formules

$$x = bu - cq \text{ et } y = cp - au.$$

Par exemple, si l'on a l'équation $31x + 7y = 45$, on convertira $\frac{7}{31}$ en fraction continue; ce qui donnera 0, 4, 2, 3. Les réduites seront donc $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{9}$ et $\frac{7}{31}$. Ainsi on aura $a = 31$, $b = 7$, $c = 45$; $p = 9$ et $q = 2$; d'où $aq - bp = -1$ et

$$x = 7u - 90, \quad y = 405 - 31u.$$

On résoudrait de même l'équation $29x + 17y = 250$.

Problèmes divers.

On propose de démontrer, 1° que si l'on ajoute 5 au carré de tout nombre non multiple de 3, la somme sera divisible par

3 ; 2° que si l'on ajoute 5 au carré de tout nombre premier plus grand que 3, la somme sera divisible par 6.

Quels sont les deux nombres entiers x et y dont le produit est divisible exactement par la somme ? (R. Il y a une infinité de ces nombres, qu'on trouvera en désignant d'abord par d le p. g. c. d. de x et y, etc.)

A dimensions égales, le drap de Sedan ne vaut que les $\frac{6}{7}$ du drap de Verviers. Si les prix de ces draps venaient à diminuer, de manière que celui de Verviers coûtât 10^f de moins par aune, 100 aunes de drap de Sedan à $\frac{7}{8}$ coûteraient alors autant que 96 aunes de drap de Verviers à $\frac{5}{8}$, avant la diminution. Quel était à cette époque, le prix d'une aune de drap de Verviers à $\frac{5}{8}$? (R. 50^f.)

Un bâton est en partie plongé dans l'eau et en partie hors de l'eau. Si on le retire de a palmes, la partie dans l'eau vaudra b fois l'autre, et si on l'enfonce de c palmes, la partie hors de l'eau vaudra d fois la seconde. On demande la longueur du bâton ?

Il y a 2 ans l'âge d'un père était quadruple de celui de son fils, et dans 10 ans il n'en sera plus que le double. Quels sont leurs âges actuels ? (R. 26 et 8 ans.)

Des joueurs conviennent que l'enjeu sera 1^f ; le jeu étant terminé, deux joueurs se retirent l'un avec 39^f de gain et l'autre avec 1^f de perte : aussi le premier a-t-il gagné 10 parties et le second seulement 2. Combien y avait-il de joueurs et combien ont-ils joué de parties ? (R. 5 joueurs et 11 parties, valeurs qui ne satisfont pas à l'énoncé.)

Trois joueurs de force inégale, conviennent que le gagnant recevra des deux autres, savoir : a francs si ce gagnant est le premier joueur, b francs si c'est le second, et c francs si c'est le troisième. Après d parties, ils sont dans le même cas que s'ils entraient au jeu. Quel est le nombre de parties gagnées par chaque joueur ?

On a payé respectivement a, b et c florins à trois troupes d'ouvriers, dont les deux dernières contiennent chacune 2 ouvriers de moins que la première, l'une ayant travaillé 3 jours de moins et l'autre 3 jours de plus que cette première. Combien y avait-il d'ouvriers en tout ?

La somme des quatre chiffres d'un nombre inconnu est 17 ;

si l'on supprime successivement le premier, le second et le troisième chiffre à droite, les nombres résultans, retranchés du proposé, donneront respectivement les restes 6358, 6360 et 6300. Quel est ce nombre? (R. 7064.)

Quel est le nombre dont la racine cubique est le tiers de la racine carrée? (R. 729.)

Démontrer que si les quatre nombres a, b, c, d, sont proportionnels, les deux expressions $a+b+\sqrt{ab}$ et $c+d+\sqrt{cd}$ auront pour somme $a+b+c+d+\sqrt{(a+c)(b+d)}$, et pour différence $a+b-c-d+\sqrt{(a-c)(b-d)}$. La première propriété a lieu dans toute suite de rapports égaux.

Des droites situées dans un même plan, de manière qu'il n'en existe point de parallèles ni plus de deux concourant au même point, se rencontrent en 21 points; quel est ce nombre de droites? (R. 7.)

Partager le nombre donné a en quatre parties proportionnelles, dont le produit soit un maximum.

Quels doivent être les deux facteurs d'un produit donné a, pour qu'en divisant chacun par la racine carrée de l'autre, la somme des deux quotiens soit un minimum? Ou pour qu'en divisant le cube de chacun par l'autre, la somme des quotiens soit la moindre possible?

Quel nombre n d'années a-t-il fallu à un particulier pour avoir 781 pigeons? On sait que chaque année il a acheté un nombre de pigeons femelles égal au rang de cette année, et que chaque pigeon femelle acheté une année, a produit chaque année suivante un nombre de pigeons mâles égal au rang de cette année suivante, à partir de celle de l'achat.

On trouve l'équation résoluble comme celles du 2e degré :

$$\tfrac{1}{24}n(n+1)[n(n+1)+10]=781.$$

Partager le nombre donné a en trois parties telles, qu'en divisant par chacune d'elles la somme des deux autres, la somme des trois quotiens soit un minimum.

Combien y a-t-il de plans qui se rencontrent en 220 points, sachant qu'il n'en existe pas de parallèles ni plus de trois concourant au même point? (R. 12.)

Résoudre l'équation $x^4-ax^3-(b+7)x^2+7ax+a^2b=0$, où a et b sont inconnus et dont le premier membre se réduit à 24 ou à -24, suivant qu'on y suppose $x=1$ ou $x=3$.

Etant donné un polynome réciproque du 4^{me} degré, comme $12x^4+8x^3+41x^2+8x+12$, décomposer ce polynome en deux facteurs du second degré tels, que les coefficiens de l'un soient ceux de l'autre, écrits dans un ordre rétrograde.

Plusieurs particuliers, au nombre de n, sont convenus que chacun achetera chaque année un nombre de pigeons femelles égal au produit du rang de cette année par celui de l'acheteur. Et comme on suppose que chaque pigeon femelle acheté ou né une année produit un pigeon femelle chaque année suivante, on demande combien ces particuliers auront de pigeons femelles au bout de m années?

Réponse : $\frac{1}{2}n(n+1)[2^{m+1}-(m+2)]$.

Quel est le nombre de choses dont le nombre de combinaisons 3 à 3 vaut 5 fois celui des combinaisons 6 à 6? (R. 7.)

Quelle est la somme de tous les nombres de combinaisons que l'on peut former en prenant n choses 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4, ..., n à n? (R. 2^n-1.)

Résoudre l'équation $ax^6-(2a+b+2)x^4-(a+2b)x^3+cx^2+(2c+10)x+36=0$, dont le premier membre est le carré exact de px^3-qx-6 : les nombres a, b, c, p et q étant d'ailleurs inconnus.

Soient S_1, S_2, S_3, S_4, ..., les sommes des puissances 1re, 2^e, 3^e, 4^e, ..., des racines $a, b, c, d, ..., l$, d'une équation $X=0$ du degré m en x; si on divise le polynome X successivement par $x-a$, $x-b$, $x-c$, ..., $x-l$ (486), la somme des quotiens sera la dérivée X_1 de X (539). On aura donc ainsi une identité qui établira les relations existantes entre les coefficiens de $X=0$ et les sommes S_1, S_2, S_3, S_4, etc. On propose de calculer ces relations, d'après la méthode que l'on vient d'indiquer.

(Voyez les Mélanges d'algèbre, pour un plus grand nombre d'applications et d'exercices, propres à exciter la curiosité et l'intérêt.)

FIN.

Note I.

Sur les quantités négatives isolées.

« Les quantités négatives naissent de l'extension et de la généralité que l'on accorde volontairement aux opérations et aux formules algébriques ; en sorte qu'en admettant à *priori* ces quantités et en les soumettant aux mêmes règles de calcul que les nombres absolus, les formules deviennent par là générales et applicables à toutes les valeurs des lettres ou des quantités indéterminées qui les composent.

Mais l'algèbre n'opérant que sur des grandeurs indéterminées, sur des signes abstraits, il est même absolument impossible qu'elle ne traite pas les quantités négatives, et en général, les êtres de non existence, comme s'ils étaient absolus et réels ; car les lettres n'ayant, par elles-mêmes, aucune valeur significative et explicite, il est également impossible de distinguer, dans le cours des raisonnemens et des transformations du calcul, si a, par exemple, est plus petit ou plus grand que b ; ainsi quel que soit l'ordre de grandeur de ces deux quantités, on sera, malgré soi, entraîné à raisonner et à opérer sur les expressions $a-b$, $\sqrt{a-b}$, etc., comme si c'étaient toujours des quantités positives et absolues, quels que soient a et b. Or, cela arrive non-seulement quand on emploie les signes et les notations de l'algèbre, mais aussi toutes les fois qu'en raisonnant sur des grandeurs, on fait abstraction de leur valeur numérique et absolue : c'est ce qui arrive, en particulier, dans la géométrie, lorsque la figure se complique ou que les rapports qui en lient les parties se multiplient, parce qu'il n'est plus possible alors de discerner, au simple coup-d'œil, l'ordre de grandeur et de situation de ces parties. C'est encore ce qui a lieu quand certaines de ces parties sont l'objet d'une recherche faite sur la figure, et qu'on les suppose inconnues à la fois de grandeur et de situation. Enfin, et c'est sur-tout ce qui arrive quand on fait abstraction de la figure ou qu'on se dispense de la décrire ; de là cette généralité des conceptions et cette grande extension de la géométrie, qui considère les objets dans l'espace, et dont Monge peut, à de si justes titres, être appelé le créateur.

Telle est l'origine commune de toutes les notions abstraites de l'étendue et de la grandeur en général, et par conséquent telle est aussi l'origine des êtres de non existence.

Ainsi, non-seulement, il peut être utile d'admettre les quantités négatives et imaginaires en algèbre, et de les soumettre aux mêmes règles de calcul que les nombres absolus, mais la chose est même tout-à-fait indispensable par la nature propre de cette science, puisqu'elle opère nécessairement sur des signes abstraits et qui n'ont, par eux-mêmes, aucune valeur significative. »

On peut voir (29 et 225) que nous avons mis à profit les réflexions précédentes; elles sont extraites du rapport fait à la Société Académique de Metz, sur la 1re édition de ce traité, par M. PONCELET, capitaine du génie.

Comme la réduction des termes semblables se présente au commencement de l'algèbre, et comme cette réduction peut donner et donne en effet des quantités négatives isolées, on est ainsi conduit à considérer ces sortes de quantités dès les premières opérations algébriques. Voilà pour quoi nous avons cru devoir les faire entrer immédiatement dans le calcul. Il en résulte l'avantage de donner sur-le-champ aux premières opérations de l'algèbre toute la généralité dont elles sont susceptibles.

Sans doute qu'il arrivera quelquefois aux commençans de demander ce que signifie une quantité négative isolée, telle que -6, par exemple; et cette question, qui se présente naturellement à l'esprit des élèves désireux de se rendre compte de leurs opérations, est absolument de même nature que celle où l'on voudrait savoir ce que signifie un nombre isolé, tel que 17, par exemple, et à quoi ce nombre répond.

Le nombre isolé 17 est censé augmenter une certaine grandeur de même espèce, dont on ne fait pas mention dans le calcul, et ce nombre doit conséquemment être précédé du signe $+$; de même, la quantité négative isolée -6 est censée diminuer une certaine quantité de même espèce, qui n'est pas l'objet particulier du calcul actuel.

En général, il nous paraît, avec un grand nombre de géomètres, qu'on levera toutes les difficultés, en regardant les quantités positives ou négatives comme augmentant ou diminuant une certaine grandeur fixe, dont on ne fait pas mention dans le calcul.

De cette manière, l'expression $-a+a$ signifiera qu'il faut soustraire et ajouter une même quantité a à une grandeur de même espèce; or, l'effet de l'une de ces opérations détruit celui de l'autre; donc $-a+a=0$. On verra aussi que $-3a=-a-a-a$. On est donc ainsi conduit aux principes du n° 27, sur lesquels est basé le calcul des quantités négatives isolées.

Nous aurions pu d'abord expliquer ces deux principes comme nous venons de l'indiquer; mais nous avons mieux aimé en faire l'objet de conventions spéciales, afin de fixer les idées et de n'avoir pas à fatiguer l'attention par des développemens, inutiles pour le moment, et qui sont beaucoup mieux compris lorsqu'on en vient aux applications des premières règles du calcul algébrique.

Ces développemens, au surplus, se réduisent toujours à montrer ce que signifie une quantité négative isolée, et réciproquement à faire voir dans quel cas une quantité doit prendre le signe $-$. Or, lorsqu'une quantité x d'un problème reçoit une valeur négative, elle diminue la grandeur fixe qu'elle augmentait d'abord; elle doit donc changer d'acception, c'est-à-dire, par exemple, exprimer une *perte*, si d'abord elle désignait un *gain*. Réciproquement, lorsqu'une quantité a change d'acception, elle diminue la grandeur fixe qu'elle augmentait d'abord; elle doit donc prendre le signe —. Et tel est, en résumé, ce à quoi se réduit l'interprétation des solutions négatives.

Il peut cependant arriver que l'inconnue x ne soit pas susceptible de changer d'acception; mais alors le signe — de sa valeur, provient du changement de signe de quelques-uns des nombres donnés du problème; et pour savoir quels sont ces nombres, il suffit de changer x en $-x$ dans les équations proposées.

Il est bon d'observer qu'un nombre absolu, comme 12, peut aussi bien être destiné à une diminution qu'à une augmentation. Mais on est convenu de ranger les nombres absolus dans la classe des quantités positives; de sorte que 4, par exemple, est la même chose que $+4$. Cette convention est légitime; car le nombre 4 ne saurait diminuer une certaine grandeur, sans augmenter en même temps une autre grandeur d'une acception contraire à celle de la première : diminuer les dettes d'une personne, par exemple, c'est réellement augmenter ses biens.

En partant des principes précédens, rien n'est plus facile que de comprendre l'addition algébrique. En effet, qu'il s'agisse, par ex., d'ajouter -10 à $+7$: comme alors les nombres 7 et 10 sont censés augmenter et diminuer certaines grandeurs n et p, dont on ne fait pas mention dans le calcul; si on y fait paraître ces grandeurs, l'expression $(+7)+(-10)$ sera la même chose que $(n+7)+(p-10)$. Or, il est aisé de démontrer que p étant >10, ce qu'on peut toujours supposer, on a

$$(n+7)+(p-10)=n+7+p-10=n+p-3.$$

Si donc on fait abstraction des grandeurs n et p, qui ne doivent pas entrer dans le calcul, ce qui revient à les supposer nulles, l'égalité précédente deviendra $\qquad (+7)+(-10)=-3.$

D'où l'on voit que l'addition algébrique est une opération par laquelle on réunit plusieurs quantités de même espèce, affectées des signes + et —, pour en former une seule quantité, appelée *somme*. Ce qui est la définition du n° 35.

Les mêmes principes appliqués à la règle des signes, dans la multiplication, servent à expliquer comment il se fait, par exemple, que $-a\times -b=+ab$. En effet, dans $-a\times-b$, les nombres a et b diminuent certaines grandeurs n et p, qui ne sont pas l'objet du calcul actuel; de sorte que si on y fait paraître ces grandeurs, $-a\times-b$ sera la même chose que $(n-a)(p-b)$. Or, n étant plus grand que a, et p plus grand que b, ce qu'on peut toujours admettre, il est aisé de démontrer que $\qquad (n-a)(p-b)=np-ap-bn+ab.$

Faisant donc abstraction des grandeurs n et p, qui ne doivent pas entrer dans le calcul, et qui doivent par conséquent y être supposées nulles, l'égalité précédente deviendra

$$-a\times-b=+ab.$$

Et l'on voit aussi par là comment il arrive qu'en supposant les formules vraies pour toutes les valeurs des lettres qui les composent, on soit conduit au calcul des quantités négatives isolées.

NOTE II.

Sur la multiplication et la division des monomes.

La règle (47) pour multiplier un monome par un monome est composée des quatre règles particulières que voici : 1° La *règle des signes* qui consiste à donner au produit le signe $+$, lorsque les signes du multiplicande et du multiplicateur sont les mêmes, et le signe $-$, quand les signes sont différens ; 2° La *règle des coefficiens* qui se réduit à multiplier le coefficient du multiplicande par le coefficient du multiplicateur pour avoir celui du produit ; 3° La *règle des lettres* qui consiste à écrire les lettres du multiplicande et du multiplicateur les unes à la suite des autres, en suivant l'ordre alphabétique et sans placer aucun signe entre elles ; 4° Enfin, la *règle des exposans* qui revient à n'écrire qu'une seule fois chaque lettre comme facteur au produit, et à lui donner pour exposant, la somme de ses exposans au multiplicande et au multiplicateur.

Au moyen de ces règles particulières, on aura

$$-5a^3b^4d \times +3a^4b^2c = -15a^7b^6cd.$$

En effet, d'après la règle des signes (44) et parce qu'un produit ne change pas de valeur, dans quelqu'ordre qu'on multiplie, il est clair que

$$-5a^3b^4d \times +3a^4b^2c = -5a^3b^4d \,.\, 3a^4b^2c = -5\,.\,3a^3a^4b^4b^2cd$$
$$= -15\,.\,a^3a^4\,.\,b^4b^2\,.\,cd = -15a^7b^6cd,$$

en observant que le produit a^3a^4 contient 3 facteurs a et 4 facteurs a, ou 7 facteurs a, et vaut par conséquent a^7 (20) ; que de même le produit b^4b^2 renferme 4 facteurs b et 2 facteurs b, ou 6 facteurs b, et vaut b^6.

La règle de la division des monomes (64) se compose des quatre règles particulières que voici : 1° La *règle des signes ;* elle consiste à donner au quotient le signe $+$, lorsque les signes du dividende et du diviseur sont les mêmes, et le signe $-$, quand les signes sont différens. 2° La *règle des coefficiens ;* elle se réduit à diviser le coefficient du dividende par le coefficient du diviseur pour avoir celui du quotient. 3° La *règle des lettres ;* elle revient à ne pas écrire au quotient les lettres communes au dividende et au diviseur, et qui ont le même exposant. 3° Enfin, la *règle des exposans ;* elle consiste à n'écrire qu'une seule fois chaque lettre comme facteur au quotient, et à lui donner pour exposant son exposant au dividende moins son exposant au diviseur.

Au moyen de ces règles particulières, on trouve que

$$-15a^7b^4c^2d : -3a^3bc^2d = +5a^4b^3.$$

Et en effet, en multipliant ce quotient par le diviseur, on reproduit le dividende (47) : donc ce quotient est le véritable.

En général, soit $ca^m b^n$ le dividende, $c'a^v b^n$ le diviseur et $c''a^x b^y$ le quotient, c, c', c'' désignant les coefficiens; on aura donc

$$ca^m b^n = c'a^v b^n \times c''a^x b^y, \text{ ou } ca^m b^n = c'c''a^{v+x} b^{n+y}.$$

Le produit du diviseur par le quotient devant toujours être le même que le dividende, il faut que les coefficiens soient les mêmes de part et d'autre, ainsi que les exposans de a et ceux de b; on a par conséquent $c'c'' = c$, $v + x = m$ et $n + y = n$; d'où l'on tire $c'' = c : c'$, $x = m - v$ et $y = 0$.

Ainsi on aura le coefficient du quotient en divisant le coefficient du dividende par celui du diviseur; on trouvera l'exposant de a au quotient en retranchant son exposant au diviseur de son exposant au dividende; enfin, comme l'exposant y de b au quotient est 0, cette lettre n'y est pas facteur et ne doit pas y entrer.

Fautes à corriger.

Page 25, ligne 4ᵉ : $+ 35a^5b^4$, *lisez* $+ 35a^6b^4$.
» 77, » 20ᵉ, *supprimez les mots :* ou diviser.
» 77, » 4ᵉ, en remontant : $\frac{3x}{4}$, *lisez* $\frac{6x}{4}$.
» 82, » 11ᵉ, en remont. : $\frac{b(y-q)}{a}$, *lisez* $\frac{b(q-y)}{a}$.
» 94, » 3ᵉ : 111108889, *lisez* 1111088889.
» 108, » 10ᵉ, en remont. : ± 5, *lisez* ± 15.
» 112, » 10ᵉ, en remont. : $= - b^2$, *lisez* $= b^2$.
» 116, » 6ᵉ : $\frac{48(x-4)}{y}$, *lisez* $\frac{48(x-4)}{x}$.
» 129, » 10ᵉ, en rem. plus o diminue, *lis.* plus a diminue.
» 129, » 15ᵉ, en remont. : Soit $2o$, *lisez* Soit $2a$.
» 133, » 5ᵉ, en rem., *supprimez les mots :* des carrés.
» 136, *le dénom. de la valeur* C+D *doit être* 1.2.3.4.5.
» 142, ligne 10ᵉ : produit de $3a^2x$, *lisez* produit $3a^2x$.
» 147, » 2ᵉ : $> (1{,}49)^3$, *lisez* $> (1{,}39)^3$.
» 148, » 11ᵉ : 651, *lisez* 6561.
» 169, » 13ᵉ, *supprimez le mot* Cette.
» 173, » 13ᵉ, en remontant : 11700, *lisez* 11850.

TABLE SOMMAIRE.

NOTA. Il sera très-utile aux élèves de construire eux-mêmes et sous la direction de leur Professeur, la *table analytique* des matières contenues dans cet ouvrage. Cette table leur servira pour bien se préparer aux examens et mieux connaître l'enchaînement des objets qu'ils auront appris.

Notions préliminaires .... PAGE 1
Moyens de simplifier les expressions algébriques 5
De l'addition algébrique 11
De la soustraction algébrique 13
De la multiplication algébrique 14
De la division algébrique 21
Des fractions algébriques 28
Des équations 33
De la résolution des équations du premier degré 36
Problèmes du premier degré 45
De la discussion des problèmes du premier degré 55
Formules pour la résolution des équations du premier degré à plusieurs inconnues 68
Des inégalités 75
De l'analyse indéterminée du premier degré 79
De l'extraction de la racine carrée des nombres 86
Notions sur les irrationnelles et les imaginaires 94
De la racine carrée des quantités littérales 99
Du calcul des radicaux du second degré 103
Des équations du second degré 108
Problèmes du second degré 114
De la discussion des racines dans les équations du second degré à une inconnue 120
Questions de maximums et de minimums 129
Principes sur les puissances et les racines 134
De l'extraction des racines cubiques 140
De l'extraction des racines des nombres 147
Du calcul des radicaux 151

Des exposans négatifs .... PAGE 157
Du calcul des exposans d'une nature quelconque 161
Des équations exponentielles 166
Des progressions par différence 171
Des progressions par quotient 175
Des premières puissances des nombres naturels 182
Des logarithmes 187
De l'usage des tables ordinaires 191
Application de la théorie des logarithmes 197
Des arrangemens et des combinaisons 203
De la formation des puissances des polynomes 206
De la méthode des coefficiens indéterminés, appliquée à la recherche de quelques séries 211
De la composition des équations 224
De la transformation des équations 229
Des limites des racines 233
De l'existence des racines réelles 237
De la recherche des racines commensurables 242
Du plus grand commun diviseur algébrique 250
Des racines égales et des équations qui s'abaissent à d'autres de degrés moindres 257
De l'élimination 263
De la recherche des racines réelles incommensurables d'une équation numérique 279
Des fractions continues 290
Problèmes divers 298
Note I. Sur les quantités négatives isolées 302
Note II. Sur la multiplication et la division des monomes. 305

FIN DE LA TABLE.