DIFFÉRENTS MODES ÉLÉMENTAIRES

DE

GÉNÉRATION DES NOMBRES,

PAR

J.-N. NOËL,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE, CHEVALIER DE L'ORDRE DE LÉOPOLD, ETC.

LIÉGE,

H. DESSAIN, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,

PLACE ST.-LAMBERT.

1845.

DIFFÉRENTS MODES ÉLÉMENTAIRES

DE

GÉNÉRATION DES NOMBRES,

PAR

J.-N. NOËL,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE, CHEVALIER DE L'ORDRE DE LÉOPOLD, ETC.

Pour la Bibliothèque de la ville de Luxembourg; de la part de l'auteur, ex-professeur des sciences physiques et mathématiques et ex-principal de l'athénée.

JNNoël

LIÉGE,

H. DESSAIN, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,

PLACE S^t.-LAMBERT.

1845.

Ce mémoire, moins étendu et moins développé, était d'abord destiné au Recueil de la Société royale des sciences de Liége; mais comme l'abondance des matières ne permettrait de l'y insérer que beaucoup plus tard, j'ai pensé qu'il pourrait être utile de le publier dès à présent, d'abord comme développant plus complètement quelques vues nouvelles sur les méthodes scientifiques, vues déjà émises dans le Recueil ci-dessus, et ensuite comme traitant des questions propres à faire approfondir l'étude du calcul et de la géométrie.

Nota. Les exemplaires voulus par la loi ont été déposés.

DIFFÉRENTS MODES ÉLÉMENTAIRES

DE

GÉNÉRATION DES NOMBRES.

Introduction.

On appelle ordinairement *quantité* tout ce qui est susceptible d'*augmentation* et de *diminution ;* mais cette définition est beaucoup trop générale, pour n'être pas un peu vague : on la rend plus claire et plus précise en disant que, par *quantité*, on entend tout ce qui peut se *mesurer* ou se *compter ;* tout ce qui est ou qui peut se concevoir divisé en parties *égales* entre elles, ou du moins en parties de même *dénomination*.

Quelle que soit d'ailleurs la définition admise, on est toujours conduit à regarder les mots *quantité* et *grandeur* comme exprimant absolument la même idée ; car toute *quantité* a nécessairement une *grandeur* ou une *valeur*, qu'il importe souvent de bien connaître ; et toute grandeur appartient nécessairement à une quantité. Mais le mot *grandeur* ou *valeur* suppose une *comparaison* que le mot *quantité* n'exige pas.

Nous ne pouvons bien connaître les *choses* qu'en les comparant les unes aux autres ; or la comparaison de deux quantités a surtout pour but d'exprimer la *grandeur* ou la *valeur* de l'une par la *grandeur* ou la *valeur* de l'autre : cela fournit un *nombre d'unités*, propre à *représenter*, partout et toujours, la grandeur ou la valeur de la première quantité ; la seconde, ou plutôt sa grandeur ou sa valeur, étant prise pour *unité*, c'est-à-dire pour terme invariable de comparaison.

Dans le commerce et l'industrie, dans les sciences, les arts et les métiers, dans les relations journalières de travail, de production et de consommation, c'est moins la quantité, en elle-même, que sa grandeur ou sa valeur, qu'il faut bien connaître : on doit alors *compter*, *mesurer*, *évaluer* ou *calculer*, pour avoir un *nombre* propre à *représenter* exactement, ou du moins avec une approximation suffisante, la grandeur cherchée, même quand celle-ci est *invisible* ou *inaccessible*. De sorte que la science des grandeurs, représentées par des nombres, est indispensable, dans les usages et les relations de la vie sociale.

Les nombres se trouvent dans la nature, en *comptant*, en *mesurant* ou en *évaluant*, et non dans les *signes* nécessaires pour les *énoncer* et les distinguer les uns des autres. Mais si l'*image* n'est pas l'*objet*, elle en donne cependant l'idée complète ; il n'y a donc aucun inconvénient à confondre le nombre avec son expression, soit en langage ordinaire, soit en signes plus simples, comme les *chiffres* et d'autres : il y a, au contraire, de grands avantages à regarder les signes, qui désignent le nombre, comme le nombre lui-même. L'*énoncé* du nombre le fait mieux connaître que si la *collection* d'unités était sous les yeux ; puisque le seul aspect de la réunion de plusieurs choses, de même dénomination, ne suffit pas pour donner l'idée complète de la *grandeur* de l'ensemble, et que pour cela, il est nécessaire de compter, afin d'énoncer le nombre qui représente cette grandeur. Cet énoncé suffit seul pour donner, à toutes les époques et dans tous les pays, l'idée claire et précise de la grandeur de l'ensemble proposé.

On *compte* lorsque les parties de la quantité sont séparées et bien distinctes : dans le cas contraire, il est nécessaire de *mesurer* ou d'*évaluer*. Or, le *mesurage direct* est rarement possible, aussi bien que l'*évaluation directe* : c'est presque toujours par des nombres et des mesurages *auxiliaires* que l'on obtient le nombre ou le *rapport* demandé.

Delà naissent les différentes *méthodes* de *calcul*, pour la *génération* et la *détermination* des nombres, et souvent les *séries*, pour exprimer les grandeurs numériques cherchées au moyen de nombres *auxiliaires*, croissant ou décroissant d'après une *loi* donnée ou à trouver. Mais le *calcul* lui-même serait souvent impossible, sans les *chiffres* pour représenter les nombres et conséquemment les grandeurs ou les valeurs. C'est que les chiffres permettent d'écrire le nombre aussi vite qu'on l'énonce et de l'avoir sous les yeux, sur le papier ou sur le tableau ; ce qui facilite singulièrement les opérations du calcul et les rend possibles.

Le calcul n'est que la *comparaison* des nombres, pour les *composer* et les *décomposer* ; or la comparaison de deux choses est d'autant plus facile et plus exacte que ces choses sont plus rapprochées, sous les yeux. Delà donc l'importance des *signes abréviatifs*, tant des nombres que des opérations qu'ils subissent, pour fournir le nombre *inconnu ;* et delà aussi la nécessité qu'il y a parfois de représenter celui-ci par un signe plus simple que ceux du langage ordinaire. En général, si le nombre est *donné quelconque* ou s'il est *inconnu*, il faut un *signe* pour le désigner dans le calcul.

Les signes des nombres *indéterminés* ont beaucoup varié ; mais je pense que la science des nombres n'a été réelle et complète que par les chiffres et par les *lettres* de l'alphabet, auxquelles on s'est enfin arrêté, pour représenter des nombres *quelconques*. Les lettres sont, en effet, des signes très-simples, que nous connaissons dès l'enfance et qui nous permettent de rapprocher, le plus possible, sous les yeux, les nombres inconnus et les nombres connus, ceux-ci représentés par des chiffres. L'emploi des lettres, comme signes représentatifs des nombres indéterminés, est donc un complément nécessaire à la numération écrite ; et je ne vois pas pourquoi l'on craindrait de se servir de lettres pour désigner des *nombres* quelconques et même certaines *grandeurs*, dans la théorie des *fractions*, ou du moins pour amener naturellement la *génération* de celles-ci, comme dans l'exemple que voici :

Si un détaillant veut savoir combien il recevra d'argent pour une pièce de ruban, qu'il vend à 52 *centimes l'aune*, il devra *mesurer* la longueur x de cette pièce avec celle a de l'aune. Or supposons que x contienne 12 fois a, avec le reste b ; que a contienne 3 fois b, avec le reste c ; enfin, que b contienne 4 fois c, sans reste ou avec un reste si petit qu'on ne puisse en tenir compte. Dans ces hypothèses, comme 4 *fois c*, c'est $4c$, et que d'ailleurs les signes $=$ et $+$ signifient *égal* et *plus*, il est clair qu'on aura successivement, sous les yeux :

$$b=4c,\ a=3b+c=3 \text{ fois } 4c+c=13c,$$
$$x=12a+b=12 \text{ fois } 13c+4c=160c.$$

Ici l'unité a est divisée en 13 parties égales, appelées *treizièmes*, et la longueur x cherchée et représentée par la *fraction* 160 *treizièmes*. Or, puisque l'aune a ou $13c$ de ruban coûte 52 centimes, il est clair que c coûte la 13 ième partie de 52, c'est-à-dire 4 centimes ; donc la pièce $160c$ coûte 160 fois 4 ou 640 centimes : c'est la somme que le détaillant doit recevoir pour sa pièce de ruban.

Le mesurage de la longueur x eût été beaucoup plus simple, si l'aune a avait été divisée en 13 parties égales à c ; car alors, on aurait trouvé, par une seule opération, $x = 12a + 4c$: c'est le nombre *fractionnaire* 12 unités 4 treizièmes. Voilà pourquoi l'unité est toujours subdivisée en parties égales, assez petites, pour qu'on puisse négliger toute partie plus petite, sans erreur notable.

Cet exemple, propre à donner l'idée des fractions et du mesurage, figure dans un traité d'arithmétique, à l'usage des écoles primaires. On a objecté que la solution ci-dessus *n'est pas à la portée des enfants ;* mais, en posant cette objection, on n'a sans doute pas remarqué qu'un tel livre est plutôt destiné au maître qu'à l'élève, et que la solution précédente, en montrant l'utilité de l'emploi des signes abréviatifs, indique en même temps au professeur la marche à suivre pour développer la notion des fractions à ses jeunes auditeurs. Peu importe qu'à cet effet, il se serve de *chiffres* ou de *lettres*, pourvu qu'il leur rende cette notion bien sensible et bien claire, même en employant des objets *matériels* ou mieux encore des *traits*, mis sous les yeux de tous, sur le *tableau.*

Toutefois, dans ce dernier cas, les *traits* sont des *signes* beaucoup moins simples que les *lettres ;* et celles-ci d'ailleurs rapprochent, le plus possible, les grandeurs désignées par elles, sur le tableau ou sur le papier.

Enfin, si l'enfant a bien compris le but et l'importance des numérations écrite et parlée, il saura pourquoi l'on désigne ordinairement les nombres quelconques, et même les choses, par des lettres, surtout souvent par les lettres initiales ; et si de plus, il est bien au courant des quatre premières opérations, l'expérience a prouvé qu'il comprendra parfaitement la solution précédente.

On sait que la comparaison à l'unité fournit tous les nombres : mais pour faciliter cette comparaison, il est nécessaire d'employer des chiffres et surtout des lettres, lorsqu'on veut parvenir à des *relations* complètement générales. Considérons trois nombres quelconques, représentés par A, B, C, et supposons ces nombres tels que A se trouve en opérant sur B absolument comme C se trouve en opérant sur l'unité. Puisque A se trouve avec B absolument comme C avec 1, on voit que A est à l'égard de B absolument ce que C est à l'égard de l'unité, ou que A est à B comme C est à 1. Pour indiquer cette relation et la mettre sous les yeux, on remplace les mots *est à* et *comme* par les signes : et :: ; on écrit donc

$$A : B :: C : 1,$$

en énonçant A *est à* B *comme* C *est à* 1.

Cette relation fondamentale s'appelle *proportion ;* A, B, C, 1 en sont les *termes ;* A et 1 les *extrêmes*, B et C les *moyens ;* A et C les *antécédents*, B et 1 les *conséquents*.

Si A est *inconnu* et qu'on ait A:20 :: 9:1, il est clair que 9 étant 9 fois 1, A sera 9 fois 20 ou 180 ; vu que A se trouve avec 20 absolument comme 9 avec 1. De même, si A:20 :: $\frac{4}{5}$:1, il est clair que $\frac{4}{5}$ est 4 fois le cinquième de l'unité ; donc A est 4 fois le cinquième de 20, c'est-à-dire 4 fois 4 ou 16.

La *multiplication* est une opération par laquelle, connaissant deux nombres quelconques, nommés *multiplicande* et *multiplicateur*, on en trouve un troisième en opérant sur le multiplicande absolument comme il a fallu opérer sur l'unité pour avoir le multiplicateur. Ce troisième nombre, résultat de la multiplication, s'appelle *produit ;* le multiplicande et le multiplicateur sont les *facteurs* du produit ; enfin, le signe de la multiplication est $\times$ et signifie *multiplié par*.

D'après cela, puisque dans A:B :: C:1, A se trouve avec B absolument comme C avec 1, on voit que A est le produit de B par C, et qu'ainsi la proportion A:B :: C:1 revient à l'*égalité* plus simple,

$$A=B\times C.$$

Cette égalité, quand l'un des trois nombres A, B, C est inconnu, s'appelle *équation ;* elle est composée de deux *membres :* A le *premier* membre et B$\times$C le *second*.

Il résulte de la définition générale de la multiplication que *multiplier* B par 40, c'est *répéter* B 40 *fois ;* car le multiplicateur 40 étant 40 fois 1, le produit sera 40 fois B ou 40B. De même, *multiplier* B par une fraction 30 onzièmes, c'est prendre *les* 30 *onzièmes de* B ; vu que le multiplicateur 30 onzièmes étant les 30 onzièmes de 1, le produit sera nécessairement les 30 onzièmes de B, c'est-à-dire 30 fois le onzième de B, ou le onzième de 30 fois B, ou enfin 30 *onzièmes de fois* B.

Si C est *inconnu* et qu'on ait 24:18 :: C:1 ou 24=18$\times$C, on dira : C se trouve avec 1 absolument comme 24 se trouve avec 18 ; or, 24 est les 4 tiers de 18 ; donc C est les 4 tiers de 1 et par conséquent C=$\frac{4}{3}$.

La *division* est une opération par laquelle, connaissant un produit, appelé *dividende*, et l'un de ses facteurs, nommés *diviseur*, on trouve l'autre, appelé *quotient*. Le dividende est donc toujours le produit du diviseur par le quotient ou du quotient par le diviseur ; mais', pour les nombres *concrets*, comme pour les nombres *abstraits*, ces deux cas généraux rentrent l'un dans l'autre.

La division s'indique à l'aide du signe :, lequel signifie *divisé par ;* donc si dans $B\times C=A$, B est inconnu, on aura $B=A:C$. De sorte que si $B\times 20=36$, on aura $B=36:20$. D'ailleurs l'équation $36=B\times 20$ revient à la proportion $36:B::20:1$, où 36 se trouve avec B absolument comme 20 avec 1 ; donc réciproquement, B se trouve avec 36 absolument comme 1 avec 20. Or, 1 est le vingtième de 20 ; donc B est le vingtième de 36, c'est-à-dire le cinquième du quart de 36, ou le cinquième de 9, ou enfin $\frac{9}{5}$.

On voit que *le quotient se trouve avec le dividende absolument comme l'unité avec le diviseur*, et que *le quotient s'obtient avec l'unité absolument comme le dividende avec le diviseur*. Ces deux propositions sont également vraies et constituent les deux cas généraux de la division. Mais il est plus simple de ramener la division à la multiplication, afin de passer du connu à l'inconnu : la division alors consiste à décomposer le dividende en deux facteurs dont l'un soit égal au diviseur ; chose facile pour les fractions, en multipliant les deux termes du dividende par le produit des deux termes du diviseur ; etc.

On sait que le *rapport* ou la *raison* des deux quantités A et B, *de même nature*, est le nombre C par lequel il faut multiplier le conséquent B pour avoir l'antécédent A ; et ainsi, ayant $A=B\times C$, *le rapport* C *indique toujours comment l'antécédent* A *s'obtient avec le conséquent* B *seul.*

D'ailleurs $B\times C=A$ donne $C=A:B$; le rapport est donc aussi le quotient de l'antécédent divisé par le conséquent. Voilà pourquoi le rapport de A à B s'indique, comme la division, par les deux points ; lesquels signifient toujours *divisé par,* mais que l'on doit ici énoncer *est à*, pour mieux rappeler que A est comparé à B et que le nombre C est le résultat de cette comparaison. Enfin, dans $A:B::C:1$, le rapport de A à B est égal au rapport de C à 1 ; voilà aussi pourquoi l'on définit la proportion en disant que c'est l'*expression de l'égalité de deux rapports.* La proportion est donc aussi l'expression de l'*analogie directe* des antécédents avec leurs conséquents ; vu que, dans $x:12::60:15$, x se trouve avec 12 absolument comme 60 avec 15. On voit d'ailleurs que cette proportion n'est qu'une *équation*, sous une forme particulière ; et c'est même l'ensemble de deux équations très-simples ; car si, dans la proportion ci-dessus, y désigne le rapport commun inconnu, on aura simultanément $x=12\times y$ et $60=15\times y$; d'où $y=4$ et $x=12\times 4=48$.

Pour la clarté et la simplicité, les règles et les principes de calcul doivent se déduire, le plus immédiatement possible, de la définition de chaque opération ; il est donc nécessaire de démontrer que *le produit de facteurs quelconques ne change point de valeur finale, quel que soit l'ordre des multiplications successives ;* et de même, que le quotient final ne change point, quel que soit l'ordre suivi dans les divisions successives. (Ce principe n'est au fond que le précédent).

Pour démontrer complétement le premier de ces deux principes, les lettres ne sont pas nécessaires, mais elles simplifient les raisonnements. Soient donc a, b, c trois facteurs *entiers* quelconques, dont le produit indiqué, savoir $a\times b\times c$, s'écrit simplement abc, en sous-tendant les signes $\times$ et en énonçant a, b, c ou a par b par c ; je dis que $abc=acb$.

L'expression abc indique ici qu'il faut prendre c fois le produit de a par b, c'est-à-dire qu'il faut prendre c fois la somme de b nombres égaux à a ; ce qui se fait évidemment en prenant c fois chacune des b parties a de cette somme. Or, chaque partie a, prise c fois, donne c fois a ou ac ; les b parties a, prises chacune c fois, donnent donc b fois ac ou acb. Donc enfin $abc=acb$.

Considérons les trois *fractions arithmétiques*, représentées par a sur m, b sur n et c sur p : la multiplication des fractions nous apprend que

$$\frac{a}{m}\times\frac{b}{n}\times\frac{c}{p}=\frac{ab}{mn}\times\frac{c}{p}=\frac{abc}{mnp}=\frac{acb}{mpn}=\frac{a}{m}\times\frac{c}{p}\times\frac{b}{n}.$$

On voit que a, b, c désignant des nombres quelconques, entiers ou fractionnaires, on aura toujours $abc=acb$. Ici a peut désigner lui-même le produit de plusieurs facteurs ; et si $a=1$, il vient $bc=cb$.

Il suit de ces différentes propositions que, a, b, c, d, etc., désignant des facteurs entiers ou fractionnaires, on aura successivement : $ab=ba$; $abc=bac=bca=cba$; $abcd=cbad=cbda=cdba=dcba$; etc. De sorte qu'un facteur du produit peut y occuper successivement toutes les places, sans que la valeur du produit soit aucunement changée.

On connaît le rôle important que les facteurs ou diviseurs *premiers*, nécessairement *entiers*, jouent dans la *théorie des nombres* et notamment dans la *divisibilité*, que l'on simplifie en la ramenant aux notions les plus élémentaires, comme il suit :

Il est d'abord évident que *le produit de nombres entiers a tou-*

jours, pour facteurs premiers, tous ceux du multiplicande et tous ceux du multiplicateur, distribués dans tel ordre on voudra.

Il n'est pas moins évident que *le produit ne peut avoir d'autres facteurs premiers que ceux de ses deux facteurs composés ;* car d'où proviendraient les facteurs premiers du produit, qui n'appartiendraient ni au multiplicande ni au multiplicateur ?

Enfin, comme deux produits égaux se contiennent mutuellement une fois ; chacun renferme nécessairement tous les facteurs premiers de l'autre, et ainsi *deux produits de nombres entiers ne peuvent être égaux entre eux que quand ils ont les mêmes facteurs premiers respectifs et en même nombre de chaque sorte ;* c'est-à-dire, en d'autres termes, que *le même produit ne peut résulter que d'un seul système de facteurs premiers*, d'ailleurs distribués dans tel ordre on voudra.

Il suit immédiatement de ces propositions évidentes que, 1° *Si le nombre entier* N *divise le produit* AB *de deux facteurs entiers et qu'il soit premier avec* B, *il divise nécessairement* A. Car soit C le quotient entier de AB par N ; on aura $AB=CN$. Or, ces deux produits égaux, admettant les mêmes facteurs premiers et N n'ayant aucun facteur premier commun avec B, par hypothèse, il faut que tous les facteurs premiers de N se trouvent dans A : donc N divise A.

2° *Si le nombre entier* N *est premier avec chacun des facteurs d'un produit entier, il ne saurait diviser ce produit et donner un quotient entier.* Le nombre N étant, en effet, premier avec chacun des facteurs du produit proposé, aucun de ses facteurs premiers n'entre dans les facteurs de ce produit, ni par conséquent dans le produit lui-même : en un mot, N est premier avec le produit proposé et ne le divise pas.

3° Enfin, *le produit de tant de fractions irréductibles qu'on voudra, est lui-même une fraction irréductible.* Car une fraction étant *irréductible* lorsque ses deux termes sont *premiers entre eux*, les deux termes du produit n'ont point de facteur premier commun ; ce produit ne peut donc pas se simplifier : il est *irréductible*, parce que on ne peut *réduire* les fractions que par divisions.

Cette dernière proposition sert à démontrer l'existence des *nombres irrationnels*, c'est-à-dire des nombres *inexprimables* en chiffres, notamment dans l'*extraction des racines numériques*, comme on sait. Observons de plus que tout ce qui vient d'être établi, sur les produits et sur la divisibilité, s'applique exactement, en algèbre, aux monomes et aux polynomes, facteurs *entiers* et *premiers* en eux-mêmes ou *premiers entre eux*, convenablement définis ; ce qui simplifie singulièrement la théorie du *plus grand commun diviseur* algébrique, défini, comme il doit l'être, savoir : *le produit de tous les facteurs premiers communs aux deux quantités littérales proposées, entières et rationnelles.* Cette théorie, même avec la véritable définition que nous venons de poser, est fort compliquée, lorsqu'on ne veut pas étendre aux quantités littérales, les définitions et les propositions établies pour les nombres.

La recherche du p. g. c. d. algébrique, par *divisions successives*, le fait toujours connaître ; mais les opérations sont beaucoup plus compliquées, et par conséquent plus sujettes à erreurs, que quand on le détermine, soit par *décomposition en facteurs*, lorsque cette décomposition se présente immédiatement, soit par *élimination* de la lettre *ordonatrice* entre les deux polynomes, égalés à zéro ; et cela d'après la méthode d'*addition* et de *soustraction d'équations*, où l'on fait disparaître successivement les deux premiers termes et les deux derniers, pour chaque couple d'équations successives.

Outre l'*ordre* et la *position* des choses, les mathématiques ont pour objet essentiel les *grandeurs* et les *nombres*, et par conséquent la *génération* des unes et des autres. Notre but ici est d'indiquer les différents *modes élémentaires* de génération des nombres et de faire voir, plus complètement qu'ailleurs, que la *méthode analogique* domine et simplifie toutes les autres méthodes numériques ; celles-ci n'étant que des applications et des transformations, plus ou moins heureuses, de ce que nous appelons le *principe d'analogie directe.*

Pour mieux atteindre ce but, il sera nécessaire de passer en revue les méthodes élémentaires et de revenir sur des notions et des développements connus ; nous devrons considérer plus particulièrement, d'abord le *mesurage*, pour en établir le principe ou la règle, et ensuite les méthodes de calcul, propres à la détermination numérique des grandeurs continues. Et comme le calcul algébrique n'est au fond qu'une suite d'*interprétations* de *symboles* numériques ; nous aurons à considérer plus spécialement les symboles *négatifs*, dont l'interprétation n'est souvent qu'un changement soit de *position* soit de mode d'existence *concrète.*

Enfin, puisque les applications éclaircissent les théories et les font même découvrir, le plus souvent ; nous croyons utile au développement de nos idées de traiter, ou du moins d'énoncer, un grand nombre de problèmes choisis, dont plusieurs, pensons-nous, sont peu connus et offrent, par eux-mêmes, de l'intérêt. De cette manière, le présent ouvrage sera une sorte de *programme* des questions propres à simplifier et à faire approfondir, en même temps, l'étude de la géométrie et l'étude du calcul analytique.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

MESURAGE ET CALCUL.

I.

Des Rapports. Pour bien connaître les *grandeurs* et les *valeurs*, il est nécessaire d'exprimer toutes celles de même nature au moyen de l'une quelconque d'entre elles, qui soit bien *connue* (et qui l'est en effet, par l'usage journalier) : il faut d'ailleurs que celle-ci, prise pour *unité* ou pour terme de comparaison, demeure *invariable ;* mais cette condition n'est jamais remplie complètement et exige la *vérification* des *unités*, pour les ramener à des grandeurs *constantes*.

Cela posé, soient A et B deux grandeurs de même nature, la seconde étant prise pour *unité* invariable ; je dis que le nombre n peut toujours avoir une valeur telle qu'on ait $A = Bn$, quelle que soit la grandeur A. On peut, en effet, toujours concevoir que le nombre n croisse, par *degrés insensibles* ou d'une manière *continue*, depuis 0 ; le produit Bn croîtra donc aussi, par degrés insensibles, et passera ainsi par tous les états possibles de grandeur, depuis le néant (comme par exemple, le *brin d'herbe* ou le *cheveu*) ; par conséquent, il existe toujours une valeur de n, qui rend le produit Bn parfaitement égal à la grandeur A, et la représente complètement.

Le nombre n, s'il n'est pas donné, se trouve toujours par le *mesurage* ou par l'*évaluation*, sinon exactement, du moins avec une approximation suffisante, ou supposée telle ; car d'ailleurs n pourrait être *inexprimable en chiffres*, ainsi que cela aurait lieu, par exemple, si l'on avait $n = \sqrt{2}$: dans ce cas, n ne peut jamais s'obtenir que par approximation, bien qu'il existe nécessairement. Le nombre n prend alors le nom de *symbole irrationnel*, pour rappeler qu'on ne saurait l'exprimer en chiffres : c'est simplement un nombre *inexprimable*.

De plus, si $n = 40$ *septièmes*, A sera les 40 septièmes de B, et se trouvera en divisant chaque unité B en sept parties égales à x et en prenant 40 de ces parties ; de sorte qu'alors $A = 40x$. Dans ce cas, x est dite la *mesure commune* de A et B ; Or, si $n = \sqrt{2}$, la *mesure* *commune* de A et B est si petite, qu'on ne saurait l'exprimer, pas même en chiffres : elle existe cependant, aussi bien que $\sqrt{2}$, et doit recevoir un nom : on l'appelle *infiniment petite*.

Mesurer une quantité A par une autre B, prise pour *unité* ou pour terme invariable de comparaison, c'est exprimer A au moyen de B seule ; c'est trouver le nombre n tel, qu'on ait exactement ou par une approximation suffisante, la relation $A = Bn$; c'est enfin trouver le *rapport n* de A à B, *lequel indique toujours comment l'antécédent* A *s'obtient au moyen du conséquent* B *seul;* car si n vaut 3 ou 4 septièmes, A sera le triple ou les 4 septièmes de B.

C'est donc par les rapports que nous pouvons connaître les *grandeurs* ou les *valeurs* des choses ; et toutes nos études se réduisent finalement à trouver des rapports et à les exprimer ; c'est-à-dire que toutes nos études se réduisent à bien *comparer*, pour énoncer le résultat de chaque comparaison et découvrir ainsi la vérité.

Dans la comparaison des grandeurs de même nature, telle que A et B, dont la seconde B est prise pour *unité*, le nombre ou le rapport n résultant s'appelle aussi la *mesure* de A, comme provenant du *mesurage* de A par B ; et c'est la *valeur numérique* de A, parce que l'unité B est ordinairement *sous-entendue* dans $A = Bn$; ce qui donne $A = n$. Et comme l'unité B est ordinairement bien connue, il est clair que si le rapport n est déterminé avec une suffisante approximation, la *grandeur* ou la *valeur* A sera bien connue également.

La relation $A = Bn$ est fondamentale : si A est une règle de cuivre, le seul aspect ne suffit pas pour m'en faire connaître la *longueur* et m'en donner l'idée complète ; mais si je mesure cette longueur avec celle du *mètre*, aussi une règle du même cuivre, et que je trouve exactement $A = B \times 4{,}2$; comme j'ai acquis, par l'usage, le sentiment de l'unité B, je connaîtrai complètement la longueur A, dont je n'aurais eu qu'une idée vague, sans le *mesurage* qui m'a donné le nombre décimal 4,2. Si donc la règle A n'est pas sous les yeux, j'en ferai connaître exactement la longueur en disant qu'elle est de 4 mètres 2 décimètres.

Toutefois, remarquons-le, pour qu'un nombre *représente* partout et toujours la grandeur ou la valeur d'une quantité, il faut que l'*unité*, terme de comparaison, demeure *invariable*. Car si les deux règles ci-dessus, par l'effet de la dilatation du métal, augmentaient chacune de la millième partie de sa longueur ; nous ne pourrions nous apercevoir de ces changements, tant que nous nous bornerions à comparer A à B, puisque nous trouverions toujours $A = B \times 4{,}2$, comme avant. Mais si la règle B n'a pas changé ; non-seulement le mesurage de A par B nous indiquera un changement dans la longueur A, mais il nous le fera connaître exactement ; car nous trouverons alors $A=B\times4,2042$, du moins si nos instruments sont assez parfaits pour nous donner ce degré d'approximation.

Ceci prouve la nécessité de *vérifier* les différentes *unités* matérielles, pour les ramener à des grandeurs constantes, et prouve que nous ne connaissons réellement que des rapports, fournis par la comparaison : encore faut-il que ces rapports soient bien déterminés et clairement exprimés, pour que nous connaissions les choses, aussi complètement qu'il nous est donné de le faire.

Le rapport n de A à B, indiqué par $A:B=n$, peut se calculer en cherchant la *plus grande mesure commune* (p·g·m·c) entre A et B : si l'opération peut s'exécuter *directement*, ce qui n'est que rarement possible, il en résulte une *fraction continue*, limitée ou non, dont le rapport cherché est la valeur unique. Mais, pour plus de simplicité, on évite presque toujours la fraction continue, par la subdivision de l'*unité* en parties égales, assez petites, pour que le *mesurage direct* donne un nombre n suffisamment approché : c'est alors l'une de ces parties qui est la p. g. m. c. entre A et l'unité B.

Le *mesurage direct* des longueurs et le *calcul* des valeurs se présentent dans une foule de circonstances, qu'il est utile d'indiquer en géométrie. Par exemple, si les portes de quatre maisons sont les sommets d'un quadrilatère convexe, dans lequel on veut faire creuser un puits et le joindre aux quatre portes par quatre chemins pavés, coûtant chacun 3 fr. le mètre de longueur ; il faudra que le centre de l'ouverture du puits soit à l'intersection des diagonales du quadrilatère, pour que la somme des quatre chemins et par conséquent le prix total de leur construction soit un minimum. Ainsi il faudra *mesurer* les longueurs des quatre chemins, non-seulement pour en *calculer* le prix total de construction, mais aussi pour savoir ce que chacun des propriétaires devra fournir sur ce prix, sachant qu'il paîra dans le rapport *inverse* de la longueur du chemin qui aboutit à sa porte.

II.

FRACTION CONTINUE. La *règle* et le *compas* sont nécessaires à la construction des *figures planes* et par conséquent à la résolution des problèmes *graphiques*. S'il fallait faire usage du compas, pour trouver *directement* le *rapport* de deux droites a et b, tracées sur le papier ; comme l'existence du rapport $a:b$ entraîne l'existence d'une *mesure commune* entre a et b, et réciproquement, il faudrait d'abord chercher la p. g. m. c. des deux droites proposées. Or, le premier moyen qui s'offre à cet effet, est de porter, avec le compas, b sur a autant de fois successives qu'il est possible, c'est-à-dire qu'il faut diviser a par b, puis b par le premier *reste* c, c par le second reste d, et ainsi jusqu'à ce qu'on ait un quotient exact, ou du moins laissant un reste que le compas ne puisse plus saisir ; auquel cas il faudra le négliger et regarder le reste précédent, c'est-à-dire celui qui a fourni le dernier quotient, comme étant la *plus grande mesure commune* de a et b.

Supposons donc que cette recherche donne la suite de quotients *incomplets* 10, 4, 2, 5 et 7; on aura donc $e=7f$, $d=5e+f=36f$, $c=2d+e=79f$, $b=4c+d=352f$, $a=10b+c=3599f$ et par suite $a:b=3599:352$. On obtient sur-le-champ les deux termes de ce rapport en formant la troisième ligne du *tableau*, *où chaque nombre se trouve en multipliant celui qui le suit par le quotient au-dessus et en ajoutant au produit le second nombre à droite, dans cette troisième ligne.*

a	b	c	d	e	f
	10	4	2	5	7
3599	352	79	36	7	1

On a bien ainsi le rapport R de a à b ; mais on ne connaît pas le degré d'approximation. Or, en observant que le quotient ne change pas de valeur lorsqu'on divise ses deux termes par le dividende, on trouve cette suite d'*égalités :*

$$R=a:b=10+\frac{1}{b:c}\ ,\ b:c=4+\frac{1}{c:d}\ ,\ c:d=2+\frac{1}{d:e}\ ,$$

$$d:e=5+\frac{1}{e:f}\ ,\ e:f=7+\frac{1}{f:g}\ ,\ \text{etc.}$$

Par ces égalités, les substitutions successives donnent

$$R=10+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{7+\text{etc.}}}}}$$

Cette expression de R s'appelle, comme on sait, *fraction continue*, dont les *termes* sont les quotients incomplets 10, 4, 2, 5, 7, etc. Comme ces quotients déterminent seuls la valeur du rapport R, ils doivent seuls figurer dans la fraction continue ; laquelle prend la forme beaucoup plus commode en écrivant simplement :

$$R = 10\,,4\,,2\,,5\,,7\,, \text{ etc.}$$

Sur quoi il faut observer que $10,\ 4 = 10 + \frac{1}{4}$; $4\,,2 = 4 + \frac{1}{2}$; $2{,}5 = 2 + \frac{1}{5}$; etc. De plus, suivant qu'on arrête la fraction continue au premier terme 10, au second 4, au troisième 2, etc., on regarde b, ou c, ou d, ou etc., comme étant la p. g. m. c. entre a et b ; il en résulte donc pour R des fractions, nécessairement *irréductibles*, appelées *réduites* ou *convergentes*.

La première réduite est évidemment $\frac{10}{1}$; la seconde est $10{,}4 = 10\frac{1}{4} = \frac{41}{4}$; la troisième se déduit de la seconde 10,4 en y remplaçant 4 par 4,2 ou par $4\frac{1}{2}$; elle est donc $(10 \cdot 4\frac{1}{2} + 1)$ sur $4\frac{1}{2} = (10 \cdot 4 + \frac{10}{2} + 1)$ sur $(4 + \frac{1}{2}) = (41 \cdot 2 + 10)$ sur $(4 \cdot 2 + 1) = 92$ sur 9. Cette troisième réduite $\frac{92}{9}$ se trouve donc *en multipliant, par le quotient* 2 *auquel elle répond, les deux termes de la réduite* $\frac{41}{4}$ *immédiatement précédente, et en ajoutant aux deux produits* 82 *et* 8, *les deux termes respectifs* 10 *et* 1 *de la réduite qui précède de deux rangs.*

Telle est la *loi* très-simple d'après laquelle on trouve, pour R, la suite de réduites :

$$\frac{10}{1}\,,\ \frac{41}{4}\,,\ \frac{92}{9}\,,\ \frac{501}{49}\,,\ \frac{3599}{352}\,, \text{ etc.}$$

Cette loi de formation des réduites successives, est une conséquence de l'*analogie directe ;* elle se démontre d'ailleurs en faisant voir, qu'étant vérifiée pour trois réduites consécutives, elle est vraie pour la réduite suivante.

Observons maintenant qu'en vertu des égalités établies plus haut, le rapport R est plus grand que $\frac{10}{1}$, plus petit $\frac{41}{4}$, plus grand que $\frac{92}{9}$, plus petit que $\frac{501}{49}$, et ainsi alternativement. Donc R *est toujours compris entre deux réduites consécutives et diffère moins de l'une d'elles que celle-ci ne diffère de l'autre.*

Soustrayant chaque réduite de celle qui la suit immédiatement, la loi de formation de chacune conduit à démontrer, 1° que *les numérateurs des différences sont alternativement* 1 *et* —1 ; 2° qu'*abstraction faite du signe* —, *les différences vont en diminuant.* C'est ce qu'on vérifie par les réduites ci-dessus ; car on trouve, pour les différences successives :

$$\frac{1}{4}\,,\ \frac{-1}{4 \cdot 9}\,,\ \frac{1}{9 \cdot 49}\,,\ \frac{-1}{49 \cdot 352}\,, \text{ etc.}$$

Le rapport R étant plus grand que toute réduite de rang impair et plus petit que toute réduite de rang pair, est toujours compris entre deux réduites consécutives ; et puisque les différences vont en diminuant, on voit que les réduites approchent de plus en plus du rapport R cherché ; et c'est de là qu'elles tirent leur nom de *convergentes*. On voit de plus qu'en prenant une réduite, pour la valeur de R, *l'erreur commise est moindre que l'unité divisée par le produit des dénominateurs de la réduite employée et de la suivante ; et, à plus forte raison, moindre que l'unité divisée par le carré du dénominateur de cette réduite, prise pour* R.

Cette seconde *limite* de l'erreur commise est trop grande ; mais on la préfère à la première, si le degré d'approximation qu'elle indique est suffisant ; parce qu'alors on est dispensé de calculer la réduite suivante, dont la détermination pourrait exiger des calculs fort compliqués, dans certaines applications des fractions continues. Ici donc $R=3599:352=10,22443$; et l'erreur commise est moindre que 1 sur $(352)^2$ ou que 0,00001.

Un tel degré d'approximation suppose que les quotients incomplets soient exactement déterminés ; ce qui est rarement possible, malgré le soin d'opérer avec exactitude : aussi est-il bon de vérifier en recommençant le procédé sur les droites $2a$ et $2b$.

Voici un procédé beaucoup plus simple, pour calculer le rapport R de a à b : sur une droite indéfinie on porte la longueur a un certain nombre de fois successives ; puis sur la longueur résultante c et à partir d'une extrémité, on porte la longueur b, jusqu'à ce que la pointe du compas tombe sur un point de division de c, ou du moins en soit si approchée que l'on puisse regarder la différence comme nulle : si c'est le m ième point de division et qu'on ait dû porter n fois b, il est clair qu'on aura $am=bn$; d'où $a:b=n:m$.

On a donc ainsi le rapport demandé de a à b, d'autant plus approché qu'on a opéré avec plus de précision et que la pointe du compas approche plus de coïncider avec un point de division de c. Mais dans ce cas même, il est encore plus sûr et plus expéditif de mesurer a et b avec un bon *vernier* et de prendre le rapport des deux nombres résultants.

Evaluation numérique d'un arc. Observons toutefois que s'il fallait évaluer numériquement en *degrés* de la circonférence, un arc tracé A, l'emploi du vernier ou nonius ne serait point préférable au procédé que voici, et qui nous a été suggéré par la lecture des Récréations mathématiques d'Ozanam :

D'abord si l'on n'a pas le *rayon* de A, on en détermine le *centre* et l'on trace la circonférence C, dont A fait partie. Ensuite on divise

C en six parties égales à 60° ; chose facile en portant le rayon 6 fois sur C, ce qui ramène au point d'où l'on était parti, comme on sait. Prenant une ouverture de compas égale à la corde de l'arc proposé A, puis portant ainsi cet arc sur C, autant de fois successives qu'il est possible, en partant du premier point de division et en faisant, s'il est nécessaire, un tour, 2, 3, 4, ..., tours, jusqu'à ce que la pointe du compas tombe sur une division de C (ce qui arrive toujours, si A et C ont une mesure commune *finie* et *assignable*), ou du moins jusqu'à ce que la pointe du compas puisse être regardée comme coïncidant avec un des six points de division de C. Examinant alors quel est le *rang* de ce point sur C, le second, par exemple, donnant $\frac{1}{3}$C ; comptant le nombre de fois qu'il aura fallu porter l'arc A, avant de s'arrêter, 18 fois je suppose ; comptant aussi le nombre de tours, 3 par exemple ; il est clair qu'on aura

$$18A = 3C + \tfrac{1}{3}C = \tfrac{10}{3}C = 1200^\circ \text{ et } A = 44^\circ 26' 40''.$$

Pour vérifier ce résultat, il suffit de recommencer l'opération, en tournant en sens contraire, et de prendre la demi-somme des deux nombres, si le second diffère du premier.

Tel est le procédé le plus simple et le plus exact, pour évaluer en *degrés* l'arc et par conséquent l'angle au centre. Cette opération se présente fréquemment, comme on sait, pour *mesurer* le secteur circulaire ou pour *rectifier* l'arc, dont le rayon est donné numériquement, ainsi que nous en avons donné plusieurs applications en géométrie (3ᵉ édit.). On peut voir d'ailleurs (Journal de Mathématique, février 1845) l'usage remarquable que M. Poinsot fait du procédé ci-dessus, dans la théorie des nombres.

PROBLÈME I. Deux chaudronniers ayant versé l'un 40 f et l'autre 60 f, pour l'achat d'une feuille rectangulaire de cuivre, dont l'épaisseur est partout la même, comment doivent-ils couper la feuille F en deux rectangles, dont l'un R vaille 40 f et soit les 2 cinquièmes de F, qui coûte 100 f?

Pour que la division demandée de F soit la plus facile et perde le moins possible de cuivre, il faut qu'elle se fasse dans le sens de la hauteur h, plus petite que la base b, suivant une droite divisant b en deux parties $2p$ et $3p$; d'où $b = 5p$. Prenant donc un *fil* flexible, tendu sur b et de longueur b, on peut, après quelques essais, le *plier* en 5 parties égales à p ; portant alors $2p$ sur les deux bases b, on aura les extrémités de la droite de division cherchée. Pour la *vérification*, l'épaisseur étant partout la même, il faudra que le *poids* de R soit les 2 cinquièmes du *poids* de F.

Problème II. On a payé 60f pour l'achat de trois feuilles rectangulaires d'un même acajou, ayant toutes la même largeur ; quel est le prix de chacune ?

Les prix A, B, C dépendent des longueurs et leur sont *proportionnels ;* il faut donc calculer les rapports des deux premières longueurs a et b à la troisième c. Or, supposons qu'en se servant des fractions continues, on trouve $a:c=1,1,2=\frac{5}{3}$ et $b:c=1\ ,3\ ,3,\ 3$, etc. Cette dernière étant illimitée, faute de pouvoir continuer avec le compas; les premiers quotients incomplets conduisent à regarder le rapport $b:c$ comme exprimé par la fraction continue dont 3 est la *période;* et l'on sait qu'alors le rapport x de b à c est donné par l'équation $x^2+x=3$. Mais comme ici, il suffit d'avoir chaque rapport à moins d'un millième près, on prendra la quatrième réduite $\frac{43}{33}$ pour $b:c$. D'ailleurs $A:C=a:c=\frac{5}{3}$ et $B:C=b:c=\frac{43}{33}$; d'où
$(\frac{5}{3}+\frac{43}{33}+1)C=60$; $C=15$ fr. 12, $B=19$ fr. 70 et $A=25$ fr. 19.

Si les largeurs étaient inégales, aussi bien que les longueurs, il faudrait calculer les rapports de *grandeurs* en comparant les deux premiers rectangles au troisième ; mais cette comparaison ne peut s'effectuer qu'en remplaçant le rapport de deux étendues superficielles, par un rapport égal, composé du produit de deux rapports entre droites, lesquels sont plus faciles à déterminer exactement ; et cela conduit au mesurage *indirect.*

III.

Mesurage indirect. Le *mesurage direct* des quantités continues n'est guère praticable que pour les *longueurs ;* et encore faut-il qu'elles soient *visibles* et entièrement *accessibles :* dans le cas contraire, le mesurage ne peut être qu'*indirect,* aussi bien que pour les *aires* et les *volumes.* Il faut alors remplacer le rapport cherché par un autre égal, *simple* ou *composé*, mais plus facile à déterminer exactement.

Or, si l'on fait attention à l'opération *matérielle* que l'ont doit exécuter pour mesurer directement certaines quantités continues, et si l'on observe qu'alors les différentes espèces d'unités sont liées invariablement à l'unité linéaire, on sera conduit à la *règle* du mesurage indirect, renfermée dans la proposition que voici :

Soient A, B, C, D *quatre quantités continues, dont les deux premières* A *et* B, *de même nature, soient tellement liées aux deux autres* C *et* D, *aussi de même nature, qu'en mesurant* C *avec* D, *on mesure en même temps* A *avec* B, *et réciproquement ; je dis que les deux rapports* A : B *et* C : D *sont égaux entre eux.*

1° Mesurer C avec D, c'est exprimer C par D, de telle sorte qu'on ait $C = Dn$, n étant un rapport exprimable ou inexprimable en chiffres. Par hypothèse, en mesurant C avec D, on mesure en même temps A avec B ; ces deux opérations simultanées fournissent donc nécessairement le même nombre n et l'on a aussi $A = Bn$. En d'autres termes : dire qu'en mesurant C avec D, on mesure en même temps A avec B, c'est dire que A est à l'égard de B ce que C est à l'égard de D, ou que A *est à* B *comme* C *est à* D ; c'est dire que A *se trouve avec* B *absolument comme* C *se trouve avec* D, de telle sorte que A et B sont parfaitement *analogues* avec C et D. Si donc $C = Dn$, on aura aussi nécessairement $A = Bn$; d'où $A : B = C : D = n$.

Puisque le rapport indique toujours comment l'antécédent s'obtient avec le conséquent seul, on voit que pour établir les *proportions* en géométrie, il suffit de s'assurer que les antécédents sont tellement *analogues* à leurs conséquents, que chacun doit se *mesurer*, *s'obtenir* ou *s'exprimer*, avec son conséquent, d'après une *règle* constante ou la même pour tous les deux, quelle que soit d'ailleurs cette règle commune. Ainsi, par exemple, si A et B sont deux *angles* au centre d'un même *cercle*, C et D les *arcs* compris par leurs côtés ; on voit immédiatement que mesurer C avec D, c'est mesurer en même temps A avec B, et qu'ainsi A se trouve avec B absolument comme C avec D : donc A : B :: C : D.

Telle est la méthode *analogique* des proportions, en géométrie, la plus simple et la plus claire, quand l'*analogie directe* est évidente, c'est-à-dire quand les deux grandeurs à mesurer sont chacune comprise, avec son unité, dans la même définition ; comme un angle quelconque et celui qui sert d'unité.

2° Si l'on veut démontrer d'après les idées de M. Ampère, on observera que mesurer C avec D, c'est chercher la p. g. m. c. entre C et D, pour *calculer* ensuite le rapport de C à D ; on dira donc : Par hypothèse, en mesurant C avec D, on mesure en même temps A avec B ; c'est-à-dire qu'en cherchant la p. g. m. c. entre C et D, on cherche en même temps la p. g. m. c. entre A et B. Ces deux recherches simultanées doivent donc fournir les mêmes quotients successifs et par conséquent la même fraction continue, limitée ou illimitée (mais souvent limitée, faute de pouvoir continuer l'opération, même avec les instruments les plus précis, pour le mesurage). Et comme cette fraction continue n'a jamais qu'une seule valeur n, exprimable ou inexprimable en chiffres, on voit qu'on a simultanément $A:B=n$ et $C:D=n$; d'où encore $A:B=C:D$.

3° Enfin, comme les deux quantités continues C et D, de même nature, ont toujours un rapport, exprimable ou inexprimable en chiffres, elles ont aussi toujours nécessairement une mesure commune x, *assignable* ou *inassignable;* de sorte qu'on a $C=mx$ et $D=px$, m et p étant deux nombres entiers, connus ou inconnus; d'où $C:D=mx:px=m:p$. Ici donc mesurer C avec D, c'est diviser D en p parties égales à x et trouver le nombre m de ces parties contenues dans C. Mais en mesurant C avec D, on mesure en même temps A avec B; on divise donc aussi B en p parties égales à y et l'on trouve le nombre m de ces parties contenues dans A. On a donc aussi $A=my$ et $B=py$; d'où $A:B=my:py=m:p$ Les parties désignées par x sont *égales* nécessairement, puisque x est commune mesure ; mais les parties représentées par y pourraient n'être qu'*équivalentes* entre elles : dans tous les cas, on a $A:B=C:D$.

On voit que, *C et D étant divisées en* m *et* p *parties égales à* x, *si A et B sont aussi divisées en* m *et* p *parties égales ou équivalentes à* y, *on aura* $A:B=C:D$.

Ainsi la règle du mesurage indirect fournit, non-seulement la méthode *analogique* des proportions, mais aussi la méthode des *parties égales*, où ces parties doivent parfois être supposées *infiniment petites*, pour bien voir la *génération* des rapports égaux.

IV.

Applications diverses. Voici plusieurs applications (déjà considérées dans notre traité de géométrie) bien propres à montrer l'importance de la règle du mesurage indirect, que nous venons de démontrer :

1° La circonférence C se *décrit*, se *mesure*, ou s'*obtient* avec son rayon R, absolument comme la circonférence C' se *décrit*, se *mesure*, ou se *trouve* avec son rayon R'. Donc $C:R=C':R'$ ou $C:2R=C':2R'=\pi=3,1415926$ etc. Ainsi $C=2\pi R$.

2° Soient ABC et A'B'C' deux triangles, dans lesquels on suppose l'angle $A=A'$ et l'angle $B=B'$: les deux angles A et B, qu'il faut tracer aux extrémités du côté AB, pour avoir AC ou BC, il faut aussi les tracer aux extrémités du côté A'C', pour avoir A'C' ou B'C'. Il est donc évident que AC ou BC se trouve avec AB seul, absolument comme A'C' ou B'C' se trouve avec A'B' seul, et réciproquement ; donc

$$AC:A'C'=AB:A'B'=BC:B'C'.$$

Les deux premiers rapports égaux exigent évidemment que le troisième angle C soit égal au troisième C'. On a donc ainsi, de la manière la plus directe et la plus simple, deux théorèmes fondamentaux de la géométrie ; d'où l'on déduit, avec facilité, les diverses propriétés des *parallèles*.

3° Soient P et P' deux parallélogrammes, ayant un angle égal à A, compris par les côtés a et b de P, et par les côtés a' et b' de P'. Soit Q le parallélogramme *auxiliaire*, ayant l'angle A compris par les côtés a et b' : puisque Q et P' peuvent avoir l'angle A et le côté b' communs, il est clair qu'en faisant glisser alors a' sur a, pour mesurer a avec a', on fait en même temps glisser P' sur Q, pour mesurer Q avec P' ; car les deux bases a' de P' sont toujours sur les deux bases a de Q : donc $Q:P'=a:a'$ et $Q=P'(a:a')$. On verra de même que $P=Q(b:b')=P'(a:a')(b:b')$; donc

$$P:P'=(a:a')(b:b').$$

Voilà donc le rapport cherché P : P' exprimé par le rapport *composé* du produit de deux rapports, bien faciles à déterminer, puisque chacun est entre deux droites connues.

4° *Deux prismes quelconques* P *et* P' *sont égaux ou équivalents entre eux, lorsque les arêtes latérales sont égales à* a, *les bases égales à* b, *et un trièdre* T *du premier égal ou symétrique au trièdre* T' *du second.* Dans le premier cas, les deux prismes P et P' coïncident en même temps que les trièdres égaux T et T'. Dans le second cas, menant par les extrémités de l'arête a, dans P, et de son égale a', dans P', des plans perpendiculaires à ces arêtes ; il est clair d'abord que les *sections* résultantes sont égales à C, dans P, et à C' dans P'. Il est facile de voir ensuite, par des triangles égaux, que C=C' ; les plans perpendiculaires déterminent donc deux prismes *droits* R et R', égaux entre eux, comme ayant bases égales C et C', et hauteurs égales a et a'. D'ailleurs, il est évident que R se trouve avec P absolument comme R' avec P' ; donc $R:P=R':P'$. Or, $R=R'$; donc enfin P vaut P'.

5° Soient P et P' deux *prismes* quelconques *obliques* ou *droits*, dont les arêtes a et a' sur la même droite et les bases b et b' sur le même plan. Soit Q un prisme *auxiliaire*, de même base b' que P' et de même arête a que P ; de sorte que les deux bases b' de Q sont sur les plans des deux bases b de P. Il est évident, d'après cela, que mesurer b avec b' c'est mesurer en même temps P avec Q : en d'autres termes, diviser b et b' en m et p parties *égales* à leur mesure commune x, c'est diviser en même temps P et Q en m et p parties ou *égales* ou *équivalentes* à y (4°) : donc $P:Q=b:b'$ et $P=Q(b:b')$. On verra de même que $Q=P'(a:a')$; donc

$$P=P'(b:b')(a:a').$$

6° Supposons que P soit un prisme *droit*, de base quelconque b et de hauteur a : comme l'*unité* de volume est le *cube* v fait sur l'*unité linéaire* u, dont la base s est l'*unité superficielle*, il est clair, en remplaçant P', b' et a' par v, s et u, qu'on aura

$$P=v(b:s)(a:u).$$

La valeur numérique de tout prisme droit est donc le produit des mesures de sa base et de sa hauteur ; de sorte qu'en *sous-entendant* les unités v, s et u, comme on le fait d'ordinaire, il vient l'expression plus simple : $P=ba$.

7° Le prisme *oblique* P, de base b quelconque et de hauteur h, menée du sommet extrémité de l'arête latérale a, est équivalent au prisme droit R, de hauteur a et de bases égales à C, sections de P, perpendiculaires sur a, par ses extrémités (4°) ; d'où $P=R=aC$. Le plan de a et h coupe b et C suivant les droites inscrites d et d' ; les deux triangles équiangles résultants donnent par conséquent $d:d'=a:h$. D'ailleurs, il est évident que C se trouve avec b absolument comme d' avec d ; donc $b:C=d:d'=a:h$; d'où, en supposant b et C divisés par l'unité s, a et h divisés par l'unité u, il vient $aC=bh$: donc enfin, $P=bh=v(b:s)(h:u)$.

8° Soit T un tétraèdre, dont b est la base et h la hauteur ; soit R le prisme triangulaire, construit sur trois arêtes contiguës de T, en menant, par les extrémités de deux d'entre elles, deux droites égales et parallèles à la troisième. Retranchant T de R, il reste la pyramide quadrangulaire Q, composée de deux tétraèdres T' et T''. Or, Q se trouve avec T' absolument comme avec T'', en menant chaque fois deux parallèles et une droite ; donc $Q=T'\times m=T''\times m$, et par suite T'' vaut T'. De plus, T' a pour base, la base supérieure de R, et une arête latérale commune avec ce prisme ; il est donc évident que R se trouve avec T' absolument comme avec T, et que par conséquent on a $R=T'\times n=T\times n$; c'est-à-dire que T vaut T' et par conséquent T''. Donc $3T=R=bh$ et $T=\frac{1}{3}bh=\frac{1}{3}v(b:s)(h:u)$.

De là, si P est une pyramide, de hauteur h et de base quelconque b, on aura $P=\frac{1}{3}bh$.

Procédé le plus simple. Voici le procédé le plus simple pour parvenir aux expressions numériques des prismes et des pyramides.

Soit d'abord P un prisme droit quelconque, à mesurer ; soit b sa base et h sa hauteur. Soit v le cube unité de volume, ayant pour hauteur l'unité linéaire u et pour base l'unité superficielle s, carré fait sur u. Soit enfin Q le prisme auxiliaire, de même base b que P et de même hauteur u que v.

Cela posé, puisque Q et v ont la même hauteur u, il est clair que les deux bases s de v glissent en même temps sur les deux bases b de Q ; donc mesurer b par s, c'est mesurer en même temps Q par v : en d'autres termes, diviser b et s en m et n parties égales à leur mesure commune x, assignable ou non, c'est diviser en même temps Q et v en m et n prismes droits, tous égaux à y, comme ayant bases égales à x et hauteurs égales à u. On a donc à la fois $Q=my$ et $v=ny$, $b=mx$ et $s=nx$; d'où $Q:v=my:ny=m:n$ et $b:s=mx:nx=m:n$. Par conséquent, $Q:v=b:s$ et $Q=v(b:s)$. On verra de même que $P=Q(h:u)=v(b:s)(h:u)$. Si donc on *sous-entend* les unités v, s et u, il vient simplement

$$P=bh.$$

En vertu de la définition générale, le *prisme* ou le *cylindre* quelconque *oblique* R se *construit* et se *mesure* avec sa base B et sa hauteur H (données de grandeur et de position fixes), absolument comme le prisme *droit* P se *construit* et se *mesure* avec sa base b et sa hauteur h. Donc puisque $P=v(b:s)(h:u)$, on a aussi nécessairement $R=v(B:s)(H:u)$ ou simplement

$$R=BH.$$

De là résultent plusieurs corollaires, faciles à énoncer ; et quant au mesurage des pyramides, on observe que le *centre* de tout cube C est le sommet commun à 6 pyramides régulières égales à P', comme ayant chacune hauteur égale à la moitié du côté $2h'$ du cube et chacune base égale au carré b', base de C. Or, $C=v(b':s)(2h':u)$; donc $P'=\frac{1}{6}v(b':s)(2h':u)$; d'où $P'=\frac{1}{3}b'h'$.

En vertu de la définition générale, la *pyramide* ou le *cône* quelconque P se construit et se mesure avec sa base b et sa hauteur h, absolument comme la pyramide régulière P' se construit et se mesure avec sa base b' et sa hauteur h' ; or, on vient de démontrer que $P'=\frac{1}{3}b'h'$; donc aussi $P=\frac{1}{3}bh$ ou bien $P=\frac{1}{3}v(b:s)(h:u)$.

Ce théorème reçoit différents énoncés, suivant qu'il s'agit du *tétraèdre* ou du *cône circulaire :* on en déduit, avec facilité, comme on sait, les expressions numériques des *troncs*, à bases parallèles, soit de toute pyramide soit de tout cône. Il en résulte ensuite les expressions du secteur sphérique, de la sphère et d'autres volumes de *révolution*.

Partant des aires latérales des prismes droits et des pyramides régulières, on étend les expressions à celles des surfaces latérales des *cylindres* et des *cônes droits*, aussi bien que de leurs *troncs*; et cela en vertu des définitions générales. On passe ensuite aux expressions des surfaces de *révolution*, comme de toute *zône sphérique*, à l'aide du principe d'*analogie directe*, que nous allons établir.

V.

Analogie directe. La règle du mesurage indirect n'est au fond que l'application de l'analogie, en vertu de laquelle toutes les grandeurs continues, comprises dans la même définition générale et complète, ayant le même mode descriptif, d'après des éléments générateurs analogues deux à deux, ont aussi nécessairement le même mode de génération numérique; c'est-à-dire qu'elles sont exprimées numériquement par la même formule générale, en fonction explicite de valeurs numériques de leurs éléments générateurs analogues; car il est évident que ceux-ci ont toujours dans la description, une certaine valeur chacun, que l'on doit considérer dans la génération numérique; or, les valeurs particulières d'un élément générateur ne sauraient aucunement changer le rôle qu'il remplit, soit dans la description soit dans l'évaluation numérique de la grandeur continue. Il est donc certain que toutes les grandeurs continues, comprises dans la même définition, sont exprimées numériquement par la même formule générale, où les éléments générateurs *analogues* doivent recevoir la même dénomination, s'il est possible, telle que *base* ou *hauteur*, et être représentés par la même lettre, *b* ou *h*, afin de mieux rappeler qu'ils jouent le même rôle dans la génération numérique.

Si donc la formule est démontrée pour la plus simple des grandeurs proposées, elle le sera également pour toutes les grandeurs, comprises dans la même définition générale et complète.

Tel est le *principe d'analogie directe*, à l'aide duquel on passe avec la plus grande facilité, 1° de l'aire du *triangle isocèle* à l'aire du *secteur circulaire*, dont ce triangle fait partie; 2° de l'aire de la surface latérale, soit du prisme droit soit de la pyramide régulière, à l'aire de la surface latérale, soit du *cylindre* droit soit du *cône* droit; 3° de l'expression de la surface latérale du cône *circulaire droit* à celle du *cône tronqué* et par suite à l'aire de toute surface engendrée par la *révolution* d'une droite donnée autour d'un *axe* extérieur *immobile ;* 4° de celle-ci à l'aire de la surface décrite, autour d'un axe extérieur, par un *arc circulaire*, *concave* ou *convexe* vers cet axe ; d'où résultent les expressions numériques de toute *zône sphérique*, de la surface de toute *sphère* et de tout *fuseau*.

Comme la méthode des *parties égales*, dans le mesurage indirect, démontre très-simplement que le volume de tout cube a pour valeur numérique la troisième puissance de son côté numérique, c'est-à-dire le produit des mesures de sa base et de sa hauteur ; le principe d'analogie directe fait passer immédiatement, 1° du volume de tout cube à l'expression numérique de tout *prisme* ou *cylindre*, circulaire ou non ; 2° du volume de la *pyramide régulière*, sixième d'un cube, au volume de toute *pyramide*, de tout *cône* et de tout *tronc*, à bases parallèles, soit d'une pyramide soit d'un cône ; 3° du volume d'un *cône droit* à l'expression numérique du *secteur sphérique*, dont ce cône fait partie. Ici, comme pour le secteur circulaire, les éléments générateurs analogues, ont des dénominations différentes et ne peuvent être représentés par la même lettre.

Enfin, l'expression du secteur sphérique, ayant pour base une calotte sphérique, conduit immédiatement à l'expression du volume de la *sphère*, de tout *onglet*, de tout *secteur*, de toute *pyramide* et de tout *segment* sphérique, à une base ou à deux.

Les applications du principe d'analogie directe s'étendent beaucoup plus loin, dans le mesurage des quantités continues ; mais avant de le prouver, observons qu'il est parfois nécessaire de bien constater que la définition posée, pour un *genre* de quantités, s'étend, par analogie et *généralisation*, à un autre genre ; que, par exemple, la définition du triangle isocèle peut s'appliquer au secteur circulaire ; et la définition du cône droit circulaire, au secteur sphérique, ayant une calotte sphérique pour base. C'est parce que la définition est commune à l'unité cubique et à tout prisme, au sixième de cette unité et à toute pyramide, que le mesurage des prismes et des pyramides est si facile, à l'aide de l'analogie directe, qui est ici complètement évidente.

Anneaux. De même, si l'on regarde le cylindre circulaire droit et sa surface latérale, comme engendrés respectivement par l'aire et la circonférence de la base, dont le centre glisse sur la hauteur immobile, sans que le plan du cercle cesse de lui être perpendiculaire ; si de plus, C est la longueur donnée d'une ligne immobile, *courbe* ou *sinueuse ;* F l'aire d'une figure plane, *symétrique* par rapport à un *centre ;* celui-ci glissant sur C, de telle sorte que le plan de F soit constamment *normal* à cette ligne C fixe, aussi bien que le périmètre P de F ; on verra que le volume R et la surfac S, résultant de ce mouvement, ont respectivement les mêmes générations que le cylindre et sa surface latérale. On en conclura donc, en vertu de l'analogie directe, que

$$R = F \times C \text{ et } S = P \times C.$$

Ces deux formules, où les unités *v, s* et *u* sont *sous-entendues*, sont très-générales ; car elles s'appliquent aux divers genres d'*anneaux* et de surfaces *annulaires*, pourvu que l'aire génératrice et son périmètre ait un *centre*, soit de *symétrie* soit de *gravité :* elles s'appliquent même à différentes *colonnes torses* et à leurs surfaces ; car les aires génératrices peuvent tourner, sur elles-mêmes, autour de leurs centres, comme pour le cylindre.

Formule générale. Le principe d'analogie directe conduit immédiatement à l'expression numérique de toutes les grandeurs continues, définies par la proportion que voici : soit G une grandeur géométrique, aire ou volume ; soit b sa base, ligne ou aire, et h sa hauteur, distance de b au sommet ; soit x une section de G, faite parallèlement à b, et y la distance du sommet à x ; soit enfin m un *exposant* quelconque, entier ou fractionnaire, et supposons la grandeur G telle qu'on ait toujours

$$b : x :: h^m : y^m.$$

Puisque toutes les grandeurs G ont une propriété descriptive commune, exprimée par cette proportion, elles ont nécessairement aussi une expression numérique commune, fonction explicite des mesures des éléments générateurs b et h, ainsi que de l'exposant m (élément essentiel, puisque le mode de génération varie avec lui). Il s'agit donc de découvrir l'expression générale de G.

Or, pour le triangle, où $m=1$, on sait que $G=\frac{1}{2}bh=bh:(1+1)=bh:(1+m)$, à cause de $1=m$; pour tout prisme G, où $m=0$, on a $G=bh=bh:(1+0)=bh:(1+m)$, vu qu'ici $0=m$.

Les valeurs particulières 1 et 0 de m ne peuvent changer aucunement le rôle que cet élément remplit dans la génération numérique de G ; et puisque chaque fois on a $G=bh:(1+m)$, il s'ensuit qu'on aura toujours, quel que soit m,

$$G = \frac{1}{1+m}\, bh.$$

Cette formule, où les unités sont sous-entendues, s'applique à presque toutes les quantités continues, ayant les éléments générateurs b, h et m ; ainsi elle s'applique au *secteur circulaire*, où $m=1$; à la surface *latérale* du *cylindre* et du *cône droit*, où $m=0$ et $m=1$; au volume de toute *pyramide*, de tout *cône*, de tout *secteur sphérique*, de tout *onglet* et de toute *pyramide*, dans la *sphère*, où chaque fois $m=2$. La formule s'applique aussi aux *conoïdes droits*, du *second degré*, quant à la courbe directrice ; à tous les *segments* des *paraboles* $y=ax^m$, et notamment de la parabole $y^2=2px$, où $m=\frac{1}{2}$; etc.

Enfin, la précédente formule a ses analogues en mécanique, dans la recherche des *centres de gravité* et des *moments d'inertie*.

VI.

Théorie des parallèles. L'analogie directe suffit sans doute pour établir toutes les *proportions* de la géométrie élémentaire et pour démontrer les propriétés des *parallèles ;* mais l'analogie ne peut parfois que se pressentir ; et c'est alors que la méthode des *parties égales* devient utile pour rendre l'analogie plus évidente et plus complète, et aussi pour exprimer plus clairement la génération des rapports égaux.

Quelle que soit au reste la méthode suivie dans la théorie des *lignes proportionnelles*, dont le but, comme on sait, est de déterminer une *longueur* en fonction de trois autres, déjà calculées ou mesurées directement ; cette méthode implique toujours la *théorie des parallèles*, ou du moins en a besoin pour recevoir toute l'évidence dont elle est susceptible. Mais la théorie des parallèles, qui est fondamentale, en géométrie, laissera encore beaucoup à désirer, sous les rapports de clarté et de simplicité, tant qu'on ne voudra pas fonder cette théorie sur la nature *infinie* de l'angle ; et dans ce cas même, il faudra encore, pour obtenir le plus haut degré de clarté et d'exactitude, éviter les *zéros relatifs*, employés par Bertrand de Genève et par tous les géomètres qui ont adopté sa définition de l'angle ; la seule qui le fasse bien connaître, parce que seule elle est conforme à la nature de cette quantité géométrique.

Il y a déjà longtemps (avant 1830) que la véritable définition de l'angle nous a permis d'écarter les zéros relatifs de la théorie des parallèles et de lui donner, nous le pensons du moins, toute la rigueur et toute la simplicité qui la caractérisent éminemment ; et cependant les anciennes théories, c'est-à-dire les théories basées sur la définition incomplète de l'angle, prédominent encore dans l'enseignement, du moins à quelques rares exceptions près ; car MM. Wezel et Catalan ont fait usage de notre théorème fondamental, ou du moins d'un théorème semblable, dans les traités de géométrie, publiés par eux en 1839 et 1843. Quoi qu'il en soit, voici la série des propositions qui nous paraissent propres à établir la théorie des parallèles, sans recourir à aucun nouvel *axiome*, autre que la définition de l'angle :

L'*angle* est la portion plane *infinie*, d'ailleurs plus ou moins grande, dont deux droites *illimitées*, partant d'un même point, sont *écartées* l'une de l'autre, quant à leur *position* : ces deux droites sont les *côtés* de l'angle et le point de départ en est le *sommet*.

L'angle est donc une *figure plane* de deux *côtés*, *ouverte* et par conséquent *infinie*, dans le sens de cette ouverture.

Si un côté reste fixe et que l'autre côté, d'abord sur le premier, *décrive* l'angle en tournant autour du sommet, il est clair que l'angle sera d'autant plus *grand* qu'il sera plus *ouvert*, c'est-à-dire que le côté mobile se sera plus *éloigné* plus *écarté* du côté fixe. Ainsi, bien qu'un angle soit toujours une portion plane infinie, sa *grandeur* dépend essentiellement de la *position* d'un côté à l'égard de l'autre, c'est-à-dire de l'*écartement* ou de l'*ouverture* des deux côtés ; et c'est uniquement cette position d'un côté à l'égard de l'autre, ayant une extrémité commune, que l'on considère dans chaque angle. On voit ainsi comment un angle peut être plus *grand* ou plus *petit* qu'un autre ; comment il peut en être un *multiple* ou une *fraction*, même *infiniment petite*.

Deux angles sont dits *opposés au sommet*, lorsque les côtés de l'un sont les *prolongements* des côtés de l'autre. Outre cette *position* de deux droites qui se coupent, on distingue encore la *position perpendiculaire* et la *position parallèle* des droites sur un même plan.

Une droite est dite *perpendiculaire* à une autre lorsque, s'arrêtant à cette dernière, elle fait avec elle deux angles *adjacents* égaux entre eux ; et ces deux angles égaux sont appelés *angles droits* : chacun est évidemment la *moitié* de la *moitié* ou le *quart* du plan *infini*. Car la première droite partage le plan, complètement *illimité*, en deux parties *superposables* ; et la seconde droite divise l'une de ces deux *moitiés* aussi en deux parties *égales*.

Deux droites sont dites *parallèles* lorsque, situées dans le même plan, elles ne peuvent se rencontrer en aucun sens, quelque loin qu'on les suppose prolongées : c'est une autre *position*, très-remarquable, de ces deux droites sur le plan. Ainsi deux parallèles ne font entre elle aucun angle, bien qu'elles soient *côtés* d'une portion plane, *infinie* dans les deux sens et ayant deux *ouvertures*.

Il résulte immédiatement de ces définitions que :

1° *Lorsque deux droites se coupent, les angles opposés au sommet sont égaux.* Car en ajoutant à chacun, l'angle compris par leurs côtés, non en ligne droite, il est clair que les deux sommes sont égales chacune au demi-plan infini.

2° *Tous les angles droits sont égaux entre eux;* vu que chacun est le quart du plan infini ; et cela, quel que soit le point de ce plan où tombe le sommet de l'angle droit.

3° *Si une droite s'arrête à une autre, elle fait avec celle-ci deux angles adjacents, dont la somme est égale à deux droits.* Car le demi-plan, composé des deux angles adjacents, est aussi composé des deux angles droits.

4° Réciproquement, *si deux angles séparés valent en somme deux angles droits, et qu'on les rende adjacents, leurs côtés extérieurs sont en ligne droite;* vu qu'alors les deux angles formant le demi-plan infini, leurs côtés extérieurs tombent nécessairement sur la droite qui détermine cette moitié du plan.

5° *Si deux droites coupent une même troisième, de telle sorte qu'un angle externe soit plus grand que l'angle interne, correspondant, les côtés non communs de ces deux angles finissent toujours par se rencontrer.* Car le premier angle étant plus grand que le second, ne peut y rester contenu et en sort nécessairement ; non par le côté commun, limite commune, ni dans le sens de l'ouverture, puisque dans ce sens les deux angles sont infinis et l'un ne saurait dépasser l'autre ; mais seulement par les deux côtés non communs.

Ce théorème fondamental est ainsi clairement et complètement démontré, d'après la notion de l'angle, dont la *grandeur* dépend uniquement de la position, plus ou moins *ouverte*, des deux côtés. Pour découvrir ce théorème, l'*angle externe* A *étant plus grand que l'angle interne* B, *correspondant*, soit placé l'angle B dans l'angle A, de telle sorte qu'ils aient un côté et le sommet commun; si ensuite l'on fait glisser le côté de l'angle B, dans sa nouvelle position, sur le côté fixe prolongé de l'angle A, jusqu'à ce que l'angle B soit revenu à sa position primitive ; il résulte des notions de l'angle et de la ligne droite, que dans ce mouvement, le second côté de B ne pouvant jamais coïncider un instant avec le second côté de A, aura toujours un point sur ce dernier côté illimité, bien que leur intersection unique s'éloigne de plus en plus du sommet, d'abord commun. Par conséquent *les côtés non communs, de* A *et de* B, *se rencontreront toujours :* tel est le théorème proposé ; et c'est au fond le *postulatum* d'Euclide, où l'angle A est *droit* et l'angle B *aigu*.

Si ce postulatum, ainsi amené, n'est pas regardé comme démontré complètement, du moins est-il devenu d'une assez grande évidence, pour le ranger parmi les *axiomes* de géométrie; ainsi qu'Euclide l'a fait, probablement faute de pouvoir en donner la démonstration rigoureuse, d'après la définition incomplète de l'angle.

Le théorème ci-dessus résulte d'ailleurs de cet axiome *analogique*, savoir : *lorsque deux angles d'un triangle sont donnés, on peut toujours tracer ce triangle, ou du moins le concevoir tracé, quel que soit le côté adjacent à ces deux angles.* Ici, l'angle mobile B, ayant un côté sur la droite fixe, son second côté rencontre le second de A, au moins dans une position intermédiaire, et détermine un triangle ayant un côté, sur la droite fixe, adjacent à l'angle B et au supplément A' de l'angle A. Or, l'existence du triangle, dont A' et B sont deux angles, ne dépend aucunement de la longueur du côté adjacent; ce côté peut donc être la droite qui joint les sommets des deux angles A et B, dans leur position primitive; et alors le second côté de B rencontre le second de A au *sommet* du triangle, dont A' et B sont les deux angles adjacents à la *base* AB.

6° *Deux droites sont parallèles dès qu'elles font avec une même troisième, deux angles correspondants égaux entre eux, l'un interne et l'autre externe, ayant cette troisième droite pour côté commun.* D'abord, à cause que les angles opposés aux sommets sont égaux, il est clair que si deux angles *externe-interne* ou *correspondants* sont égaux, ils le sont tous les huit; et ensuite, si les deux premières droites pouvaient se rencontrer, un angle externe sortirait de l'angle interne correspondant et serait plus grand; ce qui est contre l'hypothèse de leur égalité.

7° Réciproquement, *si deux parallèles sont rencontrées par une même droite sécante, tous les angles aigus résultants sont égaux entre eux, aussi bien que tous les angles obtus.* Si, en effet, deux angles correspondants pouvaient être inégaux, le plus grand finirait toujours par sortir du plus petit; donc leurs côtés non communs se rencontreraient et ne seraient point parallèles; contrairement à l'hypothèse. Ainsi, tous les angles, soit correspondants, soit alternes-internes, soit alternes-externes, sont égaux entre eux.

On voit de plus que *la somme de deux angles, l'un obtus et l'autre aigu, vaut toujours deux angles droits.*

8° Les autres propositions de la théorie des parallèles dépendent des précédentes et se démontrent, avec la même facilité et avec la même exactitude rigoureuse, d'après la nature infinie de l'angle : il suffit que l'on sache bien comment un angle infini peut être plus grand qu'un autre, aussi infini, sans avoir à *mesurer* la *grandeur* de chacun ou la quantité dont ses deux côtés sont *écartés* l'un de l'autre. De sorte que les démonstrations ci-dessus sont entièrement indépendantes de tout mesurage et par conséquent de la règle des *zéros relatifs*, conséquence immédiate du *principe des variables auxiliaires*, que nous allons considérer.

Mais avant, observons que la théorie des *parallèles* et celle des triangles *équiangles*, fournissent toutes les propositions de la *géométrie numérique*, à l'aide du *mesurage :* il en résulte les propriétés, les plus saillantes et les plus utiles, des figures planes de trois ou de quatre côtés.

C'est ainsi que la parallèle à la base d'un triangle, menée du milieu d'un côté latéral, s'arrête au milieu de l'autre côté ; est égale à la demi-base ; est à égales distances des trois sommets, chaque distance étant égale à la demi-hauteur ; de sorte qu'elle est base du triangle égal au quart du proposé, que l'on peut ainsi diviser en quatre parties égales.

De même, dans tout triangle isocèle, la parallèle à la base, menée du point où un côté latéral est coupé par la bissectrice de l'angle opposé, en retranche un trapèze dont trois côtés sont égaux. De sorte que, connaissant la base 160 et la hauteur 60 du triangle, on peut calculer l'aire et le contour du trapèze.

C'est aussi d'après les théories ci-dessus que l'on démontre les propriétés, fort nombreuses, du trapèze *isocèle* et de tout trapèze : on peut calculer l'aire et le contour du trapèze isocèle, dont on connaît une base 200, la diagonale 100 et la hauteur 80.

Enfin, c'est par les longueurs des diagonales, par leur intersection et par l'angle compris, que l'on reconnaît si un *quadrilatère* proposé est un *parallélogramme*, un *rectangle*, un *losange* ou un *carré ;* et c'est par la droite, qui joint le sommet du triangle au milieu de la base, comparée à la moitié de celle-ci, que l'on sait si l'angle du sommet est *droit*, *aigu* ou *obtus*.

VII.

Principes des variables auxiliaires. Le calcul est souvent utile pour rendre l'analogie plus évidente et plus complète, dans la génération numérique des grandeurs continues, à l'aide d'éléments générateurs *auxiliaires*, qu'il faut parfois supposer *infiniment petits* (c'est-à-dire moindres que le plus petit nombre assigné, si petit qu'il soit), afin de pénétrer plus avant dans la génération cherchée. Dans tous les cas, les éléments générateurs auxiliaires sont *variables*.

Or, soient a, b, c, d quatre nombres *constants* et soient x, y deux nombres *variables* quelconques : supposons que dans une recherche numérique, on soit conduit à l'équation, *toujours exacte*, quels que soient x et y, savoir :

$$a=b+cx-dy;$$

je dis que cette équation existe, indépendamment des variables x *et* y, *et qu'on avait d'abord* a=b. En effet, l'équation étant la conséquence rigoureuse de l'hypothèse d'où l'on est parti, pour la découvrir, et où les nombres x et y sont regardés comme tout-à-fait arbitraires, quoique très-petits, si l'on veut, il s'ensuit que cette équation doit exister malgré les *variations* de x et de y. Or, les termes cx et dy varient, aussi bien que leur différence, avec x et y; tandis que les nombres a, b, c, d restent constants. Si donc les termes variables devaient être conservés dans l'équation, le second membre, où b est constant, serait nécessairement variable avec cx et dy; et comme l'équation ne cesse pas d'exister, le nombre constant a serait *toujours* égal à un nombre variable ; chose évidemment absurde. Donc les termes variables cx et dy ne sauraient se conserver dans l'équation proposée ; et par conséquent on a $a=b$, absolument comme si les nombres variables x et y étaient rigoureusement *nuls*, ou plutôt ici, comme si l'on avait toujours $cx=dy$.

L'expression numérique cherchée étant donc absolument indépendante des nombres variables x et y, ceux-ci n'ont pu y entrer que comme *auxiliaires*, pour faciliter les raisonnements et la mise en équation ; et l'on voit que *si une équation, toujours exacte, renferme des termes constants et des termes variables, ces derniers ne peuvent y être conservés et doivent en disparaître, absolument comme s'ils étaient rigoureusement nuls.*

Tel est le véritable énoncé de la proposition que nous appelons la *règle* ou le *principe des variables auxiliaires :* c'est à la fois le principe de la méthode *infinitésimale*, de la méthode *des limites* et de la méthode *des coefficients indéterminés*. On en déduit, avec facilité, à défaut du principe d'analogie directe, beaucoup plus simple, les différentes formules de mesurage, dans la géométrie élémentaire.

Par exemple, soient C et C' deux circonférences, dont R et R' sont les rayons ; soient P et P' les périmètres de deux polygones réguliers *circonscrits*, de chacun n côtés : on sait que P : P' = R : R'.

A cause de $P>C$ et de $P'>C'$, on a simultanément $P=C+x$ et $P'=C'+x'$; d'où

$$C+x:C'+x'=R:R'.$$

Cette proportion n'est pas détruite lorsque, pour avoir des *nombres abstraits*, on suppose les deux termes de chaque rapport divisés par l'unité linéaire u ; et alors on a

$$CR'+R'x=C'R+Rx' \text{ ; d'où } CR'=C'R+Rx'-R'x.$$

Plus n est grand, plus les périmètres ont de points communs avec C et C' ; plus donc ils approchent de coïncider avec ces deux circonférences et plus les différences x et x' sont petites. Celles-ci varient donc avec n, aussi bien que les termes Rx', $R'x$ et leur différence ; car R et R' sont constants, aussi bien que C et C' : donc, en vertu du principe ci-dessus, on a exactement

$$CR'=C'R \text{ et } C:C'=R:R'=2R:2R'.$$

On verrait de même que si A désigne l'aire du cercle, dont C est la circonférence et R le rayon, on aura exactement $A=\frac{1}{2}CR=\pi R^2$.

Le même principe conduit aux expressions numériques des cylindres et des cônes, d'après les expressions des prismes et des pyramides ; et ainsi pour les surfaces latérales, etc.

Dans la recherche des proportions, en géométrie, le *principe des variables auxiliaires* n'est que la méthode des *parties égales*, rendue plus complexe. Mais, en se servant de la méthode des parties égales, soit dans les proportions, soit dans le mesurage, comment se fait-il qu'on ait cru nécessaire de compliquer cette méthode et de l'*obscurcir*, on peut le dire, par la *réduction à l'absurde*, qui n'apprend rien ici ? On a voulu éviter les grandeurs *infinitésimales ;* mais y est-on parvenu ? Pourquoi d'ailleurs les éviter ? Ne se présentent-elles pas nécessairement dans la théorie des *incommensurables*, pour *définir* les rapports inexprimables en chiffres ? On peut sans doute alors ne pas faire mention de mesures communes *infiniment petites ;* mais elles restent toujours au fond des calculs et des raisonnements : on en fait usage, sans les désigner : on les déguise ; c'est-à-dire qu'on obscurcit volontairement les théories ; car il est toujours plus clair d'appeler les choses par leurs noms. Nous dirons donc que deux quantités, de même nature, sont *incommensurables* entre elles, non parce qu'elles n'ont point de mesure commune (car alors elles n'auraient point de rapport), mais parce que leur mesure commune est *inassignable* ou *infiniment petite.* De sorte que le rapport de deux quantités incommensurables est un nombre *irrationnel* ou *inexprimable* en chiffres ; on ne saurait le calculer que d'une manière approchée. C'est-là sans doute un inconvénient ; mais tous les rapports sont dans ce cas, quand il s'agit de les déterminer par le mesurage ou par l'évaluation.

Mesurage des volumes. La théorie du *mesurage des volumes*, dans la géométrie élémentaire, s'établit, le plus clairement et le plus simplement possible, à l'aide du principe d'analogie directe ; mais si l'on ne veut pas employer *explicitement* ce principe, la méthode la plus simple est certainement celle dont nous avons fait usage, du moins pour les prismes, avant 1830, et que voici un peu simplifiée :

Prolongeant une arête du parallélipipède *oblique* P et prenant, sur ce prolongement, une longueur a égale à cette arête ; menant ensuite, par les deux points, ainsi obtenus, deux plans perpendiculaires à ce prolongement, il en résulte le parallélipipède *droit* P', équivalent à P (facile à démontrer). Menant, par les extrémités d'un côté de la section, base de P', deux plans perpendiculaires, on démontre aisément que le parallélipipède *rectangle* résultant R vaut P' et par conséquent P. De sorte que *tout parallélipipède oblique équivaut au parallélipipède rectangle, de même hauteur et de base équivalente* (et par suite, de moindre surface totale, aussi bien que de moindre somme des douze arêtes). Il en résulte que *tout plan diagonal, d'un parallélipipède oblique, le divise en deux prismes triangulaires équivalents entre eux*.

D'après ces propositions, parfaitement analogues à celles qui ont lieu pour les parallélogrammes, soit P le parallélipipède rectangle, de base b et de hauteur h ; soit v le cube, unité de volume, ayant pour côté ou hauteur l'unité linéaire u et pour base le carré s, unité superficielle ; soit enfin Q le parallélipipède rectangle, de base b et de hauteur u. Puisque Q et v ont la même hauteur u, il est évident que diviser b et s en m et n parties égales à leur mesure commune x, c'est diviser en même temps Q et v en m et n prismes *droits* égaux à y, comme ayant même base x et même hauteur u : donc $Q:v=b:s$ et $Q=v(b:s)$. De même, $P=Q(h:u)$; donc on aura toujours $P=v(b:s)(h:u)$, ou simplement $P=bh$.

De là résultent, comme on sait, les expressions des volumes de tous les prismes ; et quant au mesurage des pyramides, à l'aide du calcul infinitésimal, le principe des variables auxiliaires nous conduit à modifier le procédé, ainsi qu'il suit : Soit P la pyramide quelconque, de base b et de hauteur h. Concevons cette hauteur divisée en n parties égales à x, par des plans parallèles à la base b : nous aurons $h=nx$ et ces plans diviseront P en n *tranches*, toutes de même épaisseur x, *variable* avec n. Soit T la v ième de ces tranches, à partir du sommet de P : ce sommet est donc aux distances vx et $(v-1)x$ des bases a et c de T. Or, on sait que $b:a=h^2:v^2x^2$; d'où $ah^2=bx^2v^2$. De même, $ch^2=bx^2(v-1)^2$.

La v ième tranche T est moindre que le prisme numérique ax, comme y étant contenue : elle est plus grande que le prisme numérique cx, comme le renfermant ; on a donc

$$T=ax-<x(a-c)\text{, ou } h^2T=ah^2x-<h^2x(a-c).$$

Substituant donc les valeurs de ah^2 et ch^2, il vient

$$h^2T=bx^3v^2-<bx^3[v^2-(v-1)^2].$$

Or, on vérifie aisément que, $v^2=\frac{1}{3}[v^3-(v-1)^3]+v-\frac{1}{3}$ et que $v-\frac{1}{3}<[v^2-(v-1)^2]$; et comme, en général, $-<k+<k$ peut se remplacer par $-<k$, on voit que

$$h^2T=\frac{1}{3}bx^3[v^3-(v-1)^3]-<bx^3[v^2-(v-1)^2].$$

Prenant successivement $v=1,2,3,4,\dots, n$ et ajoutant entre elles les n expressions résultantes, pour avoir P, somme de toutes les tranches T ; puis observant que $h=nx$, on trouve

$$h^2P=\frac{1}{3}bx^3n^3-<bx^3n^2\text{ ; d'où } P=\frac{1}{3}bh-<bx.$$

Cette dernière équation subsiste quelle que soit la partie variable x ; et comme les termes P et $\frac{1}{3}bh$ sont constants, il suit du principe des variables auxiliaires qu'on a exactement $P=\frac{1}{3}bh$.

Ce procédé, très-simple, serait peut-être le seul qu'il faudrait employer, en géométrie, pour parvenir à $P=\frac{1}{3}bh$, si lon voulait ne pas appliquer le principe d'analogie directe, beaucoup plus clair et plus simple, comme conséquence immédiate de la définition et comme n'exigeant aucunement le calcul algébrique. Mais les calculs ci-dessus sont fort élémentaires ; et on les simplifie encore, en observant que $h^2T=bx^3v^2-<2bx^3v$ et que, d'après l'algèbre, on a $1+2+3+4+\dots+n$ ou $Sn=\frac{1}{2}n(n+1)<n^2$ et $Sn^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{1}{3}n^3+<n^2$; etc.

Comme les définitions des prismes et des pyramides sont essentiellement différentes et n'ont, du moins en apparence, qu'une faible analogie, il fallait rendre cette analogie plus complète, afin de passer, avec facilité, du connu à l'inconnu, c'est-à-dire de la génération numérique du prisme à la génération numérique de la pyramide. Mais là était précisément l'embarras, parce qu'on ne pensait pas à comparer la pyramide, qu'il fallait mesurer, à la pyramide régulière, sixième d'un cube. Aussi a-t-on plusieurs procédés pour le mesurage des pyramides : le plus usité maintenant est basé sur la décomposition du prisme triangulaire en trois tétraèdres équivalents entre eux. Cette décomposition est naturelle et devait se présenter d'abord, puisqu'elle est analogue à la décomposition du parallélogramme en deux triangles égaux ; mais, n'appliquant pas l'analogie directe à la décomposition du prisme, on a besoin d'un autre théorème (lui-même démontré assez péniblement), pour établir l'équivalence des trois tétraèdres.

Au lieu de décomposer le prisme triangulaire, pour le mesurage des tétraèdres, Euclide et d'autres géomètres, après lui, ont décomposé le tétraèdre, lui-même, en démontrant (chose facile) que tout tétraèdre t peut se décomposer en deux prismes triangulaires équivalents à P_1 et en deux tétraèdres égaux à t_1 ; de sorte qu'on a

$$t=2p_1+2t_1.$$

Pour cet effet, il suffit de joindre, par des droites, les milieux des arêtes de t, dont b est la base et h la hauteur : on reconnait aisément que chacun des prismes p_1 a $\frac{1}{4}b$ pour base et $\frac{1}{2}h$ pour hauteur, d'où $2p_1=\frac{1}{4}bh$; tandis que le plan qui joint les milieux des arêtes des sommets de t, en retranche le tétraèdre t_1, ayant aussi $\frac{1}{4}b$ et $\frac{1}{2}h$ pour base et pour hauteur. De plus, si p désigne le prisme construit sur trois arêtes contiguës de t, dont deux appartenant à la base b, on aura $p=bh$; d'ailleurs p_1 équivaut au prisme construit sur trois arêtes contiguës de t_1, dont deux appartenant à la section $\frac{1}{4}b$, et par conséquent $p_1=\frac{1}{8}bh=\frac{1}{8}p$. On a donc

$$t=\frac{1}{4}p+2t_1.$$

Partant de cette relation, Legendre parvenait à $t=\frac{1}{3}bh$, par de longues réductions à l'absurde, qu'il a abandonnées dans la 12e édition de ses éléments de géométrie. On y parvient plus simplement, comme nous le verrons bientôt, à l'aide de la sommation des progressions géométriques ; mais il ne parait pas que l'on ait songé au procédé, très-simple, que voici :

Les deux prismes p et p_1 ont les coins homologues égaux et les faces homologues semblables et semblablement disposées, aussi bien que les deux tétraèdres t et t_1 ; donc p_1 *représente* p et t_1 *représente* t. Or, p_1 n'est que p, devenu 8 fois plus petit ; donc toutes les parties de p_1 ne sont que les parties correspondantes de p, devenues aussi chacune 8 fois plus petite ; donc $t_1=\frac{1}{8}t$, et par suite on a $t=\frac{1}{4}p+\frac{1}{4}t$; d'où $t=\frac{1}{3}p=\frac{1}{3}bh$.

Maintenant, soient t, t_1, t_2, t_3, t_4, etc., le tétraèdre proposé et ceux retranchés par les plans qui joignent les milieux des arêtes du sommet commun aux tétraèdres successifs : comme les bases deviennent de 4 en 4 fois plus petites et les hauteurs de 2 en 2 fois moindres, il est clair que les prismes, construits sur trois arêtes contiguës des tétraèdres successifs, deviennent de 8 en 8 fois plus petits, et qu'ainsi on a

$$t=\tfrac{1}{4}p+2t_1,\ t_1=\frac{1}{4\cdot 8}p+2t_2,\ t_2=\frac{1}{4\cdot 8\cdot 8}p+2t_3,$$
$$t_3=\frac{1}{4\cdot 8\cdot 8\cdot 8}p+2t_4,\ t_4=\frac{1}{4\cdot 8\cdot 8\cdot 8\cdot 8}p+2t_5,\ \text{etc.}$$

Substituant les valeurs successives, on trouve aisément

$$t=p\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\dots+\frac{1}{4^v}\right)+2t_v.$$

D'ailleurs, comme chaque tétraèdre est moindre que le prisme, ayant les trois mêmes arêtes contiguës, il est clair que $2t_v < p:4^v$. Sommant donc la progression et substituant, il vient

$$t=\tfrac{1}{3}p-p(\tfrac{1}{3}-<1):4^v.$$

Les termes divisés par 4^v varient nécessairement avec v, tandis que t et $\frac{1}{3}p$ sont constants ; donc $t=\frac{1}{3}p$.

Une décomposition et des calculs analogues fournissent l'expression du prisme triangulaire, à l'aide du parallélipipède oblique.

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE.

DIFFÉRENTES MÉTHODES DE CALCUL.

I.

Formules générales. Pour que la *formule*, exprimant la génération numérique d'une quantité, soit *générale*, il faut que la définition de cette quantité continue soit générale et complète, elle-même. Le plus souvent la définition n'est posée que pour une *espèce* de quantité ; mais l'analogie, entre cette espèce et d'autres, étend la définition à toutes les quantités du même *genre* et par suite, à toutes les quantités de la même *classe*.

Par exemple, en définissant le triangle *rectiligne*, on ne s'occupe ni de la grandeur des angles, ni de la longueur des côtés ; mais l'analogie fait voir que la définition s'applique aux triangles ayant les trois angles aigus, deux angles égaux, un angle droit ou un angle obtus, deux côtés ou les trois côtés égaux entre eux ; puis elle étend la définition aux triangles *mixtes* et *curvilignes* ; c'est-à-dire, en général, aux figures de trois *côtés*.

C'est donc à l'aide de l'analogie que l'on obtient des définitions et par conséquent des formules générales. Les meilleures définitions, en géométrie, sont basées sur la description et dues à l'expérience; et ainsi le seul aspect d'une ligne *droite*, accompagnée d'une autre ligne, suffit pour en donner l'idée complète, que l'on énonce en disant que *la ligne droite est le chemin le plus court pour aller d'un point à un autre.* On peut sans doute ne pas *définir* la ligne droite; mais alors on n'aura pas l'énoncé de la propriété qui la caractérise essentiellement. A la vérité, cette définition implique l'idée de *longueur* ou de *distance ;* mais cette idée nous est donnée par l'expérience journalière, même dès l'enfance, quand nous commençons à marcher, où déjà nous choisissons la ligne droite.

L'analogie est la base de l'*induction :* on procède par *induction*, quand on passe par les valeurs particulières pour s'élever à la formule générale; ainsi l'on passe des nombres *entiers* aux nombres *fractionnaires* et de ceux-ci aux nombres *irrationnels*, pour trouver la définition générale de la multiplication, que l'analogie étend aux *symboles* numériques. On s'élève de même à cette vérité fondamentale du calcul, savoir: le produit de facteurs quelconques, rationnels ou non et même imaginaires, ne change pas de valeur finale, quel que soit l'ordre des multiplications successives.

L'*induction*, ainsi que Laplace l'a fait remarquer, il y a longtemps, est la source de presque toutes les découvertes dans les sciences; mais il faut prendre garde de généraliser trop promptement; c'est-à-dire qu'il faut bien s'assurer que l'analogie est complète. De là vient souvent la nécessité de démontrer les vérités fournies par l'induction; à moins que l'analogie ne soit d'une telle évidence, comme celle qui existe entre la génération descriptive et la génération numérique de la grandeur continue, qu'il n'y ait aucun doute à concevoir sur l'exactitude de la vérité résultante; et dans ce cas même, la démonstration n'est pas toujours inutile. C'est ainsi, par exemple, qu'après avoir trouvé, par induction, la *loi* du produit de plusieurs facteurs binomes, ayant le premier terme commun, on démontre cette loi en faisant voir qu'elle a lieu pour un facteur binome de plus.

Enfin, comme toute régle ou toute formule *générale* est la source d'où découlent, le plus clairement possible, toutes les vérités analogues; on voit pourquoi l'on cherche toujours des formules et des règles générales. Cette recherche est bien facile en géométrie, puisque l'expression numérique de la grandeur continue résulte immédiatement de sa description et par conséquent de sa définition générale, où les éléments générateurs *analogues* sont toujours clairement indiqués, comme on l'a vu plus haut.

II.

Symboles numériques. Par le seul fait de l'emploi des lettres pour désigner des nombres *abstraits* ou plutôt des *rapports* quelconques, la formule est complètement générale, c'est-à-dire exprime la grandeur numérique pour toutes les valeurs particulières de ses éléments générateurs, représentés par les lettres proposées. Or, il arrive souvent que ces valeurs particulières conduisent à des opérations inexécutables, pour calculer le nombre inconnu x, telles que $x=-2$, $x=1:0$, le zéro étant *absolu*, $x=\sqrt{-4}$ et même $x=\frac{1}{4}$, lorsque x doit être un nombre *entier*, etc. Ces diverses expressions représentant toujours le nombre inconnu x, en sont dits les *symboles* : ce sont des signes d'*impossibilité*, sur lesquels nous avons opéré, a notre insu, en calculant la formule proposée ; de sorte que *nous les avons soumis à toutes les règles du calcul des nombres réels.* Le calcul des *symboles numériques*, c'est-à-dire des signes de la *non existence* de l'inconnue x, est donc absolument inévitable dans la recherche des formules générales et doit se démontrer expressément.

Il importe d'observer d'ailleurs que l'*impossibilité* indiquée par un *symbole* n'est souvent que *relative* et que, par une *interprétation* convenable de ce symbole, on peut *énoncer un problème possible*, *avec les mêmes nombres donnés*, sans avoir à répéter tous les raisonnements et tous les calculs qui ont fourni la formule proposée : on lui maintient ainsi la généralité complète qu'on lui avait attribuée et l'on en prouve de plus la grande utilité.

Toutes les interprétations que l'on peut faire des symboles *fractionnaires*, *négatifs*, *imaginaires*, *indéterminés*, etc., consistent à changer la *nature* ou l'*acception*, soit de l'*inconnue*, soit de certaines *données arbitraires ;* à l'exception toutefois des symboles *irrationnels*, dont l'*interprétation* n'est autre que le calcul d'une valeur approchée, avec un degré d'approximation donné.

Le calcul littéral n'est au fond qu'une suite d'interprétations de symboles numériques, et dépend essentiellement des *symboles négatifs*, que pour cette raison, nous allons considérer, avec quelques développements, propre à résoudre toutes les difficultés, si souvent opposées à la théorie de ce genre de symboles.

III.

Symboles négatifs. Un *monome* est dit *positif* ou *négatif*, suivant qu'il est précédé du signe + ou du signe —. Ainsi, 1° $+4a$ est un terme *positif* ou *additif*, dont le *signe* est +, même lorsqu'on écrit simplement $4a$; car $4a=0+4a=+4a$: voilà pourquoi $+4a$ ou $4a$ est aussi appelé *quantité positive*. 2° Le monome $-4a$, dont le *signe* est —, est appelé terme *négatif* ou terme *soustractif* : c'est simplement une soustraction indiquée, actuellement *impossible* ; ce n'est donc pas une *quantité* ; et toutes les difficultés viennent de ce qu'on a donné à $-4a$ le nom de *quantité négative*, c'est-à-dire de ce qu'on a regardé $-4a$ comme une quantité *réelle*.

Pour avoir des formules *générales*, il faut que les *règles* et les *principes* de calcul, qui les fournissent, s'appliquent quels que soient les nombres proposés. Ainsi *pour soustraire une somme, il faudra toujours soustraire chacune de ses parties*, lors même que les soustractions, ou du moins quelques-unes d'entre elles, seraient actuellement impossibles, auquel cas elles resteraient indiquées à l'aide du signe —, pour être soumises au calcul.

De là donc $4-10=4-(4+6)=4-4-6=0-6=-6$. Ce *reste* -6 est une soustraction impossible, comme la première ; mais il est plus simple que l'indication primitive et doit lui être préféré.

Le monome négatif -6 indiquerait une *impossibilité* complète, dans $x=-6$, si le *plus grand nombre* de cette soustraction indiquée n'existait pas; mais le plus souvent ce plus grand nombre existe et *n'est point l'objet du calcul actuel* : il est *sous-entendu* ; et il faut le faire reparaître, pour *interpréter* le *symbole négatif* -6 et en avoir la véritable signification.

Par exemple, dans un problème, où il n'est aucunement question de la somme a que possède actuellement un ouvrier, supposons que l'on demande *quel est le gain journalier de cet ouvrier?* Bien que a n'entre pas dans le calcul pour trouver le *gain* journalier x, ce gain n'en augmente pas moins la somme a ; celle-ci est donc nécessairement *sous-entendue*, aussi bien que $a+x$. Si donc le calcul donne $x=-6$, il est clair que $a+x$ devient $a+(-6)$; or, *ajouter une soustraction, c'est évidemment l'effectuer*. Car si j'ai 20 francs dans ma bourse et que j'en ôte 6 francs, il y restera 14 fr., et j'aurai ainsi *ajouté* à ma bourse une soustraction de 6 francs. De là donc $a+(-6)=a-6$; ainsi le prétendu *gain* x n'est en réalité qu'une *perte* ou une *dépense*, comme diminuant la somme a que possédait l'ouvrier.

C'est donc en faisant reparaître le plus grand nombre, *sous-entendu*, que l'on trouve la véritable signification du symbole négatif, tel que -6; et cette signification est tout-à-fait *opposée* à celle qu'on lui attribuait d'abord : tel est un premier exemple de l'*interprétation* des *solutions négatives*.

C'est aussi en faisant reparaître les plus grands nombres, sous-entendus, que l'on peut démontrer complètement le *calcul des symboles négatifs isolés*. Ainsi, au lieu de $a-(-c)$, on écrira $a-(b-c)$ $=a-b+c$. Observant qu'alors b n'étant pas l'objet du calcul proposé, n'y est entré que comme *auxiliaire*, pour faciliter les raisonnements; b doit donc disparaître du résultat final, en y posant $b=0$. De sorte qu'on aura toujours $a-(-c)=a+c$. On verra de même que $a\times-c=-ac$, $-a\times-c=+ac$, etc.

Pareillement, il est clair que $a-2<a$ et $a-6<a-4$. Or, si a n'est qu'un nombre *auxiliaire*, ne devant pas entrer dans les calculs proposés, il ne devra pas entrer non plus dans les *inégalités* résultantes, et il faudra y poser $a=0$; ce qui donne $-2<0$ et $-6<-4$. Ces dernières inégalités sont exactes en ce sens *relatif* que *plus on soustrait moins il reste;* donc 1° *tout symbole négatif est plus petit que zéro ;* 2° *plus le symbole négatif a d'unités plus il est petit.*

C'est dans ce sens relatif que l'on peut dire : *cet homme a moins que rien*, pour exprimer qu'il ne peut payer ses dettes. De même, si deux débiteurs insolvables doivent l'un plus que l'autre, on peut dire que *le premier est moins riche que le second ;* et cette locution, bien que singulière, n'en est pas moins très-compréhensible, ainsi que la précédente.

Observons toutefois que les deux inégalités $-2<0$ et $-6<-4$, ne sont vraies que dans le sens relatif des symboles négatifs : elles sont absurdes lorsqu'on les considère dans le sens absolu du mot *quantité;* car il n'existe pas de *grandeur* plus petite que *rien*, et plus une quantité numérique a d'unités plus sa valeur est grande. On voit que ces difficultés, opposées à la théorie des quantités négatives isolées, ne portent que sur la dénomination de *quantité*, qui ne saurait convenir à -6, par exemple; et qu'en remplaçant cette dénomination par celle, plus exacte, de *symbole*, il n'y a plus rien de contradictoire. D'ailleurs, le mot *quantité*, appliqué à -6, ne peut porter que sur le *reste* obtenu en soustrayant 6 du nombre *sous-entendu* devant -6.

IV.

Modes opposés d'existence. Une même grandeur x, pouvant *augmenter* ou *diminuer* une autre grandeur G, sous-entendue, comme n'étant pas l'objet du calcul actuel; cette première grandeur x peut aussi avoir deux modes *opposés* d'existence, savoir $G+x$ ou $G-x$, c'est-à-dire $+x$ ou $-x$, puisque G est sous entendue. Si donc on suppose (comme on le fait toujours, en posant x sans aucun signe) que x doive *augmenter* G et que le calcul donne pour x un symbole négatif; il est clair qu'ayant alors $G-x$, x doit au contraire *diminuer* G et avoir un mode d'existence *opposé* à celui qu'on lui attribuait d'abord.

C'est ainsi que -4 francs de *biens*, -4 années *à venir*, -4 mètres *à droite* d'un point, -4 degrés *au-dessus* du zéro, etc., font réellement 4 francs de *dettes*, 4 années *passées*, 4 mètres *à gauche* du point, 4 degrés *au-dessous* du zéro, etc.

Par exemple, soient v et x les distances numériques d'un point P inconnu d'une droite indéfinie aux deux points A et B, donnés sur cette droite et ayant entre eux la distance G, aussi grande qu'on voudra : suivant que P est sur le *prolongement* de AB ou *entre* A et B, c'est-à-dire suivant que P est *à droite* ou *à gauche* de B, on a nécessairement

$$v=G+x \text{ ou } v=G-x.$$

La distance x, du point inconnu P au point *fixe* B, a donc ici deux modes *opposés* d'existence, indiqués par les signes $+$ et $-$: elle est *additive* pour P *à droite* de B et *soustractive* pour P *à gauche* de B. De plus, les deux nombres v et G existent nécessairement avec x; et s'ils ne sont pas exprimés, comme n'étant pas l'objet du calcul actuel, *ils sont toujours sous-entendus*. Si donc le calcul, où P était supposé à la *droite* de B, donne $x=-4$; c'est que P est au contraire à *gauche* de B, à la distance de 4 mètres. Donc -4 mètres à *droite* font réellement 4 mètres à *gauche*. Dire qu'un voyageur est à -7 lieues d'une ville, où il doit passer, c'est dire qu'il l'a *dépassée* de 7 lieues, qu'il est à 7 lieues *au-delà*.

La considération des *symboles négatifs* n'est pas seulement utile à la *discussion* des formules, à l'*ordre* et à la *situation* des choses; mais elle est inévitable dans le calcul. Et si l'*interprétation* de ce genre de symboles offre des difficultés, c'est qu'on oublie qu'ils ne sont pas des *quantités*, mais seulement des soustractions indiquées, dont les plus grands nombres sont sous-entendus ; d'où résulte clairement que *gagner* —5 francs, par exemple, c'est réellement *dépenser* 5 francs ; tandis que *dépenser* —5 francs, c'est réellement *gagner* 5 francs.

De ce que toute grandeur peut avoir deux modes opposés d'existence, il suit que *quand l'inconnue a une valeur négative, elle doit recevoir une acception opposée pour énoncer le problème résolu par cette valeur, abstraction faite du signe* — : cela dispense de recommencer les calculs et les raisonnements effectués.

Réciproquement, lorsqu'ayant résolu un problème général, on veut en résoudre un autre *analogue*, obtenu en changeant les modes d'existence des deux quantités numériques a et b, dans le problème proposé ; *on a sur-le-champ la formule du nouveau problème en changeant simplement* a *et* b *en* —a *et* —b, *dans la formule du premier*. Cette *règle*, comme la précédente, utilise les calculs et les raisonnements effectués ; elle fait découvrir de nouveaux problèmes ou de nouvelles *relations*.

Il importe d'observer que si l'inconnue x désigne un nombre *absolu*, comme *x fois, x hommes, x francs de prix*, etc., cette inconnue n'aura qu'une seule manière d'être ; et si l'on trouve $x=-7$, par exemple, le problème est impossible, à moins que le signe négatif ne provienne du changement de signes de quelques autres nombres du problème. Or, je dis que *pour savoir quels sont ces nombres, il suffit de substituer partout* —x *à* x, *en ayant égard au calcul des symboles négatifs.*

D'abord $x=-7$ revient à $-x=7$; on représentait donc par $+x$ ce qu'il eût fallu désigner par $-x$; et de là vient l'*impossibilité* du problème. Ensuite on a réellement opéré et raisonné, sans le savoir, sur le symbole $-x$; il faut donc changer partout x en $-x$: alors, outre $-(-x)=7$, ou $x=7$, on aura les véritables équations du problème résolu par $x=7$. De sorte que *si l'on compare les nouvelles équations aux proposées, on connaîtra quels sont les nombres donnés qui doivent changer de signes, pour fournir le nouvel énoncé.*

Telle est l'*interprétation* la plus générale des symboles négatifs ; mais elle se simplifie beaucoup quand l'inconnue peut avoir deux modes opposés d'existence, vu qu'alors *il suffit de les changer l'un dans l'autre.*

De ce que *le changement de signe indique un mode opposé d'existence, et réciproquement*, il suit que, si le rectangle R, représenté par le produit bh, vient à tourner autour de sa hauteur h, pour prendre une situation opposée, aussi bien que sa base b ; celle-ci et R ou bh doivent changer à la fois de signe, pour la nouvelle position de R, et doivent devenir $-b$ et $-bh$. On a donc

$$-b \times +h = -bh.$$

Réciproquement, si l'on passe de la seconde position du rectangle, alors désigné par $-R$, à la première position, où le rectangle est $R = +R$, il suffit de changer R en $-R$; ce qui donne $-(-R)$. Et comme on doit avoir $+R$, il s'ensuit que $-(-R) = +R$.

On verra de même, en faisant tourner le rectangle $-R$ autour de sa base $-b$, que $-R$ et $+h$ doivent devenir $+R$ et $-h$; d'où il suit que

$$-b \times -h = +bh.$$

Enfin, en faisant tourner le premier rectangle R autour de sa base b, on trouve $+b \times -h = -bh$.

C'est ainsi que l'on peut démontrer complètement les *règles des signes*, dans la soustraction et dans la multiplication. Quant à l'addition, la règle des signes y est évidente, d'après la définition générale de cette opération algébrique.

V.

Différentes interprétations. Les interprétations des différents symboles : $\frac{1}{0}$, $\frac{0}{0}$ et $\sqrt{-a}$, rentrent dans l'interprétation des symboles négatifs ; car il faut toujours remplacer la soustraction, donnant le zéro absolu ou le monome négatif, par une addition ; ce qui se fait simplement en changeant le signe de l'un des facteurs du terme à soustraire. Voici différents exemples de l'interprétation des symboles :

1. Un père a 48 ans et son fils 26 ; quel est le nombre x d'années à écouler, pour que l'âge du père soit double de celui du fils ? Réponse : $x = -4$; et il y a déjà 4 ans que l'âge du père était double de celui du fils.

2. Dans 80 kilos d'eau de mer, il y en a 8 de sel ; quel poids x d'eau douce faut-il en ôter, par l'évaporation, pour que sur 30 kilos de l'eau restante, il s'en trouve $2\frac{1}{2}$ de sel ? Rép. $x = -16$, à interpréter en remplaçant *ôter* par *ajouter*.

3. Deux coupons d'un même drap coûtent respectivement 63 et 78 francs. Si le prix de l'aune augmentait d'un franc, le premier coupon coûterait 12 fr. de moins que le second ; quel est le prix x

de l'aune? Rép. $x=-5$, à interpréter en remplaçant *augmentait* par *diminuait*.

4. Quel nombre x de pommes une fruitière a-t-elle acheté, à raison de 5 pour 10 centimes? On sait que les ayant revendues ensuite, une moitié à 2 et l'autre moitié à 3 pour 5 centimes, elle a perdu 5 centimes sur le tout. Rép. $x=-60$, à interpréter en remplaçant *perdu* par *gagné*.

5. Une cuve reçoit de l'eau par un robinet et en perd par un autre. Ces deux robinets fournissent 1 litre, le premier en a et le second en b minutes. Pendant quel temps x faut-il les ouvrir, pour que la cuve contenant d'abord c litres d'eau, en renferme ensuite d litres?

La *discussion* de la formule conduit à interpréter différents genres de symboles; et si l'on y change b en $-b$, on aura la formule d'un autre problème, facile à énoncer.

6. La distance a mètres du point A au point B étant donnée, quelle doit être la *position* d'un point P sur la droite passant par ces deux points, pour que la longueur connue b soit moyenne proportionnelle entre les distances de P aux deux points A et B?

Ici, pour avoir l'équation, il faut supposer le point P, soit entre A et B soit sur les prolongements AB et BA: on prévoit déjà que P aura généralement deux positions; et si on le suppose entre A et B, la discussion de la formule résultante conduit à interpréter des symboles *négatifs* et des symboles *imaginaires*. Dans ce dernier cas, on aura opéré, sans le savoir, sur une expression *imaginaire*, et on l'aura soumise à toutes les règles du calcul des nombres *réels;* de sorte que le calcul des imaginaires est inévitable en algèbre et doit s'y démontrer expressément.

On voit de plus que l'interprétation des symboles imaginaires, comme l'interprétation des symboles négatifs, qui en fait la base, se rapporte souvent à un changement de *position*. C'est donc par l'interprétation de ces deux genres de symboles que l'algèbre peut déterminer l'*ordre* et la *situation* des choses; recherche non moins importante que la détermination des nombres eux-mêmes.

On voit enfin que, par l'interprétation des symboles, toute équation du second degré résout toujours deux problèmes analogues ou deux fois le même problème.

7. Les symboles imaginaires ne servent pas seulement à prouver l'impossibilité du problème, pour certaines valeurs particulières des éléments générateurs de la formule générale; mais ils indiquent en même temps quelle est la plus grande ou la plus petite valeur de l'un

de ces éléments *variables ;* car la quantité sous un radical de *degré pair*, variant par l'un au moins de ses éléments générateurs, ne peut devenir *négative*, de *positive* qu'elle était, qu'en passant par le *zéro absolu*, si elle est sous forme entière ; donc le radical lui-même ne peut devenir *imaginaire*, de *réel* qu'il était, qu'en passant par le *zéro absolu*, c'est-à-dire par le *maximum* de l'élément générateur variable, si celui-ci entre dans la partie *négative* seule du polynome sous le radical, ou par le *minimum*, si l'élément variable entre dans la partie *positive* seule. Mais s'il entre dans la partie positive et dans la partie négative, il faut quelqu'attention pour découvrir lequel, du maximun ou du minimum, rend *nul* le polynome sous le radical ; comme s'il fallait calculer le maximum ou le minimum, soit de a, b étant donné constant, soit de b, a restant invariable, dans l'équation finale :

$$x^2-2(a+b)x+6ab=0.$$

Ici l'interprétation du symbole imaginaire, comme celle de tout symbole, indique la modification que l'énoncé doit éprouver, *pour que le problème soit possible en conservant les mêmes nombres donnés ;* car tel est le but de l'interprétation de tout symbole ; laquelle, comme on le voit, est aussi facile qu'elle est importante pour utiliser les calculs effectués.

8. Lorsque l'inconnue devant être un *nombre entier*, on trouve, pour sa valeur, une *fraction ;* celle-ci, bien que satisfaisant à l'équation, ne saurait convenir au problème : c'est un *symbole fractionnaire*, que l'on interprète en changeant simplement *la nature concrète de l'inconnue ;* de telle sorte que celle-ci puisse être une fraction, et qu'ainsi la *condition particulière*, qui ne pouvait entrer dans l'équation, disparaisse de l'énoncé.

Par exemple, quels sont les nombres respectifs x et y de jetons que j'ai dans les deux mains ? si j'en passe a de la droite dans la gauche ou b de celle-ci dans l'autre, il y aura c fois autant de jetons dans la main recevante qu'il en restera dans la main donnante.

La discussion, suivant les valeurs particulières, conduit à interpréter différents symboles : symboles négatifs, pour $c=\frac{1}{2}$; symboles fractionnaires, pour $a=9$, $b=14$ et $c=3$ (il suffit alors de remplacer les mots *jetons* et *mains* par *francs* et *bourses*) ; enfin, pour $c=1$, symboles tels que 1 sur 0, qu'on ne saurait interpréter que comme signe d'*impossibilité*, parce que a, b, c, x et y sont ici des *nombres de fois*, des nombres *absolus*.

9. Le symbole $\frac{0}{0}$ exprime toujours, dans l'équation du premier

degré, que l'inconnue x peut y avoir telle valeur on voudra : c'est le symbole de l'*indétermination*. Par exemple, résolvant l'équation finale $a^2x+c^3=c^2x+a^3$ et posant ensuite $c=a$, on trouve $x=\frac{0}{0}$. L'inconnue x est donc absolument *indéterminée*, malgré la suppression du facteur $a-c$, rendu nul par $c=a$, dans les deux termes de x; car $a=c$ rend *indentiques* les deux membres de l'équation proposée, quel que soit x : la suppression du facteur $a-c$ fournit seulement l'une des valeurs de x, en nombre illimité, et fixe le choix parmi ces valeurs. Ici l'interprétation du symbole $\frac{0}{0}$ revient à changer simplement c en $-c$; mais alors, pour $c=a$, le problème est absolument impossible.

10. Si, après avoir résolu l'équation $ax^2-2bx+c=0$, on pose $a=0$, on trouve $x=\frac{0}{0}$. Mais il n'y a point d'indétermination, parce qu'en résolvant l'équation, on a introduit, dans les deux termes de x, un facteur *étranger*, devenant *nul* par $a=0$, facteur que l'on sait mettre en évidence : le calcul alors est analogue à celui, où *pour connaître le degré d'approximation*, dans $x=12$ sur $(1+\sqrt{3}-\sqrt{2})$, il faut rendre *rationnel* le dénominateur. Telle est d'ailleurs l'*interprétation* des symboles *irrationnels*.

11. Les symboles proviennent des *conditions particulières* du problème, qui ne peuvent entrer dans ses équations; et par exemple, c'est la condition d'avoir des *nombres entiers* et *positifs* qui fait que l'équation à deux inconnues, admettant une infinité de *systèmes de valeurs*, n'en a parfois qu'un seul, convenant au problème, et même aucun. On sait que l'*analyse indéterminée* a pour but de trouver les systèmes *convenables*, comme dans le problème suivant :

Une femme vend 2 centimes chacun des œufs contenus dans un panier : elle en a oublié le nombre et ne voudrait pas les compter de nouveau, crainte d'en casser. L'acheteur pense qu'elle pourra se rappeler assez de circonstance de la mise des œufs dans le panier pour qu'il lui soit possible d'en calculer le nombre. Il l'interroge donc; et la femme répond : je sais qu'il y en a plus de 100, mais moins de 200; que ma servante les ayant apportés par 15, n'en avait que 5 la dernière fois; et mon mari, voulant les ranger par douzaines, il lui manquait un œuf, tandis qu'en les plaçant par 7, il en restait un seul. L'acheteur ayant payé en tout 4 fr. 10, dont 1 fr. pour le panier, on demande quel était le nombre d'œufs ?

12. Observons d'ailleurs que dans l'analyse indéterminée *du second degré*, le but est généralement de trouver des nombres *rationnels*. Mais alors la méthode de calcul, basée sur l'emploi d'inconnues

auxiliaires, varie pour chaque genre de questions, et n'est point générale. Ainsi pour résoudre en *nombres entiers positifs* l'équation

$$x^2=y^2+z^2\text{, on pose } x=y+v\text{ ; etc.}$$

13. Quels sont les côtés x et y de deux cubes, dont la somme des volumes est 35 mètres cubes et dont la somme des bases est 13 mètres carrés ?

Ici on ne peut résoudre les équations du problème, savoir

$$x^2+y^2=13 \text{ et } x^3+y^3=35,$$

qu'à l'aide des *inconnues auxiliaires* u et v, telles qu'on ait

$$x+y=u \text{ et } xy=v.$$

L'équation finale en u étant

$$u^3-39u+70=0,$$

on vérifie aisément qu'elle est satisfaite par $u=2$, 5 et -7; d'où les valeurs correspondantes de v sont : $-\frac{9}{2}$, 6 et 18. Ainsi, outre le système imaginaire, qui répond à $u=-7$ et qu'on ne saurait interpréter que comme une impossibilité, on a les deux systèmes : $x=3$ et $y=2$, $x=1+\frac{1}{2}\sqrt{22}$ et $y=1-\frac{1}{2}\sqrt{22}$. Le dernier répond au problème où 35 est la différence des deux cubes.

14. Quels devraient être les côtés x et y de deux cubes, pour qu'ayant $x+y=a$ mètres, la somme $6m$ de leurs deux surfaces totales fût la plus grande ou la plus petite possible ?

15. Deux courriers ayant entre eux une distance de a lieues, vont l'un contre l'autre, sur la même route ; ils sont partis au même instant et marchent tellement, que quand leur distance est b lieues, il faudrait c heures au premier pour faire le chemin du second et d heures à celui-ci pour faire le chemin du premier ; quels sont les chemins x et y respectifs qu'ils font par heure d'après une marche uniforme ? (Ici la *discussion* présente différents symboles à interpréter et porte sur trois hypothèses, savoir : $c>d$, $c=d$ et $c<d$, répondant chacune, 1° à $a>b$, 2° à $a=b$, 3° à $a<b$; enfin, on peut changer b en $-b$).

16. Quels sont les côtés x et y, u et v, de deux rectangles semblables, dont 800 et 1200 mètres sont les périmètres ; l'aire du plus petit étant de 5 hectares ? (Interpréter les symboles imaginaires et chercher les maximums d'aires, si aucune n'est donnée).

17. On prolonge le diamètre 20 d'un cercle de la longueur 10 ; puis du point, ainsi obtenu, on mène la sécante, dont la partie dans le cercle est 16 ; quelle est l'aire du trapèze rectangle formé en menant, sur la sécante, deux perpendiculaires des extrémités du diamètre 20 ?

18. Soient A et B les centres de deux cercles, a et b leurs rayons, a étant donné plus grand que b ; soit enfin d la longueur connue AB. Démontrer, par le calcul, que les quatre tangentes communes vont couper, deux à deux, en deux points P et Q, la droite AB et son prolongement au-delà de B.

On calculera d'abord la longueur $BQ=x$; puis en changeant b en $-b$, dans la formule, on aura BP. La discussion de cette formule, où b varie seul, fournit différents symboles à interpréter.

19. Quel est le rayon x de la circonférence tangente, divisant le cercle, de rayon donné a, en moyenne et extrême raison? Peut-on construire la valeur de x et interpréter la valeur négative de x^2?

20. Calculer les trois côtés du triangle rectangle, dont on connaît le périmètre $p=112$ et la hauteur menée de l'angle droit, savoir $h=13,44$. (Les côtés sont 50, 48 et 14; ils se trouvent aisément, *par des procédés particuliers d'élimination*).

21. Démontrer, 1° que si l'on ajoute 5 au carré de tout nombre premier, plus grand que 3, la somme est divisible par 6; 2° que la somme des carrés de deux nombres entiers consécutifs moins 1 est toujours divisible par 4; 3° que la différence des cubes de deux nombres entiers consécutifs, diminuée de l'unité, est toujours divisible par 6; 4° que le produit de deux nombres entiers, augmenté du carré de leur demi-différence, est toujours divisible par leur demi-somme; 5° enfin, que si a et c sont deux nombres entiers quelconques, x a toujours une valeur entière dans l'équation *indéterminée* $(a-c)x=a^2+2ac-3c^2$.

22. Un nombre, de trois chiffres impairs croissants, augmente de 180 ou de 18, suivant qu'on y intervertit l'ordre des deux premiers ou des deux derniers chiffres; et le double du second vaut la différence des deux autres; quel est ce nombre? (On trouve 024; mais les chiffres croissants ne sont pas impairs, et d'ailleurs le nombre n'a réellement que deux chiffres : ce n'est pas le nombre demandé; et pour trouver celui-ci, il suffit de remplacer *différence* par *somme*, dans l'énoncé).

23. Quelles sont les dimensions x, y, z du parallélipipède, dont 64 est le volume? On sait que ces dimensions, en proportion continue, sont côtés de trois cubes, dont 584 est la somme. (On posera $x+z=v$; etc.).

24. Connaissant numériquement la base b et la hauteur h d'un triangle, le diviser en moyenne et extrême raison, par une parallèle à b, et calculer la hauteur du trapèze résultant, moyenne cherchée. (Interpréter, en observant que $\sqrt{(6-2\sqrt{5})}=\sqrt{5}-1$, etc.).

On peut de même diviser toute pyramide ou tout cône en moyenne et extrême, par une section parallèle à la base; et une sphère, par une autre sphère tangente.

25. Un cercle et deux droites perpendiculaires entre elles, se coupant au centre, sont tracés; comment mener à la circonférence une tangente, dont la portion, entre les deux perpendiculaires, soit divisée en deux parties, l'une double de l'autre, par le point de contact? (Huit solutions, à interpréter par le calcul, dans lequel $\sqrt{(3\pm2\sqrt{2})}=1\pm\sqrt{2}$; etc.).

Il faut observer, à ce sujet, que $m\pm\sqrt{n}$ est le carré exact de $x\pm\sqrt{y}$ ou de $\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$, 1° si $m=x^2+y$ et $n=4x^2y$; 2° si $m=x+y$ et $n=4xy$.

26. La somme a, qu'un négociant avait dans le commerce, est devenue b, après deux ans, bien qu'il en ait retiré la somme c, à la fin de chaque année, pour payer ses dépenses ; mais aussi, pendant chaque année, ses fonds ont augmenté de leur x ième partie : quelle est donc la valeur du dénominateur x ?

Interpréter la solution négative, lorsque $a=b=c$; et les autres symboles, quand $b=c=2a$. La solution et les interprétations sont bien plus faciles, à l'aide de l'inconnue auxiliaire $u=1+1:x$.

C'est même par cette inconnue auxiliaire que l'on peut résoudre le problème proposé, modifié en ce qu'après n années, n étant un nombre entier, le négociant n'a plus rien et ne peut payer la dépense c de cette année. Dans ce cas on trouve $u=0$ et $au=c$, à interpréter.

27. Le bassin d'une fontaine reçoit l'eau par deux tuyaux ; le premier seul le remplit en un certain temps et le second seul met a heures de plus que le premier. Comme les deux tuyaux, coulant ensemble, remplissent le bassin en b heures : on demande quel temps x le premier tuyau met à remplir seul le bassin ? y a-t-il nécessairement une solution négative ? et dans le cas de l'affirmative, est-elle numériquement plus grande que a ? Comment alors l'interpréter et quelle est cette interprétation, lorsque $a=8$ et $b=3$?

28. On peut varier de plusieurs manières, ce genre de problèmes ; et par exemple, dans le précédent, a pourrait être le produit des temps employés par les deux tuyaux pour remplir séparément le bassin.

S'il y a trois tuyaux, remplissant le bassin en une heure, lorsqu'ils sont ouverts ensemble ; tandis que 11 et 36 sont la somme et le produit des temps respectifs que les trois tuyaux mettent à remplir le bassin séparément ; il est facile de voir que les temps cherchés x, y, z sont les racines de la même équation finale du *troisième degré*.

On aurait encore une équation finale du troisième degré, ayant trois racines réelles, si les trois tuyaux remplissaient ensemble le bassin en une heure, et que pour le remplir séparément, il fallut au second tuyau, une heure de plus qu'au premier et au troisième, 4 heures de plus que ce premier (voyez d'ailleurs les *mélanges d'algèbre*, p. 47 et suiv.).

29. On démontre aisément que *de tous les triangles inscrits dans un triangle isocèle tracé, celui de moindre contour a pour sommets les pieds des trois hauteurs du proposé et qu'il est isocèle, aussi bien que les trois autres triangles résultants.* C'est donc aux pieds des trois hauteurs que doivent être les milieux des portes de trois maisons, dont les façades se trouvent sur la base $2b=80^m$ et sur les deux côtés latéraux $a=200^m$ d'un triangle isocèle, *pour que la somme des trois chemins, qui joignent ces milieux deux à deux, soit la plus petite possible.* Et si la construction doit coûter 2 fr. par mètre de longueur, il faudra pour connaître le moindre prix total, mesurer, avec le mètre, les longueurs des trois chemins. Mais, pour éviter

de nouvelles erreurs, il est préférable de calculer la somme des trois longueurs : On verra que cette somme p est donnée par

$$a^2p=4b(a+b)(a-b)\text{ ; d'où } p=156^m6.$$

Ici l'angle du sommet est aigu : il pourrait être droit ou obtus, dans le triangle proposé. Il est d'ailleurs facile de calculer les aires et les contours des quatre triangles isocèles partiels ; lesquels, sauf celui formé par les trois chemins, sont *semblables* au grand triangle proposé.

30. On démontre aussi que, parmi tous les triangles *inscrits* dans un triangle quelconque tracé, celui dont les sommets sont les pieds des trois hauteurs a le moindre contour ; tandis que les trois autres triangles résultants sont *semblables* au proposé, dont les côtés sont *antiparallèles* à ceux du triangle inscrit. Mais ici la somme minimum des trois chemins n'est pas aussi facile à calculer que quand le triangle est isocèle : il faut la mesurer directement sur le terrain.

31. Les deux précédents problèmes reposent sur ce que, *deux points étant donnés d'un même côté d'une droite tracée, les deux parties rectilignes du plus court chemin pour aller du premier point au second, en passant par un point de la droite, font avec celle-ci deux angles égaux.*

D'après cela, un rectangle étant tracé, supposons qu'un point mobile, partant d'un côté, soit assujetti à rencontrer les trois autres et à revenir sur le premier, de telle sorte que la somme des quatre chemins rectilignes soit la moindre possible. Il faudra donc, pour cela que, x, y, z, t désignant les quatre chemins partiels successifs, x et y fassent avec le côté a deux angles égaux à v ; y et z fassent avec le côté b deux angles égaux à $90°-v$; enfin, z et t fassent avec le côté a deux angles égaux à v. Or, les propriétés trigonométriques du triangle rectangle donnent, réductions faites,

$$x+y+z+t=2a:\cos v\,;$$

c'est la double parallèle à x, menée d'une extrémité de a et terminée au prolongement de b ; car a est la *projection* de cette parallèle R sur la direction de ce côté ; et cela quels que soient le point de départ et l'angle v.

D'ailleurs la somme minimum 2R des quatre chemins rectilignes est plus grande que la double diagonale du rectangle ; cette somme minimum est donc la moindre possible quand elle égale le double de la diagonale d ; or cela arrive dès que le premier chemin partiel, et par suite les trois autres, aboutissent aux milieux des côtés du rectangle et forment un losange *inscrit*. De sorte que, ***parmi tous les quadrilatères inscrits dans un rectangle donné, le losange est celui de moindre périmètre*** (égal alors à $2d$).

On voit de plus que si un point mobile est assujetti à rencontrer les côtés d'un rectangle donné (comme dans le jeu de billard), de telle sorte que deux chemins rectilignes consécutifs fassent deux angles égaux avec le côté contenant leur extrémité commune ; non-seulement on peut calculer la *position* du mobile sur chaque côté, après l'avoir rencontré plusieurs fois ; mais aussi on peut savoir, par une distance *négative*, *quand son mouvement changera de sens*. (Ici les équations, à *numéros*, facilitent la solution).

32. Calculer la position de chacune des deux parallèles à la base d'un triangle donné, le divisant en trois parties telles, que la première soit double de la troisième et la seconde, la demi-somme des deux autres. (Interprèter les symboles négatifs).

33. De quelle longueur c faut-il prolonger la hauteur b d'un rectangle tracé, de base donnée a, pour qu'en menant, par le point, ainsi obtenu, une droite z, terminée à cette base, z divise le rectangle en moyenne et extrême raison, ou soit divisée de la même manière, par la seconde base a ? Quelle est la distance x de b à l'intersection de z avec la base a ?

Réponse : dans le premier cas, x est donnée par

$$(b+2c)x=a(b+c)(-1+\sqrt{5})\ ;$$

elle est donc indéterminée avec c ; et encore faut-il que c soit au moins égale à $2b$, pour que le problème soit possible.

Dans le second cas, x est absolument indéterminée, bien qu'on ait

$$c=\tfrac{1}{2}b(1+\sqrt{5}).$$

34. Trouver la longueur x dont il faut prolonger le diamètre $2r$, pour que menant du point, ainsi obtenu, une tangente, terminée à la tangente à l'autre extrémité du diamètre, elle soit divisée par le point de contact en deux parties, côté et diagonale d'un carré ; ou bien soit divisée en moyenne et extrême raison, par le point de contact. (Dans le premier cas, $x=\frac{1}{2}r\sqrt{2}$; dans le second cas, $x=\frac{1}{2}r(1\pm\sqrt{5})$ et $x=-2r$. Toutes ces expressions peuvent s'interpréter géométriquement).

Observons que si la tangente devait avoir la longueur donnée a, elle serait l'hypothénuse d'un triangle rectangle, et chacun des deux autres côtés serait donné par une équation du quatrième degré (mais on peut l'abaisser au second, à l'aide d'une inconnue auxiliaire, à choisir).

35. Connaissant numériquement la hauteur h menée de l'angle droit, calculer l'hypoténuse lorsque celle-ci est divisée, par le pied de h, 1° en moyenne et extrême raison, 2° en deux parties, côté et diagonale d'un carré. (Dans ce dernier cas, l'hypoténuse est $h(1+\sqrt{2})$, et se construit aisément, aussi bien que le triangle rectangle).

36. Quelle est l'aire du trapèze rectangle formé par deux tangentes aux extrémités du diamètre donné $2r$ et une troisième tangente, divisée par le point de contact, 1° en moyenne et extrême raison, 2° en deux parties, côté et diagonale d'un carré, 3° en deux parties, l'une moyenne proportionnelle entre le diamètre proposé et ses trois quarts augmentés de l'autre partie ? (Dans ce dernier cas, il y a trois solutions, dont deux négatives et égales, à interprèter).

37. On peut diviser le cercle en moyenne et extrême raison, soit par une circonférence tangente, soit par une ligne *discontinue*, formée par

deux demi-circonférences, de part et d'autre du diamètre proposé; laquelle des deux lignes de division est-elle la plus petite? Et comment diviser, en moyenne et extrême, la circonférence proposée, par une corde inconnue?

38. Connaissant numériquement le rayon r d'un cercle tracé, calculer le minimum m de la somme des deux dimensions $2x$ et y, base et hauteur du triangle isocèle *inscrit*. (Le maximum de m est négatif et s'interprète en changeant *somme* en *différence*).

39. Connaissant numériquement l'hypoténuse a et la hauteur h menée de l'angle droit, calculer les deux autres côtés b et c du triangle rectangle.

Suivant qu'on élimine c par substitution, ou par addition et soustraction d'équations, on trouve ces deux expressions égales de $2b$:

$$\sqrt{2a^2\pm 2a\sqrt{(a^2-4h^2)}}=\sqrt{a^2+2ah}\pm\sqrt{a^2-2ah}.$$

La seconde expression est évidemment plus simple que la première. En général, pour extraire la racine carrée du double binome *irrationnel* du *second degré* $m\pm\sqrt{n}$, on pose $m^2-n=p^2$, et l'on trouve

$$\sqrt{(m\pm\sqrt{n})}=\tfrac{1}{2}\sqrt{(2m+2p)}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2m-2p}).$$

Cette formule générale se vérifie en élevant de part et d'autre au carré; ce qu'il aurait fallu faire, pour la découvrir, en posant

$$\sqrt{(m\pm\sqrt{n})}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y};\ \text{d'où}\ x+y=m\ \text{et}\ 4xy=n;\ \text{etc.}$$

Pour $a=150$ et $h=72$, on trouve $2b=240$, 180, -180 et -240; tandis que $2c=120$, 240, -240 et -120. Mais, en réalité, le problème n'admet que la seule solution 120 et 90.

40. Connaissant numériquement les rayons R et r des cercles circonscrit et inscrit à un triangle tracé, peut-on calculer la somme x des distances du centre du premier cercle aux trois côtés?

41. De l'extrémité d'une tangente, de longueur donnée a jusqu'au point de contact, mener une sécante telle, que la somme des carrés numériques de ses deux parties x et y, intérieure et extérieure au cercle, fasse le carré numérique donné c^2.

42. Deux rectangles étant tracés, inscrire dans le premier un rectangle semblable au second; c'est-à-dire calculer les côtés du rectangle cherché, connaissant numériquement les côtés des deux autres, et discuter.

43. Lorsqu'un cercle vaut la somme de trois autres, sa circonférence vaut-elle aussi la somme des trois autres; est-elle plus grande ou plus petite que cette somme? Comment construire le rayon du premier cercle, lorsque les rayons des trois autres sont donnés?

44. Quelle est la différence des deux segments d'un même cercle, dont les cordes sont le côté du triangle équilatéral inscrit et le rayon?

45. La somme a des rayons de trois cercles, qui doivent se toucher extérieurement, étant donnée, calculer ces trois rayons x, y, z, pour que le cercle équivalent à la somme des trois cercles cherchés soit un

minimum. Comment tracer les trois cercles tangents extérieurement, qui répondent à leur somme minimum? Peut-on alors calculer soit l'aire du triangle mixtiligne, formé par les arcs circulaires, terminés aux trois points de contact; soit l'aire du cercle *inscrit* dans ce triangle, du cercle *circonscrit*, du cercle passant par les trois centres et du cercle touchant extérieurement les trois proposés? (Dans le premier cas, on posera $x=p+q$ et $y=p-q$; etc.).

46. Les prolongements des côtés d'un carré divisent une droite extérieure tracée en trois segments consécutifs donnés a, b, c; décrire ce carré, après en avoir calculé le côté x et son prolongement z jusqu'à l'extrémité de c, quatrième point de division de la droite proposée.

On trouve les équations finales, faciles à construire sur le papier, savoir:

$$z\sqrt{(a^2+c^2)}=\pm c(b+c) \text{ et } x\sqrt{(a^2+c^2)}=\pm ac.$$

(Problème analogue pour le triangle équilatéral, dont un côté est perpendiculaire à la droite tracée).

47. Si l'on calcule les périmètres de deux polygones réguliers de n côtés, l'un inscrit et l'autre circonscrit au cercle, la moyenne arithmétique des inverses de ces deux périmètres exprime l'inverse du périmètre du polygone régulier circonscrit de $2n$ côtés (à démontrer).

48. Les rayons a et b de deux cercles qui se touchent extérieurement, sont donnés tels, que le plus grand a, mené au point de contact de la tangente extérieure commune $2t$, fait un angle de $60°$ avec la droite qui joint les deux centres. Si la longueur $2t$, encore inconnue, est le diamètre d'une circonférence, interceptant sur les deux cercles proposés, deux portions *curvilignes*, de chacune deux *côtés*; quelle est la somme des aires de ces deux portions? (Ce problème conduit à des réductions analytiques remarquables).

VI.

Des Maximums et des Minimums du second degré. J'appelle ainsi la plus *grande* et la plus *petite valeur* que puisse avoir un nombre *variable*, entrant sous un radical du second degré. La valeur, *maximum* ou *minimum*, doit donc rendre *nulle* la quantité sous le radical; puisque s'il en était autrement, cette quantité, essentiellement *positive*, pourrait diminuer encore, par l'augmentation ou la diminution du nombre variable; celui-ci ne serait donc ni à son maximum ni à son minimum, contrairement à l'hypothèse, d'où l'on est parti.

En général, la *discussion* des problèmes consistant à faire *varier* certains éléments générateurs de la formule, pour connaître leurs *valeurs limites*, avant d'arriver à un *symbole*, qu'il faut ensuite *interpréter ;* on voit que la discussion des problèmes, résolubles comme ceux du second degré, pour être complète, exige la recherche des *maximums* et des *minimums* de certains nombres *variables*, entrant sous le signe radical de la formule. Ce radical, en effet, ne peut devenir *imaginaire*, de *réel* qu'il était, qu'en passant par le *zéro absolu*, c'est-à-dire par la plus *grande* ou la plus *petite valeur* de l'un des nombres variables, placés sous lui.

La méthode des *maximums* et des *minimums* du *second degré*, étendue aux équations à plusieurs inconnues, consiste donc uniquement *à résoudre l'équation proposée successivement par rapport à chacune de ses inconnues et à égaler à zéro la quantité sous chaque radical ;* ou bien *à résoudre l'équation par rapport à une inconnue, à égaler à zéro le polynome sous le radical et à résoudre, s'il est possible, l'équation résultante par rapport à une seconde inconnue, etc.* Si d'ailleurs l'équation est *symétrique* par rapport à deux inconnues x et y, on facilite la détermination de la plus *grande* ou de la plus *petite* valeur cherchée, en posant $x=p+q$ et $y=p-q$; p et q étant deux inconnues *auxiliaires*, que l'on doit surtout employer lorsque l'équation n'est pas résoluble comme celles du second degré et ne peut s'y ramener.

Cette méthode est une partie essentielle des éléments d'algèbre, comme y présentant des applications utiles, aussi bien qu'en géométrie et en mécanique. Voici une seconde suite de problèmes, bien propres à montrer l'importance de cette méthode, et d'ailleurs faciles à résoudre : presque tous appartiennent à la *géométrie numérique*.

1. Le contour d'une table rectangulaire est une feuille d'argent, longue de $8a$ décimètres ; cette feuille doit servir à revêtir les contours de quatre tables rectangulaires, que l'on veut faire construire de telle sorte que la réunion des quatre *dessus* forme un rectangle R *maximum :* quelles doivent être pour cela les dimensions de chacun des quatre rectangles cherchés ?

On verra que le maximum R est le carré dont $2a$ est le côté ; mais le problème n'en est pas moins *indéterminé*. Car même si tous les nombres doivent être entiers, aussi bien que a, il y aura a manières différentes de diviser le carré R en quatre rectangles, dont une seule donnant quatre carrés égaux.

2. Quelles doivent être les trois dimensions intérieures x, y, z du coffre de fer, ayant 64 litres de capacité, la paroi 4 millimètres d'épaisseur partout et dont la construction coûtera 10 centimes par décimètre carré de surface intérieure, pour que ce coffre pèse et coûte le moins possible ? Réponse : $x=y=z=0^m4$, et 9 fr. 60, prix minimum de la construction.

Si de plus, le décimètre cube du fer employé pèse 7,5 kilos, le poids minimum sera 27,3 ; enfin, si le prix d'achat du fer est 40 centimes le kilo, le prix minimum total sera 20 fr. 52.

3. On doit faire construire une citerne, à faces rectangulaires, ayant 240 hectolitres de capacité ; on paîra 6 fr. le mètre de longueur, pour les pierres taillées qui en revêtiront les douze côtés, et 6 fr. le mètre carré de surface intérieure, la voûte étant payée comme si elle égalait la surface du fond. Quelles doivent être les trois dimensions intérieures x, y, z, pour que la dépense totale $12m$ soit un minimum ? Réponse : $x=y=z=\sqrt[3]{24}$ et le minimum $12m=36x(2+x)$.

4. Les prix restant les mêmes, si les pierres taillées devaient seulement garnir les quatres côtés du fond, la capacité étant alors 120 hectolitres ; quelles devraient être les trois dimensions intérieures x, y, z, pour que la dépense totale $12m$ fût un minimum ? Rép. $x=y=2$ mètres, valeurs données par $x^3+x^2-12=0$; d'où $z=3^m$ et $12m=240$ fr. dépense totale minimum.

5. Si les pierres taillées ne devaient pas garnir les quatre côtés de la naissance de la voûte, ces pierres coûtant toujours 6 fr. le mètre de longueur, aussi bien que le mètre carré de surface intérieure, comme pour 3° ; mais que la capacité dût être de 216 hectolitres ; quelles seraient les valeurs des trois dimensions intérieures x, y et z, la dernière étant la profondeur, pour que le prix total $12m$ de la construction de la citerne fût le moindre possible ? Réponse : le minimum cherché donne $x=y$ et

$$x^4+x^3-21,6x-43,2=0.$$

La seule racine positive est 3 : donc $x=y=3$ mètres, $z=2,4$ et la moindre dépense totale $12m=496$ fr. 80.

6. Démontrer que, parmi tous les parallélipipèdes rectangles, ayant une même diagonale donnée, le cube est celui de plus grand volume, de moindre surface totale et de moindre somme des douze arêtes.

7. Deux fondeurs ont payé l'un 10 et l'autre 20 fr. pour un tétraèdre rectangle de cuivre, dont les arêtes du trièdre droit valent respectivement 4, 6 et 6 décimètres ; comment le partager en deux portions, proportionnelles aux prix 10 et 20, par une section minimum ? Peut-on calculer le volume du cuivre perdu, sachant que la section minimum a un millimètre d'épaisseur ?

8. Parmi tous les parallélogrammes, ayant une même diagonale donnée, quel est celui de plus grande étendue superficielle ? Réponse : le carré (à l'aide de la trigonométrie).

9. Quel est le plus grand de tous les parallélogrammes, ayant un périmètre donné ; et réciproquement ? Réponse : chaque fois le carré (trigonométrie).

10. Parmi tous les triangles rectangles, de même bissectrice de l'angle

droit, quel est celui de plus grande étendue superficielle, ou de moindre hypoténuse et de moindre périmètre? (trigonométrie).

11. Quel est le plus grand de tous les triangles, ayant même hauteur h et même angle A au sommet? (trigonométrie).

12. Couper une feuille triangulaire de cuivre en deux portions, l'une double de l'autre, par une section minimum et quelle est la plus petite des trois sections minimums? (trigonométrie).

13. Quel est le plus grand de tous les triangles rectangles, ayant la même hauteur, menée de l'angle droit?

14. Diviser un nombre donné a en trois parties dont la somme des racines carrées ou cubiques soit la moindre ou la plus grande possible?

15. Il est enjoint à un commis voyageur de se rendre dans six villes différentes A, B, C, D, E, F, où ses dépenses journalières seront respectivement 3 francs, 6, 2, 4, 5 et 1. Dans quel ordre doit-il visiter ces villes, pour que, devant séjourner 3 jours dans la première qu'il choisira, 5 dans la seconde, 6 dans la troisième, 8 dans la quatrième, 9 dans la cinquième et 12 dans la sixième, sa dépense totale soit la moindre possible? Réponse : suivant l'ordre B, E, D, A, C, F. (Voyez p. 242 des *développements et recherches de Mathématiques élémentaires*).

16. Soit r le rayon d'un cercle donné, soit T l'aire du triangle *inscrit*, dont les angles sont désignés par A, B, C, et soit T′ l'aire du triangle *circonscrit*, dont les contacts sont les sommets de T : on démontre que

$$T=2r^2 \sin A \sin B \sin C \text{ et } T'=r^2 \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C.$$

Cela posé, quelles sont les expressions, l'une maximum de T et l'autre minimum de T′? (Chaque fois on posera d'abord $B=v+x$ et $C=v-x$; etc.).

17. De tous les triangles de même périmètre $2p$ et dont l'aire T de chacun est exprimée par l'équation logarithmique :

$$T=p^2 \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C,$$

quel est le plus grand? (On fera encore $B=v+x$ et $C=v-x$; etc.).

18. On démontre que de tous les triangles, dont la base et l'angle du sommet sont donnés constants, celui de plus grand périmètre et de plus grande surface est isocèle (trigonométrie); comment en déduire le plus grand de tous les polygones *inscrits* de n côtés et celui de plus grand périmètre?

19. Un arc de cercle étant tracé, on démontre que parmi toutes les lignes brisées formées de trois tangentes à cet arc, dont deux à ses extrémités, la plus petite a son troisième contact au point milieu de l'arc proposé (trigonométrie); comment en déduire le plus petit de tous les polygones de n côtés, *circonscrits* au cercle, et celui de moindre périmètre?

20. Quel est le plus grand de tous les triangles de même angle au sommet et de même bissectrice de cet angle, terminée à la base? (trigonométrie).

21. Parmi tous les triangles équivalents, quel est celui dans lequel le carré inscrit est le plus grand ?

22. Quel est le plus grand de tous les trapèzes rectangles, formés par les perpendiculaires à la tangente, menées des extrémités d'un diamètre extérieur ? Calculer l'aire et le contour de l'un de ces trapèzes, lorsque la tangente rencontre le prolongement du diamètre aux distances 20^m et 80^m de ses extrémités ?

23. Connaissant la base 200^m et la hauteur 160^m de tous les triangles équivalents, quel est le périmètre du plus grand rectangle *inscrit* dans chacun ? En d'autres termes, dans le terrain triangulaire, ayant 200^m et 160^m de dimensions, on veut tracer le plus grand verger rectangulaire possible et le faire entourer d'un mur, ayant 1^m20 de hauteur, au-dessus du terrain, et coûtant 4 fr. le mètre carré de surface, intérieure au verger ; quel sera le prix de construction de ce mur ? Peut-on donner au verger rectangulaire, sans qu'il cesse d'avoir la même étendue superficielle, une autre forme telle, que le prix du mur soit le moindre possible, et quel est ce moindre prix ?

24. Parmi tous les triangles, ayant chacun 128 ares de superficie, quel est celui dans lequel le plus grand rectangle inscrit a le moindre périmètre ? Et quelle est la longueur de ce périmètre minimum ?

25. Parmi tous les prismes triangulaires, ayant la même arête latérale 20 et la même section perpendiculaire, limitée par les côtés 10, 8 et 6, quel est celui de moindre surface totale ? Calculer cette surface minimum et le volume commun.

26. Quels sont le maximum et le minimum de c, dans

$$2(a+bc)x=d+2cx^2\ ?$$

Et si l'on fait varier l'un des trois nombres a, b, d, quels sont le plus grand et le plus petit maximum ou minimum, qui en résultent pour c ?

27. Quel est le plus petit maximum de a dans l'équation

$$8(x+y)-xy=a\ ?$$

Cette équation exige deux autres conditions, savoir que a soit un maximum et que ce maximum soit le plus petit possible ; car sans la dernière condition, le maximum de a serait complètement arbitraire, aussi bien que x et y. De plus, pour que ce plus petit maximum soit déterminé par la résolution d'une équation du second degré, il faut poser, dans la proposée, $x=v+z$ et $y=v-z$.

28. Vérifier que le plus grand prisme quadrangulaire droit que l'on puisse tailler dans une pyramide régulière, d'une pierre précieuse, à base carrée, a pour hauteur le tiers de la hauteur $3h$ de la pyramide (valeur donnée par le *calcul des dérivées*). Pour cette vérification, il suffit, dans l'expression du volume du prisme, de remplacer la hauteur x de la petite pyramide par $x\pm u$.

29. Démontrer par le calcul, soit à l'aide de la simple géométrie numé-

rique, soit à l'aide de la trigonométrie, que la trapèze isocèle est le plus grand de tous les quadrilatères formés avec quatre côtés donnés, dont deux opposés sont égaux.

De là résulte immédiatement que le plus grand de tous les polygones isopérimètres, du même nombre de côtés, est le polygone régulier.

30. Connaissant numériquement la base b et la hauteur h d'un rectangle, démontrer que le plus petit de tous les parallélogrammes *inscrits* est un losange, moitié du rectangle proposé ; tandis que le plus petit parallélogramme *circonscrit* est un losange, double de bh.

On reconnait aussi que le plus grand rectangle *inscrit* dans un losange en vaut la moitié ; tandis que le plus grand rectangle *circonscrit* en vaut le double (ce dernier cas, par deux triangles rectangles *semblables*).

31. On prolonge le diamètre donné $2r$ d'une longueur d arbitraire et du point, ainsi obtenu, on mène une tangente à la circonférence, interceptant, sur les tangentes aux extrémités de $2r$, les bases d'un trapèze rectangle ; quelle est l'aire minimum de ce trapèze ? Et quelle serait l'aire, si d était donnée ? Quelle est aussi l'aire maximum du triangle, ayant $2r$ pour base et pour sommet le point de contact de la première tangente ?

Réponses : dans le premier cas, l'aire T minimum est donnée par $n\mathrm{T}=rn^2+r^3$, n étant l'une des bases inconnues ; tandis que d étant donnée, on a $\mathrm{T}=2r^2\sqrt{(1+r:d)}$. Dans le second cas, l'aire maximum du triangle est r^2, et répond à $0\cdot d=-r$. On voit que l'inconnue d cesse d'exister, sans que la valeur cherchée soit impossible.

32. Connaissant la hauteur h d'un trapèze et la portion p de la parallèle aux deux bases a et b, portion entre un côté et l'intersection des diagonales ; quelle est l'aire minimum du trapèze ?

33. Connaissant l'hypoténuse a et la hauteur b menée de l'angle droit, construire le rectangle et par suite le carré équivalent à l'hexagone formé en joignant, par trois droites extérieures, les sommets voisins des carrés construits extérieurement sur les côtés du triangle rectangle. Et si l'aire T de celui-ci est seule donnée, ou l'hypoténuse a, quelles seront les minimums de a et du carré cherché, dans le premier cas, et le minimum de l'hexagone, dans le second ?

34. Calculer l'aire du plus grand des quadrilatères inscrits dans un cercle donné, ayant tous la corde donnée $2d$ pour diagonale commune. Calculer aussi la seconde diagonale du quadrilatère inscrit, dont la première est le diamètre et dont un angle est de 30°.

35. Le côté latéral $2a$ d'un triangle isocèle étant donné numériquement, quelle doit être la base $2x$, 1° pour que l'aire du triangle soit un maximum ? 2° pour que le cercle circonscrit soit le plus petit possible ? 3° enfin, pour que le cercle inscrit soit le plus grand possible ?

36. Parmi tous les trapèzes, ayant la même plus grande base a et le même rayon r du cercle inscrit, le trapèze isocèle est celui de moindre

surface et de moindre périmètre. Démontrer ce théorème par le calcul, a et r étant donnés numériquement.

37. Entre tous les trapèzes isocèles, de même diagonale d et de même plus grande base b, celui d'aire maximum équivaut au demi-carré fait sur d ou au carré fait sur sa hauteur h; il a par conséquent ses diagonales perpendiculaires entre elles. Comment démontrer ce théorème, par le calcul, et comment trouver le centre et le rayon du cercle circonscrit, connaissant seulement b et d?

38. Si je veux établir, dans mon jardin, un réservoir d'eau, ayant 36 mètres carrés de surface du fond et un mètre de profondeur; si, de plus, le pavé du fond et le mur latéral doivent me coûter 10 fr. le mètre carré de surface intérieure; quelle forme ce réservoir doit-il recevoir, pour que ma dépense totale soit la moindre possible, en y comprenant celle du creusement, à 2 fr. le mètre cube? On sait (problème 29) que, pour cela, la forme doit être celle du cylindre droit circulaire; mais elle pourrait aussi être celle d'un prisme droit à base carrée ou à base hexagonale régulière; quelle est chaque fois la moindre dépense totale?

39. Quelle est l'expression logarithmique de l'aire du triangle rectangle dont on connaît le plus petit angle aigu C et la somme n des deux côtés de l'angle droit? Et si l'angle C est variable, quelle est l'aire maximum du triangle?

40. Quelle est la valeur du plus petit cercle dans lequel la corde 20 soutend un arc double de celui soutendu par une autre corde inconnue x? Comment décrire ce plus petit cercle et tracer la corde x?

41. Quelles sont les valeurs de l'angle x, répondant au maximum ou au minimum de a dans

$$\sin x+a\,\text{tang}\,x=\cos x \text{ ou } \text{séc}\,x+a\,\text{tang}\,x=\tfrac{1}{2}\ ?$$

construire chaque fois $\sin x$.

42. Quelles sont les valeurs de x et de l'angle a, répondant au minimum de $\sin a$ et au maximum de $\text{tang}\,a$, dans les équations respectives :

$$x^2-2x\sin a+\cos^2 a=0 \text{ et}$$
$$x^2-2x\,\text{tang}\,a+2\,\text{tang}^2 a=3\ ?$$

43. Quelles sont les valeurs des angles x et y, répondant au maximum de $\cos y$ dans les équations respectives :

$$\sin^2 x-2\sin x\cos y=2\cos^2 y \text{ et}$$
$$\sin^2 x-2\cos x\cos y=3\cos^2 y-\tfrac{1}{2}\ ?$$

44. Quelles sont les valeurs des angles x et y, répondant au minimum de $\cos x$ et de $\sin x$, dans les équations respectives :

$$\text{tang}\,x+\sin x\cos y=\sin x\sin y \text{ et}$$
$$\cot x+\cos x\sin y=\cos x\cos y\ ?$$

45. De tous les triangles rectangles, ayant la même hauteur h, menée de l'angle droit, quel est celui de moindre périmètre? Réciproquement,

s'ils sont isopérimètres, quel est celui où h est un maximum? (Calculer chaque fois les trois côtés; chose facile, par des procédés particuliers d'élimination).

VII.

Calcul exponentiel. L'*exposant* d'une lettre n'est clairement défini que pour le cas où il est un nombre entier positif; et c'est par analogie qu'on le regarde comme pouvant être un nombre ou un symbole quelconque, réel ou imaginaire, positif ou négatif. On donne ainsi à la définition de l'exposant la plus grande extension possible, aussi bien par suite qu'à la formule; c'est-à-dire que, dans a^n, qui s'énonce a puissance n, ou plutôt a exposant n, on complète, d'après l'analogie directe, la généralité de la formule et le rôle que l'exposant n y remplit, en regardant celui-ci comme désignant toujours n facteurs a, même quand n représente un nombre fractionnaire, un symbole irrationnel ou imaginaire, positif ou négatif. Il reste ensuite à déterminer la signification particulière de chaque genre d'exposants et à *interpréter* conséquemment les différents *symboles exponentiels*.

1° Dans $3a^0$, l'exposant 0 de a indique que a n'est pas facteur avec 3 et que a ne multiplie pas 3; donc $3a^0$ est la même chose que 3, c'est-à-dire que $3a^0=3$ et que $a^0=1$.

2° Multiplier ou diviser a^m par a^v, c'est introduire ou supprimer v facteur a dans a^m; c'est augmenter ou diminuer de v l'exposant m; et par conséquent on aura toujours

$$a^m\times a^v=a^{m+v} \text{ et } a^m:a^v=a^{m-v}.$$

Dans ces formules, m et v sont deux nombres entiers quelconques, et le premier m pourrait même être nul. Or, si $m=0$, la seconde formule devient

$$1:a^v=a^{-v}.$$

L'exposant négatif $-v$ de a indique donc la division de l'unité par a^v: c'est une seconde manière plus simple d'indiquer cette division.

Et quand même l'égalité $a^{-v}=1:a^v$ ne serait pas démontrée, on devrait toujours l'admettre, pour la généralité des formules. Car le sens de l'*exposant négatif* n'étant pas fixé encore, on est tout-à-fait libre de lui donner la signification précédente, par laquelle on peut écrire toute fraction sous la *forme entière*, et réciproquement. Par exemple, on a

$$10^{-2}=1:10^2=1:100=\tfrac{1}{100}=0,01.$$

D'ailleurs, l'exposant *positif* v de a indiquant le *produit* de l'unité par a^v, il suit de l'interprétation des symboles négatifs, que l'exposant *soustractif* $-v$ de a doit indiquer l'opération contraire, c'est-à-dire le *quotient* de l'unité par a^v.

3° Soit $x=n:r$, d'où $n=rx$, n et r étant deux nombres premiers entre eux ; n pouvant être *positif* ou *négatif*, mais r étant essentiellement *entier positif*. Élever a^x à la puissance r, c'est former le produit de r facteurs a^x, contenant chacun x facteurs a ; ce produit contient donc r fois x ou rx, c'est-à-dire n facteurs a. On a par conséquent $(a^x)^r=a^n$. De là donc

$$a^x=\sqrt[r]{a^n} \text{ et } a^{\frac{n}{r}}=\sqrt[r]{a^n}.$$

Ainsi l'exposant fractionnaire n sur r de a indique la racine r ième de a^n : c'est une seconde manière plus simple d'indiquer cette racine r ième.

Et quand même la dernière égalité précédente ne serait pas démontrée, on devrait toujours l'admettre, comme définition. Car le sens de l'exposant fractionnaire n'est aucunement fixé, par ce qui précède les considérations ci-dessus ; on est donc absolument libre de lui donner la signification précédente, propre à généraliser les formules et à rendre plus complète l'analogie entre les divers genres d'exposants.

4° Non-seulement l'exposant, qui d'abord n'était qu'un nombre entier, peut devenir fractionnaire, positif ou négatif ; mais il peut être un nombre irrationnel. Car l'exposant irrationnel étant inexprimable en chiffres, n'est en réalité qu'un exposant fractionnaire, aussi approché qu'on le veut du véritable. En un mot, tous les exposants *réels* ne sont au fond que des exposants fractionnaires, positifs ou négatifs, et ont les mêmes significations respectives que ces deux derniers genres d'exposants.

Enfin, l'exposant *imaginaire* vient compléter la généralité des formules, où il est très-utile, comme signe d'*absurdité* ou de *non existence* : tel est son rôle essentiel ; mais il est parfois d'ailleurs susceptible d'*interprétation*, pour résoudre un problème *possible avec les mêmes nombres donnés* ; et sous ce rapport on sait qu'il rentre dans l'interprétation des symboles négatifs.

5° Il résulte, des notions précédentes, que n et v désignant des nombres ou des symboles quelconques, on aura toujours

$$a^n\times a^v=a^{n+v} \text{ et } (a^n)^v=a^{nv}\ldots \text{(1)}$$

C'est d'ailleurs ce qu'on démontre très-simplement, comme il suit : soit x l'exposant de a, dans $a^n \cdot a^v$; x dépend donc uniquement des arbitraires n et v. Or, quelle que soit actuellement la *composition* de x, n et v étant quelconques, cette composition ne saurait aucunement changer lorsque n et v deviennent deux nombres entiers positifs, mais arbitraires. Car d'abord cette hypothèse laisse toujours n et v *indépendants* l'un de l'autre ; et il ne peut y avoir de nouvelles réductions dans l'expression *immédiate* de x, en n et v. Ensuite, si l'hypothèse de n et v entiers et positifs pouvait changer la composition de x, en n et v, cette composition ne serait pas générale, contrairement à l'hypothèse, d'où l'on part, c'est-à-dire que la valeur particulière d'un élément générateur changerait le rôle qu'il remplit dans la génération ; chose absurde.

Puisque les valeurs particulières des lettres ne changent aucunement le rôle que chacune de ces lettres remplit dans la formule générale, il s'ensuit que *cette formule étant démontrée pour une valeur arbitraire de chaque lettre, elle l'est également pour toutes les valeurs imaginables, pourvu que les lettres conservent toujours leur indépendance les unes des autres.* Tel est le *principe d'analogie directe* dans la recherche des *génératrices* de formules générales ; et c'est aussi le *principe de généralisation*, pour passer d'une valeur arbitraire déterminée à la valeur générale quelconque.

Cela posé, les exposants n et v étant entiers positifs, il est évident que le produit de a^n par a^v contient les n facteurs a du multiplicande et les v facteurs a du multiplicateur ; l'exposant x de a, dans ce produit, est donc $x=n+v$. Et puisque l'hypothèse de n et v entiers positifs n'a point changé la composition de x, en n et v, il s'ensuit qu'avant on avait aussi $x=n+v$. On verra de même que l'exposant de a, dans $(a^n)^v$, sera toujours nv, pour toutes les valeurs imaginables des exposants n et v ; ce qu'il fallait démontrer.

6° Enfin, les deux formules (I) étant complètement générales, renferment toutes les *règles* du calcul des exposants, *d'une nature quelconque ;* mais il faut distinguer soigneusement la valeur *numérique* ou *arithmétique* de chaque *nombre exponentiel* (laquelle est toujours unique, pour chaque expression) de ses valeurs *algébriques ;* car celles-ci amènent souvent des *particularités*, difficiles à expliquer, et qui modifient les règles générales. Et comme le *calcul exponentiel* conduit au *calcul logarithmique*, l'un des plus utiles et des plus commodes, pour la *génération* des nombres par d'autres, calculés une fois pour toutes et mis en *tables ;* on voit pourquoi l'on ne considère, dans la *théorie* des *logarithmes*, que la valeur arithmétique de chaque expression exponentielle, la seule qu'il faille calculer à l'aide des tables.

Les inventeurs des logarithmes, guidés par l'analogie, en ont établi la théorie d'après les *progressions ;* mais l'analogie est plus complète, aussi bien que cette théorie, en regardant chaque logarithme comme un exposant de la *base* invariable, de 10 par exemple.

Approximation des racines. On sait que l'extraction d'une racine carrée ou d'une racine cubique s'achève par une simple division, lorsqu'on a plus de la première moitié des chiffres de cette racine : donc *moins de la dernière moitié des chiffres du nombre entier, n'a aucune influence sur la partie entière de la racine cherchée ;* et cette proposition est générale.

Modifiant, en effet, moins de la dernière moitié des chiffres du nombre entier A, en les remplaçant si l'on veut par des zéros, pour avoir un nombre plus petit B ; il est clair que la différence $A-B$ n'aura pas autant de chiffres que la racine carrée de B et qu'ainsi $A-B<\sqrt{B}$. Soient a et b les racines $n$ièmes de A et de B, d'où $a^n-b^n<\sqrt{b^n}$; il est facile de voir que a^n-b^n est le produit de $a-b$ par un polynome plus petit que nb^{n-1} ; donc, à plus forte raison, on a

$$(a-b)\cdot nb^{n-1} < \sqrt{b^n}.$$

D'ailleurs, le quotient de $\sqrt{b^n}$ par b^{n-1} est moindre que l'unité, si $n>2$, et égal à 1, si $n=2$; donc enfin

$$\sqrt[n]{A}-\sqrt[n]{B}<\frac{1}{n}.$$

De là résulte $\sqrt{A}-\sqrt{B}<\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}(A+B)-\sqrt{(AB)}<\frac{1}{8}$. De sorte que s'il ne s'agit que de la partie entière de la racine carrée, on aura exactement

$$\sqrt{(AB)}=\tfrac{1}{2}(A+B).$$

Soient r, a et c le rayon, l'apothème et le demi-côté d'un polygone régulier quelconque ; r est donc l'hypoténuse et c la base d'un triangle rectangle.

Soit r' la bissectrice de l'angle du sommet, jusqu'au point où elle coupe la perpendiculaire à c, menée du milieu de r, et soient c' et a' la base et le troisième côté du triangle rectangle dont r' est l'hypoténuse : on trouve

$$c=2c',\ a+r=2a' \text{ et } r'=\sqrt{(ra')}.$$

Par ces formules, on calcule le rayon r' et l'apothème a' du polygone régulier isopérimètre au proposé et de deux fois plus de côtés.

De sorte qu'en passant ainsi, par une suite de polygones réguliers isopérimètres, on arrive bientôt à $\sqrt{(ra')}=\frac{1}{2}(r+a')$; et c'est-là le moyen le plus élémentaire pour calculer le rapport π, ainsi que nous l'avons employé en géométrie.

Le rapport de l'aire du cercle à l'aire du décagone régulier inscrit se réduit à $0,2\pi\sqrt{(2+\sqrt{0,8})}$ et vaut 1,06814 etc.

VIII.

Série binomiale. Après les formules exponentielles, pour le calcul des logarithmes, l'une des plus utiles est la *formule du binome*, étendue à toutes les valeurs imaginables de l'exposant. Dans la plupart des traités d'algèbre, on tire, de la *théorie des combinaisons*, la formule du binome, établie seulement alors pour le cas de l'exposant entier positif; mais rien n'est plus facile que de démontrer la généralité complète de la *série binomiale*, en s'appuyant sur le principe d'analogie directe. Le problème à résoudre, dans ce cas, est celui-ci : *connaissant le développement, supposé complètement général, calculer la fonction génératrice.*

Pour cet effet, n étant un nombre ou un symbole quelconque, soit

$$\mathrm{f}n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3+\text{etc.}\dots \quad (2)$$

Dans cette équation *identique*, x est constant et n variable : c'est pourquoi la *fonction génératrice* est désignée par fn. La loi des termes est évidente, dans le second membre; et le coefficient de x^v est le produit des v facteurs décroissants $n, n-1, n-2, n-3, \dots, n-v+1$, divisé par le produit des v facteurs entiers $1,2,3,4,\dots,v$.

Cela posé, pour $n=3$, par exemple, on a $\mathrm{f}3=1+3x+3x^2+x^3=(1+x)^3$; c'est-à-dire, à cause de $n=3$, qu'on a $\mathrm{f}n=(1+x)^n$.

Pour $n=-2$, il vient $\mathrm{f}(-2)=1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-$ etc., à l'infini. Or, en effectuant la division de l'unité par $(1+x)^2$ ou par $1+2x+x^2$, on trouve exactement ce développement illimité de $\mathrm{f}(-2)$; donc $\mathrm{f}(-2)=1:(1+x)^2=(1+x)^{-2}$. Et comme ici $-2=n$, on a encore $\mathrm{f}n=(1+x)^n$.

Pour $n=\frac{1}{2}$, il est facile de trouver, en réduisant, que

$$\mathrm{f}(\tfrac{1}{2})=1+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{8}x^2+\tfrac{1}{16}x^3-\tfrac{5}{64}x^4+\text{etc.}$$

Or, ce développement illimité se trouve exactement en prenant la racine carrée de $1+x$; donc pour $n=\frac{1}{2}$, on a encore $\mathrm{f}\,n=(1+x)^n$.

L'expression immédiate de fn, en n et x, n'a pu changer aucunement par $n=3$, -2 et $\frac{1}{2}$; et puisque chaque fois on a $\mathrm{f}\,n=(1+x)^n$, il s'ensuit qu'avant on avait aussi $\mathrm{f}\,n=(1+x)^n$. Ainsi, quel que soit n, réel ou imaginaire, positif ou négatif, la formule (2) sera toujours le *développement* de $(1+x)^n$: c'est la *série binomiale* la plus simple et pourtant la plus utile, comme étant complètement générale; car x est un nombre ou un symbole quelconque, aussi bien que l'exposant n.

SÉRIES EXPONENTIELLES. Cherchons encore la *fonction génératrice* $\mathrm{f}\,x$ dans l'équation identiquo :

$$\mathrm{f}\,x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2\cdot3}+\frac{x^4}{2\cdot3\cdot4}+\frac{x^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\text{etc.}\dots \quad (3)$$

La loi des termes du second membre est évidente, jusqu'à l'infini; et le $(v+1)$ième terme est x^v sur $1\cdot2\cdot3\cdot4\dots v$.

Prenons d'abord $x=1$; il est clair que nous aurons

$$\mathrm{f}\,1=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}+\text{etc.}$$

Soit t le v ième terme de cette série et soit S la somme de tous ceux qui le suivent : ces derniers, en nombre illimité, sont respectivement moindres que u, u^2, u^3, u^4, etc., en posant $u^m=1:(v+1)^m$. On a donc, à cause de $u<1$,

$$S<t(u+u^2+u^3+u^4+\text{etc.})<t\frac{u}{1-u} \quad \text{et} \quad S<\frac{t}{v}.$$

Réduisons maintenant en 8 décimales exactes les termes successifs de $\mathrm{f}\,1$: cela est facile, en prenant le tiers de $\frac{1}{2}$, ou de 0,5, le quart du résultat, puis le 5^e^, le 6^e^,..., des résultats successifs. On verra que le 12^e^ terme de $\mathrm{f}\,1$ ne donne point de décimale du 8^e^ ordre, et à plus forte raison la somme S. Disposant tous les nombre décimaux résultants, pour les additionner, on trouvera $\mathrm{f}\,1=2{,}71828183$. Soit e ce nombre décimal; on aura donc $\mathrm{f}\,1=e=e^1$; ou bien, à cause de $1=x$, $\mathrm{f}\,x=e^x$.

Prenons $x=-1$: on trouve, avec plus de facilité encore, que $\mathrm{f}(-1)=1:e=e^{-1}$; c'est-à-dire, à cause de $-1=x$, $\mathrm{f}\,x=e^x$. Et si $x=\frac{1}{2}$, on trouvera encore $\mathrm{f}\,x=e^x$: il en serait de même pour $x=-\frac{1}{2}$.

Puisque les valeurs particulières de x, savoir $1,-1$, $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$, n'ont pu changer aucunement la composition de $\mathrm{f}\,x$, en x et e, et que chaque fois on a $\mathrm{f}\,x=e^x$, il s'ensnit qu'avant ces hypothèses, où x était quelconque, on avait aussi $\mathrm{f}\,x=e^x$. Donc quel que soit x, nombre ou symbole, la série (3) sera toujours le développement de

e^x : c'est la *série exponentielle* la plus simple et la plus usitée, comme *décroissant* toujours, très-rapidement, pour $x<1$. On démontre d'ailleurs que le nombre e est *irrationnel*.

Séries logarithmiques. Pour obtenir une autre série très-utile, soit posé $1+u=e^z$, d'où $l(1+u)=zle$; on a donc l'équation identique

$$e^{nz}=(1+u)^n.$$

Substituant les séries (3) et (2), développements des deux membres, puis supprimant 1 et divisant par n, on aura

$$z+\tfrac{1}{2}nz^2+\tfrac{1}{6}n^2z^3+\text{etc.}=u+\frac{n-1}{2}u^2+\frac{(n-1)(n-2)}{2\cdot3}u^3$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot3\cdot4}u^4+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2\cdot3\cdot4\cdot5}u^5+\text{etc.}$$

Soit k la somme des termes du second membre, où n n'est pas facteur, et soit nh l'ensemble des termes multipliés par n. On aura les termes du second membre, qui sont indépendants de n, en posant $n=0$; ce qui donne

$$k=u-\tfrac{1}{2}u^2+\tfrac{1}{3}u^3-\tfrac{1}{4}u^4+\tfrac{1}{5}u^5-\text{etc.}$$

De plus, soit np l'ensemble des termes multipliés par n, dans le premier membre en z : il est clair que l'équation identique devient

$$z=k+n(h-p).$$

Cette équation subsiste, quel que soit le nombre *variable* n ; et comme z reste *constant*, aussi bien que k, l'équation identique est absolument indépendante de n. Car si $h-p$ n'était pas *nul*, $n(h-p)$ varierait avec n, aussi bien que le second membre ; vu que k demeure constant. Donc z varierait aussi ; contrairement à l'hypothèse. Ainsi l'équation proposée est indépendante de n et l'on a $z=k$, absolument comme si n ou $h-p$ était rigoureusement *nul*.

Substituant donc k à z, dans $l(1+u)=zle$, puis au lieu de k sa valeur en u, on aura cette plus simple *formule logarithmique :*

$$l(1+u)=le(u-\tfrac{1}{2}u^2+\tfrac{1}{3}u^3-\tfrac{1}{4}u^4+\tfrac{1}{5}u^5-\text{etc.})\ldots(4)$$

Dans le second membre, les termes entre parenthèses, en nombre infini, ont pour coefficients respectifs les *inverses* de la suite des nombres entiers, alternativement positifs et négatifs.

Supposons $u<1$, dans (4) : si nous y changeons u en $-u$ et que nous en retranchions l'équation résultante, où u a même valeur numérique, moindre que l'unité ; nous trouverons

$$l\left(\frac{1+u}{1-u}\right)=2le(u+\tfrac{1}{3}u^3+\tfrac{1}{5}u^5+\tfrac{1}{7}u^7+\text{etc.})\ldots.(5)$$

Cette *série logarithmique*, où $u<1$, est fort remarquable : en y posant $u=d$ sur $(2n+d)$, puis $d=1$ et successivement $n=1$

$n=4$; on aura $l2$ et $l5$, avec autant de décimales de le qu'on voudra ; et comme pour les logarithmes, dont 10 est la base, on a $l2+l5=l10=1$, il en résulte le *logarithme ordinaire* du nombre e (*base* du système *népérien*), savoir $le=0,4342945$.

La formule (5), après y avoir posé $u=d:(2n+d)$, pourrait servir à construire de nouvelles tables de logarithmes, par des calculs fort simples, comme on sait ; et il en résulte aussi le moyen d'apprécier l'erreur, due à la *proportion tabulaire*. Cette formule (5) et celles qui en résultent, sont donc un complément nécessaire à la théorie des logarithmes, et elles doivent figurer dans les éléments d'algèbre ; vu d'ailleurs qu'on peut les y démontrer, de la manière la plus simple, à l'aide du principe d'analogie directe, comme on vient de le voir, pour déterminer les *génératrices* des séries (2) et (3), dont (4) est la conséquence immédiate.

Il importe de remarquer que les formules (3), (4) et (5) sont aussi données par la méthode des *coefficients indéterminés* (ou mieux *à déterminer*). Cette méthode servant à faire trouver la *génératrice* de la *fonction* au moyen de sa *variable* quelconque, est l'une des applications, les plus fécondes et les plus remarquables, du principe d'analogie directe. Ici les éléments auxiliaires de la génération numérique sont des coefficients inconnus, indépendants de la variable, destinés à rendre *identiques* les deux membres d'une équation finale.

IX.

Coefficients indéterminés. Le but essentiel de la méthode des coefficients indéterminés est de *développer* en série la *fonction* dont on connaît la composition avec la *variable*, nombre ou symbole ; et cela ordinairement suivant les puissances *ascendantes*, *entières* et *positives* de cette variable.

A cet effet, pour éviter des calculs inutiles et même des absurdités, il faut d'abord, par des valeurs particulières, assignées à la variable, déterminer la *forme* que peut avoir le développement demandé ; puis, cette forme étant ainsi obtenue, par induction, il faut, en vertu de l'analogie directe, la rendre complètement *générale*, à l'aide de *coefficients inconnus*, que l'on sait être *constants* ou indépendants de la variable x. Il faut ensuite *éliminer* la fonction proposée, fx, à l'aide de l'une de ses propriétés *caractéristiques* et des fonctions *semblables* fy et fz ; ce qui conduit à une équation finale *identique*, de la forme

$$a+bx+cx^2+dx^3+\text{etc.}=a'+b'x+c'x^2+d'x^3+\text{etc.}$$

Enfin, comme cette équation finale, nécessairement *identique*, puisque x peut varier sans que les deux membres cessent d'être égaux, revient à

$$a=a'+x(b'-b+c'x-cx+\text{ etc.});$$

on voit que le multiplicateur de x doit être *nul* : s'il n'en était pas ainsi, comme a' est constant ou indépendant de x, le second membre varierait avec x, et par conséquent le premier a ; lequel, contrairement à l'hypothèse, ne serait pas constant. Donc $a=a'$ et

$$b-b'+c'x-cx+\text{ etc.}=0.$$

Tel est le *principe des variables auxiliaires*, établi plus haut. On verra de même que $b=b'$, $c=c'$, $d=d'$, etc. On aura donc ainsi autant d'équations, ordinairement du premier degré, qu'il y a de coefficients *à déterminer ;* et en substituant leurs valeurs dans le développement hypothétique de fx, celui-ci sera connu entièrement.

Telle est la *méthode des coefficients indéterminés*, éminemment propre à rendre l'analogie plus directe et plus évidente, et à faire découvrir les *développements* inconnus. Pour trouver la forme de chacun, il est naturel de supposer $x=0$, bien que la variable x ne soit jamais le *zéro absolu ;* puisque c'est sur l'existence de cette variable qu'est basé le développement cherché. On ne pourrait donc pas démontrer que $a=a'$, en s'appuyant sur $x=0$, si le produit $x(b'-b+c'x-cx+\text{etc.})$ n'était pas *nul*, aussi bien par $x=0$ que par $b'-b+c'x-cx+\text{ etc.}=0$: mais ce dernier cas peut seul avoir lieu.

Considérons les trois fonctions logarithmiques semblables :

$$\text{f}x=l\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\ \text{f}y=l\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \text{ et f}z=l\left(\frac{1+z}{1-z}\right).$$

En posant $z=(x-y):(1-xy)$, il est clair, d'après le logarithme d'un quotient, qu'on aura fx—fy=fz.

Cela posé, fx étant *nulle* avec x et changeant de *signe* quand x devient $-x$, on voit qu'il faut écrire

$$\text{f}x=\text{A}x+\text{B}x^3+\text{C}x^5+\text{D}x^7+\text{E}x^9+\text{ etc.}$$

Pour déterminer les coefficients inconnus A, B, C, D, etc., tous indépendants de x et ne changeant aucunement pour fy et fz ; il faut *éliminer* fx, à l'aide de l'équation identique fx—fy=fz, en y substituant les développements semblables de fx, fy et fz. Remplaçant alors z par sa valeur, les deux membres sont divisibles par $x-y$. Posant ensuite $y=x$ et effectuant la division de A par $1-x^2$, on verra que $\text{B}=\frac{1}{3}\text{A}$, $\text{C}=\frac{1}{5}\text{A}$, $\text{D}=\frac{1}{7}\text{A}$, etc. Il en résulte donc le développement (5), à l'exception qu'au lieu de $2le$, on aura A. Mais on ne verra pas que $A=2le$, à moins d'avoir déjà calculé le nombre $e=2{,}7182818$ etc. et son logarithme ordinaire $0{,}4342945$ etc.

Fonctions dérivées. La méthode des *fonctions dérivées*, combinée avec la méthode des *coefficients inconnus*, conduit aussi, avec beaucoup de facilité, à plusieurs développements en séries illimitées, fort remarquables, particulièrement en *trigonométrie*.

On appelle, comme on sait, *dérivée* de toute fonction de la variable x, le coefficient de la première puissance de h, dans le *développement* que cette fonction donne en y remplaçant x par $x+h$. La *dérivation* s'indique au moyen de la lettre initiale d, placée devant la fonction, celle-ci entre parenthèses; et alors le signe d s'énonce *dérivée de*.

Soit à *dériver* ax^n, a étant constant, x variable et l'exposant n un nombre ou un symbole quelconque, mais donné.

D'abord si $n=3$, on aura $a(x+h)^3=ax^3+3ax^2h+$ etc. Par conséquent, en vertu de la définition, on a $\mathrm{d}(ax^3)=3ax^2$; ou bien, à cause de $3=n$, on a $\mathrm{d}(ax^n)=nax^{n-1}$.

Si $n=-1$, il vient $a(x+h)^{-1}=a:(x+h)=ax^{-1}-ax^{-2}h+$ etc. Donc $\mathrm{d}(ax^{-1})=-ax^{-2}$; c'est-à-dire encore $\mathrm{d}(ax^n)=nax^{+n-1}$, à cause de $-1=n$. Il en serait de même pour $n=\frac{1}{2}$, etc.

Les valeurs particulières de n ne pouvant changer aucunement le rôle qu'il remplit dans la dérivée de ax^n, on voit que pour toutes les valeurs imaginables de l'exposant n, on aura toujours

$$\mathrm{d}(ax^n)=nax^{n-1}.$$

Cette formule conduit à la dérivée de toute fonction *algébrique* de la variable x, *monome* ou *polynome*, etc. Il suit d'ailleurs immédiatement de la définition, que $\mathrm{d}x=1$, $\mathrm{d}(a-1)=0$, etc.

Par la formule précédente et par la méthode des coefficients indéterminés, on est conduit, avec facilité, à la *série binomiale*, développement de $(1+x)^n$, l'exposant étant quelconque, nombre ou symbole, aussi bien que x.

De même, en cherchant la *dérivée* de a^x, x étant la variable quelconque et a un nombre positif, autre que l'unité, on est conduit, au moyen de la série binomiale, aux *séries exponentielles* et *logarithmiques*: c'est même le procédé le plus direct pour y parvenir, comme on sait.

Le *calcul des dérivées* doit se développer en algèbre, non-seulement comme très-élémentaire, comme utile à la théorie des équations et comme introduction la plus naturelle aux analyses *différentielle* et *intégrale*, dont elle simplifie les notions et en particulier le *théorème de Taylor ;* mais surtout parce que ce calcul augmente les ressources de l'algèbre, pour les applications les plus utiles, et permet d'y développer la recherche du *maximum* et du *minimum* de toute *fonction* d'une seule *variable* (et même de plusieurs), lorsque ce maximum et ce minimum ne sont pas donnés, plus simplement encore, 1° par la méthode des équations *résolubles comme celles du second degré*, 2° par la *symétrie* des équations, relativement aux variables inconnues qu'elles renferment.

Toutefois il importe d'observer que, pour la résolution des équations *numériques*, le *calcul des dérivées* est suppléé, avec beaucoup d'avantages, par la méthode des *divisions successives*, ainsi qu'on le reconnaît dans la recherche des *racines entières* et dans la recherche des *transformées* que nécessite la détermination approchée des *racines réelles*, inexprimables en chiffres. C'est d'ailleurs ce que nous avons mis en évidence, dans le traité d'algèbre.

L'algèbre élémentaire, en y rendant bien saillantes les méthodes des *dérivées*, des *coefficients indéterminés* et même des *grandeurs infinitésimales*, ne peut que gagner en clarté et en simplicité, surtout si le *principe d'analogie directe*, qui domine toutes ces méthodes, y est bien mis en évidence ; ainsi que nous avons taché de le faire, dans ce qui précède, en y indiquant le rôle utile que le *mesurage*, l'*analogie*, l'*induction* et la *généralisation* remplissent dans la théorie des *symboles numériques*, c'est-à-dire dans la *génération* de certains nombres par d'autres.

X.

Méthode infinitésimale. Le *calcul infinitésimal* a pour but de trouver des nombres *finis*, à l'aide de nombres *infiniment grands* et de nombres *infiniment petits*.

Un nombre est dit *infiniment grand* ou simplement *infini* ; lorsqu'il surpasse le plus grand nombre imaginable, quelque grand que soit ce nombre imaginé. Un nombre *infini*, ordinairement désigné par ∞, est donc *variable* et nous restera toujours *inconnu*, bien qu'il existe nécessairement : dans l'*espace*, mesuré par le *mètre cube*, et dans le *temps*, mesuré par le *jour*.

Une quantité est dite *indéfiniment* ou *infiniment petite*, lorsqu'elle est moindre que la plus petite grandeur imaginable, si petite qu'elle soit. Par exemple, l'unité *finie* en usage, comme le *mètre*, étant supposée divisée en un nombre *infini* de parties égales, chaque partie est *infiniment petite ;* mais elle nous reste *inconnue*, bien qu'elle existe tout aussi bien que le dénominateur *infini*, du moins dans la pensée.

Enfin, les *grandeurs infinitésimales*, savoir les infinis et les infiniment petits, sont représentées par des nombres, toujours *inconnus*, aussi bien que ces grandeurs ; ces nombres *indéterminés* sont donc nécessairement *variables ;* désignés par des lettres, ils font partie des *quantités algébriques ;* et puisqu'ils restent toujours inconnus, ils doivent disparaître de la formule, expression d'un nombre *fini*. Ce ne peut être que comme *auxiliaires* qu'on les a introduits dans le calcul, quand on les a jugés utiles pour faciliter la détermination du nombre *fini* cherché. De sorte que le *calcul infinitésimal* n'est au fond que le calcul des *variables auxiliaires* : il rentre dans le *calcul littéral ;* mais il le simplifie, à l'aide du *principe des zéros relatifs*, que nous allons établir.

Zéros relatifs. C'est comme *auxiliaires* que les *infiniment petits* sont nécessaires, ou du moins fort utiles, pour exprimer la *continuité* et *découvrir la loi du mouvement d'un corps qui tombe dans le vide.*

Ici la *pesanteur,* regardée comme *force* constante, agit continuellement et avec la même *intensité*. Cependant, pour étudier l'*effet* de cette force et peindre à la pensée la *loi* du phénomène, on est bien forcé d'admettre que la durée t de son action sur le corps est composée d'un nombre *infini* d'instants égaux à x, chacun *infiniment petit*, et que cette force agit seulement au commencement de chaque instant x. Raisonnant dans cette hypothèse, on est conduit à une équation de la forme

$$a=b+cx,$$

dans laquelle a, b, c sont des nombres *finis* et constants. Or, cette équation subsiste, quelque petit que soit l'intervalle x ; et plus x est petit, plus l'hypothèse, d'où l'on est parti, approche de *représenter* l'état réel du phénomène ; elle le représente donc complètement lorsque x est *infiniment petit.*

D'un autre côté, puisque a, b, c sont des nombres finis et constants, tandis que le terme cx varie nécessairement avec x, sans que l'équation $a=b+cx$ cesse d'exister ; il est clair que si cx devait être conservé dans l'équation, le nombre constant a serait *toujours* égal au nombre variable $b+cx$; chose évidemment absurde. Donc l'équation $a=b+cx$ est tout-à-fait indépendante du terme variable cx ; donc on a $a=b$, absolument comme si l'infiniment petit cx était rigoureusement *nul* vis-à-vis du nombre *fini* a ou b : c'est encore le principe des variables auxiliaires.

On voit que les infiniment petits ne sont que des *éléments auxiliaires*, dans la génération des nombres, et qu'ils disparaissent de la formule, vis-à-vis des nombres finis, non parce qu'ils sont rigoureusement *nuls*, ce qui serait absurde, mais parce que la formule en est indépendante, en vertu de leur qualité d'éléments générateurs auxiliaires et pour que la différence de deux nombres constants soit constante elle-même, c'est-à-dire ne renferme point la variable infiniment petite; ce qui serait une seconde absurdité. On voit, en conclusion, que *tout nombre infiniment petit disparait vis-à-vis d'un nombre fini, comme ne pouvant ni l'augmenter ni le diminuer.* De sorte que l'infiniment petit x se néglige comme s'il était rigoureusement *nul* : c'est un *zéro relatif* aux nombres *finis* ; et l'on a exactement $1+x=1$.

Observons d'ailleurs que si, dans $a=b+cx$, on devait tenir compte de l'infiniment petit cx, pour énoncer la somme $b+cx$, il faudrait dire ce que cx est à l'égard de l'unité finie employée; chose impossible, puisque x est infiniment petit, c'est-à-dire moindre que la plus petite partie imaginable de cette unité, et reste toujours inconnu. On doit donc forcément négliger cx et le regarder comme absolument *nul* vis-à-vis de b. De cette manière, il semble que l'égalité résultante $a=b$ ne soit qu'approchée, à la vérité le plus possible, puisque l'erreur cx est infiniment petite; mais nous savons, par le principe des variables auxiliaires, que l'équation $a=b$ est rigoureusement exacte.

Observons encore qu'en mesurant et en évaluant les quantités, nous en négligeons souvent d'autres, très-petites, mais qui ne sont aucunement infinitésimales; et nous n'en regardons pas moins les nombres résultants comme parfaitement exacts, bien qu'ils ne soient réellement qu'approchés. C'est que les erreurs commises tombent au-dessous de celles qu'on peut apprécier; ainsi nous négligeons, faute de pouvoir en tenir compte, une pincée d'un tas de sable, un grain d'un sac de blé, un brin d'une meule de foin, le millième d'un franc dans une somme à payer, le métal que nos doigts enlèvent à la pièce d'or qu'ils tiennent, etc.

Règles du calcul infinitésimal. 1° Soit n un nombre *infini* et x un nombre *infiniment petit*, tels qu'on ait $nx=1$: on a démontré plus haut qu'on a exactement $1+x=1$; donc on aura aussi $x+x^2=x$, $x^2+x^3=x^2$, ..., $n+1=n$, $n^2+n=n^2$, $n^3+n^2=n^3$, etc. Donc *tout nombre est zéro relatif et doit se négliger vis-à-vis de celui qui le contient une infinité de fois*, comme ne pouvant ni l'augmenter ni le diminuer.

2° Tel est le *principe fondamental* de la méthode de Leibnitz, où $x, x^2, x^3, \ldots$, sont dits infiniment petits du *premier ordre*, du *second ordre*, du *troisième*, ...; tandis que n, $n^2, n^3, \ldots$, sont des nombres *infinis* des *ordres premier, second, troisième*, etc. Il en résulte que si x et y sont deux *infinis* ou deux *infiniment petits* de même ordre, le produit $x(1:y)=x:y$ est un nombre *fini*, mais absolument *indéterminé*, aussi bien que x et y. Il en résulte aussi que si a est un nombre donné, plus grand que l'unité, et qu'on pose $a=1+x$, x étant un nombre *fini* assigné, on aura $a^n=(1+x)^n=1+nx+$ etc. Donc si un nombre a surpasse l'unité d'une différence assignée et finie, ses puissances positives croissent avec leurs exposants et deviennent infinies avec eux; de sorte que si $a>1$, on aura toujours $a^\infty=\infty$.

De même, si $a>1$, on aura $1:a<1$ et $(1:a)^\infty=1:a^\infty=1:\infty=0$, le *zéro* étant *relatif* aux nombres finis, mais n'étant pas le *rien*, le *zéro absolu*. Si donc $c<1$, on a $c^\infty=0$.

3° Soit désignée par Sn^m la somme des puissances m ièmes des n premiers nombres entiers, m étant un exposant quelconque. Si $n=0$, on a aussi $Sn^m=0$; le nombre entier n est donc facteur de tous les termes de l'expression de Sn^m. De plus, le plus haut exposant de n, dans cette expression, est $m+1$; puisque si tous les termes de Sn^m étaient égaux au dernier n^m, on aurait $Sn^m=nn^m$. Ainsi $a, b, c, \ldots$, étant des coefficients inconnus, indépendants du nombre variable n, on doit poser

$$Sn^m=an^{m+1}+bn^m+c^{m-1}+\text{etc.}$$

Si n est *infini*, tous les termes sont *nuls* vis-à-vis du premier, comme y étant contenus chacun une infinité de fois; il vient donc simplement

$$Sn^m=an^{m+1}\ ;\ \text{d'où}\ n^m=a[n^{m+1}-(n-1)^{m+1}].$$

Développant d'après la série binomiale, réduisant et observant que tous les termes de la différence sont zéros relatifs au premier terme, on aura nécessairement

$$n^m=a(m+1)n^m\ ;\ \text{donc}\ Sn^m=\frac{1}{1+m}n^{m+1}\ldots(6)$$

Cette formule remarquable sert de base à un grand nombre d'utiles applications du calcul infinitésimal; mais il ne faut pas oublier que n est un nombre entier, infini du premier ordre, et que m est un exposant quelconque, positif ou négatif.

Si $m=-1$, la formule devient $Sn^{-1}=\frac{1}{0}$, c'est-à-dire

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\text{etc., à l'infini}, =\tfrac{1}{0}.$$

Cela signifie que la série *harmonique* n'a point de somme exprimable en chiffres. On sait d'ailleurs, par la plus simple formule logarithmique (4), que cette somme est un nombre infini, vu que $l0=-\infty$. Cette somme, en effet, est composée d'une infinité de *groupes* de fractions, chacun plus grand que $\frac{1}{2}$; car le $v$ième groupe contient 2^v fractions dont les dénominateurs croissants sont 2^v, $2^v+1, 2^v+2, \ldots, 2^v+2^v$ ou $2 \cdot 2^v$; ce groupe est donc plus grand que la dernière fraction multipliée par 2^v, c'est-à-dire plus grand que $\frac{1}{2}$.

4° Ce qui est remarquable, c'est que la série *binomiale* conduit immédiatement aux plus simples séries *exponentielles* et *logarithmiques*, par l'usage des grandeurs infinitésimales. Pour cet effet, on pose $nx=1$, n étant *infini* et x *infiniment petit*, tous les deux du premier ordre; puis ayant égard au principe des zéros relatifs, on reconnaît que le développement de $(1+x)^n$ fournit la série, expression du nombre $e=2{,}7182818$ etc. De sorte qu'on a les formules :

$$e^u=(1+x)^{nu}=(1+ux)^n=(1-x)^{-nu}=(1-ux)^n \ldots \quad (7)$$

Ces formules, où l'on peut changer u en $-u$, donnent chacune, par la formule du binome, la série exponentielle, développement de e^u.

Posant $e^y=1+u=(1+xy)^n$, on trouve, à cause de $nx=1$,

$$l(1+u)=le[n(1+u)^x-n].$$

Développant donc, il vient la série, expression de $l(1+u)$.

5° Le développement de $(1+x^2)^n$ se réduit à l'unité, absolument comme si x^2 était rigoureusement nul. En général, le produit d'un nombre infini de facteurs inégaux, tous plus grands que l'unité, n'est pas toujours *infini*, comme on pourrait le croire; car si les facteurs inégaux sont $1+r$, $1+r^2$, $1+r^4$, $1+r^8, \ldots$, à l'infini, on trouve aisément que leur produit et son *inverse* se réduisent à $1:(1-r)$ et à $1-r$. Le produit d'une infinité de facteurs n'est certainement *infini*, que quand ils sont tous égaux et >1; encore faut-il que la différence à l'unité ne soit pas infiniment petite. De sorte qu'il est nécessaire de démontrer, par exemple, que $2^\infty=\infty$.

CONTINUITÉ. 1° La méthode infinitésimale est utile, sinon indispensable, en certaines circonstances, pour passer du connu à l'inconnu et pour découvrir la vérité, qui souvent nous échapperait si nous n'étions aidés par ce puissant auxiliaire, notamment dans la génération des grandeurs *continues*. Si je veux concevoir une *variable*, *continuement* croissante ou décroissante, je n'ai, pour cela, d'autres *instruments* auxiliaires que les *infiniment petits*, éminemment propres à peindre la *continuité*, aux yeux de l'intelligence; et cette continuité me sera ainsi clairement désignée, malgré la difficulté qu'il y a parfois de saisir le *comment* et le *pourquoi*, dans la génération des grandeurs.

En effet, si une variable décroît *continuellement*, je conçois très-bien qu'elle passe successivement par tous les états possibles de grandeur décroissante; je sais que la différence entre deux états immédiatement consécutifs est si petite, qu'elle échappe aux sens et même à l'imagination; et, bien que je ne puisse connaître cette différence, d'une petitesse excessive, je sais du moins qu'elle existe nécessairement et je lui donne un nom, pour la distinguer dans le discours : je l'appelle *infiniment petite*, tout comme j'appelle x le nombre *inconnu* que je veux calculer, à l'aide de nombres donnés.

C'est ainsi que l'on peut concevoir *comment* la variable, continuement décroissante, cesse d'être *finie*, avant de devenir *nulle :* il n'y a même que les grandeurs infinitésimales qui puissent bien faire connaître toutes les propriétés des variables et faire comprendre clairement, par exemple, que *si une quantité varie continuement, elle ne peut devenir négative, de positive qu'elle était, qu'en passant par l'infiniment petit et le néant, ou par l'infiniment grand et le symbole de l'absurde*, savoir 1 sur 0, le zéro étant absolu.

L'existence des quantités infinitésimales est certaine, par plusieurs faits évidents : si les cheveux grandissent d'une manière continue, chacun doit croître, pendant chaque instant, d'une longueur *infiniment petite ;* et dans la description d'une ligne, l'intervalle qui sépare deux positions immédiatement consécutives, de la pointe à tracer, est moindre que la plus petite longueur imaginable : il est *infiniment petit.* Enfin, le nombre de mètres, composant la longueur *illimitée* de la droite qui part d'un point donné, surpasse le plus grand de tous les nombres imaginables : il est *infiniment grand* ou simplement *infini*, comme la longueur qu'il doit représenter.

Nier l'existence *réelle* des quantités infinitésimales, c'est nier, ce me semble, la *génération* des grandeurs géométriques ; c'est nier la *continuité* que les infiniment petits servent à exprimer.

La *continuité* a lieu tout aussi bien pour les angles, portions planes infinies, que pour les quantités finies; parce que, dans chaque angle, on ne considère que la *position*, plus ou moins éloignée, d'un côté à l'égard de l'autre; position *représentée* par l'arc circulaire fini, d'un rayon constant, compris entre les deux côtés de l'angle et ayant pour centre le sommet de celui-ci.

2° Pour passer clairement du connu à l'inconnu, il faut souvent les grandeurs infinitésimales ; comme pour passer de la génération numérique des prismes à celle des pyramides. Toute pyramide P, de base b et de hauteur h, peut se concevoir comme formée d'un nombre infini n de *tranches* (à bases parallèles et semblables à b), la hauteur de chacune étant la partie x de h qui donne $nx=h$. Cette hauteur x étant infiniment petite, il est clair que les deux bases de chaque tranche sont deux positions immédiatement consécutives du plan qui se meut parallèlement à b ; ces deux bases sont donc *superposées* et *égales* entre elles. De sorte que P est composée d'une infinité de *prismes*, croissants depuis le sommet et tous de même hauteur x infiniment petite ; d'où résulte que *deux pyramides quelconques, de bases équivalentes et de hauteurs égales, sont équivalentes entre elles ;* comme formées du même nombre infini de prismes équivalents chacun à chacun. Cette équivalence d'ailleurs résulte immédiatement de l'*analogie directe ;* mais les considérations ci-dessus font mieux voir le *comment* de la génération. C'est que, décomposant la pyramide dans ses parties les plus ténues, pour en exprimer la *continuité* et découvrir la *loi* qui les unit, la méthode infinitésimale, à l'aide de ces éléments auxiliaires infiniment petits, facilite la conception et peint ainsi, à la pensée, la génération de la grandeur décomposée. Ici encore la méthode infinitésimale, comme toute méthode de calcul, n'est que la règle des variables auxiliaires, pour rendre l'analogie plus évidente et plus complète.

3° Il y a certainement une grande analogie entre les modes *descriptifs* des *lignes brisées* et des *lignes courbes ;* mais l'analogie devient plus saillante encore quand on regarde toute ligne courbe comme une ligne brisée, composée d'une infinité de *côtés* ou *éléments rectilignes* chacun infiniment petit ; telle est d'ailleurs la définition, la plus claire, des *lignes courbes.*

De sorte que deux courbes planes sont *semblables* et l'une *représente* complètement l'autre, lorsqu'elles sont composées du même nombre infini d'éléments homologues proportionnels, comprenant des angles homologues égaux. Leurs longueurs sont donc comme les droites finies joignant deux couples de points respectivement homologues sur ces deux courbes.

Et remarquons-le bien, la considération d'éléments rectilignes infiniment petits n'est pas une simple hypothèse : il est clair que ces éléments résultent de la description même de la courbe, au moyen de la *pointe* à tracer.

De même, l'espace d'un point donné sur un plan étant conçu divisé en *n* parties égales à l'angle A, par *n* droites égales à R, les extrémités de celles-ci sont les sommets d'un polygone régulier de *n* côtés. Or, ces côtés sont d'autant plus petits que *n* est plus grand ; donc ils sont *infiniment petits*, aussi bien que l'angle A, donné par $An = 360°$, quand le nombre *n* devient *infini*. Et comme le polygone ne cesse pas d'être régulier, ni d'avoir R pour rayon, il est devenu un *cercle*, en réalité ; vu que l'angle A étant alors infiniment petit, n'est que l'*écart* du rayon R pour passer d'une position à la position immédiatement consécutive, lorsqu'il décrit le *cercle*.

Le polygone régulier et le cercle ont donc le même mode de génération, bien que leurs définitions soient fort différentes, du moins en apparence, car on voit, par les considérations ci-dessus, que *le cercle n'est au fond que le polygone régulier du plus grand nombre de côtés infiniment petits*, dont par suite le *rayon* et l'*apothème* sont égaux entre eux.

On voit aussi que tout *cylindre* ou tout *cône* n'est au fond qu'un *prisme* ou une *pyramide*, ayant une infinité de faces, *infiniment étroites*, et qu'il en est ainsi de tous les *corps ronds*.

4° Le cercle étant la *limite* des polygones réguliers inscrits et circonscrits, et la *méthode des limites* ayant pour but de faire voir que la *limite* jouit exactement des propriétés de la *variable limitée*, n'est encore qu'une application de l'*analogie directe* et rentre dans la *méthode infinitésimale*, ou plutôt n'est que cette dernière, rendue moins simple. Ces deux méthodes, la méthode des *coefficients* et celle des *fonctions dérivées*, dépendent essentiellement de la règle des variables auxiliaires; laquelle n'est encore que l'analogie directe. Mais la méthode infinitésimale, ramenant les lignes *courbes* aux lignes *brisées* et les surfaces *courbes* aux surfaces *polyédrales*, rend l'analogie plus sensible et conduit à la vérité, par le chemin le plus court et le mieux éclairé ; car elle fait intervenir les éléments, les plus intimes, de la génération numérique.

5° Observons d'ailleurs que la méthode infinitésimale, ayant pour but de rendre l'analogie plus complète, devient inutile quand celle-ci est évidente, c'est-à-dire quand le *principe d'analogie directe* est immédiatement applicable ; comme pour différents mesurages dans la géométrie élémentaire; et encore alors est-il plus clair, dans la génération du *cercle* et des *corps ronds*, de considérer *explicitement* les éléments générateurs auxiliaires infiniments petits. Mais, dans les mathématiques supérieures, il existe un grand nombre d'expressions numériques, pour la détermination desquelles la méthode infinitésimale devient indispensable, comme éminemment propre à exprimer la *continuité* et les modes réels de différentes générations.

On peut sans doute substituer, à la méthode infinitésimale, d'autres méthodes, regardées comme plus élémentaires ; mais le fera-t-on avec avantage, quand ces autres méthodes auront pour but de *déguiser* les infiniment grands et les infiniment petits? Car ici les grandeurs infinitésimales étant inévitables, le soin que l'on met à ne pas employer les dénominations qui leur sont propres, allonge et obscurcit le raisonnement, pour n'aboutir qu'à une pétition de principe ; comme dans le passage du *commensurable* à l'*incommensurable*, d'après la *réduction à l'absurde ;* parfaitement incompréhensible alors, si l'on n'a pas la notion des infiniment petits et parfaitement inutile, si l'on possède cette notion.

Enfin, comme la méthode infinitésimale et la méthode des coefficients à déterminer ont souvent pour but le développement des fonctions en séries, elles doivent rentrer dans les applications du principe d'analogie directe ; car celui-ci n'est que l'expression de la génération de certains nombres par d'autres, *analogues* et de mêmes dénominations deux à deux, quand on passe d'une génération à une autre, pour établir une formule générale. Il n'est donc pas surprenant que ces trois modes de recherches conduisent à des résultats identiques, ainsi qu'on l'a vu plus haut. Mais on voit aussi que le principe d'analogie directe, lorsqu'on peut l'appliquer immédiatement, l'emporte sur les deux autres modes, en clarté et en simplicité, et qu'il domine la science des signes abréviatifs ou des symboles numériques, tout aussi bien que la science de l'étendue et des choses *mesurables*, ou supposées telles.

SÉRIES ÉLÉMENTAIRES.

THÉORIE ET DIFFÉRENTS PROBLÈMES.

NOTIONS ET NOTATIONS. La doctrine des *séries*, l'une des plus utiles de l'analyse numérique, est loin encore d'être complète ; et il en est de même de la théorie de celles des *séries élémentaires*, que nous regardons comme les plus utiles, parce qu'elles servent à résoudre plusieurs problèmes importants ou remarquables. Nous nous proposons, dans ce qui va suivre, de compléter la théorie des séries élémentaires et d'en indiquer différentes applications.

On apppelle *série*, comme on sait, une suite de *termes*, croissant ou décroissant d'après une certaine *loi*, connue ou à trouver. Le *terme général* d'une série est celui qui fournit tous les autres par les valeurs entières successives de la lettre qui désigne le *rang* ou le *numéro* de ce terme : s'il est le v ième de la série, v en est le *numéro*; on peut donc représenter ce v ième terme par $f v$, car il est *fonction* de la *variable* entière et positive v. Mais si le terme général doit dépendre d'une constante arbitraire ou d'une variable quelconque x, il est plus expressif de le désigner par x_v en énonçant x *numéro* v ou simplement x,v.

On appelle donc *numéro* d'une lettre x, le nombre entier et positif qui, placé à la *droite* de cette lettre et un peu *au-dessous*, indique le *rang* que l'expression tient dans une suite de quantités de même nature, toutes désignées par x.

Telle est la *notation* des lettres *numérotées*, analogue à celle des exposants et non moins utile, particulièrement dans la résolution des problèmes qui se rapportent aux séries.

La série est dite *élémentaire* lorsque le n ième terme est *fonction rationnelle* de n. *Sommer* une série, c'est trouver la formule pour calculer aisément la somme, *arithmétique* ou *algébrique*, de ses n premiers termes, tous *positifs* ou alternativement *positifs* et *négatifs*. La série est dite *numérique* ou *littérale*, suivant que l'expression du terme général n'a pas ou a d'autres lettres que celle qui en indique le rang ou le numéro.

Si le bassin d'une fontaine contient 180 hectolitres et se vide par un robinet, versant uniformément 40 hectolitres d'eau par heure, et si pendant qu'il sort une certaine quantité d'eau du bassin, la source lui en fournit 10 fois moins ; peut-on calculer le temps pendant lequel le robinet doit être ouvert, pour que le bassin soit vide, et calculer la quantité totale d'eau évacuée ?

Cette quantité d'eau x est donnée par $x=180+0,x$, d'où $x=200$ hectolitres : c'est la *somme* de la série $180+18+1,8+0,18+0,018+\ldots$ à l'infini. De sorte que 5 heures est le temps cherché.

La théorie des séries a pour but essentiel la *génération* de nombres *inconnus* par d'autres *donnés*, croissant ou décroissant d'après une *loi* connue ; en d'autres termes, elle a pour but l'*évaluation* numérique de la *fonction*, pour une valeur déterminée de la *variable*. Cette théorie se compose donc de la résolution de ces deux problèmes généraux :

1° Connaissant la *loi* de la série, c'est-à-dire la composition du *terme général*, calculer l'expression de la somme des n premiers termes ; ce qui revient souvent à trouver la *fonction génératrice* de la série proposée.

2° Étant donnée l'expression de la somme des n premiers termes, calculer le terme général et conséquemment la loi de formation de la série : cela revient à évaluer numériquement la fonction, lorsqu'elle est donnée, quant à sa *forme* et pour une valeur déterminée de la variable ; mais il faut alors que la série soit *convergente*.

Ces deux problèmes généraux se résolvent aisément, pour les *séries élémentaires ;* mais le second problème se résout directement, en observant que *si, de la somme des* n *premiers termes de la série, on soustrait la somme des* n—1 *premiers, il reste nécessairement le* n *ième terme cherché.* Si donc on désigne par Tn ce n ième terme et par STn la somme des n premiers termes, on aura toujours

$$Tn = STn - ST(n-1).$$

Dans le premier problème, Tn est seul donné ; et il faut en déduire STn, aussi bien que $ST(n-1)$, ce qui peut exiger des *tâtonnements*, plus ou moins faciles, que l'on diminue quelquefois par la *méthode des coefficients indéterminés.* Le problème pourrait même être impossible ; et cela arriverait, par exemple, si l'on donnait $Tn = 1 : n$. Mais, pour $Tn = 1$ sur $n(n+1)$, on trouve aisément

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Si donc on pose successivement $n = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$, dans cette équation identique, et qu'on ajoute membre à membre les n égalités résultantes, on aura

$$S\frac{1}{n(n+1)} \text{ ou } \frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Diverses sommations I. Voici une méthode assez directe pour calculer Sn, Sn^2 et Sn^3 ; c'est-à-dire la somme des n premiers nombres entiers, la somme de leurs carrés et celle de leurs cubes, lesquelles se présentent dans beaucoup d'applications utiles.

D'abord on a évidemment les trois identités :

$$n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1,$$
$$n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1,$$
$$n^4 - (n-1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1.$$

Prenant successivement $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n$, dans chacune de ces identités, puis ajoutant entre elles les n égalités fournies par chacune et réduisant dans le premier membre seulement, on trouve

$$n^2 = S(2n-1) = 2Sn - n, \text{ d'où } Sn = \tfrac{1}{2}n(n+1) ;$$
$$n^3 = 3Sn^2 - 3Sn + n, \text{ d'où } Sn^2 = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1) ;$$
$$n^4 = 4Sn^3 - 6Sn^2 + 4Sn - n, \text{ d'où } Sn^3 = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2 = (Sn)^2.$$

Et puisque $S(2n-1)=n^2$, on voit que la somme des n premiers nombres *impairs* est le carré du nombre n.

II. Substituant les valeurs ci-dessus de Sn, Sn^2 et Sn^3, puis décomposant en facteurs, on trouve

$$S(2n-1)^2=4Sn^2-4Sn+n=\tfrac{1}{3}n(2n-1)(2n+1),$$
$$S(2n-1)^3=8Sn^3-12Sn^2+6Sn-n=n^2(2n^2-1),$$
$$S\tfrac{1}{2}n(n+1)=\tfrac{1}{2}Sn^2+\tfrac{1}{2}Sn=\tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2),$$
$$S\tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)=\tfrac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

La troisième de ces formules exprime la somme des n premiers nombres *triangulaires* 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, etc., tandis que la dernière exprime la somme des n premiers nombre *tétraèdres* 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, etc.

III. La relation $Tn=STn-ST(n-1)$ peut servir à découvrir et à sommer une multitude de séries élémentaires, utiles ou remarquables. Par exemple le signe $+$ du double signe ayant lieu pour n *impair* et le signe $-$, pour n *pair*, supposons $STn=\pm\tfrac{1}{2}n+\tfrac{1}{4}(1\pm1)$; on aura donc $ST(n-1)=\mp\tfrac{1}{2}(n-1)+\tfrac{1}{4}(1\mp1)$ et $Tn=\pm n$. Cela donne

$$S\pm n \text{ ou } 1-2+3-4+5-6+\ldots\pm n=\pm\tfrac{1}{2}n+\tfrac{1}{4}(1\pm1).$$

C'est ainsi qu'on est conduit aux formules que voici :

$$S\pm n^2=\pm\tfrac{1}{2}n(n+1),\quad S\pm(2n-1)=\pm n,$$
$$S\pm n^3=\pm\tfrac{1}{8}(2n+1)[2n(n+1)-1]-\tfrac{1}{8},$$
$$S\pm(2n-1)^2=\pm2n^2-\tfrac{1}{2}(1\pm1),\quad S\pm(2n-1)^3=\pm n(4n^2-3),$$
$$S\pm\tfrac{1}{2}n(n+1)=\pm\tfrac{1}{4}n(n+2)+(1\pm1)2^{-3},$$
$$S\pm\tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)=\pm\frac{n}{24}(n+2)(2n+5)+(1\pm1)2^{-4}.$$

Il est aisé de vérifier ces formules, par les premières valeurs de n : chaque fois le signe $+$ du double signe a lieu pour n impair et le signe $-$, pour n pair.

IV. Voici diverses formules pour sommer les séries *combinatoires* :

$$S\frac{a(a+c)(a+2c)\ldots(a+cn-c)}{c\cdot2c\cdot3c\cdots nc}=\frac{(a+c)(a+2c)\ldots(a+nc)}{c\cdot2c\cdot3c\cdots nc}-1,$$
$$S\frac{c\cdot2c\cdot3c\cdots nc}{a(a+c)(a+2c)\cdots a+nc-c)}=\frac{c}{a-2c}\left[1-\frac{2c\cdot3c\cdot4c\cdots(n+1)c}{a(a+c)\cdots(a+nc-c)}\right];$$
$$(a+1)Sn(n+1)\cdots(n+a-1)=n(n+1)(n+2)\cdots(n+a),$$
$$S\frac{a}{n(n+1)\cdots(n+a)}=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdots a}-\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+a-1)};$$
$$S\pm n(n+1)\cdots(n+a-1)(2n+a-1)=\pm n(n+1)\cdots(n+a),$$
$$S\pm\frac{2n+a-1}{n(n+1)\cdots(n+a)}=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdots a}\pm\frac{n}{n(n+1)\cdots(n+a-1)}.$$

Ces formules sont *inverses* deux à deux : on peut y changer c en $-c$. Si $a=2$ et $c=1$, la seconde devient $\frac{0}{0}$, que n soit *fini* ou *infini* ; les *inverses* des n premiers nombres entiers n'ont donc point de somme, qui soit *fonction rationnelle* de n.

PROGRESSIONS DES DIVERS ORDRES I. Parmi les séries élémentaires les plus utiles, on doit compter les *progressions des divers ordres*. On apppelle, comme on sait, *progression du* m *ième ordre*, toute suite de nombres dont les *différences* m *ièmes* sont *constantes*, c'est-à-dire toutes égales entre elles. En soustrayant chaque nombre de celui qui le suit immédiatement, on a les *différences premières* de ces nombres ; soustrayant chaque différence première de la suivante, il vient les *différences secondes* des mêmes nombres, et ainsi de suite. Par ce procédé, on a le *tableau :*

Nombres proposés . . .	4,	18,	48,	100,	180,	294,	etc.,
Differ. premières. . . .		14,	30,	52,	80,	114,	etc.,
Differ. secondes			16,	22,	28,	34,	etc.,
Differ. troisièmes. . . .				6,	6,	6,	etc.,

Ainsi les nombres proposés sont en progression du *troisième ordre*, tandis que leurs différences premières sont en progression du *second ordre*, et leurs différences secondes en progression *arithmétique* ou du *premier ordre*.

II. Soient a, b, c, d, etc. les premiers termes respectifs, tant des nombres proposés, que de leurs différences premières, secondes, troisièmes, etc. ; je dis que les expressions des n ièmes termes respectifs des progressions générales du second ordre et du troisième, sont :

$$a+b(n-1)+\tfrac{1}{2}c(n-1)(n-2),$$
$$a+b(n-1)+\tfrac{1}{2}c(n-1)(n-2)+\tfrac{1}{6}d(n-1)(n-2)(n-3).$$

Écrivant en effet, les deux suites de nombres fournis par $n=1,2,3,4,5,6,7$, etc. ; les différences secondes, pour la première suite, et les différences troisièmes, pour la seconde, sont constantes et respectivement c et d. Donc les deux expressions ci-dessus sont les n ièmes termes respectifs des progressions du second ordre et du troisième. Pour $a=1$ et $b=c=8$, la première expression se réduit à $(2n-1)^2$; tandis que pour $a=4$, $b=14$, $c=16$, $d=6$, la seconde expression donne $n(n+1)^2$.

III. Soient S_2, S_3 et S_4 les sommes respectives de n premiers termes des progressions générales du second ordre, du troisième et du quatrième : si e désigne la différence quatrième, constante dans cette dernière, il est facile de voir, par ce qui précède, qu'on aura

$$S_2=an+\tfrac{1}{2}bn(n-1)+\tfrac{1}{6}cn(n-1)(n-2),$$
$$S_3=S_2+\tfrac{1}{24}dn(n-1)(n-2)(n-3),$$
$$S_4=S_3+\tfrac{1}{120}en(n-1)(n-2)(n-3)(n-4).$$

Par exemple, si $a=4$, $b=14$, $c=16$, $d=6$, on trouve

$$4+18+48+100+180+294+\text{etc.}=\frac{n}{12}(n+1)(n+2)(3n+5).$$

Séries géométriques I. Il est encore une classe de séries élémentaires, recevant d'utiles applications, aussi bien que les progressions des divers genres : ce sont les *séries géométriques*. J'appelle ainsi la série qu'on trouve en multipliant, terme à terme, une progression géométrique par une progression d'un certain ordre : l'*ordre* de la série géométrique est celui de cette dernière progression. Voici la plus simple des séries géométriques du *premier ordre*, dont a est la *raison* positive ou négative, mais quelconque :

$$1, 2a, 3a^2, 4a^3, 5a^4, \ldots, na^{n-1}.$$

II. Soit S la somme des n premiers termes d'une série géométrique en a : pour calculer S, il faut en retrancher aS et désigner par x la série géométrique restante. De même, il faut retrancher ax de x et désigner par y la série restante; et ainsi de suite. Comme les coefficients des puissances de a, dans la série proposée S et dans les séries successives x, y, etc., sont les nombres en progression, leurs différences premières, leurs différences secondes, etc. ; on voit qu'on finira toujours par trouver une dernière série, progression par quotient, que l'on sait sommer ; d'où l'on aura ensuite l'expression de la somme cherchée.

C'est ainsi que, pour la série du second ordre :

$$S=1+4\cdot2+9\cdot2^2+16\cdot2^3+\ldots+n^2\cdot2^{n-1},$$

on trouve

$$S=(n^2-2n+3)2^n-3.$$

La sommation devient plus facile, lorsque la série géométrique est illimitée, comme

$$S=1+2a+3a^2+4a^3+5a^4+\text{etc., à l'infini.}$$

Dans ce cas, on trouve, pour la *fraction génératrice :*

$$S=\frac{1}{(1-a)^2}=(1-a)^{-2}.$$

Interpolation des séries. *Interpoler* une série, c'est placer, entre chaque couple de termes consécutifs, un même nombre de nouveaux termes, de telle sorte que la série résultante soit de même nature que la proposée.

Par exemple, s'il faut insérer k nouveaux termes, il est clair que la série résultante aura $(k+1)$ fois autant de termes que la proposée. Si donc celle-ci doit avoir n termes, la nouvelle série en aura $m=(k+1)n$. Remplaçant donc n par m sur $(k+1)$, le n ième terme de la série proposée devient le m ième terme de la série interpolée; laquelle est nécessairement de même nature que la première, puisqu'elle a des termes communs avec cette première.

Telle est la méthode, très-simple, pour interpoler les séries élémentaires, dont on a l'expression de n ième terme de chacune. Soit la série géométrique :

$$1\cdot 2,\ 3\cdot 2^3,\ 5\cdot 2^5,\ 7\cdot 2^7, \ldots, (2n-1)2^{2n-1};$$

si l'on veut insérer un terme entre chaque couple, on posera $m=2n$ et $n=\frac{1}{2}m$. La série interpolée est donc

$$1\cdot 2,\ 2\cdot 2^2,\ 3\cdot 2^3,\ 4\cdot 2^4,\ 5\cdot 2^5, \ldots, (m-1)2^{m-1}.$$

C'est une série géométrique du premier ordre, comme la première; mais la plus petite valeur du nombre entier m est 2. Réciproquement, la seconde série reproduit la première, en y supprimant un terme entre chaque couple, c'est-à-dire en y posant $m=2n$.

Séries illimitées I. Soit d'abord x la *génératrice* d'une progression par quotient, continuée à l'infini; on a donc

$$x=a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\text{etc.};$$

$$\text{d'où } x=a+r(a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\text{etc.}).$$

La série proposée et la série entre parenthèses sont identiques, comme ayant l'une et l'autre une infinité de termes, respectivement les mêmes; donc

$$x=a+rx;\ \text{d'où } x(1-r)=a \text{ et } x=\frac{a}{1-r}.$$

Telle est l'expression de la génératrice cherchée, quel que soit r; car en effectuant la division de a par $1-r$, on retrouve la progression proposée, pourvu que la division soit supposée continuée à l'infini. Si l'on s'arrêtait à un certain nombre de premiers termes, on n'aurait pas la génératrice x, et il faudrait avoir égard au *terme complémentaire;* lequel ici est le *reste* qu'a laissé la dernière division partielle, ayant $1-r$ pour dénominateur.

Si $r=1$, on a $x=a+a+a+\text{etc.}=a\times\infty$; cependant la formule donne $x=a:0$ ou $0\cdot x=a$: elle est absurde, à moins que le zéro ne soit considéré comme *relatif.* Mais si $r=-1$, on a exactement $x=\frac{1}{2}a$.

II. Une série est dite *convergente* lorsque la somme d'un certain nombre de premiers termes est aussi approchée qu'on le veut de la véritable valeur de la génératrice : plus le nombre de ces premiers termes est petit, plus la *convergence* est rapide.

Pour qu'une série, dont les termes sont alternativement positifs et négatifs, soit *convergente*, il suffit qu'elle soit *décroissante;* et l'on démontre aisément alors que *l'erreur*, *en plus ou en moins*, *est plus petite que le terme qui suit celui auquel on s'est arrêté.*

Mais pour qu'une série, dont tous les termes sont positifs, soit *convergente*, il faut non-seulement que les termes aillent en diminuant, mais aussi les quotients obtenus en divisant chaque terme par celui qui le précède immédiatement. Ainsi la *série harmonique*, quoique décroissante, n'est pas convergente.

Lorsque la série, dont tous les termes sont positifs, est convergente, un certain nombre de premiers termes suffit pour l'*évaluation numérique* approchée de sa génératrice ; mais pour connaître le degré d'approximation obtenu, il est nécessaire d'avoir égard au *terme complémentaire*, *somme* ou *génératrice* de tous les termes, en nombre infini, qui suivent celui auquel on s'est arrêté.

Ce terme complémentaire de la série peut rarement se calculer directement : on le détermine parfois, ou du moins sa *limite supérieure*, en comparant tous les termes négligés à ceux respectivement plus grands d'une progression géométrique, décroissante et continuée à l'infini ; comme pour le calcul du nombre e ; etc.

Quant aux séries *divergentes*, c'est-à-dire celles dont les termes vont en augmentant, elles ne sauraient servir à l'évaluation numérique approchée de la fonction génératrice, par le calcul d'un certain nombre de premiers termes : il faut, pour cela, avoir l'expression complète de la génératrice ; comme pour la progression géométrique, continuée à l'infini, laquelle est divergente pour $r=2$, par exemple. Dans ce cas, plus on prend de premiers termes, plus la valeur résultante s'éloigne de la véritable valeur de la génératrice, qui est ici $-a$, et qui ne s'obtient, par le calcul des premiers termes, qu'en tenant compte du terme complémentaire, ici facile à calculer.

III. La méthode que nous venons d'employer pour trouver l'expression de la génératrice d'une progression géométrique, continuée à l'infini, s'applique aux fractions périodiques, comme on sait ; elle s'applique à la *série périodique :*

$$x=\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{9}+\tfrac{2}{27}-\tfrac{1}{81}+\text{etc., à l'infini},$$

mise sous la forme

$$x=\tfrac{5}{9}+\tfrac{5}{81}+\tfrac{5}{729}+\text{etc.; d'où } x=\tfrac{5}{8}.$$

La même méthode s'applique aussi à la détermination de la génératrice x, dans les fractions continues *périodiques :*

$$x=3,6,6,6,6,6,\text{etc.};\ \text{d'où}\ x=\sqrt{10};$$

$$x=11,2,4,2,4,2,4,\text{etc.};\ \text{d'où}\ x=9+\sqrt{6}.$$

On sait calculer la génératrice de la série périodique

$$1+2a+2a^2+4a^3+4a^4+2a^5+2a^6+4a^7+4a^8+\text{etc.}$$

Voici des *séries périodiques* d'un autre *genre*, dont on peut aisément calculer les génératrices, d'après la méthode ci-dessus. Si, en effet, *chaque signe radical porte sur tout ce qui le suit*, on trouve

$$x=\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\text{etc.}=\sqrt{[2-\sqrt{(2+x)}]};$$

ce qui donne, pour déterminer x, l'équation

$$x^4-4x^2-x+2=0;\ \text{d'où}\ (x^2+x-1)(x^2-x-2)=0.$$

Et si tous les signes étaient $+$, on aurait encore la même équation.

Pareillement, on trouve successivement

$$x=\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{a}\sqrt{b}\ \text{etc.}=\sqrt{[a\sqrt{(bx)}]}\ \text{et}\ x^3=a^2b;$$

$$x=\sqrt{a}:\sqrt{b}:\sqrt{a}:\sqrt{b}\ \text{etc.}=\sqrt{[a:\sqrt{(b:x)}]}\ \text{et}\ bx^3=a^2.$$

Enfin, si x est la génératrice d'une suite infinie de nombres égaux, soit à $\sqrt{2}$, soit à $\frac{1}{4}$, tels que chacun *soit exposant de celui qui le précède immédiatement;* on trouve, soit $x=(\sqrt{2})^x$, soit $x=(\frac{1}{4})^x$. Ces deux équations *exponentielles*, d'un autre *genre* que celui dont on fait ordinairement usage, ne peuvent se résoudre qu'en *tâtonnant;* mais on trouve bientôt $x=2$ et $x=\frac{1}{2}$. Et si la suite infinie de nombres, chacun exposant de celui qui le précède immédiatement, était telle que ces nombres fussent alternativement a et b, on trouverait $b^x=u$ et $a^u=x$. Si donc $a^4=4$ et $b^2=2$, on aura $x=4$.

Séries récurrentes I. Les séries *récurrentes* et particulièrement celles du *second ordre*, font aussi partie des séries élémentaires. Soient t_v, t_{v+1} et t_{v+2} trois termes consécutifs d'une série et supposons que la loi de formation des termes successifs de la série soit exprimée par l'équation à *numéros*

$$t_{v+2}=4t_{v+1}-4t_v.$$

La série cherchée est dite *récurrente* du *second ordre*, parce que, pour avoir un terme quelconque, il faut prendre la somme des produits obtenus en multipliant les deux termes qui le précèdent immédiatement, *en allant de droite à gauche*, respectivement par 4 et par -4. L'ensemble de ces deux multiplicateurs *constants*, savoir $(4,-4)$, constitue l'*échelle de relation*, dont le nombre de termes marque l'*ordre* de la série. Suivant donc que l'échelle de relation a

1, 2, 3, ..., termes constants, la série est dite récurrente du *premier ordre*, du *second*, du *troisième*, etc.

Toutes les séries sont *récurrentes*, en ce sens que, pour avoir un terme quelconque, il faut toujours *recourir* à un ou à plusieurs termes précédents; mais, comme l'équation *à numéros* exprime, le plus clairement et le plus simplement possible, la *loi* de la série, la dénomination de *séries récurrentes* est réservée aux séries dont les coefficients des équations à numéros sont des nombres constants, de signes quelconques.

II. Observons maintenant que l'équation à numéros ci-dessus exprime la loi de formation d'une infinité de séries récurrentes *semblables*, du second ordre; mais, si les deux premiers termes sont connus, ou si l'on a deux conditions propres à en faire trouver les valeurs, la série sera complètement déterminée. Par exemple, si $t_1=1$ et $t_2=7$, on aura la série *numérique :*

$$1, 7, 24, 68, 176, 422, 984, 2248, 5056, \text{etc.}$$

Bien que la loi de formation des termes successifs soit déjà très-simple, il est assez long de les calculer, d'après cette loi; et l'on doit en chercher une plus simple, en calculant le *terme général* t_n. Il faut, pour cela, *résoudre* l'équation à numéros, c'est-à-dire en déduire l'expression de t_n en fonction du nombre entier n; il faut donc *éliminer* deux numéros de t. Or, l'équation proposée revient à

$$t_{v+2} - 2t_{v+1} = 2(t_{v+1} - 2t_v).$$

On peut donc éliminer par multiplication d'équations. Posant en effet, successivement $v=1,2,3,4,...,v-1$, puis multipliant entre elles les $v-1$ équations résultantes; la suppression des facteurs binomes communs donne

$$t_{v+1} - 2t_v = 5\cdot 2^{v-1}.$$

Posant $c=\frac{1}{2}$ et multipliant les deux membres par c^v, on a

$$c^v t_{v+1} - c^{v-1} t_v = \tfrac{5}{2}.$$

Sous cette forme, on peut éliminer par addition d'équations : il suffit de poser successivement $v=1, 2, 3, 4, ..., n-1$, et d'ajouter entre elles les $n-1$ équations résultantes. De cette manière, on trouve, réductions faites,

$$t_n = (5n-3)2^{n-2}.$$

Telle est l'expression du terme général; mais cette expression ne fournit pas une loi de formation plus simple que la proposée : seulement, d'après la sommation des progressions et des séries géométriques, on en tire

$$St_n = \tfrac{1}{2}(5n-8)2^n + 4;$$

ce qui donne l'expression de la somme des n premiers termes de la série en fonction explicite du nombre entier n.

Observons que l'équation à numéros proposée conduit immédiatement à l'expression de la somme S_n premiers termes de la série, en y posant successivement $v=1, 2, 3, 4, \ldots, n-2$ et en y ajoutant entre elles les $n-2$ égalités résultantes. On trouve alors, évidemment,

$$S_n-1-7=4(S_n-1-t_n)-4(S_n-t_{n-1}-t_n);$$

$$\text{d'où } S_n=4(1+t_{n-1})=\tfrac{1}{2}(5n-8)2^n+4,$$

comme plus haut. Mais il faut avoir calculé t_{n-1}, en passant par tous les termes intermédiaires, si l'on n'a pas l'expression immédiate en n de t_{n-1}; et il faut toujours tâcher d'obtenir cette expression, pour résoudre les problèmes sur les series récurrentes, où n pourrait faire partie des inconnues.

III. Considérons la fraction littérale, ramenée à la forme

$$\frac{a+bx+cx^2+\text{etc.}}{1+px+qx^2+rx^3+\text{etc.}},$$

dans laquelle x désigne le seul nombre variable et où le degré en x du dénominateur surpasse celui du numérateur; de sorte qu'en effectuant la division, le quotient sera une série illimitée.

Pour trouver cette série, il faut employer la méthode des coefficients à déterminer, non-seulement parce qu'elle substitue la multiplication à la division, ce qui est plus simple, mais surtout parce que la loi de la série devient ainsi plus facile à saisir. Observant donc que le quotient illimité est nécessairement de la forme

$$a+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+Ex^5+\text{etc.},$$

le produit de ce quotient par le diviseur sera identique avec le dividende; d'où l'on déduira les coefficients A, B, C, D, ..., par autant d'équations du premier degré. On aura ainsi la loi de formation du quotient illimité, série *récurrente* dont l'*échelle de relation* est $(-px, -qx^2, -rx^3-\text{etc.})$.

Si la fraction est $a+bx$ sur $1+px^2+qx^2$, la série récurrente est du second ordre, vu que $(-px, -qx^2)$ est son échelle de relation. Mais la loi de la série est bien mieux exprimée par l'équation à numéros

$$t_{v+2}=-pxt_{v+1}-qx^2t_v.$$

Remarquons d'ailleurs que a sur $1+px$ est la génératrice d'une série récurrente de *premier ordre*, c'est-à-dire d'une *progression géométrique*, dont $-px$ est la *raison*. Mais nous ne considérons ici que les séries récurrentes du second ordre.

IV. Non-seulement l'équation à numéros sert à calculer les termes successifs de la séries, le terme général t_n, quand il est fonction *rationnelle* de n, et l'expression de la somme S_n des n premiers termes ; mais aussi la *fraction génératrice*. De sorte que l'équation à numéros suffit pour résoudre tous les problèmes sur la série récurrente et doit par conséquent remplacer l'échelle de relation.

Par exemple, dans l'équation précédente, on sait que $t_1=a$ et $t_2=(b-ap)x$; cette équation fournit donc

$$S_n-t_1-t_2=-px(S_n-t_1-t_n)-qx^2(S_n-t_n-t_{n-1}).$$

Si n est *infini*, la somme S_n devient la *génératrice* fx de la série ; or, cette génératrice étant *finie* est nécessairement indépendante du nombre infini n, vu d'ailleurs qu'elle n'a que le seul nombre variable x. La génératrice fx ne saurait donc renfermer t_n ni t_{n-1} ; et il faut les supprimer dans l'équation précédente, qui ainsi devient

$$fx-a-bx+apx=-pxfx+apx-qx^2fx\,;$$

$$(1+px+qx^2)fx=a+bx \text{ et } fx=\frac{a+bx}{1+px+qx^2}.$$

V. Considérons la série numérique :

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, etc.

L'examen attentif des premiers termes $t_1=1$, $t_2=1$, $t_3=2=t_1+t_2$, $t_4=3=t_2+t_3$, etc. ; montre que la loi de formation est exprimée par

$$t_{v+2}=t_{v+1}+t_v.$$

Comme on ne saurait résoudre cette équation, de manière à en déduire t_n en fonction immédiate de n, il ne saurait exister de loi plus simple que celle exprimée par cette équation, pour calculer les termes successifs de la série ; et l'on trouve aisément t_n et t_{n-1}, quand n ne surpasse pas 30 ou 40. D'ailleurs l'équation donne

$$S_n=2t_n+t_{n-1}-1\,;$$

la somme S_n se trouve donc aussi avec facilité.

La génératrice en x est 1 sur $1-x-x^2$ ou 4 sur $4-4x-4x^2$: si l'on pose $a=\sqrt{5}-1$ et $b=\sqrt{5}+1$, on aura $4-4x-4x^2=(a-2x)(b+2x)$. On peut donc écrire

$$\frac{4}{4-4x-4x^2}=\frac{h}{a-2x}+\frac{k}{b+2x}.$$

Cette identité donne $h=k=\frac{2}{5}\sqrt{5}$; or la série proposée est évidemment la somme de deux progressions géométriques ; le n ième terme de la première est donc la somme des n ièmes termes des deux autres, et l'on a

$$t_n=\left[\frac{h}{a}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{5}+\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}\pm\frac{h}{b}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{5}-\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right]x^{n-1},$$

le signe + du double signe ayant lieu pour n impair.

Tel est le procédé général pour calculer t_n dans les séries récurrentes du second ordre; mais ce procédé est inutile; car bien que les radicaux disparaissent, comme cela doit être, par le développement des puissances, on ne saurait se servir de l'expression ci-dessus de t_n pour calculer la somme S_n et les termes successifs de la série : c'est toujours à l'équation à numéros qu'il faut recourir, pour cet effet, comme donnant lieu à des calculs beaucoup plus simples. On voit d'ailleurs pourquoi l'équation à numéros n'est pas résoluble ici ; c'est que t_n est compliqué de radicaux, tandis que l'équation ne contenant que des nombres entiers, ne saurait fournir des expressions *irrationnelles*, sans changer de forme et compliquer la loi de la série.

Enfin, a et b désignant deux nombres constants, positifs ou négatifs, si les lois de deux séries sont exprimées par les équations respectives

$$(a+b)x_{v+2}=ax_{v+1}+bx_v \quad \text{et} \quad avy_{v+1}=b(v+1)y_v\,;$$

ce qui précède donne les moyens d'en déduire x_n et S_n, pour la première, et y_n, S_n, pour la seconde. On pourrait avoir aussi $at_{v+2}=(a+b)t_{v+1}-bt_v$.

Loi de formation. Pour terminer cette rapide théorie des séries élémentaires, observons que si l'on n'a qu'un certain nombre de premiers termes de la série *numérique*, il faut les comparer entre eux pour voir comment ils se déduisent les uns des autres et arriver ainsi au terme général t_v. Cela exige des *tâtonnements*, plus ou moins nombreux ; et si l'on découvre ainsi une *loi* de formation, il faut la vérifier sur assez de termes successifs, pour qu'elle soit bien mise en évidence. Considérons les séries numériques :

1,1,5,13,41,121,365,1093,3281,9841, etc. ;
1,3,2,4,3,5,4,6,5,7,6,8,7,9,8,10, etc. ;
1,5,13,29,61,125,253,509,1021, etc. ;
1,6,20,56,144,352,832, etc.

Dans la première, on a $t_1=t_2=1$, $t_3=5=2t_2+3t_1$, $t_4=13=2t_3+3t_2$, $t_5=2t_4+3t_3$, etc. Sans qu'il soit besoin de continuer ces vérifications, on voit que

$$t_{v+2}=2t_{v+1}+3t_v\,;\ \text{d'où}\ t_{v+1}+t_v=2\cdot 3^{v-1},$$
$$\text{et}\ 2t_v=3^{v-1}+(-1)^{v-1}.\ \text{Donc}\ S_n=\tfrac{1}{4}(3^n\pm 1).$$

On trouve, d'une manière analogue, que la loi de formation de la seconde série proposée est exprimée par l'équation à quatre numéros

$$t_{v+3}=t_{v+2}+t_{v+1}-t_v.$$

Cette seconde série est donc *récurrente* du *troisième ordre ;* mais la comparaison des premiers termes entre eux fournit les deux lois, plus simples :

$$t_{v+1} = v+3-t_v \text{ et } t_{v+2} = 1+t_v.$$

Dans la troisième série, on voit bientôt que $t_v = 2\cdot 2^v - 3$; et dans la quatrième, $t_v = \frac{1}{2}(2v-1)\cdot 2^v$.

En général, pour résoudre les problèmes, à l'aide des *séries numériques*, il faut, d'après l'énoncé du problème proposé, former un *tableau numérique*, pour calculer, avec plus de facilité, un certain nombre de premiers termes de la série cherchée ; puis comparer ces premiers termes entre eux, et la série résultante aux séries connues, telles que les divers *genres* de progressions, pour obtenir le *terme général* et *sommer* la série. Voici plusieurs applications, nouvelles et assez remarquables, de la sommation et de la théorie des séries élémentaires.

Problème I. Une personne va et vient dans une longue avenue et s'astreint à parcourir, en sens directement contraires, des chemins successifs, croissant d'après une loi donnée, le premier chemin étant un mètre ; quel sera le chemin total x, après le n ième chemin partiel, et à quelle distance y la personne se trouvera-t-elle alors du premier point de départ ?

Supposons que n^2 soit le n ième et dernier chemin partiel ; on aura

$$x = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \text{ et } y = \pm\tfrac{1}{2}n(n+1),$$

le signe + du double signe répondant à n impair et le signe —, à n pair. Si donc $n=30$, il vient $x=9455^m$ et $y=-465^m$. La personne sera donc à 465^m du point de départ, mais du côté opposé au premier chemin partiel 1^m.

Réciproquement, si dans $n(n+1)=2y$, on pose $1+8y=z^2$, d'où $2n=z-1$ et $8y=(z+1)(z-1)$; il faudra, pour que n soit un nombre entier positif, que z soit un nombre impair tel, que $z+1$ ou $z-1$ soit divisible par 4. Ainsi en prenant $z=49$, on aura $y=300$ et $n=24$.

Le dernier chemin partiel pourrait être n mètres, $2n-1$, n^3, $(2n-1)^2$, $(2n-1)^3$, 2^{n-1} ou $n\cdot 2^{n-1}$, etc. De sorte que le problème proposé est très-général et en fournit un grand nombre de particuliers, tels que ceux où le v ième chemin partiel vaut 12_v ou $9_v\cdot 2^v$, 12_v désignant $12\cdot 11\cdot 10\cdots(12-v+1)$ sur $1\cdot 2\cdot 3\cdots v$, et de même pour 9_v. Dans le premier cas, x est la puissance douzième du binome $1+1$, et y la 12^e puissance de $1-1$.

Problème II. Un jardinier doit planter une rangée de $n+1$

arbres, de telle sorte que les intervalles entre deux arbres consécutifs croissent d'après une loi donnée, le premier étant 1^m. Comme il doit conduire une brouettée de terreau au pied de chaque arbre, quel chemin total aura-t-il à faire, le tas de terreau étant placé, soit auprès du premier arbre, soit auprès du dernier ?

Supposons que les intervalles croissent en progression géométrique, de raison r donnée : suivant que le tas de terreau sera près du premier arbre ou près du dernier, le nombre total de mètres parcourus sera

$$C=2r(r-1)^{-2}(r^n-1)-2n(r-1)^{-1},$$
$$\text{ou } C'=2n(r-1)^{-1}r^n-2(r-1)^{-2}(r^n-1).$$

Si donc $n=100$ et $r=1{,}01$, il vient $C'=20000^m$ et $C=14433^m$, environ ; d'où $C'>C$.

Le problème général en fournit un grand nombre de particuliers. Par exemple, le n ième et dernier intervalle pourrait être de n mètres, de n^2, $(2n-1)$, $(2n-1)^2$, 2^{n-1}, $n \cdot 2^{n-1}$, etc. S'il est $(2n-1)$ mètres, on aura

$$C=\tfrac{1}{3}n(n+1)(2n+1) \text{ et } C'=\tfrac{1}{3}n(n+1)(4n-1).$$

Si le dernier intervalle est n^2 mètres, on trouve que C est le produit de 2^m par la somme des n nombres, 1,5,14,30,55,91,140,..., en progression du troisième ordre. Mais comme les différences premières de ces nombres sont 4,9,16,25,36,49,..., il est clair que le n ième terme de cette progression est donné par

$$x_n-x_{n-1}=n^2 : \text{d'où } x_n=\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Par conséquent, $C=\frac{2}{3}Sn^3+Sn^2+\frac{1}{3}Sn$ et par suite

$$C=\tfrac{1}{6}n(n+1)^2(n+2).$$

Quant au chemin total C', on a d'abord

$$C'=n^2(n+1)-4n[0+1+3+6+10+\ldots+\tfrac{1}{2}n(n-1)]$$
$$+2[0+1+5+14+30+55+91+\text{etc.}] ;$$
$$\text{d'où } C'=\tfrac{1}{2}n^2(n+1)^2. \text{ Delà } C<C'.$$

Les autres hypothèses, sur la valeur du dernier intervalle, se traitent d'une manière analogue et fournissent de curieuses sommations.

Problème III. Dans un champ de blé, moissonné et mis en gerbes, celles-ci sont rangées en $n+1$ tas, ayant entre eux le même intervalle 4^m et croissant, d'après une loi donnée, le premier tas n'ayant d'ailleurs qu'une gerbe. Comme la rangée aboutit à deux chemins, au bord de l'un desquels le voiturier, pour les placer sur sa voiture, doit les réunir, en les allant prendre une à une (vu que le terrain n'est abordable ni à la voiture ni aux chevaux) ; il demande quel chemin total C ou C′ mètres il devra faire pour réunir les gerbes auprès du premier tas ou auprès du dernier ?

Supposons que les nombres de gerbes des tas successifs soient 1,2,3,4,5,6,7, etc. ; on trouve aisément

$$C=\tfrac{8}{3}n(n+1)(n+2) \text{ et } C'=\tfrac{4}{3}n(n+1)(n+2).$$

Si $n=16$, il vient $C=13056^{m}$, d'où $C=2C'$. C'est donc au bord du second chemin, c'est-à-dire près du dernier tas, que le voiturier doit réunir les gerbes, pour qu'il ait à faire un chemin total plus petit. Pour $n=16$, il y a 136 gerbes ; et si chacune pèse 15 kilos, en moyenne, le poids total à transporter sera 2040 kilos.

Si les nombres de gerbes des tas sont 1,3,5,7,9,11, etc., on trouvera

$$C=8[3+10+21+36+\ldots+n(2n+1)],$$
$$C'=8n^2(n+1)-8[1+6+15+\ldots+n(2n-1)];$$
$$C=\tfrac{4}{3}n(n+1)(4n+5) \text{ et } C'=\tfrac{4}{3}n(n+1)(2n+1).$$

Si les tas contiennent 1,2,4,8,16,..., gerbes, il vient

$$C=16(n-1)2^n+16 \text{ et } C'=16\cdot 2^n-8(n+2).$$

On peut examiner les hypothèses où le nombre de gerbes du $v$ième tas serait $v^2(2v-1)^2$, $v\cdot 2^{v-1}$, $(2v-1)^{2v-1}$, etc.

PROBLÈME IV. Quels seraient les nombres C et C′ de mètres, si les gerbes des $n+1$ tas croissaient d'après une loi donnée, aussi bien que les intervalles entre les tas successifs ?

Supposons que 1,2,3,4,5,6,7,..., soient à la fois les nombres de gerbes des tas et les nombres de mètres des intervalles successifs : il est facile de voir que

$$C=4+18+48+100+180+294+\text{etc.},$$
$$C'=n^3(n+1)-6n(0+1+3+6+10+15+\text{etc.})$$
$$+2(0+1+2\cdot 3+3\cdot 6+4\cdot 10+5\cdot 15+6\cdot 21+\text{etc.});$$
$$C=\tfrac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5) \text{ et } C'=\tfrac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+1).$$

C est la somme de n nombres en progression du troisième ordre, et il est visible que $C'<C$.

Supposons que 1,2,3,4,5,6,7,..., étant les nombres de mètres des intervalles, 1,3,5,7,9,11,13,..., soient les nombres de gerbes des tas successifs : on aura

$$C=\tfrac{1}{2}n(n+1)^2(n+2) \text{ et } C'=\tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

Mais si la première suite précédente exprime les nombres de gerbes des tas et la seconde, les nombres de mètres des intervalles, on trouvera

$$C=\tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)(3n+1),$$
$$C'=\tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)(3n-1).$$

On peut examiner les hypothèses où le nombre de mètres du v ième intervalle étant v^2, ou $(2v-1)^2$, ou 2^{v-1}, ou $v.2^{v-1}$, ou $\frac{1}{3}(2v-1)4^v$, etc., l'un de ces nombres exprimerait la quantité de gerbes contenues dans le v ième tas ou réciproquement. On pourrait même combiner chacun de ces nombres avec chacun de ceux-ci : v et $2v-1$.

PROBLÈME V. Un jardiner doit brouetter, sur le terrain et disposer, en une rangée de $n+1$ tas, une masse de terreau, de telle sorte que l'intervalle entre deux tas consécutifs soit 4^m partout et que les tas contiennent chacun a brouettées, ou bien que les nombres de brouettées contenues dans les tas successifs soient 1,2,3,4,5,6,7, etc. Où doit-il faire conduire la masse de terreau, sur la rangée, pour qu'il ait à faire le plus petit chemin total possible ?

Dans le premier cas, c'est au milieu de la rangée ; et le chemin minimum est, en mètres,

$$C=4an(n-2).$$

Dans le second cas, supposons que le terreau soit placé sur le $(v+1)$ ième tas à former. La masse de terreau devra contenir $\frac{1}{2}n(n+1)$ brouettées ; et il y aura v tas *à gauche*, contenant respectivement $v, v-1, v-2, \ldots, 3,2,1$ brouettées ; tandis qu'*à droite*, il y aura $n-v$ tas, contenant $v+2, v+3, v+4, \ldots, n+1$ brouettées. D'après cela, on trouve, pour le chemin total,

$$C=\tfrac{2}{3}v(v+1)(v+2)+\tfrac{2}{3}(n-v)(n-v+1)(2n+v+4).$$

Si donc on suppose n pair et qu'on fasse successivement $v=\frac{1}{2}n$, $\frac{1}{2}n+1$ et $\frac{1}{2}n+2$, on trouvera successivement

$$C=n(n+2)^2,\ C=(n+2)(n^2+4) \text{ et } C=n(n^2+12)+48.$$

Pour les valeurs paires de n, à partir de $n=10$, la dernière expression de C est la plus petite ; mais ce minimum de C n'est pas donné par la *dérivation* de la formule proposée, où v est variable.

PROBLÈME VI. Calculer le nombre de tous les termes du développement de la puissance n ième du polynome de $1+v$ termes, de la forme $a+b+c+d+e+$etc.

Soit d'abord x les v derniers termes : comme n est entier et positif, on aura

$$(a+x)^n=a^nx^0+na^{n-1}x+n_2a^{n-2}x^2+n_3a^{n-3}x^3+\ldots+x^n,$$

en observant que n_u est $n(n-1)(n-2)\cdots(n-u+1)$ sur $1\cdot2\cdot3\cdots u$.

On voit que le nombre de termes cherché est la somme de ceux des puissances $0,1,2,3,\ldots,n$, du polynome x de v termes. Si donc v_n désigne le nombre de tous les termes de x^n, d'où $v_0=1$, puisque $x^0=1$; il est clair que $\mathrm{f}v$, nombre de tous les termes du développement de $(a+x)^n$, où n est constant, sera

$$fv=1+v_1+v_2+v_3+...+v_n.$$

Cela posé, pour $x=b+c$, on sait que $2_n=n+1$; par conséquent

$$f3=1+2+3+4+...+(n+1)=\tfrac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

Pour $x=b+c+d$, on vient de voir que $3_n=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$; donc

$$f4=\tfrac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3).$$

En général, on voit que

$$fv=\frac{(n+1)(n+2)...(n+v-1)}{1.2...(v-1)}=\frac{v(v+1)...(v+n-1)}{1.2...n}.$$

Quelle que soit, en effet, la composition *immédiate* de fv, en n et v, cette composition reste absolument la même pour chaque valeur entière de v; donc puisque la formule ci-dessus est vérifiée pour $v=1,2,3$ et 4, elle est vraie quels que soient les nombres entiers n et v; ce qu'il fallait démontrer.

Le polynome proposé étant homogène et du premier degré, l'expression de fv est le nombre total des combinaisons différentes, *avec répétition*, que l'on peut former en prenant n à n, $1+v$ choses différentes.

Si $n=5$ et $v=3$, on aura f$3=56$. Réciproquement, si $n=5$ et f$v=56$, on trouve $v=3$; et si $v=3$, f$v=56$, il vient $n=5$. Enfin, pour $n=4$ et f$v=110$ sur 243, on pose $x=3v$, dans l'équation en v, et la transformée donne $x=2$; d'où $v=\frac{2}{3}$.

PROBLÈME VII. Quelle somme x doit-on partager à n héritiers, pour que la première partie de la part du v ième étant av ou $a(2v-1)$, la seconde partie soit la moitié du reste correspondant, le dernier reste étant nul?

Désignant par R_v et R_{v+1} deux restes consécutifs, puis observant que $R_0=x$ et $R_n=0$, on aura deux équations *à numéros*, desquelles on déduira :

$$x=a(n-1)2^n+a \text{ et } x=a(2n-3)2^n+3a.$$

Mais si la première partie de la part du v ième héritier étant va, la seconde partie était la fraction v sur $(v+1)$ du reste correspondant, le dernier étant nul, on trouverait, pour l'héritage x et pour cette v ième part p_v,

$$x=2.3.4...n(n+1)a-a \text{ et } p_v=\frac{v(a+x)}{2.3.4...(v+1)}.$$

La seconde partie de la part p_v pourrait être seulement la fraction 1 sur $(v+1)$ du reste correspondant; et l'on pourrait encore varier l'énoncé de différentes manières : chaque fois il faut *résoudre* une équation à numéros.

Problème VIII. Construire et sommer le rectangle des nombres figurés (en figures de géométrie).

D'abord dans le *tableau* ci-dessous, *chaque terme d'une ligne se trouve en ajoutant ensemble le terme immédiatement au-dessus et le terme immédiatement à gauche :*

$$\begin{array}{llllllll}
1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1,\ldots,=n\,; \\
1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8,\ldots,=n_1\,; \\
1, & 3, & 6, & 10, & 15, & 21, & 28, & 36,\ldots,=n_2\,; \\
1, & 4, & 10, & 20, & 35, & 56, & 84, & 120,\ldots,=n_3\,; \\
1, & 5, & 15, & 35, & 70, & 126, & 210, & 330,\ldots,=n_4\,; \\
1, & 6, & 21, & 56, & 126, & 252, & 462, & 972,\ldots,=n_5\,; \\
1, & 7, & 28, & 84, & 210, & 462, & 924, & 1716,\ldots,=n_6\,; \\
\ldots & & & & & & &
\end{array}$$

Par cette loi de formation, les colonnes et les lignes successives renferment respectivement les mêmes nombres. La première ligne contient n unités : ce sont les *nombres points ;* la seconde ligne se compose des n premiers nombres entiers : ce sont les *nombres en lignes droites ;* la troisième ligne se compose des n premiers *nombres triangulaires ;* la quatrième, des n premiers *nombres tétraèdres ;* et quant aux nombres des lignes suivantes, ils ne sont pas *figurés*, c'est-à-dire que les unités de chacun ne peuvent s'arranger en *figure* de géométrie ; mais ils en dépendent, et c'est pourquoi le tableau ci-dessus peut s'appeler le *rectangle des nombres figurés.*

D'après la loi de formation, le n ième terme de la v ième ligne est la somme du $(n-1)$ ième et du n ième terme de la ligne immédiatement précédente. Si donc on désigne par n_v et n_{v-1} les n ièmes termes respectifs de lignes v ième et $(v-1)$ ième, on aura

$$n_v-(n-1)_v=n_{v-1}\,;\ \text{d'où}\ n_v=Sn_{v-1}\,.$$

Ainsi *le* n *ième terme d'une ligne est la somme des* n *premiers termes de la ligne immédiatement précédente ;* comme on le vérifie directement sur le rectangle proposé.

Observant donc que $n_0=1$, on aura $n_1=S1=n$, $n_2=Sn=\frac{1}{2}n(n+1)$, $n_3=Sn_2=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$; et en général,

$$n_v=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+v-1)}{1.2.3\ldots\ v}.$$

Les valeurs particulières du nombre entier v positif ne sauraient, en effet, changer aucunement les opérations indiquées dans l'expression immédiate de n_v, en n et v ; donc puisque l'expression précédente de n_v est vérifiée pour $v=1, 2$ et 3, elle est vraie pour toutes les valeurs entières et positives de v.

Il suit de cette expression, en y changeant v en $v+1$, que

$$n n_v = (v+1)n_{v+1} - v n_v.$$

Prenant donc successivement $v=1,2,3,4,\ldots, v$ et ajoutant entre elles les égalités résultantes, il viendra

$$n+n_1+n_2+\cdots+n_v = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+v)}{1\cdot2\cdot3\cdots v}-1.$$

Telle est la somme de tous les nombres du rectangle, composé de v lignes, ayant chacune n termes; et c'est la somme demandée.

La *diagonale* 1, 2, 6, 20, 70, 252, 924, ..., et sa seconde *parallèle* 1, 4, 15, 56, 210, 792, ..., ont leurs termes respectivement divisibles par 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., et donnent les mêmes quotients 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, ..., sauf le premier 1, pour la seconde parallèle; et ces quotients respectifs sont aussi ceux des termes 1, 3, 10, 35, 126, 462, 1716, ..., de la première parallèle, divisés respectivement par 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, etc.

Le $(v+1)$ ième terme de la diagonale proposée a pour expression le produit $2\cdot6\cdot10\cdot14\cdots(4v-2)$ sur le produit $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots v$, ou bien encore

$$(v+1)(v+2)(v+3)\cdots(2v):1\cdot2\cdot3\cdots v.$$

On peut étudier le *rectangle numérique* dont 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ..., $(2n-1)$ serait la première ligne; *chaque terme des lignes suivantes s'obtenant en ajoutant le terme immédiatement à gauche au terme immédiatement au-dessus.*

Enfin, le rectangle des nombres figurés fournit le *triangle arithmétique*, dû à Pascal, en avançant de 1, 2, 3, 4, 5, ..., rangs vers la droite, les lignes successives, à partir de la seconde, et ayant, par suite, 1, 2, 3, 4, 5, ..., termes de moins que la première ligne.

Problème IX. Le fondateur d'une société littéraire enrôle tous les ans un premier membre; et chaque année, à commencer, soit par celle de son enrôlement, soit par celle qui la suit immédiatement, chaque premier membre en enrôle un deuxième, chaque deuxième un troisième, chaque troisième un quatrième, et ainsi de suite. Quel sera le nombre x de tous les membres enrôlés après n années?

Dans le premier cas, les membres enrôlés forment un *carré* de n lignes, ayant chacune n termes; les lignes successives étant les nombres de premiers, de seconds, de troisièmes, ..., membres: donc

$$x=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+n)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots n}-1.$$

Dans le second cas, suivant que chacun des premiers, seconds, troisièmes, ..., membres en enrôle 1 ou a chaque année qui suit celle de son enrôlement, on a le premier ou le second *triangle :*

$$\begin{array}{r|r}
1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots & 1,\ 1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ \ 1,\ldots \\
1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ \ldots & a,\ 2a,\ 3a,\ 4a,\ 5a,\ 6a,\ldots \\
1,\ 3,\ 6,10,15,21,\ \ldots & a^2,3a^2,6a^2,10a^2,15a^2,\ldots \\
1,\ 4,10,20,35,\ \ldots & a^3,4a^3,10a^3,20a^3,\ldots \\
1,\ 5,15,35,\ \ldots & a^4,\ 5a^4,15a^4,\ldots \\
1,\ 6,21,\ \ldots & a^5,\ 6a^5,\ldots \\
1,\ 7,\ \ldots & a^6,\ldots \\
1,\ \ldots &
\end{array}$$

Dans le premier triangle, chaque terme d'une ligne se trouve en ajoutant le terme immédiatement à gauche à celui immédiatement au-dessus de ce dernier. Désignant par n_v le quotient de $n(n-1)(n-2)\cdots(n-v+1)$ par $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots v$; il est aisé de voir que les nombres respectifs de premiers, seconds, troisièmes, ..., n ièmes membres sont :

$$n, n_2, n_3, \ldots, 1 \text{ ; d'où } x=2^n-1.$$

Il est visible; en effet, que les nombres de la v ième colonne sont les coefficients *numériques*, dans le développement de la puissance $(v-1)$ ième d'un binome, tel que $c+d$; leur somme est donc 2^{v-1}; comme il est aisé de le vérifier sur le premier triangle. Le second triangle fournit des sommations analogues.

D'ailleurs, soit m_v le nombre de tous les membres enrôlés pendant les v premières années; d'après l'énoncé, chacun de ceux-ci, comme le fondateur, en enrôle 1, pendant la $(v+1)$ ième année; le nombre de tous les membres enrôlés, au bout de la $(v+1)$ ième année, est donc

$$m_{v+1}=2m_v+1.$$

Résolvant cette équation à numéros, où $m_1=1$ et $m_n=x$, on trouve, comme plus haut, $x=2^n-1$.

PROBLÈME X. Un observateur exact a reconnu qu'au bout de 3, 6, 9, 12 et 15 minutes de son mouvement, un mobile a parcouru 9, 36, 81, 144 et 225 mètres; quelle est la loi de ce mouvement?

Ce problème ne peut se résoudre qu'en *tâtonnant*, vu que les nombres de mètres sont les sommes respectives des 3, 6, 9, 12 et 15 premiers termes d'une *série inconnue.* Il est naturel de chercher cette série parmi les *progressions :* supposons-la une progression arithmétique, dont a soit le premier terme et r la raison; on aura donc $9=\frac{3}{2}(2a+2r)$, $36=3(2a+5r)$, $81=\frac{9}{2}(2a+8r)$, $144=6(2a+11r)$ et $225=\frac{15}{2}(2a+14r)$.

Les deux premières équations donnent $a=1$ et $r=2$, valeurs qui satisfont aux trois autres équations ; donc les espaces décrits, par le mobile, pendant les minutes successives, sont 1, 3, 5, 7, 9, etc., mètres; ils croissent donc comme les nombres impairs ; et telle est la loi cherchée.

Si les valeurs $a=1$ et $r=2$ n'avaient pas satisfait aux autres équations, la série n'aurait pas été une progression du premier ordre : il eût fallu alors essayer, d'une manière analogue, si elle est du second ordre, du troisième, ou si elle est récurrente, etc. On pouvait prévoir, par les sommes 9, 36, 81, 144 et 225, qui sont toutes des carrés parfaits, que la série cherchée doit être 1, 3, 5, 7, 9, etc.

Mais *si pendant les minutes de rangs* 3, 6, 9, 12 *et* 15, *le mobile parcourait les distances* 14, 77, 194, 365 *et* 590 *mètres ;* comme ces nombres sont en progression du second ordre, dont le n ième terme se réduit à $9n(3n-2)+5$; il faudrait, pour connaître les nombres de mètres parcourus pendant les minutes successives, *interpoler* deux termes entre chaque couple de termes consécutifs de la série proposée, de telle sorte que la nouvelle série fût de même nature que la première.

D'abord il est évident que la nouvelle série aura 3 fois autant de termes que la série proposée ; si donc x désigne le rang du terme général cherché, on aura $x=3n$ et $n=\frac{1}{3}x$; d'ailleurs ce terme général doit égaler celui de la série donnée, puisque les deux séries doivent être de même nature. Substituant donc $\frac{1}{3}x$ à n, il vient $3x(x-2)+5$, pour le x ième terme de la série interpolée ; laquelle par suite est 2, 5, 14, 29, 50, 77, 110, etc.

Si par des observations bien faites, on est assuré que telle est la loi du mouvement du mobile, on aura, pour calculer le nombre de mètres qu'il a parcourus, après un nombre quelconque x de minutes, la formule $\frac{1}{2}x(2x^2-3x+5)$.

Problème XI. Quelles doivent être les valeurs de v et de x, pour que x^n soit la somme des x premiers nombres entiers consécutifs, à partir de v, ou des x premiers nombres impairs consécutifs, à partir de $2v-1$?

Dans le premier cas, suivant que $n=2$, 3 ou 4, on trouve

$$2v=x+1\ ,\ 2v=2x^2-x+1 \text{ ou } 2v=2x^3-x+1.$$

Chaque fois x doit être un nombre impair $2m-1$; ainsi en prenant successivement $x=1,3,5,7,9,11,13$, etc., on aura pour $n=3$ et pour $n=4$,

$$v=1,8,23,46,77,116,163,\ldots;\ \text{d'où } Sv=\tfrac{1}{6}m(8m^2-3m+1);$$

$$v=1,26,123,340,725,\ldots;\ \text{d'où } Sv=\tfrac{1}{2}m(m+1)[4m(m-1)+1].$$

Dans le second cas, suivant que $n=2$, 3 ou 4, on trouve

$$v=1\ ,\ 2v=2+x(x-1) \text{ ou } 2v=2+x(x+1)(x-1).$$

Chaque fois x doit être un nombre entier. Comme pour $n=2$, on a $v=1$, quel que soit x; on voit que la somme des x premiers nombres impairs est toujours x^2. Prenant successivement $x=1,2,3,4,5,6,7$, etc., on aura, pour $n=3$ et pour $n=4$,

$$v=1,2,4,7,11,16,22,\ldots;\ \text{d'où } Sv=\tfrac{1}{6}x(x^2+5)\ ;$$
$$v=1,4,13,31,61,106,\ldots;\ \text{d'où } Sv=\tfrac{1}{8}x[x^2(x+2)-x+6].$$

PROBLÈME XII. Calculer la série qui résulte de la division de $1+cx$ par $1-cx^2$, et sommer cette série, pour $x=1$.

Lorsque $x=1$, la série est *périodique* et sa loi de formation est exprimée par

$$t_{v+1}=ct_v\ ,$$

où $t_1=1$ et $t_2=c$. Donc les sommes respectives S et S', des $2n$ premiers termes et des $2n+1$ premiers, sont :

$$S=(1+c)(c^n-1):(c-1) \text{ et } S'=S+c^n.$$

Pour $c=1$, on a d'abord $S=\frac{0}{0}$, mais les véritables valeurs sont $S=n(1+c)$ et $S'=S+1$. Si $c=2$, on a $S=3(2^n-1)$ et $S'=4\cdot2^n-3$: alors la série devient

$$1,2,2,4,4,8,8,16,16,32,32,64,64, \text{ etc.}$$

PROBLÈME XIII. Chaque semestre un homme achète un pigeon femelle, donnant 2 mâles le premier semestre suivant, 2 femelles le second et ainsi alternativement (ou bien 2 femelles le premier semestre suivant, 2 mâles le second, et ainsi alternativement); quels seront les nombres M et F de tous les mâles et de toutes les femelles, au bout de n semestres ?

Dans le premier cas, on trouve, par deux *tableaux numériques* formés d'après l'énoncé, que les nombres respectifs de mâles et de femelles, pendant les semestres successifs, sont :

M... 0,2,2,4,4,6,6,8,8,10,10,12,12,14,14,16,16, etc.,
F... 1,1,3,3,5,5,7,7,9,9,11,11,13,13,15,15,17, etc.,

La première suite se compose des n premiers nombres entiers, moins la suite 1,0,1,0,1,0, etc., composée de n termes, dont la somme est $\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}(1\pm1)$ De même, la seconde suite est la somme des n premiers nombres entiers, moins la sommes des n termes 0,1,0,1,0,1, etc. Donc

$$M=\tfrac{1}{2}n^2-\tfrac{1}{4}(1\pm1) \text{ et } F=\tfrac{1}{2}n^2+\tfrac{1}{4}(1\pm1)\ ;$$

le signe + du double signe ayant lieu chaque fois pour n impair.

VARIÉTÉS. Le second cas est déjà une *variété* du problème proposé. Une seconde variété serait si chaque pigeon femelle, acheté ou né, était tué après avoir fourni 2 femelles et 2 mâles. Mais voici 24 variétés, fournissant 48 séries numériques à sommer : Au commencement de chaque semestre, un homme achète, soit un pigeon femelle, ou alternativement 1 et 2 femelles, soit un nombre de pigeons femelles égal au rang de ce semestre ou au nombre impair de même rang, ou égal au carré ou au cube de l'un de ces deux rangs. Si, dans chacun de ces cas, on suppose que chaque pigeon femelle, né ou acheté un semestre, produise, pendant chacun des semestres successifs, 1° 1 femelle et 1 mâle ; 2° 2 femelles et 1 mâle ; 3° 2 mâles et 1 femelle ; quels seront les nombres F et M de tous les pigeons femelles et de tous les pigeons mâles, au bout de n semestres ?

Problème XIV. Un particulier achète tous les lundis, 1° une poule ; 2° alternativement 2 et 3 poules ; 3° un nombre de poules égal au rang de ce lundi, à partir du commencement de ces achats ; 4° égal au nombre impair de même rang ; 5° égal au carré ou au cube de l'un de ces deux rangs. Comme chaque poule doit lui donner 2 œufs toutes les semaines, on demande quels seront les nombres x et y de poules et d'œufs en tout, au bout de n semaines ?

Ces huit problèmes se résolvent aisément chacun, par des tableaux numériques. C'est ainsi que pour le second, par exemple, on trouve

$$x=\tfrac{5}{4}n-\tfrac{1}{4}(1\pm1)\ \text{et}\ y=\tfrac{1}{4}n(5n+4)-\tfrac{1}{4}(1\pm1),$$

le signe $+$ ayant lieu chaque fois pour n impair. Dans chacun de ces huit problèmes, on saura calculer le prix total des poules, si elles coûtent chacune alternativement 1 fr. et 1 fr. 20 (ou 1 fr. 20 et 1 fr.).

Problème XV. Un boucher met n bœufs dans un pré de 5 hectares ; mais le lendemain et chaque jour suivant, il en retire un pour être tué, en remplaçant les bœufs successifs par 2, 4, 6, ..., $2n$ moutons : voyant alors qu'il n'y a plus d'herbe, il conduit tous ses moutons sur un pré de 120 ares et où l'herbe est 2 fois plus courte que dans le premier. Comme un bœuf mange autant que 6 moutons, le boucher demande pendant combien de jours tous les moutons pourront se nourrir dans le second pré, si $n=60$?

La réponse 9 jours 8 dixièmes, exige la sommation de curieuses séries numériques ; et l'on trouve que l'herbe du premier pré suffit à la nourriture d'un mouton, pendant $\tfrac{1}{6}n(n+1)(4n+5)$ jours, etc.

Problème XVI. Calculer et sommer la série dont le premier terme est 1 et dont un terme quelconque est égal à celui qui le précède immédiatement plus 4 fois ou 9 fois la somme de tous ceux qui précèdent ce dernier. Quelles sont les deux fractions génératrices en x des deux séries proposées ?

Problème XVII. Calculer le nombre total de boulets contenus, 1° dans la *pile triangulaire* dont chaque côté de la base a n boulets ; 2° dans la *pile quadrangulaire*, composée de n tranches dont celle du haut n'a qu'une seule rangée de b boulets.

Les formules résultantes servent à résoudre les problèmes particuliers que voici : 1° Un fermier ayant vendu, à 24 centimes la douzaine, une pile triangulaire d'œufs, composée de 15 tranches, demande combien il recevra d'argent, sans défaire la pile, crainte de casser des œufs ?

2° Le directeur d'un arsenal doit faire transporter à 10 lieues, le reste d'une pile, à base rectangulaire, de boulets, pesant chacun 12 livres; cette pile *tronquée*, contenant encore 12 tranches, dont celle du haut a 7 rangées de 11 boulets chacune; quel sera le prix du transport, à raison de 50 centimes par lieue et pour chaque 100 livres?

3° Avec 420 boulets, on veut construire une pile à base rectangulaire, composée de 7 tranches; combien doit-on mettre de boulets dans la longueur de la base?

4° Enfin, quel est le nombre de boulets de la pile *tronquée*, dont la base triangulaire a 17 boulets de chaque côté et dont la base supérieure contient 120 boulets?

Problème XVIII. On peut former trois espèces de piles de boulets, ayant chacune pour base un *hexagone régulier*, dont le côté contient n boulets; quels sont les nombres respectifs de boulets des trois piles? (Voyez Correspondance Mathématique et Physique, Tome V, p. 347 et suivantes).

Problème XIX. Quelle est la somme x des n termes de la série, dont le dernier est a et dont chaque terme, multiplié par le nombre impair de même rang, donne la somme de tous ceux qui le précèdent? Rép. $x=2an-t_1$.

Problème XX. Soient les deux équations à numéros :

$$(v+1)x_{v+1}-x_v=v+1\ ,$$
$$(v+1)y_{v+1}-y_v=(v+2)(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots v).$$

Sachant que $x_1=2$ et $y_1=1$, quelles sont les valeurs de x_n et y_n? Rép. $1+n$ et $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots n$.

On ne sait pas calculer $S\,1.2.3.4\ldots n$; mais on trouve

$$S\,1.2.3\ldots(n-1)n^2=2.3.4\ldots n(n+1)-1\ ,$$
$$S\pm1.2.3\ldots n(n+2)=1\pm2.3.4\ldots n(n+1).$$

Problème XXI. Un mobile a parcouru une distance de 41900 mètres, par les n chemins partiels croissants 1,4,11,22,37,56,79,..., mètres ; quelle est la valeur du nombre n? (R. 40).

Problème XXII. Un observateur exact a trouvé plusieurs fois qu'en ouvrant simultanément les deux robinets d'une fontaine, ils versent 15,35,80,168,323 litres d'eau, après 3,5,8,12,17 minutes d'écoulement; et qu'au bout de ces temps respectifs le second robinet fournit, de plus que le premier, 3,15,48,120,225 litres. Combien chaque robinet verse-t-il d'eau pendant les minutes successives? Rép. Le premier constamment 2 litres et le second 1,3,5,7,9,11, etc. Telles sont les deux *lois* de l'écoulement du liquide par les deux robinets.

Problème XXIII. Calculer la somme des n premiers termes de chacune des deux séries : 3,15,35,63,99,143, ...; et 6,24,60,120,210, 336, etc.

Problème XXIV. La vanne se soulève en même temps que le niveau s'élève dans l'écluse. On a observé qu'après 1,5,9,13,17 minutes d'écoulement, la vanne laisse échapper 2,30,90,182,306 hectolitres d'eau; quelle est la loi de l'écoulement, pendant les minutes successives? Rép. 2,4,6,8,10,12, etc. hectolitres.

Si l'on a vérifié cette loi, en variant les époques des observations, et si l'on a des motifs de penser qu'elle reste constante pendant plusieurs heures consécutives, on pourra calculer, sans aucune observation nouvelle, non-seulement la quantité d'eau écoulée pendant 30 minutes; mais aussi le nombre de minutes qu'il faudrait pour avoir 342 hectolitres d'eau.

C'est donc par l'*interpolation* que l'on peut suppléer à l'observation des faits, laquelle n'est toujours que plus ou moins approximative. On remonte ainsi, par le calcul et à l'aide de séries, à la loi exacte du mouvement qui a lieu, loi que les expériences ne pouvaient que faire pressentir. Observons d'ailleurs que l'interpolation n'est ici applicable, que parce qu'il y a le même intervalle de temps entre les observations successives; il faut donc toujours satisfaire à cette condition, pour faciliter la détermination de la loi du phénomène observé, toujours au fond celle d'un mouvement. Observons enfin que l'interpolation est aussi très-utile pour abréger les calculs, dans la construction de *tables numériques*, comme les *tables de logarithmes*. (Voyez un exemple, p. 118 des Développements et Recherches, etc.).

HAUTE ALGÈBRE.

DIFFÉRENTS PROBLÈMES SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS.

1. Le propriétaire d'une citerne, à faces rectangulaires, a besoin d'en connaître les trois dimensions x, y, z, qu'il ne saurait mesurer directement. Pour cet effet, il consulte le mémoire de l'entrepreneur et il y trouve que la capacité est de 240 hectolitres, depuis le fond jusqu'à la naissance de la voûte: que les pierres taillées pour revêtir les douze côtés, coûtent 216 fr, à raison de 6 fr. le mètre de longueur; enfin, que 6 fr. étant encore le prix du mètre carré de surface intérieure, tant des quatre murs latéraux que du pavé du fond et de la voûte, payée comme si sa surface égalait celle du fond, le tout coûte 312 fr. Peut-on, d'après cela, calculer les trois dimensions x, y, z cherchées et quelles sont leurs valeurs?

Réponse: x, y, z sont racines d'une équation finale du troisième degré, résoluble par les *divisions successives*, donnant 2, 3 et 4; mais il faut encore, par des mesurages faits à l'aide du fil-à-plomb, s'assurer que 2 mètres doit être la valeur de la profondeur z.

2. Pour creuser un réservoir d'eau, à faces rectangulaires, on paira 48 fr. par mètre de profondeur et 6 fr. par mètre carré de surface intérieure, pour le pavé du fond et pour les quatre murs latéraux. Si la capacité doit être 160 ou 200 hectolitres, quelles devront être chaque fois les trois dimensions x, y, z, la dernière étant la profondeur, pour que la dépense totale $6m$ soit la moindre possible ?

Réponse : dans le premier cas, $x=y=4$, $z=1$ et le minimum $6m=240$ fr.; dans le second cas, le minimum $6m$ donne $x=y$ et

$$x^4-40x-160=0.$$

Cette équation n'a qu'une seule racine réelle positive, comprise entre 4 et 5, que l'on peut calculer avec tel degré d'approximation l'on voudra.

3. Le côté de la base supérieure d'une citerne, tronc de pyramide régulière, à bases parallèles carrées, a un mètre de longueur, tandis que le côté de la plus grande base est inconnu. On s'est assuré, au moyen du fil-à-plomb, que le niveau de l'eau est aux distances 6^m et 2^m du fond et de l'ouverture. Ayant pu calculer d'ailleurs le côté 2^m de ce niveau, on demande, 1° combien il faudra d'heures à 4 ouvriers, pour vider la citerne, chacun pouvant en faire sortir 150 litres par heure ? 2° Combien devra coûter la réparation de la surface latérale, à raison de 50 centimes le mètre carré ? 3° Enfin, à quelle hauteur x l'eau sera-t-elle, quand on en aura pris la moitié?

Réponse : pour 3°, on aura à résoudre l'équation finale

$$x^3-30x^2+300x-468=0\text{; d'où } x=10-\sqrt[3]{532}.$$

4. Dans un grand tonneau, tronc de cône droit, à bases parallèles, et posé sur la plus grande, l'aubergiste avait une certaine quantité de vin, à 0f 80 le litre, et dont le niveau était à 1^m de distance du centre de l'ouverture, pratiquée à la base supérieure. Le domestique qui devait achever de remplir le tonneau, avec le même vin, y verse d'un vin à 1 fr. le litre et ne s'aperçoit de l'erreur que quand le niveau n'est plus qu'à 0^m2 de l'ouverture; quel est alors le prix du litre du mélange, sachant que 2^m, 1^m6 et 0^m4 sont les longueurs respectives du côté, de la hauteur et du diamètre supérieur ?

5. Pour opérer sur les radicaux imaginaires et trouver le véritable résultat, il faut toujours y mettre le facteur —1 en évidence et indiquer sur ce facteur, les puissances et les racines : on démontre ainsi que *le produit de deux radicaux imaginaires, de même indice, est imaginaire ou réel et négatif, suivant que cet indice est multiple*

de 4 *ou seulement de* 2. D'après cela, quelle est la véritable valeur de x dans $x=\sqrt[6]{(-64)}\sqrt{(-1)}$ ou dans $x=\sqrt[4]{(-1)}:\sqrt{(-1)}$?

5. Chaque fois qu'un joueur gagne, il reçoit le double de son enjeu. Il joue d'abord la somme u; et selon qu'il gagne ou qu'il perd, il joue l'enjeu précédent, augmenté ou diminué de v. Il continue ainsi à tenter le sort; on demande son gain ou sa perte, après $a+b$ parties, dont a favorables?

Soient $m, n, p, \ldots,$ des nombres entiers, dont a pairs et b impairs : selon que le joueur gagne ou perd au premier, second, troisième,..., coup, les pertes ou les gains résultants de ces coups sont exprimés par

$$\begin{aligned}&u(-1)^m,\ u(-1)^n+v(-1)^m(-1)^n,\\&u(-1)^p+v[(-1)^m+(-1)^n](-1)^p,\\&u(-1)^q+v[(-1)^m+(-1)^n+(-1)^p](-1)^q,\ \text{etc.}\end{aligned}$$

Prenant la somme de ces expressions, il est clair d'abord que le multiplicateur de u se réduit à $a-b$. Quant à celui de v, il est évidemment la somme des produits deux à deux qu'on peut former avec les $a+b$ quantités $(-1)^m$, $(-1)^n$, $(-1)^p$, etc. Et comme parmi les nombres $m, n, p, \ldots,$ il s'en trouve a pairs et b impairs, donnant chacun, les premiers $+1$ et les derniers -1, il suit de la composition des équations, que le multiplicateur de v est le coefficient du troisième terme de l'équation

$$(x-1)^a(x+1)^b=0,$$

renfermant a racines égales à 1 et b égales à -1. Par conséquent, d'après la formule du binome, le gain total ou la perte totale du joueur est

$$\begin{aligned}&z=(a-b)u+[\tfrac{1}{2}a(a-1)-ab+\tfrac{1}{2}b(b-1)]v\,;\\&\text{d'où}\ \ z=(a-b)u+\tfrac{1}{2}[(a-b)^2-(a+b)]v.\end{aligned}$$

Ce qui est remarquable dans cette solution (indiquée dans l'un des *Bulletins des Annonces scientifiques*, etc.), ce n'est pas seulement la marche suivie pour l'obtenir; mais c'est que la valeur finale de z reste absolument la même, quel que soit l'ordre des parties gagnées et perdues. Si donc $u=3$, $v=2$, $a=4$ et $b=3$, d'où $z=-3$; la perte totale du joueur sera toujours 3, soit qu'il ait gagné les quatre premières parties, ou les quatre dernières, ou la première, la 5ᵉ et la 7ᵉ, etc.

7. J'ai acheté, pour 100 fr., le même nombre x de mètres de deux étoffes, dont les prix sont les deux *moyennes proportionnelles*

entre 2 et 10 francs; quelle est la valeur de x, à moins d'un millimètre près?

8. Pour être sûr du degré d'approximation obtenu, il faut d'abord rendre *rationnel* le diviseur, s'il ne l'est pas; comment donc calculer, à moins de 0,0001 près, le quotient de 24 par $x-2$, sachant que $x^2=16$?

9. On a deux vases A et B contenant deux mélanges respectifs de a et b litres de vin avec c et d litres d'eau. On verse x litres du premier A dans le second B, puis après avoir bien mêlé le vin et l'eau, on verse x litres de B dans A : on répète ce couple de versements $n-1$ autres fois, et alors il reste y litres de vin pur dans le premier vase : quelle est la valeur de y, si l'on connaît x, et réciproquement?

Soient R_v et R_{v+1} les quantités de vin pur, contenues dans A, avant et après le v ième couple de versements : si, pour abréger, on pose

$$(a+b)(c+d+x)h=(a+b-x)(c+d)$$
$$\text{et } (c+d+x)k=(a+c)x\,;$$

on trouvera cette équation à numéros :

$$R_{v+1}=hR_v+k.$$

Préparant cette équation pour éliminer par addition, afin de la *résoudre*, c'est-à-dire d'en tirer l'expression de $R_{n+1}=y$; puis observant que $R_1=a$, il est facile de voir qu'on aura, réductions faites,

$$y=a+\frac{bc-ad}{a+b+c+d}(1-h^n).$$

Si x n'est pas nul, on a $h<1$; si donc n est infini, d'où $h^n=0$, y sera tout-à-fait indépendant de x. Mais si $a:b::c:d$, on a $y=a$, quel que soit x; et ainsi, dans ce cas, la quantité de vin pur du premier vase ne change point. Enfin, y étant donné, il en résulte h^n et par suite x.

Cet exemple montre bien l'importance des lettres numérotées dans la résolution de certains problèmes : le suivant se résout, le plus simplement possible, par des équations à numéros.

10. *Quelle fraction* x *du contenu d'un tonneau faut-il en tirer* n *fois successives, en y versant* b *litres d'eau après chaque fois, pour que ce tonneau, renfermant d'abord* a *litres de vin, contienne encore* a *litres de liquide, après le* n *ième couple de versements? Et quel sera alors le nombre* y *de litres de vin pur restant dans le tonneau?*

Soient R_v et R_{v+1} les quantités de liquide contenues dans le tonneau, avant et après le v ième couple de versements, d'où $R_1=R_{n+1}$

$=a$: il est aisé de voir que

$$R_{\nu+1}=(1-x)R_\nu+b.$$

Divisant les deux membres par $1-x$ et posant $h=1:(1-x)$, on a

$$h^\nu R_{\nu+1}-h^{\nu-1}R_\nu=bh^\nu\text{ ; d'où }(h^n-1)(ax-b)=0.$$

Et comme h^n-1 ne saurait être nul, le problème n'a que la solution unique $x=b$ sur a ; et encore, pour qu'il soit possible, faut-il qu'on ait $b<a$.

Procédant par voie de multiplication, on trouve aisément

$$y=a(1-x)^n.$$

Mais cette valeur de y changerait-elle, si l'on tirait b litres hors du tonneau, pour y verser b litres d'eau immédiatement après ?

11. On peut varier, de bien des manières, ce genre de problèmes. Par exemple, *si l'on soutirait successivement le dixième du tonneau, renfermant d'abord* 100 *litres de vin pur, et qu'on y versât, après chaque fois successives*, 1, 2, 3, 4, 5, ..., *litres d'eau ; combien y resterait-il de vin pur, après le* n *ième couple de versements ?*

De même, deux mélanges de vin et d'eau contiennent respectivement a et b litres de ce vin : on prend du premier pour verser dans le second, puis on prend autant de celui-ci pour verser dans le premier. On fait n fois successives ces deux couples de versements, en prenant successivement la moitié, le tiers, le quart, le 5^e, ..., le $(n+1)$ ième de chacun des deux mélanges, devenus séparément *homogènes ;* quelles sont à la fin les quantités respectives x et y de vin pur contenues dans les deux mélanges ?

L'équation à numéros, à cause de $y=a+b-x$, donne

$$2(n+1)^2x=(a+b)n(n+3)+2a.$$

On peut aussi calculer x et y lorsque, pour le v ième couple de versements, on prend de chaque mélange, la fraction v sur $(v+1)$, ou $(2v-1)$ sur $(2v+1)$, ou $2v$ sur $(2v+1)$, ou v sur 2^v, ou etc.

12. La notation des *numéros* facilite singulièrement les calculs et remplace, avec beaucoup d'avantage, la notation des *fonctions*, dans la recherche de la formule *exponentielle*, la plus générale. Soient a, c et z trois constantes arbitraires, liées entre elles par l'équation $cz=a^c-1$, a étant un nombre positif, autre que l'unité; soit d'ailleurs x une variable quelconque et soit la fonction *combinatoire*

$$x_v=\frac{x(x-c)(x-2c)(x-3c)\cdots(x-cv+c)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots v}.$$

On sait que a^x peut représenter un nombre ou un symbole quelconque, suivant la valeur assignée à x ; on peut donc poser

$$a^x = 1 + Ax + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 + Ex_5 + \text{etc.}$$

Appliquant la méthode pour calculer les coefficients A, B, C, D, E, ..., tous indépendants de x, et observant que $(x+c)_v - x_v = cx_{v-1}$, on trouvera

$$a^x = 1 + xz + x_2z^2 + x_3z^3 + x_4z^4 + x_5z^5 + \text{etc.}$$

Réciproquement, si la série du second membre est donnée, on en déduit la *fonction génératrice* a^x, en ayant égard aux équations proposées et d'après l'analogie directe.

La formule précédente est d'autant plus remarquable qu'on en déduit immédiatement la série binomiale, développement de $(1+z)^x$, en posant $c=1$ et la série exponentielle, développement de e^x, en posant $c=0$ et $e^z=a$. On en déduit le théorème de M. de *Stainville* et la *série générale de Taylor* (que nous avons établi directement dans les *Développements et Recherches de mathématiques élémentaires*).

13. Élimination. De toutes les méthodes générales de l'*élimination* entre deux équations de degrés quelconques, la plus simple et par conséquent la plus exacte, *consiste à faire disparaître successivement les deux premiers termes, puis les deux derniers, et ainsi pour les couples successifs de nouvelles équations* : c'est même le procédé le plus simple pour trouver le *plus grand commun diviseur* entre deux polynomes en x, égalés à zéro, lorsque la décomposition en facteurs, beaucoup plus simple, pour cet effet, ne se présente pas immédiatement. Mais, bien que l'élimination par *addition* ou *soustraction* d'équations soit la méthode générale la plus simple, elle entraîne parfois à des calculs fort compliqués ; et l'élimination serait souvent impraticable, sans les *procédés particuliers*, à l'aide desquels on peut l'effectuer. Mais ces procédés particuliers ne peuvent s'acquérir qu'en s'exerçant sur des exemples choisis, où il faut développer un peu d'adresse.

Lorsqu'on a moins d'équations que d'inconnues, le problème est *indéterminé*, à moins que l'énoncé ne renferme des *conditions particulières*, propres à limiter le nombre de solutions. Ces conditions particulières sont ordinairement d'avoir des nombres *entiers positifs* ou des nombres *rationnels*, comme dans chacune des équations

$$(4^x : 4^y)l6 = 4l2 + 2yl3 \text{ et } (x^2+y^2)2^x = (x^2+6y^2)2^y,$$

où, pour la dernière, il faut poser $x = vy$.

14. On doit bien observer que la condition particulière d'avoir un *maximum* ou un *minimum*, pour l'une des lettres proposées, non-seulement limite le nombre de solutions, mais conduit souvent

à de curieux problèmes, donc voici plusieurs exemples, applications de la *théorie des équations* :

Considérons chacune des deux équations, à une inconnue x :

$$x^3-px^2+27x-m^3=0 \text{ et}$$
$$x^4-px^3+132x^2-320x+m^4=0.$$

On peut calculer les racines et le *maximum* de m, dans la première, ou le *minimum* de m dans la seconde, sachant que ces racines sont en *proportion continue*, dans le premier cas et simplement *proportionnelles*, dans le second.

15. Résoudre chacune des trois équations, à une inconnue x :

$$(lx)^2-2ln\cdot lx=3-4ln,\quad x^4-4x^3+qx^2+rx+9=0$$
$$\text{et } x^4-2ax^3-nx^2+2a^2bx+a^2b^2=0\ ;$$

sachant que n est un maximum ou un minimum, dans la première, où l désigne un *logarithme* de base 10 ; que la seconde doit avoir deux racines égales et de signes contraires, le coefficient q devant être un minimum ; enfin, que dans la troisième, n étant un nombre donné, a doit être un maximum et b un minimum.

16. Le produit $(ax^2+bx+c)(cx^2+bx+a)$ est *identique* avec le polynome *nul* $5x^4-36x^3+mx^2-nx+p$; quel est le minimum de m et quelle sont les valeurs correspondantes de toutes les lettres ? — Peut-on calculer le maximum de la somme de trois nombres positifs, en proportion continue, dont la somme des carrés est 128 ?

17. Résoudre l'équation *inverse* du cinquième degré :

$$x^5-px^4+qx^3-cqx^2-c^2px+c^5=0,$$

où c est un nombre connu, tandis que p et q doivent être l'un un maximum et l'autre un minimum.

18. Calculer le maximum ou le minimum, soit de a, b étant connu, soit de b, a étant donné, et résoudre, par des procédés particuliers d'élimination, chacun des systèmes d'équations :

$uv(u+v)=a$,	$uv(u^2-v^2)=2a$,	$u+v=z$, $uvz=a$
$u^2v^2(u^2+v^2)=b$;	$u^4+v^4=2b$;	et $uv(u^2+v^2)=bz$;

$$x+y+y^2=a \text{ et } x^2y^2+x^2y^4+xy+2x^2y^3+xy^2=b.$$

Dans le dernier système, la seconde équation est du second degré, par rapport à l'inconnue auxiliaire $xy(y+1)$; de sorte que si $a=14$, le maximum de b est 2450. On peut calculer les huit systèmes de valeurs lorsque $a=14$ et $b=600$.

19. Si l'on résout successivement, par rapport aux deux inconnues x et y, l'équation

$$m\sqrt{(1+x^2+y^2)}=a+b+cy,$$

où a, b, c sont des nombres donnés, on reconnaît que le maximum de m, donné par $m^2=a^2+b^2+c^2$, répond à $ax=b$ et à $ay=c$.

20. S'il faut calculer le maximum de k ou le minimum de h, dans le système d'équations, où a, b, c, sont positifs et donnés, savoir :

$$xyz=k \text{ et } ax+by+cz=h\,;$$

on simplifiera les calculs à l'aide des inconnues *auxiliaires* $t=ax$, $u=by$ et $v=cz$, d'où

$$tuv=abck \text{ et } t+u+v=h.$$

Éliminant t, par exemple, l'équation finale est *symétrique* par rapport à u et à v, où par suite il faut poser $u=p+q$ et $v=p-q$; etc.

21. Dans quatre équations du premier degré, à quatre inconnues v, x, y, z, les seconds membres sont les puissances 1,2,3 et 4 de m, tandis que les coefficients sont aussi les puissances successives 1, 2, 3 et 4 de a pour v, de b pour x, de c pour y et de d pour z. Les nombres c, d et m sont donnés ; mais les coefficients a et b sont variables et seulement assujettis à la condition $a+b=n$, n étant un nombre connu. Peut-on abréger l'élimination et mettre sous la forme *logarithmique* chacune des expressions des inconnues ? Peut-on calculer les valeurs de a et de b qui rendent z un maximum ou un minimum ?

22. On sait que toute équation *binome* peut se ramener à la forme $x^n=\pm 1$, et que même, si n est impair, les n racines n ièmes de -1 ne sont que celles de $+1$, prises avec leurs signes changés ; on sait que l'une quelconque des racines n ièmes de l'unité, pourvu qu'elle soit *imaginaire* et n un *nombre premier*, suffit pour calculer les $n-1$ autres ; tandis que si n est le produit de deux facteurs premiers, comme dans $x^{15}=-1$, la résolution de cette dernière équation est ramenée *à multiplier successivement chacune des trois valeurs de* x, *dans* $x^3=-1$, *par chacune des cinq valeurs de* x, *dans* $x^5=1$; enfin, la *décomposition en facteurs inconnus* conduit à exprimer, *par des radicaux du second degré*, les racines des équations ci-dessus, aussi bien que de $x^4+1=0$ et de $x^8+1=0$. Cela posé, résoudre complètement l'équation

$$x^9-2p^2x^7+81x^5-x^4+2p^2x^2-81=0\,,$$

sachant que le nombre p doit y être un minimum.

23. Toute équation *trinome* en x résulte de l'élimination de y entre les deux équations, à deux inconnues, savoir :

$$xy=c \text{ et } x^n+y^n=d.$$

Pour exprimer, s'il est possible, tous les systèmes de valeurs, *par des radicaux du second degré*, on a les formules :

$$x+y=u\ ,\ dz=2a\ ,\ c^n z^2=a^2-b\ ,$$

$$x\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{(a\pm\sqrt{b})}=[\tfrac{1}{2}u\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}u^2-c)}]\sqrt[n]{z}\ ,$$

$$d=u^n-ncu^{n-2}+\frac{n(n-3)}{1\cdot2}c^2u^{n-4}-\frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot2\cdot3}c^3u^{n-6}$$

$$+\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}c^4u^{n-8}-\text{etc.}$$

Ici n est un nombre entier positif ; z un nombre arbitraire dont on dispose pour que c soit rationnel quand a et b sont donnés, et réciproquement ; enfin, u est une inconnue auxiliaire, qui doit être entière, pour qu'on n'ait que des radicaux du second degré. La loi des termes de la dernière équation, où u est l'inconnue, est facile à saisir : cette équation se déduit de la relation évidente

$$x^n+y^n=u(x^{n-1}+y^{n-1})-c(x^{n-2}+y^{n-2}).$$

D'après les formules ci-dessus, on peut exprimer, par des radicaux du second degré, les divers couples de racines, dans les systèmes d'équations :

$$x^3+y^3=20 \text{ et } xy=-2,\ x^4+y^4=-8 \text{ et } xy=2.$$

24. Les équations binomes servent à démontrer les *véritables* règles du calcul des radicaux et à en expliquer les *particularités*. Elles servent aussi *à résoudre toute équation du troisième degré*, ramenée à la forme

$$x^3+3px+q=0.$$

Ici il faut employer les inconnues auxiliaires u et v, telles qu'on ait

$$u+v=x\ ,\ u^3+v^3=-q \text{ et } uv=-p.$$

Les deux dernières fournissent la *réduite*

$$u^6+qu^3=p^3,\ \text{d'où } u^3=-\tfrac{1}{2}q\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+p^3)}.$$

De sorte que si p est *négatif*, mais *inconnu*, q étant donné *positif* ou *négatif*, le *maximum* de p, donné par $p^3=\frac{1}{4}q^2$, fait connaître les trois valeurs de x, par les trois de u et les trois de v, choisies de telle sorte qu'on ait toujours $uv=-p$.

Si p étant *négatif* et connu, on a $p^3>\frac{1}{4}q^2$, les trois valeurs de x ont toutes la forme *imaginaire*, bien que l'une d'elles au moins soit *réelle*. Il ne faut pas chercher à exprimer, par des radicaux du second degré, la racine cubique de la double valeur imaginaire de u^3 ; car alors on retomberait sur l'équation proposée. Tel est le cas *irréductible*, qui a longtemps arrêté les algébristes, et qui se reproduit dans la solution de l'équation générale du *quatrième degré*, dont la *réduite* est abaissée au troisième. Aussi a-t-on abandonné l'emploi des formules générales pour la résolution des équations numériques du troisième degré, que l'on peut d'ailleurs traiter par les *lignes trigonométriques*.

25. Les formules générales, du 3^e degré, appliquées à l'équation

$$x^3-6x-40=0,$$

donnent, pour l'une de ses racines, l'expression irrationnelle

$$x=\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})}+\sqrt[3]{(20-14\sqrt{2})}.$$

Or, il faut ici quelqu'attention pour reconnaître que les deux racines cubiques sont $2+\sqrt{2}$ et $2-\sqrt{2}$; de sorte que $x=4$, valeur que l'on trouverait immédiatement par la recherche des *racines entières*; laquelle donne en même temps $x^2+4x+10=0$, pour calculer les deux autres racines.

En général, dans toute équation numérique du troisième degré, ayant nécessairement une racine réelle, il suffit de calculer cette racine, soit exactement, soit par une approximation demandée, pour qu'en divisant le premier membre par le binome résultant, le quotient, égalé à zéro, donne les deux autres racines; lesquelles peuvent être imaginaires.

26. La résolution de l'équation générale du quatrième degré revient à décomposer son premier membre en deux facteurs réels du second degré en x, tels que x^2+hx+k et x^2+mx+n : si cette décomposition ne se présente pas immédiatement, on identifie le produit des deux facteurs trinomes avec le premier membre proposé; ce qui donne quatre *conditions*, propres à déterminer h, k, m et n. L'élimination est bien facile dans

$$x^4+qx^2+rx+s=0,$$

laquelle donne les quatre conditions cherchées :

$$h+m=0,\ hm+k+n=q,\ hn+km=r \text{ et } kn=s.$$

Posant en effet, $u=m^2$, l'équation finale, c'est-à-dire la *réduite*, est

$$u^3+2qu^2+(q^2-4s)u-r^2=0.$$

Or, si $s=9$ et si la réduite, privée du terme en u, doit avoir la racine $u=4$, peut-on calculer les deux coefficients q et r, ainsi que les quatre racines de l'équation proposée? Quelles sont ces racines?

La décomposition en facteurs trinomes, dans $x^4-3x^2-12x+5=0$, se fait bien plus simplement en observant que si les coefficients cherchés doivent être *entiers*, la condition $kn=5$ ne peut donner que l'un des deux systèmes : $k=5$ et $n=1$, $k=-5$ et $n=-1$. Le premier seul réussit; et les deux facteurs demandés sont : x^2+3x+5 et x^2-3x+1.

A cause de $10x^2=8x^2+2x^2$, la décomposition se présente immédiatement dans $x^4-4x^3+10x^2-8x+16=0$.

27. La résolution de toute équation rationnelle en x, désignée par $X=0$, exige qu'on en *abaisse* le degré, par la décomposition de X en facteurs *binomes* ou *trinomes*. Or, l'abaissement se fait toujours, comme on sait, lorsqu'il existe des relations *particulières* entre les racines, ou lorsqu'il y a des *racines égales;* lorsque les coefficients, à égales distances des extrêmes, sont égaux et de signes quelconques, aussi bien que ces deux extrêmes, ou du moins lorsque l'équation peut se ramener à cette forme *réciproque*, comme pour toute équation *inverse;* enfin, lorsque l'équation $X=0$ admet au moins deux racines égales et de *signes contraires*. Chaque fois il faut chercher, par élimination, le p. g. c. d. entre les deux premiers membres de deux équations en x.

Par exemple, l'équation étant mise sous la forme

$$f(x^2)+xf'(x^2)=0,$$

il est clair que si elle admet des racines égales et de signes contraires, il faudra pour calculer ces racines, égaler à zéro le p. g. c. d. entre les premiers membres des deux équations $f(x^2)=0$ et $f'(x^2)=0$. C'est ainsi que l'on peut calculer toutes les racines de l'équation

$$x^6-5x^4+5ax^3-(a^2-16)x^2-80x+16a=0,$$

sachant qu'il y a des racines égales et de signes contraires, et que a doit y être un maximum ou un minimum.

28. De même, si a doit être un maximum ou un minimum, on pourra calculer toutes les racines de l'équation

$$x^6+8x^5+4ax^4-16ax^2-128x-64=0.$$

On lui donne la forme *réciproque* en posant $x=2y$.

29. Le bassin d'une fontaine est rempli en 48 minutes par quatre tuyaux, coulant ensemble; quel nombre x d'heures faut-il au premier seul pour remplir le bassin ? On sait que le second seul met une heure de plus, le troisième une heure de moins et le quatrième 3 heures de plus que le premier seul. Rép. $x=3$.

30. Si $nx=1$ et que n soit *infini* du premier ordre, quelle est la valeur de la puissance n ième de la fraction $(6-2x)$ sur $(6+3x)$? Réponse : environ 0,2144.

31. La lettre l désignant les logarithmes dont 10 est la base, l'équation *indéterminée* $x+y\sqrt{-1}=l(3-\sqrt{-3})$, est résolue par le système réel $x=\frac{1}{2}l12$ et $y=-\frac{1}{6}\pi le$; mais y admet une infinité de valeurs différentes. Comment vérifier ces résultats ?

32. Les côtés de la base rectangulaire, d'un parallélipipède obli-

que de cuivre sont 3 et 4 décimètres, tandis que sa hauteur est 0^m8 et que la *projection* d'une arête latérale sur la base vaut 0^m6 ; couper ce parallélipipède en deux parties, l'une double de l'autre, par une section *minimum*, et calculer le volume du cuivre perdu, la section ayant 0^m002 d'épaisseur.

33. Quelle somme x un négociant doit-il prélever au commencement de chaque année, sur la somme a qu'il a dans le commerce, pour qu'il y ait encore a francs au bout de n années ? On sait que ses fonds augmentent chaque année de leur c ième partie.

34. On sait que toute équation rationnelle en x, de degré m, admet au moins autant de racines imaginaires que de *variations* introduites par le rétablissement des termes qui manquent ; d'où résulte que si trois coefficients consécutifs forment une *proportion continue*, il y a au moins deux racines imaginaires. Vérifier ces deux propositions en résolvant complètement les équations :

$$x^3+2x-33=0,\ x^4+ax^3-a^2x^2+a^3x-2a^4=0,$$
$$x^4+a^2x^3-a^3x^2+a^4=0,\ x^6+a^2x^4-a^4x^2-a^6=0.$$

35. Deux mélanges d'eau et de vin, ayant chacun a litres de liquide, renferment l'un b et l'autre c litres de ce vin. On tire d litres du premier, pour verser dans le second, puis le mélange résultant étant devenu *homogène*, on tire d litres de celui-ci, pour verser dans l'autre : on réitère $n-1$ autres fois ces deux versements successifs ; quel est alors le nombre x de litres de vin pur contenu dans le premier mélange ? Et si $dn=a$, n étant *infini* du premier ordre, que devient l'expression de x, fournie par l'équation à numéros ?

Dans ce dernier cas, e désignant toujours 2,7182818 etc., on trouve

$$2x=(b-c)e^{-2}+b+c.$$

36. Partager le nombre 20 en deux parties telles, que la somme de leurs puissances quatrièmes et du produit de leurs carrés soit un minimum ?

37. Un vase contient a litres de vin : il peut se remplir par un tuyau, ne fournissant que de l'eau, et se vider par un autre, versant uniformément c litres de liquide par heure, aussi bien que le premier. Comme l'hypothèse que les mélanges d'eau et de vin, après les *instants* successifs, sont chacun *homogène*, s'éloigne peu de la réalité ; on demande quel est le nombre x d'heures pendant lequel les deux tuyaux doivent couler à la fois, pour qu'il ne reste plus que b litres de vin pur dans le vase ?

Réponse : posant $av=c$, l'équation à numéros donne

$$ae^{-vx}=b.$$

Les 200 litres du vin contenu dans le tonneau coûtant chacun 2 fr., supposons que le premier tuyau y verse d'un vin à 0 fr. 80 le litre et qu'on fasse couler les deux tuyaux pendant $2\frac{1}{2}$ heures, chacun versant par heure 30 litres : il faudra alors calculer b, pour connaître le prix réel du litre des vins mélangés dans le tonneau.

38. Soit ns la somme constante de n nombres inégaux, démontrer que leur produit p est le plus grand possible lorsque les nombres proposés sont égaux à s (s^n est donc le maximum de ce produit).

On voit que si les n nombres proposés ne sont pas tous égaux, on aura toujours $p < s^n$ ou $s > \sqrt[n]{p}$; c'est-à-dire que *leur moyenne arithmétique sera toujours plus grande que leur moyenne géométrique*. Pour deux nombres a et b, on vérifie directement que $\frac{1}{2}(a+b) > \sqrt{(ab)}$.

Il est facile aussi de vérifier directement, pour $n=2$ ou 3, que si n fractions ne sont pas toutes égales, le carré de la moyenne arithmétique des produits formés en multipliant entre eux les deux termes de chacune, est moindre que le produit des moyennes arithmétiques tant des carrés des numérateurs que des carrés des dénominateurs.

39. Soit $i=\sqrt{-1}$; si l'on effectue de plusieurs manières le produit p des quatre facteurs imaginaires $a+bi$, $a-bi$, $c+di$ et $c-di$, on trouve que le produit p reçoit les trois formes, de même valeur numérique, savoir : $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$, $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$ et $(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$. Calculer ces trois résultats et vérifier que les deux derniers se réduisent au premier. Vérifier aussi que le quotient de $a+bi$ par $c+di$ est de la forme $p+qi$. Enfin, démontrer que le produit des deux facteurs imaginaires $a+bi$ et $c+di$ ne peut devenir nul que par l'un des deux facteurs proposés.

40. 1° Connaissant seulement le nombre $2p$, calculer les valeurs de toutes les lettres, répondant au maximum de t, dans le système d'équations :

$$x^2+y^2+xy=a^2,\ x^2+z^2+xz=b^2,$$
$$y^2+z^2+yz=c^2,\ a+b+c=2p,$$
$$x+y+z=v,\ 16t^2=4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2.$$

Si a, b, c et par conséquent $2p$ étaient seuls donnés, pourrait-on en déduire les valeurs de v, x, y, z ?

2° Considérons le système d'équations, où $nu=1$, n étant un nombre entier *infini* du premier ordre et u *infiniment petit*, savoir :

$$m=mnu,\ 1-cu=k,\ 1-du=h,\ x=x_{mn+1},$$
$$y=y_{mn+1},\ x_{\nu+1}=kx_\nu,\ y_{\nu+1}=hy_\nu+rux_\nu.$$

Connaissant c, d, r, m, on peut, d'après les formules (7), calculer x et y ; quelles sont les expressions de ces deux inconnues ? (On peut voir le problème remarquable, résolu par ces équations, p. 147 et suiv. des *Mélanges d'algèbre*).

3° Sachant que $x_1=a$ et $y_1=b$, calculer x_n et y_n dans

$$2x_{\nu+1}=x_\nu+y_\nu \text{ et } 2y_{\nu+1}=y_\nu+x_{\nu+1}.$$

41. Quel est le maximum de a dans le système d'équations $(x+1)(y+1)=10$ et $(x^2+1)(y^2+1)=a$?

42. Résoudre complètement l'équation homogène

$$x^4+2ax^3-8abx^2+2a^2bx+a^2b^2=0 ;$$

c'est-à-dire calculer les nombres inconnus a, b, x, sachant que le premier membre se réduit à l'unité lorsque $x=1$ et que a doit avoir une valeur maximum et une valeur minimum.

43. Étant données les deux équations à trois inconnues x, y, z, savoir :

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz=G ,$$
$$x^2+y^2+z^2=d^2 ;$$

calculer les valeurs *maximum* et *minimum* du nombre *variable* d.

Pour cet effet, posant $d^2v=G$, on élimine d'abord G entre la première équation et $vx^2+vy^2+vz^2=G$; ce qui donne l'équation finale

$$ax^2+by^2+cz^2-2Dxy-2Exz-2Fyz=0 ,$$

dans laquelle a, b, c représentent $v-A$, $v-B$, $v-C$ et où il faut déterminer le *minimum* et le *maximum* de v. Or, résolvant cette équation par rapport à x et égalant à zéro la quantité sous le radical, laquelle est rendue nulle par la plus grande et la plus petite valeur de v ; résolvant l'équation résultante par rapport à y et égalant à zéros la quantité sous le radical, on aura, réductions faites,

$$v^3-(A+B+C)v^2+(AB+AC+BC-D^2-E^2-F^2)v$$
$$-(ABC+2DEF-CD^2-BE^2-AF^2)=0.$$

Cette équation *symétrique* est facile à retenir ; elle a pour racines, le maximum et le minimum de v, et une valeur intermédiaire. Ces racines, substituées dans $d^2v=G$, font connaître le minimum et le maximum de d, ainsi que la valeur intermédiaire. On aura ensuite les valeurs correspondantes de x, y et z.

Prenons pour exemple, les deux équations :

$$2xz+2yz-2xy=25 \text{ et } x^2+y^2+z^2=d^2,$$

dans lesquelles $A=B=C=0$, $D=-1$ et $E=F=1$. On a

$$v^3-3v+2=0 \text{ ; d'où } v=1, -2 \text{ et } 1.$$

Donc d^2 a deux maximums égaux à 25 et un minimum égal à $-12,5$; c'est-à-dire, en ayant seulement égard aux valeurs *absolues*, les deux plus grandes valeurs de d sont égales à 5 et la plus petite, à $\sqrt{12,5}$.

44. Considérons le système d'équations, où x, y, z sont les inconnues ; A,B,C,D, x', y', z', des nombres donnés ; m et n deux constantes arbitraires, et d un nombre variable inconnu, savoir :

$$x-x'=m(z-z') ,\ y-y'=n(z-z') ,$$
$$Ax+By+Cz+D=0 \text{ et}$$
$$d^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2.$$

Il s'agit de calculer le minimum de d, au moyen de ces équations.

D'abord en posant $E=Ax'+By'+Cz'+D$, la troisième devient

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')+E=0.$$

Combinant cette équation avec les deux premières, pour en déduire les valeurs de $x-x'$, $y-y'$ et $z-z'$; puis substituant ces valeurs dans la quatrième équation proposée, on trouve en posant $d=Eu$:

$$(Am+Bn+C)^2u^2=1+m^2+n^2.$$

Dans cette équation, m et n sont arbitraires, et il faut calculer leurs valeurs pour que u ou d soit un minimum.

45. Chaque signe radical portant sur tous les facteurs qui le suivent, quelle doit être la valeur *rationnelle* de a pour que x soit un nombre entier positif dans l'équation indéterminée

$$\sqrt{a\sqrt{a^2\sqrt{a^3\sqrt{a^4\ldots\sqrt{a^x}}}}}=a^{x-2}\,?$$

Réponse : $x+2=2^y$ et $a=2^y-4+2^{y-2}$. La plus petite valeur 1 de a répond à $x=2$ et $y=2$. Pour $x=6$, on a $y=3$ et $a=\frac{11}{8}$; pour $x=14$, 30, 62, ..., on a $y=4, 5, 6, \ldots$; et a reçoit des valeurs rationnelles croissantes.

46. Le signe de division portant surtout ce qui le suit, quel doit être l'exposant y de a pour que x soit un nombre *impair* dans l'équation indéterminée

$$a:a^4:a^9:a^{16}:\ldots:a^{x^2}=a^y\,?$$

47. Chaque signe — portant sur tout ce qui le suit, quelle est la valeur *impaire* de x, dans

$$85\tfrac{1}{3}=2-2^2-2^3-2^4-\ldots-2^x\,?$$

48. Chaque signe de division portant sur tout ce qui le suit, dans la série dont les n termes sont le nombre donné a, ayant pour exposants successifs les puissances $0,1,2,3,4,\ldots, n-1$ du nombre 2 ; quelle est la génératrice x de cette série et comment en calculer la valeur, pour $a=2$ et $n=10$, par exemple ?

49. Lorsque les centres de n cercles, qui se touchent extérieurement, sont en ligne droite et que tous ont une tangente extérieure commune, hauteur du trapèze rectangle, ayant pour bases les rayons a et x du premier cercle et du n ième ; quelle est l'expression de l'aire de ce trapèze, lorsque les rayons a et $2a$ des deux premiers cercles proposés sont donnés numériquement ? Calculer aussi la somme des aires des $n-1$ triangles *mixtilignes*, entre la tangente commune et les cercles proposés, sachant d'ailleurs que cette tangente fait un angle de 60° avec la droite des centres. Enfin, calculer la somme des aires des $n-1$ cercles, dont les rayons sont les perpendiculaires à la droite des centres proposés, élevées par les points de contact donnés et limitées aux centres des cercles cherchés, sur la tangente commune proposée. (Il existe des problèmes analogues pour n sphères, qui se *touchent* extérieurement et qui sont *inscrites* dans une *surface conique* circulaire).

50. Lorsque le diamètre $2r=16$, d'un cercle tracé, est la hauteur d'un

trapèze rectangle, dont les bases $a=12$ et $b=4$ sont les portions interceptées sur les tangentes aux extrémités de $2r$, par le second côté latéral d, inconnu, aussi bien que la corde $2c$, que la circonférence intercepte sur d; si l'on mène sur d et par les extrémités de $2c$, deux perpendiculaires; 1° elles divisent $2r$ en trois parties dont les deux extrêmes sont égales chacune à $r-\sqrt{(r^2-ab)}$ ou à 4; 2° elles sont bases du trapèze rectangle T, dont $2c$ est la hauteur. De sorte que si h est la demi-somme de ces deux bases, on aura

$$d^2=(a-b)^2+4r^2,\text{ d'où } d=\sqrt{320};$$
$$2cd=4r\sqrt{(r^2-ab)},\text{ d'où } c=\sqrt{12,8};$$
$$dh=r(a+b),\text{ d'où } h=\sqrt{51,2};$$
$$T=2ch=51,2,\text{ d'où } T=h^2.$$

Démontrer ces différents théorèmes numériques et calculer le périmètre de T. On voit que pour $r=8$, $a=3b=\frac{3}{2}r$, on a $T=h^2$; mais cette dernière relation n'est pas générale.

51. Les côtés 10 et 20, de la base d'un prisme triangulaire droit, comprennent l'angle de 120°; peut-on mener, par le côté opposé, un plan tel que l'angle opposé, de la section résultante, soit droit? Si cela se peut, quelles sont les expressions numériques du volume et de la surface du tétraèdre résultant?

52. Les côtés de la base d'un prisme triangulaire sont $a=15$, $b=14$ et $c=13$; par le sommet opposé au premier côté, on mène un plan tel, que la section soit un triangle équilatéral; quelle est alors la mesure de la pyramide quadrangulaire résultante?

53. On a un vase, dont les surfaces intérieures du fond et du couvercle sont deux carrés égaux, ayant le même côté $c=0^m2$ et leurs centres sur la même verticale. La paroi latérale est composée de quatre demi-surfaces cylindriques, droites et circulaires, dont le côté c est à la fois la génératrice et la demi-circonférence de la base de chacune; le restant de la paroi se composant de quatre fuseaux sphériques égaux. On demande quelles sont la capacité et la surface totale intérieure du vase, et combien on paira pour faire dorer cette dernière, à raison de 3 fr. le décimètre carré?

54. Un anneau rond, d'argent massif, a son centre aux distances 1 et 2 décimètres des bords, intérieur et extérieur; on veut le fondre en un vase cylindrique dont la paroi ait partout 2 millimètres d'épaisseur, y compris le couvercle, et dont la hauteur intérieure soit égale au diamètre de la base. On demande quelles doivent être les dimensions du moule et quelle sera la capacité du vase?

55. Calculer les valeurs de l'angle x dans chacune des deux équations $2\sin^2x-2\cos^2x=\sin x-\cos x$ et $2\sin^3x+2\cos^3x-2\sin x-2\cos x=\sin x\cos x\sqrt{2}$.

56. Calculer les valeurs de l'angle x dans chacune des équations :

$$\sin 3x = \cos x \sin 2x \; ; \; 2\sin x + \sin 2x = 2 \sin 3x \; ;$$

$$2 \sin x + 2 \sin 3x = 3 \; ; \; 2 \cos x - 2 \cos 3x = \sqrt{3}.$$

Les deux dernières ont chacune trois solutions réelles.

57. Peut-on, sans le secours des tables, calculer les valeurs de l'angle x, répondant au maximum de a, dans

$$\sin 2x \sin 4x = a \cos^2 x \,?$$

58. Construire les valeurs de l'angle x répondant au maximum de a, dans $\sin 2x \sin 3x = a \cos x$, ou dans

$$\sin 4x - a \sin^4 x = 2 \sin 2x.$$

59. Construire les valeurs de l'angle x, répondant au minimum de a, dans $\cos 2x \cos 3x = (a-4) \cos x$, ou dans

$$\cos 4x + 7 = 2a \cos 3x.$$

60. Calculer les cinq valeurs réelles de x, dans

$$\sin x + 2 \sin 3x + \sin 5x = 4 \cos^2 x.$$

61. Sachant que $\cos x$ a deux valeurs égales et de signes contraires, calculer les valeurs réelles de l'arc x, dans

$$\cos^2 x - 2 \cos 3x + 2 \cos 5x = \sin^2 x.$$

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

DIVERSES APPLICATIONS DU CALCUL INFINITÉSIMAL.

Séries trigonométriques. Les notions développées dans ce qui précède, étant appliquées à la *géométrie analytique*, conduisent à résoudre, très-simplement, différents problèmes, ordinairement réservés au *Calcul intégral*, lequel d'ailleurs n'est au fond que le *Calcul infinitésimal*. C'est que ces notions expriment, le plus immédiatement possible, la génération numérique de certaines quantités continues et la rendent tout-à-fait élémentaire. Aussi trouve-t-on, non-seulement en Géométrie, mais surtout en Mécanique, une foule de questions utiles, pour les solutions desquelles les notions élémentaires du Calcul infinitésimal, développées plus haut, remplacent avec avantage les Mathématiques transcendantes. Pour le prouver nous pourrions en citer beaucoup d'exemples importants ; mais nous nous bornerons, dans ce qui va suivre, à indiquer les solutions de quelques problèmes de géométrie analytique, propres à faire connaître les procédés les plus simples pour appliquer le calcul infinitésimal.

I. Soit d'abord x un arc circulaire, de rayon 1 : on a vu en trigonométrie, que $\sin x = x - \langle \frac{1}{6} x^3$. Si donc x est un nombre *infi-*

niment petit, du premier *ordre*, on aura exactement

$$\sin x = x\,;\ \text{d'où}\ \cos x = 1\ \text{et}\ \text{tang}\, x = x.$$

D'après cela, en supposant que l'accroissement h de l'arc *fini* quelconque x, de rayon 1, soit *infiniment petit*, du premier ordre, on trouve aisément les *dérivées* premières de $\sin x$, $\cos x$, $\text{tang}\, x$ et de $\sin nx$, $\cos nx$, $\text{tang}\, nx$, n étant constant. On sait d'ailleurs comment la méthode des *dérivées*, combinée avec celle des coefficients *inconnus*, mais *constants*, peut fournir les séries, expressions de $\sin x$ et de $\cos x$, en fonctions de l'arc x.

II. Soit posé $\sin x = s$ et soit n un nombre constant quelconque : comme $\sin nx$ change de signe avec s, tandis qu'il n'en est pas de même de $\cos nx$, on doit écrire :

$$\sin nx = as + bs^3 + cs^5 + ds^7 + es^9 + \text{etc.},$$
$$\cos nx = 1 + As^2 + Bs^4 + Cs^6 + Ds^8 + \text{etc.}$$

Par une double dérivation successive, chacune de ces deux identités fournit deux séries, très-remarquables, faciles à écrire.

III. De même, en dérivant deux fois successives chacune des deux identités évidentes :

$$\sin^2 x = ax^2 + bx^4 + cx^6 + dx^8 + \text{etc.},$$
$$\sin^2 nx = as^2 + bs^4 + cs^6 + ds^8 + \text{etc.},$$

il en résulte des séries, faciles à écrire, très-commode pour calculer les *tables* des *sinus naturels*.

IV. Maintenant, soit a un arc numérique circulaire *fini*, dont 1 est le rayon ; soit posé $a = nx$, n étant infini et par conséquent x infiniment petit, tous les deux du premier ordre, et soient désignées par $S \sin^m nx$ et $S \cos^m nx$ les sommes respectives des puissances m ièmes, tant des *sinus* que des *cosinus*, des arcs $x, 2x, 3x, 4x, \ldots, nx$. Il s'agit de calculer les expressions de $S \sin^m nx$ et $S \cos^m nx$ pour $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ et 7. Or, toutes ces expressions se déduisent des deux suivantes, que nous avons démontrées ailleurs, savoir :

$$xS \sin nx = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}a \quad \text{et} \quad xS \cos nx = \sin a.$$

Cela posé, on trouve, dans différents traités de trigonométrie, les formules :

$$2\sin^2 a = 1 - \cos 2a\,,\quad 2\cos^2 a = 1 + \cos 2a\,;$$
$$4\sin^3 a = 3\sin a - \sin 3a\,,\quad 4\cos^3 a = 3\cos a + \cos 3a\,;$$
$$8\sin^4 a = 3 + \cos 4a - 4\cos 2a\,,$$
$$8\cos^4 a = 3 + \cos 4a + 4\cos 2a\,;$$
$$16\sin^5 a = \sin 5a - 5\sin 3a + 10\sin a\,,$$
$$16\cos^5 a = \cos 5a + 5\cos 3a + 10\cos a\,;$$
$$32\sin^6 a = 10 - \cos 6a + 6\cos 4a - 15\cos 2a\,,$$

$$32\cos^6 a=10+\cos 6a+6\cos 4a+15\cos 2a;$$
$$64\sin^7 a=35\sin a-21\sin 3a+7\sin 5a-\sin 7a,$$
$$64\cos^7 a=35\cos a+21\cos 3a+7\cos 5a+\cos 7a.$$

Si donc on observe que a devenant $2a$, $3a$, ..., x devient $2x$, $3x$, etc., vu que $a=nx$; les formules précédentes, avec les expressions de $x\mathrm{S}\sin nx$ et $x\mathrm{S}\cos nx$, donnent

$$4x\mathrm{S}\sin^2 nx=2a-\sin 2a,$$
$$4x\mathrm{S}\cos^2 nx=2a+\sin 2a;$$
$$6x\mathrm{S}\sin^3 nx=9\sin^2\tfrac{1}{2}a-\sin^2\tfrac{3}{2}a,$$
$$12x\mathrm{S}\cos^3 nx=9\sin a+\sin 3a;$$
$$32x\mathrm{S}\sin^4 nx=12a-8\sin 2a+\sin 4a,$$
$$32x\mathrm{S}\cos^4 nx=12a+8\sin 2a+\sin 4a;$$
$$16x\mathrm{S}\sin^5 nx=\tfrac{2}{5}\sin^2\tfrac{5}{2}a-\tfrac{10}{3}\sin^2\tfrac{3}{2}a+20\sin^2\tfrac{1}{2}a,$$
$$16x\mathrm{S}\cos^5 nx=\tfrac{1}{5}\sin 5a+\tfrac{5}{3}\sin 3a+10\sin a;$$
$$32x\mathrm{S}\sin^6 nx=10a-\tfrac{1}{6}\sin 6a+\tfrac{3}{2}\sin 4a-\tfrac{15}{2}\sin 2a,$$
$$32x\mathrm{S}\cos^6 nx=10a+\tfrac{1}{6}\sin 6a+\tfrac{3}{2}\sin 4a+\tfrac{15}{2}\sin 2a;$$
$$64x\mathrm{S}\sin^7 nx=70\sin^2\tfrac{1}{2}a-14\sin^2\tfrac{3}{2}a+\tfrac{14}{5}\sin^2\tfrac{5}{2}a-\tfrac{2}{7}\sin^2\tfrac{7}{2}a;$$
$$64x\mathrm{S}\cos^7 nx=35\sin a+7\sin 3a+\tfrac{7}{5}\sin 5a+\tfrac{1}{7}\sin 7a.$$

Ces différentes sommes deviennent nulles avec l'arc a, lequel est assez ordinairement un multiple ou un sous-multiple du quadrant $90°$ ou $\frac{1}{2}\pi$: elles sont nécessaires aux applications du calcul infinitésimal, soit à la *quadrature* des courbes polaires, particulièrement des *Lemniscates*, soit à la *cubature* des surfaces que ces courbes engendrent par leurs *révolutions* autour d'*axes* immobiles.

V. Les formules précédentes conduisent, avec facilité, à d'autres *sommations*, telles que pour les séries, du nombre infini de n de termes chacune, provenant des produits : $\sin nx\cos nx$, $\sin^2 nx\cos nx$, $\sin nx\cos^2 nx$, $\sin^2 nx\cos^2 nx$, $\sin^3 nx\cos^4 nx$, etc. C'est ainsi qu'on trouve, par exemple,

$$x\mathrm{S}\sin^4 nx\cos^3 nx=\tfrac{1}{5}\sin^5 a-\tfrac{1}{7}\sin^7 a.$$

On sait d'ailleurs que plusieurs développements remarquables, en séries trigonométriques, résultent de l'emploi simultané de la méthode infinitésimale, de la méthode des coefficients indéterminés et de la méthode des *fonctions dérivées*.

VI. La méthode infinitésimale devient indispensable, pour rendre l'analogie plus saillante et plus complète dans une foule de recherches de géométrie analytique, où même les grandeurs infinitésimales sont inévitables, comme *auxiliaires*. Par exemple, si l'on veut établir la *similitude* de deux courbes ou de deux surfaces courbes, *représentées* par des équations *semblables* et *homogènes*, les constantes *homologues* de ces équations étant *proportionnelles* et l'angles des coordonnées étant le même dans les deux systèmes ; on doit faire intervenir une infinité de couples de points *homologues*, infiniment voisins, sur ces deux courbes ou sur ces deux surfaces courbes.

Telle est une application importante de la méthode infinitésimale : il en existe un grand nombre d'autres, non moins utiles, comme on sait, et dont quelques-unes sont indiquées dans ce qui va suivre.

PROBLÈME I. Connaissant numériquement le sinus s de l'arc A, dont 1 est le rayon, calculer la longueur de cet arc, c'est-à-dire le *rectifier*.

Imaginons des perpendiculaires divisant le sinus s en un nombre infini n de parties égales à x, chacune infiniment petite du premier ordre : nous aurons $s=nx$ et ces perpendiculaires divisent aussi l'arc A en n parties infiniment petites, mais inégales. Soit y la v ième de ces parties de A, comprise entre les perpendiculaires de rangs v et $v-1$, à partir du pied de s; vx est donc le sinus de la somme des v premiers arcs partiels, tandis que $\sqrt{(1-v^2x^2)}$ en est le cosinus. Or, l'arc infiniment petit y, comme *élément rectiligne* de l'arc A, se confond avec sa corde (vu d'ailleurs que celle-ci est moindre que la corde de $2y$, savoir $2\sin y=2y-<\frac{1}{3}y^3$) : donc y et 1 sont les hypoténuses de deux triangles équiangles, dont x et $\cos vx$ sont deux autres côtés homologues, et l'on a

$$x:\cos vx=y:1\text{ ; d'où }y=x(1-v^2x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Développant, d'après la formule du binome ; puis observant que $A=Sy$, $s=nx$ et $Sn^m=n^{m+1}:(1+m)$; on trouvera

$$A=s+\frac{1}{2}\frac{s^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{s^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{s^7}{7}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{s^9}{9}+\text{etc.}$$

Telle est la série connue, bien remarquable, par laquelle on peut rectifier l'arc A, dès que s est donné numériquement. Si $s=\frac{1}{2}$, d'où $A=30°=\frac{1}{6}\pi$, la somme de tous les termes, qui suivent le 10^e, ne donne point de décimale du 8^e ordre, et l'on trouve

$$\frac{1}{6}\pi=0{,}52359877\text{ ; d'où }\pi=3{,}1415926.$$

PROBLÈME II. Rectifier l'arc A, de rayon 1, dont la tangente t est donnée numériquement.

Concevant t divisée en un nombre infini n de parties égales à x, d'où $t=nx$, il est clair que si nous posons $\operatorname{tang} y=vx$ et $\operatorname{tang}(y+u)=(v+1)x$, u sera moindre que x et conséquemment infiniment petit ; nous aurons donc tang $u=u$ et

$$(1-u \text{ tang } y) \text{ tang } (y+u)=\text{tang } y+u.$$

Multipliant les deux membres par $1+u$ tang y, puis négligeant les infiniments petits du second ordre, comme devant disparaître à la fin du calcul, on aura

$$\text{tang } (y+u)=\text{tang } y+u(1+\text{tang}^2 y) \text{ ; d'où}$$
$$(v+1)x=vx+u(1+v^2x^2) \text{ et } u=x(1+v^2x^2)^{-1}.$$

Développant donc et sommant, on trouve aisément

$$\text{A}=t-\tfrac{1}{3}t^3+\tfrac{1}{5}t^5-\tfrac{1}{7}t^7+\tfrac{1}{9}t^9-\text{etc.}$$

Cette série connue est peu convergente pour $t=1$, qui répond à $\text{A}=45^\circ=\frac{1}{4}\pi$, et même pour $t^2=\frac{1}{3}$, qui répond à $\text{A}=30^\circ=\frac{1}{6}\pi$; mais on peut, comme on sait, la transformer en deux autres séries, rapidement convergentes, pour calculer le rapport π, avec autant de décimales exactes qu'on voudra.

Observons d'ailleurs que l'arc A, ayant 1 pour tangente, ne vaut pas seulement $\frac{1}{4}\pi$, mais bien $\frac{1}{4}\pi+2k\pi$, k étant un nombre entier quelconque. Et comme en posant $i=\sqrt{-1}$, on a $(1-i)\sqrt{-1}=1+i$, d'où $l(-1)=2l(1+i)-2l(1-i)$; on voit que

$$l(-1)=4\text{A}k\sqrt{-1}.$$

Problème III. Opérer la *quadrature* de quelques courbes planes, rapportées à des coordonnées rectangulaires.

Considérons l'*hyperbole* du troisième ordre $x^2y=h^3$: il s'agit de calculer l'aire du *segment* T, compris entre la courbe, l'axe des x et les ordonnées qui répondent à $x=h$ et à $x=h+k$. Les ordonnées, depuis $x=h$ jusqu'à $x=h+k$, divisent k en un nombre infini n de parties égales à z, d'où $k=nz$; elles divisent donc T en n tranches, toutes de même hauteur z infiniment petite. Soit T′ la v ième de ces tranches, à partir de $x=h$; la plus grande de ses deux bases parallèles est donc fournie par

$$(h+vz)^2y=h^3.$$

A cause de la hauteur z infiniment petite, T′ n'est pas surpassée d'un infiniment petit du second ordre par le rectangle numérique yz ; et cette différence se trouvant multipliée par n, dans l'expression de T′, ne produit qu'un nombre infiniment petit, *nul* vis-à-vis de T. On a donc exactement $\text{T}'=yz$, et par suite

$$\text{T}'=h^3z(h+vz)^{-2}.$$

Développant, d'après la formule du binome ; posant ensuite successivement $v=1,2,3,4,\ldots,n$ et ajoutant ; on verra que l'aire du segment T est donnée par

$$(h+k)T=h^2k\text{ ; d'où }T=h^2k(h+k)^{-1}.$$

C'est en concevant le segment divisé en n tranches, à bases parallèles et toutes de même hauteur z infiniment petite, et regardant, par suite, chaque tranche comme un rectangle, que l'on peut calculer l'aire de ce segment T. Ainsi pour l'*hyperbole équilatère* $xy=h^2$, si T est compris entre la courbe, l'axe des x et les ordonnées, répondant aux abscisses h et $h+k$; la méthode ci-dessus donne

$$Tle=h^2[l(h+k)-lh].$$

Pour la *parabole* $y=hx^m$, où m est un exposant positif, entier ou fractionnaire ; si T est compris entre la courbe, l'axe des x et l'ordonnée b, qui répond à $x=a$; on aura pour calculer l'aire du segment T, l'équation

$$(1+m)T=ab\text{ ; d'où }T=\tfrac{2}{3}ab\text{ , si }m=\tfrac{1}{2}.$$

On sait aussi calculer chaque fois le *volume de révolution* que le segment T engendre autour de l'axe des x rectangulaires.

PROBLÈME IV. Opérer la quadrature d'une courbe plane dont on a l'*équation polaire*.

Les coordonnées étant rectangulaires, considérons la courbe

$$(x^2+y^2)^2=4a^2(y^2+xy).$$

Cette courbe, ainsi représentée, est assez difficile à discuter ; et pour en connaître aisément la forme, il faut la rapporter à des coordonnées *polaires*. Or, soit r le *rayon vecteur* variable, lorsque le *pôle* est à l'origine, et soit ω l'arc circulaire, de rayon 1, qui mesure l'angle de r avec l'axe des x, pris pour *axe polaire* : la courbe proposée est donc représentée par

$$r^2=4a\ (\sin^2\omega+\sin\omega\cos\omega)\text{ ,}$$

ou bien par

$$r^2=2a^2(1+\sin 2\omega-\cos 2\omega).$$

On voit que la somme proposée est composée de deux *feuilles*, égales et opposées au pôle, *symétrique* par rapport à l'axe des x. Ces deux feuilles, en forme de *cœur*, se raccordent à l'origine ou pôle, *centre* et double *inflexion* de la courbe. Celle-ci est divisée en quatre parties égales, par ses deux axes de *symétrie* des x et des y ; mais elle n'a que le seul *axe* $4a$, sur l'axe des y, et aboutissant aux deux *points de rebroussement* des deux cœurs.

Soit A l'aire limitée par l'axe des y et le quart de la courbe proposée : le rayon vecteur r, dans ses positions successives, depuis

$\omega=0$ jusqu'à $\omega=90°=\frac{1}{2}\pi$, divise ce quadrant en un nombre infini n de parties égales à u, d'où $\omega=\frac{1}{2}\pi=nu$; il divise donc l'aire A en n secteurs élémentaires, ayant tous le même angle au centre mesuré par l'arc circulaire u infiniment petit, de rayon 1. Soit T′ le v ième de ces secteurs, à partir de l'axe des x : à cause de l'angle au centre infiniment petit, T′ n'est au fond qu'un triangle rectiligne isocèle ; car il n'en diffère pas d'un infiniment petit du second ordre, *nul* à la fin du calcul : donc puisque u est infiniment petit, on a $\sin u=u$, $T'=\frac{1}{2}r^2u$ et par suite

$$T'=a^2(u+u\sin 2vu-u\cos 2vu).$$

De là donc, en faisant successivement $v=1, 2, 3, 4, \ldots, n$ et ajoutant, il vient

$$ST' \text{ ou } A=a^2(nu+uS\sin 2nu-uS\cos 2nu).$$

Or, $nu=\frac{1}{2}\pi$, $uS\sin 2nu=\sin^2 nu=1$ et $uS\cos 2nu=\frac{1}{2}\sin 2nu=0$. Par ces valeurs, on trouve finalement

$$A=\tfrac{1}{2}\pi a^2+a^2 \text{ et } 4A=2\pi a^2+4a^2,$$

Ce moyen de quadrature des courbes polaires doit être remarqué, comme très-général. On voit d'ailleurs que, sans l'usage *explicite* des quantités infinitésimales, pour exprimer la *continuité* et la *génération*, la quadrature des courbes planes serait parfois très-difficile, sinon impossible.

Problème V. Par le point $x=a$, sur l'axe des x rectangulaires, on mène une oblique arbitraire au plan des yz, puis de l'origne la perpendiculaire P à cette oblique, et du point donné la parallèle à P, égale à l'x du pied de P ; 1° quelle est la surface, lieu géométrique de l'extrémité (x,y,z) de cette parallèle ? 2° quelle est l'expression du volume limité par la surface cherchée ?

1° La surface demandée est représentée par l'équation

$$(x^2+y^2+z^2-2ax+a^2)^2=a^2(x-a)^4 ;$$

ou bien en changeant x en $x+a$, par l'équation

$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^4.$$

Par cette simple transformation, on voit aisément que la surface cherchée est décrite par la révolution, autour de l'axe des x, de la *demi-lemniscate*

$$(x^2+y^2)^2=a^2x^4 \text{ ou } r^2=a^2\cos^4\omega ;$$

car tout plan parallèle à celui des yz, dans sa nouvelle position, coupe la surface suivant une circonférence, dont le rayon est nul pour $x=0$, $+a$ ou $-a$. De plus, ce rayon R étant donné par l'équation

$$R^2=\sqrt{(a^2x^4)}-x^2,$$

son *maximum* répond à $9x=\pm 2a\sqrt{6}$; et c'est aussi le *maximum* de l'ordonnée y de la lemniscate. Celle-ci n'a que le seul *axe* $2a$, sur l'axe de *symétrie* des x, et dont le milieu est le *centre* de la courbe, aussi bien que de la surface décrite.

Cette surface est donc composée de deux *nappes finies*, opposées et parfaitement égales entre elles ; elles sont limitées par les plans *tangents* $x=a$ et $x=-a$, de part et d'autre de nouveau plan des yz, lequel coupe la surface au centre. D'ailleurs les trois nouveaux plans coordonnés sont les *plans de symétrie* de la surface, laquelle n'a que le seul *axe* limité $2a$: elle est *inscrite* dans le parallélipipède rectangle, de même centre, à bases carrées et dont $2a$ est la hauteur. De sorte que ce parallélipipède équivaut au cube fait sur $\frac{2}{3}a$.

2° Tous les plans parallèles, depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$, divisent a en un nombre infini n de parties égales à u, d'où $a=nu$; ils divisent donc le volume N, limité par la première nappe, en n tranches, à bases circulaires. Soit t la v ième de ces tranches, à partir du centre, d'où $x=vu$ et $R^2=\sqrt[3]{(a^2v^4u^4)}-v^2u^2$, R désignant le rayon de la section circulaire faite par le plan $x=vu$. A cause de l'épaisseur u infiniment petite, t ne diffère pas du cylindre droit circulaire, de même épaisseur u et ayant πR^2 pour base, d'un infiniment petit du second ordre, donnant, à la fin des calculs, un infiniment petit du premier, que l'on doit négliger. On a donc $t=\pi R^2u$; d'où

$$t=\pi[\sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{(u^7v^4)}-u^3v^2].$$

Posant successivement $v=1, 2, 3, 4, \ldots, n$ et ajoutant ; réduisant d'ailleurs, d'après $nu=a$, $St=N$ et $Sn^m=n^{m+1}:(1+m)$, on trouve

$$2N=2\pi(\tfrac{3}{7}a^3-\tfrac{1}{3}a^3)=\tfrac{4}{21}\pi a^3=\tfrac{1}{7}(\tfrac{4}{3}\pi a^3).$$

Telle est l'expression du volume limité par les deux nappes : *c'est le septième du volume sphérique dont* a *est le rayon.*

PROBLÈME VI. Étant donnée la lemniscate $r^2=a^2\cos^4\omega$, calculer son aire et le volume limité par la surface que cette demi-courbe engendre autour de son axe polaire, axe des x rectangulaires.

Soit 2A l'aire de l'une des deux feuilles égales de la courbe

$$r^2=a^2\cos^4\omega.$$

Pour l'aire A de la demi-feuille, l'arc ω croît, depuis 0 jusqu'à 90° ; donc le rayon vecteur r diminue, depuis a jusqu'à 0. Or, dans son mouvement, ce rayon vecteur variable divise l'arc ω ou $\frac{1}{2}\pi$ en un nombre infini n de parties égales à u, d'où $\omega=nu$; il divise donc l'aire A en n secteurs inégaux, ayant tous le même angle au centre de la lemniscate, mesuré par l'arc infiniment petit u, de rayon 1.

Le v ième de ces secteurs, à partir de l'axe des x, répond à $\omega=vu$: c'est au fond un triangle isocèle infiniment petit, dont l'aire est exprimée par $\frac{1}{2}r^2u$ ou $\frac{1}{2}a^2u\cos^4 vu$. De là donc

$$A=\tfrac{1}{2}a^2u\mathrm{S}\cos^4 nu \text{ et } 4A=2a^2u\mathrm{S}\cos^4 nu.$$

Or, $nu=90=\frac{1}{2}\pi$ et par suite $u\mathrm{S}\cos^4 nu=\frac{3}{16}\pi$; donc

$$A=\tfrac{3}{32}\pi a^2 \text{ et } 4A=\tfrac{3}{8}\pi a^2.$$

Cela posé, on sait que le volume engendré, autour de l'axe des x, par la demi-feuille de la lemniscate, a pour mesure l'aire A génératrice multipliée par la circonférence $2\pi D$ que décrit son *centre de gravité;* on sait de plus que le *moment* AD de l'aire A, par rapport à l'axe de rotation, est la somme des moments des n secteurs élémentaires, par rapport au même axe. Or, le centre de gravité du v ième secteur est à la distance $\frac{2}{3}r$ de son sommet; la distance de ce centre de gravité à l'axe des x est donc

$$\tfrac{2}{3}a\cos^2 vu\sin vu.$$

Par conséquent on a, pour l'expression du moment AD cherché,

$$AD=\tfrac{1}{3}a^3u\,\mathrm{S}\cos^6 nu\sin nu.$$

Pour effectuer la sommation indiquée, on observe que $\cos^6 nu=(1-\sin^2 nu)^3$ et qu'ainsi $u\mathrm{S}\cos^6 nu\sin nu$ devient

$$u\,\mathrm{S}(\sin nu-3\sin^3 nu+3\sin^5 nu-\sin^7 nu).$$

D'ailleurs,

$$-4\sin^3 a=\sin 3a-3\sin a,$$
$$16\sin^5 a=\sin 5a-5\sin 3a+10\sin a,$$
$$-64\sin^7 a=\sin 7a-7\sin 5a+21\sin 3a-35\sin a.$$

A cause de $nu=90°$, il est clair qu'on a successivement

$$u\,\mathrm{S}\sin nu=2\sin^2\tfrac{1}{2}nu=1,\ u\,\mathrm{S}\sin 3nu=\tfrac{2}{3}\sin^2\tfrac{3}{2}nu=\tfrac{1}{3},$$
$$u\,\mathrm{S}\sin 5nu=\tfrac{2}{5}\sin^2\tfrac{5}{2}nu=\tfrac{1}{5},\ u\,\mathrm{S}\sin 7nu=\tfrac{2}{7}\sin^2\tfrac{7}{2}nu=\tfrac{1}{7}.$$

Par ces valeurs, il est clair qu'on aura

$$AD=\frac{1}{3\cdot 64}a^3(5+3+1+\tfrac{1}{7})=\tfrac{1}{21}a^3.$$

On voit que le volume limité par les deux nappes de la surface engendrée, a pour expression

$$2A\cdot 2\pi D=4\pi AD=\tfrac{4}{21}\pi a^3.$$

C'est ce qu'on a trouvé, plus simplement, dans le précédent problème; mais la méthode *centrobarique* est souvent nécessaire dans la génération numérique de certaines quantités continues, comme pour le problème suivant :

Problème VII. Dans toute surface du second ordre, dont les axes ou les paramètres principaux sont égaux entre eux, le lieu géométrique des pieds de toutes les perpendiculaires, menées d'un sommet réel sur les plans tangents, est génénéralement une surface de révolution, dont on sait calculer l'aire génératrice : quelle est l'expression du volume limité par cette surface de révolution, pour la sphère dont a est le rayon ?

Ici le point donné, d'où partent les perpendiculaires, est $(a, 0, 0)$; si donc on change x en $x+a$, on trouve, pour représenter le lieu cherché, l'équation

$$(x^2+y^2+z^2+ax)^2 = a^2(x^2+y^2+z^2).$$

C'est la surface de révolution, décrite autour de l'axe des x, par la demi-courbe *polaire*

$$r = a(1-\cos\omega).$$

Pour calculer le volume cherché, il faut donc multiplier l'aire génératrice $A = \frac{3}{4}\pi a^2$ par la circonférence que décrit son centre de gravité, savoir $2\pi D$. Or, la théorie des *moments* donne

$$AD = \frac{1}{3}a^3 uS(1-\cos nu)^3 \sin nu,$$

relation dans laquelle $nu = 180^\circ = \frac{1}{2}\pi$, n étant infini et u infiniment petit du premier ordre. D'ailleurs le multiplicateur de $\frac{1}{3}a^3$, en vertu des transformations trigonométriques, peut s'écrire ainsi :

$$uS(4\sin nu - \frac{3}{4}\sin 2nu - 3\sin^3 nu - \frac{1}{8}\sin 4nu).$$

D'après les sommations établies plus haut, on a donc

$$AD = \frac{1}{3}a^3(8 - \frac{9}{2} + \frac{1}{2}) = \frac{4}{3}a^3 \text{ et } A \cdot 2\pi D = 2(\frac{4}{3}\pi a^3).$$

Ainsi *le volume cherché est double de celui de la sphère proposée*. Ce beau théorème n'a pas encore été remarqué, du moins que je sache.

Observons, pour l'*ellipsoïde*, que si les perpendiculaires aux plans tangents sont abaissés du *centre*, le lieu géométrique des pieds est représenté par

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2.$$

On sait calculer les aires des sections faites par les plans coordonnés; mais si dans cette équation, on pose $b=a$ et $c=0$, on aura la surface

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2) :$$

elle est de révolution autour de l'axe des z rectangulaires et décrite par l'une des deux feuilles égales de la lemniscate $r^2 = a^2\cos^2\omega$. L'aire génératrice étant $\frac{1}{4}\pi a^2$, le volume engendré a pour mesure $\frac{1}{8}\pi^2 a^3$: *c'est le seizième de l'anneau rond que le cercle, dont* a *est le rayon, engendre autour de l'axe tangent.*

Les perpendiculaires pourraient partir du foyer *positif*, pour les deux *hyperboloïdes* dont les axes principaux sont égaux à $2a$: si elles partent du *centre*, il y aura cette particularité remarquable : les deux lieux géométriques des pieds sont deux surfaces de révolution, décrites par la même demi-lemniscate, dont l'aire totale est a^2.

Problème VIII. Lorsque la surface du second ordre a les axes ou les paramètres principaux égaux entre eux; si l'on joint, par une droite, l'origine des coordonnées rectangulaires, placée au centre ou à un sommet, à un point quelconque de la surface, et que du pied du z de ce point, on mène à la droite une perpendiculaire; quelle est la surface, lieu du pied de cette perpendiculaire ?

L'équation de chaque surface s'obtient avec facilité; mais la discussion demande quelqu'attention. Pour la sphère, on retrouve exactement la surface considérée plus haut (problème V); même lorsque la perpendiculaire à la droite est menée de l'extrémité de l'x du point quelconque de la surface sphérique.

Problème IX. Calculer le volume de révolution, autour de l'axe des x rectangulaires, décrit par la demi-lemniscate $a^2(x^2-y^2)=x^4$. (On trouve le cinquième de la sphère dont a est le rayon; tandis que l'aire de la courbe ne peut se calculer que par les séries).

Problème X. Les coordonnées étant rectangulaires, l'équation

$$(y^2+z^2)^2=a^2x^4,$$

représente une surface de révolution; quel est le volume limité par cette surface, depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$? Quelle est aussi l'expression de l'aire génératrice ?

Réponse : le volume et l'aire ont pour mesures respectives $\frac{3}{10}\pi a^3$ et $\frac{3}{4}a^2$.

On calcule de même le volume et l'aire lorsque le carré de y^2+z^2 est égal à ax^3 ou à a^3x, ou bien lorsque le cube de y^2+z^2 vaut l'un des monomes a^4x, a^4x^2, ax^4, etc.

Problème XI. Lorsque du point $x=a$ de l'axe des x rectangulaires, on mène une oblique quelconque au plan des yz, on sait que le pied de la perpendiculaire P, abaissée de l'origine sur cette oblique, appartient à la surface sphérique dont a est le rayon. Et si l'on prolonge P de la longueur a, le point, ainsi obtenu, appartient à une surface de révolution (considérée au problème VII). Mais si l'on prolonge la perpendiculaire P de la longueur égale à l'x de son pied, le point résultant appartient à une surface de révolution : quelles sont les expressions de l'aire génératrice et du volume limité ? (On pourrait prolonger P d'une longueur égale à l'y, au z, ou à la somme de deux ou des trois coordonnées de son pied. Problèmes analogues sur un plan.).

Problème XII. Quelle est l'aire de la double lemniscate, lieu géométrique des pieds de toutes les perpendiculaires, abaissées de l'origine des coordonnées rectangulaires sur la droite donnée $2a$, assujettie à glisser de telle sorte que l'une de ses extrémités soit toujours sur l'axe des x et l'autre toujours sur l'axe des y? Quelle est l'expression du volume engendré par l'aire de la demi-courbe tournant autour de l'axe des x? Le volume serait-il le même, si la demi-courbe tournait autour de l'axe des y? Enfin, quelle serait l'expression du volume, si la demi-aire tournait autour de l'un des axes de symétrie de la courbe, placés sur les diagonales du carré circonscrit?

Problème XIII. Un cylindre droit, dont la base elliptique, parabolique ou hyperbolique est rapportée à ses axes principaux, étant coupé par un plan mené, 1° par le second axe $2b$ de l'ellipse, 2° par la double ordonnée rectangulaire qui répond à l'abscisse a ou $2a$, dans la parabole ou dans l'hyperbole; quelle est chaque fois l'expression du volume de l'*onglet* résultant?

Problème XIV. Soit $x^2+y^2=a^2$ la circonférence dont a est le rayon donné et soit (x',y') l'extrémité d'un rayon quelconque : si, à partir du centre, on porte sur ce rayon la longueur x' ou la longueur y', ou bien si, à partir de l'extrémité (x',y'), on porte sur le rayon même ou sur son prolongement, soit la longueur x' soit la longueur y'; les six points ainsi obtenus, appartiennent à six courbes différentes. On demande quelles sont les équations polaires de ces courbes remarquables et quelles sont les expressions des aires limitées par elles?

Problèmes analogues, 1° pour la circonférence $y^2=2ax-x^2$; 2° pour la surface sphérique $x^2+y^2+z^2=a^2$. Ici l'on trouve des surfaces courbes différentes; et il s'agit de calculer les volumes limités par elles. On pourrait, dans 1°, prolonger du rayon a, chaque corde partant de l'origine; etc.

Description des lignes I. La *génération descriptive* et la *génération numérique* résultent immédiatement de la belle et grande idée qu'eût Descartes, de *représenter* par des *équations* les lignes et les surfaces, à l'aide de l'une des *propriétés caractéristiques* de chacune. Comme chaque ligne et chaque surface est le *lieu géométrique* de tous ses points, en nombre infini, et que la *relation* constante entre les coordonnées de chaque point est conséquence immédiate de la propriété caractéristique que l'on considère; on voit comment il est possible de *représenter* chaque lieu géométrique par une *équation;* laquelle dispensant de tracer aucune figure, pour étudier le lieu géométrique proposé, ramène aux simples transformations analytiques de l'algèbre, la déduction des propriétés, *descriptives* et autres, de ce lieu, et en facilite, le plus possible, l'étude complète. L'équation d'ailleurs, suivant la longueur attribuée à l'*unité linéaire*, pour la *description*, représente tous les lieux géométriques *semblables* au proposé.

II. On sait que la ligne droite est toujours représentée par l'équation du *premier degré*, ramenée à la forme

$$y=nx+h,$$

y et x étant les coordonnées *variables* de chacun de ses points; tandis que n et h sont deux nombres *constants*, donnés soit immédiatement soit par les deux conditions, nécessaires et suffisantes, pour déterminer la droite indéfinie cherchée, quant à sa *position*.

Si l'on fait $x=0$, l'équation donne $y=h$; ainsi h est la distance, positive ou négative, de l'origine au point où la droite coupe l'axe des y. Si l'on pose $y=0$, d'où $nx+h=0$ et $x=-h:n=k$, on a la distance k, positive ou négative, de l'origine au point où la droite coupe l'axe des x. Ayant donc ainsi deux points de la droite cherchée, il est facile de la tracer sur le papier : alors elle est représentée par

$$\frac{y}{h}+\frac{x}{k}=1.$$

III. Tel est le procédé le plus simple pour décrire la droite ; mais observons que si l'on pose $x=1$, dans la première équation, d'où $n=y-h$, on peut trouver aisément un second point de la droite proposée. Car, par le point de l'axe des y, qui répond à $x=0$, d'où $y=h$, menant une parallèle à l'axe des x, puis à partir du point, prenant sur celle-ci la longueur 1 et menant, par le point, ainsi obtenu, la parallèle à l'axe des y et égale à n, on aura le second point, propre à déterminer, avec le premier, la droite cherchée, c'est-à-dire sa *position* ou plutôt sa *direction*. Voilà pourquoi il convient d'appeler *direction* de la droite, le nombre n qui sert à trouver le second point ci-dessus.

La *direction* de la droite est donc le coefficient de x dans son équation $y=nx+h$; *c'est la différence des ordonnées correspondantes aux valeurs* 0 *et* 1 *de l'abscisse*. C'est aussi le *rapport* des sinus des angles que la droite fait avec l'axe des x et avec l'axe des y ; mais la première signification suffit, le plus souvent.

IV. Si l'on calcule le point d'intersection des deux droites $y=nx+h$ et $y=n'x+h'$, les coordonnées comprenant un angle θ et (x',y') étant un point donné sur la seconde droite, on verra d'abord que *les deux droites proposées sont ou ne sont point parallèles, suivant que leurs directions* n *et* n' *sont ou ne sont pas égales entre elles*. On verra ensuite, en calculant *la plus courte distance* du point (x',y') à la première droite, que *les deux droites propoposées sont ou ne sont pas perpendiculaires entre elles, suivant que le polynome* $1+nn'+(n+n')\cos\theta$ *est ou n'est pas nul*. La plus courte distance P cherchée est alors donnée par

$$P\sqrt{(1+n^2+2n\cos\theta)}=\sin\theta(y'-nx'-h).$$

Et si l'on veut construire l'angle v de deux droites dont n et n' sont les *directions*, on observe que cet angle v est égal à celui des deux parallèles aux deux droites, menées par l'origine. Prenant donc $x=1$, puis menant, par le point ainsi obtenu, une parallèle à l'axe des y, sur laquelle on porte les directions n et n'; l'origine sera le sommet de l'angle cherché v, dont les côtés passent par les extrémités de la différence $n'-n$. De sorte que l'*angle de deux droites est aussi représenté par la différence de leurs directions.*

La différence $n'-n$ est la base du triangle dont $\sin\theta$ est la hauteur, v l'angle du sommet, compris par les côtés m et m', savoir :

$$m=\sqrt{(1+n^2+2n\cos\theta)} \text{ et } m'=\sqrt{(1+n'^2+2n'\cos\theta)}.$$

La double expression de l'aire du triangle fournit donc

$$mm'\sin v=\sin\theta(n'-n).$$

De là on tire :

$$mm'\cos v=1+nn'+(n+n')\cos\theta,$$

$$[1+nn'+(n+n')\cos\theta]\tang v=\sin\theta(n'-n).$$

On sait d'ailleurs combien ces trois formules, pour calculer l'angle v, se simplifient *lorsque les coordonnées sont rectangulaires.*

V. Les propriétés précédentes servent à résoudre les problèmes sur la combinaison des *points* et des *droites*, dans le même plan. La plupart de ces problèmes peuvent se traiter par la simple géométrie *numérique*; mais d'autres, et en particulier ceux qui se rapportent à la théorie des *transversales rectilignes*, exigent l'une des deux équations de la droite; et de préférence la seconde, en fonction des distancess h et k de l'origine aux points où la droite coupe les axes des y et des x. Cette équation, en effet, donne lieu à des calculs plus simples, dans le problème que voici :

Par un point donné sur la bissectrice de l'angle de 60° des deux axes des coordonnées, mener une droite telle que la portion interceptée par les deux axes ait la longueur connue c.

Ici les distances h et k sont inconnues, tandis que les coordonnées du point donné sont égales au nombre connu a; ainsi à cause de $\cos 60°=\frac{1}{2}$, on a sur-le-champ les deux équations

$$\frac{a}{h}+\frac{a}{k}=1 \text{ et } h^2+k^2-hk=c^2.$$

Ce problème fournit d'autres systèmes d'équations, plus ou moins faciles à résoudre, par le choix des inconnues et des éliminations.

L'emploi simultané des deux équations de la droite démontre que *si, par un point donné sur la diagonale d'un carré, on mène une perpendiculaire à la droite* d *qui joint ce point à l'un des sommets opposés; la portion de cette perpendiculaire, entre les deux côtés adjacents à l'autre sommet, est égale à* 2d. (Ce qu'on démontre aussi par la simple géométrie numérique). Et si, par le sommet proposé, on mène une perpendiculaire à d, peut-ou calculer la portion de cette perpendiculaire, entre les prolongements des deux côtés opposés du carré ?

De même, par la seconde équation de la droite, on démontre avec facilité, que *si d'un point* P, *situé dans le plan d'un angle tracé* A, *au-dehors ou dans l'intérieur, on mène tant de droites qu'on voudra, coupant les deux côtés de l'angle ; les intersections des diagonales ou des côtés des divers quadrilatères résultants, est une droite passant par le sommet de l'angle proposé.* La réciproque est vraie ; etc.

Enfin, c'est la première équation de la droite qu'il faut employer, les coordonnées étant rectangulaires, dans le problème suivant : *Construire les quatre points tels, qu'en joignant chacun aux extrémités de la droite donnée* 2a, *par deux droites ; le produit de leurs directions soit égal à l'unité et que la somme des carrés faits sur ces deux droites soit équivalente au carré donné* $4c^2$.

VI. Toute propriété d'une courbe, qui ne convient qu'à elle seule ou la *caractérise*, fournit un procédé propre à la décrire et peut servir à la définir. On connaît les définitions des trois courbes du *second degré*, qui en fournissent les descriptions les plus simples et qui donnent immédiatement les équations aux *axes principaux*. Mais alors il reste à démontrer, pour chacune des trois courbes, que *si les coordonnées ne sont pas rectangulaires et que l'équation soit néanmoins de même forme que quand l'angle est droit, elle représente toujours la même courbe ;* or, cela exige la *transformation des coordonnées* et par conséquent des calculs assez compliqués. Voici, pensons-nous, la méthode la plus simple, pour démontrer le théorème proposé :

1° *Quel est le lieu géométrique des intersections de deux droites mobiles, chacune autour d'un point fixe différent, de telle sorte que le produit* p *de leurs directions variables* n *et* n' *soit un nombre constant, négatif ou positif ?*

L'origine étant placée au milieu de la droite $2a$, qui joint les deux points fixes, et l'axe des x *obliques* ne coïncidant pas avec cette droite ; les deux points fixes seront (x',y') et $(-x',-y')$. Suivant donc qu'on aura $p=-nn'$ ou $p=nn'$, l'équation du lieu géométrique cherché sera

$$y^2+px^2=y'^2+px'^2 \text{ ou } y^2-px^2=y'^2-px'^2.$$

Ces équations représentent respectivement l'*ellipse* et l'*hyperbole*, rapportées à leurs *axes conjugués ;* car si l'on fait coïncider l'axe des x *rectangulaires* avec la droite $2a$, ces équations représentent toujours les mêmes courbes, évidemment ; et comme alors elles deviennent respectivement

$$y^2+px = a^2p \text{ et } y^2-px^2 = -a^2p,$$

équations de l'ellipse et de l'hyperbole, rapportées à leurs *axes principaux ;* on voit que les deux premières équations représentent les mêmes courbes respectives.

2° *Quel est le lieu géométrique de tous les points* (x,y) *tels, que la distance inconnue* d *de chacun à l'axe des* x *soit moyenne proportionnelle entre l'abscisse* x *de ce point et le nombre donné* 2p ?

On aura donc $d^2=2px$, quel que soit l'angle θ des coordonnées ; et comme l'ordonnée y est l'hypoténuse du triangle rectangle, dont d est un côté, opposé à l'angle θ ou à son supplément, on a $d=y\sin\theta$. Si donc on pose $2p=2p'\sin^2\theta$, d'où $2p'>2p$, on aura, pour l'équation du lieu géométrique cherché :

$$y^2=2p'x.$$

C'est l'équation de la *parabole*, rapportée à ses *axes conjugués*, puisque cette équation, ne cessant de représenter les mêmes points ni la même courbe, lorsque l'angle $\theta=90°$, devient $y^2=2px$ et représente alors la parabole, rapportée à ses *axes principaux.*

VII. On a plusieurs procédés pour décrire l'ellipse dont on connaît deux *diamètres conjugués* et l'angle compris : le suivant est assez remarquable ; mais j'ignore s'il a été indiqué dans les traités de géométrie analytique.

Considérons d'abord l'ellipse rapportée à ses axes 2A et 2B et représentée par l'équation

$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2.$$

On sait que les deux diamètres *conjugués égaux*, ayant pour équations respectives

$$Ay=Bx \text{ et } Ay=-Bx, \text{ d'où } A^2y^2=B^2x^2,$$

sont dirigés suivant les diagonales du rectangle des deux axes. Or, soient X et x les abscisses de l'un des deux diamètres conjugués égaux et de l'ellipse, qui répondent à la même ordonnée y : on trouve aisément

$$A^2=X^2+x^2.$$

Ainsi, *pour la même ordonnée, le demi-grand axe est l'hypoténuse du triangle dont les abscisses, de l'ellipse et de l'un des diamètres conjugués égaux, sont côtés de l'angle droit.* Pareillement, *pour la même abscisse, le demi-petit axe est l'hypoténuse du triangle dont les ordonnées, de l'ellipse et de l'un des deux diamètres conjugués égaux, sont côtés de l'angle droit.*

Si donc les deux diamètres conjugués égaux sont tracés et qu'on ait un point de l'ellipse; *les deux axes sont les bissectrices des angles compris entre les deux diamètres égaux et conjugués ;* d'où résultent ensuite les hypoténuses A et B. Ainsi, pour décrire l'ellipse, rapportée à deux diamètres conjugués quelconques, il suffit de connaître les directions de ces deux diamètres conjugués égaux. Or, *ces derniers diamètres se trouvent sur les diagonales de tout parallélogramme conjugué ;* c'est-à-dire du parallélogramme *circonscrit*, dont les côtés sont respectivement égaux et parallèles aux deux diamètres conjugués quelconques $2a$ et $2b$; les milieux de ces côtés étant à la fois les points de contact avec la courbe et les extrémités des deux diamètres conjugués.

Soit en effet, d un demi-diamètre dont n est la direction : si (x,y) est l'extrémité de d, c désignant le cosinus de l'angle θ compris entre a et b, on a les trois équations simultanées

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2\ ,\ y=nx$$
$$\text{et } d^2=x^2+y^2+2cxy\ ;\ \text{d'où}$$
$$(a^2n^2+b^2)d^2=a^2b^2(1+n^2+2cn).$$

Pour le demi-diamètre d', de direction n', on trouve pareillement

$$(a^2n'^2+b^2)d'^2=a^2b^2(1+n'^2-2cn').$$

Par cette équation et la précédente, il est clair que si $n'=-n$, on a $d'=d$; et réciproquement. Si, de plus, les deux diamètres égaux $2d$ et $2d'$ sont conjugués, *ils seront respectivement parallèles à deux cordes supplémentaires*, menées des extrémités $2a$; or, comme les directions p et p' de ces cordes satisfont à la relation constante

$$a^2pp'+b^2=0,$$

il est clair qu'ayant $n=p$ et $n'=p'$, on aura aussi $a^2nn'+b^2=0$; d'où à cause de $n'=-n$, il vient $an=\pm b$. Les équations des deux diamètres conjugués égaux sont donc

$$ay=bx \text{ et } ay=-bx.$$

Par conséquent, si par une extrémité de $2a$, on mène une droite égale et parallèle à $2b$, de telle sorte que $2a$ la divise en deux parties égales; les extrémités de cette parallèle *tangente* appartiennent aux deux diamètres conjugués égaux prolongés; lesquels sont sur les diagonales du parallélogramme *conjugué*, ayant ses côtés égaux et parallèles à $2a$ et à $2b$. Ce qu'il fallait démontrer.

On voit d'ailleurs que l'ellipse et ses deux diamètres conjugués égaux, divisent toute parallèle, soit à $2a$, soit à $2b$, en trois parties *dont les deux extrêmes sont égales entre elles ; et cela, quels que soient ces deux derniers diamètres conjugués.* De sorte que les deux diamètres conjugués égaux étant tracés et un seul point de l'ellipse étant donné, on peut en trouver autant qu'on voudra, à l'aide de cette propriété.

C'est exactement comme pour l'hyperbole dont on a un point et les deux *asymptotes.* Comme les deux axes 2A et 2B de cette dernière courbe sont bissecteurs des angles formés par les asymptotes ; la détermination des longueurs A et B se fait d'une manière tout à fait analogue à la détermination des longueurs A et B, pour l'ellipse : seulement dans l'hyperbole, A et B ne sont plus hypoténuses des deux triangles rectangles. Tel est le procédé le plus général, sinon le plus simple, pour décrire l'hyperbole dont deux diamètres conjugués sont tracés ; car on en déduit immédiatement les deux asymptotes.

VIII. Considérons une équation numérique telle que

$$y^2-2xy+3x^2+2y-4x-3=0.$$

La courbe représentée par cette équation (déjà considérée ailleurs) est une ellipse, dont l'équation d'un *diamètre* est $Y=x-1$; ce diamètre rencontre donc les axes des x et des y aux deux points $(1,0)$ et $(0,-1)$: il fait avec les axes deux angles égaux, de 45° chacun, si les coordonnées sont rectangulaires. Les deux valeurs de y sont

$$y=x-1\pm\sqrt{(2x-2x^2+4)}.$$

Pour $x=-1$, on a $Y=-2$ et les deux valeurs de y sont égales à 2 ; la parallèle $x=-1$ *touche* donc la courbe à une extrémité du diamètre, savoir $(-1,-2)$. On verra de même que la parallèle $x=2$ touche la courbe à la seconde extrémité $(2,1)$ du diamètre : celui-ci est donc ainsi donné de longueur et de position, quel que soit l'angle θ des coordonnées ; mais si $\theta=90°$, la longueur $2d$ du diamètre est $2d=3\sqrt{2}$.

Le *centre*, milieu de $2d$, est $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$; or, pour $x=\frac{1}{2}$, on a $y=-\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}\sqrt{2}$. Les extrémités du diamètre $2d'$, *conjugué* de $2d$, sont donc ainsi déterminées, et l'on a $2d'=3\sqrt{2}$, que θ soit droit ou non : s'il est droit, les deux diamètres *conjugués égaux* $2d$ et $2d'$ comprennent un angle de 45°. Pour $x=1$, on a $y=2$ et $y=-2$. Connaissant le point $(1,2)$ de l'ellipse, ainsi que ses deux diamètres conjugués égaux, on en déduit les directions et les longueurs de ses deux axes 2A et 2B, comme on l'a indiqué plus haut ; par suite on aura les deux foyers et l'on pourra décrire l'ellipse d'un mouvement continu, et cela à l'aide d'une seule figure.

Mais si l'on ne voulait employer que la figure *descriptive* de l'ellipse cherchée, il suffirait de calculer les deux axes 2A et 2B. Comme ici, $\sin \theta = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ et $2d = 3\sqrt{2}$, on a les deux équations

$$A^2 + B^2 = 9 \text{ et } AB = \tfrac{9}{4}\sqrt{2},$$

desquelles on tire $2A = 3\sqrt{(2+\sqrt{2})}$ et $2B = 3\sqrt{(2-\sqrt{2})}$. L'aire de l'ellipse proposée est donc $\frac{9}{4}\pi\sqrt{2}$.

On peut trouver directement les valeurs précédentes de 2A et 2B, après avoir fait disparaître les premières puissances de x de y, dans l'équation proposée, en passant du système de coordonnées à un autre parallèle ; ce qui donne

$$2y^2 - 4xy + 6x^2 = 9.$$

Soit d un demi-diamètre quelconque ; son extrémité (x,y) appartient donc à l'ellipse. Si donc les coordonnées sont rectangulaires, les calculs ne changeront qu'en ce qu'ils seront plus simples, et l'on aura

$$y = nx \text{ et } d^2 = x^2 + y^2.$$

Éliminant x et y entre ces deux équations et la précédente, il vient

$$n^2(2d^2 - 9) - 4d^2 n = 9 - 6d^2.$$

Résolvant cette équation par rapport à n, on trouve que le *maximum* et le *minimum* de d donnent simultanément

$$(2d^2 - 9)n = 2d^2 \text{ et } d^4 - 9d^2 = -\tfrac{81}{8}.$$

Cette dernière équation donne, pour le maximum A^2 et pour le minimum B^2 de d^2

$$4A^2 = 9(2+\sqrt{2}) \text{ et } 4B^2 = 9(2-\sqrt{2}),$$

comme plus haut. Les valeurs correspondantes de n étant désignées par n' et n'', elles vérifient la relation $I + n'n'' = 0$, comme cela doit être.

IX. Les procédés indiqués ci-dessus, pour décrire l'ellipse, s'appliquent exactement à l'hyperbole, et peuvent servir de complément utile aux traités de géométrie analytique plane. Nous ajouterons encore, à cet effet, le tracé de la courbe

$$y^2 - 2xy + x^2 - 4y + x + 4 = 0.$$

Résolvant cette équation par rapport à y, on a

$$y = x + 2 \pm \sqrt{(3x)}.$$

La courbe s'étend donc indéfiniment du côté des x positifs ; et c'est d'ailleurs une *parabole*, vu qu'ici le binome caractéristique $B^2 - 4AC$ est *nul*. Le *diamètre* $Y = x + 2$ rencontre l'axe des

x, du côté des abscisses négatives, en un point H, à la distance OH$=2$ de l'origine O ; il rencontre l'axe des y, du côté des ordonnées positives, en un point G tel qu'on a OG$=2$. D'ailleurs, comme $x=0$ donne à y les deux valeurs égales à 2, on voit que l'axe des y *touche* la courbe au point G. Si donc les coordonnées sont rectangulaires, d'où GH$=2\sqrt{2}$; le diamètre, pris pour nouvel axe des x, et l'axe proposé des y sont un système d'*axes conjugués* de la parabole à décrire, comprenant l'angle de 45°. L'équation de cette courbe es donc de la forme $y'^2=2p'x'$, $2p'$ étant le *paramètre diamétral*, qu'il faut d'abord calculer.

Or, prenons l'abscisse $x=3=$OP ; l'ordonnée y ou PM de la parabole proposée sera donc PM$=5+3=8$: elle coupe le nouvel axe des x, HG, en un point R donnant PR$=5$; donc la nouvelle ordonnée RM ou $y'=3$. Quant à la nouvelle abscisse GR ou x', la parallèle OG à la base PR du triangle HPR donne OH:OP :: GH:GR ou $2:3::2\sqrt{2}:x'$; d'où $x'=3\sqrt{2}$. Par suite on a $9=2p'\cdot 3\sqrt{2}$ et $2p'=\frac{3}{2}\sqrt{2}$. De sorte que *segment*, limité par la courbe et la double ordonnée qui répond à $x'=3\sqrt{2}$, a pour mesure 12 unités superficielles.

Ici le rayon vecteur d du point G est $d=\frac{3}{8}\sqrt{2}$; il fait avec l'axe des y l'angle de 45° ; on peut donc déterminer le *foyer*, l'*axe*, la *directrice* et *décrire* par suite, la parabole, d'un *mouvement continu*, aussi bien que par *points successifs*. Mais observons que le calcul n'est pas nécessaire pour déterminer $2p'$, même lorsque les coordonnées primitives ne sont pas rectangulaires ; car la construction du diamètre fait connaître GH ; $x=$OP$=3$ fait trouver le point R et la nouvelle ordonnée RM ; de sorte que RM$^2=2p'$. GR donne GR: RM :: RM:$2p'$. Construisant donc cette troisième proportionnelle $2p'$ et prenant le quart de la droite résultante, on aura le rayon vecteur d du point G, faisant avec l'axe des y l'angle égal à celui que cet axe fait avec GR ; etc.

On peut voir différents problèmes sur les courbes et les surfaces courbes, tome II, première partie, p. 145 et suiv., du Recueil des Mémoires de la Société royale des sciences, de Liége.

D'après les procédés ci-dessus, il est facile de décrire la courbe numérique assujettie à passer par les quatre points (0,1), (0,—3), (1,4), (1,—2) et à toucher la droite $6(y+2)-7(x-1)=0$.

X. Ce qui précède suffit bien pour montrer l'importance de la *géométrie analytique* dans la génération numérique des quantités continues, et surtout dans la recherche de certains *lieux géométriques*. Mais l'emploi des *coordonnées* ne serait guère applicable dans les problèmes déterminés, tels que les suivants, que l'on résout, avec facilité, par la simple *géométrie numérique* :

1. Calculer les côtés x, y et l'hypoténuse z, 1° pour que l'aire du triangle rectangle, *circonscrit* au cercle de rayon r donné, soit un minimum, ou pour que z soit un maximum; 2° lorsque 24 septièmes et 2 sont le côté a du carré et le rayon r du cercle, tous les deux *inscrits*; 3° pour qu'on ait $z^2=a(x+y)$, ou $z^2=r(x+y)$; 4° enfin, pour que m soit un maximum dans $z=x+y-m$, ou un minimum dans $z=m-x-y$.

2. Connaissant la diagonale d d'un rectangle, calculer ses côtés, de telle sorte que la perpendiculaire à d, menée par un sommet et limitée aux prolongements des côtés opposés, soit un minimum.

3. Sachant que l'arc d'un segment circulaire est les 3 huitièmes de la circonférence, dont 10 est le rayon, on demande quelles sont les expressions numériques, 1° de l'aire et du périmètre de ce segment? 2° du volume et de la surface de révolution qu'ils engendrent autour d'un axe, ou parallèle à la corde, en passant par le centre, ou dirigé suivant un côté du secteur?

4. Connaissant le rayon a d'une circonférence tracée, mener à celle-ci une tangente p, limitée aux prolongements des diagonales du carré inscrit, de telle sorte que si h et k sont les *projections* inconnues de p sur ces diagonales, 1° p soit un minimum; 2° p soit moyenne proportionnelle entre $h+k$ et le côté du carré; 3° p soit divisée, par le point de contact, en deux parties z et v, telles qu'on ait $z=3v$, ou $z^2=av$, ou $z^2=a^2+2v^2$; 4° m soit un minimum dans $p=h+k-m$, ou un maximum dans $p=h-k+m$; 5° enfin, on ait $h^2=pk$. Calculer et construire p chaque fois.

5. Calculer le volume et la surface de l'*anneau* décrit par le triangle équilatéral, de côté 10, autour d'un axe extérieur, perpendiculaire à un côté et à la distance 4 du sommet le plus voisin. Même problème pour l'anneau décrit par le secteur circulaire dont le triangle fait partie, le centre étant successivement l'un des trois sommets de ce triangle. Enfin, quelle position doit-on donner au triangle, autour du sommet voisin fixe, pour que l'anneau engendré soit un maximum ou un minimum?

6. Connaissant numériquement les côtés a et b d'un parallélogramme tracé, mener, par le sommet opposé à l'angle de 60°, la droite z, limitée aux deux côtés de cet angle, de telle sorte que 1° le triangle intercepté soit un minimum; 2° la longueur z soit la moindre possible; 3° la somme des segments x et y, interceptés sur les côtés de l'angle, soit un minimum; 4° enfin, m soit un maximum dans $z=x+y-m$. Calculer et construire chaque fois les deux segments x et y; même lorsque z est divisée en moyenne et extrême raison, par le sommet proposé, ou que les deux parties p et q de z sont telles qu'on ait, soit $p=2q$, soit $p^2=2q^2$, soit $ap=bq$ ou $bp=aq$, soit $p^2=ab$, etc.

RÉSUMÉ DES MÉTHODES ÉLÉMENTAIRES.

QUELQUES RÉFLEXIONS SUR LES ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE.

I. Les personnes qui ont réfléchi sur les méthodes géométriques, savent combien les traités élémentaires de cette science peuvent encore être améliorés, pour la plupart, quant au fond et quant à la forme des théories et des applications principales.

Une amélioration essentielle, réclamée depuis longtemps, est la suppression de toutes les *réductions à l'absurde* que l'on peut remplacer par des démonstrations *directes ;* car celles-ci reposant immédiatement sur les définitions et sur des propositions, bien établies, sont d'une clarté et d'une évidence comparables à celles des axiomes.

Le défaut capital des réductions à l'absurde, démonstrations tout-à-fait *indirectes* et souvent fort obscures, est de ne pas se déduire immédiatement de la notion même de l'objet dont on veut établir quelque propriété. Certainement, on est bien forcé d'employer ce mode de démonstration chaque fois que l'analyse de l'objet en question montre qu'on sait beaucoup mieux ce que cet objet n'est pas que ce qu'il est ; mais toujours est-il que la réduction à l'absurde, si elle possède l'avantage de convaincre l'esprit, n'a pas celui de l'éclairer. Il ne faut donc y recourir que quand on ne peut faire autrement, ou bien lorsque la vérité à établir a déjà une certaine évidence ; comme les propositions *réciproques*, dont on abrège souvent les démonstrations par ce mode de raisonnement.

II. Les principales théories de la géométrie portent essentiellement sur la *proportionnalité* et le *mesurage;* sur l'*égalité*, l'*équivalence*, la *symétrie* et les deux genres de *similitude* des figures. Ces théories recevant de fréquentes et utiles applications, dans les arts, dans les recherches scientifiques et dans les déductions même de la géométrie, doivent être amenées et développées le plus clairement possible, c'est-à-dire sans l'intervention de la réduction à l'absurde, chaque fois que celle-ci peut s'éviter ; car la réduction à l'absurde a souvent pour effet d'alonger et même d'obscurcir les raisonnements.

On peut démontrer, par exemple, l'*égalité de deux triangles dont les trois côtés sont respectivement égaux*, à l'aide d'un seul raisonnement, très-simple, fondé sur les propriétés du triangle *isocèle* (celles-ci étant démontrées directement par *superposition*) ; tandis que la réduction à l'absurde exige ordinairement la distinction de trois cas généraux ; ainsi elle alonge et obscurcit la démoutration, comme pour une foule d'autres théorèmes, où l'on pourrait s'en passer.

Il est rare que la notion de *similitude* soit développée de manière à la rendre complète et à bien en faire saisir toute l'importance; et c'est-là encore une amélioration à introduire dans les traités élémentaires, où la *similitude inverse*, qui fournit la *symétrie*, comme *particularité*, doit figurer, tout aussi bien et comme non moins utile que la *similitude directe*, qui fournit l'*égalité absolue*. C'est pourquoi nous reviendrons plus bas sur la notion de similitude.

III. Dans le passage du *commensurable* à l'*incommensurable*, où il faut démontrer l'égalité de deux *rapports*, la réduction à l'absurde n'est, en réalité, qu'un *cercle vicieux*. Car l'existence du rapport entre deux quantités continues, entraîne nécessairement l'existence d'une *mesure commune*, assignable ou inassignable, *finie* ou *infiniment petite;* et alors le rapport est *exprimable* ou *inexprimable* en chiffres : c'est un nombre *rationnel* ou un nombre *irrationnel*. En un mot, dès qu'il y a *rapport*, il y a *mesure commune;* par conséquent la distinction des deux cas : *commensurable* et *incommensurable*, est au moins inutile.

Ici donc la réduction à l'absurde, employée dans tous les traités élémentaires, n'apprend absolument rien : et comme elle complique les raisonnements, elle ne doit aucunement servir à démontrer l'égalité des deux rapports, c'est-à-dire la *proportion;* et sans doute qu'elle n'aurait jamais été employée, à cet effet, si la notion du rapport avait été plus développée et mieux connue. Car soient A, B, C, D quatre quantités continues, A et B de même nature, aussi bien que C et D ; supposons ces quantités tellement liées entre elles qu'en divisant A et B en m et p parties égales à leur mesure commune x, on divise en même temps C et D en m et p parties égales ou *équivalentes* à y : on en déduit immédiatement

$$A:B=C:D.$$

Telle est la méthode des *parties égales*, pour établir toutes les proportions, en géométrie : c'est la *règle* du mesurage *indirect*. Cette méthode, l'une des plus claires et des plus simples, est absolument indépendante de toute réduction à l'absurde.

Pour l'appliquer au *mesurage indirect* de tout *prisme droit* P, de base b et de hauteur h, soit v le cube, *unité* de volume, ayant pour base le carré s, *unité* superficielle, et pour hauteur l'*unité* linéaire u. Soit R le prisme droit *auxiliaire*, de même base b que P et de même hauteur u que v : à cause de la hauteur u, commune, les deux bases s de v glissent en même temps sur les deux bases b de R; ainsi diviser b et s en n et p parties égales à leur mesure commune x, par des plans perpendiculaires, c'est diviser en même temps R et v en n et p prismes droits, égaux à y, comme ayant bases égales à x et hauteurs égales à u. On a donc simultanément $R=ny$ et $v=py$, $b=nx$ et $s=px$. Or, il est évident que $ny:py=nx:px$; donc $R:v=b:s$ et $R=v(b:s)$.

De même, diviser les hauteurs h et u, de P et de R, en m et q parties égales à leur mesure commune z, par des plans perpendiculaires (ou parallèles à la base b commune), c'est diviser en même temps P et R en m et q prismes droits, égaux à t, comme ayant bases égales à b et hauteurs égales à z. On a donc à la fois $P=mt$ et $R=qt$, $h=mz$ et $u=qz$; d'où $P:R=h:u$ et $P=R(h:u)$.

Substituant donc la valeur de R, on aura, pour l'expression numérique de tout prisme droit P :

$$P=v(b:s)(h:u)\text{, ou simplement } P=bh\text{,}$$

les unités v, s et u étant *sous-entendues;* d'où résultent immédiatement les expressions de tout cube et de tout parallélipipède rectangle.

IV. Ceci nous conduit à remarquer combien il importe à la clarté, à la rigueur et à la facilité des théories, de bien développer les *notions premières* et de les résumer par de bonnes *définitions*. La théorie des *parallèles* n'est pas encore démontrée complètement, dans presque tous les traités de géométrie; en serait-on réduit à y admettre un nouvel axiome, en forme de *demande*, si la définition de l'*angle* en avait fait bien connaître la double propriété *caractéristique?* ou du moins si, par les premières notions, on avait bien vu que le *rapport indique toujours comment l'antécédent se trouve avec le conséquent seul?* Car il résulte de ce fait que s'il est constaté, par les *définitions* ou les *constructions*, que A *se trouve avec* B *absolument comme* C *avec* D, on aura nécessairement

$$A:B=C:D.$$

Telle est la méthode *analogique* des proportions : elle est tout aussi claire et peut être plus simple que la méthode des parties égales, comme tenant de plus près encore aux *notions premières* et à la *comparaison* même des quatre termes, deux à deux.

V. Soit A le pied de la perpendiculaire PA à une droite MN; soit B un point donné sur AM, de telle sorte que la longueur AB soit donnée invariable; sur la droite menée de B à un point quelconque C de AP, soit prise la longueur constante BE et soit abaissée la perpendiculaire ED sur AB, dont le pied D tombera nécessairement entre A et B, vu que l'angle ABC est *aigu*.

Cela posé, à cause de l'égalité des angles droits A et D ou BAC et BDE, on voit que les deux angles A et B, qu'il faut tracer aux extrémités de AB, pour avoir AC, il faut aussi les tracer aux extrémités de BD, pour avoir DE; donc AC *se trouve avec* AB *absolument comme* DE *se trouve avec* BD. Si donc DE est le triple ou les 13 quarts de BD, il faut que AC soit aussi le triple ou les 13 quarts de AB; et en général, si $DE=BD\times n$, n étant un *rapport* exprimable ou inexprimable en chiffres, il faut aussi que $AC=AB\times n$. On voit donc que $AC:AB=DE:BD$ et que par suite, on aura toujours $AC=AB(DE:BD)$.

Par cette expression de AC, il est clair que si l'angle aigu B croît, d'une manière continue, depuis zéro AB et BE restant invariable; DB diminue et DE augmente, aussi bien que AC : si l'angle B, toujours aigu, diffère *infiniment peu* de l'angle droit, BD est *infiniment petit*, tandis que DE n'est pas encore égale à BE; donc alors la longueur AC est *infinie*. Ainsi l'on voit, 1° que *dans le même plan, l'oblique et la perpendiculaire à une même droite finissent toujours par se couper, étant suffisamment prolongées.*

2° Si l'angle B, continuant à croître, devient droit, d'où $BD=0$ et $DE=BE$; la longueur AC cesse d'exister, aussi bien que le point C d'intersection. Par conséquent, *dans le même plan, deux droites perpendiculaires à une même troisième n'ont aucune intersection et sont parallèles entre elles.*

3° Enfin, si l'angle B surpasse l'angle droit (ne serait-ce que d'un angle *infiniment petit*) le pied D quitte le point fixe B et passe dans la situation opposée à celle qu'il avait sur AM, quand l'angle variable B était aigu; de sorte que la longueur BD devient *négative*, de *positive*, puis *nulle*, qu'elle était avant; donc la longueur AC devient *négative*, de *positive*, puis *impossible*, qu'elle était quand l'angle B était aigu, puis droit. Le point d'intersection C est donc encore situé sur la perpendiculaire AP, mais sur son prolongement au-dessous de MN. Or, BE n'étant ainsi parallèle à AP que quand l'angle B est droit, on voit que, *par un point donné* B, *on ne peut mener qu'une seule parallèle à la droite donnée* AP.

Delà suit immédiatement que, *deux droites étant parallèles, toute perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre.* C'est la *réciproque* de 2°, que M. Francœur a choisie pour établir la *théorie des parallèles.*

Toutes les propositions ci-dessus me paraissent clairement et complètement démontrées, à l'aide de la méthode *analogique* des proportions. Cette méthode comme conséquence immédiate des définitions et de la notion même du rapport, a toute la clarté et toute la certitude des vérités fondamentales, c'est-à-dire des axiomes. Si cependant on n'y voit qu'un nouveau *postulatum*, nous pensons du moins que ce postulatum est plus facile à accorder que chacun de ceux auxquels nous le substituons; et on le préférera sans doute quand on en verra sortir, le plus clairement et le plus brièvement possible, toutes les propositions les plus utiles de la science.

VI. La méthode analogique des proportions n'est au fond que la *règle d'analogie directe*, dans le mesurage. Deux grandeurs géométriques, comprises dans la même définition générale et complète, ont nécessairement le même mode de construction, à l'aide d'éléments générateurs *analogues* deux à deux (comme les deux *bases* et les deux *hauteurs*); elles ont donc aussi nécessairement chacune la même expression numérique en fonction explicite des éléments générateurs analogues, évalués numériquement d'après la même *unité*. Ici l'analogie est complète; il n'y a donc point de raison pour que les expressions numériques des deux grandeurs proposées soient déduites de règles ou de formules différentes; d'où il suit, par exemple, que *deux pyramides, de bases équivalentes et de hauteurs égales, sont équivalentes entre elles.*

On voit que l'expression numérique étant calculée pour la plus simple des deux quantités géométriques, comprises dans la même définition, elle l'est nécessairement aussi pour l'autre et doit s'y appliquer immédiatement.

Telle est la *règle d'analogie directe* pour *découvrir* ou *démontrer* des formules générales, en Algèbre, aussi bien qu'en Géométrie. Cette règle est le résultat le plus certain de l'*induction*, soit qu'on s'élève à la loi générale en passant par les cas particuliers, méthode que Newton a suivie, pour découvrir la *gravitation universelle*, aussi bien que pour découvrir la *formule du binome;* soit qu'en posant la formule générale, on veuille la vérifier en descendant aux valeurs particulières, pour découvrir la *fonction génératrice* de cette formule. C'est ainsi que l'on établit la complète généralité de la formule du binome (ainsi que de plusieurs autres, non moins importantes); et cela, de la manière la plus claire et la plus simple.

« Newton étendit ensuite aux puissances fractionnaires, positives et négatives, l'expression analytique qu'il avait trouvée pour les puissances entières et positives du binome. Vous voyez dans cette extension, a dit Laplace, un des grands avantages du langage algébrique, qui présente des vérités beaucoup plus générales que celles qu'on voulait lui faire exprimer ; en sorte qu'en lui donnant toute l'étendue qui lui convient, on voit sortir une foule de vérités nouvelles, de formules qui n'avaient été trouvées que par des suppositions particulières. On fut d'abord très-réservé à admettre ces conséquences générales que fournissent les formules analytiques ; mais un grand nombre d'exemples les ayant justifiées, on s'abandonne aujourd'hui sans crainte, à l'analyse et à toutes les conséquences qu'elle nous présente, et les plus heureuses découvertes ont été le fruit de cette hardiesse. Observons cependant qu'il y a quelques précautions à prendre, pour éviter de donner aux formules plus de généralité qu'elles n'en comportent, et qu'il est toujours bon de démontrer en rigueur les résultats que l'on obtient ».

Cela revient évidemment à bien s'assurer que l'analogie est complète ; car alors il n'y a aucune raison pour que la formule, vérifiée par des valeurs particulières de ses éléments générateurs, cesse d'être vraie pour des valeurs quelconques ; vu d'ailleurs que les valeurs particulières d'un élément générateur ne sauraient aucunement changer le rôle qu'il remplit dans la génération.

VII. Les auteurs se sont attachés, avec beaucoup de raison, à rendre bien saillante l'*analogie* entre les diverses parties de la géométrie élémentaire, afin d'en simplifier l'étude ; mais ils auraient atteint le but, plus complètement, et auraient évité bien des détours, des lemmes, des démonstrations compliquées, bien des longues et inutiles réductions à l'absurde, s'ils avaient pensé à la *règle d'analogie directe*, clairement indiquée par chaque définition générale.

A l'aide de cette règle, en effet, on passe immédiatement de l'aire du triangle *isocèle* à l'aire du secteur *circulaire*, dont ce triangle fait partie ; de l'aire *latérale* du prisme droit ou de la pyramide régulière à l'aire *latérale* du cylindre circulaire droit ou du cône droit, à base circulaire ; on passe du volume du cube au volume de tout prisme ou de tout cylindre ; du volume de la pyramide régulière, sixième d'un cube, au volume de toute pyramide et de tout cône ; d'où l'on déduit ensuite, très-simplement et toujours d'après l'analogie directe, toutes les propositions du mesurage des aires et des volumes, dans certains *anneaux* et dans les *corps ronds* ou de *révolution*.

L'expression numérique est d'autant plus *générale* que la définition, d'où elle se déduit, s'étend à un plus grand nombre de figures *analogues*. Aussi presque toutes les règles de mesurage, dans la géométrie élémentaire, sont-elles exprimées par une même formule générale (que nous avons déjà établie).

Soit G une grandeur géométrique quelconque, aire ou volume; soit b sa base, ligne ou aire, et soit h sa hauteur, distance rectiligne ou curviligne du sommet à b: si x est la *section* parallèle à la base b, fait à la distance y du sommet, et que m étant un *exposant* quelconque, toutes les grandeurs G soient définies par la proportion

$$b:x::h^m:y^m;$$

il est facile d'en déduire l'expression numérique de G, en b, h et m.

Par cette définition, en effet, toutes les grandeurs G, qui y sont renfermées, ont nécessairement le même mode de génération numérique; or, on sait que, pour le triangle, où $m=1$, et pour le prisme droit, où $m=0$, on a $G=bh:(1+m)$; par conséquent, l'expression numérique de toutes les grandeurs G proposées est

$$G=bh:(1+m).$$

Cette formule est très-générale; car elle s'applique immédiatement, 1° à l'aire de tout secteur circulaire, à l'aire latérale de tout cône circulaire droit et au volume de tout *conoïde* droit triangulaire, où chaque fois $m=1$; 2° au volume de toute pyramide, de tout cône, de tout onglet sphérique et de toute pyramide, partie de la sphère, où chaque fois $m=2$; 3° au volume de tout prisme ou de tout cylindre, à l'aire latérale du cylindre circulaire droit et de toute figure, ayant le même mode de génération, où chaque fois $m=0$.

La même formule, pour $m=0$, fournit immédiatement l'expression numérique du volume et de l'aire latérale engendrés respectivement par l'aire plane b et son périmètre p, ayant l'un et l'autre un *centre de symétrie;* ce centre se mouvant sur la ligne donnée h, *courbe* ou *sinueuse*, de telle sorte que le plan de b lui soit toujours *normal*, comme pour le cylindre circulaire droit. Le volume et la surface engendrés ont donc bh et ph pour mesures respectives; expressions immédiatement applicables à certaines *colonnes torses*, aux divers genres d'*anneaux* et en particulier à l'*anneau rond*, où $p=2\pi r$, $b=\pi r^2$ et $h=2\pi d$; enfin à l'aire latérale du cône circulaire droit *tronqué*, à bases parallèles.

L'analogie directe ne sert pas seulement à démontrer, les propositions de mesurage, de la manière la plus simple; mais surtout elle sert à les découvrir ou à les rappeler, si on les avait oubliées : elle est bien la véritable *méthode d'invention* qui domine toutes les sciences.

L'analogie et l'expérience sont les guides de l'esprit de recherche ; *ce sont les deux béquilles à l'aide desquelles nous nous traînons dans la carrière du raisonnement*, a dit le grand Frédéric (Boiste). Ces deux guides, toujours nécessaires, peuvent ne pas suffire dans les sciences d'observation ; mais en Algèbre et en Géométrie, où l'analogie directe est clairement et complètement indiquée par chaque définition générale, les conclusions par analogie sont des vérités certaines, clairement et rigoureusement déduites ; parce que la définition générale, rendant en quelque sorte identiques toutes les grandeurs qu'elle renferme, celles-ci jouissent nécessairement des mêmes propriétés générales, indiquées par l'analogie.

VIII. Les améliorations que nous venons de signaler, dans les modes de recherches et de démonstration, ne sont pas les seules que réclament les traités de géométrie : plusieurs de ces traités demandent encore une *méthode générale*, rendue bien saillante, par différents exemples choisis, pour démontrer les *théorèmes* et pour résoudre les *problèmes*, soit *graphiques* soit *numériques* (souvent à l'aide de l'Algèbre), d'après l'analyse de la figure cherchée, *tracée d'abord approximativement.*

Ici les exemples abondent ; car il existe un grand nombre de *propositions réciproques*, qu'on énonce rarement, et dont cependant les démonstrations fourniraient, aux élèves, des *exercices* faciles, propres à éclaircir les théories et à les fixer dans la mémoire.

Il existe aussi un grand nombre de *propriétés* des figures définies : triangle, quadrilatères, cercle, prismes, pyramides, etc., qui ne sont pas énoncées et que l'on devrait donner pour sujets de *composition*, d'un jour à l'autre, avant, pendant ou après les leçons successives, en les énonçant, soit comme théorèmes à démontrer, soit comme problèmes à résoudre.

Tels sont les moyens les plus efficaces pour familiariser les élèves avec les formes rigoureuses de l'analyse logique, pour leur inspirer le goût du travail et pour leur faire approfondir la science ; surtout si l'on choisit les exemples parmi les choses usuelles, autant que possible, ou du moins si on les présente sous des formes propres à exciter la curiosité et à faire naître ainsi le désir de connaître.

La considération de la ligne droite et de la circonférence, a dit Laplace, donne lieu à beaucoup de problèmes très-piquants, dont on peut trouver des solutions fort élégantes ; un choix bien fait de ces problèmes que l'on proposerait aux élèves, exercerait leur esprit d'une manière utile, et graverait dans leur mémoire, les propositions les plus intéressantes de la géométrie.

Les Professeurs, pour préparer leurs élèves aux examens et aux épreuves des *Concours*, but final des études, reviennent plusieurs fois sur les théories principales, afin de les leur faire approfondir : chose sans doute fort utile, car les répétitions sont même indispensables à cet effet. Mais la résolution de questions choisies, applications des théories successives, n'est-elle pas la méthode la plus fructueuse et la plus propre à bien faire ces répétitions, elles-mêmes ?

Il faut observer toutefois qu'ici, c'est moins la *quantité* que la *qualité* que l'on doit considérer : quelques théorèmes ou problèmes, bien choisis et bien analysés, instruisent mieux et donnent plus complètement l'esprit de recherche, qu'un grand nombre d'exercices, faits superficiellement. D'ailleurs, les applications ne seront jamais assez multipliées pour prévoir toutes les circonstances qui peuvent se présenter, dans les usages de la vie, dans la pratique des arts, aussi bien que dans les examens.

C'est donc par une complète analyse logique des propositions successives et par l'application que l'on en fait à des questions choisies, que l'on peut approfondir l'étude de la science, en se bornant d'ailleurs aux théories fondamentales qui la constituent.

On peut sans doute oublier certains énoncés, en *Arithmétique* et en *Algèbre*, aussi bien qu'en *Géométrie ;* mais ce qu'on n'oublie pas et ce qu'on a toujours à sa disposition, quand on a suivi une bonne direction dans l'étude de la science, c'est la *méthode* et c'est l'*intelligence* de ses procédés, une fois bien acquises ; pour retrouver au besoin les propositions oubliées ; pour en découvrir d'autres, non moins utiles parfois, et enfin, pour réussir dans les concours et dans les examens d'admission.

IX. La géométrie a pour objet *l'étendue figurée,* c'est-à-dire à la fois la *grandeur*, la *forme* et par conséquent la *position*. Or, il arrive souvent que la figure à étudier n'existe que dans la conception, ou qu'elle est *invisible* et *inaccessible*, du moins en partie : dans chacun de ces cas, pour faciliter cette étude, il est nécessaire de mettre la figure sous les yeux, ou du moins sa *représentation* approchée, sur le papier ou sur le tableau ; il faut donc la *construire* ou la *dessiner*, avec ses dimensions *réduites*, réelles ou apparentes ; de telle sorte que la *copie* résultante la *représente* complètement aux yeux, en tienne absolument lieu et lui soit *semblable* en tout, si elle est plane, ou *paraisse* telle, si la figure imaginée a les trois dimensions de l'étendue.

Dans ce dernier cas, la *copie* devrait être en *relief*, pour représenter complètement la figure à étudier et servir de *modèle* à toutes les figures *semblables* que l'on devrait construire avec des dimensions déterminées.

Toutes les recherches de la géométrie ne portent et ne sauraient porter que sur les définitions et non sur les figures, que l'on met sous les yeux, pour donner une idée de la figure à étudier et pour diriger les raisonnements à effectuer ; car un tracé approché de la forme apparente, un simple *croquis*, suffit à cet effet. Il est même souvent plus simple de ne tracer aucune figure ; mais alors il faut en avoir l'idée complète, donnée par la définition.

Maintenant, pour que deux figures quelconques inégales soient *semblables* en tout et que l'une puisse *représenter* l'autre (aux yeux quant à la forme seulement) et en tenir parfaitement lieu dans l'étude de leurs *propriétés* communes ; il faut que toutes les parties de la première (la *copie*) puissent *représenter* les parties *correspondantes* ou *analogues*, appelées *homologues*, de la figure à étudier ; ainsi il faut que, 1° les *angles* ou les *dièdres* homologues soient *égaux ;* 2° les *droites* homologues, *proportionnelles ;* 3° les *faces* homologues, *semblables ;* 4° enfin, les *parties* homologues, disposées dans le même *ordre*, en passant d'une figure à l'autre.

On doit donc appeler, 1° *Polygones semblables*, deux polygones, du même nombre quelconque de sommets, ayant les côtés homologues proportionnels et les angles homologues égaux, disposés dans le même ordre ; 2° *Polyèdres semblables* (directement), deux polyèdres, de chacun *n* sommets, ayant les faces homologues semblables et les *coins* homologues égaux, disposés dans le même ordre, en passant d'un polyèdre à l'autre.

Bien qu'il y ait ici des conditions se déduisant des autres et par conséquent *superflues*, nous préférons les définitions précédentes ; d'abord parce qu'elles sont les plus conformes à l'idée que nous donne le seul aspect des deux figures ; et ensuite parce que la recherche des conditions, *nécessaires* et *suffisantes*, est spécialement l'objet de la théorie (laquelle apprend aussi que, sur la même sphère, on ne saurait tracer deux figures *semblables*).

Il résulte de ces définitions, que deux polyèdres ou deux polygones *semblables* ont des *formes identiques*, sans qu'ils aient nécessairement la même *grandeur*. Remarquons d'abord qu'ici la *forme* ne dépend pas seulement de la grandeur individuelle des parties, mais surtout de leur *disposition* les unes à l'égard des autres, ne dépendant que des *angles* ou des *coins*. Or, si deux polyèdres sont semblables directement, ils ne cessent pas d'être tels et la forme de chacun ne change pas, lorsque les coins homologues restant égaux, deux côtés homologues deviennent égaux entre eux; vu que les côtés homologues restent toujours proportionnels. Mais alors les deux polyèdres pouvant se confondre en un seul, ont absolument la même forme, que l'hypothèse de deux côtés homologues égaux n'a pas changé : donc avant ils avaient aussi la même forme; et c'est uniquement l'identité des formes qui constitue la *similitude directe* de deux figures.

Pour la *ressemblance*, la *représentation* ou l'*apparence* complète d'un objet matériel, il faut à la fois l'identité des *formes* et l'identité des *couleurs* respectives et de leurs *nuances*, semblablement disposées, en passant de l'objet à son image.

X. Lorsque la comparaison de deux corps matériels, où l'on fait abstraction des couleurs, apprend qu'*ils ne diffèrent que par leurs grandeurs*, comme deux cubes ou deux sphères quelconques, on dit que ces deux corps sont *semblables;* et telle est la véritable notion de *similitude*.

Le seul aspect des deux corps conduit à cette notion; laquelle est nécessairement fort confuse chez le vulgaire qui, s'arrêtant à ce seul aspect, ne saurait voir comment les deux corps peuvent ne différer que par leurs grandeurs.

Pour le savoir et acquérir la véritable notion de similitude, il faut les définitions développées plus haut; et il en résulte que, 1° *deux quantités géométriques sont semblables dans tous les cas analogues à ceux où elles sont égales;* vu que l'*identité* des deux figures exige toutes les conditions de leur *similitude* et une condition de plus, savoir : l'égalité de deux lignes homologues.

2° *Deux quantités géométriques sont inversement semblables dans toutes les circonstances analogues à celles qui les rendent symétriques;* vu encore que la *symétrie* des deux figures exige toutes les conditions de leur similitude *inverse* et une condition de plus, savoir : l'égalité de deux lignes homologues.

On voit qu'en remplaçant le rapport 1, entre les lignes homologues, par un autre rapport constant quelconque, les propositions établies sur l'*égalité* et la *symétrie* de deux figures, se changent en propositions sur la *similitude directe* et la *similitude inverse* des deux figures, ainsi modifiées; et ces nouvelles propositions sont alors démontrées *par analogie*.

En général, soient A et B deux quantités géométriques, directement ou inversement semblables; soient C et D les deux parties *homologues*, l'une de A et l'autre de B : C et D sont donc aussi semblables, directement ou inversement. Or, il est évident que D se trouve avec B absolument comme C avec A; donc on aura toujours la proportion

$$A:C::B:D.$$

Si donc A, C et D sont mesurés ou évalués numériquement, on pourra calculer B, *inaccessible* ou *invisible*.

Le rapport des deux aires ou des deux volumes A et B, directement ou inversement semblables, est parfois très-difficile à déterminer; et il faut alors le remplacer par un autre égal, plus facile à calculer exactement, tel que celui des carrés ou des cubes C et D, faits sur deux droites homologues de A et de B. On a toujours, en effet, d'après l'analogie directe,

$$A:B=C:D;$$

car pouvant toujours disposer C et D, de telle sorte que les figures résultantes $A+C$ et $B+D$ soient semblables, directement ou inversement, il est évident que D se trouve avec $B+D$ absolument comme C avec $A+C$, et qu'ainsi on a simultanément $C=(A+C)m$ et $D=(B+D)m$; d'où $A:B=C:D$.

XI. La génération *descriptive* de toute quantité géométrique suppose toujours un mouvement *continu* et la succession, non interrompue, de parties *variables*. La *continuité* est donc le caractère essentiel des lignes, des angles, des surfaces et des volumes; et il faut y avoir égard, pour bien étudier la génération numérique de chaque genre de quantité. Or, comment peindre la continuité à la pensée et comment l'exprimer dans le calcul? Ce ne peut être qu'à l'aide des grandeurs *infinitésimales*, éléments générateurs *auxiliaires*, nécessairement *variables*.

Les *infiniment petits* ne servent pas seulement à exprimer la continuité, mais ils servent à rendre l'analogie plus évidente et plus complète, en faisant passer des lignes *brisées* aux lignes *courbes*, des surfaces *polyédrales* aux surfaces *courbes* et des *polyèdres* aux *corps ronds*. Comment, par exemple, sans les grandeurs infinitésimales, étendre aux lignes et aux surfaces courbes, les notions de similitude, acquises pour les lignes brisées et les surfaces polyédrales?

Il y a une grande analogie entre le cercle et les polygones réguliers ; mais l'analogie est certainement plus saillante et plus complète encore en disant que *le cercle est au fond le polygone régulier d'une infinité de côtés, chacun infiniment petit* (dont par suite le *rayon* et l'*apothème* sont égaux).

Et l'on est amené à cette proposition, non-seulement en imaginant une suite illimitée de polygones réguliers *circonscrits*, de deux en deux fois plus de côtés ; mais surtout en déduisant l'aire du cercle de l'aire du polygone régulier circonscrit, à l'aide de la *règle des variables auxiliaires*, savoir :

Si une équation, toujours exacte, renferme des termes constants et des termes variables, ces derniers doivent en disparaître, absolument comme si leur ensemble était rigoureusement nul : autrement, un nombre constant serait *toujours* égal à un nombre variable ; chose absurde.

Ici les termes variables ne sont jamais *nuls*, mais ils peuvent devenir *infiniment petits*. On voit d'ailleurs comment la règle ci-dessus fournit le principe de la méthode des *limites*, de la méthode *infinitésimale* et de la méthode des *coefficients indéterminés :* ces trois méthodes rentrent, en effet, dans la méthode *analogique*, qu'elles rendent plus *directe ;* surtout la méthode infinitésimale, pour généraliser les définitions, pour découvrir les *propriétés* de la figure et en exprimer numériquement la *grandeur ;* pour passer, en un mot, du connu à l'inconnu, par le chemin le plus court et le plus clair.

XII. La règle des variables auxiliaires est employée, sous une autre forme, par différents auteurs, pour la théorie du mesurage, dans la géométrie élémentaire, où ils évitent ainsi plusieurs longues et obscures réductions à l'absurde. Ils auraient pu en éviter d'autres, notamment dans le mesurage des pyramides et des cônes, d'après l'expression numérique du prisme ; car ici la méthode des variables auxiliaires n'exige que des calculs fort élémentaires, où les grandeurs infinitésimales sont d'ailleurs déguisées.

Concevant en effet, la hauteur h, de la pyramide ou du cône P, divisée en n parties égales à x, par des plans parallèles à la base b, d'où $h=nx$; ces plans diviseront P en n tranches, toutes de même épaisseur variable x. Il est facile de voir que la v ième de ces tranches, à partir du sommet, étant désignée par T, on aura successivement, a et c désignant ses deux bases :

$$ah^2=bx^2v\,,\ ch^2=bx^2(v-1)^2,\ T=ax-<x(a-c)\,,$$
$$Th^2=bx^2v^3-<bx^3[v^2-(v-1)^2].$$ Or, on a

$$v^2 = \tfrac{1}{3}[v^3-(v-1)^3] + <[v^3-(v-1)^3]; \text{ donc}$$
$$Th^3 = \tfrac{1}{3}bx^3[v^3-(v-1)^3] - <bx^3[v^3-(v-1)^3],$$
$$Ph^3 = \tfrac{1}{3}bx^3n^3 - <bx^3n^3 \text{ et } P = \tfrac{1}{3}bh - <bx.$$

Or, les nombres P et $\frac{1}{3}bh$ sont constants, tandis que x est essentiellement variable avec n, sans que la dernière équation cesse d'être exacte, comme conséquence rigoureuse de la division de P en tranches. Si donc le terme variable $<bx$ devait être conservé dans cette équation, le nombre constant P serait *toujours* égal au nombre variable $\frac{1}{3}bh - <bx$; chose évidemment absurde. Donc le terme variable doit disparaître de l'équation finale, absolument comme s'il était rigoureusement *nul;* de sorte qu'on aura toujours $P = \frac{1}{3}bh$.

La règle d'analogie directe exigeant l'expression de la pyramide, sixième d'un cube, ne fournit guère plus simplement la formule $P = \frac{1}{3}bh$, où les unités sont sous-entendues. On voit donc quel parti utile on peut tirer de la règle des variables auxiliaires, en géométrie; surtout si on simplifie d'abord l'expression de la v ième tranche T, en y supprimant les termes qui seront multipliés par la variable x, dans l'équation finale; d'où ils doivent disparaître, absolument comme s'ils étaient rigoureusement *nuls :* car ce sont des *zéros relatifs* aux nombres constants, en vertu de la règle des variables auxiliaires.

Cette simplification est précisément la *méthode infinitésimale*, où la partie x est supposée *infiniment petite*, n étant *infini*, et où par suite la v ième tranche T est regardée comme un prisme et la somme Sn^2, comme rigoureusement égale à $\frac{1}{3}n^3$.

En général, *tout nombre doit se négliger et être regardé comme nul vis-à-vis de celui qui le contient une infinité de fois ;* car il ne saurait augmenter ni diminuer ce dernier, en vertu de la règle des variables auxiliaires. C'est pourquoi l'on a $Sn^2 = \frac{1}{3}n^3$, $Sn = \frac{1}{2}n^2$, $Sn^3 = \frac{1}{4}n^4$, etc.

XIII. On évite l'emploi *explicite* des grandeurs infinitésimales quand l'analogie directe est clairement indiquée par les définitions générales, comme pour trouver les expressions des aires et des volumes dans les corps ronds; car alors la *règle* d'analogie directe est immédiatement applicable. Comme aussi pour passer de la *projection* d'une droite, *inscrite* dans une figure plane, à la projection de même nature, de cette figure; pour passer de l'aire du *cercle* et du volume de la *sphère* à l'aire de l'*ellipse* et au volume de l'*ellipsoïde;* de l'aire de l'*ellipse* à l'aire limitée par la courbe, *lieu géométrique des pieds de toutes les perpendiculaires, menées sur les tangentes à l'ellipse, soit du centre, soit d'un sommet;* etc.

Dans ces différentes recherches, les quantités infinitésimales ne sont pas mentionnées; mais elles n'en sont pas moins employées *implicitement*, pour généraliser les définitions et regarder, par exemple, le *cylindre* comme un *prisme* d'une *infinité* de faces latérales, *infiniment étroites*. Il est d'ailleurs une foule de recherches numériques où les infiniment petits se présentent inévitablement, pour rendre l'analogie plus saillante et faire découvrir les deux genres de *génération*.

C'est ainsi que, par le centre et un diamètre $2r$ de la base du cylindre circulaire droit, si on mène un plan quelconque et qu'on désigne par t l'aire de la plus grande section triangulaire de l'*onglet* résultant, on trouve, avec facilité, $\frac{4}{3}rt$ et $4t$, pour son *volume* et sa *surface courbe;* expressions très-simples et d'autant plus remarquables, qu'elles sont indépendantes du nombre π, contrairement à ce qu'on aurait cru prévoir. C'est aussi par des cylindres droits, de hauteurs égales et infiniment petites, que l'on calcule, avec facilité, le volume du *segment sphérique;* etc.

XIV. La géométrie étant l'une des sciences les plus utiles, on doit chercher tous les moyens d'en simplifier l'étude, afin de la rendre accessible au plus grand nombre, sans toutefois lui rien faire perdre de la grande exactitude qui caractérise si éminemment ses déductions. Or, c'est par l'*analogie directe* que l'on peut y parvenir; ainsi que nous avons tâché de le prouver, dans ce qui précède; et c'est pour mettre ce fait plus complétement en évidence, s'il est possible, que nous revenons encore sur la théorie des parallèles, dont la proposition, qui lui sert de base, est déja démontrée plus haut, d'après l'analogie directe.

Mais avant, observons que pour simplifier l'étude de la géométrie, il faut d'abord examiner si les définitions que l'on y pose, d'après l'analogie, sont claires, simples, précises et complètes : sinon, il faut les perfectionner et tâcher de leur faire acquérir ces qualités essentielles; chose très-possible, pour les lignes courbes, les rapports et les incommensurables, aussi bien que pour les angles. Si toutes les définitions sont de véritables axiomes, c'est-à-dire ont les caractères de simplicité et d'une complète évidence, et que cependant elles soient insuffisantes pour démontrer clairement, simplement et rigoureusement certaines propositions; alors, mais seulement alors, il faut chercher à les déduire de quelque vérité, assez claire, pour qu'on puisse la ranger parmi les axiomes et la regarder comme fondamentale, dans la science.

Telle n'a pas été la méthode suivie dans la plupart des traités de géométrie, où la théorie des parallèles laisse encore à désirer, malgré les efforts de beaucoup d'auteurs pour mettre cette théorie fondamentale à l'abri de tout reproche.

On connaît les travaux de Legendre et de plusieurs autres géomètres sur ce sujet : presque tous sont entraînés à de longues démonstrations, sans pouvoir leur donner toute la clarté et toute l'exactitude désirables.

Bertrand de Genève a bien vu le premier que la nature *infinie* de l'angle doit entrer en considération; mais l'usage qu'il en fait, dans la théorie ci-dessus, bien que propre à l'éclaircir et à lui donner une grande exactitude, ne paraît pas entièrement exempt de difficulté, à plusieurs géomètres; même à ceux qui regardent sa théorie des parallèles comme l'une des plus claires. C'est qu'en effet la définition de l'*angle* y est incomplète, aussi bien que la définition généralement admise.

En présence de ces difficultés, plusieurs auteurs modernes, au lieu de chercher à perfectionner les définitions, seul moyen d'éclaircir les théories, se sont attachés à simplifier le *postulatum* d'Euclide, en le remplaçant par d'autres, plus faciles à accorder.

XV. Parmi les propositions qui peuvent servir de base à la théorie des parallèles, Lacroix et différents auteurs, après lui, regardent la suivante comme ayant toute l'évidence désirable, savoir : *l'oblique et la perpendiculaire à une même droite, dans le même plan, finissent toujours par se couper, étant suffisamment prolongées.*

On a vainement essayé de démontrer cette proposition fondamentale, d'après les définitions admises : la logique est impuissante et refuse le service pour y parvenir. Aussi n'est-ce qu'en désespoir de cause, et pour simplifier le plus possible, qu'on a rangé la proposition ci-dessus parmi les *axiomes :* elle en a d'ailleurs les caractères; et plusieurs auteurs motivent le choix qu'ils en ont fait, par des considérations de nature à satisfaire les esprits les plus exacts et les plus rigoureux.

D'après Lacroix, l'oblique et la perpendiculaire doivent non-seulement se couper; mais la notion de la ligne droite ou la sensation par laquelle on voit si un alignement est bien pris, montre même l'endroit où doit se faire l'intersection.

Toutes les vérités de la Géométrie, dit M. Nicollet, sont conditionnelles et subordonnées à l'adoption de quelques axiomes; par conséquent, nous ne voyons ni difficulté ni contradiction, à en compter un de plus ; quand la vérité dont il est l'expression en a tout le caractère, comme la proposition ci-dessus.

Néanmoins, les géomètres qui tiennent à faire de leur science, une pure science de déductions logiques, pensent qu'il faut, pour cet effet, emprunter le moins qu'il se puisse au témoignage des sens et que, par suite, il faut réduire au plus petit nombre possible les axiomes et surtout les *demandes*, en géométrie. De sorte qu'ils regardent comme une légère imperfection de la science qui n'en devrait connaître aucune, l'impossibilité où ils sont de démontrer la proposition ci-dessus, de manière à satisfaire tout le monde.

Or, à quoi tient cette impossibilité? Ne vient-elle pas de ce qu'un angle *droit* et un angle *aigu*, c'est-à-dire la position *perpendiculaire* et la position *oblique*, étant les éléments essentiels de la démonstration, on n'y fait point assez intervenir la double propriété *caractéristique* de l'angle : d'avoir ses côtés *illimités* dans un sens et d'exprimer la *position*, plus ou moins *éloignée*, plus ou moins *écartée*, plus ou moins *ouverte*, d'un côté à l'égard de l'autre ? N'est-ce pas, en un mot, parce que la définition admise de l'angle ne fait point assez connaître cette double propriété ?

La méthode analogique des proportions et la discussion de l'expression résultante démontrent, très-clairement et très-exactement, la proposition ci-dessus, ainsi que plusieurs autres, tout aussi fondamentales, comme on l'a vu plus haut ; mais la véritable notion de l'angle conduit aussi très-rigoureusement et plus directement encore au postulatum d'Euclide.

XVI. L'*angle* est bien une portion plane *infinie*, comprise entre ses deux côtés ; mais c'est aussi la *position*, plus ou moins *ouverte*, d'un côté à l'égard de l'autre ; et c'est uniquement cette position, *oblique* ou *perpendiculaire*, que l'on considère dans chaque angle. De sorte que la *grandeur* de l'angle dépend, non de la longueur *illimitée* de ses côtés, mais seulement de leur *ouverture*, de leur *écartement* ; et l'angle est d'autant plus *grand* qu'il est plus *ouvert*.

Telle est, je pense, la véritable notion de l'angle : il en résulte que l'*espace angulaire* autour de chaque point du plan *infini* est absolument le même, quel que soit ce point. *Tous les angles droits sont donc égaux entre eux*, comme étant chacun le quart de l'espace angulaire autour de chaque point du plan infini ; c'est-à-dire que chaque angle droit est au fond le quart du plan.

Maintenant, considérons deux droites coupant une même troisième, dans le plan, et supposons que l'un des angles *externes* A soit plus grand que l'angle *interne* B, *correspondant*. Ces deux angles ont leurs premiers côtés sur la troisième droite, tandis que le second côté de A est en partie dans l'angle B ; or il doit couper nécessairement le second côté de B. Car s'il en était autrement, c'est-à-dire si le second côté de A était contenu entièrement dans l'angle B ; l'angle A ne serait évidemment pas plus ouvert ni plus grand que l'angle B, contrairement à l'hypothèse. Donc les seconds côtés de A et de B finiront toujours par se couper ; c'est-à-dire que, *dans le même plan, si deux droites rencontrent une même troisième, de telle sorte qu'un angle externe soit plus grand que l'angle interne, correspondant, ces deux droites finissent toujours par se couper, étant suffisamment prolongées.*

Tel est le postulatum d'Euclide, base de la théorie des parallèles, la plus simple et la plus complète. Ce postulatum me paraît démontré clairement et rigoureusement ; mais on peut encore procéder comme il suit : Soit placé l'angle B dans l'angle A plus grand, de telle sorte qu'ils aient un côté et le sommet communs ; il est clair que si l'on fait ensuite glisser l'angle B, dans sa nouvelle position, sur le côté fixe prolongé de l'angle A, jusqu'à ce que B soit revenu dans sa position primitive ; le second côté de B ne pouvant coïncider un seul instant avec le second de A, ces deux seconds côtés se couperont dans une infinité de positions consécutives de B, bien que leur intersection unique s'éloigne de plus en plus du sommet d'abord commun. Et comme l'analogie est complète entre toutes les positions de B à l'égard de A, il n'y a point de raison pour que les deux seconds côtés cessent de se rencontrer : donc ils se couperont toujours ; ce qu'il fallait démontrer.

Pour appliquer, plus immédiatement encore, l'analogie directe, menons les deux droites AN et BP, se coupant en un point C et coupant la droite ABM en A et B : l'angle *externe* PBM sort de l'angle *interne* NAM, correspondant ; *il est donc plus ouvert et plus grand que ce dernier.* Faisant glisser sur MA l'angle PBM, de telle sorte que le sommet B soit en un point D de AB, que le côté BP coupe AN en un point I et qu'on ait l'angle IDM=PBM : il est clair alors que les deux angles A et IDM, qu'il faut tracer aux extrémités de AD, pour avoir DI, il faut aussi les tracer aux extrémités de AB, pour avoir BC ; donc BC *se trouve avec* AB, *absolument comme* DI *avec* AD ; car ici les angles sont des éléments générateurs auxiliaires, qui ne sauraient entrer dans le résultat de la génération. Si donc $DI=AD\times n$, on aura aussi nécessairement $BC=AB\times n$:

cela donne $BC:AB=DI:AD$ et par conséquent, on aura toujours

$$BC=AB\times(DI:AD).$$

Cela posé, l'angle MBP ou MDI restant invariable, aussi bien que les longueurs AB et AI, supposons que l'angle A ou MAN croisse, depuis zéro jusqu'à deux droits ; il est clair alors que AD diminue et passe par l'*infiniment petit* et le *zéro absolu*, avant de devenir *négative ;* et comme DI augmente jusqu'à AI, puis diminue, on voit que BC croît et passe par l'*infiniment grand*, puis par la *non-existence*, qu'indique $AB(AI:0)$, avant de devenir *négative.*

Ainsi *les deux droites* AN *et* BP *se coupent, tant que les deux angles interne-externe* NAM *et* PBM *sont inégaux.* Mais si ces deux angles sont égaux, ce qui n'a lieu que dans le seul cas de $AD=0$, la longueur BC est impossible, aussi bien que l'intersection C ; donc *les deux droites* AN *et* BP, *toujours dans le même plan, sont parallèles, dès que deux angles interne-externe sont égaux.*

On a donc cette proposition fondamentale : *par un point donné* A, *on peut toujours mener une parallèle à la droite tracée* BP, *mais on ne peut en mener qu'une seule.*

XVII. Ces développements suffisent sans doute pour bien mettre en évidence l'utilité de la *discussion* des formules et surtout les ressources qu'offre l'analogie directe, pour établir clairement les propositions fondamentales de la géométrie. En voici encore des exemples, à remarquer :

1° Dans le triangle ABC, l'angle C se détermine entièrement par les deux autres A et B, en les traçant aux extrémités du côté AB ; et cela, quelle que soit la longueur de ce côté. De sorte que l'angle C ne dépend aucunement de cette longueur. De même, dans le triangle A'B'C', l'angle C' est déterminé entièrement par les deux autres A' et B', tracés aux extrémités du côté A'B'. Il est donc évident que l'angle C' se trouve avec les deux A' et B' absolument comme l'angle C avec les deux A et B. Si donc l'angle $A=A'$ et l'angle $B=B'$; le troisième angle C est nécessairement égal au troisième C', *et les deux triangles sont équiangles entre eux.*

2° A cause de l'angle $A=A'$ et de l'angle $B=B'$, on voit que AC ou BC se trouve avec AB absolument comme A'C' ou B'C' avec A'B' : donc on aura toujours

$$AC:A'C'=AB:A'B'=BC:B'C'.$$

Et puisque les côtés opposés aux angles égaux sont dits côtés *homologues*, on voit que, *dans deux triangles équiangles, les côtés homologues sont proportionnels :* les deux triangles sont donc *sembla-*

bles en tout, et l'un *représente* complètement l'autre ; vu d'ailleurs qu'ils sont égaux dès que AB=A'B'.

3° Il suit de 1° que la hauteur AD, menée du sommet de l'angle droit A, dans le triangle rectangle ABC, le divise en deux triangles ABD, ACD, équiangles avec lui et entre eux ; de sorte que, dans tout triangle rectangle, la somme des deux angles aigus donne précisément l'angle droit A, et que par suite, *dans tout triangle rectiligne, la somme des trois angles est toujours égale à deux angles droits* (ce qui montre comment deux angles déterminent le 3^{me}).

4° Les trois triangles semblables ABC, ABD et ACD, donnent, en vertu de 2°, les quatre analogies :

$$BD:AB=AB:BC\ ,\ CD:AC=AC:BC\ ,$$
$$BD:AD=AD:CD \text{ et } BC:AB=AC:AD.$$

Telles sont les proportions entre les côtés et la hauteur, menée de l'angle droit, de tout triangle rectangle. Ces propriétés et leurs réciproques, faciles à énoncer et à retenir, sont fondamentales, non-seulement dans la géométrie *graphique*, mais aussi dans la géométrie *numérique*, après avoir réduit, en *nombres abstraits*, les quatre termes de chaque proportion.

5° Soient a, b, c et h les *rapports*, à la même *unité linéaire* u, des côtés respectivement opposés aux angles A, B, C et de la hauteur AD : a, b, c et h sont donc des nombres abstraits, exprimables ou inexprimables en chiffres, et l'on a, par exemple, $BC=u\times a$ ou $BC:u=a$. Et comme l'unité u est invariable et bien connue, on la *sous-entend* toujours, comme *diviseur* de BC, et l'on a simplement $BC=a$. Dans ce cas, le rapport a est dit la *mesure* ou la *valeur numérique* de BC et en *représente* la *longueur ;* tandis que cette droite, censée divisée par u, s'appelle *droite numérique :* alors BC^2 ou a^2 en indique le *carré numérique.*

Cela posé, regardant tous les termes des quatre proportions précédentes, comme divisés chacun par l'unité linéaire u, sous-entendue ; ce qui revient à remplacer tous ces termes par leurs valeurs numériques a, b, c, h ; il est clair que ces proportions ne sont pas détruites et sont alors *numériques* ou entre nombres abstraits, *rationnels* ou *irrationnels.* On a donc simultanément

$$AB^2=BD\times BC\ ,\ AC^2=CD\times BC\ ,$$
$$AD^2=BD\times CD \text{ et } BC\times AD=AB\times AC.$$

6° Voilà déjà quatre *relations* entre les *droites numériques* dans tout triangle rectangle. Ces relations importantes, faciles à retenir et à énoncer, fournissent toutes les relations numériques, qui résultent de la comparaison des longueurs, dans la géométrie plane, et cela, à l'aide des propriétés de triangles équiangles et d'une autre relation, non moins utile, déduites immédiatement des deux premières, savoir :

$$BC(BD+CD) \text{ ou } BC^2=AB^2+AC^2.$$

Cette relation est satisfaite, comme on sait, par une foule de systèmes de *nombres entiers*, dont voici le plus simple : $BC=5$, $AB=4$ et $AC=3$.

7° Réciproquement, si l'on introduit l'unité superficielle *s* devant chaque terme, comme multiplicande, et qu'on ait égard aux expressions numériques du carré et du rectangle, on aura cinq autres relations entre des rectangles et des carrés réels ; et l'on voit, par la dernière, que *dans tout triangle rectangle, le carré construit sur l'hypoténuse vaut la somme des carrés faits sur les deux autres côtés.*

D'après l'égalité et l'équivalence des figures, ce théorème remarquable et ses corollaires se démontrent directement sur une figure tracée. Cela peut paraître plus clair, mais est moins simple, en réalité, que l'emploi ci-dessus des *droites numériques*. On a, par ce théorème et ses corollaires, cinq relations entre surfaces *rectangulaires ;* et si on y remplace les rectangles et les carrés par les expressions de leurs *aires ;* la suppression de *s*, dans tous les termes, reproduit les relations, établies plus haut.

8° On voit clairement, par les considérations précédentes, comment on passe de la géométrie *graphique* à la géométrie *numérique*, et réciproquement. Si nous insistons sur ce sujet, c'est qu'il est souvent fort négligé dans les traités élémentaires, ou faute des développements nécessaires, les utiles propositions qu'il fournit ne sont pas toujours clairement saisies ; de sorte que les élèves se trouvent ainsi arrêtés dans une étude importante.

Pour la leur rendre facile, il faut des notions clairement développées et des démonstrations bien choisies ; il faut surtout éviter la multiplication, terme à terme, de deux proportions entre *quantités continues.* Car cette multiplication, trop souvent employée, n'offre aucun sens, si l'on n'a d'abord remplacé les différents termes par leurs *valeurs numériques*, ou du moins si on n'a pas d'abord averti que cette *transformation* est supposée, pour rendre *numérique* chaque proportion, afin que chaque multiplicateur soit un nombre abstrait. On évite d'ailleurs ce mode de démonstration en observant que, *dans chaque proportion, un antécédent est toujours le produit de son conséquent par la valeur indiquée de l'autre rapport ;* ce qui est beaucoup plus simple.

9° La théorie du mesurage conduit immédiatement aux propositions sur l'équivalence des figures, et s'appuie même sur quelques-unes de ces propositions. Mais la transformation de certaines figures en d'autres équivalentes, exige parfois l'absence de tout mesurage ; comme dans les arts et métiers, où l'on doit opérer sur les *corps matériels*, non par la *fonte*, mais par leur *division* en parties, afin de leur donner d'autres *formes*, sans altérer notablement la quantité de matière de chacun. Alors il faut transformer par simple *transposition de parties ;* comme pour faire un *rectangle* avec un *triangle*, un *parallélogramme*, un *trapèze* ou un *quadrilatère* d'acajou, et réciproquement (lesquels au fond ne sont que des *prismes*). Ce genre de transformation, pour simplifier les figures est à peine indiqué dans les traités élémentaires ; mais il doit y figurer, du moins comme exercice, parce qu'il donne lieu à d'utiles et à de curieux problèmes, non-seulement propres à simplifier les figures, mais à diminuer le *contour* ou la *limite* de chacune, sans altérer l'étendue de cette figure. Il en résulte plusieurs théorèmes remarquables, rentrant dans la proposition générale que voici et dans sa réciproque, savoir : *De deux figures planes équivalentes, la plus régulière a toujours le moindre périmètre, et réciproquement.*

De sorte que pour enfermer la plus grande étendue superficielle, avec un contour de 100 mètres, par exemple, il faut que la figure plane soit un polygone régulier, savoir : un triangle équilatéral, un carré, un pentagone régulier, un hexagone régulier, etc.

En calculant les aires de ces figures successives, on les voit croître avec les nombres de côtés, le contour 100 restant invariable ; et l'on arrive à conclure que *le cercle est plus grand que toute figure plane isopérimètre.*

XVIII. La géométrie est à la fois *graphique* et *numérique ;* car la connaissance complète d'une figure définie en exige à la fois le *tracé* et la *mesure*, pour avoir clairement sa *forme* et sa *grandeur*. Aussi l'emploi des signes de l'algèbre devient-il indispensable en géométrie, non-seulement pour résoudre les problèmes numériques, mais pour simplifier la résolution des problèmes graphiques, en faisant découvrir les expressions les plus faciles à *construire* sur le papier, avec la règle et le compas.

Le *Calcul analytique* étant l'un des auxiliaires les plus efficaces, dans les recherches mathématiques, pour les déductions logiques que ces recherches exigent, il ne faut pas rejeter l'emploi de l'algèbre, en géométrie, afin de ne faire que de la *géométrie pur;* car ce serait se priver d'un utile secours et compliquer inutilement les déductions, où souvent l'algèbre est inévitable et où l'on ferait alors de l'algèbre *parlée*. D'ailleurs la solution n'en est pas moins *géométrique* lorsqu'elle est amenée par les signes de l'algèbre; lesquels se présentent naturellement pour simplifier les raisonnements.

Il importe que les premières notions de la *construction des valeurs* soient développées dans les traités élémentaires de géométrie, en y indiquant les moyens de rendre les expressions *homogènes*, si elles ne le sont pas, et de les ramener aux équations fondamentales, où x est la droite numérique inconnue, savoir : $ax=bc$, $ax=b^2$, $x^2=ac$, $x^2=(a+c)(a-c)$, $x^2=a^2+b^2$, etc. Dans ces équations, la droite inconnue x se détermine, sur le papier, à l'aide des propriétés du cercle et de certains triangles, par des *quatrièmes*, des *troisièmes*, des *moyennes proportionnelles* et par le tracé d'un triangle rectangle, dont deux côtés sont donnés, etc.

La construction des longueurs rectilignes, au moyen de la règle et du compas, ne peut avoir l'exactitude fournie par le calcul de ces longueurs, même lorsque l'expression est très-simple et que l'on fait servir les lignes déjà décrites à en déterminer d'autres ; mais dans les arts, où il faut des tracés, dans ceux surtout qui dépendent de l'architecture, la construction des valeurs est la seule que l'on puisse employer, et elle est nécessaire pour réaliser les solutions de différents problèmes importants.

Par exemple, *s'il faut couper en deux parties équivalentes, une feuille de cuivre, triangulaire ou quadrangulaire, ayant partout la même épaisseur, la section devant être parallèle à un côté ou être la plus petite possible;* le compas et la règle, ou les instruments qui en tiennent lieu, sont indispensables pour déterminer la position de la section rectiligne ou plane cherchée.

On sait d'ailleurs que le calcul est nécessaire pour diriger les opérations sur le terrain, lesquelles sont parfois simplifiées et rendues plus exactes, par la théorie des *transversales rectilignes*, à défaut de la Trigonométrie.

XIX. Nous pensons avoir bien prouvé que toutes les méthodes mathématiques sont nécessairement *analogiques ;* et non-seulement, en géométrie, les démonstrations, d'après l'*analogie directe*, sont très-claires et très-simples, mais elles fournissent toujours des vérités complètement certaines.

D'abord *tous* les éléments de la démonstration sont clairement indiqués par les définitions générales et clairement définis eux-mêmes ; il n'existe donc point de cause étrangère qui puisse modifier la conclusion. D'un autre côté, en Algèbre, comme en Géométrie, chaque bonne définition générale crée, en quelque sorte, le type des choses définies et en fait connaître parfaitement tous les éléments générateurs ; on n'a donc pas à craindre que la vérité, déduite de toute combinaison *logique* de ces éléments, puisse être modifiée par des causes ignorées ; cette vérité est donc complètement certaine. Enfin, comme la définition complète rend presqu'identiques tous les objets qui y sont renfermés, en leur donnant une origine et une existence communes ; on voit que tous ces objets jouissent nécessairement des mêmes propriétés générales. Donc *la proposition démontrée pour l'un d'eux, l'est nécessairement aussi pour tous les autres et leur est immédiatement applicable.*

Telle est précisément la *règle d'analogie directe*, par laquelle les traités élémentaires de géométrie peuvent recevoir le plus haut degré de clarté et de simplicité ; et cela, parce que cette règle peut servir à découvrir et à démontrer, clairement et rigoureusement, toutes les propositions fondamentales de cette science, d'après les définitions, ainsi qu'on l'a établi.

Il ne faut pas confondre l'analogie directe, l'analogie *Mathématique*, toujours complète et rendue évidente, par les premières notions, avec l'analogie qui régit les sciences naturelles, où souvent elle est peu sensible et reste même inaperçue. Dans les sciences d'observations ; en Physique et en Chimie, par exemple, on ne connaît bien parfois que quelques-unes des causes génératrices du phénomène dont on veut étudier la loi ou en donner l'explication : on ne peut alors affirmer, avec certitude, que d'autres causes cachées ne viendront pas détruire l'explication et la conséquence que l'on en déduit, ou du moins les modifier en quelque point. Ici donc l'analogie, bien que toujours utile, pour découvrir la vérité, n'est pas toujours suffisante, pour l'établir complètement. Par suite, on doit mettre beaucoup de circonspection à conclure, d'après les indications de l'analogie, dans les sciences naturelles ; vu qu'ici l'analogie pouvant être incomplète, sans qu'on le sache, on peut ne pas bien connaître alors tous les éléments du raisonnement qu'il faudrait effectuer, pour arriver à une vérité certaine.

Il en est tout autrement en mathématique où l'analogie est toujours complète et clairement indiquée, par les définitions, et où l'on connaît parfaitement tous les éléments du raisonnement : non seulement on peut y démontrer, *par analogie*, mais on le doit, pour plus de clarté et plus de simplicité ; ainsi qu'il est prouvé par les exemples que nous avons considérés plus haut. En voici d'autres encore pour cet objet.

1° La *circonférence* et l'*ellipse* sont comprises dans la même définition générale, puisque la première n'est que la seconde dont les deux axes sont devenus égaux ; ainsi pour passer, avec facilité, du connu à l'inconnu, il faut, à l'aide de la méthode *analogique* des *projections*, faites toutes *perpendiculairement* ou toutes *obliquement* à un plan donné, passer des propriétés de la circonférence aux propriétés analogues de l'ellipse. Or, on peut toujours disposer l'ellipse, par rapport au plan, de telle sorte que son grand axe $2a$, son *aire* E, un *secteur* ou un *segment* S' elliptique et le polygone P', *inscrit* ou *circonscrit*, aient pour projections respectives, sur le plan, le petit axe $2b$, l'*aire* du cercle πb^2, un *secteur* ou un *segment* S circulaire et le polygone P, *inscrit* ou *circonscrit*. En vertu de l'analogie directe, il est évident que πb^2 se trouve avec E absolument comme $2b$ avec $2a$, et qu'ainsi $\pi b^2 : E = 2b : 2a$; d'où $E = \pi ab$. On verra de même que $bS' = aS$ et $bP' = aP$. Cette dernière relation fournit des propositions de *maximum* et de *minimum*, difficiles à découvrir et à démontrer autrement.

2° Pour passer immédiatement du volume de la sphère au volume de l'ellipsoïde, dont a, b, c sont les demi-axes principaux, on observe que ce volume E et celui du parallélipipède rectangle, mesuré par le produit abc, sont déterminés complètement dès que a, b, c sont donnés, de *grandeur* chacun et de *position* ; le rapport R, dans $E = abcR$, est donc aussi déterminé entièrement. Et comme ce rapport, nombre abstrait, ne dépend aucunement de a ni b ni c, il ne change point quand on suppose $c = b = a$, pour avoir le volume de la sphère, mesuré alors par $aaa \times \frac{4}{3}\pi$, comme on sait ; donc, puisque R n'a pas changé, on avait d'abord $R = \frac{4}{3}\pi$ et $E = \frac{4}{3}\pi abc$; ce qu'il fallait trouver.

XX. La théorie du mesurage des volumes, traitée par différentes méthodes, a toujours présenté des longueurs et même de sérieuses difficultés, pour passer du *commensurable* à l'*incommensurable*, c'est-à-dire des *polyèdres* aux *corps ronds* ; et ces difficultés ne peuvent être complètement résolues, pensons-nous, que par l'*analogie directe*, rendue bien explicite dans les définitions et dans les démonstrations. Cette théorie, pour acquérir le plus haut degré de clarté et de simplicité, nous paraît donc devoir être établie comme il suit :

1° Tout prisme ou tout cylindre P est déterminé complètement et peut se construire lorsque sa base b et sa hauteur h, menée d'une extrémité de l'arête latérale a, sont données de grandeur et de position fixes. Car l'arête a étant ainsi déterminée, il est clair que si on la fait glisser, parallèlement à elle-même, sur le contour de la base b, elle engendre la surface latérale de P et par conséquent ce prisme ou ce cylindre lui-même.

De plus, il est évident que P se *construit* et se *mesure* avec sa base b et sa hauteur h, absolument comme le *prisme droit* P′ se *construit* et se *mesure* avec sa base b' et sa hauteur h', aussi données de grandeur et de position. Or, les unités v, s et u étant sous-entendues, on a vu plus haut que $P'=b'h'$; donc en vertu de l'analogie complète, il faut aussi que $P=bh$.

2° Soient N et N′ deux pyramides quelconques : elles sont déterminées entièrement chacune dès que la base et la hauteur sont données de grandeur et de position fixes. Faisant glisser parallèlement à elle-même, chacune des arêtes latérales a et a' de N et de N′, sur les contours des bases de ces pyramides, on forme les deux prismes P et P′, ayant respectivement mêmes bases et mêmes hauteurs que N et N′. Non-seulement les deux prismes P et P′ sont ainsi déterminés entièrement, au moyen des deux pyramides N et N′ ; mais il est évident que P′ se trouve avec N′ absolument comme P avec N. Si donc $P=Nx$, x étant un rapport inconnu, on a aussi nécessairement $P'=N'x$; d'où $N:N'=P:P'$.

La comparaison des pyramides étant ainsi ramenée à la comparaison plus facile des prismes, supposons que N′ soit l'une des six pyramides régulières égales, composant le cube 2P′, d'où $N'=\frac{1}{3}P'$: il est clair, par la proportion ci-dessus, qu'on aura $N=\frac{1}{3}P=\frac{1}{3}bh$, N étant une *pyramide* ou un *cône* quelconque et par conséquent P un *prisme* ou un *cylindre*, de même base et de même hauteur.

Je ne pense pas que le théorème $N=\frac{1}{3}bh$ puisse être amené et démontré plus clairement, plus simplement, ni plus exactement.

TABLE DES MATIÈRES.

Nota. Parmi les fautes reconnues pendant l'impression, il en est une *essentielle*, savoir : p. 119, ligne 23, au lieu de $85\frac{3}{4}=$, lisez $86=$.

Outre les Traités d'Arithmétique (trois formats), d'Algèbre, de Géométrie et de Trigonométrie, de Géométrie analytique et de Mécanique élémentaire; les Ouvrages du même Auteur, ayant plus spécialement pour but les méthodes élémentaires et leur application à un grand nombre de problèmes choisis, sont : 1° Mélanges d'Algèbre ; 2° Développements et Recherches de Mathématiques élémentaires ; 3° Note complémentaire d'Algèbre ; 4° Mémoires de la Société Royale des Sciences, de Liége, précédés de Considérations sur l'Enseignement scientifique moyen et suivis d'un Discours sur la Méthode analogique; vol. in-8°., Liége, 1844.