Anfangsgründe

der

Rechenkunst

theoretisch und praktisch,

von

J. N. Noël,

übersetzt

von

J. P. Mäyß.

Neue, mit Zusätzen versehene, und von der Königl. Großherzogl. Unterrichtskommission, zum Gebrauche der Primärschulen genehmigte Auflage.

Luxemburg,

bei V. Bück, Nachfolger von J. P. Kuborn.

1846

Buch- und Steindruckerei von M. Behrens und Comp.
in Luxemburg.

Vorrede zur 1ten Auflage.

Bis heute fehlt es unserem Elementar-Unterrichte an einem Rechenbuche. Leicht wäre es gewesen diesem Mangel durch den Abdruck eines bereits vorhandenen abzuhelfen; aber ihre Menge heißt Legion, und das beste aus ihnen herausheben wäre wahrlich kein leichtes Geschäft. Leichter war es auf jeden Fall die Arithmetik des Herrn Noel, das Resultat einer zwanzigjährigen Praxis und eines unermüdeten Fleißes, ins Deutsche zu übersetzen.

Der Werth dieses vortrefflichen elementar Werkes ist nunmehr allgemein anerkannt; es dient bereits als Lehrbuch auf der Universität zu Lüttich; mehrere Lehrer in Frankreich wissen die Vorzüge desselben zu schätzen, und würden es gerne als Leitfaden bei ihren Vorlesungen anwenden, wenn sie nicht gezwungen wären dem jetzt herrschenden Geiste zu fröhnen, der jeder freieren wissentschaftlichen Entwickelung feindlich entgegen tritt.

Das Hauptverdienst des Verfassers besteht darin, daß er die Grundsätze der Rechenkunst klar, lückenlos und streng folgerecht aufstellt, vom Beispiele ausgeht und den Schüler anleitet selbst die Regel aufzufinden.

Durch sein analytisches Verfahren hatte er alle besondere Regeln, wie z. B. die Regel de Tri, unnöthigt gemacht, die ehemals, blos dem Gedächtniß anvertraut, so bald vergessen als gelernt war. Dieses Verfahren hat nebst dem den unschätzbaren Vortheil die Urtheilskraft der Jugend an Folgerichtigkeit zu gewöhnen, die dann auch dem Manne in allen Verhältnissen des Lebens ein sicherer Leiter bleibt.

Mit Vertrauen also übergebe ich diese Uebersetzung dem Drucke, zu welcher der Verfasser mir sein, zur dritten Auflage bestimmtes Manuscript mitgetheilt, und selbst einige, dem elementar Unterrichte nützliche Veränderungen angegeben.

Den mathematischen sowohl, als Sprachkenntnissen des Hrn. Otto verdankt diese Uebersetzung manche wichtige Berichtigung, für welche ich ihm hier meinen herzlichen Dank abstatte. Die allenfalls noch vorhandenen Fehler wird mir jeder gern verzeihen, der weiß wie schwer es ist, in einem Fache zu arbeiten, in welchem man nicht Gelegenheit hatte, durch öftere Uebung sich eine gewisse Fertigkeit zu erwerben.

Was mich indessen von dem Vorwurfe der Verwegenheit freispricht, und zugleich meinen Muth bei einer, an sich, trockenen und ermüdenden Arbeit aufrecht erhielt, ist die Ueberzeugung durch diese Uebersetzung unseren Schulen einen wesentlichen Dienst zu leisten; selbst manchem Schüler des Athenäums eine nicht unwillkommene Aushilfe, zum leichteren Fassen des Originals darzureichen, und endlich der Wunsch dem Verfasser einen größeren Wirkungskreis zu eröffnen, ihm auch in deutscher Zunge jene Verehrung zu verschaffen, die jedem Manne gebührt, dem es gelingt den dornigen Pfad zu den Wissenschaften zu ebenen, und ihm so ein würdiges Denkmal unserer vierzehnjährigen Freundschaft zu errichten.

Der Uebersetzer.

Anfangsgründe

der

Rechenkunst.

Vorkenntnisse.

1. Man nennt **Mathematik** jede Wissenschaft welche das Maaß und die Vergleichung der Größen zum Gegenstande hat.

2. Man begreift unter Größe alles was einer Vermehrung oder Verminderung fähig ist, wie Holz, Steine, Metalle, Wasser u. s. f.

3 Um sich einen genauen Begriff von der Ausdehnung zu machen, und sich über dieselbe gegen andere bestimmt auszudrücken, muß man diese Größe messen. Dieses geschieht, indem man eine andere bekannte Größe der nämlichen Gattung nimmt, die man **Einheit** nennt; ferner indem man die in Rede stehende Größe in Theile zerlegt welche dieser Einheit, oder einem bekannten Theile derselben gleich sind. Auf diese Art bildet die vorhin unbekannte Größe eine Sammlung von bekannten Einheiten, und ist nunmehr selbst bekannt.

4. Eine Größe messen ist also weiter nichts, als nach-

sehen, wie oft eine andere Größe der nämlichen Gattung, Einheit genannt, in ihr enthalten ist. Die Einheit ist eine wohlbekannte unveränderliche Größe, die man Anfangs willkührlich annimmt, und mit welcher man hernach alle Größen der nämlichen Gattung vergleicht.

Es ist übrigens einleuchtend, daß man nur Größen der nämlichen Gattung mit einander vergleichen könne: denn es wäre widersinnig zu fragen wie oft z. B. ein Franke in einem Jahre enthalten sey?

5. Eine Sammlung von Einheiten, oder von Theilen der Einheit, aus welchen eine Größe zusammengesetzt ist, heißt Zahl.

Mehrere Menschen, mehrere Bäume, und überhaupt mehrere gleichartige Dinge bilden eine Zahl: Eins dieser Dinge ist die Einheit, oder der Gegenstand der Vergleichung. Die Zahl ist unbeschränkt: denn man kann immer noch eine oder mehrere Einheiten hinzufügen. Eine Sammlung von ungleichartigen Dingen bildet keine Zahl: denn man kann ungleichartige Sachen nicht mit einer und der nämlichen Einheit vergleichen.

6. Die Zahlen sind entweder *ganze Zahlen*, oder *Bruchzahlen* oder *Brüche*.

Eine ganze Zahl ist jene, welche nur ganze Einheiten enthält; wie *zwölf Tage*, *dreißig Franken*.

Die *Bruchzahl* ist eine Sammlung von ganzen Einheiten und von Theilen der Einheit; wie: *sieben und vier neuntel Stunden*; *fünf und ein drittel Gulden*.

Der *Bruch* endlich ist eine Zahl, welche nur einen, oder mehrere gleiche Theile der Einheit enthält, wie *ein fünftel Jahr*, *zehn elftel Maaß*.

7. Die Größe ist entweder eine fließende, (zusammenhängende) oder eine unterbrochene welche aus nicht zusammenhängenden Theilen besteht. Alle Zahlen sind Größen letzterer Art.

8. Eine Zahl ist eine benannte, wenn man bei Aussprechung derselben auch die Gattung der Dinge bezeichnet z. B. zwanzig Menschen; sie ist unbenannt, wenn die Gattung der Dinge nicht angegeben wird z. B. zwölf, zwanzig, neunmal.

9. Die Rechenkunst ist die Wissenschaft der Zahlen; sie beschäftigt sich mit der Natur und den Eigenschaften derselben, so wie mit der Art und Weise dieselben richtig auszusprechen und zu schreiben, sie zusammenzusetzen und zu zerlegen, welches man Rechnen nennt.

Die Numeration.

10. Die Numeration ist die Kunst alle mögliche Zahlen zu bilden, auszusprechen und zu schreiben.

11. Um ganze Zahlen zu bilden, fügt man zuerst eine Einheit zu einer andern Einheit; dann wieder eine Einheit zu den zweien vorigen. Auf diese Art bildet man Sammlungen von Einheiten, deren jede mit einem besondern Namen bezeichnet wird (gesprochene Numeration).

12. Die zehn ersten Zahlwörter sind fast allein hinreichend, die ganzen Zahlen auszusprechen welche man vorhin in Klassen von zwei, von drei 2c. eingetheilt hat.

13. Diese Abkürzungen, obgleich beträchtlich, sind dennoch nicht hinreichend um alle Rechnungsarten möglich zu machen; hiezu wird noch die Kunst erfordert, die Zahlen durch abgekürzte Zeichen oder Ziffern dem Auge

darzustellen (geschriebene Numeration).

14. Das jetzt übliche Zahlensystem beruht auf der Uebereinkunft, daß eine Ziffer welche auf der linken Seite einer andern Ziffer steht, zehnmal mehr Einheiten enthalte als jene. Vermöge dieser Uebereinkunft kann man alle mögliche Zahlen durch folgende zehn Ziffern ausdrücken:

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0.

die Namen dieser Ziffern sind: eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun, Null. Die letzte bezeichnet keine Zahl; sondern sie dienet nur um die Stelle, und durch diese, den Werth der übrigen zu bezeichnen, wie weiter unten ausführlicher gezeigt wird.

15. Wir wissen nun schon wie die neun ersten ganzen Zahlen ausgesprochen und geschrieben werden. Um weiter zu zählen, ist man übereingekommen aus den zehn Einheiten erster Ordnung eine Einheit zweiter Ordnung zu bilden, welche man zehner oder zig [1]) nennt; mit Zehnern zu zählen wie mit Einheiten, von eins bis neun, und die Ziffer welche Zehner bezeichnet zur Linken der Einheiten zu schreiben. Also um die Zahl sieben und vierzig, welche vier Zehner und sieben Einer enthält, zu schreiben, setzt man die Ziffer 4, welche die Zehner bezeichnet, und auf die rechte Seite die Ziffer 7, welche die einfachen Einheiten angibt, und man erhält 47 d. h. sieben und vierzig. Auf diese Art kann man

---

1) Zwei, drei, vier, bis neun Zehner werden mit zig bezeichnet und heißen: zwanzig, dreißig, vierzig, fünfzig, sechzig, siebenzig, achtzig, neunzig. Bei den Deutschen ist es angenommen die Einer vor den Zehnern auszusprechen: ein und zwanzig, vier und fünfzig, neun und neunzig.

alle Zahlen, von eins bis neun und neunzig mit zwei Ziffern ausdrücken.

16. Um weiter zu zählen ist man ferner übereingekommen aus zehn Zehnern eine Einheit der dritten Ordnung zu machen, welche man Hundert nennt; mit Hunderten zu zählen wie mit Einheiten, von eins bis neun, und die Ziffer welche Hunderte ausdrückt auf die linke Seite der Ziffer zu stellen welche die Zehner bezeichnet. Also, um die Zahl fünfhundert vier zu schreiben, welche fünf Hunderte, keine Zehner und vier Einheiten enthält, setzt man die Ziffer 5, welche die Hunderte ausdrückt zur Linken der 0, welche die Stelle der mangelnden Zehner ausfüllt, und man hat: 504: d. h. fünfhundert vier. So kann man mit drei Ziffern alle Zahlen schreiben von eins bis neunhundert neun und neunzig.

17. Die bisher erwähnte Uebereinkunft gilt für alle höhere Zahlen. Aus zehn Einheiten von hunderten macht man eine Einheit der vierten Ordnung, Tausend genannt. Die Ziffer welche sie bezeichnet, steht zur Linken der Hunderte. Aus zehn Einheiten der Tausende bildet man eine Einheit der Zehntausende, deren Ziffer wieder zur Linken der Tausende geschrieben wird, und so die hundert tausend, Millionen ꝛc.; kurz, man ist übereingekommen, daß, aus zehn Einheiten einer gewissen Ordnung, nur eine Einheit einer höhern Ordnung gebildet, und daß die Ziffer welche diese neue Einheit bezeichnet zur linken Seite der vorhergehenden geschrieben werde, dergestalt daß, je nachdem eine Ziffer zur Linken oder zur Rechten einer andern Ziffer steht, dieselbe zehnmal größere oder zehnmal kleinere

Einheiten enthalte, als die andere.

18. In folgendem Schema sieht man diese Uebereinkunft in ihrer ganzen Anwendung; es zeigt zugleich wie die Ziffern, welche die verschiedenen Ordnungen der Einheiten bezeichnen, gestellt werden müssen, um eine ganze Zahl zu bilden:

9 8 3 2 4 6 5 9 4 3 6 8 7 2 3 9 8 3 5 4 [1]

9	Zehn Quintillionen
8	Quintillionen
3	Hundert Quatrillionen
2	Zehn Quatrillionen
4	Quatrillionen
6	Hundert Trillionen
5	Zehn Trillionen
9	Trillionen
4	Hundert Billionen
3	Zehn Billionen
6	Billionen oder Milliarden
8	Hundert Millionen
7	Zehn Millionen
2	Millionen
3	Hunderttausende
9	Zehntausende
8	Tausende
3	Hunderte
5	Zehner
4	Einer

1) Die Deutschen haben eine verschiedene Art zu zählen. Sie theilen nämlich die Zahlen in Fächer von sechs Ziffern, und obige Zahl wird, nach ihrer Zählart, folgendermaßen ausgesprochen:

9 8, 3 2 4 6 5 9, 4 3 6 8 7 2, 3 9 8 3 5 4

9	Zehn Trillionen
8	Trillionen
3	Hunderttausend Billionen
2	Zehntausend Billionen
4	Tausend Billionen
6	Hundert Billionen
5	Zehn Billionen
9	Billionen
4	Hunderttausend Millionen
3	Zehntausend Millionen
6	Tausend Millionen
8	Hundert Millionen
7	Zehn Millionen
2	Millionen
3	Hunderttausende
9	Zehntausende
8	Tausende
3	Hunderte
5	Zehner
4	Einer

da diese beiden Arten zu zählen erst nach den hundert Millionen abweichen, also auf das gemeine Leben keinen Einfluß haben können, so tragen wir kein Bedenken die Zählart unseres Autors, als die Hierlandes übliche, und selbst nach dem Geständnisse der Deutschen, leichtere in dieser Uebersetzung beizubehalten.

19. „Um eine mit Ziffern geschriebene Zahl auszu-„sprechen, muß man dieselbe, von der Rechten zur Linken „in Fächer eintheilen, deren jedes drei Ziffern enthält, „das letzte ausgenommen, welches auch aus einer ein-„zigen oder zwei Ziffern bestehen kann. Dann werden die „drei Ziffern jedes Faches, von der Linken anzufangen, „so ausgesprochen als ob sie allein ständen und dann erst „der Name zugesetzt, der dem Fache eigen ist".

Z. B. Um die Zahl 4781023451004 auszusprechen bemerke man daß die ersten drei Ziffern zur Rechten nur einfache Einheiten, die drei folgenden Einheiten von Tausenden, die drei folgenden Millionen, die folgenden Billionen, die letzten Trillionen ausdrücken; und da man die gleichnamigen Einheiten zusammen aussprechen muß, so theilt man sie, der leichtern Uebersicht wegen, in Fächer oder Abschnitte von drei Ziffern; wie folgt:

4,781,023,451,004:

diese Zahl wird also ausgesprochen: vier Trillionen, sieben hundert ein und achtzig Billionen, drei und zwanzig Millionen, vier hundert ein und fünfzig tausend und vier.

Zur Uebung mögen folgende Zahlen dienen:
2407117; 40001111200074 und 38942007007456001.

20. „Will man eine ausgesprochene Zahl in Ziffern „schreiben, so gebe man wohl acht, ob in derselben nicht „ein ganzer Abschnitt weggeblieben, oder in einem oder „dem andern Abschnitte die Einer, Zehner, oder Hun-„derte ausgelassen seyen, um dieselbe durch Nullen zu „ersetzen".

Also um die Zahl, sechzig Billionen, hundert vier tausend und zwanzig zu schreiben; bemerke man, daß die sechzig Billionen einen Abschnitt bilden, daß der Abschnitt der Millionen fehlt, folglich durch drei Nullen ersetzt werden muß; daß in dem Abschnitte der Tausende die Zehner fehlen, deren Stelle mit einer Null auszufüllen ist; daß endlich in dem Abschnitte der Einheiten die Hunderte und Einer mangeln, statt welcher ebenfalls Nullen anzuschreiben sind. Die ausgesprochene Zahl muß also folgendermaßen geschrieben werden

60,000,104,020.

Zur Uebung mögen folgende Zahlen in Ziffern ausgedrückt werden: 1° Fünf Millionen, zwanzig tausend und vier; 2° Sechzig tausend ein hundert; 3° Vierzig Billionen, sieben tausend; 4° Hundert eine Million, hundert ein tausend; 5° Dreißig Trillionen, achtzig Millionen, und neunzehn; 6° Zwölf Quatrillionen, zwei und zwanzig Billionen, zwei hundert dreißig Millionen, hundert fünfzehn tausend, hundert und fünfzehn; 7° Zwei Quintillionen, siebenzig Millionen und achtzehn; 8° Acht Sextillionen, zwölf Trillionen, zwei hundert zwei tausend und elf.

21. Man sieht hieraus daß die Ziffern einen doppelten Werth haben: einen eignen unbedingten, der von ihrer Form unzertrennlich ist und einen örtlichen oder beziehenden, den sie von der Stelle erhalten die sie einnehmen. Ihr eigener Werth ist unveränderlich; 7 heißt immer sieben; nicht so der beziehende; denn entweder sind es 7 Einheiten; 7 Zehner, ꝛc.

22. Nachdem wir nun wissen, wie Zahlen gebildet und geschrieben werden, wollen wir auch sehen wie sie zusammengesetzt und zertheilt werden müssen. Die Zusammensetzung geschieht vermittelst der A d d i t i o n und der M u l t i p l i c a t i o n; die Zertheilung aber durch die S u b t r a c t i o n

und die Division. In mehreren dieser Operationen, müssen die Zahlen gleichartig seyn; d. h. sie müssen Einheiten der nämlichen Gattung enthalten. Da aber in allen Fragen der Rechenkunst die Benennung der Einheiten des Resultats im Voraus bekannt ist, so bleibt nur die Zahl derselben zu bestimmen, und man verfährt wie mit unbenannten Zahlen.

Addition in ganzen Zahlen.

23. Durch die Addition vereinigt man alle Einheiten und Theile von Einheiten mehrerer Zahlen gleicher Gattung in eine Zahl, die Summe genannt wird; die Zahlen aber welche zusammen gezählt werden sollen, heißen Summanden.

24. Man kann nur Größen gleicher Gattung addiren. Es wäre widersinnig 2 Ellen und 3 Tage addiren zu wollen; die Summe würde wohl 5 Einheiten enthalten, aber weder 5 Ellen noch 5 Tage [1]).

25. Das Zeichen der Addition ist ein aufrechtes Kreuz $+$, welches und oder plus heißt. Also $7+4$ heißt 7 und 4, oder 7 plus 4, oder 4 addirt zu 7.

26. Um zwei Zahlen zu addiren darf man nur die Einheiten der einen, eine nach der andern, zu der andern Zahl hinzuzählen. Auf diese Art kann man leicht eine Ziffer mit einer andern Zahl addiren; allein mit mehrern Ziffern

---

1) Indessen ist zu bemerken daß verschiedenartige Dinge wohl in eine Zahl zusammengefaßt werden können, wenn man von ihren Verschiedenheiten absicht, und dieselbe nur in Rücksicht der Eigenschaft betrachtet, welche allen gemein ist; so zum Beispiel sind 1 Deutscher 2 Franzosen und 4 Italiener zusammen 7 Menschen.

wird dieses schwierig, ja selbst unanwendbar. Man kann aber dieser Schwierigkeit ausweichen; denn um die Summe von mehreren Zahlen zu erhalten, darf man nur die Summen der einfachen Einheiten, die Summe der Zehner, jene der Hunderte ꝛc. suchen, und alle diese theilweisen Summen zusammen nehmen. Dieses Verfahren erfordert weiter nichts, als daß man eine Ziffer zu einer angegebenen Zahl hinzuzähle, welches man im Gedächtnisse, also leicht und geschwind verrichten kann.

27. Um folgende fünf Zahlen 4789, 347, 9876, 5684 und 9785 zu addiren, verfährt man auf folgende Weise:

	4789
	347
	9876
	5684
	9785
Summe	30,481

man sucht zuerst die Summe der Einheiten, indem man sagt: 5 und 4 sind 9, und 6 sind 15, und 7 sind 22, und 9 sind 31: 31 Einheiten enthalten eine einfache Einheit, welche man unter die Reihe der Einheiten schreibt, und 3 Zehner welche man zurück behält, und zu der Reihe der Zehner zählet, weil man nur Einheiten derselben Gattung addiren kann. 3 behaltene Zehner und 8 sind 11, und 8 sind 19, und 7 sind 26, und 4 sind 30, und 8 sind 38. In 38 Zehnern sind acht Zehner enthalten, welche man unter die Reihe der Zehner schreibt, und 3 Hunderter, welche man behält, um sie zu den Hunderten zu zählen. 3 behaltene und 7 sind 10, und 6 sind 16, und 8 sind 24, und 3 sind 27, und 7 sind 34. 34 Hunderter enthalten 4 Hunderter, welche man unter die Reihe der Hunderter schreibt, und 3 Tausender, welche man zu der Reihe der Tausender zählt: 3 und 9 sind 12, und 5 sind 17, und 9 sind 26, und 4 sind 30 Tausender, welche man unterschreibt.

Ich sage also daß die Zahl 30481 die Summe der fünf aufgegebenen Zahlen enthalte. In der That um zu diesem Resultat zu gelangen, hat man alle Einheiten, alle Zehner, alle Hunderter, alle Tausender, kurz, alle Theile der aufgegebenen Zahlen genommen; folglich hat man die Zahlen selbst genommen, folglich ist ihr ganzer Werth in dieser Summe enthalten.

„Um also die Summe von mehreren ganzen Zahlen „zu erhalten, schreibe man dieselben so unter einander, „daß die Einheiten der nämlichen Ordnung in senkrechten „Reihen untereinander stehen; dann unterstreiche man „das Ganze, suche die Summe der Einer, dann jene der „Zehner, der Hunderter rc. und sorge, daß jedesmal die „Einer unter die Einer geschrieben, die Zehner aber zu „der folgenden Reihe übertragen werden“.

28. Die Ziffer der einfachen Einheiten jeder theilweisen Summe, ist nothwendig die Ziffer der Einheiten der nämlichen Ordnung in der gesuchten Summe; denn die folgenden theilweisen Summen geben keine Einheiten der vorhergehenden Ordnung; man muß also diese Ziffer unter die Reihe stellen aus welcher sie genommen ist. Da ferner die Zehner einer Reihe nur Einer der links folgenden sind, zu welcher sie auch als Einer gezählt werden, so ergiebt sich wieder eine Ziffer von Einheiten der nämlichen Ordnung in der gesuchten Summe. Darum ist es vortheilhafter die Addition von der rechten Seite anzufangen: wenn man

von der Linken anfinge, so müßte man die gefundenen theilweisen Summen aufs neue addiren und das Verfahren wäre länger und mühsamer.

Die Subtraction ganzer Zahlen.

29. Die Subtraction ist eine Rechnungsart durch welche man erkennt um wieviel eine Zahl größer sey als eine andere der nämlichen Gattung. Das Resultat dieses Verfahrens heißt Rest oder Differenz.

30. Da die kleinere Zahl von der größeren abgezogen werden soll, so muß sie auch nothwendig in derselben enthalten seyn, und einen Theil derselben ausmachen, folglich von derselben Gattung seyn. Der andere Theil ist der Rest.

Die Subtraction ist also auch eine Rechnungsart, durch welche man, wenn man ein Ganzes und einen Theil desselben kennt, den andern Theil finden kann, den man Rest, Ueberschuß oder Differenz nennt.

31. Das Zeichen der Subtraction ist —, und heißt: weniger. Also 7 — 4, heißt 7 weniger 4 oder 4 von 7 abgezogen.

32. Eine Zahl wird immer von einer andern abgezogen, so oft man jede ihrer Einheiten von der andern wegnimmt. Wenn aber die abzuziehende Zahl mehr als eine Ziffer enthält, so wird dieses Verfahren schwierig. Diese Schwierigkeit umgeht man durch die Bemerkung, daß, um eine Zahl von einer andern abzuziehen, es hinlänglich sey, jeden ihrer Theile abzuziehen; auf diese Art kann man jede mögliche Subtraction machen, indem man eine Ziffer von einer Zahl abzieht die geringer ist als 20; welches

man leicht aus dem Gedächtnisse und nach den ersten Grundsätzen der Addition bewerkstelligen kann.

33. Zum Beispiel, um die Zahl 4721 von 8964 abzuziehen, verfährt man auf folgende Art:

$$\begin{array}{lr} & 8964 \\ & 4721 \\ \hline \text{Rest} \ldots\ldots & 4243 \end{array}$$

1 Einheit von 4 Einheiten genommen, bleiben 3 Einheiten, welche man unterschreibt; 2 Zehner von 6 Zehnern, bleiben 4 Zehner, die man unterschreibt; 7 von 9, bleibt 2 die man hinschreibt; 4 von 8 bleibt 4.

Die Zahl 4243 ist also die wahre Differenz zwischen den zwei aufgegebenen Zahlen. In der That, man hat nacheinander alle Einer, Zehner, Hunderter, ꝛc. folglich alle Theile der kleinern Zahl, folglich diese selbst von der größern abgezogen; das Resultat ist also die wahre Differenz zwischen beiden Zahlen.

Aus diesem Beispiel ergiebt sich folgende Regel: „Um „ganze Zahlen von einander abzuziehen schreibe man die „kleinere Zahl unter die größere, so, daß die Einheiten „der nämlichen Ordnung untereinander stehen: fängt „von der rechten Seite an, zieht jede Ziffer der kleinern „Zahl von der über ihr stehenden Ziffer der größern ab, „und schreibt den Rest unter, oder eine Null, im Falle „nichts übrig bleibt“.

34. Diese Regel ist nicht mehr unbedingt anwendbar, wenn die abzuziehende Ziffer größer ist als die von welcher sie abgezogen werden soll. In diesem Falle verfährt man auf folgende Weise:

35. Die Zahl 3724 soll von 7016 abgezogen werden

	7016
	3724
Rest	3292

Man sagt: 4 von 6 bleibt 2 und schreibt diese unter die Einer: 2 von 1 geht nicht. Um nun diese theilweise Subtraction möglich zu machen, addirt man 10 zu 1, und sagt: 2 von 11 bleibt 9, welche man unter die Zehner schreibt; allein da man 10 zu 1 nimmt, welche in der Ordnung der Zehner steht, so addiret man 10 Zehner oder 1 Hundert zu der größeren Zahl; folglich, wenn man auch 1 Hundert zu der kleinern Zahl addirt, so werden beide Zahlen durch eine gleiche Größe vermehrt, und ihre Differenz bleibt die nämliche [1]).

1 Hundert und 7 macht 8 Hundert; 8 von 10 bleibt 2. Da man aber 10 zu der 0 schreibt welche sich in der Ordnung der Hunderter befindet, so hat man 10 Hunderter oder 1 Tausend zu der größern Zahl addirt. Wenn man nun auch 1 Tausend zu der kleinern Zahl addirt so bleibt die Differenz unverändert, 1 und 3 sind 4; 4 von 7 bleibt 3.

---

[1]) Zum Beispiel: die Differenz zwischen 9 und 5 ist 4; die Differenz zwischen 19 und 15, zwischen 11 und 7, ist auch 4. Daraus folgt, daß, wenn man zu zweien Zahlen eine gleiche Größe addirt, oder von denselben subtrahirt, die Differenz immer die nämliche bleibe. Dieses Verfahren ist viel kürzer, besonders in der Division, als jenes, in welchem man von der nächsten Ziffer zur Linken borgt.

Indem man die Subtraction von der Rechten anfängt hat man den Vortheil bei jeder theilweisen Subtraction, eine Ziffer der gesuchten Differenz zu erhalten, welches nicht der Fall wäre, wenn man von der Linken anfinge.

Ich sage 3292 ist die wahre Differenz zwischen beiden aufgegebenen Zahlen. In der That, man hat von der größern Zahl alle Theile der kleinern, folglich diese selbst abgezogen.

36. Aus dieser Rechnung sieht man, daß: „ Wenn „ die untere, abzuziehende Ziffer größer ist als die obere „ von welcher abgezogen werden soll, so fügt man zu dieser „ 10 Einheiten, um die theilweise Subtraction möglich zu „ machen; allein um die gedachte Addition auszugleichen, „ fügt man 1 zu der folgenden untern Ziffer".

Von der Probe der Addition und der Subtraction.

37. Die Probe einer Rechnung besteht in einer zweiten Rechnung, die man vornimmt um sich von der Richtigkeit der ersten zu überzeugen.

Man muß die Probe wohl von dem Beweise unterscheiden; dieser zeiget die Wahrheit eines allgemeinen Grundsatzes; jene nur die Richtigkeit einer besondern Rechnung.

Außerdem kann es geschehen, daß die im Rechnen vorgefallenen Irrungen sich ausgleichen. Die Probe selbst kann also nur als größere Wahrscheinlichkeit, und nur in wenigen einfachen Fällen als vollkommene Gewißheit angesehen werden.

38. „ Um sich von der Richtigkeit einer Addition zu über„ zeugen, fängt man sie wieder von der Linken an, indem „ man umgekehrt addirt, man zieht die Summe der ersten „ Reihe von dem ihr entsprechenden Theile der Hauptsumme „ ab, und schreibt den Rest (welcher die letzt behaltene Summe „ seyn muß) unter die erste Reihe zur Linken: diese macht

„ mit der unter der zweiten Reihe stehenden Ziffer der
„ Hauptsumme eine Zahl aus, von welcher man die Sum-
„ me dieser zweiten Reihe abzieht, und so fort bis zur letzten
„ Reihe rechts, von welcher nichts übrig bleiben darf, wenn
„ die Rechnung richtig war".

Zum Beispiel addire man folgende Zahlen:

	789
	479
	653
	489
	743
	896
Summe....	4049
	430

Um die Probe zu machen fange man zur Linken an, zähle von oben nach unten, wenn man vorhin von unten nach oben gezählt hat. Die Summe der ersten Reihe macht 36, diese von den überstehenden 40 Hunderten abgezogen, bleiben 4 welche man unter 0 schreibt, zur Rechten der Ziffer 4 der Hauptsumme. Da der Rest 4 gerade die behaltene Summe ist welche man zu der ersten linken Reihe addirt hatte, so schließt man daraus daß die Addition dieser Reihe richtig war. Die Summe der zweiten Reihe ist 41; diese von 44 abgezogen bleibt 3 d. h.: die 3 vorhin behaltenen Zehner. Die Summe 39 der dritten Reihe abgezogen von 39 bleibt 0; die ersten Addition war also richtig.

In der That, durch die erste Addition hat man die Summen aller Einer, Zehner und Hunderter in eine Summe von 4049 zusammengefaßt; durch die zweite Rechnung hingegen hat man von dieser Summe alle Hunderter, Zehner und Einer wieder weggenommen. Man hat also so viel weggenommen, als man hineingetragen hatte; es kann also nichts übrig bleiben; denn, wenn man von einem Ganzen alle seine Theile wegnimmt, bleibt nichts übrig.

39. „Man macht die Probe der Subtraction, indem „man den Rest zu der kleinern Zahl addirt. Wenn die „Rechnung richtig war, so erhält man die größere Zahl „als Summe".

In der That, der Rest und die kleinere Zahl sind die zwei Theile in welche die größere Zahl getheilt wurde; wenn man also jene wieder zusammen fügt, muß diese wieder ganz erscheinen.

Die Multiplication ganzer Zahlen.

40. Die **Multiplication** ist eine Rechnungsart, durch welche man aus zwei bekannten Zahlen, deren eine **Multiplicand**, die andere **Multiplicator** heißt, eine dritte bildet, in welcher der Multiplicand eben so oft, als die Einheit im Multiplicator, enthalten ist. Diese dritte Zahl heißt **Produkt**; der Multiplicand und der Multiplicator sind die **Faktoren** des Produkts.

Wenn demnach der Multiplicator 27, oder 27 mal die Einheit enthält, so enthält das Produkt 27 mal den Multiplicanden. Eine Zahl durch 27 multipliciren, heißt also diese Zahl 27 mal nehmen. Ueberhaupt, **wenn der Multiplicator eine ganze Zahl ist, so besteht die Multiplication darin, daß man den Multiplicanden so oft nimmt, als Einheiten im Multiplicator sind.**

41. Aus der Definition der Multiplication folgt:

1°. Daß das Produkt mit dem Multiplicanden gleichartig ist; denn es ist nur der Multiplicand so oder so viel mal genommen.

2°. Daß jede Zahl als Multiplicand dienen kann; denn man kann jede Sache so oft nehmen, als man will.

3° Daß der Multiplicator nur anzeigt wie oft eine Zahl genommen wird, also nie eine benannte Zahl ist.

4°. Daß das Produkt ein Ganzes ist, bestehend aus so vielen, dem Multiplicanden an Größe gleichen Theilen, als der Multiplicator Einheiten enthält.

5°. Daß, wenn der Multiplicand Null ist, das Produkt auch Null ist; denn 0 hundert mal genommen giebt nur 0.

6°. Endlich, daß, wenn der Multiplicator Null ist, das Produkt ebenfals Null bleibt; denn Null als Multiplicator zeigt an, daß der Multiplicand gar nicht genommen wird, oder daß keine Multiplication statt findet, es giebt also auch kein Produkt; das Produkt ist Null.

42. Das Zeichen der Multiplication ist ein liegendes $\times$ und heißt: multiplicirt durch. Also 5×3 heißt 5 multiplicirt durch 3 oder 3 mal 5. Das Zeichen $=$ heißt gleich oder ist gleich. Die Zeichen $>$ und $<$, heißen: größer als, kleiner als.

Um anzuzeigen, daß eine Zahl durch das Produkt zweie Faktoren multiplicirt werden soll, müssen diese Faktoren zwischen zwei Einschließungszeichen gesetzt werden. Also

$4 \times (5 \times 3)$ zeigt, daß man 4 durch das Produkt der Zahlen 5 und 3 multipliciren müsse.

43. Um ein Ganzes zu nehmen, muß man alle Theile desselben nehmen: also um ein Ganzes 1 oder 2 mal zu nehmen, muß man alle seine Theile 1 oder 2 mal nehmen. Ueberhaupt: man muß alle Theile eines Ganzen so oft nehmen, als man das Ganze selbst nehmen will.

44. Wenn man ein Ganzes z. B. 6 mal größer macht, so wird dieses Ganze 6 mal wiederhohlt; es wird also auch jeder Theil desselben 6 mal wiederhohlt; es wird also auch jeder Theil desselben 6 mal größer. Man darf also nur alle Theile eines Ganzen so oft vergrößern, als man das Ganze vergrößern will.

45. Einerlei Faktoren geben mit veränderter Ordnung doch einerlei Produkt.

Zum Beispiel $87 \times 41 = 41 \times 87$.

In der That, 87×41 zeigt, daß man 87, 41 mal nehmen müsse, welches geschieht wenn man jede Einheit von 87, 41 mal nimmt (43). Denn, die erste Einheit von 87, 41 mal genommen, giebt 41 mal eins oder 41. Die zweite giebt auch 41, so die dritte, vierte, u. s. f.; also erhält man im Ganzen 87 mal 41 oder 41×87, also wirklich $87 \times 41 = 41 \times 87$.

Um sich ferner hievon zu überzeugen schreibe man in eine Reihe 87 mal 1, und schreibe 41 solcher Reihen untereinander. Zählt man nun diese Reihen von oben nach unten, so erhält man 41 mal 87; zählt man dieselben von der Linken zur Rechten, so findet man 87 mal 41.

46. Die Beweise, welche wir hier geben, sind allgemein anwendbar; denn wenn wir statt der Zahlen 87

und 41 die Wörter Multiplicand und Multiplicator brauchen, so bleibt der Beweis der nämliche, nur etwas länger und schwieriger. Um daher die Beweise deutlicher und faßlicher zu machen, werden wir in der Folge immer bestimmte Zahlen anwenden.

47. Die Multiplication ist nichts als eine Addition gleich großer Zahlen, z. B. um 7 durch 3 zu multipliziren, d. h. 7, 3 mal zu nehmen, darf man nur 7, 3 mal schreiben und addiren. Da in der That die Summe 21, 7+7+7 enthält, so ist sie wirklich 3 mal 7, oder 7 multiplicirt mit 3.

48. Diese Art das Produkt durch die Addition zu suchen wäre sehr mühsam, besonders wenn der Multiplicator mehrere Ziffern enthielte; deswegen läßt man sie bei Seite, und nimmt ein Verfahren an, welches auf der Multiplication einer Ziffer durch eine Ziffer beruht. Um hierin einige Fertigkeit zu erlangen, wird erfordert, daß man im Voraus alle Produkte einer Ziffer durch eine Ziffer auswendig lerne, so wie sie in folgender Tabelle enthalten sind:

Multiplikations-Tabelle.

2 mal	2	ist	4	3 mal	8	ist	24	6 mal	6	ist	36
	3		6		9		27		7		42
	4		8	4 mal	4	ist	16		8		48
	5		10		5		20		9		54
	6		12		6		24	7 mal	7	ist	49
	7		14		7		28		8		56
	8		16		8		32		9		63
	9		18		9		36	8 mal	8	ist	64
3 mal	3	ist	9	5 mal	5	ist	25		9		72
	4		12		6		30	9 mal	9	ist	81
	5		15		7		35				
	6		18		8		40				
	7		21		9		45				

49. Weiß man diese Tabelle auswendig, so ist nichts leichter, als mehrere Ziffern durch eine oder mehrere andere zu multipliciren. Z. B. um das Produkt von 9756 durch 8 zu suchen verfährt man auf folgende Art:

Multiplicand.	9756
Multiplicator.	8
Produkt	78048

Der Zweck dieser Multiplcation ist den Multiplicanden 8 mal zu nehmen, welches geschieht, wenn man jeden seiner Theile 8 mal nimmt (43). 8 mal 6 Einheiten sind 48 Einheiten. In 48 Einheiten sind 8 Einer, welche man hinschreibt, und 4 Zehner, welche man behält um sie zu dem Produkte der Zehner zu addiren. 8 mal 5 ist 40 und 4 behalten macht 44. In 44 Zehner sind 4 Zehner, die man hinschreibt, und 4 Hunderte, die man behält, um sie zu dem Produkt der Hunderte zu zählen. 8 mal 7 ist 56 und 4 behalten ist 60. In 60 Hunderten ist keine Enheit von Hunderten, man schreibt 0 hin und behält 6 Tausender, welche man zu den Tausenden zählt. 8 mal 9 ist 72, und 6 behalten sind 78 Tausender, welche man hinschreibt.

Ich sage 78048 ist das wahre Produkt von 9756 durch 8. In der That, man hat die 6 Einer, die 5 Zehner, die 7 Hunderter und überhaupt alle Theile des Multiplicanden; folglich den Multiplicanden selbst 8 mal genommen (43), also ist er mit 8 multiplicirt worden.

Hieraus ergiebt sich folgende Regel: „Um eine aus „ mehreren Ziffern bestehende Zahl durch eine Ziffer zu „ multipliciren, schreibt man den Multiplicator unter den „ Multiplicanden, zieht einen Strich, multiplicirt nach- „ einander die Einheiten, Zehner, Hunderter und über-

„ haupt alle Ziffern des Multiplicanden durch den Mul-
„ tiplicator, schreibt die Einer jedes theilweisen Produkts
„ in die ihnen gehörige Ordnung, und behält die Zehner
„ um sie zu dem Produkt der nächstfolgenden Ordnung
„ zu addiren."

50. Sehen wir jetzt wie zwei aus mehreren Ziffern bestehende Zahlen durch einander multiplicirt werden. Z. B. 7845 durch 347. Man verfahre auf folgende Art:

Multiplicand	7845
Multiplicator	347
Produkt durch 7 Einheiten	54915
Produkt durch 40	31380
Produkt durch 300	23535
Produkt durch 7+40+300 oder 347. . .	2722215

Der Zweck dieser Multiplication ist den Multplicanden 347 mal, oder 7 mal und 40 mal und 300 mal zu nehmen. Um aber den Multiplicanden 7 mal zu nehmen, nimmt man alle Theile desselben 7 mal (43) und man erhält 54915, (49). Um den Multiplicanden 40 mal oder 10 mal 4 mal zu nehmen, nimmt man ihn zuerst 4 mal, dann das Produkt 10 mal, welches geschieht indem man das Produkt 10 mal größer macht, oder indem man die Einer desselben in die Ordnung der Zehner schreibt. Desgleichen, um den Multiplicanden 300 mal oder hundert mal 3 mal zu nehmen, nimmt man denselben 3 mal, dann das Produkt 100 mal, indem man die Einer desselben in die Ordnung der Hunderter, d. h. in die Ordnung der Ziffer schreibt, mit welcher man multiplicirt.

Nun aber enthält das erste theilweise Produkt 7 mal;

das zweite 10 mal 4 mal oder 40 mal; das dritte 100 mal 3 mal, oder 300 mal den Multiplicanden. Also besteht die Summe dieser drei theilweisen Produkte, aus 7 mal, und 40 mal, und 300 mal dem Multiplicanden; d. h. im Ganzen aus dem Multiplicanden 347 mal genommen; also ist die Summe 2722215 das Produkt des Multiplicanden durch 347.

Aus diesem Beispiele folgt die Regel: „Um zwei aus „ mehreren Ziffern bestehende Zahlen durch einander zu „ multipliciren, schreibe man den Multiplicator unter den „ Multiplicanden, so daß die Einheiten der nämlichen Ord„ nung unter einander stehen, man unterstreiche das Ganze, „ multiplicire den ganzen Multiplicanden zuerst durch die „ Einer des Multiplicators (49) dann durch die Zehner, „ durch die Hunderter, die Tausender, 2c.; man schreibe „ jedesmal die erste Ziffer jedes theilweisen Produkts in die „ Ordnung der Ziffer durch welche man multiplicirt, dann „ addire man die theilweisen Produkte und die erhaltene „ Summe ist das ganze Produkt beider Zahlen“.

51. Wenn der Multiplicator Nullen enthält, so darf man nicht durch diese Nullen multipliciren, weil dann das Produkt nur aus Nullen bestände. In diesem Falle geht man gleich zur nächsten linken Ziffer über, und schreibt die erste Ziffer des erhaltenen theilweisen Produkts in die Ordnung der Ziffer durch welche man multiplicirt (50).

Hiezu mögen folgende drei Multiplicationen als Beispiele dienen:

40078	325	70042
3007	90002	90006
280546	00650	420252
120234	2925	630378
120514546	29250650	6304200252

52. Wenn man hinter die Zahl 749, zwei Nullen schreibt, so erhält man 74900, d. h. 749 Hunderter anstatt 749 Einer; also sind alle Theile dieser Zahl, folglich die Zahl selbst, hundert mal größer geworden (44); man hat sie also mit 100 multiplicirt. Um also eine Zahl durch 100 zu multipliciren, darf man nur zwei Nullen hinzuschreiben.

Ueberhaupt, „Um eine Zahl durch eine Einheit, hinter „ welcher mehrere Nullen stehen, zu multipliciren, darf „ man nur so viele Nullen hinter diese Zahl schreiben, als „ sich hinter der Einheit befinden".

Es ist leicht das Produkt von 4700 durch 750 zu finden, indem man auf folgende Art verfährt:

$$\begin{array}{r} 4700 \\ 750 \\ \hline 235 \\ 329 \\ \hline 3525000 \end{array}$$

Um das Produkt von 4700 durch 750 zu erhalten, darf man nur 47 durch 75 multipliciren, und das Produkt giebt 3525. Allein der Multiplicand 47 ist eine Zahl von Hunderten; also ist das Produkt von gleicher Gattung und besteht ebenfalls aus Hunderten; man muß also zwei Nullen hinzuschreiben. Die Zahl 352500 ist also das Produkt von 4700 multiplicirt durch 75. Allein man soll den Multiplicanden nicht nur 75 mal, sondern 750 mal, oder 10 mal 75 mal nehmen, man muß also das durch 75 erhaltene Produkt noch 10 mal nehmen, welches geschieht, wenn man hinter dasselbe noch eine Null schreibt (52). Man erhält also 3525000 als Produkt von 4700 durch 750.

„Will man also zwei Faktoren, hinter welchen sich Nullen
„ befinden, durch einander multipliciren, so multiplicire
„ man ohne Rücksicht auf die Nullen zu nehmen, und
„ schreibe diese hinter das erhaltene Produkt".

Nach dieser Regel findet man $79006 \times 807000 = 63757842000$ u. $9467000 \times 847600 = 8024229200000$.

54. Wir schließen die Multiplication der ganzen Zahlen mit einigen Grundsätzen, deren Kenntniß nicht ohne Nutzen seyn wird.

Gesetzt man habe alle Theile eines Ganzen 7 mal kleiner gemacht, um ein neues Ganzes zu bilden, so ist es einleuchtend, daß, wenn man jeden Theil dieses neuen Ganzen 7 mal nimmt, man wieder jeden Theil des ersten Ganzen, folglich dieses selbst, erhält. Wenn aber jeder Theil des neuen Ganzen genommen wird, so wird dieses selbst genommen (43); folglich giebt das neue Ganze, 7 mal genommen, wieder das erste; folglich ist das neue Ganze allein genommen 7 mal kleiner, als das erste, folglich, wenn man jeden Theil eines Ganzen 7 mal kleiner macht, wird dieses Ganze selbst 7 mal kleiner, folglich „um ein
„ gewisses Ganzes mehrere Male kleiner zu machen, darf
„ man nur jeden seiner Theile so viel mal kleiner machen".

55. Wenn man den neunten Theil eines Ganzen nimmt so wird dieses Ganze neun mal kleiner, so wird auch jeder Theil dieses Ganzen neun mal kleiner, folglich erhält man den neunten Theil von jedem Theile dieses Ganzen. Folglich, "um einen gewissen Theil von einem Ganzen zu
„ bekommen, darf man nur diesen Theil von jedem Theile
„ dieses Ganzen nehmen".

56. Wenn man den Multiplicanden 3 mal größer oder 3 mal kleiner macht, so werden alle Theile des Produkts

3 mal größer oder 3 mal kleiner; also wird das Produkt selbst 3 mal größer oder 3 mal kleiner (44 und 45).

Desgleichen, wenn der Multiplicator 3 mal größer oder 3 mal kleiner gemacht wird, so wird der Multiplicand 3 mal mehr oder 3 mal weniger genommen; man erhält alsdann 3 mal mehr oder 3 mal weniger, d. h. das Produkt wird 3 mal größer oder 3 mal kleiner.

Also überhaupt: „wenn der eine Faktor eines Produkts „ unverändert bleibt, der andere aber einige mal größer „ oder kleiner wird, so wird das Produkt eben so viel mal „ größer oder kleiner". [1])

Bemerkung. Ein Produkt, welches z. B. auf folgende Art ausgedrückt wird $4 \times 5 \times 3 \times 6$, heißt immer, daß man 4 durch 5, dann das Produkt durch 3, und das zweite Produkt durch 6 multipliciren müsse.

57. „Ein Produkt von dreien Faktoren bleibt bei umgekehrter Ordnung der beiden letzten unverändert".

Z. B. ich sage: $12 \times 4 \times 7 = 12 \times 7 \times 4$. In der That, $12 \times 4 \times 7$ zeigt, daß man das Produkt von 12×4, 7 mal nehmen müsse; welches geschieht, wenn man jeden der 4 Theile 12 des Produkts 7 mal nimmt. Der erste Theil 12, 7 mal genommen, giebt 7 mal 12 oder 12×7; der zweite Theil giebt auch 12×7; so der Dritte und

1) Daraus, daß die Differenz zweier Zahlen nicht verändert wird, wenn man beide um ein dritte Zahl vergrößert, darf man nicht schließen, daß die Differenz auch dann die nämliche bleibe, wenn man beide Zahlen durch den nämlichen Multiplicator multiplicirte. In der That, von $11 - 5 = 6$ erhält man (39) $11 = 5 + 6$, und (43) 4 mal 11 = 4 mal 5 + 4 mal 6.

Also 4 mal 11 — 4 mal 5 = 4 mal 6. Also wenn zwei Zahlen jede 4 mal größer oder kleiner werden, so wird ihre Differenz auch 4 mal größer oder kleiner.

Vierte. Also erhält man im Ganzen 4 mal 12×7, oder $12 \times 7 \times 4$, also wirklich $12 \times 4 \times 7 = 12 \times 7 \times 4$.

Das nämliche erhält man, wenn man auf eine Reihe 4 mal 12 Striche macht, und 7 solcher Reihen untereinander schreibt.

58. „Um eine Zahl durch das Produkt zweier anderer „ zu multipliciren, darf man sie nur durch eine dieser „ Zahlen, und das erhaltene Produkt durch die andere „ multipliciren".

In der That, nach dem vorhergehenden (45 und 57) erhält man $3 \times (4 \times 7) = 4 \times 7 \times 3 = 4 \times 3 \times 7 = 3 \times 4 \times 7$. [1])

59. Hieraus sieht man, daß in dem Produkt $4 \times 7 \times 3$ der Faktor 3 nach einander jede Stelle einnehmen könne ohne daß der Werth des Produkts eine Veränderung erleide: und da es mit den beiden übrigen Faktoren 4 und 7 die nämliche Bewandniß hat, so folgt, daß ein Produkt von dreien Faktoren das nämliche bleibt, in welcher Ordnung man multiplicire.

Nach diesem und dem vorhergehenden (57) ist einleuchtend: $4 \times 2 \times 7 \times 9 = 2 \times 4 \times 7 \times 9 = 2 \times 7 \times 4 \times 9 = 2 \times 7 \times 9 \times 4$. denn man kann 2×7 als eine Zahl betrachten; man sieht also, daß in dem Produkt $4 \times 2 \times 7 \times 9$, der Faktor 4 nacheinander jede Stelle einnehmen kann ohne den Werth des Produkts zu ändern: eben so verhält es sich mit den drei übrigen Faktoren 2, 7 und 9.

Das gesagte ist auf jede beliebige Zahl von Faktoren anwendbar, und man schließt daraus: „daß das Produkt

1) Wenn man also eine Zahl 40 mal nehmen will, so nimmt man sie 4 mal, dann das Produkt 10 mal wie § 50 geschehen ist.

„ der Multiplication mehrerer Zahlen durcheinander, in „ welcher Ordnung m ltiplicirt werde, das nämliche „ bleibe".

Von der Division in ganzen Zahlen.

60. Die Division ist eine Rechnungsart, durch welche, wenn ein Produkt, oder der Dividend, und einer der beiden Faktoren, der Divisor bekannt sind, der andere Faktor oder der Quotient gefunden wird. [1])

Aus der gegebenen Definition folgt, daß der Dividend das Produkt des Divisors durch den Quotienten ist (45), und daß, wenn man das Produkt durch einen der beiden Faktoren dividirt, man den andern oder Quotienten erhält.

61. Das Zeichen der Division ist :, welches heißt dividirt durch. Also 12 : 4, heißt: 12 dividirt durch 4.

62. Wir wollen erstlich sehen auf welche Art man den Multiplicator am leichtesten finden könne wenn man das Produkt und den Multiplicanden kennt; da in diesem Falle, der Dividend das Produkt des Divisors durch den Quotienten ist, so ist der Quotient die Zahl welche anzeigt wie oft der Divisor in dem Divi-

---

1) Die Division überhaupt ist eine Rechnungsart, durch welche man eine gegebene Zahl in gleiche Theile theilt, von welchen entweder der Werth oder die Zahl bekannt ist. So z. B. hat man eine Division 1°. wenn man die Zahl 48 in N. Theile theilt deren Werth 8 ist; so erhält man N. mal 8=48; 2°. Wenn man 48 in 4 theilt deren Werth P. ist, so erhält man 4 mal P.=48 In dem ersten Falle sucht man den Multiplicator N. des Produktes 48, und in dem zweiten den Multiplicanden P.

dend enthalten ist. Diese Zahl suchen, heißt dividiren.

63. Da eine Zahl von Tagen nicht in einer Zahl von Menschen enthalten seyn kann, so folgt, daß der Dividend und der Divisor gleichnamig seyn müssen. Ferner ist eine Zahl nur so oft in einer andern enthalten, als sie von derselben abgezogen werden kann; es ist also klar, daß die Division durch wiederholte Subtraction des Divisors gemacht werden könne.

64. Dieses Verfahren würde, besonders bei größeren Quotienten zu langwierig seyn; allein man kann dasselbe sehr beschleunigen, wenn man sich übt eine, höchstens zwei Ziffern, durch eine andere Ziffer im Gedächtniß zu dividiren, wozu die Multiplications-Tabelle sehr behilflich seyn wird:

Z. B. um zu finden wie oft 7 in 63 enthalten ist, darf man sich nur erinnern, daß 9 mal 7, 63 machen: daraus folgert man, daß 7 in 63, 9 mal enthalten sey.

Desgleichen um 51 durch 8 zu dividiren, wird man bemerken, daß 6 mal 8 nur 48 machen, daß aber 7 mal 8, 56 geben, und daraus schließen, daß 8 nur 6 mal ganz in 51 enthalten sey.

65. Besteht der Quotient aus mehreren Ziffern, so beruht die Division auf folgendem Grundsatz: Gesetzt der Quotient sey 31, so enthält der Dividend 31 mal den Divisor; folglich enthält der Dividend, 5 mal genommen, 5 mal 31 mal den Divisor: der neue Quotient wäre alsdann 5 mal 31, er wäre also 5 mal größer als der erste, 31. Folglich, wenn der Divisor unverändert bleibt, der Dividend aber 5 mal größer wird, so wird auch der Quotient 5 mal größer. Eben so wenn der Divisor der

nämliche bleibt und der Dividend 5 mal kleiner wird, so wird auch der Quotient 5 mal kleiner. Also überhaupt: Wenn der Divisor der nämliche bleibt, der Dividend aber größer oder kleiner wird, so wird auch der Quotient eben so vielmal größer oder kleiner.

66. Um den Quotienten zu finden, wenn der Dividend mehrere, der Divisor nur eine Ziffer hat, z. B. um 1468 durch 4 zu dividiren, verfährt man auf folgende Art:

```
Dividend. 1468 | 4   Divisor.
          12   |----------------
         ----  | 367 Quotient.
           26
           24
          ----
            28
            28
          ----
             0
```

Man schreibt den Divisor zur Rechten des Dividenden, sondert beide durch einen vertikal Strich von einander ab, unterstreicht den Divisor, um unter diesen Strich die Ziffer des gefundenen Quotienten zu schreiben. Dann sucht man wie oft der Divisor 4, in den beiden ersten Ziffern 14 des Dividenden enthalten ist, und sagt: 4 in 14 geht 3 mal, welche man hinschreibt. Da der Divisor 4 in 14, 3 mal enthalten ist, so kann er auch 3 mal davon abgezogen werden. 3 mal 4 ist 12, diese von 14 abgezogen, bleibt 2; da der Divisor in diesem Rest nicht mehr enthalten ist, so folgt daß der Divisor 4 nur 3 mal ganz in 14 enthalten ist. Also in 14 Hunderten, welche 100 mal größer sind als 14 Einer, ist der Divisor 4, 100 mal mehr (65), folglich 100 mal 3 mal, oder 300 mal enthalten.

Zu den übrig gebliebenen 2 Hunderten schreibt man die folgende Ziffer 6 des Dividenden herunter, und man erhält 26 Zehner als zweiten theilweisen Dividenden. 4 in 26 geht 6 mal. 6 mal 4 macht 24, diese abgezogen von 26 bleibt 2. Da der Divisor 4 in diesem Rest nicht mehr enthalten ist, so folgt, daß der Divisor 4 in 26 Einheiten nur 6 mal ganz enthalten ist; Also, in 26 Zehnern, welche 10 mal größer sind als 26 Einer, ist der Divisor 4, 10 mal mehr, folglich 10 mal 6 mal, oder 60 mal enthalten; diese, mit den bereits erhaltenen 300 mal, macht 360 mal. Zu den übrigen 2 Zehnern, schreibt man die folgende Ziffer 8 des Dividenden herunter, und man erhält 28 Einheiten als dritten theilweisen Dividenden. 4 in 28 geht 7 mal, 7 mal 4 ist 28, diese von 28 abgezogen bleibt 0. Der Divisor ist also 7 mal in dem letzten theilweisen Dividenden enthalten. Diese 7 mal mit den bereits gefundenen 360 mal, geben 367 mal; so daß der Divisor 4 in dem Dividenden 1468 genau 367 mal enthalten ist.

Auf gleiche Weise findet man: 47094 : 6 = 7849; 611037 : 9 = 67893; 3682 : 7 = 526; 47576 : 8 = 5947.

67 Wenn Dividend und Divisor mehrere Ziffern enthalten, z. B. die Zahlen 273585 und 793, um dann zu finden wie oft letztere in der ersten enthalten sey, so verfahre man auf folgende Art:

```
Dividend. 273585 | 793 Divisor.
          2379   |-------------
          ------ | 345 Quotent.
           3568
           3172
          ------
            3965
            3965
          ------
               0
```

Man nimmt die vier ersten Ziffer 2735 zur Linken des

Dividenden, weil die drei ersten den Divisor nicht enthalten. Anstatt zu suchen wie oft der ganze Divisor in diesem theilweisen Dividenden enthalten ist, sucht man nur wie oft die erste Ziffer 7 des Divisors, in den zwei ersten Ziffern 27 des Dividenden enthalten ist; und sagt: 7 in 27 geht 3 mal. Wenn aber der Divisor 793 in dem ersten theilweisen Dividenden 3 mal enthalten ist, so kann er auch 3 mal von demselben abgezogen werden. 3 mal 793 macht 2379, diese von 2735 abgezogen beibt 356. Da der Divisor in diesem Rest nicht mehr enthalten ist, so folgt, daß der Divisor in 2735 Einheiten nur 3 mal ganz enthalten ist. Also in 2735 Hunderter, welche 100 mal größer sind, ist der Divisor 100 mal mehr, folglich 100 mal 3 mal oder 300 mal enthalten; 3 ist also die Ziffer der Hunderter des gesuchten Quotienten. [1])

Zu den übrigen 356 Hunderten schreibt man die folgende Ziffer 8 des Dividenden herab und man erhält 3568 Zehner zum zweiten theilweisen Dividenden; 7 in 35 geht 4 mal. Der Divisor 793, 4 mal genommen giebt 3172; diese von 3568 abgezogen, bleibt 396. Da der Divisor 793 in diesem Rest nicht mehr enthalten ist, so folgt, daß der Divisor in 3568 Einheiten nur 4 mal ganz enthalten ist. Also ist der Divisor in 3568 Zehnern, welche 10 mal größer sind, 10 mal mehr, folglich 10 mal 4 mal oder 40 mal enthalten, welches mit den bereits erhaltenen 300 mal, 340 mal macht. Man sieht also, daß man den

---

[1]) Der Divisor wäre wohl noch in den übrigen 356 Hunderten enthalten, wenn man sie als 35600 Einheiten betrachten wollte; aber nicht mehr 100 mal. Der Divisor ist also nur 300 mal in dem theilweisen Dividenden 2735 Hunderten enthalten. Man sieht, daß man bei dieser Art zu dividiren, durch jede theilweise Division eine Ziffer

zweiten theilweisen Quotienten 4 zur Rechten des Ersten, 3, schreiben müsse.

Wenn man zu dem Rest 396 die folgende Ziffer 5 des Dividenden herabschreibt, erhält man noch 3965 Einheiten zum dritten theilweisen Dividenden. 7 in 39 geht 5 mal. 5 mal der Divisor 793, giebt 3965, diese abgezogen von 3965 bleibt 0; also ist der Divisor 5 mal in dem letzten theilweisen Dividenden enthalten. Diese 5 mal zu den bereits gefundenen 340 mal geben 345 mal. Also ist der Divisor in dem Dividenden 345 mal enthalten.

In der That, man hat gefunden, daß der Divisor in dem ersten Theile des Dividenden 300 mal, im zweiten 40 mal, im dritten 5 mal, folglich in dem ganzen Dividenden 345 mal enthalten ist.

68. Aus dem bisher gesagten ergiebt sich folgende Regel: „Um eine Zahl von mehreren Ziffern durch eine andere „zu dividiren, schreibt man den Divisor zur Rechten des „Dividenden, sondert beide durch einen senkrechten Strich „von einander ab, unterstreicht den Divisor, um die „Ziffern des Quotienten von der Linken zur Rechten da„runter zu schreiben. Dann nimmt man an der Linken „des Dividenden so viele Ziffern als nothwendig sind um „den Divisor zu enthalten, sucht wie oft die erste Ziffer „des Divisors in der ersten, oder den zweien ersten „Ziffern des theilweisen Dividenden enthalten ist, schreibt „diese an die Stelle des Quotienten, multiplicirt den Di„visor mit diesem theilweisen Quotienten, und zieht das „Produkt von dem theilweisen Dividenden ab. Zu dem „erhaltenen Rest schreibt man die folgende Ziffer des

---

des Quotienten erhält.

„ Dividenden herab, wodurch man einen zweiten theil-
„ weisen Dividenden erhält, bei welchem man verfährt
„ wie bei dem ersten, und dieses Verfahren setzt man so
„ lange fort als in dem Dividenden eine Ziffer zum Her-
„ abschreiben vorhanden ist".

Bei genauer Anwendung dieser Regel wird es leicht seyn sich von der Richtigkeit folgender Resultate zu überzeugen: 423405 : 485 = 873; 3049164 : 486 = 6274; 49561776 : 9648 = 5137; 841182062 : 8597 = 97846. Die Schüler werden wohl thun bei jedem dieser Beispiele den Beweis vom §. 67 ausführlich anzuwenden.

69. Hat der Divisor nur eine Ziffer, so ist die Rechnung leichter: hat er deren aber mehrere, so erhält man leicht einen zu großen theilweisen Quotienten. In diesem Falle, um zu sehen ob der Quotient der wahre sey, ist es meistens genug, daß man mit demselben die beiden ersten Ziffern des Divisors multiplicire, welches man leicht in Gedanken bewerkstelligt. [1])

70. Der Divisor ist nur so oft in dem Dividenden enthalten, als er von demselben abgezogen werden kann. Wenn also das Produkt des Divisors mit dem theilweisen Quotienten von dem theilweisen Dividenden nicht abgezogen werden kann, so wäre der Divisor in dem Dividenden nicht so oft enthalten als der Quotient anzeigt; dieser wäre also zu groß. Wenn aber der Rest größer wäre als der Divisor, so wäre der Divisor wenigstens noch einmal

---

1) Man fängt die Division zur Linken an, damit der Rest jeder theilweisen Division, Zehner des folgenden theilweisen Dividenden ausdrücke, welches nicht statt hätte wenn man von der Rechten anfinge.

in demselben enthalten, und dann wäre der theilweise Quotient zu klein. Folglich, ist der theilweise Quotient nur dann richtig, wenn sich die Subtraction machen läßt, und der Rest kleiner ist als der Divisor.

71. Anstatt das Produkt des Divisors durch den theilweisen Quotienten zu schreiben, um dasselbe von dem theilweisen Dividenden abzuziehen, wäre es viel kürzer diese Subtraction in Gedanken zu machen; z. B. 15663072 soll dividirt werden durch 3856, so verfährt man auf folgende Weise:

$$\begin{array}{r|l} 15663072 & 3856 \\ \cline{2-2} 23907 & 4062 \\ 7712 & \\ 0000 & \end{array}$$

Man nimmt 15663 als ersten theilweisen Dividenden und sagt: 3 in 15 geht 4 mal. Man muß also den Divisor von 15663, 4 mal abziehen. 4 mal 6 ist 24, diese abgezogen von 33 bleibt 9. Allein um diese theilweise Subtraction möglich zu machen, hat man 3 Zehner zu der Ziffer 3, der größeren Zahl zugesetzt, folglich diese um 30 vergrößert. Damit aber das Resultat im Ganzen das nämliche bleibe, muß man diese 3 Zehner auch zu der kleinern Zahl addiren (34), welches geschieht, wenn man zur folgenden Ziffer der kleinern Zahl 3 Einer zuzählt, d. h. wenn man 3 behält für das folgende theilweise Produkt. 4 mal 5 ist 20 und 3 ist 23, von 26 bleibt 3. Man behält 2 aus oben angeführten Beweggründen. 4 mal 8 ist 32 und 2 ist 34; von 36 bleibt 2. Man behält 3. 4 mal 3 ist 12 und 3 behalten ist 15; von 15 geht auf. Es bleibt also im Ganzen 239. Wenn man die folgende Ziffer des Dividenden herabsetzt, erhält man 2390 als zweiten theilweisen Dividenden. Da dieser den Divisor nicht enthält, so folgt, daß der Quotient keine Hunderte hat; man setzt also 0 als theilweisen Quotienten, und schreibt gleich die folgende Ziffer 7 des Dividenden herab. Indem man so fortfährt, erhält man 4062 als gesuchten Quotienten.

72. Hieraus folgt: „Wenn einer der theilweisen Divi-„denden den Divisor nicht enthält, so setzt man 0 zum „Quotienten, schreibt gleich die folgende Ziffer des Di-„videnden herab um einen neuen theilweisen Dividenden „zu erhalten".

Der Divisor wird nicht mit 0 multiplicirt, weil das Produkt nur Nullen enthalten, welche von dem theilweisen Dividenden abgezogen, diesen selbst als Rest zurücklassen würde, folglich das ganze Verfahren unnöthig wäre.

Hier folgen einige Beispiele zur Uebung:
61586184 : 789 = 78056; 161448600 : 795 = 203080 und 21660342 : 38 = 570009.

73. Wenn 75000 durch 100 dividirt werden sollte so müßte man bemerken daß die Zahl 75000, 750 Hunderter enthält; sie enthält also 100, 750 mal. Allein man erhält diesen Quotienten, wenn man zwei Nullen zur Rechten der Zahl 75000 wegstreicht. Also überhaupt, „um eine Zahl hinter welcher mehrere Nullen sind, durch „eine Einheit hinter welcher ebenfalls Nullen sind zu „dividiren, darf man nur von dem Dividenden so viele „Nullen wegstreichen, als sich deren hinter der Einheit „befinden". Also 9800000 : 1000 = 9800.

74. Man kann die Division allemal abkürzen, wenn sich hinter beiden Zahlen Nullen befinden, indem man

bemerkt, daß z. B. 7 Einheiten in 490 Einheiten eben so oft enthalten sind, als 7 Hunderter in 490 Hunderter. Man erhält also 49000 : 700 = 490 : 7. Man kann also eine gleiche Zahl von Nullen zur Rechten des Dividenden und des Divisors wegstreichen ohne den Quotienten zu ändern.

75. Mit Hilfe der vorhergehenden Regeln, kann man immer, wenn das Produkt und der Multiplicand bekannt sind, den Multiplicator, d. h. die Zahl bestimmen, wie oft der Multiplicand in dem Produkt enthalten ist. Um also die doppelte Absicht der Division (60) zu erreichen, kömmt es nur noch darauf an, den Multiplicanden, oder den durch den Multiplicator bezeichneten Theil des Produktes zu finden. Hiezu giebt folgender Grundsatz die Anleitung.

76. Sucht man wie oft eine unbenannte Zahl in einer andern enthalten ist, so ist der Quotient immer ein Theil des Dividenden, der durch den Divisor bezeichneten Art.

Sucht man z. B. wie oft 12 in 96 enthalten ist, so findet man den 12ten Theil von 96.

In der That, da der Dividend 96 das Produkt des Divisors 12 durch den gesuchten Quotienten ist, so ist er auch das Produkt des gesuchten Quotienten durch den Divisor 12 (45), folglich giebt der gesuchte Quotient, 12 mal genommen, den Dividenden 96, folglich ist der gesuchte Quotient 12 mal kleiner als der Dividend 96; folglich ist er der 12te Theil von 96.

77. Da der 12te Theil von 96 Tagen eben so viel Tage enthält, als Einheiten in dem 12ten Theil von 96 Einheiten enthalten sind, so ergiebt sich diese Regel: „Um „ einen bestimmten Theil einer benannten Zahl zu erhalten,

„ darf man nur suchen, wie oft diese, als unbenannte „ Zahl, diejenige enthält, welche die Gattung des ge„ suchten Theiles bezeichnet, und dann dem Quotienten „ den Namen der benannten Zahl beilegen“.

Z. B. Man erhält den 24ten Theil von 768 Pfund, wenn man sucht wie oft 24 in 768 enthalten ist, und dann den Quotienten 32, Pfunde bezeichnen läßt.

In der That, man erhält den 24ten Theil von 768, indem man diese Zahl durch 24 dividirt. Da aber der 24te Theil von 768, 32 ist, so macht auch der 24te Theil von 768 Pfund, 32 Pfund; denn der Theil ist immer von der nämlichen Art, wie das Ganze, von welchem er genommen wird. Und man findet in der That, daß 24 mal 36 Pfund, 768 Pfund machen.

78. Man kann die Division mehrerer Ziffern durch eine Einzige abkürzen. Z. B. 54731 soll durch 7 dividirt werden. Diese Division beschränkt sich blos darauf den 7ten Theil von 54731 zu nehmen (76). Der 7te Theil von 54 Tausenden ist 7 tausend, für 49 Tausende bleibt 5 tausend, diese mit 7 Hunderten macht 57 hundert, der 7te Theil von 57 Hunderten macht 8 hundert, für 56 hundert, bleibt 1 hundert; dieses mit 3 Zehnern macht 13 Zehner; der 7te Theil von 13 Zehner, ist 1 Zehner, für 7 Zehner bleiben 6 Zehner, welche mit 1 Einheit 61 Einheiten machen. Der 7te Theil von 61 Einheiten giebt 8 Einheiten, bleiben 5, von welchen der 7te Theil fünf Siebentel macht. Also ist der gesuchte Quotient 7818, 5 Siebentel. Dieses Verfahren gründet sich darauf, daß $54731 = 49000 + 5600 + 70 + 56 + 5$, und daß man den 7ten Theil eines Ganzen nimmt, wenn man den 7ten Theil von jedem seiner Theile nimmt.

79. Will man ein Hundertel von 48000 nehmen, so bemerke man nur, daß 48000 = 480 Hunderter = 100 mal 480. Also überhaupt, um ein Zehntel, Hundertel, oder Tausendtel von einer Zahl zu nehmen, hinter welcher mehrere Nullen sind, so darf man nur 1, 2, 3, rc. von diesen Nullen wegstreichen. Also das 10tel von 8900 = 890.

80. Wenn man den Divisor 5 mal größer nimmt, so wird das Produkt des Divisors durch den Quotienten, d. h. der Dividend, auch 5 mal größer (56); wenn man aber den Dividenden auf seine vorige Größe zurück führt, d. h. 5 mal kleiner macht, so wird der Quotient auch 5 mal kleiner (65). Da nun in Hinsicht auf diesen neuen Quotienten der Dividend der nämliche bleibt, und der Divisor 5 mal größer wird, so folgt, daß bei einem gleichen Dividenden, wenn der Divisor 5 mal größer wird, so wird der Quotient 5 mal kleiner. Ueberhaupt: bei einem gleichen Dividenden, wird der Quotient so viel mal kleiner, als der Divisor größer wird und umgekehrt.

81. Ein Quotient bleibt unverändert, wenn man den Dividenden und den Divisor durch eine gleiche Zahl multiplicirt oder dividirt.

In der That: Indem man den Dividenden und den Divisor durch 5 multiplicirt, macht man jeden 5 mal größer; folglich wird der Quotient 5 mal größer und 5 mal kleiner (65 und 80). Also bleibt er unverändert.

82. Eben so wenn der Dividend und der Divisor durch 5 dividirt werden, wird jeder 5 mal kleiner; folglich wird der Quotient 5 mal kleiner und 5 mal größer (65 und 80); folglich bleibt er unverändert.

Probe der Multiplication und der Division.

83. „Um die Probe der Multiplication zu machen, muß
„ man das Produkt durch einen der Faktoren dividiren,
„ und wenn die Rechnung richtig war, so erscheint der
„ andere Faktor als Quotient". [1])

Man könnte noch die Probe der Mulplication machen, wenn man den einen Faktor doppelt und den andern halb nähme; das Produkt müßte immer das nämliche bleiben.

84. „Um die Probe der Division zu machen, muß man
„ den Divisor durch den gefundenen Quotienten multipli-
„ ciren, zu dem Produkt den Rest der Division addiren;
„ wenn die Rechnung richtig war, so erhält man den
„ Dividenden als Summe".

In der That, wenn man dividirt, so zieht man die Produkte des Divisors durch die theilweisen Quotienten vom Dividenden ab, folglich wird das Produkt des Divisors durch den ganzen Quotienten abgezogen; dieses Produkt also macht den einen, und der Rest, den andern Theil des Dividenden; folglich wenn man diese beiden Theile des Dividenden addirt, erhält man den Dividenden als Summe.

---

1) Aus diesem Grundsatz folgt auch, daß, um ein angedeutetes Produkt durch einen der Faktoren zu dividiren, man diesen Faktor nur ausstreichen dürfe; denn alsdann bliebe der andere Faktor als wirklicher Quotient.

Also ist jeder Faktor einer Zahl auch ein Divisor, und jeder Divisor ein Faktor derselben (60); so daß die Wörter Faktor und Divisor gleichbedeutend sind.

Man könnte noch die Probe der Division machen durch Verdoppelung des Dividenden und des Divisors; der Quotient wäre alsdann der nämliche, nur der Rest wäre doppelt.

Von der Theilbarkeit der Zahlen, und wie der größte gemeinschaftliche Theiler zu suchen.

85. Der Multipl einer Zahl ist das Produkt dieser Zahl durch eine andere ganze Zahl, oder eine andere Zahl, welche die aufgegebene ein oder mehrere ganze Male enthält. So ist 15 ein Multipl (Mehrfaches) von 5, weil er das Produkt von 5 durch 3 ist, oder weil er 5 genau 3 mal enthält. 5 aber wird hier Untermultipl genannt. Die Wörter Multipl und Untermultipl können nur bei ganzen Zahlen, Produkt und Faktor aber bei allen Zahlen gebraucht werden.

Man sagt, daß eine Zahl durch eine andere theilbar sey, wenn sie ein Multipl dieser ist, d. h. wenn sie dieselbe ein oder mehrere ganze Male enthält.

86. Wenn eine Zahl eine andere genau theilt, so theilt sie ebenfalls jeden Multipl derselben.

In der That, da z. B. 4 die aufgegebene Zahl genau theilt, so ist 4 in derselben ein oder mehrere ganze Male enthalten; ihr Multipl, oder ihr Produkt durch eine ganze Zahl, wird eine neue aus mehrmal 4 zusammengesetzte Zahl, die folglich auch wieder durch 4 theilbar ist.

87. Wenn eine Zahl zwei andere Zahlen genau theilt, so wird sie auch die Summe und die Differenz derselben genau theilen.

In der That, da 7, z. B., die aufgegebenen Zahlen genau theilt, so enthält jede derselben ein oder mehrere ganze Male 7: folglich sind ihre Summe und Differenz ebenfalls aus 7 **zusammengesetzte**, und wieder **durch 7 theilbare Zahlen**.

88. **Jede Zahl, welche mit einer Null endigt, ist durch 10, durch 2 und durch 5 genau theilbar.**

In der That, die Zahl 7450 besteht aus 745 Zehnern. Sie enthält also 10, 745 mal. Ferner ist 10 durch 2 und durch 5 theilbar; folglich ist es auch der Multipl von 10, 7450.

89. **Jede Zahl, welche mit 5 endigt, ist durch 5 theilbar.**

In der That, da $785 = 780 + 5$, so sieht man, daß die aufgegebene Zahl die Summe von 5 und von einer andern Zahl ist, die mit 0 endigt. Sie ist also die Summe von zwei Zahlen die beide durch 5 theilbar sind (88), sie ist also selbst durch 5 theilbar.

Man merke wohl, daß wenn die letzte Ziffer weder 0 noch 5 wäre, so wäre die Zahl nicht theilbar durch 5. Denn, z. B., $748 = 745 + 3$. Hier wäre wohl der erste Theil dieser Zahl durch 5 theilbar, aber nicht der zweite 3; folglich ist es die Zahl 748 auch nicht. Das nämliche gilt für $462 = 460 + 2$.

90. „Eine Zahl läßt sich durch 3 und 9 genau theilen, „ wenn die Summe ihrer Ziffer, als einfache Einheiten „ betrachtet, ein Multipl von 3 oder 9 ist; aber auch nur „ in diesem Falle".

In der That, es ist einleuchtend, daß $852 = 800 + 50 + 2$. Allein 800 kann ersetzt werden durch 8 mal $(99 + 1)$, oder durch 8 mal $99 + 8$. Eben so kann 50 ersetzt werden durch 5 mal $9+5$. Also erhält man, indem man die Summe von 8, 5 und 2 nimmt,

$$852 = 8 \text{ mal } 99 + 5 \text{ mal } 9 + 15$$

die zwei ersten Theile 8 mal 99 und 5 mal 9 sind beide theilbar durch 3 und 9 (86). Sobald also der letzte Theil 15 durch 3 oder 9 theilbar ist, so ist es auch die Summe der 3 Theile, d. h. die aufgegebene Zahl 852 (87). Man sieht zugleich daß, wenn der letzte Theil 15, welcher auch die Summe der 3 Ziffer ist, weder durch 3 noch 9 theilbar wäre, es auch die aufgegebene Zahl nicht seyn könnte.

91. „Jede Zahl ist durch 11 theilbar, sobald die Summe „ihrer Abschnitte von 2 und 2 Ziffer, von der Rechten „zur Linken, durch 11 theilbar ist".

Z. B. die Zahl 58234, deren Summe aller Abschnitte von 2 Ziffern, nämlich $34 + 82 + 5 = 121$, ein Multipl von 11 ist. In der That ist $58234 = 50000 + 8200 + 34$; daher $58234 = 5$ mal $9999 + 82$ mal $99 + 121$. Nun ist 9999 theilbar durch 11, so auch 99 und 121; also (86) sind alle Theile dieser Zahl, folglich (87) die Zahl selbst theilbar durch 11.

92. Jede Zahl welche mit einer von den Ziffern 0, 2, 4, 6, 8 endigt, ist durch 2 theilbar.

Denn diese Zahl ist die Summe der letzten Ziffer und einer Zahl, die mit 0 endigt: sie ist also die Summe von zweien Zahlen, die beide durch 2 theilbar sind (88); sie ist also selbst durch 2 theilbar (87).

Man sieht leicht, daß, wenn die letzte Ziffer kein Multipl von 2 ist, auch die Zahl nicht durch 2 theilbar sey: denn

z. B. 759 = 758 + 1. Nun ist zwar der erste Theil 758 theilbar durch 2, nicht aber der zweite 1; also ist es die Zahl 759 auch nicht [1].

Da alle durch 2 theilbare Zahlen in zwei gleiche Theile getheilt werden können, so nennt man sie gerade Zahlen; z. B. 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ꝛc. sind gerade Zahlen.

Jene Zahlen hingegen, welche nicht durch 2, folglich nicht in gleiche Theile getheilt werden können, heißen ungerade Zahlen, wie 1, 3, 5, 7, 9, 11, ꝛc.

93. Man nennt Primzahlen alle diejenigen, welche nur durch sich selbst und durch die Einheit theilbar sind, wie 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ꝛc.

Man nennt Primzahlen unter sich jene, welche keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, wie 15 und 32. Hieraus folgt, daß zwei Zahlen Primzahlen unter sich seyn können, ohne deswegen Primzahlen für sich zu seyn. Da hingegen alle Primzahlen auch nothwendig Primzahlen unter sich sind.

94. Um eine Zahl in ihre Prim-Faktoren aufzulösen, dividirt man sie durch 2, dann den Quotienten wieder durch 2, u. s. f. bis man einen Quotienten erhält, der nicht mehr durch 2 theilbar ist. Dann dividirt man diesen Quotienten durch 3 unter den nämlichen Bedingnissen.

---

1) Es ist leicht folgende Sätze zu beweisen:

1. Eine Zahl ist theilbar durch 4 oder durch 25, so oft ihre zwei letzten Ziffern zur Rechten eine durch 4 oder 25 theilbare Zahl sind.

2. Eine Zahl ist theilbar durch 8 oder durch 125, so oft ihre drei letzten Ziffer durch diese Zahlen theilbar sind.

3. Die Differenz zweier Zahlen ist theilbar durch 11, so oft die Differenz zwischen den zwei Summen der Abschnitte von zwei Ziffern in diesen Zahlen ein Multipl von 11 ist.

Man verfährt auf die nämliche Weise mit den folgenden Zahlen 5, 7, 11, 13, ꝛc. Alsdann ist die aufgegebene Zahl ein Produkt, bei welchem jede gebrauchte Prim-Zahl so oft Faktor wird, als sie Theiler war.

Z. B. um 360 aufzulösen, dividirt man mit 2, so auch den ersten Quotienten 180 und den zweiten 90; dann erhält man einen dritten Quotienten der nicht mehr durch 2 theilbar ist; und man hat $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 45$. Man theilt 45 durch 3 so wie den Quotienten 15, und man erhält einen letzten Quotienten 5, welcher eine Prim-Zahl, folglich nicht mehr theilbar ist. Man findet also $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$. So ist die Zahl $14700 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7$.

95. Hat man einmal die *einfachen Theiler* einer Zahl, so ist es leicht die zusammengesetzten Theiler zu finden, indem man die ersten 2 und 2, 3 und 3 multiplicirt. Allein anstatt uns bei dieser Auseinandersetzung aufzuhalten, wollen wir uns lieber mit dem gemeinschaftlichen Theiler beschäftigen, welcher die Fraktionen sehr vereinfacht.

96. Die größte Zahl, welche zwei andere Zahlen genau theilt, ist ihr *größter gemeinschaftlicher Theiler*.

97. *Der größte gemeinschaftliche Theiler zweier Zahlen, ist immer der größte gemeinschaftliche Theiler der kleinern Zahl und des Restes ihrer Division.*

Es seyen z. B. die zwei Zahlen 724 und 96. Indem man die erste durch die zweite dividirt, erhält man den Quotienten 7, und den Rest 52.

Es wird also	724 — 7 mal 96 = 52
hieraus folgt (84)	724 = 7 mal 96 + 52

Dieses vorausgesetzt, theilt der größte gemeinschaftliche Theiler der beiden Zahlen 724 und 96, die Zahl 96; er theilt auch den Multipl 7 mal 96 (86) und da er bereits 724 theilt, so folgt, daß er auch die Differenz 724 — 7 mal 96, d. h. 52 theilt (87). Er theilt also die zwei Zahlen 96 und 52, er kann also den größten gemeinschaftlichen Theiler dieser Zahlen nicht übersteigen.

Der größte gemeinschaftlichen Theiler von 96 und 52 theilt auch 96, so wie den Multipl 7 mal 96 (86): Er theilt außerdem 52, folglich theilt er die Summe 7 mal 96 + 52 oder 724 (87). Also theilt er die beiden Zahlen 724 und 96. Er kann folglich den größten gemeinschaftlichen Theiler der beiden Zahlen nicht übersteigen.

Also sind die beiden größten gemeinschaftlichen Theiler, der eine zwischen 724 und 96, der andere zwischen 96 und 52 von der Art, daß einer den andern nicht übersteigen kann; also sind sie gleich und sind nur einer und der nämliche.

98 „Um den größten gemeinschaftlichen Theiler zweier „Zahlen zu finden, dividirt man die größere Zahl durch „die kleinere, diese durch den Rest der ersten Division; „den ersten Rest durch den zweiten, den zweiten durch „den dritten, u. s. f. Jener Rest, welcher den vorhergehenden genau theilt, ist der größte gemeinschaftliche „Theiler der gegebenen Zahlen".

Um nach dieser Regel den größten gemeinschaftlichen Theiler der Zahlen 9399 und 871 zu finden, schreibt man jeden Rest zur Rechten des jedesmaligen Divisors wie folgt:

9399	871	689	182	143	39	26	13
689	10	1	3	1	3	1	2

Da der letzte Rest 13 den vorhergehenden 26 genau theilt, so ist 13 der größte gemeinschaftliche Theiler der beiden Zahlen 9399 und 871.

In der That, da 13 sich selbst und 26 genau theilt, so ist 13 der gemeinschaftliche Theiler der Zahlen 13 und 26, er ist auch der größte, weil es keine größere Zahl giebt, welche 13 genau theilt. Nun ist der größte gemeinschaftliche Theiler der Zahlen 39 und 26, jener der kleineren 26 und des Restes 13 ihrer Division (98); er ist also 13. Der größte gemeinschaftliche Theiler der beiden Zahlen 143 und 39 ist jener der kleineren 39 und des Restes 26 ihrer Division; er ist also ebenfalls 13; und man wird eben so sehen, daß 13 auch der größte gemeinschaftliche Theiler ist zwischen den Zahlen 182 und 143; 689 und 182; 871 und 689; und endlich zwischen den gegebenen Zahlen 9399 und 871.

Zur Uebung mag man auf die nämliche Art den größten gemeinschaftlichen Theiler folgender Zahlen aufsuchen: 7824 und 5640; 29795 und 6313; 609 und 1133; 133187 und 400932; 175325 und 810375; 1135 und 523; 16815 und 3125.

Gebrauch der vier Regeln der Arithmetik.

99. Der Gebrauch der Addition und Subtraction ist leicht zu erkennen, wenn man sich an die Definitionen dieser beiden Rechnungsarten erinnert, und bemerkt, daß eine der andern als Probe dient.

100. Der Gebrauch der Multiplication ist dreifach:

1. Hilft sie den ganzen Werth mehrerer Einheiten der

nämlichen Gattung finden, wenn man den Werth der einen kennt.

Z. B. zu finden, wieviel man für 49 Ellen Tuch geben müßte, wenn eine Elle 9 Gulden kostet.

In der That, da eine Elle 9 fl. kostet, so müssen 49 Ellen 49 mal 9 fl. kosten, oder das Produkt von 9 fl. durch 49.

2. Gebraucht man die Multiplication um Einheiten einer höhern Gattung zu Einheiten einer niederern zu machen.

Z. B. um 8 Tage zu Stunden zu machen.

In der That, da der Tag 24 Stunden enthält, so müssen 8 Tage, 8 mal 24 Stunden enthalten oder das Produkt von 24 durch 8.

3. Dient eine Multiplication als Probe der Division (84).

101. Die Division kann hauptsächlich auf viererlei Arten gebraucht werden.

1. Um den besondern Werth einer Einheit zu bestimmen, wenn man den ganzen Werth von mehreren kennt.

Z. B. zu finden wieviel ein Zentner kostet, wenn 36 Zentner 1080 Fl. kosten.

In der That, wenn 36 Zentner 1080 Fl. kosten, so kostet 1 Zentner den 36ten Theil von 1080 oder den Quotienten von 1080 durch 36.

2. Dient die Division um die Zahl von Einheiten zu finden, wenn man den ganzen Werth und den Werth der Einheit kennt.

Z. B. zu finden, wieviel Ohm Wein man um 8442 Franken bekäme, wenn ein Ohm 42 Franken kostet.

In der That, es ist klar, daß man für 8442 Fr. so viel Ohm Wein kaufen könne, als 42^{fl}, der Werth einer Ohm, in 8442^{fl} enthalten sind. Man erhält also die gesuchte Zahl von Ohmen, wenn man 8442^{fl} durch 42^{fl} dividirt.

3. Die Division dient auch aus Einheiten einer mindern Gattung, Einheiten einer höhern zu machen.

Z. B. um aus 72420 Minuten Stunden zu machen.

In der That, die Stunde hat 60 Minuten, folglich, so vielmal 60 Minuten, der Werth einer Stunde, in 72420 Minuten enthalten sind, so viele Stunden sind in 72420 Minuten enthalten. Man findet also die gesuchte Zahl von Stunden, wenn man 72420 Minuten durch 60 Minuten dividirt.

4. Endlich dient die Division als Probe der Multiplication (83).

Mit Hilfe des hier angezeigten Gebrauchs der vier Rechnungsarten, kann man jede numerische Aufgabe lösen, so verwickelt sie auch scheinen mag. Man darf nur eine Reihe von Folgerungen durchgehen, indem man zuerst den Werth der Einheit suchet, um den Werth von mehreren zu finden. Wir werden dieses in einigen Beispielen zeigen. Um aber diese wohl zu fassen, und überhaupt, um aus den, in diesem Werke gelößten Aufgaben den größten Vortheil zu ziehen, ist es rathsam, daß der Schüler alle Rechnungen selbst mache, von welchen er hier die Resultate findet.

102. „Man hat an zwei Arbeiter 63248 Franken für „eine Arbeit bezahlt. Der Erste hat 548, der Andere „396 Ellen gemacht. Wieviel hat jeder erhalten"?

Es ist klar, daß für 548 Ellen und 395 Ellen, im Ganzen für 944 Ellen Arbeit, 63248 Franken bezahlt wurden. Man hat also für eine Elle den 944ten Theil von 63248 Franken gegeben, oder den Quotienten von 63248 durch 944, welches 67 Franken macht. Wenn nun eine Elle 67 Franken kostet, so kosten 548 Ellen 548 mal 67 Fr. oder 36716 Fr.; und 396 Ellen kosten 396 mal 67 Fr.; oder 26532 Fr. Also hat der erste Arbeiter 36716, der Andere 26532 Fr. erhalten. In der That, die Summe dieser beiden Zahlen giebt die 63248 Franken, welche für die ganze Arbeit bezahlt worden.

Nach diesem ist es leicht folgende Aufgaben zu lösen:

1. Vier Arbeiter von gleicher Fertigkeit, haben zusammen eine Arbeit gemacht, für welche sie 169110 fl. erhielten. Der erste Arbeiter hatte 372 Tage daran gearbeitet, der zweite 89, der dritte 457, der vierte 961. Wieviel hat jeder Arbeiter von der ausgezahlten Summe erhalten?

2. Wieviel Tage brauchen zwei Arbeiter um eine Arbeit von 231420 Meter zu beendigen? Man weiß, daß der Erste 1856 Meter in 64 Tagen, und der Andere 2232 in 72 Tagen vollbringt.

103. „Welche Zahl enthält eine andere 69 mal, und ist um 50932 größer als diese?“

Die gesuchte Zahl enthält 69 mal die Andere; sie ist also 68 mal größer, als diese. Allein sie ist um 50932 größer; also die zweite Zahl 68 mal genommen, macht 50932. Die zweite Zahl ist also der 68te Theil von 50932 oder 749. Also ist die gesuchte Zahl 69 mal 749 oder 5168. In der That, diese Zahl ist um 50932 größer als 749.

Auf eine ähnliche Art lassen sich die zwei folgenden Aufgaben lösen: Ein Vater ist 12 mal so alt als sein Sohn und 55 Jahre älter; wie alt ist jeder?

2. Wenn man eine Zahl durch 89 dividirt, so giebt der Quotient zu welchem man noch den Dividenden und den Divisor zählt, 67409 als Summe. Welche ist nun diese Zahl?

104. Drei Personen sind zusammen 105 Jahre alt; die zweite ist zwei mal so alt als die erste, und die dritte zwei mal so alt als die zweite. Wie alt ist jede?

Um abzukürzen bezeichnet man das Alter der ersten Person durch 1; jenes der zweiten durch 2 mal 1 oder 2; jenes der dritten durch 2 mal 2, oder 4; die Summe dieser 3 Alter ist also 7 mal 1, oder 7, d. h. 7 mal das Alter der ersten Person. Uebrigens ist die Summe der 3 Alter 105 Jahr; also macht das Alter der ersten Person, 7 mal genommen, 105 Jahr; das Alter der ersten Person ist also der 7te Theil von 105, d. i. 15 Jahre.
Folglich ist das Alter der zweiten Person 2 mal 15 oder 30 Jahre; jenes der dritten 4 mal 15 oder 60 Jahre.

Auf eine gleiche Art kann man folgende drei Aufgaben lösen:

1. Der Bruder und die Schwester haben 30 Citronen zum Geschenke erhalten; wenn nun die Schwester dem Bruder 9 davon schenkte, so hätte er derselben 5 mal so viel als sie; wieviel hatte er davon zuerst?

2. Einem Spieler, der 40 Gulden hatte, bleibt noch 3 mal so viel übrig als er verloren hat; wieviel hat er noch?

3. 72288 sind in vier solche Theile zu theilen, daß der zweite 3 mal so viel, als der erste, der dritte 2 mal so viel, als der zweite, und der vierte den 5ten Theil von der Summe der drei ersten betrage.

105. „20 Ellen von einem gewissen Tuche kosten 480

„ fl.; 749 Ellen einer andern Gattung kosten 41944 fl.;
„ zu finden, wieviel Ellen der zweiten Gattung man für
„ 721 Ellen der Ersten bekommen würde"?

Wenn 20 Ellen der ersten Gattung 480 fl. kosten, so kostet eine Elle den 20ten Theil von 480 oder 24 fl.; die 721 Ellen der ersten Gattung kosten also 17304 fl. Allein 749 Ellen der zweiten Gattung kosten 41944 fl.; eine Elle kostet also 56 fl. Nun ist es klar, daß so oft 56 fl., Preis einer Elle der zweiten Gattung, in 17304 fl., Preis der 721 Ellen der ersten Gattung, enthalten sind: eben so viele Ellen der zweiten Gattung bekäme man für 721 Ellen der Ersten, nämlich 309 Ellen. Der Schüler wird wohl thun, sich davon durch die Rechnung zu überzeugen.

Nun ist folgende Aufgabe leicht zu lösen: Man hat von einem Ballen Tuch der 7000 Ellen enthielt, 6423 Ellen verkauft. Das noch übrige kostet 406208 Centimes, wieviel kostete der ganze Ballen?

106. „Zwei Reisende gehen einen Weg: der erste hat
„ 6450 Ellen voraus, und durchläuft 4800 Ellen in 2
„ Stunden, indessen der andere 560 Ellen in 8 Minuten
„ geht. In wieviel Minuten wird der Zweite den Ersten
„ einholen"?

Da der erste Reisende 4800 Ellen in 2 Stunden oder 120 Minuten geht, so geht er in einer Minute den 120ten Theil von 4800 oder 40 Ellen. Der zweite, der 560 Ellen in 8 Minuten geht, geht in einer Minute den 8ten Theil von 560, oder 70 Ellen. Also macht der zweite Reisende in einer Minute $70 - 40 = 30$ Ellen mehr als der Erste. Allein um den Ersten einzuholen, hat er den Vorsprung desselben von 6450 Ellen nachzuholen; dazu braucht er eine Zahl von Minuten gleich dem Quotienten von 6450

Ellen, dividirt durch 30 Ellen, d. i. 215 Minuten. Hievon kann man sich überzeugen, wenn man den Weg berechnet, den jeder Reisende in 215 Minuten macht.

Hier folgt eine ähnliche Aufgabe. Zwei Eilboten auf der nämlichen Straße, gehen einander entgegen und sind 1980 Stunden von einander entfernt. Der Erste macht 108 Stunden in 9 Tagen; der Zweite 14805 in 967 Tagen. Da der Erste 48 Tage vor dem Andern abging, so frägts sich, wieviel Wegs diese beiden Boten durchlaufen haben, nachdem sie 54 Stunden von einander vorüber sind.

107. „Man kauft 12 Liter Branntwein zu 50 Sous
„ jeden, um denselben im Kleinen zu verkaufen. Allein
„ die Gläser sind zu groß, jeder Liter giebt deren nur 20,
„ und man will das Glas um nur 2 Sous geben.
„ Man schüttet daher Wasser in den Branntwein, und
„ zwar soviel, daß, wenn man das Glas um 2 Sous
„ verkauft, man noch 20# auf dem Ganzen gewinnt.
„ Wieviel Wasser hat man hineingeschüttet? Man weiß
„ daß 1# = 20 Sous".

Es ist klar, daß 12 Liter zu 50 S. jeder 12 mal 50 S. = 600 S. = 30# machen: diese mit dem Gewinn von 20#, machen 50# als Preis der ganzen Lösung. Allein der Liter dieser Mischung kostet 20 mal 2 S. = 40 S. = 2#; folglich sind in der Mischung so viele Liter als 2# in 50# enthalten sind d. i. 25 Liter; folglich hat man 25 — 12 = 13 Liter Wasser zugeschüttet.

Folgende Aufgabe kann der vorhergehenden als Probe dienen: Man kauft für 30# Brantwein; dann schüttet man 13 Liter Wasser hinein. Man verkauft das Gemisch 2 S. das Glas, und man gewinnt 20# auf dem Ganzen. Wieviel hatte man Brantwein gekauft, vorausgesetzt, daß der Liter 20 Gläser hält?

108. Noch einige Aufgaben zur Uebung der Schüler:

I. 729 Ellen Zeug kosten 476766 Franken, wieviel kosten 9500 Ellen?

Antwort: 6213000 Franken.

II. 15 Ellen Basin kosten soviel als 75 Ellen Leinwand; 24 Ellen Leinwand kosten 72 Franken; wieviel kosten 750 Ellen Basin.

Antwort: 11250 Franken.

III. Ein Regiment, welches täglich 7 Stunden macht, hat 56 Tage gebraucht um 336 Stunden zu machen, wieviel Ruhetage hat es gehabt?

Antwort: 8 Ruhetage.

IV. Wieviel kostet ein Liter Wein bestehend aus einem Gemisch, welches für 820 Centimes Wein einer Qualität zu 205 Centimes den Liter; dann 84 Liter zu 180 Centimes jeden; endlich 92 Liter zu 130 Centimes den Liter, enthält?

Antwort: der gesuchte Preis ist 155 Centimes.

V. 12 Ohm von einer gewissen Weinsorte kosten 672 fl., 76 Ohm von einer andern kosten 3192 fl. Wieviel Ohm von der zweiten Sorte muß man zu 749 Ohm der ersten Sorte mischen, wenn der Preis der Mischung 57736 fl. seyn soll?

Antwort: 376 Ohm der zweiten Sorte.

VI. Ein Stück Tuch enthält 60 Ellen. Wieviel Ellen müssen davon verkauft werden, damit der Rest nur 640 ₶ koste? man weiß daß 9 Ellen 720 ₶ kosten.

Anwort: man muß 52 Ellen davon verkaufen.

VII. Während einer Belagerung von 18 Tagen, wurden aus jeder aufgepflanzten Kanone täglich 75 Schuß gethan. Wenn das Pulver 15 S. das Pfund werth war, so beläuft sich das verbrauchte Pulver auf 275400 ℔. Es frägt sich wieviele Kanonen in Thätigkeit waren, in der Voraussetzung daß die Ladung im Durchschnitt 8 Pfund betrug?

Antwort: 34 Kanonen.

VIII. Ein Spekulant kauft mehrere Morgen Land für 17964 fl., und verkauft sie wieder für 18396 fl. Er gewinnt bei diesem Handel 72 fl. per 6 Morgen. Wie viel hatte ihn zuerst ein Morgen gekostet?

Antwort: 499 fl.

IX. 24 Arbeiter haben in 60 Tagen 51840 Meter Arbeit gemacht. Wieviel werden 708 Arbeiter von gleicher Stärke in 720 Tagen machen?

Antwort: 18351360 Meter.

X. Drei Abtheilungen von Arbeitern, die erste bestehend aus 876, die zweite aus 907, die dritte aus 890 Personen, wieviel Zeit würden sie anwenden um eine Arbeit von 20443112 Ellen zu verfertigen? Man weiß, daß die Elle Arbeit 3 S. kostet, und daß der Taglohn für jeden Arbeiter der ersten Abtheilung 24 S., der zweiten 30 S. und der dritten 36 S. beträgt.

Antwort: 764 Tage.

XI. 324 Arbeiter einerseits, und 279 andererseits, haben ein Stück Land von 451647 □Ellen urbar gemacht; wieviel hat jede □Elle gekostet? Man weiß, daß die erste Abtheilung der Arbeiter 8561070 Cents mehr als die zweite zur Bezahlung erhielt.

Antwort: 254 Cents.

XII. Ein Kaufmann hat 4 Faß Branntwein gekauft, diese kosten im Ankauf 92800 Cents, 272 fl. Recht und 50 fl. Fuhrlohn; wie viel muß er die Flasche verkaufen, wenn er auf seinem Handel 42500 Cents gewinnen will?

Man weiß, daß jedes Faß 125 Flaschen enthält, und daß der Florin 100 Cents macht.

Antwort: 335 Cents.

Von den Brüchen.

109. Um zu sehen, wie man zu Brüchen gelange, wollen wir die Zahl 67 durch 9 messen, d. h. sehen, wie oft 9 in 67 enthalten sey. Man findet daß 7 mal 9 nur 63 machen, welche, von 67 abgezogen, 4 übrig lassen. Allein 4 macht 4 neuntel von 9, d. h. enthält 4 mal den neunten Theil von 9; also enthält 67, 7 mal 9 und 4 mal den neunten Theil von 9, oder 7 Einheiten und vier neuntel.

110. Ueberhaupt, wenn die zu messende Größe, die als Einheit genommene Größe nicht ein Ganzes Mal enthält, so kann man eine andere Einheit nehmen, welche diese Bedingung erfüllt; denn die Größe der Einheit ist willkührlich: alsdann wird die vorhabende Größe, durch eine verschiedene Zahl ausgedrückt. Allein um die vorläufige Kenntniß mehrerer Einheiten jeder Art zu vermeiden, theilt man die Grundeinheit in gleiche Theile, in einer solchen Anzahl, daß einer derselben genau in der zu messenden Sache enthalten sey, und dieser Theil wird alsdann als neue Einheit genommen, und Brucheinheit genannt. Die Sammlung aller Brucheinheiten, aus welchen die gemessene Größe besteht, heißt Bruch.

111. Man nennt also Bruch (6) einen oder mehrere gleiche Theile der Einheit, wie ein halbes, ein drittel, sieben achtel ꝛc. Um also einen Bruch zu bilden, muß

man die Einheit in eine gewisse Zahl gleicher Theile zerlegen, und einen oder mehrere dieser Theile nehmen [1]).

112. Die Brüche werden vermittelst Ziffern in zwei Zahlen ausgedrückt, welche übereinander stehen und durch einen Querstrich getrennt sind. Die untere Zahl oder Nenner, zeigt an in wieviele gleiche Theile die Einheit getheilt worden; die obere oder Zähler, zeigt an wie viele dieser Theile genommen werden, um den Bruch zu bilden. Z. B. um vier siebentel auszudrücken, schreibt man $\frac{4}{7}$. Der Nenner 7 bedeutet, daß die Einheit in 7 gleiche Theile getheilt worden, und der Zähler 4 zeigt an daß 4 dieser Theile genommen werden. Der Zähler und der Nenner heissen auch die Sätze eines Bruchs. [2])

---

1) Das Wort Bruch wird gewöhnlich von solchen Größen gebraucht die geringer sind als die Einheit. Allein die Regeln der Rechenkunst mit Größen, welche in gleichen Theilen der Einheit ausgedrückt werden, bleiben die nämlichen, obgleich diese Größen mehr, ebensoviel oder weniger Theile enthalten als die Einheit. Um also die Benennungen nicht vergebens zu vervielfältigen, nennen wir geradeweg Bruch, jede durch Brucheinheiten ausgedrückte Größe, sie mag nun mehr, eben soviel oder weniger werth seyn als die ganze Einheit.

2) Die Sätze unserer Brüche werden immer als ganze betrachtet. Indessen kann der Zähler selbst auch ein Bruch seyn; denn der Bruch welcher zum Zähler 11 Viertel hätte, und 7 zum Nenner, würde anzeigen, daß die Einheit in 7 gleiche Theile getheilt ist, und daß man 11 Viertel, oder 11 mal den vierten Theil von einem dieser gleichen Theile nimmt; so daß dieser Bruch 11 Viertel von Siebentel ausdrücken würde. Die Auflösung dieses Bruchs findet man, indem man jedes Siebentel in 4 gleiche Theile theilt, und 11 dieser Theile nimmt.

Der Nenner kann niemals ein Bruch seyn, denn der Bruch, dessen Zähler 8 und dessen Nenner 4 Fünftel wäre, würde anzeigen, daß die Einheit in 4 Fünftel gleicher Theile getheilt ist, welches widersprechend ist.

113. Um einen in Ziffern geschriebenen Bruch auszusprechen, spricht man zuerst den Zähler, dann den Nenner aus, zu welchem man am Ende des Zahlworts die Sylbe tel hinzusetzt; ausgenommen, wenn der Nenner 2 ist, welcher durch halbes ausgedrückt wird. Der Bruch $\frac{4}{5}$ wird ausgesprochen vier Fünftel; so die übrigen.

114. Da der Zähler die Zahl von Theilen anzeigt, welche den Bruch bestimmen, und der Nenner den Namen oder die Gattung dieser Theile, so folgt daß die Bruchrechnung eine Rechnung mit ganzen Zahlen von Brucheinheiten sey, deren Namen durch den Nenner angegeben wird. In dieser Hinsicht ist die Bruchrechnung immer eine Rechnung mit ganzen benannten Zahlen.

Z. B., der 24te Theil von 72 Elftel macht 3 Elftel, wie der 24te Theil von 72 Tagen 3 Tage macht (76): 3 Neuntel und 7 Neuntel machen 10 Neuntel, wie 3 Menschen und 7 Menschen 10 Menschen: 15 Siebentel weniger 6 Siebentel geben 9 Siebentel, wie 15 Aepfel weniger 6 Aepfel 9 Aepfel: 7 mal 9 Zehntel geben 63 Zehntel, wie 7 mal 9 Pfund 63 Pfund u. s. f.

115. Wir bemerken, daß, wenn man den Zähler vergrößert, auch der Bruch vergrößert werde, da im Gegentheil bei Vergrößerung des Nenners der Bruch kleiner wird; und umgekehrt der verkleinerte Zähler verkleinert, der verkleinerte Nenner vergrößert den Bruch. Dieses ist leicht zu beweisen, und man sieht hieraus, daß ein gleiches Verfahren mit beiden Sätzen eines Bruchs zwei entgegengesetzte Wirkungen hervorbringt.

116. Wenn man bei dem Bruche $\frac{4}{1}$ nach der Analogie schließen wollte, so würde man sagen daß hier die Einheit in einen gleichen Theil getheilt sey. Nun

aber hat in diesem Falle wirklich keine Theilung statt. Daraus folgt, daß $\frac{4}{1} = 4$ oder $4 = \frac{4}{1}$. Also hat jede ganze Zahl 1 zum Nenner. Dieser Grundsatz ist in so weit wichtig, als durch ihn die Bruchregeln auf die ganzen Zahlen anwendbar werden.

117. Es ist noch gut zu bemerken, daß, wenn der Zähler weniger, eben soviel oder mehr werth ist als der Nenner, so ist auch der Bruch weniger, eben soviel oder mehr werth als die Einheit.

In der That, 1. Wenn der Zähler kleiner ist als der Nenner, wie in $\frac{8}{11}$, so enthält der Bruch nicht alle gleiche Theile der Einheit; er ist also kleiner als die Einheit.

2. Wenn Zähler und Nenner gleich sind wie in $\frac{12}{12}$, so enthält der Bruch alle Theile der Einheit, er ist also der Einheit gleich. Hieraus folgt, daß:

$$1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \frac{6}{6} = \frac{7}{7} = \text{rc.}$$

3. Endlich, wenn der Zähler größer ist als der Nenner, wie in $\frac{18}{7}$, so enthält der Bruch mehr gleiche Theiler der Einheit als diese selbst: er ist also größer als die Einheit, und kann in eine Bruchzahl verwandelt werden (6).

118. Anmerkung. Die Gewohnheit das Wörtchen mal in der Multiplication und Division ganzer Zahlen zu brauchen, leitet natürlich auf die Anwendung desselben in Brüchen, daher denn auch Bruchmale wie 5 Sechstel mal 8. In der That, wenn man 8 durch 5 Sechstel multiplicirt, so nimmt man 8 eben so oft als Einheiten in 5 Sechstel enthalten sind (40); man nimmt also 8, 5 Sechstel mal; das Produkt wird folglich 5 Sechstel mal 8, oder 5 Sechstel von 1 mal 8. So daß, 8 durch 5 Sechstel

multipliciren, so viel heißt als 8 5 Sechstel mal, oder 5 Sechstel von 8 nehmen.

Von der Verwandlung der Brüche ohne Veränderung ihres Werths.

119. Um einen Bruch in eine Bruchzahl zu verwandeln, nehmen wir den Bruch $\frac{74}{11}$. Wenn man 74 durch 11 dividirt, so findet man $74 = 66 + 8$; folglich hat man

$$\tfrac{74}{11} = \tfrac{66}{11} + \tfrac{8}{11} = 6 \text{ mal } \tfrac{11}{11} + \tfrac{8}{11} = 6 \text{ mal } 1 + \tfrac{8}{11} = 6\tfrac{8}{11}.$$

Nun aber findet man diesen Werth von 74 Elftel, indem man 74 durch 11 dividirt; und zu dem Quotienten 6, den Rest 8, welcher 11 zum Nenner hat, hinzufügt. Also überhaupt:

„Um einen Bruch in eine Bruchzahl zu verwandeln, „ dividirt man den Zähler durch den Nenner, und setzt „ zu dem Quotienten den Rest der Division über den „ vorigen Nenner".

Durch die Anwendung dieser Regel erhält man:

$$\tfrac{66}{8} = 8\tfrac{2}{8} \text{ und } \tfrac{74812}{87} = 859\tfrac{79}{87}.$$

Hievon kann man sich leicht überzeugen; denn z. B. da jede Einheit 8 Achtel enthält, so enthalten 66 Achtel eben so viele Einheiten, als die Zahl 8 in 66 enthalten ist. Macht man nun die Division, so erhält man als Quotient 8, und 2 Achtel zum Rest. Folglich enthalten 66 Achtel, 8 Einheiten 2 Achtel, wie man bei Anwendung der Regel gefunden.

120. Will man die Bruchzahl $4\frac{7}{9}$ in einen Bruch verwandeln, so sagt man: jede Einheit gilt 9 Neuntel; folglich gelten 4 Einheiten, 4 mal 9 Neuntel oder 36 Neuntel, welche zu den bereits vorhandenen 7 Neuntel genommen, 43 Neuntel machen. So daß $4\frac{7}{9} = \frac{43}{9}$.

Man erhält diesen Werth von $4\frac{7}{9}$, indem man 4 durch 9 multiplicirt, zu dem Produkt den Zähler 7 addirt, und der Summe 43 den Nenner 9 untersetzt. Folglich:

„Um aus einer Bruchzahl einen Bruch zu machen
„ multiplicirt man den Nenner durch die ganze Zahl, ad-
„ dirt den Zähler zu dem Produkt, und setzt den Nenner
„ unter die Summe".

Durch Anwendung dieser Regel erhält man $18\frac{4}{9} = \frac{166}{9}$.

121. Man kann auch eine ganze Zahl zu einem Bruch mit einem gegebenen Nenner machen. Z. B. Wenn man 7 in Sechstel verwandeln will, so sagt man: jede Einheit gilt 6 Sechstel; also gelten 7 Einheiten 7 mal 6 Sechstel oder $\frac{42}{6}$. Eben so erhält man $11 = \frac{55}{5}$.

122. $\frac{5}{6}$ sollen in Dreißigstel verwandelt werden.

Da jede Einheit 30 Dreißigstel gilt, so gilt $\frac{1}{6}$ Einheit den sechsten Theil von 30 Dreißigstel oder 5 Dreißigstel (77). Folglich gelten $\frac{5}{6}$ Einheit 5 mal 5 Dreißigstel oder 25 Dreißigstel: also $\frac{5}{6} = \frac{25}{30}$.

Man findet diesen Werth von $\frac{5}{6}$ indem man die beiden Sätze des Bruchs, 5 und 6, durch die nämliche Zahl 5 multiplicirt, folglich „bleibt der Werth eines Bruches un-
„ verändert, wenn man dessen beide Sätze durch die näm-
„ liche Zahl multiplicirt".

Das nämliche findet man, wenn man die beiden Sätze des Bruches $\frac{7}{9}$ durch 4 multiplicirt, dann erhält man

28

In der That, es ist einleuchtend daß,
$\frac{7}{9} = \frac{7}{9}$ von $1 = 7$ mal $\frac{1}{9}$ von $\frac{36}{36} = 7$ mal $\frac{4}{36} = \frac{28}{36}$ [1]).

123. „Der Werth des Bruches bleibt unverändert „wenn dessen beide Sätze durch die nämliche Zahl divi- „dirt werden.

Z. B., wenn man die beiden Sätze des Bruches $\frac{9}{15}$ durch 3 dividirt, so erhält man den Bruch $\frac{3}{5}$ der eben so viel gilt.

In der That, die Einheit gilt 15 Fünfzehntel, folglich gilt 1 Fünftel Einheit den fünften Theil von 15 Fünfzehntel oder 3 Fünfzehntel (77). Folglich gelten 3 Fünftel Einheit 3 mal 3 Fünfzehntel oder 9 Fünfzehntel.

124. Wenn man die nämliche Zahl 4 zu den beiden Sätzen des Bruches $\frac{4}{11}$ addirt, so erhält man $\frac{8}{15}$ und der Werth ist verändert. In der That, da 11 Elftel 15 Fünfzehntel gelten, so folgt daß

$$\frac{4}{11} + \frac{7}{11} = \frac{8}{15} + \frac{7}{15}.$$

---

1) Man würde ebenfalls diesen Werth erhalten, wenn man 7 Neuntel in 4 mal kleinere Theile theilte. In der That, wenn man jedes Neuntel in 4 gleiche Theile theilt, so wird die Einheit, welche 9 Neuntel macht, 9 mal 4 oder 36 dieser gleichen Theile enthalten; folglich wird dann jeder neue Theil ein Sechs und dreißigstel; allein da das Neuntel in 4 Sechs und dreißigstel getheilt ist, so enthalten die 7 Neuntel nothwendig 7 mal 4 oder 28 Sechs und dreißigstel, folglich $\frac{7}{9} = \frac{28}{36}$.

Dieses Verfahren kann man anschaulich machen, wenn man einen Strich als Einheit betrachtet in 9 gleiche Theile theilt, dann jeden dieser Theile in 4 andere, die folglich jeder 4 mal kleiner werden als die ersten; dann wird man sehen, daß 7 von den ersten Theilen eben so lang sind als 28 von den letzteren.

Nun aber sind $\frac{7}{11}$ größer als $\frac{7}{15}$; sollen aber beide Summen gleich seyn, so ist auch nothwendig $\frac{4}{11}$ kleiner als $\frac{8}{15}$. Man sieht also, daß ein Bruch seinen Werth verändert, wenn dessen beide Sätze um eine gleiche Zahl vergrößert, folglich auch wenn sie um eine ähnliche Zahl verkleinert werden [1].

125. Es ist wohl zu bemerken, daß zwischen der Form und dem Werthe eines Bruches ein großer Unterschied ist; denn die Form kann durch die Multiplication und Division beider Sätze durch gleiche Zahlen ins Unendliche vervielfältigt werden, indessen der Werth desselben immer unverändert bleibt.

126. In der Bruchrechnung ist es immer vortheilhaft die Brüche auf ihren einfachsten Ausdruck zurückzuführen, welches geschieht, wenn man deren beide Sätze durch ihren größten gemeinschaftlichen Theiler dividirt. Z. B. Wenn man den größten gemeinschaftlichen Theiler der beiden Sätze des Bruches $\frac{3760}{9024}$ aufsucht, so findet man 752 (98). Werden nun die beiden Sätze des aufgegebenen Bruches durch 752 dividirt, so erhält man dessen einfachsten Ausdruck $\frac{5}{12}$.

127. Um einen Bruch einfacher zu machen, ist es nicht immer nothwendig den größten gemeinschaftlichen Theiler der beiden Sätze aufzusuchen; sehr oft läßt sich dieses be-

---

1) Wenn man zu den beiden Sätzen eines Bruches eine gleiche Zahl addirt, so wird der Werth desselben größer, kleiner oder bleibt unverändert, nachdem der Bruch weniger, mehr oder eben so viel werth ist als die Einheit. Wenn man beide Sätze durch verschiedene Zahlen multiplicirt, so wird der Werth des Bruches verändert. Es ist leicht zu sehen in welchem Falle derselbe vergrößert oder verringert wird.

werkstelligen durch Hilfe der Bemerkungen welche oben (88, 89, 90 und 91) über die Theilbarkeit der Zahlen gemacht worden.

Z. B., man sieht gleich, daß die beiden Sätze des Bruches $\frac{1050}{1125}$ durch 3 und durch 25 d. h. durch 75 theilbar sind; folglich läßt sich dieser Bruch auf $\frac{14}{15}$ zurückführen.

128. Anmerkung. Man nimmt mit Brüchen dieselben Rechnungen vor als mit ganzen Zahlen; allein man kann nur solche Zahlen, die die nämliche Einheit ausdrücken, unter einander addiren und subtrahiren; folglich muß man bei der Addition und Subtraction der Brüche, diese zuerst auf eine gleiche Brucheinheit zurückzuführen, d. h. sie unter eine gleiche Benennung bringen.

Brüche von ungleichen Nennern unter eine gleiche Benennung zu bringen.

129. Um zwei Brüche unter eine gleiche Benennung zu bringen, darf man nur beide Sätze eines Jeden durch den Nenner des Andern multipliciren.

Z. B., um die beiden Brüche $\frac{7}{9}$ und $\frac{4}{5}$ unter eine Benennung zu bringen, multiplicire man die beiden Sätze 7 und 9 des Ersten durch den Nenner 5 des zweiten; und die beiden Sätze 4 und 5 des Zweiten durch den Nenner 9 des Ersten und man erhält $\frac{35}{45}$ und $\frac{36}{45}$ anstatt $\frac{7}{9}$ und $\frac{4}{5}$.

Erstlich sind diese beiden Brüche unter eine Benennung gebracht; denn der neue Nenner eines Jeden ist das Produkt der beiden Ersten 9 und 5; und 9 multiplicirt durch 5, ist eben soviel, als 5 multiplicirt durch 9.

Ferner ist der Werth dieser Brüche nicht verändert werden, da die beiden Sätze eines Jeden durch den Nenner des Andern, folglich durch die nämliche Zahl multiplizirt worden sind.

130. „Um drei oder mehrere Brüche unter eine Be„nennung zu bringen, muß man die beiden Sätze eines „Jeden durch das Produkt der Nenner aller Andern „multipliciren".

Z. B., um die 3 Brüche $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$ und $\frac{7}{9}$ unter eine Benennung zu bringen, multiplicirt man die beiden Sätze 4 und 5 des Ersten, durch 27, Produkt der Nenner 3 und 9 der zwei übrigen; die beiden Sätze 2 und 3 des Zweiten durch 45, Produkt der Nenner 5 und 9 der zwei Andern; die beiden Sätze 7 und 9 des Dritten durch 15, Produkt der Nenner 5 und 3 der zwei Andern und man erhält:

$$\frac{108}{135}, \frac{90}{135} \text{ und } \frac{105}{135}, \text{ anstatt } \frac{4}{5}, \frac{2}{3} \text{ und } \frac{7}{9}.$$

Nach der vorgeschriebenen Regel wurden die aufgegebenen Brüche unter eine Benennung gebracht; denn der neue Nenner eines Jeden ist das Produkt aller übrigen Nenner 5, 3 und 9; und 5 durch 3 und 9, 3 durch 5 und 9, und 9 durch 5 und 3, sind eins und das nämliche (58).

Uebrigens blieb der Werth der Brüche unverändert, indem die beiden Sätze eines Jeden durch das Produkt der beiden übrigen Nenner, folglich durch die nämliche Zahl multiplicirt werden (122).

131. Durch Anwendung obiger Regel erhält man immer Brüche mit einerlei Nenner. Allein man kann die Rechnung abkürzen und einfachere Brüche erhalten, wenn

einer der Nenner ein Multipl aller übrigen ist, oder wenn die Nenner gemeinschaftliche Faktoren haben, ohne daß einer derselben Multipl aller übrigen ist.

132. „Wenn einer der Nenner der aufgegebenen Brü-„che Multipl aller übrigen ist, so macht man ihn zum „gemeinschaftlichen Nenner, und nimmt die Zähler der „übrigen so oft, als ihr Nenner in dem gemeinschaftli-„chen Nenner enthalten ist.“

Z. B., um folgende Brüche $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{10}$ und $\frac{11}{30}$ unter eine Benennung zu bringen, bemerket man, daß 30 Multipl aller übrigen Nenner ist; man nimmt also 30 zum gemeinschaftlichen Nenner der neuen Brüche. Dann nimmt man den Zähler des ersten Bruches so oft, als dessen Nenner in dem Multipl 30 enthalten ist; nämlich 6 mal, und man erhält $\frac{24}{30}$ anstatt $\frac{4}{5}$. Indem man auch so mit den übrigen verfährt, erhält man:

$$\frac{24}{30},\ \frac{25}{30},\ \frac{21}{30} \text{ und } \frac{11}{30}$$

Durch die Befolgung dieser Regel wurden alle aufgegebenen Brüche unter eine Benennung 30 gebracht.

Uebrigens blieb der Werth der Brüche unverändert; denn indem man in dem Bruche $\frac{4}{5}$ den Multipl 30 statt des Nenners 5 nahm, hat man diesen Nenner durch 6 multiplicirt, oder so oft genommen, als er in 30 enthalten ist. Allein der Zähler 4 wurde ebenfalls durch 6, folglich durch eine gleiche Zahl multiplicirt; der Werth des Bruches blieb also unverändert (122). Das nämliche gilt für die übrigen Brüche.

Ueberhaupt: Indem man einen Nenner, Multipl aller übrigen, als Nenner aller Brüche setzt, nimmt man die vorigen Nenner so oft als sie in dem Multipl enthalten sind. Allein, nach der Regel, werden die

Zähler dieser Brüche eben so oft genommen als ihre Nenner, folglich werden die beiden Sätze jedes Bruches durch die gleiche Zahl multiplicirt, folglich bleibt ihr Werth unverändert.

133. „ Wenn die Nenner eines Bruches gemeinschaft-„ liche Faktoren haben, muß man, durch Vergleichung „ dieser Nenner, ihren kleinsten Multipl aufsuchen, diesen „ als gemeinschaftlichen Nenner nehmen, und den Zähler „ jedes Bruches so oftmal nehmen, als dessen Nenner in „ dem gemeinschaftlichen Nenner enthalten ist. “

Z. B., es sollen folgende Brüche unter eine Benennung gebracht werden: $\frac{7}{15}$, $\frac{11}{21}$, $\frac{17}{36}$, $\frac{23}{56}$ und $\frac{19}{20}$.

Die Nenner dieser Brüche haben gemeinschaftliche Faktoren. Allein man sieht noch nicht, welches der kleinste Multipl dieser Nenner sey.

„ Um ihn zu finden, muß man jeden Nenner in seine „ Prim-Faktoren auflösen, und jeden Faktor so oft zum „ gemeinschaftlichen Nenner schreiben, als er sich in jenem „ Nenner befindet, in welchem er am öftesten enthalten „ ist. “

Nach diesem Verfahren erhält man erstlich:

$$15=3\times5,$$
$$21=3\times7,$$
$$36=3\times3\times2\times2,$$
$$56=7\times2\times2\times2,$$
$$20=5\times2\times2.$$

Dann wird der kleinste gemeinschaftliche Nenner

$$5\times7\times3\times3\times2\times2\times2 \text{ oder } 2520.$$

Jetzt ist das Verfahren auf den vorhergehenden Fall zurückgeführt. Allein man kann die Division des gemeinschaftlichen Nenners noch durch einen der aufgegebenen

Nenner abkürzen, indem man in Gedanken die Faktoren dieses Nenners wegläßt: die übrigen Faktoren geben alsdann den Quotienten. (Siehe die Note, Seite 40). Auf diese Art werden die aufgegebenen Brüche gegenseitig folgende: $\frac{1176}{2520}$, $\frac{1320}{2520}$, $\frac{1190}{2520}$ und $\frac{2394}{2520}$.

134 Das Zurückführen auf gleiche Nenner ist nützlich um mit Leichtigkeit mehrere Brüche untereinander zu vergleichen. Z. B. um zu erfahren, welcher der beiden Brüche $\frac{4}{7}$ und $\frac{11}{19}$ der größere sey, bringt man diese beiden Brüche unter eine Benennung, und man erhält $\frac{76}{133}$ und $\frac{77}{133}$; dann sieht man, daß der Bruch $\frac{11}{19}$ größer ist als $\frac{4}{7}$.

Von der Addition und Subtraction der Brüche.

135. Die Addition und Subtraction der Brüche, sobald diese unter gleiche Nenner gebracht worden, ist von der Rechnung mit ganzen Zahlen nicht verschieden. In der That, durch diese neue Benennung haben die Brüche ihren Werth nicht verändert; ihre Summe oder Differenz ist also gleich jener der neuen Brüche, welche nun ganze Zahlen von einerlei Brucheinheiten sind.

136. Z. B. um die Summe der beiden Brüche $\frac{7}{9}$ und $\frac{5}{6}$ zu erhalten, bringt man selbe erstlich unter die gleiche Benennung 18, und man erhält ohne Veränderung ihres Werthes $\frac{7}{9} + \frac{5}{6} = \frac{14}{18} + \frac{15}{18} = \frac{29}{18}$.

Folglich, „um die Brüche zu addiren, muß man „sie unter eine Benennung bringen, die neuen Zähler „allein addiren, und der gefundenen Summe den gemeinschaftlichen Nenner untersetzen.“

Durch Beobachtung dieser Regel erhält man:

$$\frac{7}{9} + \frac{11}{12} + \frac{7}{8} = \frac{56}{72} + \frac{66}{72} + \frac{63}{72} = \frac{185}{72}.$$

137. „Um Bruchzahlen zu addiren, sucht man die „Summe der Brüche, (136) zieht aus derselben die „ganzen Einheiten, welche sie enthält, addirt diese zu der „Summe der ganzen Zahlen, welche bei den Brüchen „sich befinden.“

Also, um die Bruchzahlen $4\frac{7}{8}$, $9\frac{5}{12}$ und $8\frac{13}{15}$ zu addiren, bringt man erstlich die drei Brüche unter gleiche Benennung 120, und man erhält:

$$\begin{array}{rr} & 4\frac{105}{120} \\ & 9\frac{50}{120} \\ & 8\frac{104}{120} \\ \hline \text{Summe} \ldots & 23\frac{19}{120}. \end{array}$$

Man sucht die Summe der Brüche und erhält $\frac{259}{120}$: man zieht die ganzen Einheiten aus und findet $\frac{259}{120} = 2\frac{19}{120}$; man schreibt den Bruch $\frac{19}{120}$ unter die Reihe der Brüche und behält die 2 Einheiten um sie zu der Summe der ganzen Zahlen 4, 9 und 8 zu addiren. So erhält man als Summe der aufgegebenen Bruchzahlen $23\frac{19}{120}$, welches einleuchtend ist, da $23\frac{19}{120}$ alle Theile dieser Zahlen enthält.

138. Um die Differenz der Brüche $\frac{15}{16}$ und $\frac{5}{12}$ zu finden, bringe man dieselben unter die gleiche Benennung 48, und man erhält ohne Veränderung ihres Werthes $\frac{15}{16} - \frac{5}{12} = \frac{45}{48} - \frac{20}{48} = \frac{25}{48}$.

„Um, nach diesem Beispiele, einen Bruch von einem „andern abzuziehen, muß man beide unter gleiche Be- „nennung bringen, den kleinern neuen Zähler von dem

„ größern abziehen, und dem Reste den gemeinschaftlichen „ Nenner untersetzen“.

Die Anwendung dieser Regel giebt:

$$\frac{5}{7} - \frac{4}{9} = \frac{45}{63} - \frac{28}{63} = \frac{17}{63}.$$

139. „Um Bruchzahlen zu subtrahiren, muß man erst „ die Brüche, dann die ganzen Zahlen von einander abziehen“.

Also, um $4\frac{2}{7}$ von $9\frac{3}{4}$ abzuziehen, bringt man die Brüche $\frac{2}{7}$ und $\frac{3}{4}$ unter gleiche Benennung, und man erhält:

$$\begin{array}{lr} & 9\frac{21}{28} \\ & 4\frac{8}{28} \\ \hline \text{Rest} \ldots\ldots\ldots & 5\frac{13}{28} \end{array}$$

140. Wenn der abzuziehende Bruch größer ist als der andere, so addirt man zu dem Letztern eine, in ähnliche Brucheinheiten aufgelößte Einheit; und um diesen Zusatz auszugleichen, fügt man auch eine Einheit zu der unteren ganzen Zahl.

$$\begin{array}{lr} \text{Z. B. von} & 57\frac{3}{17} \\ \text{sind abzuziehen} & 8\frac{10}{17} \\ \hline \text{Rest} \ldots\ldots & 48\frac{10}{17} \end{array}$$

Da man $\frac{10}{17}$ von $\frac{3}{17}$ nicht abziehen kann, so addirt man zu dem Bruche $\frac{3}{17}$ eine Einheit in $\frac{17}{17}$ aufgelößt, und man erhält $\frac{20}{17}$; $\frac{10}{17}$ von $\frac{20}{17}$ abgezogen, bleiben $\frac{10}{17}$. Allein, da man zu der größeren Zahl eine Einheit hinzugefügt, so muß man auch eine zu der kleineren Zahl setzen, damit ihre Differenz nicht verändert werde (34). 1 und 8 sind 9; diese von 57 bleibt 48. Also macht die Differenz der beiden Bruchzahlen $48\frac{10}{17}$.

Will man $\frac{4}{5}$ von 7 abziehen, so zerlegt man 7 in $6\frac{5}{5}$ und die gesuchte Differenz macht $6\frac{1}{5}$.

Von der Bestimmung eines der gleichen Theile einer gegebenen Zahl.

141. Will man z. B. den 9ten Theil von 45 Achtel suchen, so darf man nur (77) 45 durch 9 dividiren, und den Quotienten Achtel benennen lassen, so daß

$$\frac{1}{9} \text{ von } \frac{45}{8} = \frac{5}{8}$$

Ist aber der Zähler nicht genau theilbar durch die Zahl, welche die Gattung des gesuchten Theiles bezeichnet; würde z. B. der 6te Theil von 17 Elftel gesucht, so müßte man erstlich den Zähler durch 6 theilbar machen, indem man beide Sätze des Bruchs $\frac{17}{11}$ durch 6 multiplicirt: dann erhält man $\frac{17}{11} = \frac{102}{66}$; auf diese Art hat der 6te Theil von $\frac{17}{11}$ gleichen Werth mit dem sechsten Theil von $\frac{120}{66}$. Er macht also $\frac{17}{66}$ (77): woraus folgt daß $\frac{1}{6}$ von $\frac{17}{11} = \frac{17}{66}$.

Man sieht, daß der 9te Theil von $\frac{45}{8}$ gefunden wurde, indem man 45 durch 9 dividirte und dem Quotienten den Nenner 8 untersetzte; daß man den 6ten Theil von $\frac{17}{11}$ erhielt, indem man den Nenner durch 6 multiplicirte und den vorigen Zähler darüber setzte. Also überhaupt:

„Um einen gewissen Theil eines Bruchs zu nehmen,
„muß man dessen Zähler durch die Zahl, welche die Gattung des gesuchten Theiles bezeichnet, dividiren, oder
„wenn diese Division nicht möglich ist, den Nenner des
„Bruchs durch besagte Zahl multipliciren".

Durch Anwendung dieser Regel findet man gleich daß

$$\frac{1}{7} \text{ von } \frac{28}{31} = \frac{4}{31} \text{ und daß } \frac{1}{5} \text{ von } \frac{9}{10} = \frac{9}{50}.$$

In der That, man erhält

1. $\frac{1}{7}$ von $\frac{28}{81} = \frac{1}{7}$ von 7 mal $\frac{4}{81} = 1$ mal $\frac{4}{81} = \frac{4}{81}$;

2. $\frac{1}{5}$ von $\frac{9}{10} = \frac{1}{5}$ von $\frac{45}{50} = \frac{9}{50}$.

142. Um den 11ten Theil der ganzen Zahl 7 zu erhalten, macht man 7 zu Elftel, und man erhält 7=77 Elftel, (121). Daraus sieht man, daß der 11te Theil von 7 der nämliche ist, als der 11te Theil von 77 Elftel, folglich gleich $\frac{7}{11}$ (77). Nun aber findet man den 11ten Theil von 7 indem man der Ziffer 7, 11 als Nenner unterschreibt. Also:

„Um einen gewissen Theil einer ganzen Zahl zu nehmen, „ darf man nur dieser ganzen Zahl, jene Zahl als Nen„ ner unterschreiben, welche die Gattung des gesuchten „ Theiles bezeichnet".

So ist $\frac{1}{5}$ von $8 = \frac{8}{5}$. In der That, es ist klar, daß $\frac{1}{5}$ von $8 = \frac{1}{5}$ von 8 mal $1 = \frac{1}{5}$ von 8 mal $\frac{5}{5} = \frac{1}{5}$ von $\frac{40}{5} = \frac{8}{5}$.

143. Aus dem, daß $\frac{1}{5}$ von $8 = \frac{8}{5}$, folgt gegenseitig, daß $\frac{8}{5} = \frac{1}{5}$ von 8. Also **jeder Bruch ist ein durch den Nenner bezeichneter Theil des Zählers.**

Z. B. $\frac{4}{9} = \frac{1}{9}$ von 4. In der That:

$\frac{4}{9} = 1$ mal $\frac{4}{9} = \frac{1}{9}$ von 9 mal $\frac{4}{9} = \frac{1}{9}$ von $\frac{36}{9} = \frac{1}{9}$ von 4 (119).

Multiplication der Brüche.

144. Nach der Definition der Multiplication, (40) muß das Produkt immer so aus dem Multiplicanden bestehen und zusammengesetzt seyn, wie der Multiplicator aus der Einheit. Ist also der Multiplicator $\frac{3}{7}$, oder $\frac{3}{7}$ von der Einheit, so wird das Produkt $\frac{3}{7}$ von dem Multiplicanden. Folglich, wenn man eine Zahl durch $\frac{3}{7}$ multiplicirt, so nimmt man $\frac{3}{7}$ von dieser Zahl. Ueberhaupt, eine Zahl

durch einen Bruch multipliciren, heißt diesen Bruch von der vorhabenden Zahl berechnen. So daß:

$$\tfrac{4}{7} \times \tfrac{8}{9} = \tfrac{8}{9} \text{ von } \tfrac{4}{7} \text{ [1]}.$$

145. Das Produkt und der Multiplicand sind immer von gleicher Gattung. Es ist also klar, daß das Produkt von 5 Siebentel durch 4, 4 mal 5 Siebentel oder $\frac{20}{7}$ macht. Eben so macht das Produkt von 11 Fünfzehntel durch 3, 3 mal 11 Fünfzehntel oder $\frac{33}{15}$, und wird zu $\frac{11}{5}$ durch die Division der beiden Sätze durch 3 (123). Man sieht also, daß

$$\tfrac{5}{7} \times 4 = \tfrac{20}{7} \text{ und } \tfrac{11}{15} \times 3 = \tfrac{11}{5}$$

Man erhält also das Produkt von $\frac{5}{7}$ durch 4, indem man 5 durch 4 multiplicirt, und den Nenner 7 untersetzt; hingegen das Produkt von $\frac{11}{15}$ durch 3, indem man den Nenner 15 durch 3 dividirt und den Zähler 11 überschreibt. Also überhaupt:

„Um einen Bruch durch eine ganze Zahl zu multipli-
„ciren, multiplicirt man den Zähler, oder dividirt, wenn
„es thunlich ist, den Nenner durch diese ganze Zahl".

---

1) Der Zweck der Multiplication überhaupt ist so viel Multiplicanden zu nehmen, als Einheiten in dem Multiplicator sind, um daraus das Produkt zu bilden (40). Also, wenn in dem Multiplcator 3 Einheiten sind, so muß man 3 Multiplicanden nehmen. Wenn 3 Achtel Einheit in dem Multiplicator sind, so muß man 3 Achtel von dem Multiplicanden nehmen, dann enthält das Produkt 3 Achtel des Multiplicanden. Folglich eine Zahl durch 3 Achtel multipliciren, heißt 3 Achtel von dieser Zahl nehmen. Dieses hat man schon geschehen (118), als man von den Bruchmalen Gebrauch machte.

Nach dieser Regel erhält man

$$\frac{8}{7} \times 4 = \frac{32}{7} \text{ und } \frac{7}{40} \times 5 = \frac{7}{8}$$

146. Die ganze Zahl 9 soll durch den Bruch $\frac{4}{7}$ multiplicirt werden.

Da 9 durch $\frac{4}{7}$ multiplicirt wird, wenn man $\frac{4}{7}$ von 9 nimmt (145), so folgt, daß das Produkt $\frac{4}{7}$ von 9 macht. Nun macht 1 Siebentel von 9, $\frac{9}{7}$ (142); folglich machen $\frac{4}{7}$ von 9, 4 mal $\frac{9}{7}$ oder $\frac{36}{7}$, folglich ist $9 \times \frac{4}{7} = \frac{36}{7}$.

Man erhält dieses Produkt von 9 durch $\frac{4}{7}$ indem man 9 durch 4 multiplicirt und 7 unter das Produkt schreibt. Folglich

„Um eine ganze Zahl durch einen Bruch zu multipli-
„ciren, multiplicirt man die ganze Zahl durch den Zähler
„des Bruchs, und schreibt dessen Nenner unter das Produkt“.

Nach dieser Regel erhält man: $12 \times \frac{6}{13} = \frac{72}{13}$

In der That, nach dem Vorhergehenden ist es klar, daß $12 \times \frac{6}{13} = \frac{6}{13}$ von $12 = 6$ mal $\frac{1}{13}$ von $12 = 6$ mal $\frac{12}{13} = \frac{72}{13}$ wie man bei der Anwendung der Regel gefunden.

147. Suchen wir jetzt das Produkt eines Bruches $\frac{3}{7}$ durch einen Bruch $\frac{5}{8}$.

Da man $\frac{3}{7}$ durch $\frac{5}{8}$ multiplicirt, wenn man $\frac{5}{8}$ von $\frac{3}{7}$ nimmt (145), so folgt, daß das Produkt $\frac{5}{8}$ von $\frac{3}{7}$ macht. Nun ist das 8tel von $\frac{3}{7}$, $\frac{3}{56}$ (141), folglich machen $\frac{5}{8}$ von $\frac{3}{7}$, 5 mal $\frac{3}{56}$ oder $\frac{15}{56}$.

Man erhält das Produkt von $\frac{3}{7}$ durch $\frac{5}{8}$ indem man das Produkt der Zähler 3 und 5 nimmt, und das Produkt der Nenner 7 und 8 unterschreibt. Folglich:

„Um einen Bruch durch einen Andern zu multipliciren,

„ multiplicirt man Zähler durch Zähler, und Renner durch
„ Renner“.

Nach dieser Regel erhält man: $\frac{4}{9} \times \frac{8}{11} = \frac{32}{99}$.

In der That, nach №. 145 und 141 ist es klar, daß $\frac{4}{9} \times \frac{8}{11} = \frac{8}{11}$ von $\frac{4}{9} = 8$ mal $\frac{1}{11}$ von $\frac{4}{9} = 8$ mal $\frac{4}{99} = \frac{32}{99}$ Wie man bei Anwendung der Regel gefunden.

148. „Um eine Bruchzahl durch eine andere zu multi-
„ pliciren, macht man aus jeder einen einzigen Bruch
„ und multiplicirt diese beiden Brüche durcheinander.“

Nach dieser Regel erhält man:

$$4\tfrac{5}{8} \times 3\tfrac{2}{5} = \tfrac{37}{8} \times \tfrac{17}{5} = \tfrac{629}{40} = 15\tfrac{29}{40}.$$

In der That, indem man jede Bruchzahl zu einem Bruche macht, wird ihr Werth nicht verändert (120); also ist das Produkt der beiden daraus entstandenen Brüche gleich jenen der beiden Bruchzahlen.

Man könnte auch die Ganzen und den Bruch des Multiplicanden, durch die Ganzen, und dann durch den Bruch des Multiplicators multipliciren; allein das Verfahren würde zu lange aufhalten.

149. Wenn der Multiplikator kleiner ist als die Einheit, so ist das Produkt kleiner als der Multiplicand.

Denn das Produkt enthält nicht einmal den Multiplicanden, folglich ist es kleiner.

Also multipliciren heißt nicht immer größer machen. Es ist übrigens leicht einzusehen, daß das Produkt mehr, weniger oder eben so viel gelten muß als der Multiplicand, je nachdem der Multiplicator mehr, weniger oder eben soviel gilt als die Einheit.

150. **Der Werth des Produkts zweier Faktoren bleibt unverändert, in welcher Ordnung man immer multiplicire.**

Dieser Grundsatz ist schon für die ganzen Zahlen (45) bewiesen worden. Für die Brüche ist es nach Nº. 146 und 147 einleuchtend, daß

$$\tfrac{5}{4}\times 9=\frac{5\times 9}{4}=\frac{9\times 5}{4}=9\times\tfrac{5}{4}$$

und daß $\tfrac{2}{3}\times\tfrac{8}{11}=\frac{2\times 8}{3\times 11}=\frac{8\times 2}{11\times 3}=\tfrac{8}{11}\times\tfrac{2}{3}$.

Brüche von Brüchen.

151. So heißt eine Reihe von Brüchen, wovon jeder einen oder mehre gleiche Theile des darauf folgenden Ausdruckes bezeichnet.

Es sey z. B. der Ausdruck: die $\tfrac{5}{8}$ von den $\tfrac{9}{10}$ von den $\tfrac{4}{7}$ von den $\tfrac{2}{3}$ von 2800 Franken. Dadurch wird bezeichnet, daß die Summe 2800 Franken in 3 gleiche Theile getheilt wird, und 2 solche Theile genommen werden; daraus entsteht eine neue Summe, welche als ein Ganzes betrachtet, in 7 gleiche Theile getheilt wird, und es werden 4 solche Theile genommen. Diese bilden eine neue Summe, welche man in 10 gleiche Theile theilt, und man nimmt deren 9. Endlich wird die daraus entstehende Summe in 8 gleiche Theile getheilt, und 5 von diesen letzten Theilen bilden die oben angeschriebenen Brüche von Brüchen.

I. Um einen Bruch einer ganzen Zahl zu berechnen, multiplicirt man diese Zahl durch den Zähler und gibt dem Produkte den Nenner des Bruches.

$$\text{Z. B. Die } \tfrac{5}{8} \text{ von } 3 = \frac{3 \times 5}{8}$$

$$\text{denn (§. 142) } \tfrac{1}{8} \text{ von } 3 = \tfrac{3}{8};$$

$$\tfrac{5}{8} \text{ von } 3 = 5 \text{ mal } \tfrac{3}{8} = \frac{3 \times 5}{8} = \tfrac{15}{8}.$$

II. Um einen Bruch eines Bruches zu berechnen, multiplicirt man Zähler durch Zähler und Nenner durch Nenner.

$$\text{Z. B. } \tfrac{5}{7} \text{ von } \tfrac{8}{9} = \frac{8 \times 5}{9 \times 7}$$

$$\text{Denn (§. 141) } \tfrac{1}{7} \text{ von } \tfrac{8}{9} = \frac{8}{9 \times 7};$$

$$\tfrac{5}{7} \text{ von } \tfrac{8}{9} = 5 \text{ mal } \frac{8}{9 \times 7} = \frac{8 \times 5}{9 \times 7} = \tfrac{40}{63}.$$

III. Brüche von Brüchen werden berechnet, indem man alle Zähler untereinander multiplicirt und alle Nenner.

Z. B. die $\tfrac{5}{8}$ von den $\tfrac{9}{10}$ von den $\tfrac{4}{7}$ von den $\tfrac{2}{3}$ von $2800 = \frac{2800 \times 2 \times 4 \times 9 \times 5}{3 \times 7 \times 10 \times 8}$. Denn die $\tfrac{2}{3}$ von 2800 $= \frac{2800 \times 2}{3}$; die $\tfrac{4}{7}$ dieser Summe machen $\frac{2800 \times 2 \times 4}{3 \times 7}$; die $\tfrac{9}{10}$ dieser neuen Summe gelten $\frac{2800 \times 2 \times 4 \times 9}{3 \times 7 \times 10}$; die $\tfrac{5}{8}$ dieses Ausdruckes machen $\frac{2800 \times 2 \times 4 \times 9 \times 5}{3 \times 7 \times 10 \times 8}$.

Vereinfacht man diesen Bruch, indem man beide Sätze durch dieselben Faktoren dividirt, so findet man 600 als Werth desselben.

Wir wollen das Entstehen und die Anwendung der Brüche von Brüchen durch einige Aufgaben erklären.

1) Jemand bezahlt die $\frac{4}{7}$ einer Schuld, dann die $\frac{5}{9}$ des Restes, endlich die $\frac{3}{10}$ des neuen Restes, und schuldet noch 84 Franken. Wieviel war er Anfangs schuldig?

Die gesuchte Schuld besteht aus $\frac{7}{7}$; werden $\frac{4}{7}$ davon bezahlt, so bleiben noch $\frac{3}{7}$ zu bezahlen. Dieser Rest besteht aus $\frac{9}{9}$; werden deren $\frac{5}{9}$ bezahlt, so bleiben noch $\frac{4}{9}$ zu bezahlen. Der zweite Rest ist also die $\frac{4}{9}$ von den $\frac{3}{7}$ der ersten Schuld. Dieser zweite Rest besteht aus $\frac{10}{10}$, und wenn $\frac{3}{10}$ bezahlt werden, so bleiben noch $\frac{7}{10}$. Der letzte Rest ist demnach die $\frac{7}{10}$ von den $\frac{4}{9}$ von den $\frac{3}{7} = \frac{2}{15}$ der gesuchten Summe. Diese $\frac{2}{15} = 84$; $\frac{1}{15} = 42$; $\frac{15}{15} = 42 \times 15 = 630$.

2) Ein Kartenspieler besitzt vor dem Spiele 126 Franken, und setzt jedesmal all sein Geld in's Spiel. Bei dem ersten Spiele gewinnt er die $\frac{3}{7}$ seines Einsatzes; bei dem zweiten die $\frac{3}{5}$; bei dem dritten verliert er die $\frac{2}{9}$ seines Einsatzes, bei dem vierten gewinnt er wieder die $\frac{2}{7}$ davon. Wieviel besitzt er nach dem vierten Spiele?

Nach dem ersten Spiele besitzt er die $\frac{10}{7}$ von 126 Fr. diese setzt er in's zweite Spiel.

Nach dem zweiten Spiele besitzt er die $\frac{8}{5}$ von den $\frac{10}{7}$ von 126 Fr.; und setzt diese Summen ein.

Nach dem dritten hat er die $\frac{7}{9}$ von den $\frac{8}{5}$ von den $\frac{10}{7}$ von 126 Fr.

Nach dem vierten die $\frac{9}{7}$ von den $\frac{7}{9}$ von den $\frac{8}{5}$ von den $\frac{10}{7}$ von 126 = 288 Fr.

3) Ein Kaufmann unternimmt acht Spekulationen nach einander. Bei jeder setzt er seine ganze Habe ein. Bei den vier ersten gewinnt er jedesmal die Hälfte des Einsatzes; bei den vier letzten verliert er jedesmal ein Neuntel des

Einsatzes. Nach dem letzten Unternehmen, hat er 51200 Fr. Wieviel betrug der erste Einsatz?

Nach dem letzten Unternehmen besitzt dieser Kaufmann die $\frac{8}{9}$ von $\frac{8}{9}$ von $\frac{8}{9}$ von $\frac{8}{9}$ von $\frac{3}{2}$ von $\frac{3}{2}$ von $\frac{3}{2}$ von $\frac{3}{2} = \frac{256}{81}$ des ersten Einsatzes. Diese $\frac{256}{81} = 51200$; $\frac{1}{81} = 51200 : 256 = 200$; $\frac{81}{81} = 200 \times 81 = 16200$.

Zur Uebung.

1) Ein Kind besitzt Aprikosen; es gibt seinen Eltern $\frac{1}{4}$ davon, jeder seiner 2 Schwestern $\frac{1}{9}$ des Restes, theilt unter seine Kamaraden die $\frac{2}{7}$ des neuen Restes, und behält noch 15 Aprikosen. Wieviel hatte dieses Kind? (Ant. 36).

2) Jemand besitzt 64 Fr. Er verzehrt die $\frac{7}{10}$ davon, verliert $\frac{1}{6}$ des Restes und gibt einem Armen die $\frac{3}{8}$ des neuen Restes; wieviel bleibt ihm noch übrig? (Ant. 10).

3) Die Bevölkerung eines Staates ist jetzt 6000000 Seelen; sie vermehrt sich jedes Jahr um die $\frac{3}{100}$ der Seelenzahl, wie selbe am Anfange dieses Jahres war. Wie stark wird dieselbe nach Verlauf von 3 Jahren sein? (A. 6556362).

4. Eine Provinz zählt jetzt 482417 Einwohner; seit den drei letzten Jahren ist diese Bevölkerung jedes Jahr um $\frac{1}{40}$ der Seelenzahl, wie sie am Anfange dieses Jahres war, angewachsen. Wie stark war diese Bevölkerung von den 3 letzten Jahren? (Ant. 448000).

5) Ein untreuer Diener nimmt $\frac{1}{8}$ aus einem Fasse welches 200 Liter Wein enthielt, und ersetzt das Gestohlene durch Wasser. Dasselbe wiederholt er noch zweimal. Wieviel Wein ist noch in der letzten Mischung enthalten? (Ant. 133 $\frac{63}{64}$).

5) Wieviel Äpfel muß ein Vater kaufen, wenn er dem

ersten seiner Kinder $\frac{1}{5}$ der gekauften Äpfel geben will, dem zweiten $\frac{1}{3}$ des Restes, dem dritten $\frac{1}{4}$ des neuen Restes, und noch 6 Äpfel für das vierte Kind haben will? (Ant. 15).

7) Ein Reisender macht den ersten Tag einen Weg von 50000 Meter, und jeden der folgenden Tage $\frac{1}{5}$ weniger als am vorigen. Wieviel Weges macht er am 6ten Tage. (Ant. 16384).

8) Ein Faß verliert jede Stunde $\frac{1}{5}$ des am Anfange dieser Stunde darin enthaltenen Wassers. Am Ende der 4ten Stunde sind noch 96 Liter darin. Wieviel enthielt es am Anfange? (Ant. 234 $\frac{3}{8}$).

9) Eine Elle Baumwollenzeug ist $\frac{2}{3}$ Elle Leinwand werth; eine Elle Leinwand gilt $\frac{4}{5}$ Elle Basin; eine Elle Basin gilt $\frac{5}{8}$ Elle Tuch; eine Elle Tuch gilt $9\frac{1}{3}$ Franken; ein Franken ist $\frac{4}{15}$ Pr. Thaler. Wieviel Thaler gelten 240 Ellen Baumwollenzeug? (Ant. 199 $\frac{1}{9}$).

10) Eine Elle von einem ersten Tuche gilt $\frac{3}{4}$ E. von einem zweiten; eine Elle dieses zweiten gilt $\frac{7}{8}$ E. von einem dritten; eine Elle dieses dritten gilt $\frac{4}{9}$ E. von einem vierten; eine Elle dieses vierten kostet 21 $\frac{3}{5}$ Franken. Was kosten 80 Ellen des ersten Tuches? (Ant. 504 Fr.)

Von der Division der Brüche.

152. Die Division der Brüche hat den nämlichen Zweck (61), wie jene ganzer Zahlen.

153. Der Quotient zweier ganzen Zahlen ist ein Bruch, welcher den Dividenden als Zähler und den Divisor als Nenner hat.

Z. B., $8 : 11 = \frac{8}{11}$. In der That, da der Dividend 8 das Produkt des Divisors 11 durch den Quotienten ist, so ist er zugleich das Produkt des Quotienten durch 11 (153). Also der Quotient 11mal genommen gibt 8; der Quotient ist also für sich der 11te Theil von 8 oder $\frac{8}{11}$ (142) [1]).

154. Wir wollen jetzt sehen wie man einen Bruch durch eine ganze Zahl z. B. durch 7 dividiren könne. Da in diesem Falle der Dividend das Produkt des Divisors 7 durch den Quotienten ist (151), so ist er ebenfalls das Produkt des Quotienten durch den Divisor 7. Also der Quotient 7mal genommen giebt den Dividenden; der Quotient ist also für sich ein 7tel des Dividenden (142). Man erhält also:

$$\tfrac{3}{5} : 7 = \tfrac{1}{7} \text{ von } \tfrac{3}{5} = \tfrac{3}{35} \text{ (141) und } \tfrac{21}{8} : 7 = \tfrac{1}{7} \text{ von } \tfrac{21}{8} = \tfrac{3}{8}.$$

„Um also einen Bruch durch eine ganze Zahl zu di-„vidiren, multiplicirt man den Nenner, oder dividirt, „wenn es thunlich, den Zähler durch diese ganze Zahl."

Nach dieser Regel findet man daß

$$\tfrac{8}{9} : 5 = \tfrac{8}{45} \text{ und } \tfrac{32}{13} : 8 = \tfrac{4}{13}.$$

Dieses läßt sich leicht darthun, wenn man auf jedes Beispiel den erst gegebenen Beweis anwendet.

155. Wenn der Divisor ein Bruch ist z. B. $\frac{8}{9}$. Da in diesem Falle der Dividend das Produkt des Divisors $\frac{8}{9}$ durch den Qotienten ist, so ist er auch das Produkt des

---

1) Daraus, daß 8 : 11 = 8 Eilftel, folgt gegenseitig, daß 8 Eilftel = 8 : 11; folglich ist jeder unbenannte Bruch der Ausdruck des Quotienten des Zählers dividirt durch den Nenner.

Quotienten durch den Divisor $\frac{8}{9}$ (151), und gilt folglich $\frac{8}{9}$ des Quotienten (144); die $\frac{8}{9}$ des Quotienten geben also den Dividend; das 9tel des Quotienten gilt also $\frac{1}{8}$ des Dividenden und der ganze Quotient gilt 9mal $\frac{1}{8}$ oder $\frac{9}{8}$ des Dividenden (144). So daß

$$7 : \tfrac{8}{9} = 7 \times \tfrac{9}{8} \text{ und } \tfrac{4}{5} : \tfrac{8}{9} = \tfrac{4}{5} \times \tfrac{9}{8}.$$

„Um also eine beliebige Zahl durch einen Bruch zu di-
„ vidiren, multiplicirt man den Dividenden durch den
„ umgekehrten Bruchtheiler".

Nach dieser Regel erhält man

$$2 : \tfrac{3}{7} = 2 \times \tfrac{7}{3} = \tfrac{14}{3} \text{ und } \tfrac{14}{5} : \tfrac{3}{4} = \tfrac{14}{5} \times \tfrac{4}{3} = \tfrac{56}{15}.$$

Hierauf läßt sich der gegebene Beweis geradezu anwenden.

156. „Um eine Bruchzahl durch eine andere zu dividi-
„ ren, macht man aus jeder einen Bruch, und dividirt
„ diese beiden Brüche durcheinander".

Z. B. um $5\frac{7}{8}$ durch $4\frac{2}{3}$ zu dividiren, macht man $5\frac{7}{8}$ zu $\frac{47}{8}$ (120), und $4\frac{2}{3}$ zu $\frac{14}{3}$; dann erhält man

$$5\tfrac{7}{8} : 4\tfrac{2}{3} = \tfrac{47}{8} : \tfrac{14}{3} = \tfrac{47}{8} \times \tfrac{3}{14} = \tfrac{141}{112}.$$

157. **Wenn der Divisor kleiner ist, als die Einheit, so ist der Quotient größer, als der Dividend.**

Denn, wenn der Divisor 1 ist, so ist der Quotient dem Dividenden gleich; folglich, wenn der Divisor kleiner ist als 1, so wird der Quotient größer als der Dividend, weil der Quotient um so größer wird, je kleiner der Divisor ist.

Dividiren also, heißt nicht **immer verkleinern:** es ist übrigens leicht einzusehen, daß der Quotient weniger, mehr oder eben soviel gelten muß als der Dividend, je nachdem der Divisor mehr, weniger oder eben soviel gilt, als die Einheit.

Einige Anwendungen der Bruchrechnung.

158. Jemand verzehrt in $\frac{3}{4}$ Tag $7\frac{1}{2}$ Fr.; wieviel wird er in $6\frac{3}{5}$ Tagen verzehren?

Da er in $\frac{3}{4}$ Tag $7\frac{1}{2}$ oder $\frac{15}{2}$ Fr. verzehrt, so wird er in $\frac{1}{4}$ Tag ein Drittel von $\frac{15}{2}$ Fr. oder $\frac{5}{2}$ Fr. verzehren; also in $\frac{4}{4}$ oder 1 Tag, wird er 4 mal $\frac{5}{2}$ Fr. oder 10 Fr. verzehren. Wenn er nun in einem Tage 10 Fr. verzehrt, so wird er in $6\frac{3}{5}$ oder in $\frac{33}{5}$ Tag $\frac{33}{5}$ von 10 Fr. oder 66 Fr. verzehren.

So lassen sich auch folgende Aufgaben lösen:

1°. $\frac{3}{4}$ Ellen Tuch kosten 45 Fr.; wieviel kosten $4\frac{5}{8}$ Ellen?

2° $\frac{5}{6}$ Liter Wein kosten $6\frac{2}{3}$ Fr.: wieviel wird der Rest eines Fasses kosten, welches $245\frac{1}{4}$ Liter enthielt, und aus welchem man $148\frac{3}{4}$ Liter gezogen hat?

159. Wieviel Tage braucht ein Arbeiter um $10\frac{5}{6}$ Ellen Arbeit zu machen? Man weiß, daß er in $\frac{2}{5}$ Tag $2\frac{6}{7}$ Ellen macht.

Da er in $\frac{2}{5}$ Tag $2\frac{6}{7}$ oder $\frac{20}{7}$ Ellen macht, so wird er in $\frac{1}{5}$ Tag die Hälfte von $\frac{20}{7}$ oder $\frac{10}{7}$ Ellen machen, also in 1 Tag macht er 5 mal $\frac{10}{7}$ oder $\frac{50}{7}$ Ellen. Nun ist die ganze Arbeit $10\frac{5}{6}$ Ellen das Produkt der Arbeit eines

Tages durch die gesuchte Zahl der Tage. Dividirt man also dieses Produkt $10\frac{5}{6}$ durch die Arbeit eines Tages $\frac{50}{7}$ so ist der Quotient $1\frac{31}{60}$ die begehrte Zahl von Tagen.

Man sieht, daß zur Erleichterung des Verfahrens, die Bruchzahlen immer zu Brüchen gemacht werden müssen; außer bei der Addition und Subtraction.

Hier noch 2 Aufgaben zur Uebung:

1⁰ Wieviel Liter Wein würde man für $5\frac{5}{11}$ Fr. erhalten, wenn $3\frac{2}{3}$ Liter $8\frac{4}{5}$ Fr. kosteten?

2⁰. Der Behälter eines Springbrunnens erhält $\frac{4}{5}$ Maß Wasser in $\frac{2}{3}$ Minuten, und verliert $\frac{5}{9}$ Maß in $\frac{4}{5}$ Minuten. Nach wieviel Minuten wird der zuerst leere Behälter $20\frac{4}{15}$ Maß enthalten?

160. Zwölf Arbeiter verdienen $756^{\ddagger}$ in $\frac{7}{8}$ Tag, wieviel verdienen 15 Arbeiter in $\frac{2}{3}$ Tag?

12 Arbeiter, in $\frac{7}{8}$ Tag verdienen	$756^{\ddagger}$
1 Arbeiter, in $\frac{7}{8}$ Tag verdient $\frac{1}{12}$ von $756^{\ddagger}$ oder	$63^{\ddagger}$
1 Arbeiter, in $\frac{1}{8}$ Tag verdient $\frac{1}{7}$ von $63^{\ddagger}$ oder .	$9^{\ddagger}$
1 Arbeiter, in einem Tag verdient 8 mal 9 oder .	$72^{\ddagger}$
1 Arbeiter in $\frac{2}{3}$ Tag verdient $\frac{2}{3}$ von $72^{\ddagger}$ oder .	$48^{\ddagger}$
15 Arbeiter in $\frac{2}{3}$ Tag, verdienen 15 mal $48^{\ddagger}$ oder	$720^{\ddagger}$

Auf diese Art lassen sich folgende drei Aufgaben lösen:

1⁰. 30 Ellen Leinwand $\frac{3}{4}$ Ellen breit kosten 180 Fr. wieviel kosten 36 Ellen Leinwand von der nämlichen Feinheit und $\frac{11}{12}$ Ellen breit?

2⁰. 12 Arbeiter haben $\frac{15}{16}$ Ellen Arbeit gemacht in Zeit von $\frac{3}{4}$ Tag, wieviel Ellen von der nämlichen Arbeit werden 18 gleich starke Arbeiter in $\frac{8}{5}$ Tag machen?

3⁰. $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{5}$ von dem Gelde einer Person betragen $720^{\ddagger}$ wieviel betragen $\frac{7}{9}$ von dem nämlichen Gelde?

161. „Um ein gewisses Zimmer zu tapeziren braucht

„ man 45 Ellen $\frac{3}{4}$ breites Papier; wie viel Ellen $\frac{2}{3}$ brei„ tes würde man zu dem nämlichen Zimmer brauchen?"

Da man zu $\frac{3}{4}$ Breite 45 Ellen Länge braucht, so braucht man zu $\frac{1}{4}$ oder 3 mal weniger Breite, 3mal mehr Länge oder 135 Ellen; zu 1 Elle oder 4 mal mehr Breite, braucht man 4 mal weniger Länge oder $\frac{135}{4}$; zu $\frac{1}{3}$ oder 3 mal weniger Breite braucht man 3 mal mehr oder $\frac{405}{4}$ Länge; zu $\frac{2}{3}$ oder 2 mal mehr Breite braucht man 2 mal weniger oder $\frac{405}{8}$ Länge; also braucht man $\frac{405}{8}$ Ellen = $50\frac{5}{8}$ Ellen zu $\frac{2}{3}$ breit um das Zimmer zu topeziren.

Noch zwei ähnliche Aufgaben:

1° Wieviel Ellen $\frac{5}{6}$ breites Zeug braucht man um in 420 Ellen $\frac{7}{8}$ breites Zeug zu füttern?

2°. 30 Ellen Tuch welches 1 Elle breit ist und 1 Grad Feinheit hat kosten 750#, wieviel werden 40 Ellen eines andern Tuches kosten, welches $\frac{7}{8}$ breit ist, und nur $\frac{4}{5}$ Grad Feinheit hat?

162. „Die Hälfte der Ausgaben einer Person, welche „ 50 Gulden hatte, beträgt $\frac{3}{4}$ von dem was ihr noch „ bleibt. Wieviel hat sie ausgegeben?"

Um das Aufsuchen zu erleichtern, bezeichnen wir die gesuchte Ausgabe mit 1. Die Hälfte derselben ist also $\frac{1}{2}$. Die $\frac{3}{4}$ von dem was noch bleibt betragen $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$ beträgt also $\frac{1}{3}$ von $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{6}$; $\frac{4}{4}$ oder der ganze Rest beträgt also 4 mal $\frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Es ist klar, daß das ganze Geld der Person in der Auslage 1 und in dem Rest $\frac{2}{3}$ oder zusammen $\frac{5}{3}$ bestand. Da nun diese Person 50 Gulden hatte, so folgt, daß $\frac{5}{3}$ der Ausgabe, 50 Gulden betragen; $\frac{1}{3}$ beträgt also $\frac{1}{5}$ von 50 Gulden oder 10 Gulden; folglich beträgt die Ausgabe 3 mal 10 oder 30 Gulden. In der

That die Hälfte 15 dieser Ausgabe beträgt soviel als $\frac{3}{4}$ von dem Reste 50 — 30 d. h. $\frac{3}{4}$ von 20.

163. So oft man nur Multiple oder Brüche der unbekannten Zahl zu vergleichen hat, so wird die Lösung der Aufgabe sehr dadurch erleichert, daß man die unbekannte Zahl mit 1 bezeichnet. Durch dieses Verfahren wird man auch leicht folgende Aufgaben lösen.

1⁰. Man theile 30 in zwei Theile von welchen der eine $\frac{1}{5}$ des Andern macht.

2⁰. Was noch vom Tage übrig ist beträgt $\frac{1}{5}$ der abgelaufenen Stunden. Wie viel Uhr ist es nun?

3⁰ Man suche eine Zahl, von welcher, wenn man $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{12}$ weggenommen hat, noch 27 übrig bleibt.

4⁰. Jemand sagte: wenn ich $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{4}$ von zweimal so viel Geld hätte als ich habe, so hätte ich 5 Franken mehr. Wieviel hatte er?

5³ Jemand verspielt $\frac{3}{4}$ von seinem Gelde, gewinnt hernach $\frac{3}{5}$ von dem was ihm noch blieb, und hat zusammen 36 Fr. Wieviel hatte er vorhin?

6⁰. Ein Greis sagte: wenn ihr das Drittel, und 4 Fünftel und das doppelte meines Alters zusammen nehmet, so erhaltet ihr eine Summe, welche noch zehn mehr beträgt als mein Alter 3 mal genommen. Wie alt war dieser Greis?

164. „Ein Oheim hinterläßt seinen 5 Neffen eine Summe von 66,800 Fr., diese sollen sie so unter einander theilen, daß, wenn einer um ein gewisses Mal älter ist als der andere, er so viel Mal weniger erhalten solle als jener. Ihr Alter ist: 36, 30, 24, 16 und 15 Jahr. Wie viel wird jeder bekommen?“

Der Theil des ältesten mag 1 seyn. Nach der Aufgabe würde derjenige der nur 1 Jahr, d. i., 36 mal weniger alt wäre als der Aelteste, 36 mal mehr oder 36 erhalten: folglich wird derjenige, welcher 30 Jahr alt, d. i. 30 Jahre mehr hat, 30 mal weniger oder $\frac{36}{30} = \frac{6}{5}$ erhalten. Ebenso derjenige welcher 24 Jahre hat bekömmt $\frac{36}{24} = \frac{3}{2}$; der von 16 Jahren $\frac{36}{16} = \frac{9}{4}$; und der von 15 Jahren $\frac{36}{15} = \frac{12}{5}$. Die Theile der 5 Neffen sind also gegenseitig:

$$1, \frac{6}{5}, \frac{3}{2}, \frac{9}{4} \text{ und } \frac{12}{5} \text{ oder } \frac{20}{20}, \frac{24}{20}, \frac{30}{20}, \frac{45}{20} \text{ und } \frac{48}{20}.$$

Die Summe dieser 5 Theile macht also $\frac{167}{20}$, d. h. $\frac{167}{20}$ von dem Theile 1 des Aeltesten. Allein die Summe dieser 5 Theile macht auch 66800#: folglich machen die $\frac{167}{20}$ von dem Theile des Aeltesten 66800#. $\frac{1}{20}$ ist also der 167ste Theil von 66800# oder 400#: folglich

beträgt der Theil des Aeltesten 20 mal 400# oder 8000#;
der Theil des 2ten beträgt 24 mal 400# oder . 9600#;
der Theil des 3ten beträgt 30 mal 400# oder . 12000#;
der Theil des 4ten beträgt 45 mal 400# oder . 18000#;
der Theil des 5ten beträgt 48 mal 400# oder . 19200#.

In der That macht die Summe der 5 Theile 66,800#, nach der Forderung der Aufgabe.

Auf die nämliche Art kann man folgende Aufgabe lösen: Drei Arbeiter haben 548 Ellen Arbeit zu machen, unter der Bedingung, daß, wenn ein Arbeiter, nach Verlauf einer bestimmten Zeit 2, 3, 4 mal mehr gemacht hat als der Andere, derselbe hernach nur 2, 3, 4 mal weniger zu machen habe als der Andere. Zur bestimmten Zeit hat der Erste 48 Ellen, der Zweite 40 und der Dritte 36 Ellen gemacht; wieviel bleibt jedem noch zu machen?

165. Zur Uebung mögen folgende Aufgaben dienen:

I. Wenn man $\frac{3}{8}$ einer Zahl von $\frac{19}{20}$ derselben abzieht, so bleibt 69. Wieviel beträgt die ganze Zahl?

Antwort 120.

II. Jemand kauft $4\frac{5}{7}$ Ellen Tuch, und verkauft sie wieder um 121^{++} mit einem Gewinn von $3\frac{1}{2}^{++}$ auf $\frac{3}{4}$ Ellen. Wieviel hatte zuerst eine Elle gekostet?

Antwort 21^{++}.

III. Ein Mann bezahlt $\frac{2}{9}$ von seiner Schuld, dann $\frac{1}{4}$ von dem was noch zu zahlen übrig war, endlich $\frac{2}{7}$ von dem letzten Rest und bleibt noch 40^{++} schuldig. Wie groß war seine erste Schuld?

Antwort 96^{++}.

IV. Jemand hat von seinem Gelde $\frac{4}{7}$ verzehrt, $\frac{5}{6}$ von dem noch übrigen wieder gewonnen, er gibt 40 Gulden aus und behält noch 81 Gulden. Wieviel hatte er zuerst?

Antwort: 154 Gulden.

V. Wenn man $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$ einer Zahl zu 16 addirt erhält man 142. Welches ist diese Zahl?

Antwort: 144.

VI. Ein Sterbender läßt seinem Sohne $\frac{2}{5}$; seiner Tochter $\frac{4}{15}$ seines Vermögens, und die übrig bleibenden 9000 Gulden seiner Wittwe. Wieviel beträgt das ganze Vermögen des Sterbenden?

Antwort: 27000 Gulden.

VII. Eine Compagnie Soldaten welche sich ausgezeichnet, hat eine Summe Geld zur Belohnung erhalten. Hievon nahm der Hauptmann $\frac{2}{3}$, die beiden Lieutenante zusammen $\frac{4}{5}$ von dem Übriggebliebenen; der zweite Rest ward zu gleichen Theilen unter die 120 Soldaten vertheilt, und jeder erhielt 100 Gulden. Wie viel betrug die ganze Summe?

Antwort: 180000 Gulden.

VIII. Während wieviel Tagen könnte man eine Garnison von 190 Officieren und 3500 Soldaten mit 882000 Pfund Mehl ernähren? Man weiß, daß 1 Officier täglich $1\frac{3}{4}$ Pfund und jeder Soldat $1\frac{3}{8}$ Pfund Brod erhält, und daß 1 Pfund Mehl $\frac{7}{8}$ Pfund Brod giebt.

Antwort: 200 Tage.

IX. 350 sollen in vier Theile getheilt werden, so daß der erste Theil $\frac{2}{3}$ des Zweiten, der Zweite $\frac{3}{4}$ des Dritten, und dieser $\frac{4}{5}$ des Vierten enthalte. Wieviel beträgt jeder Theil?

Antwort: der 4te Theil beträgt 125 ꝛc.

Von Decimaltheilen.

166. Decimaltheile sind jene Theile der Einheit welche von zehn zu zehnmal kleiner werden.

Dergleichen sind die Zehntel, die Hundertel, die Tausendstel, die Zehntausendstel ꝛc.

In der That, da ein Bruch seinen Werth nicht verändert, wenn dessen beide Sätze durch 10 dividirt werden (123) so erhält man:

$$\frac{10}{10} = 1,\ \frac{10}{100} = \frac{1}{10},\ \frac{10}{1000} = \frac{1}{100},\ \frac{10}{10000} = \frac{1}{1000},\ \frac{10}{100000} = \frac{1}{10000} \text{ ꝛc.}$$

So braucht man 10 Zehntel um eine Einheit zu bilden, und jedes Zehntel ist 10 mal kleiner als die Einheit; man braucht 10 Hundertel um ein Zehntel zu bilden, jedes Hundertel ist also 10 mal kleiner als das Zehntel: man braucht 10 Tausendstel um ein Hundertel zu bilden; das Tausendstel ist also 10 mal kleiner als das Hundertel: u. s. f.; folglich sind die Zehntel, Hundertel, Tausendstel ꝛc. Theile der Einheit die von 10 zu 10 mal kleiner werden; sie sind also Decimaltheile [1]).

167. Vermittelst dieser Eigenschaft der Decimaltheile, von 10 zu 10 mal kleiner zu werden, kann man sie schreiben wie ganze Zahlen: hiezu darf man nur die für ganze Zahlen bereits getroffene Uebereinkunft dahin ausdehnen, daß, auch unter der Einheit, jede Ziffer welche zur Rechten einer Andern steht, 10 mal kleinere Einheiten ausdrücke als jene Andere (17).

In der That, nach dieser Uebereinkunft bezeichnet die Ziffer welche zur Rechten der einfachen Einheit, zehnmal kleinere Einheiten oder Zehntel; die Ziffer zur Rechten der Zehntel bezeichnet zehnmal kleinere Einheiten oder Hundertel; die folgende Tausendstel u. s. f.

Um aber nicht Einheiten mit Zehnteln zu verwechseln, ist man übereingekommen hinter die Ziffer der einfachen Einheiten einen Beistrich zu setzen, welcher Einheit bedeutet. Nach diesem erhält man:

$$45{,}7483 = 45 + \tfrac{7}{10} + \tfrac{4}{100} + \tfrac{8}{1000} + \tfrac{3}{10000} = 45\tfrac{7483}{10000}.$$

168. Eine Zahl, welche Decimaltheile enthält, heißt Decimalzahl, auch Decimalbruch, wie 42,377; der ganze Theil ist zur Linken, der Decimaltheil zur Rechten des Beistrichs. Letzterer enthält Decimalziffern oder geradeweg Decimalen.

---

1) Oder Zehntheile von decem zehn.

Man findet die Ordnung einer Decimalziffer, wenn man von dem Beistrich nach der Rechten ausgehend die Worte Zehntel, Hundertel, Tausendstel, Zehntausendstel &c. ausspricht.

169. Um eine Decimalzahl, wie z. B. folgende 48,3407 kürzer auszudrücken, könnte man die Zehntel zu Hundertel machen, und die Hundertel der aufgegebenen Zahl dazu addiren, dann die ganze Summe zu Tausendstel machen, und die Tausendstel der Zahl dazu addiren u. s. f.; allein folgendes Verfahren ist einfacher: in der That, nach der angenommenen Art die Decimalen zu schreiben (167) und nach der Addition der Brüche erhält man unfehlbar:

$$48{,}3407 = 48 + \tfrac{3}{10} + \tfrac{4}{100} + \tfrac{7}{10000} = 48 + \tfrac{3000}{10000}$$
$$+ \tfrac{400}{10000} + \tfrac{7}{10000} = 48\tfrac{3407}{10000} = \tfrac{483407}{10000}.$$

Hieraus sieht man, daß man die Decimalzahl 48,3407 auf zweierlei Art aussprechen könne:

1°. Indem man sagt: 48 Einheiten 3407 Zehntausendstel:

2°. Indem man sagt: 483407 Zehntausendstel. Also überhaupt:

„Um eine Decimalzahl auszusprechen, nennt man zuerst
„den ganzen Theil, dann den Decimaltheil, als wäre
„er eine ganze Zahl, und fügt am Ende die kleinste
„Bruchbenennung hinzu welche die Decimalen enthalten;
„oder man spricht beide Theile als eine einzige ganze
„Zahl aus, mit Hinzufügung der kleinsten Bruchbenen-
„nung.“

Z. B., 47,346 wird ausgesprochen: 47 Einheiten 346 Tausendstel: oder 47346 Tausendstel.

170. Letztere Art die Decimalzahlen auszusprechen hat ihre Vortheile, indem durch dieselbe ein Decimalbruch in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt wird, auf welchen die gewöhnliche, bereits bekannte Bruchrechnung anwendbar wird. Hiernach erhält man z. B., $5{,}478 = \frac{5478}{1000}$.

„Um also einen Decimalbruch zu einem gemeinen Bruch „zu machen, darf man nur den Beistrich weglassen, und „der entstandenen ganzen Zahl als Nenner die Einheit „untersetzen, zu welcher man so viele Nullen schreibt als „Decimalziffern in der aufgegebenen Zahl waren.“

171. „Um eine Decimalzahl zu schreiben, schreibt man „zuerst den Theil der Ganzen, und hernach den Deci„maltheil, so daß die letzte Ziffer zur Rechten von der „Ordnung der ausgesprochenen Decimalen sey.“

Um also 34 Einheiten 54 Hunderttausendstel zu schreiben, schreibt man erst die 34 Einheiten, hernach, da die Hunderttausendstel die 5te Stelle nach dem Beistrich einnehmen, und in 54 Hunderttausendstel nur zwei Stellen eingenommen werden, füllt man die drei übrigen Stellen durch Nullen aus, und man erhält: 34,00054.

172. „Wenn die Decimalzahl als eine Ganze ausge„sprochen wird, muß man sie auch als eine Ganze schrei„ben, nur sorge man, daß der Beistrich so angeschrieben „werde, daß die letzte Ziffer in der ausgesprochenen De„cimalordnung stehe.“

Um also fünf hundert vier und sechzig Hundertel zu schreiben, schreibt man 564, hernach, da die Hundertel die zweite Stelle nach dem Beistrich einnehmen, so schreibt man diesen zwischen 5 und 6, und man erhält: 5,64.

Eben so, um 53 Tausendstel zu schreiben, schreibt man

53, hernach, da die Tausendstel die dritte Stelle nach dem Beistrich einnehmen, so setzt man Nullen an die Stelle der Zehntel und der einfachen Einheiten: also hier zwei Nullen, und man erhält: 0,053.

173. Nach dem Vorhergehenden (170) erhält man unläugbar: $4{,}56 = \frac{456}{100} = \frac{45600}{10000} = 4{,}5600$.

„Folglich bleibt der Werth einer Decimalzahl unverän„dert, wenn man zur Rechten derselben einige Nullen „zusetzt oder wegstreicht.“

Also 7,8560 = 7,856. In der That, jede dieser Zahlen enthält 7 Einer, 8 Zehntel, 5 Hundertel und 6 Tausendstel, und nichts weiter, folglich sind beide Zahlen gleich.

174. Wir wollen jetzt sehen, welche Veränderung eine Decimalzahl erleidet, wenn der Beistrich um einige Stellen zur Rechten oder zur Linken gerückt wird. Wird der Beistrich z. B. um zwei Stellen zur Rechten gerückt, so rücken im Gegentheil alle Ziffern um zwei Stellen zur Linken und ihr Werth wird dadurch 100 mal größer. Die aufgegebene Zahl wird also in allen ihren Theilen hundertmal größer, sie wird folglich selbst hundertmal größer (44).

Eben so wird bei dem Vorrücken des Beistrichs, z. B. um drei Stellen zur Linken, der Werth aller Ziffern 1000 mal kleiner; also überhaupt:

„Um eine Decimalzahl 10 mal, 100 mal, 1000 mal „größer oder kleiner zu machen, darf man nur den Bei„strich um 1, 2, 3 Stellen zur Rechten oder zur Linken „rücken.“

Z. B., um die Decimalzahl 741,34 100 mal kleiner zu machen, d. h. um den hunderten Theil davon zu nehmen, rückt man den Beistrich um zwei Stellen zur Linken, und man erhält: 7,4134.

In der That, man sieht leicht, daß:

$\frac{1}{100}$ von 741,34 $= \frac{1}{100}$ von $\frac{74134}{100} = \frac{74134}{10000} = 7{,}4134$.

Von der Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche.

175. Nach der angenommenen Art die Decimalzahlen zu schreiben erhält man:

$$\frac{564}{100} = 5{,}64 \text{ und } \frac{53}{1000} = 0{,}053.$$

„Wenn also der Nenner eines Bruches eine Einheit „mit einer oder mehreren Nullen ist, so macht man diesen Bruch zu einer Decimalzahl indem man blos dessen „Zähler hinschreibt, und zur Rechten desselben durch einen Beistrich so viele Ziffern absondert, als Nullen im „Nenner sind.“

176. Es sollen $\frac{13}{19}$ zu Tausendstel gemacht werden, hiebei bemerke man, daß $\frac{13}{19}$ eben soviel sind, als der 19te Theil von 13 Einheiten (143), oder als der 19te Theil von 13000 Tausendstel. Allein man erhält den 19ten Theil von 13000 Tausendstel, indem man 13000 durch 19 dividirt, und den Quotienten $684\frac{4}{19}$, Tausendstel bezeichnen läßt (76). Also $\frac{13}{19} = 0{,}684\frac{4}{19} = 0{,}684$ bis auf die Differenz von $\frac{4}{19}$ von einem Tausendstel, also wenigstens bis auf ein Tausendstel.

$$\begin{array}{r|l} 13000 & 19 \\ \hline 160 & 684\frac{4}{19} \\ 80 & \\ 4 & \end{array}$$

Wie man sieht, hat man den Werth 0,684 erhalten, indem man hinter den Zähler 13 drei Nullen gesetzt, das entstandene Resultat 13000 durch den Nenner 19 dividirt und drei Ziffern zur Rechten des Quotienten 684 durch einen Beistrich abgeschnitten hat. Hieraus ergiebt sich die Regel:

„Um einen gemeinen Bruch in Decimalen zu verwan-
„deln, schreibt man hinter den Zähler so viele Nullen,
„als man Decimalen erhalten will; dann dividirt man
„das Resultat durch den Nenner, und schneidet zur Rechten
„des Quotienten so viele Decimalziffern ab, als man
„Nullen hinter den Zähler geschrieben hatte".

Will man nach dieser Regel $\frac{5}{7}$ in Hundertel verwandeln, so schreibt man zwei Nullen hinter 5, und dividirt das Resultat 500 durch 7; so erhält man 71 als ganzen Quotienten, zu dessen Rechten man zwei Decimalen durch den Beistrich absondert; also $\frac{5}{7} = 0{,}71$ bis auf ein Hundertel.

In der That, man erhält nach einander:

$$\tfrac{5}{7} = \tfrac{500}{700} = \tfrac{1}{100} \text{ von } \tfrac{500}{7} = \tfrac{1}{100} \text{ von } 71\tfrac{3}{7} = 0{,}71\,\tfrac{3}{7}.$$

Nun aber sind $\frac{3}{7}$ von $\frac{1}{100}$ weniger als ein halbes Hundertel; folglich $\frac{5}{7} = 0{,}71$ bis auf ein halbes Hundertel [1]).

---

1) Wollte man den Bruch 7 Neuntel in einen Andern verwandeln, dessen Differenz höchstens ein Sechs-und-fünfzigstel betrüge, so müßte man den Zähler 7 durch 56 multipliciren, das Produkt 392 durch den Nenner 9 dividiren, und dem Quotienten 43, die Zahl 56 als Nenner untersetzen, so erhielte man 43 Sechs-und-fünfzigstel statt 7 Neuntel, bis auf die Differenz von einem Sechs-und-fünfzigstel.

In der That, man erhält nacheinander:

$$\tfrac{7}{9} = \frac{7 \times 56}{9 \times 56} = \tfrac{1}{56} \text{ von } \tfrac{392}{9} = \tfrac{1}{56} \text{ von } 43\tfrac{5}{9} = \tfrac{43}{56} + \tfrac{1}{56} \text{ von } \tfrac{5}{9}$$

177. Man bemerke, daß die Regel, nach welcher ein gewöhnlicher Bruch in Decimalen verwandelt wird, darin besteht, daß man den Zähler durch den Nenner dividirt, und den 1ten Rest in Zehntel, den 2ten in Hundertel, den 3ten in Tausendstel u. s. f. verwandelt.

Der Nenner eines Bruches sei z. B.

$$1250 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 2$$

so kann man die beiden Sätze durch $2 \times 2 \times 2$ multipliciren, und der Nenner wird $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 10000$; der gegebene Bruch läßt sich also genau in Zehntausendstel, das heißt in eine Decimalzahl verwandeln.

So erhält man:

$$\tfrac{3}{40} = \frac{3}{2 \times 2 \times 2 \times 5} = \frac{3 \times 5 \times 5}{2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5} = \tfrac{75}{1000} = 0{,}075.$$

„ Daraus folgt, daß ein gemeiner Bruch sich genau in „ eine Decimalzahl verwandeln läßt, wenn der Nenner „ keine andern Prim-Faktoren enthält als 2 und 5. “

178. Es geschieht sehr oft, daß die Verwandlung gewöhnlicher Brüche in Decimalen nur unvollkommen bleibt, man mag auch noch so viel Nullen hinter den Zähler setzen. Dieses findet man z. B. bei der Verwandlung des Bruches $\tfrac{17}{37}$

$$\begin{array}{l|l}
17000000 \text{ ꝛc.} & 37 \\ \cline{2-2}
\;220 & 459{,}459 \text{ ꝛc.} \\
\;\;350 & \\
\;\;\;170 & \\
\;\;\;\;220 & \\
\;\;\;\;\;350 & \\
\;\;\;\;\;\;17 \text{ ꝛc.} &
\end{array}$$

Nun beträgt ein Sechs-und-fünfzigstel von 5 Neuntel weniger, als ein Sechs-und-fünfzigstel von 1 oder 1 Sechs-und-fünfzigstel. Also sind $\tfrac{7}{9} = \tfrac{43}{56}$ bis auf $\tfrac{1}{56}$.

In der That, der vierte theilweise Dividend ist dem Ersten, der Fünfte dem Zweiten gleich, und man mag die Division so weit fortführen, als man will, so wird man sehen, daß die theilweisen Quotienten 4, 5, 9, immer in der nämlichen Ordnung zurückkehren. Nun aber bezeichnet die erste Ziffer 4 des Quotienten Zehntel, da sie die Ganzen von dem 37ten Theil der 170 Zehntel enthält; folglich hat man:

$$\tfrac{17}{37} = 0{,}459459459 \text{ ꝛc. ins Unendliche.}$$

179. Ueberhaupt, wenn man in der Division zur Verwandlung eines Bruches in Decimalen einen Rest erhält, der einem der vorhergehenden oder dem aufgegebenen Zähler gleicht, und eine Nulle zu diesem Rest herabsetzt, so erhält man einen der bereits angewendeten theilweisen Dividenden; da nun der Divisor der nämliche ist, so wird das Resultat einen theilweisen Quotienten, und folglich einen Rest geben, die man schon vorhin gefunden hatte, so zwar, daß alle schon erhaltenen Quotienten nacheinander in der nämlichen Ordnung herauskommen.

Dieses findet man auch, wenn man nach der Regel №. 177, $\frac{5}{7}$ in Decimalen verwandeln will: denn man findet: $\frac{5}{7} = 0{,}714285714285714285$ ꝛc. ins Unendliche.

180. Man nennt periodischen Bruch, jeden Decimalbruch, in welchem sich eine oder mehrere Ziffern unaufhörlich in der nämlichen Ordnung wiederholen. Alle sich wiederholende Ziffer bilden die Periode des periodischen Bruchs. Also 0,272727 ꝛc. ins Unendliche, ist ein periodischer Bruch, und 27 ist die Periode. Der periodische Bruch ist einfach, wenn die Periode bei den Zehnteln anfängt; sonst aber gemischt.

181. Wollte man den gemeinen Bruch finden, aus welchem ein gegebener Periodischer enstanden ist, so könnte man auf folgende Art verfahren:

Gesetzt, die Periode fange unmittelbar hinter dem Beistrich an, wie in 0,135135 ꝛc. Wenn man einen Bruch, dessen Zähler 1 und dessen Nenner irgend eine Zahl ist, welche keine andere Ziffer enthält als 9, zu Decimalen machen will, so hat die Periode nur die bedeutende Ziffer 1 und man erhält nacheinander

$\frac{1}{9} = 0{,}1111$ ꝛc. $\frac{1}{99} = 0{,}010101$ ꝛc. $\frac{1}{999} = 0{,}001001001$ ꝛc. $\frac{1}{9999} = 0{,}000100010001$ ꝛc. und so mit den Übrigen.

Nach diesem Werthe, und nach dem Vorhergehenden (43) erhält man 0,1444 ꝛc. = 4 mal 0,1111 ꝛc. = 4 mal $\frac{1}{9} = \frac{4}{9}$; 0,72727272 ꝛc. = 72mal 0,01010101 ꝛc. = 72 mal $\frac{1}{99} = \frac{72}{99}$; 0,135135 ꝛc. = 135 mal 0,001001 ꝛc. = 135 mal $\frac{1}{999} = \frac{135}{999}$ u. s. f.

Hieraus ergibt sich die Regel:

„ Wenn die Periode unmittelbar hinter dem Striche
„ anfängt, so gibt man der Periode einen aus so viel
„ Neunern bestehenden Nenner als die Periode Ziffern
„ hat, und man erhält einen gemeinen Bruch, der mit
„ dem aufgegebenen Periodischen gleichen Werth hat.“

Anderer Beweis. Der Werth des periodischen Bruches 0,135135135 ꝛc. werde durch x bezeichnet, so daß

$$x = 0{,}135135135 \text{ ꝛc.}$$

daraus entsteht $1000x = 135{,}135135$ ꝛc.

oder $1000x = 135 + 0{,}135135$ ꝛc.

Die nach dem Zeichen + stehende Größe ist durch x bezeichnet worden; daher

$$1000x = 135 + x$$

Oder, wenn man von beiden Seiten 1x wegnimmt,

$$999x = 135.$$

Sind $999x = 135$; so ist x der 999te Theil von 135 oder $\frac{135}{999} = \frac{15}{111} = \frac{5}{37}$.

182. Wenn aber die Periode nicht unmittelbar hinter dem Striche anfängt, wie in 0,42363636 ꝛc. so macht man den aufgegebenen Bruch 100 mal größer, und man erhält: 100 mal 0,42363636 ꝛc. $= 42{,}363636$ ꝛc. $= 42 + 0{,}363636 = 42 + \frac{36}{99} = 42\frac{4}{11} = \frac{466}{11}$.

Allein da der aufgegebene periodische Bruch 100 mal genommen $\frac{466}{11}$ macht, so beträgt er allein genommen den hunderten Theil von $\frac{466}{11}$ oder $\frac{466}{1100} = \frac{233}{550}$.

So würde man auch finden daß

$$5{,}74999999 \text{ ꝛc.} = \frac{575}{100} = 5{,}75.$$

183. Wenn ein zu Decimalen, genau oder nicht genau verwandelter Bruch, Ziffern von einer niederen Ordnung hat, als man gerade braucht, so ist man genöthigt diese Ziffern unbeachtet zu lassen. Allein in diesem Falle, um den Irrthum so klein als möglich zu machen, muß man folgende Regel befolgen: „Wenn die Ziffer, welche zu-„nächst auf jene folgt die man braucht, geringer ist als „5, so wird sie mit allen darauf folgenden vernächläßigt; „beträgt sie aber 5, oder mehr als 5, so fügt man 1 zu „der letzt behaltenen Ziffer.“

In der That: 1° Wenn man nur Tausendstel braucht, so ist es klar, daß die Zahl 3,45648 zur folgenden wird 3,456 bis auf ein halbes Tausendstel, denn der vernachläßigte Theil 0,00048 ist geringer als 0,0005 oder ein halbes Tausendstel.

2° Will man nur Hundertel, so beschränkt sich die Zahl 0,4756 auf 0,48 bis auf ein halbes Hundertel. Denn wenn man den vernachläßigten Theil 0,0056 für 0,01 nimmt oder für 0,0100, so nimmt man 0,0100 — 0,0056 zu viel. Der Irrthum beträgt also nicht 0,0050, folglich kein halbes Hundertel.

Von der Addition und Subtraction der Decimalzahlen.

184. Da in Decimal- wie in ganzen Zahlen, 10 Einheiten einer gewissen Ordnung nur eine Einheit der zur Linken nächstfolgenden Ordnung machen (167), so folgt, daß die Addition und Subtraction der Decimalen von jenen ganzer Zahlen nicht verschieden sind. Also:

185. „Um Decimalen zu addiren, schreibt man selbe so „untereinander, daß die Ziffer derselben Ordnung eine „Reihe bilden, und nachdem das Ganze unterstrichen, „addirt man wie bei ganzen Zahlen, und setzt den Strich „zur Rechten der Einheiten.“

Z. B., um den ganzen Werth der fünf folgenden Decimalen zu finden, 4,34; 2,035; 6,795; 19,3 und 84,347; verfährt man auf folgende Art:

	4,34
	2,035
	6,795
	19,3
	84,347
Summe . .	116,817

Man addirt zuerst die Tausendstel indem man sagt: 7 und 5 sind 12, und 5 sind 17. In 17 Tausendstel sind 7 Tausendstel welche man hinschreibt, und 10 Tausendstel oder 1 Hundertel, welches man behält um dasselbe zu den Hunderteln zu addiren. 1 und 4 sind 5, und 9 sind 14, und 8 sind 22, und 4 sind 26. In 26 Hundertel sind 6 Hundertel, die man hinschreibt, und 20 Hundertel oder 2 Zehntel, die man behält um selbe zu den Zehnteln zu addiren. Indem man so fortfährt und den Strich zur Rechten der einfachen Einheiten setzt, erhält man die gesuchte Summe 116,867.

186. Um Decimalen zu subtrahiren, schreibt man die kleinere Zahl unter die größere, so daß die Ziffer der nämlichen Ordnung genau unter einander stehen, verfährt übrigens wie bei ganzen Zahlen und setzt den Strich zur Rechten der einfachen Einheiten des Restes.

Z. B., um 4,7968 von 12,3469 abzuziehen verfährt man auf folgende Art:

	12,3469
	4,7968
Rest	7,5501

Man subtrahirt zuerst die Zehntausendstel indem man sagt: 8 von 9 bleibt 1, welches man hinschreibt. 6 von 6 bleibt 0. 9 von 4 geht nicht, aber 9 von 14 bleibt 5. Um aber das zur größern Zahl genommene Zehntel auszugleichen, muß man auch eins zur kleinern nehmen (34). 1 und 7 sind 8; von 13 bleibt 5. 1 und 4 sind 5, von 12 bleiben 7 Einheiten. Die gesuchte Differenz ist also: 7,5501.

187. Wenn eine der aufgegebenen Zahlen weniger Decimalen hätte als die andere, so kann man die abgehenden durch Nullen ersetzen, welches am Werthe der Zahl nichts ändert (173).

Z. B., wenn man 2,762 von 4,5 abziehen will, so schreibt man

$$\begin{array}{lr} & 4{,}500 \\ & 2{,}762 \\ \hline \text{Rest} \;\ldots\ldots & 1{,}738. \end{array}$$

Von der Multiplication der Decimalen.

188. Man findet immer das Produkt von zwei Decimalzahlen, indem man jede derselben in einen gemeinen Bruch von gleichem Werthe verwandelt (170), z. B. 41,518 soll durch 0,34 multiplicirt werden; so ist es klar daß:

$$41{,}518 \times 0{,}34 = \tfrac{41518}{1000} \times \tfrac{34}{100} = \frac{41518 \times 34}{100000}$$

Also erhält man das Produkt der zwei Decimalzahlen, indem man 41518 durch 34, d. h., die erste Zahl durch die zweite multiplicirt, als ob sie Ganze wären, und das Produkt für Hunderttausendstel nimmt, welches geschieht, wenn man zur Rechten dieses Produkts fünf Decimalziffer, so viel nämlich, als deren in beiden Faktoren waren, durch einen Strich absondert. Folglich:

„Um Decimalzahlen zu multipliciren, multiplicirt man „wie bei ganzen Zahlen, ohne Rücksicht auf den Strich „zu nehmen, und schneidet dann zur Rechten des Pro„dukts durch den Strich so viele Decimalen ab, als sich „deren in beiden Faktoren befanden“.

So mache man folgende drei Multiplicationen:

0,47	4,12	54
87	3,7	0,078
329	2884	432
376	1236	378
40,89	15,244	4,212

Durch die gegebene Regel findet man auch, daß das Produkt von 456 durch $0,07\frac{3}{4}$, d. h., durch $0,00\frac{31}{4}$ (welches man $\frac{31}{4}$ von Hundertel ausspricht) 35,34 ist; und in der That: $\frac{14136}{400} = \frac{3534}{100} = 35,34$. $456 \times 0,07\frac{3}{4} = 456 \times \frac{31}{400}$.

189. Die Decimalzahl 4,162 soll durch 100 multiplicirt werden, so erhält man nach einander

$$4,162 \times 100 = \frac{4162}{1000} \times 100 = \frac{4162}{10} = 416,2.$$

Dieses Produkt hätte man auf der Stelle erhalten, wenn man ohne weiteres den Strich um zwei Stellen zur Rechten vorgerückt hätte. Also überhaupt:

„Um eine Decimalzahl durch die Einheiten, hinter welchen „mehrere Nullen sind, zu multipliciren, darf man nur „den Strich um so viele Stellen zur Rechten fortrücken, „als Nullen hinter der Einheit sich befinden".

190. Suchen wir das Produkt von 4,156 durch 800; man sieht leicht, daß, um die Decimalzahl 4,156, 800 mal, d. h., 8 mal 100 mal zu nehmen, man selbe erst 100 mal nehmen, indem man den Strich um 2 Stellen zur Rechten fortrückt (189); und dann das Resultat 415,6 8 mal nehmen, das ist, durch 8 multipliciren müsse. Also:

„Um eine Decimalzahl durch eine ganze Zahl zu mul-
„ tipliciren, hinter welcher Nullen sind, rückt man zuerst
„ den Strich des Multiplicanden um so viele Stellen zur
„ Rechten, als Nullen hinter dem Multiplicator sind;
„ dann multiplicirt man das Resultat durch die bedeuten-
„ den Ziffern des Multiplicators".

191. Wenn endlich eine Bruchzahl durch eine Decimalzahl zu multipliciren wäre, so müßte man diese zu einem Bruche von gleichem Werthe machen.

Von der Division der Decimalzahlen.

192. Man erhält immer den Quotienten von zwei Decimalen, wenn man beide in einen gemeinen Bruch von gleichem Werthe verwandelt (170). Es fragt sich z. B. wie oft 0,7, in 17,148 enthalten sey?
Verwandelt man beide Decimalzahlen in Brüche, so erhält man

$$17{,}148 : 0{,}7 = \frac{17148}{1000} : \frac{7}{10} = \frac{171480}{7000} = \frac{17148}{700} = \frac{1}{7} \text{ von}$$
17148 Hundertel.

Der gesuchte Quotient ist also eine Zahl von Hunderteln, er enthält also zwei Decimalen, d. h. grade soviel als der Dividend deren mehr hat als der Divisor.

193. „Wenn also der Dividend mehr Decimalen hat
„ als der Divisor, so verfährt man ohne Rücksicht auf
„ den Strich, und sondert zur Rechten des Quotienten
„ so viele Decimalen ab, als deren mehr in dem Dividen-
„ den als in dem Divisor enthalten sind". [1])

[1]) Wenn man hinter den Dividenden Nullen schreibt, so kann man

So verfahre man bei den zwei folgenden Divisionen:

$$\begin{array}{r|l} 5{,}148 & 0{,}5 \\ \cline{2-2} 14 & 10{,}29\tfrac{3}{5} \\ 48 & \\ 3 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 7{,}2000 & 6{,}4 \\ \cline{2-2} 80 & 1{,}125 \\ 160 & \\ 320 & \\ 00 & \end{array}$$

Die erste dieser Divisionen giebt $10{,}29\frac{3}{5}$ als Quotient von 5,148 dividirt durch 0,5. Und es ist wirklich der eigentliche Quotient; denn es ist einleuchtend, daß

$$5{,}148 : 0{,}5 = 5{,}148 : 0{,}500 = 5148 : 500 = \tfrac{5148}{500}$$
$$= \tfrac{1}{100} \text{ von } \tfrac{5148}{5} = \tfrac{1}{100} \text{ von } 1029\tfrac{3}{5} = 10{,}29\tfrac{3}{5}.$$

194. Man bemerkt daß $\frac{3}{5}$ von Hundertel weniger ist als 1 Hundertel, daß also $5{,}148 : 0{,}5 = 10{,}29$ bis auf etwas weniger als ein Hundertel. Ueberhaupt:

„Um sich dem wahren Quotienten zweier ganzer oder „Decimalzahlen bis auf einen bestimmten Decimaltheil „zu nähern, muß man den Dividenden so einrichten, daß „er eben so viele Decimalen mehr als der Divisor hat, „als man deren im Quotienten haben will, und dann „zur Division schreiten.“

Z. B. Um den Quotienten von 3,1 durch 0,07 bis auf ein Hundertel zu erhalten, macht man daß der Dividend zwei Decimalen mehr als der Divisor hat, welches ge-

---

alle mögliche Fälle, der Division mit Decimalzahlen auf jenen zurückführen, in welchem der Dividend mehr Decimalen hat als der Divisor. — Vermittelst der Nullen könnte man auch dem Dividenden und dem Divisor eine gleiche Zahl von Decimalen geben; dann würde die Division auf jene mit zwei ganzen Zahlen zurückgeführt, und der Quotient wäre ein Bruch (154) welchen man in Decimalen verwandeln kann.

schieht indem man drei Nullen hinter den Dividenden schreibt. Dieses giebt 3,1000 zu dividiren durch 0,07. Verfährt man nun nach der Vorschrift (193), so sieht man daß 3,1 : 0,07 = 44,28 bis auf ein Hundertel.

Man sieht eben so daß $4 : 7 = 4{,}000 : 7 = 0{,}571\frac{3}{7}$ $= 0{,}571$ bis auf $\frac{3}{7}$ von einem Tausendstel, d. h. bis auf etwas weniger als ein Tausendstel.

195. Nach dem Vorhergehenden ist es klar, daß:

$$3479 : 100 = \frac{3479}{100} = 34{,}79;$$
$$\text{und } 75{,}34 : 1000 = \frac{7534}{100} : 1000 = \frac{7534}{100000} = 0{,}07534.$$

Also überhaupt nach diesen beiden Beispielen:

„Um eine ganze oder Decimalzahl durch die Einheit „hinter welcher Nullen sind, zu dividiren, muß man den „Strich um so viele Stellen zur Linken fortrücken als „Nullen hinter der Einheit sind.“ Also 74 : 1000 = 0,074.

196. „Um eine ganze oder Decimalzahl durch eine „ganze Zahl, hinter welcher Nullen sind, zu dividiren, „muß man erstlich den Strich um so viele Stellen zur „Linken fortrücken als Nullen hinter dem Divisor sind, „und dann das Resultat durch den bedeutenden Theil „des Divisors dividiren.“

Also um 457,8 durch 700 zu dividiren, rückt man den Strich um zwei Stellen zur Linken des Dividenden und man dividirt das Resultat 4,578 durch 7.

In der That man findet nach einander

$$457{,}8 : 700 = \frac{4578}{10} : 700 = \frac{4578}{7000} = \frac{4578}{1000} : 7 = 4{,}578 : 7.$$

Also, rc.

197. Da es sehr leicht ist durch die Einheit hinter welcher Nullen sind zu multipliciren oder zu dividiren, so macht man oft in der Multiplication oder in der Division,

$$5 = \tfrac{10}{2};\ 25 = \tfrac{100}{4};\ 125 = \tfrac{1000}{8}\ \text{ꝛc.}$$
$$50 = \tfrac{100}{2};\ 75 = 100 - \tfrac{100}{4}\ \text{ꝛc.};$$
$$9 = 10 - 1;\ 99 = 100 - 1;\ 999 = 1000 - 1\ \text{ꝛc.};$$
$$11 = 10 + 1;\ 111 = 100 + 10 + 1,\ 12 = 10 + 2;$$
$$8 = 10 - 2\ \text{ꝛc.}$$

Hieraus ergeben sich für die Multiplication und die Division einige besondere Regeln, die der Schüler leicht selbst auffindet.

Von den neuen Maaßen.

198. Die französische Regierung, um der bisherigen Maaß-Verwirrung ein Ende zu machen, und ein Maaß zu erhalten, welches leicht zu berechnen wäre, und von dessen Richtigkeit man sich zu allen Zeiten und aller Orten überzeugen konnte, ließ von in- und ausländischen Gelehrten die Einheit der Maaße bestimmen. Zur Grundlage aller übrigen wurde das Längenmaaß angenommen.

Um eine unveränderliche Einheit des Längenmaaßes zu erhalten, hat man von dem Meridian der durch Paris geht, einen Bogen, welcher Frankreich durchläuft, von Barcelona bis Dünkirchen, mit der größten Genauigkeit gemessen. Aus diesem beträchtlichen Stücke hat man den Quadranten des Meridians, vom Nordpol bis an den Aequator berechnet, und diese Entfernung 30784440 Pariser Schuh lang gefunden.

Der zehnmillionste Theil oder $\frac{30784440}{10000000} = 3{,}0784440$ Pariser Schuh vom Quadranten des Meridians ist für die Einheit beim Längenmaaße angenommen worden.

Diese Einheit heißt Meter.

Der Are ist die Einheit des Flächenmaaßes: er besteht aus einem Vierecke von welchem jede Seite 10 Meter mißt, also im ganzen 100 Quadrat-Meter enthält.

Der Liter ist die Einheit des Inhalts oder der Gefäße. Er besteht aus einem Würfel oder Kubus welcher den 10ten Theil von einem Meter lang, breit und hoch ist.

Das Gramm ist die Einheit des Gewichtes, Es wiegt den tausendsten Theil eines Liters von destillirtem Wasser, welches im luftleeren Raume bei einem das Eis schmelzenden Wärmegrad gewogen worden.

Der Frank ist die Münz-Einheit. Er besteht aus einem Stück Silber welches 5 Gramm wiegt, wovon $\frac{9}{10}$ reines Silber und $\frac{1}{10}$ Kupfer. Der Frank wird in 10 Decimes, und der Decime in 10 Centimes abgetheilt.

In beiliegender Tabelle sieht man wie die Multiplen und Untermultiplen dieser Einheiten benannt werden.

199. Um das Anschreiben dieser Maaße beim Rechnen abzukürzen, bedient man sich ihrer Anfangsbuchstaben und zwar der größern für die Obermultiplen, z. B. 4 Dekagramm 5 Gramm: 4Dg,5; und der Kleinern für die Untermultiplen z. B. 4 Deciliter 5 Centiliter: 4dl,5.

200. Das neue System der niederländischen Maaße ist das nämliche wie in Frankreich, ausgenommen die Münz-Einheit welche Floren (Gulden) heißt. Der Floren ist eine Silbermünze und wiegt 10 Gramm 766 Milligramm. Er enthält 893 Tausendstel feines Silber und 107 Tausendstel Kupfer. Der Floren hat 100 Cents und gilt 2

Fr. 11 Centimes und $\frac{61}{100}$ Centime oder genauer $\frac{100}{189}$ Frank. Ein Frank ist also genau $= 47\frac{1}{4}$ Cents.

201. „Um die Einheiten einer gewissen Ordnung des „neuen Maaß-Systems zu Einheiten einer andern Ord-„nung zu machen, darf man nur den Strich zur Rechten „jener Ziffer setzen, welche die verlangte Ordnung aus-„drückt.“

Z. B. Um 5Km,4782 zu Dekametern zu machen, bemerke man, daß, da die Ziffer 5, Kilometer ausdrückt, die darauf folgende Ziffer 4, Zehntel von Kilometern oder Hektometer, die Ziffer 7, Hundertel von Kilometern oder Dekameter bedeuten müße. Man setzt also den Strich zur Rechten der Ziffer 7, und man erhält 547Dm,82 für den Werth von 5Km,4782.

In der That, durch dieses Verfahren rückt man den Strich um zwei Stellen zur Rechten, man macht also die aufgegebene Zahl 100 mal größer (174). Allein die Einheiten dieser Zahl bedeuten Dekameter statt Kilometer; sie sind also 100 mal kleiner, die Zahl ist also zugleich 100 mal kleiner, sie hat folglich ihren Werth nicht verändert, folglich sind 5Km,4782 = 547Dm,82.

Einige Anwendungen der Decimalrechnung.

202. Ein Ballen Tuch enthielt 120 Ellen; hievon hat man für 1062F,65 verkauft, wie viel blieb noch übrig? Man weiß, daß 0El,75 von diesem Tuche zu 9F,9375 verkauft wurde.

Da 0El,75 von diesem Tuche zu 9F,9375 verkauft wurde, so war der Werth einer Elle gleich dem Quotienten von 9F,8375 durch 0,75; denn der Preis von 0El,75: ist nothwendig das Produkt des Preises einer Elle durch 0,75; indem man also dieses Produkt durch 0,75 dividirt, so erhält man den Preis einer Elle als Quotienten. Dieser Preis ist also 13F,25 (77). Nun ist es klar, daß man so viele Ellen verkauft hat, als der Preis einer Elle 13F,25 in dem Totalpreise 1062F,65 enthalten ist. Nun ist 1062F,65 : 13F,25 = 80,2; folglich hat man 80El,2 verkauft. Es bleiben also noch 120 — 80,2 oder 39El,8 übrig.

Eben so lößt man folgende Aufgabe: Ein Faß Wein hat 176F,75 gekostet: man hat davon 40Lit,35 verkauft; wie viel bleibt noch übrig? Man weiß daß 8 Liter von diesem Wein 20F,20 kosten.

203. Man hat 12Lit,25 Wein zu 0F,75 den Liter mit 10Lit,5 von einem andern Weine zu 0F,80 gemischt, wie theuer muß man den Liter dieser Mischung verkaufen, um auf dem Ganzen 8F,4 zu gewinnen?

Da der Liter der ersten Gattung 0F,75 kostet, so kosten 12Liter,25, 12 mal und 25 hundertel mal 0F,75, oder das Produkt von 0F,75 durch 12,25: dieses Produkt ist 9F, 1875. Eben so kosten die 10Lit,5 der zweiten Gattung 0F,80 $\times$ 10, 5 = 8 F,4. Der Preis der Mischung besteht aus dem Preise der zwei Quantitäten Wein und dem Gewinne von 8F,4 den man machen will; dieser Preis ist also 25F,9875. Uebrigens enthält die Mischung 12Lit,25 + 10 Lit,5 = 22Lit,75. Diese 22Lit,75 müssen also um 25F,9875 verkauft werden; der Preis eines Liters ist also gleich dem Quotienten von 25F,9875 durch 22,75: dieser Quotient ist 1F.14 bis auf einen halben Centime. Ein Liter der Mischung muß also zu 1 Franken 14 Ct. verkauft werden.

Auf die nämliche Art müßte man folgende Aufgabe lösen: In ein Faß Branntwein von 24Lit,34 zu 3F,45 den Liter, hat man 8Lit,45 Wasser geschüttet; nachdem man 12Lit,83 von dieser Mischung verkauft hat, will man den Werth von den noch Uebrigen wissen. Das Wasser kostet nichts.

204. Ein Landmann hat ein 62M,52 langes und 10M,45 breites Stück Land zwischen den Gütern eines Andern liegen. Dieser gibt ihm ein anderes Stück von gleichem Werthe, welches 8M,25 breit ist; wie lang muß dieses sein?

Wäre das zum Austausche angebotene Stück nur 0,01 breit, also 1045 mal weniger als das andere, so müßte es 1045 mal länger sein; also $62{,}52 \times 1045$. Ist es aber statt eines Centimeters, 8M25 oder 825 Centimeter breit, so kann es 825 mal weniger lang sein; also

$$\frac{62{,}52 \times 1045}{825} = 79{,}192.$$

Folgende Aufgabe ist der vorigen ähnlich: Ein Tischler hat einen 12El,9 langen und 10El,4 breiten Fußboden zu machen. Hiezu hat er 7El,6 lange und 0El,8 breite Dielen. Wie viel muß er deren nehmen?

205. „Durch wie viele Monate muß eine Summe von „452F,29 ausgelegt werden um ein Interesse von 89F,15 „abzuwerfen? Es ist bekannt, daß man von 25 F. in „zwei Monaten 0F,375 erhält."

Da 25 in 2 Monaten 0F,375 geben, so gibt
1 in 2 Monaten ein 25tel oder 0,015,
und 1 in 1 Monate die Hälfte oder 0,0075;
dann geben 425 in 1 Monate 452,29 mal
mehr oder . . . . 3,392175.

Es ist übrigens einleuchtend, daß die Summe durch so viele Monate angelegt werden müße als das Interesse eines Monats, 3,392175 in dem ganzen Interesse 89,15 enthalten ist. Folglich ungefähr $26\frac{3}{10}$ Monat.

So löse man folgende Aufgaben: Ein Kaufmann zieht in 5 Monaten von 100 F. einen Nutzen von 1F,95; wie viel wird er in 19 Monaten von 569F,21 ziehen.

Welche Summe muß man im Handel anlegen um in 19 Monaten einen Nutzen von 4567F,24 zu erhalten? Man weiß daß 100 F. in 4 Monaten 2F,27 abwerfen.

206. „Ein Gendarme verfolgt einen Dieb der 60 Meter voraus hat und 10 mal langsamer geht: nach wie viel Minuten wird er den Dieb einholen? Man weiß daß der Gendarme in 1 Minute 5 Meter zurücklegt." Da der Dieb 10 mal langsamer geht, als der Gendarme, so macht er wieder 6 Meter in der Zeit, in welcher der Gendarme die 60 Meter zurücklegt, welche der Dieb voraus hat: während dieser die 6 Meter macht, macht der Dieb wieder 0M,6; während der Gendarme 0M,6 macht, macht der Dieb wieder 0,M06 und so fort ins Unendliche. Der ganze Weg also, welchen der Gendarme zurücklegt um den Dieb einzuholen beträgt 66M,6666 ꝛc. ins Unendliche und beschränkt sich auf $66\frac{6}{9}$ Meter (183) oder auf $\frac{200}{3}$ Meter. Da nun der Gendarme in einer Minute 5 Meter zurücklegt, so braucht er um $\frac{200}{3}$ Meter zu machen und den Dieb zu erreichen $\frac{40}{3}$ Minuten.

Man hätte auch diese Zeit finden können, wenn man bemerkt hätte, daß, da der Gendarme 12 Minuten braucht um 60 Meter zurückzulegen, er zu einem Wege, der von 10 zu 10 mal kleiner wird, auch von 10 zu 10 mal weniger Zeit gebraucht hätte: folglich wäre die ganze erforderte Zeit $12 + 1{,}2 + 0{,}12 + 0{,}012 +$ 2c. ins Unendliche $= 13{,}3333$ 2c. ins Unendliche $= \frac{40}{3}$.

Diese Aufgabe könnte auf eine kürzere Art gelößt werden, indem man bemerkt, daß während der Gendarme in einer Minute 5 Meter zurücklegt, der Dieb, welcher 10 mal langsamer geht, in der nämlichen Zeit 0M,5 macht; also macht der Gendarme in einer Minute 5M, — 0M,5 oder 4M,5 mehr als der Dieb. Um nun 60 Meter mehr zu machen und ihn zu erreichen, braucht er $60 : 4{,}5$ oder $\frac{40}{3}$ Minuten.

207. Soll man einen Quotienten multipliciren, der nicht genau ist, so kann der Irrthum im Produkt sehr beträchtlich anwachsen; es wäre also vortheilhafter die ganze Behandlung so einzurichten, daß erst am Ende dividirt würde. Dieses erreicht man, wenn man gleich Anfangs jedes besondere, mit den in gewöhnliche Brüche verwandelten Decimalbrüchen vorgenommene Verfahren bezeichnet, so gelangt man immer zu einem Ausdruck, welcher, da er aus einer einzigen Zahl besteht, auch nur eine Division erfordert.

Folgende Aufgabe mag zur Erläuterung dienen: Ein Kaufmann kauft einen Ballen Tuch zu 24F,9 für 2El,75; dieses verkauft er hernach zu 64F,48 für 4El,8 und gewinnt 254F,32 auf dem ganzen Ballen; wie viel Ellen enthielt der Ballen?

Da 2El,75, 24F,9 kosten, so kostet eine Elle den Quotienten von 24F,9 durch 2,75, welches man anzeigt durch $\frac{24{,}9}{2{,}75}$, d. h. 24,9 dividirt durch 2,75.

Ebenso 4El,8 kosten 64F,48 eine Elle kostet also:

$\frac{64,48}{4,8} = \frac{4,03}{0,3}$. Wird nun der Einkaufspreis von dem Verkaufspreis abgezogen, so zeigt der Rest den Gewinn an: für den Gewinn einer Elle erhält man also nacheinander:

$$\frac{4,03}{0,3} - \frac{24,9}{2,75} = \frac{4,03 \times 2,75}{0,3 \times 2,75} - \frac{24,9 \times 0,3}{0,3 \times 2,75} = \frac{11,0825}{0,825}$$
$$- \frac{7,47}{0,825} = \frac{3,6125}{0,825} = \frac{144,5}{33}.$$

So oft nun dieser Gewinn einer Elle in dem ganzen Gewinn 254F,32 enthalten ist, so viele Ellen hatte der Kaufmann gekauft; diese Zahl ist also:

$$254,32 : \frac{144,5}{33} = \frac{254,32 \times 33}{144,5} = \frac{8392,56}{144,5} = 58\text{E}l,08$$

208. Hier folgen noch einige Aufgaben zur Uebung der Schüler:

I. Ein Kaufmann hat für 129 Kilogramm Zinnober 3853F,62 bezahlt. Wie theuer muß er das Dekagramm verkaufen, damit er die Unkosten von 15F,65 decke und nebst dem 279F,42 gewinne. Antwort: 0F,3216.

II. 18 Personen, die eine Hälfte Herren die Andere Damen, machten eine Lustreise und verzehrten 130fl,50. Die Herren zahlten jeder 4fl,50 mehr als eine Dame. Man fragt nun wie viel jeder habe bezahlen müßen?

Antwort: jeder Herr 9fl,50, jede Dame 5 fl.

III. Ein Kaufmann hatte auf einer Quantität Waaren einen Gewinn von 3567fl,65. Hätte er 78fl,15 mehr gewonnen, so hätte sein Gewinn 10 auf 100 betragen, wie viel haben die Waaren gekostet? Antwort: 36458 fl.

IV. Ein Bedienter erhält zum Lohn 123 Fr. und ein Kleid; nach 7 Monaten ist man ihm in allem 107F,17 schuldig. Wie viel kostet das Kleid? Antwort: 60F,72.

V. Ein Kaufmann hatte 4648 Meter 1M,25 breites Tuch zu 18 Fr. den Meter bezahlt. Allein das Tuch, so man ihm schickte, war nur 1M,125 breit; wie viel muß man ihm zurückbezahlen? Antwort: 8366F,4.

VI. Man nimmt an, daß 4,24 Dekaliter Waizen 540,9 Hektogramm Brod geben: durch wie viel Tage könnte man eine Besatzung von 3600 Mann ernähren mit 741,6 Hektoliter Waizen? Man weiß, daß 20 Mann täglich 57,24 Kilogramm Brod erhalten. Antwort: Ungefähr 9,18 Tag.

VII. Es verzehrt Jemand 7 Elftel von seinem Gelde, bezahlt von dem übrigen eine Schuld von 24F,912 und kauft 8M,4 Tuch: wie viel Geld hatte er? Man weiß, daß 2,875 Meter von diesem Tuche 58F,42 kosten.

Antwort: 537F,90.

VIII. Angenommen, daß 0,75 Hektoliter Waizen 57,6 Liter Mehl geben, und daß man von 17,1 Deciliter Mehl 615,6 Dekagramm Brod erhält: wie viel Kilogramm Brod wird man also von 71,5 Dekaliter Waizen erhalten?

Antwort: 1976K,832.

IX. Wie viel wird eine Besatzung von 3600 Mann, in 100 Tagen, der Regierung kosten: man weiß daß 15 Mann alle 5 Tage 108,45 Kilogramm Brod und 1,232 Hektoliter Wein erhalten, und daß das Kilogramm Brod 6 Cents, der Liter Wein 9 Cents kosten?

Antwort: 84456 fl.

Von den alten Maaßen.

209. Die alten Maaße sind so mannigfaltig, daß es unmöglich wäre sie alle aufzuzählen. Wir müßen uns also auf einige beschränken, welche hinreichen um einen Begriff von ihrer Berechnung zu geben. Wir unterscheiden nur:

1°. Das Pfund zur Abschätzung des Gewichts;

2°. Den Livre in Frankreich, den Floren (Gulden) in Deutschland, Holland, Niederland, als Münz-Einheit;

3°. Den Tag als Zeitmaaß;

4° Das Klafter, als Längenmaaß.

Das Gewicht.

Das Pfund hat 16 Unzen; die Unze 8 Quent; das Quent 3 Scrupel; der Scrupel 24 Gran. Der Zentner hat 100 Pfund.

Die Münzen.

Der Livre und der Floren machen beide 20 Sous; der Sou 12 Deniers. Der Louisdor 24 Livre.

Die Zeit.

Der Tag hat 24 Stunden; die Stunde 60 Minuten; die Minute 60 Sekunden 2c. Das Sonnenjahr hat 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten 45 Sekunden. Das Jahr hat 12 Monate; der Monat 30 oder 31 Tage, ausgenommen der Februar, welcher deren 28 oder 29 hat.

Das Längenmaaß.

Das Klafter hat 6 Schuh; der Schuh 12 Zoll; der Zoll 12 Linien; die Linie 12 Punkte. Die Stunde (zu 25 auf den Grad) mißt 2280 Klafter. Die Seestunde (zu 20 auf den Grad) 2850 Klafter. Die Poststunde 2000 Klafter.

Der halbe Durchmesser der Erde am Aequator beträgt 3271226 Klafter. Die Vorflächung an den Polen, welche den 334 Theil des Halbmessers ausmacht, beträgt 9794 Klafter. Der Halbmesser von dem Mittelpunkt der Erde bis zum Pol beträgt also 3261432 Klafter. Die Entfernung vom Pol zum Aequator, an dem pariser Meridian gemessen, beträgt 5130740 Klafter. Der Grad also, als der 90te Theil dieser Entfernung, mißt 57008 Klafter, und die Sekunde etwas weniger als 16 Klafter.

Man kann noch bemerken, daß die Entfernungen zuweilen nach gemeinen Schritten zu 2½ Schuh, oder nach geometrischen Schritten zu 5 Schuh abgeschätzt werden.

Luxemburger Maaß.

1° Das Malter, Getreidemaaß, = 2,046348 Hektoliter. Es enthält 10 Sester, der Sester 24 Pinten, die Pinte 2 Schoppen.

2°. Das Fuder, Flüßigkeitsmaaß, = 9,499526 Hektoliter. Es enthält 6 Ohm, die Ohm 4 Hotten, die Hott 50 Pinten (Weinmaaß), die Pint 2 Schoppen, der Schoppen 4 Quarelet.

3°. Der Reichsthaler = 4F,609053, gilt 8 Schilling, der Schilling 7 Stüber, der Stüber 8 Liard.

Der Floren gilt 20 Stüber; an Decimalwerth = 1 F,646291.

210. Hier folgen einige ziemlich genaue Verhältnisse der alten Maaße zu den Neuen.

1⁰. Längen. 9 Stunden (französische) sind = 4 Myriameter. 9 Seestunden (deto) = 5 Myriameter. 98 Klafter (deto) = 191 Meter. 4 Schuh (deto) = 13 Decimeter. 69 pariser Ellen = 82 Meter. 109 Luxemburger Ellen = 64 Meter.

2⁰ Gefäße. 29 Pariser Pinten = 27 Liter. 41 Setier (deto) = 64 Hektoliter. 1 Luxemburger Fuder = $9\frac{1}{2}$ Hektoliter. 1 Hott (deto) = 40 Liter. 1 Sester (deto) Korn = $20\frac{1}{4}$ Liter. 1 Sester (deto) Hafer = 29 Liter.

3⁰ Gewicht. 143 Pfund (Mark oder schwer Gewicht) = 70 Kilogramm. 34 Quent (deto) = 13 Dekagramm. 2 Luxemburger Pfund = 1 Kilogramm.

4⁰. Münzen. 81 Livre = 80 Fr. 9 Luxemburger Floren sind = 7 Niederländer Floren. 45 Luxemburger Reichsthaler = 98 Niederländer Floren.

Bemerkung. Wem daran gelegen ist, die Verhältniße der alten Maaße zu den Neuen zu kennen, der findet bei Hrn. Lamort, Buchdrucker eigends dazu verfertigte Tabellen, welche ein Handelsmann nicht wohl entbehren kann.

Von zusammengesetzten, benannten Zahlen.

211. Man nennt zusammengesetzte, benannte Zahl, eine Zahl, welche verschiedene Arten von Einheiten enthält, deren jede einen bekannten Theil der unmittelbar Vorhergehenden bezeichnet. Z. B. die Zahl 4 Kl. 3 Sch.

8 Z., denn der Schuh ist der 6te Theil eines Klafters, der Zoll ist der 12te Theil eines Schuhs, der 72te Theil eines Klafters. [1])

Die größten Einheiten einer zusammengesetzten Zahl heißen **Haupteinheiten**, die anderen **Untereinheiten**.

212. Hieraus sieht man schon, daß sich eine zusammengesetzte Zahl in einen Bruch verwandeln laße. Suchen wir jetzt eine Regel, nach welcher man diese Verwandlung am leichtesten ausführen könne; zum Beispiel diene folgende zusammengesetzte Zahl: 3 M. 11 T. 6 St. Um dieselbe zu einem Bruch von gleichem Werthe zu machen, macht man sie zu Stunden, indem man sagt: der Monat hat 30 Tage, also haben 3 Monate 3 mal 30 oder 90 Tage, welche mit den vorhandenen 11 Tagen 101 Tag machen. Nun hat der Tag 24 Stunden; 101 Tag machen also 101 mal 24 oder 2424 Stunden, welche mit den 6 schon vorhandenen 2430 Stunden machen. Also 3 M. 11 T. 6 St. = 2430 Stunden. Jetzt darf man nur noch suchen, der wie vielste Theil eines Monats eine Stunde sey: da nun der Monat 30 Tage hat, so macht er 30 mal 24 oder 720 Stunden. Wenn aber der Monat 720 Stunden hat, so ist 1 Stunde der 720ste Theil

[1]) Um abzukürzen bezeichnet man die Namen der Einheiten durch einen Anfangsbuchstaben, oder durch mehrere wenn der erste nicht deutlich genug bezeichnet. Diese werden zur Rechten der Ziffer etwas nach oben eingeschrieben. Man bezeichnet den Livre durch #, den Sous durch ^{s}, den Denier durch ^{d}, das Pfund durch ℔, die Unze durch U, oder ℥; das Quent durch Q, oder ʒ; das Scrupel durch ℈; die Minute durch einen Strich ($'$), die Sekunde durch zwei Striche ($''$).

eines Monats oder $\frac{1}{720}$ Monat; die 2430 Stunden sind also $\frac{2430}{720}$ Monat. Folglich hat man 3 M. 11 T. 6 St. $= \frac{2430}{720}$ Monat, $= \frac{27}{8}$ Monat. Man sieht daß der Werth dieser zusammengesetzten Zahl gefunden wurde, indem sie zu Stunden gemacht, und dem Resultat 2430, die Stundenzahl eines Monats 720 als Nenner untergesetzt wurde. Also überhaupt:

„Um eine zusammengesetzte benannte Zahl in einen „Bruch zu verwandeln, macht man sie erstlich zu Ein„heiten der kleinsten Gattung; und unter das Resultat „schreibt man als Nenner jene Zahl welche anzeigt wie „viele Einheiten der kleinsten Gattung in einer Haupteinheit enthalten sind.

Bei Anwendung dieser Regel findet man:

4 Kl. 1 Sch. 4 Z. $= \frac{304}{72}$ Klafter $= \frac{38}{9}$ Klafter und
12 L. 10^{+} 17^{s} $6^{d} = \frac{797}{64}$ Louisd'or.

213. Sehen wir jetzt wie man aus einem benannten Bruche z. B. $\frac{17}{32}$ Tag wieder eine zusammengesetzte, benannte Zahl bilden könne. Erstlich ist $\frac{17}{32}$ Tag eben so viel als der 32te Theil von 17 Tagen (143) oder als der Quotient von 17 durch 32 (77). Nun aber ist 32 in 17 nicht enthalten: es bleiben also 17 Tage, welche 17 mal 24 oder 408 Stunden machen: 32 in 408 geht 12 mal; man hat also 12 Stunden als Quotient und es bleiben 24 Stunden als Rest, welche 24 mal 60′ oder 1440′ machen: 32 in 1440 geht gerade 45 mal; man hat also 45′ als letzten theilweisen Quotienten.

Durch dieses Verfahren nimmt man ein 32tel des ersten Theiles von 17 Tagen und erhält 12 Stunden dann ein 32tel des zweiten Theiles 1440′, welches 45′

gibt. Man nimmt also ein 32tel von beiden Theilen der 17 Tage, und erhält ein 32tel von 17 Tagen oder $\frac{17}{32}$ Tag, folglich ist $\frac{17}{32}$ Tag = 12 St. 45′.

Um das eben entwickelte Verfahren zu erleichtern, wird die Rechnung folgendermaaßen eingerichtet:

1ter Dividend und 1ter Rest····	17 Tage	32
	24 St.	12 St. 45′
	68	
	34	
2ter Dividend················	408 St.	
	88	
2ter Rest····················	24 St	
	60	
3ter Dividend················	1440	
	160	
3ter Rest····················	00	

„ Um also (nach diesem Beispiel) einen benannten Bruch
„ in eine zusammengesetzte, benannte Zahl zu verwandeln,
„ dividirt man den Zähler durch den Nenner, und macht
„ jeden Rest zu Einheiten der unmittelbar folgenden klei-
„ nern Ordnung. “

Nach dieser Regel findet man auch:

$$\frac{7}{9} \text{ Louisdor} = 18^{\#}\ 13^{s}\ 4^{d}.$$

Und in der That, da der Louisd'or 24 mal 20 mal 12 oder 5760^{d} macht so folgt daß:

$$\frac{7}{9} \text{ L.} = \frac{7}{9} \text{ von } 5760^{d} = 4480^{d} = 18^{\#}\ 13^{s}\ 4^{d}$$

indem man 4480^{d} zu $^{\#}$ und den Rest zu ^{s} macht.

214. So kann man immer einen Bruch abschätzen, d. h., nach bekannten und üblichen Maaßen, eine, diesem Bruch an Werth gleiche, zusammengesetzte, benannte Zahl auffinden.

Besteht der abzuschätzende Bruch aus Decimalen, so darf man nur den Nenner gelten lassen, welcher durch den Strich angedeutet wird.

Enthält der abzuschätzende Bruch Einheiten des neuen Maaß-Systems, in welchem die untere Einheiten Zehntheile der Haupteinheit sind, so ist weiter nichts zu thun als diesen Bruch in Decimalen zu verwandeln (176).

Auf diese Art findet man, daß $\frac{15}{16}$ Meter, welches so viel ist, als ein 16tel von 15 Meter, oder ein 16tel von 15000 Millimeter, bis auf $\frac{1}{2}$ Millimeter 937 Millimeter machen.

215. Alle diese Abschätzungen bestehen darin, daß man einen Theil einer ganzen benannten Zahl nehme. Wir wollen jetzt sehen, wie man von einer gegebenen zusammengesetzten Zahl, den verlangten Theil aufsuchen müße. Es soll z. B. der 87te Theil von $4783^{tt}\ 3^{s}\ 9^{d}$ gesucht werden; um dieses zu finden verfahre man auf folgende Art:

	$4783^{tt}\ 3^{s}\ 9^{d}$	87
	433	$54^{tt}\ 19^{s}\ 7^{d}$
1ter Rest	85^{tt}	
	20	
	1700^{s}	
	3^{s}	
2ter Dividend	1703^{s}	
	833	
2ter Rest	50^{s}	
	12	
	600^{d}	
	9^{d}	
3ter Dividend	609	
Letzter Rest	00	

Um erstlich ein 87tel von 4783†† zu erhalten, dividirt man 4783 durch 87 und man erhält 54†† als Quotienten; (77) es bleiben 85††, welche 85 mal 20ˢ oder 1700ˢ machen, diese mit den vorhandenen 3ˢ geben 1703ˢ. Diese dividirt durch 87 geben 19ˢ als Quotienten und es bleiben 50ˢ, welche 50 mal 12ᵈ oder 600ᵈ machen. Diese mit den vorhandenen 9ᵈ geben 609ᵈ. Wenn man nun 609ᵈ durch 87 dividirt, so findet man, daß der 87te Theil von 609 grade 7ᵈ macht. Nimmt man nun von jedem der 3 Theile dieser benannten Zahl ein 87tel, so hat man 54†† 19ˢ 7ᵈ als den 87ten Theil der ganzen Zahl.

Also überhaupt: um einen gewissen Theil einer gegebenen zusammengesetzten, benannten Zahl zu nehmen, dividirt man erstlich die Haupteinheiten durch die Zahl, welche die Gattung des gesuchten Theiles bezeichnet; dann macht man den Rest dieser Division zu Einheiten der zweiten Gattung, addirt zu dem Resultate die in der aufgegebenen Zahl bereits vorhandenen Einheiten dieser Gattung, und dividirt die Summe durch den nämlichen Divisor. Man macht eben so den Rest dieser Division zu Einheiten der dritten Gattung u. s. w.

Nach dieser Regel findet man, daß der 96te Theil von 3603 Pf. 1 Unz. 2 Qt. 2 Sc. = 37 Pf. 8 Unz. 4 Qt. 0 Sc. 8 Gr.

216. Ist der Nenner des gesuchten Theiles eine der zehn oder der zwölf ersten ganzen Zahlen, so kann man diesen Theil leicht im Gedächtnisse auffinden, welches die Rechnung sehr abkürzt. Es soll z. B. der 8te Theil von 124 Kl. 5 Sch. 4 Z. gesucht werden.

Hier sage man der 8te Theil von 124 Kl. ist 15 Kl. (77) bleiben 4 Kl. diese machen 4 mal 6 oder 24 Sch., welche mit den vorhandenen 5 Sch. 29 Schuh geben. Der 8te Theil von 29 Sch. ist 3 Sch. für 24 Schuh, bleiben 5 Sch. Diese machen 5 mal 12 oder 60 Zoll, diese mit den vorhandenen 4 Zoll geben 64 Zoll von welchen der 8te Theil 8 Zoll macht. Der 8te Theil von 124 Kl. 5 Sch. 4 Zoll ist also 15 Kl. 3 Sch. 8 Zoll.

Da man jetzt weiß wie man eine zusammengesetzte benannte Zahl in einen Bruch, und umgekehrt, verwandeln könne, so wird es nun leicht die Rechnung mit zusammengesetzten benannten Zahlen auf die Bruchrechnung zurückzuführen (212.) Allein es ist oft viel kürzer mit zusammengesetzten Zahlen zu rechnen, wie wir jetzt durch alle vier Rechnungsarten zeigen werden.

Die Addition und Subtraction zusammengesetzter benannter Zahlen.

217. In der Addition und Subtraction zusammengesetzter benannter Zahlen verfährt man gerade wie mit ganzen Zahlen, nur muß man sorgen daß die Einheiten der unteren Gattung zu Einheiten der unmittelbar höhern gemacht werden, wie in folgendem Beispiele:

	13 Pf.	15 Unz.	6 Qt.	2 Scr.	14 Gr.
	26	14	7	1	23
	34	4	5	0	20
	54	2	7	2	18
	32	15	3	1	19
Summe	162	5	7	0	22

Man fängt an die Grane zu addiren und sagt: 9 und 8 ist 17, und 3 ist 20, und 4 ist 24; man setzt irgend wohin 4 und behält 2. 2 und 1 ist 3, und 1 ist 4, und 2 ist 6, und 2 ist 8, und 1 ist 9. Diese 9 Zehner von Granen mit den bereits erhaltenen 4 Einheiten machen 94 Gran. 94 Gran enthalten 3 Scrupel und 22 Gran. Diese schreibt man hin und nimmt die Scrupel mit. 3 behalten und 1 ist 4, und 2 ist 6, und 1 ist 7, und 2 ist 9. 9 Scrupel machen 3 Quent und 0 Scrupel, welches man anschreibt. 3 Quent behalten und 3 ist 6, und 7 ist 13, und 5 ist 18 und 7 ist 25, und 6 ist 31. 31 Quent machen 3 Unzen welche man behält, und 7 Quent welche man hinschreibt. Indem man so fortfährt findet man die Summe der fünf benannten Zahlen 162 Pf. 5 Unzen 7 Quent und 22 Gran.

Aus dem Gesagten ist die Regel der Addition mit benannten Zahlen leicht abzuleiten.

218. Wir kommen zur Subtraction mit benannten Zahlen in folgendem Beispiel:

	368 Kl.	2 Sch.	11 Z.	5 Li.
	69	3	8	7
Rest. .	298	5	2	10

Nachdem man die kleinere Zahl unter die größere geschrieben, fängt man die Subtraction bei den Linien an, und sagt: 7 von 5 geht nicht; folglich setzt man einen Zoll zur größeren Zahl. Dieser macht 12 Linien: 12 und 5 macht 17 Linien: 7 von 17 bleiben 10 Linien die man hinschreibt. Da man die größere Zahl um einen Zoll vermehrt hat, so muß man, um die Differenz unverändert zu erhalten auch zu der kleineren Zahl einen Zoll zusetzen (34) 1 und 8 ist 9 von 11 bleiben 2 Zoll, die man hinschreibt. 3 von 2 Schuh geht nicht, man setzt zu den 2 Schuhen 1 Klafter oder 6 Schuh: macht 8 Schuh; 3 von 8 bleibt 5 die man hinschreibt. Da man 1 Klafter zu der größeren Zahl genommen, muß man auch eins zu der kleineren nehmen: 1 und 9 ist 10: von 18 bleibt 8. Man behält 1, und 6 ist 7: von 16 bleibt 9. Man behält 1, von 3 bleibt 2. Die Differenz der aufgegebenen benannten Zahlen ist also 298 Kl. 5 Sch. 2 Z. 10 Li. Der Beweis ist der nämliche wie bei ganzen Zahlen, und es läßt sich aus demselben eine Regel zur Subtraction zusammengesetzter Zahlen herleiten.

Man bedient sich dieser Regel um zu einer bestimmten Zeit das Alter einer Person zu finden: denn die Differenz von zwei benannten Zahlen, welche die, vom ersten Jahre der christlichen Zeitrechnung bis zur bestimmten Zeit, und bis zur Geburt dieser Person, verlaufenen Jahre bezeichnen, ist unfehlbar das Alter dieser Person. Also im Jahre 1815, den 4ten August um 10 Uhr 34 Minuten Morgens, war eine im Jahre 1783 den 6ten Februar um 8 Uhr 54 Minuten Abends geborne Person 32 Jahr 5 Monate 27 Tage 13 Stunden 40′ alt. Die Monate werden alle zu 30 Tagen angenommen.

Dekartes geboren den 3ten April 1596, starb den 11ten Februar 1650; Pascal geboren den 19ten Juni 1623, starb den 19ten August 1662, Newton geboren den 15ten Dezember 1642, starb den 18ten März 1727. Wie lange haben diese berühmten Mathematiker gelebt?

Die Multiplication zusammengesetzter benannter Zahlen.

219. In der Multiplication zusammengesetzter benannter Zahlen ist entweder nur der Multiplicand, oder nur der Multiplicator, oder sind beide Faktoren zusammengesetzt. Nur ist zu merken daß der Multiplicator, obwohl er als zusammengesetzte Zahl erscheint, dennoch als unbenannte Zahl zu betrachten sey. In der That, wenn z. B. Jemand alle Jahr 48 Louisdor verzehrt, so wird er in 6 Jahren 8 Monaten und 20 Tagen 6 mal und einige Theile von Malen mehr verzehren, oder das Produkt von 48 Louisdor durch 6 J. 8 Mo. 20 T. welche als unbenannte Bruchzahl betrachtet werden. Der Multiplicator ist also hier keine wirklich zusammengesetzte Zahl.

220. Es soll erstlich die zusammengesetzte Zahl 12 Zentner, 85 Pfund, 14 Unzen, 7 Quent, durch die ganze Zahl 12 multiplicirt werden. Man verfahre dabei folgender Maßen:

12	Z.	85	Pf.	14	Uz.	7	Qt.
						12	
154	Z.	31	Pf.	2	Uz.	4	Qt.

Um den Multiplicand 12 mal zu nehmen, muß man jeden Theil desselben 12 mal nehmen. Nun sind 12 mal 7 Quent, 84 Quent. In 84 Quent sind 10 Unzen und 4 Quent (101 3°.); ich setze 4 Quent und behalte 10 Unzen, um selbe zu dem Produkte der Unzen zu zählen. 12 mal 14 sind 168 Unzen, welche mit den 10 behaltenen 178 Unzen machen. 178 Unzen machen 11 Pfund die man behält, und 2 Unzen die man hinschreibt. 12 mal 85 Pfund sind 1020 Pfund und 11 behaltene sind 1031 Pfund, oder 10 Zentner die man behält und 31 Pfund die man hinschreibt. 12 mal 12 Zentner sind 144 Zentner, welche mit den 10 behaltenen 154 Zentner geben. Man erhält also 154 Z. 31 Pf. 2 Uz. 4 Qt. als gesuchtes Produkt. Und in der That, da man jeden Theil des Multiplicands 12 mal genommen, so hat man den Multiplicand selbst 12 mal genommen (43). Also,

„Um eine zusammengesetzte Zahl durch eine ganze Zahl „zu multipliciren, multiplicirt man mit dieser ganzen Zahl „nacheinander die Einheiten jeder Gattung des Multipli- „canden, indem man bei jenem der kleinsten Gattung „anfängt, aus jedem Produkte die Ganzen der nächst „höhern Einheiten auszieht und selbe zum folgenden „theilweisen Produkte addirt".

Bei Anwendung dieser Regel findet man das Produkt von 35 Kl. 5 Sch. 8 Zl. durch 154 = 5535 Kl. 2 Sch. 8 Zl.

221. Um auch ein Beispiel eines zusammengesetzten Multiplicators zu haben, setzen wir folgende Frage: Ein Arbeiter welcher in einem Jahre 20 Louisdor 22^{+} 10 S. gewinnt, wie viel wird er in 9 Jahren 10 Mo. 28 Tagen 12 St. gewinnen?

Es ist einleuchtend, daß er in 9 Jahren 10 Monaten 28 Tagen 12 Stunden 9 und ein Bruch mal 20 L. 22^{+} 10 S. gewinnen werde, oder das Produkt von 20 L. 22^{+} 10 S. durch die Zahl 9 J. 10 M. 28 T. 12 St. welche als unbenannte Bruchzahl betrachtet wird. Man macht also 9 J. 10 M. 28 T. 12 St. zu einem Bruche und man erhält (212) $\frac{85644}{8640}$ oder $\frac{7137}{720}$.

Um nun 20 L, 22^{tt} 10^{s} durch $\frac{793}{80}$ d. h. durch den 80ten Theil von 793 zu multipliciren, muß man 20 L. 22^{tt} 10^{s} durch 793 multipliciren (220) und von dem Produkt den 80ten Theil nehmen (215). Allein es wäre kürzer auch den Multiplicanden 20 L. 22^{tt} 10^{s} in einen Bruch von gleichem Werthe zu verwandeln (212); dieses gäbe $\frac{10050}{480}$ oder $\frac{335}{16}$ Louisd'or. Wenn man alsdann $\frac{335}{16}$ durch $\frac{793}{80}$ multiplicirt, und den erhaltenen Bruch abschätzt (213) so erhält man 207 Louisd'or 13^{tt} $7\frac{1}{2}^{d}$ als gesuchten Gewinn des Arbeiters.

„Wenn also der Multiplicator zusammengesetzt ist, „kann man denselben in einen Bruch verwandeln, den „Multiplicanden durch den Zähler multipliciren, und das „Produkt durch den Nenner dividiren; oder man macht „beide Faktoren zu Brüchen von gleichem Werthe, mul„tiplicirt sie durch einander und macht die Abschätzung „des als Produkt erhaltenen Bruches."

Nach dieser Regel findet man: 1^{0} wenn ein Klafter Arbeit 72^{tt} 6^{s} 6^{d} kostet, so kosten 27 Kl. 4 Sch. 8 Z., 2009 ^{tt} 0^{s} $6\frac{2}{3}^{d}$. 2^{0} wenn ein Pfund Wasser in 3 Tagen 7 Stunden 10′ 16″ verdünstet, so werden 318 Pfund 13 Unzen 5 Quent 24 Gran Wasser in 105 Tagen 21 Stunden 16′ 32″ 32‴ 30⁗ verdünsten.

Ist der Multiplicator eine ziemlich große ganze Zahl oder auch eine zusammengesetzte Zahl, so kann man die Methode der aliquoten Theile anwenden, wie es durch folgende zwei Beispiele gezeigt wird.

Erstes Beispiel. In einer Haushaltung verzehrt man täglich 3 Thaler 27 Silbergroschen 10 Pfenning; wieviel verzehrt man in einem Jahre (365 Tage).

Um den Multiplikand 365 mal zu nehmen, nehme man jeden seiner Theile 365 mal. Anstatt, wie in §. 220, die kleinsten Einheiten zuerst zu multipliciren, kann man die Multiplication zur Linken anfangen, und verfahren wie folgt:

	3 Thlr.		27 Sgr.		10 Pf.		
	365						
365 mal 3 Thlr...	1095						
365 mal 15 Sg....	182	=	15				
365 mal 10 Sg....	121	—	20				
365 mal 2 Sg....	24	—	10				
365 mal 6 Pf.....	6	—	2	—	6		
365 mal 3 Pf.....	3	—	1	—	3		
365 mal 1 Pf.....	1	—	0	—	5		
	1433	—	19	—	2		

365 mal 3 Thaler sind 1095 Thaler. Um 365 mal 27 Sg. zu nehmen, bemerke man, daß 1 Thaler 30 Sg. gilt, und theile 27 in die aliquoten Theile 15 + 10 + 2. 365 mal 15 Sg. sind 365 halbe Thlr. oder 182 Thlr. 15 Sg. — 365 mal 10 Sg. sind 365 Drittel Thaler oder 121 Thlr. 20 Sg. 365 mal 2 Sg. sind 5 mal weniger als 365 mal 10 Sg., daher 24 Thlr. 10 S.

Die 10 Pfennige theile man in die aliquoten Theile 6 + 3 + 1. 6 Pf. sind der vierte Theil von 2 Sg. daher sind 365 mal 6 Pf. viermal weniger als 365 mal 2 Sg. nämlich 6 Thlr. 2 Sg. 6 Pf. 365 mal 3 Pf. sind die Hälfte von 395 mal 6 Pf. oder 3 Thlr. 1 Sg. 3 Pf. 365 mal 1 Pf. sind der dritte Theil von 365 mal 3 Pf. oder 1 Thlr. 0 Sg. 5 Pf. Addirt man diese einzelnen

Produkte, so entsteht das Produkt 1433 Thlr. 19 Sg. 2 Pf.

Zweites Beispiel. Ein Klafter von einem Balken wiegt 241 Pfund 14 Unzen; wie viel wiegen 3 Klafter 4 Schuh 8 Zoll von diesem Balken?

	241	Pfund	14	Unzen			
	3	Kl.	4	Sch.	8	3.	
Gewicht von 3 Kl...	725	Pfund	10	Unzen			
" " 3 Sch..	120	—	15	—			
" " 1 Sch..	40	—	5	—			
" " 6 3....	20	—	2	—	4	Quent	
" " 2 3....	6	—	11	—	4	—	
	913	—	12	—	0	—	

3 Klafter wiegen 3 mal 241 Pf. 14 Unzen oder 725 Pf. 10 U.

Die 4 Schuh theile man in 3 + 1. Das Gewicht von 3 Schuh beträgt die Hälfte des Gewichtes eines Klafters oder 120 Pf. 15 U. 1 Sch. wiegt dreimal weniger als 3 Sch., oder 40 Pf. 5 U. — 8 Zoll theile man in 6 + 2. Das Gewicht von 6 Zoll ist die Hälfte des Gewichtes von einem Sch., daher 20 Pf. 2 U. 4 Q. 2 Zoll wiegen 3 mal weniger als 6, oder 6 Pf. 11 U. 4 Q. Addirt man die theilweisen Produkte, so erhält man 913 Pf. 12 Unzen.

Bei der Multiplication mit zusammengesetzten Zahlen darf man nicht den Multiplicanden als Multiplicator und den Multiplicator als Multiplicand nehmen. Es sei z. B. folgende Multiplication:

8 Thlr. 17 Sg. 9 Pf.
15 Pfd. 10 U. 5 Q.

Das Produkt enthält die Antwort auf die Frage. Wenn ein Pfund von einer Waare 8 Thlr. 17 Sg. 9 Pf. kostet, was kosten 15 Pfd. 10 U. 5 Q.?

Kehrt man die Ordnung der Multiplikation um, so erscheint selbe wie folgt:

15 Pfd. 10 U. 5 Q.
8 Thlr. 17 Sg. 9 Pf.

Dieses Produkt gibt die Antwort auf die Frage: Für einen Thaler käuft man 15 Pfd. 10 U. 6 Q. von einer Waare; wieviel für 8 Thlr. 17 Sg. 9 Pf.?

Division zusammengesetzter, benannter Zahlen.

222. Alle Fälle, welche bei der Division zusammengesetzter benannter Zahlen vorkommen können, lassen sich auf zwei Fälle zurückführen, die darin bestehen, daß man 1^o aufsuche, wie oft eine zusammengesetzte Zahl in einer andern enthalten sey; 2^o einen oder mehrere der gleichen Theile einer gegebenen zusammengesetzten Zahl bestimme (215).

223. **Jemand verzehrt monatlich** 12 L. 21^{++} 15^{s} **wie lang wird er mit** 40 L. 10^{++} 4 S. **auskommen.**

Es ist klar, daß er so viele Monate an dieser letztern Summe zehren kann, so oft 12 L. 21^{++} 15^{s} in 40 L. 10^{++} 4^{s} enthalten sind. Man findet also die verlangte Zahl

Monaten, wenn man sucht wie oft 40 L. 10$^{\text{tt}}$ 4^{s}, 12 L. 21$^{\text{tt}}$ 15^{s} enthalten. Damit aber eine Zahl eine Andere enthalte, müssen beide nur eine und die nämliche Gattung von Einheiten ausdrücken; man muß also den Divisor und den Dividenden zu ^{s} machen, und man erhält 19404^{s}. für den Dividenden und 6195^{s} für den Divisor.

Der Quotient $\frac{19404}{6195}$ oder $\frac{6468}{2065}$ drückt aus wie oft die erste Zahl die Zweite enthalte. Die Zahl von Monaten welche besagte Person an der ersten Summe zehren kann ist $\frac{6468}{2065}$ Monat = 3 M. 3 T. 11 St. 33′ 51″.

„ Um also zu finden wie oft eine zusammengesetzte Zahl
„ eine Andere, der nämlichen Gattung enthalte, muß man
„ beide auf die kleinste Einheit die in einer von beiden
„ enthalten ist, zurückführen, und beide daraus entste-
„ hende Zahlen durcheinander dividiren. “

Durch dieses Verfahren findet man, daß, wenn das Malter Waizen 8 Louisdor kostet, so bekömmt man für 78 L. 19$^{\text{tt}}$ 15^{s}. 8^{d}., 9 Malter 8 Sester 17 Pinten.

224. In folgender Aufgabe finden wir einen andern Fall der Division zusammengesetzter Zahlen: 3 Pfund 12 Unzen 4 Quent Zucker haben 14$^{\text{tt}}$ 4^{s}. 9^{d} gekostet, wieviel kostete ein Pfund von diesem Zucker?

Wie man leicht sieht ist der ganze Preis 14$^{\text{tt}}$ 4^{s}. 9^{d}. das Produkt des Preises von einem Pfund Zucker durch 3 Pf. 12 Uz. 4 Q. als unbenannte Zahl betrachtet; man findet also diesen Preis von einem Pfunde, wenn man 14$^{\text{tt}}$ 4^{s}. 9^{d}. durch 3 Pf. 12 Uz. 4 Q. als unbenannten Bruch betrachtet, dividirt. Man muß also den Divisor 3 Pf. 12 Uz. 4 Q. in einen Bruch von gleichem Werthe verwandeln, und man erhält $\frac{121}{32}$ Pfund (212). $\frac{121}{32}$ Pfund kosten also 14$^{\text{tt}}$ 4^{s}. 9^{d}.: 121 Pf. welche 32 mal mehr machen, kosten also 32 mal 14^{tt} 4^{s}. 9^{d}., oder das Produkt welches man erhält indem man 14^{tt} 4^{s}. 9^{d}. durch 32 multiplicirt. Dieses Produkt ist 455^{tt} 12^{s}. (220). Allein da 121 Pf. 455^{tt} 12^{s}. kosten, so kostet 1 Pfund den 121 Theil von 455^{tt} 12^{s}. oder 3^{tt} 15^{s}. 3 $\frac{81}{121}$ ^{d}.

„Wenn also der Divisor zusammengesetzt ist, und der „Quotient nicht eine Zahl von Malen ausdrückt, so „verwandelt man den Divisor in einen Bruch, multipli„cirt den Dividenden durch den Renner dieses Bruchs, „und nimmt von dem Produkt einen durch den Zähler „bezeichneten Theil desselben" [1]).

So findet man, daß, wenn man aus 4 Fuder 4 Ohm 3 Hotten 40 Pinten Wein, durch zugegossenes Wasser eine Mischung von 9 Fuder 3 Ohm 2 Hotten 48 Pinten erhalten hat, so hat man von einem Fuder Wein, 1 Fuder 5 Ohm 3 Hotten 43 $\frac{41}{193}$ Pinten Mischung erhalten.

225. Jetzt kann man die Division zusammengesetzter Zahlen in allen möglichen Fällen ausführen: denn alle beschränken sich darauf, daß man im Quotienten eine Zahl von Malen entweder erhalte oder nicht erhalte. Es wird also nicht schwer fallen folgende Aufgaben zu lösen.

1^{0}. Ein Handwerker verdient monatlich 20 L. 22^{tt} 18^{s}, in wie viel Zeit wird er 207 L. 17^{tt} 2$\frac{23}{30}$^{d}. verdient haben?

2^{0} 3 Malter 4 Sester 18 Pinten Hafer kosten 1 Louisdor: wie viel kosten 12 Malter 9 Sester 15 Pinten?

---

1) In der Rechnung mit Brüchen, Decimal- und benannten Zahlen war keine Rede von der Probe, weil selbe leicht aus dem zu ersehen ist, was bei Gelegenheit der ganzen Zahlen darüber gesagt worden, und übrigens ein etwas geübter Rechner nur selten im Falle ist, an der Richtigkeit seines Verfahrens zu zweifeln.

226. Will man sich bei der Rechnung mit zusammengesetzten Zahlen die Auseinandersetzung erleichtern, und Unrichtigkeiten ausweichen die bei der Multiplication mit nicht ganz genauen Quotienten unvermeidlich wären, so muß man erst die zusammengesetzten so wie die Bruchzahlen, zu Brüchen von gleichem Werthe machen.

227. Zum Beispiel 4 Kl. 4 Sch. 6 Z. Arbeit kosten 15‡ 6 S. 8 D.; wie viel kosten $2\frac{4}{5}$ Klafter?

Diese Zahlen macht man nacheinander zu $\frac{19}{4}$ Kl., $\frac{46}{3}$‡ und $\frac{14}{5}$ Klafter, und sagt:

$\frac{19}{4}$ Klafter kosten	$\frac{46}{3}$‡;
$\frac{1}{4}$ Kl. kostet also $\frac{1}{19}$ von $\frac{46}{3}$‡ oder	$\frac{46}{57}$‡;
1 Kl. kostet alsdann 4 mal $\frac{46}{57}$‡ oder . . .	$\frac{184}{57}$‡;
$\frac{1}{5}$ Kl. kostet den 5ten Theil von $\frac{184}{57}$‡ oder .	$\frac{184}{285}$‡;
$\frac{14}{5}$ Kl. kosten 14 mal $\frac{184}{285}$‡ oder	$\frac{2576}{285}$‡.

Wenn man nun diesen Bruch abschätzt, so findet man daß $2\frac{4}{5}$ Kl. Arbeit 9‡ 9d kosten, bis auf $\frac{1}{2}$d.

228. Dieses Beispiel zeigt hinlänglich wie man in jedem Falle verfahren müße. Wir geben also noch folgende Aufgaben zur Uebung.

I. Ein Kaufmann hatte 54 Zentner $\frac{31}{32}$ Tabak: hievon hat er 18 Zentner 62 Pfund 8 Unzen verkauft. Wie viel ist das Uebrige noch werth? Man weiß daß der Zentner von diesem Tabak 4 Louisd'or 21‡, 6s 8d kostet.

Antwort 177 Louisd'or 16‡ 6s 8d.

II. Eine Summe von 310‡ 9s soll unter die Armen einer Gemeinde vertheilt werden. Es sind ihrer 36. Es frägt sich wie viel jeder bekömmt? Man weiß, daß 4 Weiber mehr als Männer sind; daß so viele Kinder sind als Männer und Weiber zusammen, daß ein Mann 50ˢ mehr als ein Weib, und ein Weib 30ˢ mehr als ein Kind bekömmt.

Antwort: Jeder Mann erhält 11⁺⁺ 7ˢ 9ᵈ. jedes Weib 8⁺⁺ 17ˢ 9ᵈ, und jedes Kind 7⁺⁺ 7ˢ 9ᵈ.

III. Ein Handelsmann kauft einige Stücke Tuch zu 202⁺⁺ 8ˢ. für 5 Kl. 3 Sch. Dieses verkauft er wieder zu 428⁺⁺ 12ˢ. für 9 Kl. 1 Sch. 2 Z. 4 Li. 4 Fünftel. Er gewinnt 1522⁺⁺ 10ˢ. auf seinem Handel, wie viel Klafter hatte er gekauft?

Antwort: 175 Klafter.

IV. Ein alter Mann sagte: Von meiner Geburt an bis zum Ende meiner Studien habe ich 3 Achtel meines jetzigen Alters verlebt. Dann kam ich zur Handlung. Als ich diese verließ war ich zweimal älter, als da ich in selbe eintrat. Endlich heirathete ich und lebte mit meiner Frau, die vor 10 Jahren 3 Monaten und 4 Tagen gestorben ist, noch ein Achtel meines Lebens. Wie alt war dieser Greis?

Antwort: 82 Jahre 1 Monat 2 Tage.

V. Eine Dame die genöthigt wurde ihr Alter anzugeben, sagte: die Hälfte, das Viertel, ein Sechstel meines Alters, dazu 4 Jahre und 1 Tag, machen grade das Alter welches ich in 1 Jahre 11 Monaten und 15 Tagen haben werde. Wie alt war diese Dame?

Antwort: 24 Jahre 6 Monate 12 Tage.

VI. 2 Klafter 4 Sch. 6 Z. Leinwand welche 2 Sch. 6 Z. breit ist, kosten 11⁺⁺ 15ˢ. 8ᵈ. 4 Siebentel. Wie viel kosten 5 Klafter 4 Sch. von einer andern Gattung 3 Sch. 6 Z. breiter Leinwand? Man weiß daß die Feinheit dieser Leinwand die 5 Siebentel jener der ersten beträgt.

Antwort: 24⁺⁺ 5ˢ. 8ᵈ. 4 Siebentel.

VII. Eine Obsthändlerin sagte: Heute früh kaufte ich einen Korb Aepfel zu $7^{\#}$ 16^{s}. Ich hatte meinen Ueberschlag gemacht, daß wenn ich 3 zu 2^{s}. verkaufte, ich 52^{s}. darauf gewinnen könnte. Ich verkaufte nun Alle um diesen Preis, und als ich am Abend mein Geld zählte, fand ich, daß ich so viel verloren hatte, als ich zu gewinnen hoffte. Wie viel Aepfel hatte sie, und wie theuer hätte sie selbige verkaufen müssen um die verlangte Summe darauf zu gewinnen?

Antwort: Sie hatte 156 Aepfel, welche sie zu 1^{s}. 4^{d}. das Stück hätte verkaufen müssen um 52^{s}. darauf zu gewinnen.

VIII. Durch wie viel Monate könnte man eine Familie von 8 Personen mit 8 Malter 6 Sester 16 Pinten Korn ernähren? Man weiß, daß 7 Sester 12 Pinten von diesem Korn 3 Zentner 60 Pfund Brod geben, und daß die Familie monatlich $1\frac{7}{9}$ Zentner Brod verzehrt.

Antwort: durch 23 Monate 12 Tage.

IX. Eine Arbeit von 1550 Klaftern ist in 35 Tagen von zwei Abtheilungen Arbeitern verfertigt worden. Die ersten, welche täglich 2 Schuh machten, verdienten $2^{\#}$ 6^{s}. 8^{d}., und empfingen für 12 Tage Arbeit $2800^{\#}$. Die übrige Zeit wurde durch die andere Abtheilung gearbeitet, und sie verdiente täglich $4^{\#}$ 13^{s}. 4^{d}. Man fragt wie viel Arbeiter in jeder Abtheilung gewesen, wie viel Arbeit jede Abtheilung im Ganzen gemacht, und wie viel jeder Arbeiter der zweiten Abtheilung täglich gemacht habe?

Antwort: In der ersten Abtheilung waren 100, in der zweiten 75 Arbeiter. Die erste Abtheilung hatte 400, die zweite 1150 Klafter gemacht, und jeder Arbeiter der letzteren machte täglich 4 Schuh.

Von der Regel de Tri.

229. Wir nennen Regel de Tri jene Rechnungsart, durch welche bei wenigstens drei bekannten Größen, die Vierte vermittelst einer Division und einer Multiplication gefunden wird.

Die Regel de Tri ist einfach, wenn die aufgegebene Frage nur durch drei bekannte Größen gelößt wird: zusammengesetzt aber, wenn mehr als drei bekannte Größen gegeben werden, die dann verbunden und auf drei Größen zurückgeführt werden müssen [1]). Hier folgen einige Beispiele über diese Regel:

230. 3 Personen haben Lebensmittel auf 8 Tage; wie viel Tage würden 4 Personen damit auskommen?

3 Personen haben Lebensmittel für . . . . 8 Tage;
1 Person hätte also für 3 mal 8 oder . . 24 Tage;
4 Personen hätten also für den 4ten Theil von
24 d. h. für . . . . 6 Tage.

231. 6 Taglöhner arbeiten 5 Tage in einem Boden der 4 Theile Kraft erfordert, und machen 120 Klafter Arbeit;

---

1) Die Regel de Tri, wie wir selbe hier geben, läßt sich auf alle Zahlen-Aufgaben anwenden. Allein, obgleich es keine eigentlich allgemeine Regel giebt nach welcher diese Anwendungen gemacht werden müssen, so wird doch das analytische Verfahren, welches wir bisher beobachtet haben, auch hier für alle Fälle ausreichen. Dieses Verfahren besteht in der Anwendung der vier ersten Regeln der Arithmetik um den Werth der Einheit und durch diese den Werth von Mehreren zu finden. Dieses methodische Verfahren ist allen besondern Regeln weit vorzuziehen, weil letztere fast eben so geschwind vergessen als gelernt werden, und jeder durch diese Methode die Regeln selbst auffindet.

wie viel werden 9 Taglöhner von gleicher Stärke in 10 Tagen auf einem Felde machen, welches nur 3 Theile Kraft erfordert?

6 Arb., in 5 T. bei 4 Kraft, machen 120 Klafter, also macht
1 Arb., in 5 T. bei 4 Kraft, den $\frac{1}{6}$ Theil von 120 oder 20 Kl.
1 Arb., in 1 T. bei 4 Kraft, den $\frac{1}{5}$ Theil von 20 oder 4 Kl.
1 Arb., in 1 T. bei 1 Kraft 4 mal 4 Klafter oder . 16 Kl.
9 Arb., in 1 T. bei 1 Kraft 9 mal 16 oder . . . . 144 Kl.
9 Arb., in 10 T. bei 1 Kraft 10 mal 144 oder . . 1440 Kl.
9 Arb., in 10 T. bei 3 Kraft $\frac{1}{3}$ von 1440 oder . . 480 Kl.

Also beträgt die gesuchte Arbeit 480 Klafter[1].

232. 12 Arbeiter machen in 6 Tagen zu 4 Stunden täglich 864 Klafter Arbeit; wie viel Tage brauchen 5 Arbeiter von gleicher Thätigkeit, wenn sie 8 Stunden täglich arbeiten, um 720 Klafter gleicher Arbeit zu verfertigen?

12 Arb., in 6 T. zu 4 St. täglich machen 864 Kl. also macht
1 Arb., in 6 T. zu 4 St. tägl. den $\frac{1}{12}$ Th. v 864 oder 72 Kl.
1 Arb., in 1 T. zu 4 St. tägl. den $\frac{1}{6}$ Th. von 72 oder 12 Kl.
1 Arb., in 1 T. zu 1 St. tägl. den $\frac{1}{4}$ Th. von 12 oder 3 Kl.
1 Arb., in 1 T. zu 8 St. täg. 8 mal 3 oder . . . 24 Kl.
5 Arb., in 1 T. zu 8 St. tägl. 5 mal 24 oder . . 120 Kl.

Nun ist es klar, daß so oft 120 Klafter, als die Arbeit von 5 Taglöhnern in 1 Tag zu 8 Stunden in 720 Klaftern enthalten sind; diese 5 Arbeiter eben so viel Tage von 8 Stund. brauchen um 720 Kl. zu verfertigen; also 6 Tage.

---

[1]) Um sich bei der Auseinandersetzung nicht zu irren, muß man die gegebenen Größen der Aufgabe folgendermaßen anschreiben:

6 A.	5 T.	4 St.	120 Kl.
9	10	3	x

233. Wenn man die verschiedenen Größen welche in einer solchen Aufgabe vorkommen, eine um die andere als unbekannt annimmt, so erhält man nach einander so viel neue Aufgaben, als die Aufgabe Gattungen von Größen enthält, weniger eine: und diese neuen Aufgaben dienen der ersten als Probe. So könnte die eben aufgelöste Aufgabe noch drei andere geben, wenn man entweder die Zahl der Arbeiter, oder die Zahl der Stunden oder die Zahl der Klafter als unbekannt annähme, wie man z. B. in folgender Aufgabe sehen kann.

234. 12 Arbeiter haben in 6 Tagen 4 Stunden täglich 864 Klafter Arbeit gemacht; wie viel Arbeiter würden erfordert um in 6 Tagen, 8 Stunden täglich, 720 Klafter der nämlichen Arbeit zu machen?

Die Lösung dieser Aufgabe ließe sich auf dem vorhin angezeigten Wege finden; allein man kann auch auf folgende Art verfahren:

Da man 12 Arbeiter durch 6 Tage, zu 4 Stunden täglich braucht, so müßte man zu 1 Stund täglich 4 mal 12 oder 48 Arbeiter haben; also zu 8 Stunden täglich den 8ten Theil von 48, oder 6 Arbeiter. Da man 6 Arbeiter zu 8 Stunden täglich braucht um 864 Klafter zu machen, so braucht man zu 1 Klafter nur den 864ten Theil von 6 Arbeitern oder $\frac{6}{864}$ Arbeiter; folglich um 720 Klafter zu verfertigen braucht man 720 mal $\frac{6}{864}$ oder 5 Arbeiter.

235. 12 Arbeiter haben in 15 Tagen, zu 4 Stunden täglich, mit 5 Theilen Kraft eine 30 Meter lange, 6 Meter breite Wiese gemäht, wie viel Meter Länge von einer 8 Meter breiten Wiese werden 16 Arbeiter in 10 Tagen, zu 6 Stunden täglich, mit 3 Theilen Kraft abmähen?

Indem man die Rechnungen nur andeutet, sage man: da 12 Arbeiter 30 Meter Länge machen, so macht ein Arbeiter ein 12tel; also 16 Arbeiter 16 mal dieses 12tel. Wenn 16 Arbeiter in 15 Tagen die gefundene Länge machen, so machen sie in 1 Tage ein 15tel, folglich in 10 Tagen 10 mal ein 15tel von dieser Länge. Wenn 16 Arbeiter in 10 Tagen zu 4 Stunden täglich diese neue Länge machen, so machen sie zu 1 Stunde täglich ein 4tel derselben, und zu 6 Stunden täglich 6 mal dieses 4tel. Da 16 Arbeiter, in 10 Tagen, zu 6 Stunden täglich mit 5 Theilen Kraft die zuletzt gefundene Länge machen, so werden sie mit 1 Theil Kraft ein 5tel, und mit 3 Theilen Kraft, 3 mal dieses 5tel machen. Endlich: Wenn 16 Arbeiter in 10 Tagen, zu 6 Stunden täglich, mit 3 Theilen Kraft, bei einer Breite von 6 Meter, die zuletzt gefundene Länge abmähen, so mähen sie bei einer Breite von 1 Meter 6 mal diese Länge, und bei einer Breite von 8 Meter den 8ten Theil von dieser sechsfachen Länge. Dieser 8te Theil wird folgendermaßen ausgedrückt:

$$\frac{30 \times 16 \times 10 \times 6 \times 3 \times 6}{12 \times 15 \times 4 \times 5 \times 8}$$

Wenn man die gemeinschaftlichen Faktoren aus dem Zähler und dem Nenner wegläßt, so sieht man, daß die gesuchte Länge 18 Meter beträgt.

Auf eine ähnliche Art könnte man folgende Aufgabe lösen: 60 Arbeiter haben in 12 Tagen, zu 10 Stunden täglich, mit 12 Theilen Kraft 5 Gruben ausgeworfen, deren jede 60 Meter lang, 12 breit und 7 tief war; anderer Seits haben 50 Arbeiter in 24 Tagen, zu 8 Stunden täglich, 3 Gruben ausgehöhlt, deren jede 70 Meter lang, 16 breit und 6 tief war: die Härte des Erdreichs der erstern verhielt sich zu der Härte des der letztern wie 4 zu 5. Es ist die Frage wie viel Theile Kraft jeder der letzteren Arbeiter angewendet habe.

236. Folgende Aufgaben zur Uebung:

I. Ein Reisender braucht 30 Tage, 7 Stunden täglich, um einen Weg von 147 Stunden zurück zu legen; wie viel Stunden würde dieser in 50 Tagen, zu 9 Stunden täglich, zurück legen? Antwort: 315 Stunden.

II. 30 Meter Tuch von 16 Feinheit, 3 Viertel breit, kosten 720 Franken. Wie viel Ellen Tuch von 15 Feinheit und 2 Drittel Breite würde man für 1000 Fr. bekommen? Antwort: 50 Meter.

III. 30 Meter Tuch von 16 Feinheit, 3 Viertel breit, kosten 720 Franken: wie viel kosten 50 Meter Tuch von 15 Feinheit und 2 Drittel Breite?

Antwort: 1000 Franken.

IV. 2 Arbeiter haben in 5 Tagen, zu 3 Stunden täglich, 90 Ellen Arbeit gemacht; wie viel Stunden müssen 3 Arbeiter täglich anwenden um in 2 Tagen 126 Ellen der nämlichen Arbeit zu machen? Antwort: 7 Stunden.

V. 12 Ellen einer Gattung Tuch gelten 3 Sechzehntel einer andern Gattung: 2 Drittel Ellen dieser zweiten Gattung gelten 10 Ein und-zwanzigstel einer dritten Gattung; 5 Sechstel dieser dritten Gattung gelten 14 Neuntel einer vierten; 3 Viertel dieser vierten Gattung gelten 2 Ellen einer fünften; und 7 Achtel Ellen dieser fünften Gattung kosten 63 Floren. Wie viel kosten 64 Ellen der ersten Gattung? Antwort: 256 Floren.

VI. Zwei Kaufleute errichten unter sich einen Tauschhandel und geben 3 Viertel Ellen Tuch für $1\frac{1}{2}$ Ellen

Kasimir: 4 Fünftel Ellen Kasimir für $2\frac{2}{3}$ Ellen Basin; 3 Ellen Basin für $4\frac{3}{4}$ Ellen Musselin, 2 Fünftel Ellen Musselin für $2\frac{1}{2}$ Ellen Leinwand; und 3 Ellen Leinwand für 24 Ellen Band. Man fragt wie viel Ellen Band sie geben müssen um 360 Ellen Tuch zu erhalten?

Antwort: 190000 Ellen Band.

Von der Gesellschafts- oder Theilungs-Regel.

237. Die **Gesellschaftsregel** ist eine Rechnungsart, durch welche man eine gegebene Zahl in Theile zerlegt, deren Werth von andern gegebenen Zahlen abhängt.

Sie dient z. B. dazu den Gewinn oder Verlust einer Gesellschaft, nach Verhältniß ihrer Einlagen unter die Mitglieder verhältnißmäßig zu vertheilen.

Die Gesellschaftsregel ist **einfach**, wenn jeder Theil nur durch eine, und **zusammengesetzt**, wenn jeder Theil durch mehrere gegebene Zahlen bestimmt wird, welche auf eine zurückgeführt werden können.

238. „Drei Kaufleute vereinigen sich zu einem vortheil-
„ haften Handel; der Erste erlegt eine Summe von 25000;
„ der Zweite von 18000; der Dritte von 42000 Floren;
„ hiemit gewinnen sie 42500 Floren. Wie viel muß je-
„ der für seinen Theil erhalten?“

Man bemerke, daß 25000 Floren + 18000 Floren + 42000 Floren oder 85000 Fl., 42500 Floren gewonnen haben; also hat ein Floren den 85000sten Theil von 42500 Fl. oder $\frac{42500}{85000}$ Fl. oder $\frac{1}{2}$ Fl. gewonnen. Gewinnt nun 1 Floren $\frac{1}{2}$, so gewinnen 25000 Fl. 18000 Fl. und

42000 Fl. bezüglich 25000 mal $\frac{1}{2}$, 18000 mal $\frac{1}{2}$ und 42000 mal $\frac{1}{2}$ Fl. oder 12500, 9000 und 21000 Floren.

Im Handel nennt man die ganze Einlage *Kapital*, und den zu theilenden Gewinn *Dividenden*.

Im Handel berechnet man jeden Monat zu 30 Tagen, also das Jahr zu 360 Tagen.

239. Drei Gesellschafter haben gewonnen, der erste 900, der zweite 1500, der dritte 2100 Floren. Die ganze Einlage bestand in 1500 Floren. Wie viel hatte jeder einzelne Gesellschafter eingelegt?

Da 9000 + 1500 + 2100, oder 4500 durch 1500 gewonnen wurden, so wurde 1 Floren durch den 4500ten Theil von 1500 oder durch $\frac{1}{3}$ Floren gewonnen; also wurden 900, 1500 und 2100 durch 900 mal $\frac{1}{3}$, 1500 mal $\frac{1}{3}$ und 2100 mal $\frac{1}{3}$ Floren, oder durch 300, 500 und 700 Floren gewonnen.

240. „Drei Gesellschafter haben gleiche Summen ein-
„ gelegt; die erste blieb 3 Monate, die zweite 5 Monate,
„ die dritte 7 Monate in der Gesellschaft. Der ganze Ge-
„ winn war 4500 Floren, wie viel muß jeder Gesellschaf-
„ ter erhalten.“

In diesem Falle sind 4500 Floren der Gewinn einer Einlage von 15 Monaten, und die Theilung ist leicht zu machen.

241. Drei Gesellschafter haben bezüglich 900 Fl., 1500 und 2100 Floren gewonnen. Ihre Einlagen waren gleich, allein die Zeit, durch welche selbige in der Gesellschaft blieben, war verschieden: sie betrug zusammen 15 Monate. Es fragt sich wie viel Monate jede Einlage in der Gesellschaft gewesen?

Man sieht leicht, daß 4500 Floren der Gewinn einer

Einlage von 15 Monaten sind, und man findet eben so leicht 3, 5 und 7 Monate als die gesuchte Zeit.

242. Drei Gesellschafter haben eingelegt: der Erste 3000 Floren durch 6 Monate; der Zweite 4000 Floren durch 5 Monate, und der Dritte 8000 Floren durch 9 Monate; wie viel bekömmt jeder von dem Gewinn, der 22000 Floren betrug?

Der Gewinn eines Jeden wird durch seine Einlage und durch die Zeit bestimmt, während welcher selbe in der Gesellschaft blieb. Nun sey x der monatliche Gewinn eines Florens, so ist der Gewinn eines Florens in 6 Monaten 6 x; jener von 3000 Fl. in 6 Monaten, 3000 mal 6 x oder 18000 x. Eben so ist der Gewinn von 4000 Fl. durch 5 Monate, 4000 mal 5 x oder 20000 x: und jener von 8000 Fl. durch 9 Monate, 8000 mal 9 x, oder 72000 x. Der ganze Gewinn ist also 18000x + 20000x + 72000x oder 110000 x. Allein diese Summe ist auch 22000 Floren, folglich 110000 x = 22000 Fl.; x allein ist also der 110000ste Theil von 22000 Fl. oder $\frac{2}{10}$ Floren. Die 3 Theile des Gewinns 18000x, 20000x, 72000x gelten also gegenseitig 18000 mal $\frac{2}{10}$ Fl.; 20000 mal $\frac{2}{10}$ Fl. und 72000 mal $\frac{2}{10}$ Fl.; oder 3600 Fl., 4000 Fl. und 14400 Floren. In der That, diese 3 Summen machen zusammen den ganzen Gewinn von 22000 Floren.

243. Zwei Handelsleute machten zusammen einen Handel, welcher nach 30 Monaten einen Gewinn von 60000 Floren abwarf. Wie viel bekommt jeder? Man weiß, daß der Erste anfänglich 6000 Floren, dann nach 20 Monaten wieder 2000 Floren hergegeben; daß der Andere, welcher zuerst 15000 Floren eingelegt hatte, nach 12 Monaten wieder 9000 Floren zurückzog.

Der monatliche Gewinn eines Floren sey x: so ist der Gewinn von 6000 Fl. in 30 Monaten 6000 mal 30 x oder 180000 x; und jener von 2000 Fl. in 10 Monaten 2000 mal 10 x oder 20000 x. Der Gewinn des Ersten ist also 180000 x + 20000 x oder 200000 x.

Da der Zweite von seinen 15000 Fl. nach 12 Monaten 9000 Fl. weggenommen, so hatte er nur 15000 Fl. durch 12 Monate, und 6000 Floren durch 18 Monate in der Gesellschaft. Sein Gewinn ist also 15000 mal 12x + 6000 mal 18x; oder 180000x + 108000x, oder endlich 288000x.

Nun aber ist der ganze Gewinn beider 60000 Floren, man hat also 200000x + 288000x oder 488000x = 60000 Floren; also x = dem 488000sten Theil von 60000 Fl. oder $\frac{15}{122}$ Fl.; der Gewinn des Ersten ist also 200000 mal $\frac{15}{122}$ Fl. oder 24590$\frac{10}{61}$ Fl., und jener des Zweiten ist 288000 mal $\frac{15}{122}$ oder 35409$\frac{51}{61}$ Fl.

Hier eine Aufgabe zur Uebung: Drei Fuhrleute haben für geführtes Getreide 1696 Franken erhalten; der Erste hat 18 Centner 15 Stunden weit geführt; der Zweite 5 Centner 50 Stunden; und der Dritte 8 Cent. 41 Stunden. Wie viel muß jeder nach Verhältniß des Gewichts und der Entfernung bekommen?

214. Ein sterbender Vater glaubte einer der beiden Söhne, welche die Waffen trugen, sei auf dem Schlachtfelde geblieben; er sagte daher zu seiner Frau: Wenn der ältere Sohn zurückkömmt, so gibst du ihm $\frac{2}{3}$ von meinem Vermögen, und behältst für dich das andere Drittel; kömmt aber der Jüngere zurück, so gibst du ihm $\frac{2}{5}$ und behälst die drei andere Fünftel. Allein beide kommen zurück. Wie kann nun der letzte Wille des Verstorbenen

erfüllt werden? Man weiß, daß sein Vermögen in 44000 Franken besteht.

Das Schwierige dieser Aufgabe ist, den Willen des Verstorbenen auszumitteln. Da nun, im Falle seiner Rückkunft, der Ältere $\frac{2}{3}$ des Vermögens und die Frau das andere Drittel erhalten soll, so folgt hieraus der Wille des Verstorbenen, daß seine Frau die Hälfte von dem Antheil seines ältern Sohnes erhalte. Desgleichen, da im Falle der Rückkehr des Jüngern, dieser $\frac{2}{5}$, die Frau $\frac{3}{5}$ des Vermögens erhalten soll, ergiebt sich der Wille des Verstorbenen, daß der Antheil seines jüngeren Sohnes $\frac{2}{3}$ von jenem seiner Frau betrage. Um diese beiden Bedingnisse zu erfüllen, muß man die 44000 Franken so theilen, daß die Frau halb so viel erhalte als der ältere Sohn, und der Jüngere $\frac{2}{3}$ von dem Antheil seiner Mutter. Diese Theilung ist leicht zu machen, indem man 1 als den Antheil des Älteren annimmt.

Hier folgt eine ähnliche Aufgabe: Ein Mann hinterläßt seinen drei Söhnen eine Erbschaft von 14800 Fr. mit der Verfügung, daß der erste Sohn die Hälfte des Ganzen erhalte: der Zweite die $\frac{2}{5}$, der Dritte ein Drittel. Da diese Verfügung nicht buchstäblich erfüllt werden kann, so theile man das Vermögen nach Verhältniß des Antheiles, welcher für Jeden bestimmt war.

Bemerkung. Jede zusammengesetzte Gesellschaftsregel kann auf eine einfache zurück geführt werden, wie bei folgender Aufgabe gezeigt wird.

Drei Stücke Tuch kosten zusammen 7425 Fr. Das Erste ist 50 Ellen lang, $1\frac{2}{5}$ Elle breit, und hat 9 Grad Feinheit. Das Zweite ist 40 E. lang, $2\frac{1}{4}$ E. breit, und hat 12 G. Feinheit. Das Dritte ist 45 E. lang, $1\frac{1}{2}$ E. breit, und hat 10 G. Feinheit. Wieviel kostet jedes Stück?

Der gesuchte Preis wird durch drei Bedingungen bestimmt, nämlich durch die Länge, die Breite und die Feinheit. Diese drei Bedingungen werden auf eine Einzige zurückgeführt, wie folgt.

Ein Stück Tuch, welches 50 Ellen lang und $\frac{8}{5}$ E. breit ist, kostet so viel als wäre es nur 1 E. breit aber $\frac{8}{5}$ mal $50 = 80$ E. lang.

Ein Stück Tuch, welches 80 E. lang ist, und 9 Grad Feinheit hat, kostet soviel als hätte es nur 1 G. Feinheit, aber wäre 9 mal 80 oder 720 Ellen lang.

Das erste Stück kostet so viel, als wäre es 720 E. lang, 1 E. breit, und hätte 1 G. Feinheit.

So auch kostet das zweite so viel, als wäre es 1080 E. lang, 1 E. breit, und hätte 1 G. Feinheit.

Das dritte kostet soviel, als wäre es 675 E. lang, 1 E. breit und hätte 1 G. Feinheit.

Nun wird der Preis eines jeden Stückes nur mehr durch seine Länge bestimmt, und die Regel ist einfach.

$720 + 1080 + 675$ oder 2475 Ellen kosten 7425 Fr.

1 Elle kostet $7425 : 2175 = 3$ Fr. Die drei Stücke kosten also bezüglich 720 mal $3 = 2160$ Fr; 1080 mal 3 $= 3240$ Fr., und 675 mal $3 = 2025$ Fr.

215. Hier folgen einige Aufgaben zur Uebung:

I. Ein Schuldner hinterläßt seinen Gläubigern 435 Floren. Dem Ersten ist er 150, dem Zweiten 240, dem Dritten 270 und dem Vierten 210 Floren schuldig; wie viel soll jeder von der hinterlassenen Summe erhalten.

Antwort: sie erhalten gegenseitig 75, 120, 135 und 105 Floren.

II. Drei Kaufleute hatten ein Kapital von 31500 Floren; dieses brachte einen Gewinn von 1575 Floren, welchen sie nach Verhältniß ihrer Einlagen so unter sich theilten, daß der Zweite 55 Floren mehr als der Erste und der Dritte so viel, als beide Ersten zusammen, erhielt. Man fragt wie viel jeder eingelegt hatte, und wie groß sein Gewinn gewesen?

Antwort:

Die Einlage des	1.	war	7325 fl.	er gewann	366 fl.	25 C.
— —	2.	—	8425 fl.	—	421 fl.	25 —
— —	3.	—	15750 fl.	—	787 fl.	50 —

III. Drei Kaufleute zogen von einem Handel einen Gewinn von 12648 Fl. Der Erste hatte 19660 Fl.; der Zweite 22500 Fl. eingelegt. Man will wissen wie groß die Einlage des Dritten gewesen, welcher 4216 Fl. für seinen Antheil am Gewinne erhielt?

Antwort: seine Einlage betrug 21080 Floren.

IV. Drei Kaufleute legten eine Summe zusammen, welche nach einer gewissen Zeit mit dem Gewinn 64000 Floren betrug: Man möchte ausmitteln, wie viel jeder von dieser Summe erhalten soll? Man weiß, daß der Erste 20000 Fl.; der Zweite ein Drittel, der Dritte ein Viertel des Kapitals eingelegt hat.

Antwort: Der Erste erhält 26666⅔ Fl.; der Zweite 21333⅓ Fl.; der Dritte 16000 Fl.

V. Vier Personen haben gegenseitig 35000 Floren 32000 Fl., 30000 und 25500 Fl. zu einer Unternehmung vorgeschossen, die vier Jahre dauerte. Sie hatten im Durchschnitt einen Gewinn von 1500 Fl. monatlich. Allein zur Betreibung der Unternehmung hatten sie einen Verwalter angestellt, welchem sie auf dem ganzen Gewinn einen Gehalt von 2800 Fl. anwiesen, und dieser hatte selbst 15900 Fl. zur Unternehmung beigetragen. Wie viel werden die Gesellschafter, und wie viel der Verwalter erhalten?

Antwort: Sie bekommen gegenseitig 17500 Fl., 16450, 15000, 12750, und der Verwalter 10300 Fl.

VI. Drei Arbeiter haben für eine Arbeit 1380 Fl. erhalten: der Erste hat 2 Tage, der Zweite 5 und der Dritte 8 Tage daran gearbeitet. Wie viel muß jeder bekommen? Man weiß, daß der Erste täglich 5 Meter, der Zweite 4 und der Dritte 2 Meter Arbeit macht.

Antwort: Der Erste erhält 300, der Zweite 600 und der Dritte 480 Floren.

VII. 7070 Fr. werden unter vier Personen so vertheilt, daß, wenn die Erste 6 Fr. bekömmt, so erhält die Zweite 8 Fr: wenn die Zweite 4 Fr. bekömmt, nimmt die Dritte 6 Fr.: wenn die Dritte 10 Fr hat, nimmt die Vierte 12 Franken. Wie viel wird jede Person erhalten?

1050 - 2 - 1400 - 3 = 2100 - 4 = 2520

Die Interessen-Rechnung.

245. Durch die Interessen-Rechnung wird bestimmt, wie viel man von einer Summe zu ziehen habe, die man unter gewissen Bedingungen ausgeliehen hat.

Das Geld bringt gewöhnlich im Handel dem Besitzer desselben einen gewissen Nutzen. Derjenige also, welcher Geld borgt, muß bei Rückzahlung desselben etwas dazulegen, um den Leiher für die Vortheile zu entschädigen, welche er daraus hätte ziehen können, wenn er es selbst gebraucht hätte. Diese Zulage nun heißt Interesse, und die geliehene Summe Kapital.

247. Um die Interessen zu bestimmen, kömmt man gewöhnlich überein, wie viel das 100 in einer bestimmten Zeit, z. B. in einem Jahre oder Monate einbringen soll. So sagt man z. B. das Geld sey auf 6 von Hundert angelegt, wenn das 100 jährlich 6 einbringt.

248. Man unterscheidet zweierlei Arten von Interessen, 1°. die einfachen Interessen, wenn die Interessen bei dem Borger bleiben und nichts mehr einbringen. Diese Art Geld zu leihen ist dem Leiher nicht günstig; allein sie ist üblich.

2° Interessen von Interessen, wenn die Interessen beim Borger bleiben, um selbst wieder im folgenden Jahre Interessen zu tragen.

Wir wollen einige Beispiele der einfachen Interessen sehen:

249. Wie viel einfacher Interessen erhält man in 27 Monaten von 5784 Fl., zu jährlichen 5 von 100.

Da 100 Fl. jährlich 5 Fl. einfacher Interessen geben, so folgt, daß 1 Fl. 100 mal weniger oder 0F,05 giebt; folglich geben 5784 Fl. in einem Jahr, 5784 mal 0Fl,05 oder 0Fl,05 × 5784. Da die Interessen, welche bei dem Leiher zurück bleiben keine fernere Interessen geben, so folgt, daß er nach Verlauf jedes Jahres nur 0Fl,05 × 5784 zu zahlen habe; folglich zahlt er nach 27 Monaten oder nach $2\frac{1}{4}$ Jahr, $2\frac{1}{4}$ mal 0Fl,05 × 5784, oder 0Fl,05 × 5784 × $2\frac{1}{4}$ = 650 Fl. 70 Cts.

250. „Um also die einfachen Interessen von einem Ka-„pital, nach einer bestimmten ganzen oder Bruchzahl von

„ Jahren zu erhalten, darf man nur die Interessen von „ einem Jahre mit der gegebenen Zahl von Jahren mul- „ tipliciren. “

251. Wie viel müßte man auf $2\frac{1}{4}$ Jahr, zu 5 von 100 ausleihen, um nach dieser Zeit 6434 Floren 70 Cents an Kapital und Interessen zurück zu bekommen?

Da 100 Floren nach einem Jahre 5 Floren einfacher Interessen geben, so geben 100 Fl. nach $2\frac{1}{4}$ Jahr $2\frac{1}{4}$ mal 5 oder $\frac{45}{4}$ Fl. so daß das Kapital 100 Fl. nach $2\frac{1}{4}$ Jahren zu 100 F. + $\frac{45}{4}$ Fl. oder $\frac{445}{4}$ Floren anwächst. Das Kapital 1 Fl. wird also 100mal kleiner $\frac{445}{400}$ Fl. das gesuchte Kapital x Fl. wird also x mal $\frac{445}{400}$ Fl. oder $x \times \frac{445}{400}$ Fl. Allein, nach der Aufgabe soll das Kapital x nach $2\frac{1}{4}$ Jahren 6434 Fl. 70 Cents betragen. Folglich

$$x \times \frac{445}{400} = 6434{,}70$$

Wenn man nun das Produkt 6434,70 durch den Multiplicator $\frac{445}{400}$ dividirt, so erhält man den Multiplicanden x als Quotient und man findet x = 5784 Fl.

Man sieht, daß diese Aufgabe eine der drei Proben der vorhergehenden ist. Die zwei übrigen müßten auf folgende Art gegeben werden:

1°. Durch wie viel Jahre müßte man 5784 Fl. zu jährlichen 5 pro % ausleihen, um nach Verlauf derselben, an Kapital und Interessen eine Summe von 6434 Fl. 70 zu erhalten?

2°. Zu wie viel pro % müßte man 5784 Fl. auf 27 Monate ausleihen, um nach dieser Zeit an Kapital und Interessen eine Summe von 6434 Fl. 70 zu erhalten.

252. Ein gewisses Kapital betrug nach 5 Monaten, mit

Inbegriff der einfachen Interessen 1235 Floren, und nach 16 Monaten 1312 Floren. Wie groß war dieses Kapital, und zu wie viel pro % war es ausgeliehen?

Da das Kapital nach 5 Monaten 1235 Floren und nach 16 Monaten 1312 Floren betrug, so wurde es in 11 Monaten um 77 Floren, folglich in 1 Monat um 7 Floren vergrößert; also in 5 Monaten um 35 Fl. Wenn es nun nach diesem Zusatze 1235 Floren betrug, so betrug es ohne denselben 1200 Floren. Das Kapital bestand also in 1200 Floren. Hieraus ergiebt sich nun auch das pro %; denn, da 1200 Fl. in 5 Monaten 35 Floren, also in 1 Monat 7 Floren einfacher Interessen gaben, so geben sie in 12 Monaten 84 Floren. 100 Floren geben folglich den 12ten Theil von 84 oder 7 Floren; das Geld war also zu 7 pro % jährlichen Interessen ausgelegt.

Wir wollen jetzt einige Aufgaben mit Interessen von Interessen lösen.

253. Jemand hat 3600 Floren auf 3 Jahre 4 Monate zu 6 pro % ausgeliehen. Wie viel muß er nach Verlauf dieser Zeit zurück bekommen, mit Inbegriff der Interessen von Interessen?

Da 100 Floren nach einem Jahre 6 Floren geben, so giebt 1 Floren nach einem Jahre $\frac{6}{100}$. 1 Floren gilt also nach 1 Jahre 1 Fl. + $\frac{6}{100}$. oder 1,06 Floren; 3600 Floren gelten also nach einem Jahre 3600 mal $\frac{106}{100}$ oder 3600 $\times \frac{106}{100}$ Floren. Um also zu sehen, wie viel eine auf 6 pro % ausgeliehene Summe nach einem Jahre beträgt, darf man selbe nur durch $\frac{106}{100}$ multipliciren. Da man aber Interessen von Interessen nimmt, so ist die am Ende eines Jahres zu zahlende Summe das Kapital des folgenden Jahres. Die nach Verlauf des zweiten und dritten Jahres zu zahlenden Summen sind also bezüglich:

$$3600 \times 1,06 \times 1,06 \text{ und } 3600 \times 1,06 \times 1,06 \times 1,06$$

Da aber die jährlichen Interessen eines Florens $\frac{6}{100}$ betragen, so betragen sie nach 1 Monat den 12ten Theil von $\frac{6}{100}$ oder $\frac{1}{200}$; folglich in 4 Monaten $\frac{4}{200}$ oder 0,02. Für 1 Floren zahlt man also nach 4 Monaten 1 F. + 0,02, oder 1 Fl,02. Folglich für $3600 \times 1,06 \times 1,06 \times 1,06$ zahlt man nach 4 Monaten $3600 \times 1,06 \times 1,06 \times 1,06 \times 1,02$ welches bis auf $\frac{1}{2}$ Cents 4373 Fl. 41 Cents beträgt.

254. Ein, zu 8 pro % angelegtes Kapital betrug nach 2 Jahren 8 Monaten, mit Inbegriff der Interessen von Interessen, 9600 Floren. Wie groß war das Kapital?

Man nehme x als Kapital, verfahre wie in vorhergehender Aufgabe, und man findet: für während 2 Jahren 8 Monaten zu 8 pro % angelegten x Floren, muß man erhalten $x \times 1,08 \times 1,08 \times \frac{316}{300}$. Allein dieses macht 9600 Floren; also ist $x \times 1,08 \times 1,08 \times \frac{316}{300} = 9600$: Folglich, wenn man das Produkt 9600 durch den Multiplicator $1,08 \times 1,08 \times \frac{316}{300}$ dividirt, so erhält man den Multiplicand x als Quotient; es ergiebt sich also nach vollbrachter Rechnung:

$$x = 7813 \text{ Fl}, 72 \text{ bis auf ein Tausendstel.}$$

255. Ein zu 10 pro % angelegtes Kapital von 3310*, soll in 3 gleichen Zahlungen nach Verlauf eines jeden Jahres bezahlt werden, mit Rücksicht auf Interessen von Interessen.

Man nehme x als den Werth jeder dieser Zahlungen;

da der erste Termin durch die beiden letzten Jahre für den Schuldner Interessen trägt, so beträgt er am Ende des dritten Jahres $\frac{121}{100}x$; der andere, welcher am Ende des zweiten Jahres bezahlt wird, trägt nur ein Jahr Interessen er gilt also am Ende des dritten Jahres $\frac{11}{10}x$. Der am Ende des dritten Jahres zu zahlende Termin, gilt am Ende dieses Jahres nur x. Also gelten diese drei Zahlungen am Ende des dritten Jahres $\frac{121}{100}x + \frac{11}{10}x + x$ oder $\frac{331}{100}x$. Durch diesen Werth aber werden am Ende des dritten Jahres 3310†† mit den Interessen bezahlt, dieser Werth ist $3310 \times \frac{1331}{1000}$; also sind $\frac{331}{100}x = 3310 \times \frac{1331}{1000}$, und folglich $x = 1331$††. Jede Zahlung besteht also in 1331††, wovon man sich leicht überzeugen kann.

256. Jemand kauft für 2808 Floren Tuch auf 7 Jahre 8 Monate Credit. Um sich dieser Zahlung zu entledigen, unterschreibt er einen nach 4 Jahren 3 Monaten zahlbaren Wechsel. Man fragt, welche Summe der Wechsel enthalten müsse, voraus angenommen, daß 20 pro % und Interessen von Interessen genommen werden.

Da der Unterschied zwischen 7 Jahren 8 Monaten und 4 Jahren drei Monaten, 3 Jahre 5 Monate beträgt, so darf man nur berechnen, welche Summe ein Wechsel von 2808 Floren enthalten müsse, wenn er 3 Jahre 5 Monate vor der Verfallzeit erledigt wird; oder, was das nämliche ist, berechnen, wie viel eine in 3 Jahren 5 Monaten zahlbare Summe von 2808 Floren betragen müsse, wenn selbige baar bezahlt wird. Man wird 1500 Floren als Resultat finden (254).

Ueberhaupt, unter welcher Gestalt auch eine Aufgabe über Interessen gegeben werde, so kömmt es immer darauf an, das Kapital, das pro %, die Zeit oder die zu zahlende Summe zu suchen, und bei 3 gegebenen Punkten den Vierten zu finden. Nur ist hier zu bemerken, daß bei Interessen von Interessen das pro % und die Zeit durch die elementare Rechenkunst nicht bestimmt werden können.

257. Man übe sich in Lösung folgender Aufgaben:

I. Man hat 955 Floren zu 6 pro % ausgelegt; wie lang muß man warten, um an Kapital und einfachen Interessen eine Summe von 1413 Floren 40 Cents zu erhalten? Antwort 8 Jahre

II. Zu wie viel pro % müßte man 1863 Floren anlegen, um nach 6 Jahren 2645 Floren 46 Cents, sowohl an Kapital als einfachen Interessen zu haben?

Antwort: zu 7 pro %.

III. Jemand hat vier verschiedene Kapitale, nämlich 25000 Floren zu $10\frac{1}{2}$ pro %: 60000 Fl. zu 9; 15000 Fl. zu $12\frac{2}{3}$ und 1800 Fl. zu 7 pro % angelegt; wie viel tragen ihm diese Kapitale zusammen täglich ein, und zu wie viel pro % sind sie im Durchschnitte angelegt?

Antwort: Sie bringen ihm täglich 27 Floren $53\frac{51}{73}$ Cents und tragen im Durchschnitte 9 Fl, $87\frac{167}{309}$ pro % jährlich.

IV. Es hat Jemand eine gewisse Summe auf 8 Jahre zu 8 pro % jährlich ausgeliehen. Nach 3 Jahren kömmt der Schuldner, zahlt die verfallenen Interessen, und erbietet sich ihm das ganze Kapital zu erlegen, sammt der Hälfte der einfachen Interessen, welche er ihm nach Verlauf von 8 Jahren hätte zahlen müssen. Nach Annahme dieser Bedingungen erhält der Ausleiher 14400 Floren. Man fragt nun wie groß das Kapital gewesen?

Antwort: 12000 Floren.

V. Es leiht Jemand zu Anfang jedes Jahres 1000

Floren zu 10 pro % aus, und nimmt Interessen von Interessen. Wie viel wird er nach drei Jahren an Kapital und Interessen erhalten? Antwort 3641 Floren.

VI. Es hat Jemand 331000 Floren, welche er ausleiht, aber zu Anfang des zweiten Jahres 133100 Floren wieder zurück zieht. Wie groß wird sein Kapital mit Interessen nach 2 Jahren seyn? Das Geld bringt 10 pro % und Interessen von Interessen.

Antwort: es beträgt 254100 Floren.

VII. Jemand hat durch 2 Jahre, zu Anfang jedes Jahres 231700 Floren ausgeliehen. Nach Verlauf des zweiten Jahres will er sein Geld zurückziehen in drei gleichen, zu Anfang der drei folgenden Jahre zahlbaren Terminen. Wie viel muß zu jedem Termin bezahlt werden? Das Geld bringt 10 pro % und Interessen von Interessen.

Antwort: 195657 Floren.

Wechsel- Disconto- und Rabatrechnung.

258. Die **Wechselrechnung** hat zum Hauptgegenstande die Berechnung der Summe, die man bei einem Wechsler niederlegen muß, damit dieser eine bestimmte Summe in einer bezeichneten Stadt auszahlen lasse.

259. Der **Disconto** besteht in einem Abzug der Zinsen, welche für frühere Zahlung dem Zahler zu gut kommen, und deren Höhe der jedesmalige Mangel oder Ueberfluß an baarem Gelde auf dem Wechselplatz bestimmt.

Der **Rabat** ist auch eine Art Disconto; aber nur bei Waaren-Ankäufen üblich, und bedeutet einen **Nachlaß** oder Abschlag am Preise für gleich geleistete Zahlung, wenn solche erst nach einer bestimmten Frist verfallen war.

Es gibt zweierlei Rabat: nämlich Rabat auf 100 und Rabat in 100. Rabat auf 100, wenn man z. B. für 108 fl. Waaren bei einem Kaufmanne aufnimmt, aber nur 100 fl. dafür gleich bezahlt. Rabat in 100 dagegen, wenn man für 100 fl. Waaren nimmt, und bei 8 pro % Rabat nur 92 fl. bezahlt.

Wechsel, Disconto und Rabat werden nach pro % berechnet wie die einfachen Interessen, wie aus folgenden Beispielen zu sehen:

260. Ein Handelsmann kauft für 763 fl. Waaren auf ein Jahr Credit, und mit Vorbehalt eines Rabat auf 100 zu 12 pro % jährlich, wenn er vor der Verfallzeit zahlen sollte; gleich darauf entschließt er sich auf der Stelle zu zahlen; wie viel wird von der obigen Summe abgehen?

Da der jährliche Rabat 12 pro % macht, so folgt, daß von 112 am Ende des Jahres zu zahlenden Floren, für jetzt nur 100 bezahlt werden, also für einen nach Verlauf eines Jahres zu zahlenden Floren, zahlt man jetzt nur $\frac{100}{112}$ Floren; und für 763 Floren, nur 763 mal $\frac{100}{112}$, oder 681 Floren 25 Cents. Die Schuld des Handelsmannes beschränkt sich also auf 681 Floren 25 Cents baar.

261. Jemand will einen Wechsel von 2400 Floren auszahlen, welcher erst in 6 $\frac{1}{3}$ Monat verfallen ist, die Interessen sind zu 7 $\frac{1}{2}$ in 100 jährlich. Wie viel wird er zahlen müssen?

Da 100 in 12 Monaten $7\frac{1}{2}$ oder $\frac{15}{2}$ tragen, so tragen sie in 1 Monat den 12ten Theil von $\frac{15}{2}$ oder $\frac{5}{8}$, folglich in 6 $\frac{1}{3}$, oder $\frac{19}{3}$ Monat tragen sie $\frac{19}{3}$ mal $\frac{5}{8}$ oder $\frac{95}{24}$. Da also 100 Floren in $6\frac{1}{3}$ Monat $\frac{95}{24}$ Floren Interessen geben, so folgt, daß für 100 fl. + $\frac{95}{24}$ fl. oder $\frac{2495}{24}$ fl., welche erst in $6\frac{1}{3}$ Monat zahlbar sind, jetzt nur 100 fl. gezahlt werden dürfen; folglich für 1 fl. der nach $6\frac{1}{3}$ Monat zahlbar ist, gibt man jetzt nur 100 : $\frac{2495}{24}$ oder $\frac{2400}{2495}$; folglich für 2400 fl. gibt man jetzt nur 2400 mal $\frac{2400}{2495}$, oder 2308 fl. 62 Cents; der Rabat also, welchen der Schuldner fordern kann, wenn er jetzt zahlt, ist 2400 fl. — 2308 fl. 62 Cents, oder 91 fl. 38 Cents.

262. Man sieht, daß es leicht ist folgende allgemeine Aufgaben zu lösen: **Wenn von vier Punkten, dem Kapital, dem Disconto, der Zeit und der im Wechsel enthaltenen Summe, drei bekannt sind, wie ist der Vierte zu finden?**

Die Rechnung ist durchaus die nämliche wie für die einfachen Interessen. Eben so verhält es sich mit der Wechselrechnung, wie folgende zwei Beispiele beweisen:

263. Ein Kaufmann von Luxemburg will zu Brüssel, durch Wechsel, eine Summe von 4578 fl. Netto erheben. Wie viel muß er also zu Luxemburg erlegen, vorausgesetzt, daß der Curs auf $2\frac{1}{2}$ pro % steht?

Da man für 100 fl. $2\frac{1}{2}$ oder $\frac{5}{2}$ Aufgeld zahlt, so folgt daß, um in Brüssel 100 fl. Netto zu erheben, man in Luxemburg $100 + \frac{5}{2}$ oder $\frac{205}{2}$ fl. beim Wechsler erlegen müße. Um also 1 fl. Netto zu erheben, muß man $\frac{205}{200}$ fl. erlegen: folglich um in Brüssel 4578 fl. zu erheben, muß man in Luxemburg 4578 mal $\frac{205}{200}$ oder 4692 fl. 45 Cents erlegen.

264. Ein Kaufmann nimmt bei einem Andern einen Wechsel auf 6500 fl. 50 Cents gegen Verschreibung mit $7\frac{1}{2}$ pro % Wechsel-Vergütung. Welche Summe muß der Wechsel des Ersteren enthalten?

Da aus 100 fl. des Wechsels, $100 + 7\frac{1}{2}$ oder $\frac{215}{2}$ fl.

werden sollen, so muß 1 fl. des Wechsels $\frac{215}{200}$ fl. werden. 6500 fl. 50 Cents werden also in dem auszustellenden Billet 6500 mal und $\frac{50}{100}$ mal $\frac{215}{200}$ fl. oder 6988fl,0375 betragen. Das Billet muß also auf 6988fl,04 Cts. ausgestellt werden. [1])

265. Einige Aufgaben zur Uebung:

I. Ein Kaufmann hat auf 1 Jahr Credit Waaren eingehandelt, mit dem Vorbehalt, daß, wenn er vor der Verfallzeit bezahlt, man ihm 4 pro % Rabat in 100 aufs Jahr geben müsse; er hat aber 921 Fl,60 Cts. baar bezahlt. Es wird gefragt wie viel er am Ende des Jahres hätte zahlen müssen? Antwort: 960 fl.

II. Ein Kaufmann hat für 960 fl. Waaren auf 1 Jahr Credit verkauft. Man zahlt ihm nach vier Monaten 934fl, 40. Wie viel pro % Rabat in 100 jährlich hatte er bewilligt?
Antwort: 8 pro %.

III. Es kauft Jemand für 5100 fl. Tuch auf 1 Jahr Credit, und zu 4 pro % Rabat auf 100 jährlich. Er zahlt aber vor der Zeit 5000. Man fragt wie lang er mit der Zahlung gewartet? Antwort: 9 Monate.

IV. Wie viel wird ein Kaufmann zu Brüssel Netto ziehen können, der einem Wechsler zu Luxemburg 4000 fl. erlegt? Der Curs ist zu $3\frac{1}{4}$ pro %. Antwort: 3870 fl.

---

[1]) Um diesen Band nicht unnöthiger Weise zu vergrößern, hat man von verschiedenen andern kaufmännischen Rechnungsarten als Tare, Münzvergleichungen ꝛc. keine fernere Meldung gethan. Die hier angeführten werden hinreichend darthun, daß man vermittelst der Regeln dieser Arithmetik alle im Handel vorkommenden Rechnungsaufgaben lösen könne, sobald man sich über die üblichen Ausdrücke deutliche Begriffe erworben.

V. Ein Wechsler hat auf eine Summe 80 fl. Aufgeld zu $1\frac{1}{3}$ pro % erhalten. Man fragt wie groß die Summe gewesen? Antwort: 6000 fl.

VI. Für eine Summe von 693 fl. 60 Cts., welche einem Wechsler ausgezahlt worden, hat dieser einen Wechsel von 680 fl. ausgestellt, zu wie viel pro % war der Curs berechnet? Antwort: zu 2 pro %.

VII. Jemand der baares Geld braucht, geht zu einem Wechsler mit zwei Wechseln. Der eine von 6000 fl. war nach 25 Monaten, der andere von 27000 fl., nach 4 Monaten zahlbar. Man fragt wie viel er bekommen werde? Der Wechsler discontirt sie zu 2 pro % per Monat.

Antwort: Er bekömmt 27840 fl.

Die Mischungsregel.

266. Diese Regel beschäftigt sich vorzüglich mit Metallen und Flüßigkeiten.

Die Münzen und überhaupt alle Gold- und Silberarbeiten enthalten mehr oder weniger Kupfertheile. Die Theile des edlen Metalles in seiner Reinheit heißen das Korn. Um den Gehalt dieser, in einer gewissen Gold- oder Silbermasse enthaltenen feinen Theile zu bestimmen, berechnet man selbe nach Tausendstel. So enthält ein Franke 900 Tausendstel seines Gewichts, feines Silber.

267. Man mischt 40 Pfund Waizenmehl zu 50 Pf. Kornmehl und 36 Pf. Gerstenmehl, und will wissen, wie viel das Pfund dieser Mischung koste. Das Pf. Weizenmehl kostet 95 Centimes, das Kornmehl 80 und das Gerstenmehl 46 Centimes.

Diese Aufgabe ist leicht zu lösen und man findet, daß 1 Pfund der Mischung $75\frac{1}{21}$ Centimes kostet.

Eben so die Folgende:

Drei Goldstangen wurden zusammengeschmolzen. Die Erste enthielt 3 Pfund Gold und 4 Pf. Silber; die Zweite enthielt $\frac{3}{4}$ Pf. Gold und $\frac{5}{6}$ Pf. Silber; die Dritte $2\frac{1}{2}$ Pf. Gold und $\frac{7}{8}$ Pf. Silber. Wie viel Gold enthält 1 Pf. dieser Mischung?

268. Ein Weinhändler überläßt seinem Diener die Sorge über seinen Keller. Dieser mißbraucht das Vertrauen seines Herrn, zieht täglich 6 Liter Wein aus einem Faß von 48 Liter, und ersetzt selbe durch 6 Liter Wasser. Nach vier Tagen wird der Betrug erkannt und der Diener fortgejagt. Um aber niemand zu betrügen will der Weinhändler wissen, wie viel noch der Liter dieser Mischung werth sey. Vor dem Zusatze verkaufte er den Liter zu 512 Centimes. Das Wasser kostet nichts.

Es ist klar, daß das Faß noch immer 48 Liter enthielt. Da übrigens Wasser und Wein genau vermischt sind, indem man täglich 6 Liter von 48, d. h., den 8ten Theil des Inhalts wegnahm, so nahm man in der That $\frac{1}{8}$ Wein und $\frac{1}{8}$ von dem an jenem Tage im Faße vorhandenen Wasser. Es blieben also nur $\frac{7}{8}$ Wein. Das Faß, welches am 1 Tage 48 Liter Wein enthielt, enthielt dessen nach dem 1ten., 2ten., 3ten., 4ten. Tage nur $\frac{7}{8}$ von 48 oder 42; $\frac{7}{8}$ von 42, oder $\frac{147}{4}$; $\frac{7}{8}$ von $\frac{147}{4}$ oder $\frac{1029}{32}$; endlich $\frac{7}{8}$ von $\frac{1029}{32}$ oder $\frac{7203}{256}$. Nun aber kostet ein Liter von diesem Weine 512 Cent.; folglich kosten $\frac{7203}{256}$ Liter 14406 Cent.; folglich kostet ein Liter den 48ten Theil oder $300\frac{1}{8}$ Cent.

269. Auf die nämliche Art laßen sich die zwei folgenden Aufgaben lösen:

1°. Man nimmt 8 Liter von einer Mischung aus 16 Liter Wein und 4 Liter Wasser. Zu dem noch Uebrigen schüttet man eine andere Mischung aus 15 Liter des nämlichen Weines und 5 Liter Wasser. Man will wissen, wie viel der Liter der neuen Mischung kostet. Man weiß, daß der Liter Wein 360 Centimes und das Wasser nichts kostet.

2°. Von 4 Goldstangen, deren 1te. 12 Unzen Gold und 8 Silber; die 2te. 8 Unzen Gold und 2 Silber; die 3te. 10 Unzen Gold und 5 Silber; die 4te. 15 Unzen Gold und 5 Silber enthält, nimmt man 6 Unzen von der 1ten.; 4 von der 2ten, 8 von der 3ten. und 5 von der 4ten; und will wissen wie viel Gold man im Ganzen genommen habe?

270. 100 Pfund Seewasser enthalten 8 Pf. Salz. Wie viel Flußwasser muß man dazu mischen, wenn 100 Pf. dieser Mischung nur 5 Pfund Salz enthalten sollen?

Da 100 Pfund der zweiten Mischung nur 5 Pf. Salz enthalten sollen, so beträgt das Gewicht des Salzes $\frac{1}{20}$ dieser Mischung. Wenn man nun erwägt, daß die ganze Mischung 8 Pfund Salz enthält, so ist es leicht zu finden, daß die neue Mischung aus $8 : \frac{1}{20} = 160$ Pf. besteht.

So auch in folgender Aufgabe.

Eine Mischung enhält 90 Pinten Wein und 10 Pinten Wasser. Wie viel Wein muß man hinzu thun, wenn 75 Pinten nur 3 Pinten Wasser enthalten sollen?

271. Wie viel Wein von 30 und wie viel von 20 Ct. den Liter müßte man nehmen, um eine Mischung von 60 Liter zu 26 Cents jeden hervorzubringen?

Wenn diese 60 Liter nur aus Wein von 30 Cents bestünden, so würden selbe 60 mal 30, oder 1800 Cents kosten anstatt 60 mal 26 oder 1560 Cents; sie würden also 240 Cents mehr kosten als man wünschte, man muß also den Preis von 60 Liter um 240 Cents herabsetzen, indem man Wein von 30 Cents wegnimmt, und statt dessen Wein von 20 hinzusetzt. Nun aber wird der Preis der 60 Liter, durch jeden Liter Wein zu 20 Cents, der einen Liter von 30 Cents ersetzt, um 10 Cents verringert. Folglich, um den Preis um 240 Cents herabzusetzen, darf man nur so viele Liter des ersten Weines durch so viele des Zweiten ersetzen, als 10 in 240 enthalten sind, d. h. 24 mal. Man muß also 24 Liter des ersten Weines durch 24 Liter des zweiten ersetzen, und die verlangte Mischung besteht alsdann aus 24 Liter zu 20 Cents und 36 Liter zu 30 Cents, wovon man sich leicht überzeugen kann.

Andere Auflösung. Da der Liter der Mischung 26 Cents kosten soll, so hat man auf dem Preise eines Liters von dem ersten Weine 4 Cents zu viel, und auf einem Liter von dem zweiten 6 Cents zu wenig. Auf 6 Liter des ersten hat man 6 mal 4, oder 24 Cents zu viel, auf 4 Liter des zweiten 4 mal 6 oder 24 Cents zu wenig.

Da dieses sich ausgleicht, so wird man eine Mischung von dem begehrten Preise erhalten, wenn man 6 Liter von dem ersten Weine mit 4 von dem zweiten vermengt.

10 Liter der Mischung enthalten also 6 Liter von dem ersten Weine und 4 von dem zweiten;

1 Liter der Mischung enthält also $\frac{6}{10}$ Liter von dem ersten und $\frac{4}{10}$ von dem zweiten;

60 Liter der Mischung enthalten $\frac{6 \times 60}{10} = 36$ Liter von dem ersten Weine und $\frac{4 \times 6}{10} = 24$ von dem zweiten.

Auf die nämliche Art kann man folgende Aufgabe lösen:

Ein Pfund Gold wiegt im Wasser nur $\frac{5}{6}$ Pfund. Ein Pfund Silber wiegt im Wasser nur $\frac{7}{12}$ Pfund. Wie viel Gold und Silber befindet sich in einer Mischung von 36 Pfund, welche im Wasser nur 28 wiegt?

Diese Aufgabe gleicht jener des Hyero, König von Syrakus, welche der berühmte Archimedes auflöste.

272. Ein Goldschmied hat 60 Unzen Gold von 930 Tausendstel feinem Gehalt. Wie viel reines Gold muß er dazu setzen, um dasselbe auf einen Gehalt von 950 Tausendstel zu bringen?

Da kein Kupfer, sondern nur reines Gold beigesetzt wird, so enthält die neue Mischung nicht mehr und nicht weniger Kupfer, als dessen schon in den 60 Unzen vorhanden ist.

Da aber eine Unze der alten Mischung $\frac{70}{1000}$ Unze Kupfer enthält, so enthalten die 60 Unzen $\frac{70 \times 60}{1000} = \frac{4200}{1000}$ Unze Kupfer. Diese sollen sich auch in der neuen Mischung befinden. Da nun eine Unze dieser neuen Mischung $\frac{50}{1000}$ Unze Kupfer enthalten soll, so muß die neue Mischung, um $\frac{4200}{1000}$ Kupfer zu enthalten, aus so viel Unzen bestehen, als $\frac{50}{1000}$ in $\frac{4200}{1000}$ enthalten ist. $\frac{4200}{1000} : \frac{50}{1000} = 84$.

Die neue Mischung besteht also aus 84 Unzen; die alte bestand aus 60 Unzen; folglich sind 24 Unzen reinen Goldes beigesetzt worden.

Andere Auflösung. Der Gehalt der Mischung soll 950 Tausendstel sein. Eine von den vorhandenen Unzen enthält im Vergleiche 20 Tausendstel zu wenig; und eine Unze reinen Goldes, 50 Tausendstel zu viel. — 5 Unzen der vorhandenen Masse enthalten 5 mal 20 oder 100 Tausendstel zu viel: 2 Unzen reinen Goldes enthalten 2 mal 50 oder 100 Tausendstel zu wenig. Dieses gleicht sich aus.

Zu 5 Unzen der vorhandenen Masse setze man also 2 Unzen reinen Goldes, zu 1 Unze $\frac{2}{5}$ und zu 60 Unzen $\frac{2 \times 60}{5} = 24$ Unzen reinen Goldes.

Eben so kann man folgende Aufgabe lösen.

Wie viel Pfund Pulver zu 30^s das Pfund müßte man zu 24 Pfund Pulver zu 20^s das Pfund mischen, damit das Pfund 26^s koste?

273. Hier folgen einige Aufgaben zur Uebung:

I. Man hat 40 Pfund Mehl zu 95 Cents das Pfund, mit 50 Pfund zu 80 Cents, und 36 Pfund Mehl, dessen Preis unbekannt ist, vermischt. Man fragt wie viel die letzte Qualität gekostet? Man weiß daß 1 Pfund der Mischung $75\frac{1}{21}$ Cents kostet. Antwort: 46 Cents.

II. Wie viel Wasser muß man zu Wein von 80 Cents den Liter mischen, um eine Mischung von 48 Liter zu 60 Cents jeden zu erhalten? Das Wasser kostet nichts.

Antwort: 12 Liter Wasser zu 36 Liter Wein.

III. Ein Kaufmann hat 2 Faß Branntwein von 125 Flaschen jedes gekauft, welche zusammen 500 Floren, und eines von beiden 125 fl. mehr als das andere kostet. Wie viel von jeder Gattung muß er vermengen, um eine Mischung von 180 Flaschen zu erhalten die er zu 3 fl. die Flasche, mit einem Nutzen von 75 Cents verkaufen könnte?

Antwort: 135 vom Stärkern und 45 vom Anderen.

IV. Ein Weinhändler hat in seinem Keller 350 Flaschen Wein zu 19^s. die Flasche; 450 zu 15^s.; 500 zu 13^s. und 640 zu 12^s. Von den zwei ersten Gattungen will er ein

Faß von 280 Flaschen füllen zu $17\frac{1}{2}$ˢ. die Flasche; und alles was von den 4 Weinsorten übrig bleibt in ein Faß zusammen mischen. Wie viel muß er von jeder der beiden ersten Sorten nehmen, um eine Mischung von 280 Flaschen zu $17\frac{1}{2}$ˢ. jede zu erhalten, und wie viel wird die Flasche der letzten Mischung kosten?

Antwort: Er braucht 175 Flaschen zu 19ˢ. und 105 zu 15ˢ. um 280 Flaschen zu $17\frac{1}{2}$ Sols zu erhalten. Die Flasche von der letzten Mischung kostet 13ˢ. $7\frac{79}{83}d$.

V. Ein Kaufmann hat zwei Sorten Thee. Die Erste kostet ihn 14 fl. die Zweite 18 fl. das Pfund. Hievon sendet er einem Kleinhändler eine Kiste von 100 Pfund für welche ihm 1932 fl. bezahlt werden. Man fragt wie viel Thee von jeder Sorte in der Kiste gewesen? Man weiß daß er 15 pro % auf seinem Handel gewonnen habe.

Antwort: 70 Pfund zu 18; und 30 Pfund zu 14 fl.

VI. Ein Goldschmied hat 5 Pfund Gold von 900 Tausendstel Gehalt; 25 Pfund zu 850 Tausendstel Gehalt; 70 Pfund zu 750 Tausendstel. Man fragt wie viel reines Gold er zu diesen 100 Pfund zusetzen müße, um demselben einen Gehalt von 950 Tausendstel zu geben?

Antwort: 335 Pfund.

VII. Man hat zwei Gefäße; das Erste enthält eine Mischung von 4 Liter Wein und einem Liter Wasser; das Zweite eine Mischung von 6 Liter Wein und 4 Liter Wasser. Nun nimmt man zu gleicher Zeit aus jedem Gefäße einen Liter dieser Mischung und gießt selben in das andere Gefäß; dieses wiederholt man zum zweiten Mal und fragt, wie viel Wein noch in jedem Gefäße enthalten sey?

Antwort: 3L,66 in dem ersten, und 6L.34 in dem zweiten Gefäß.

Aufgaben, bei deren Auflösung man von den Endresultaten zu den gesuchten Zahlen hinaufsteigt.

Erstes Beispiel. — Fünf Kartenspieler treffen die Abrede, daß der Verlierer jedem der vier Gewinner soviel bezahlen wird, als dieser Gewinner vor dem Spiele besaß. Der erste verliert das erste Spiel, der 2te das 2te, der 3te das 3te, der 4te das 4te und der 5te das 5te. Nach dem fünften Spiele besitzt jeder 1920 Centimes; wie viel besaß jeder anfänglich?

Vor jedem Spiele besaß ein Gewinner nur die Hälfte des Geldes, welches er nach dem Gewinn dieses Spieles hat; der Verlierer besaß aber vor dem Spiele, außer dem Gelde, welches ihm nach dem Spiele bleibt, noch das Geld, welches er an die Andern bezahlen mußte. Es wird daher leicht sein zu finden, daß vor den verschiedenen Spielen, das Geld auf folgende Art vertheilt war.

	1ter Spieler	2ter Spieler	3ter Spieler	4ter Spieler	5ter Spieler
Nach dem 5ten Spiele	1920	1920	1920	1920	1920
Vor „ 5ten „	960	960	960	960	5760
„ „ 4ten „	480	480	480	5280	2880
„ „ 3ten „	240	240	5040	2640	1440
„ „ 2ten „	120	4920	2520	1320	720
„ „ 1ten „	4860	2460	1260	660	360

Zweites Beispiel. Ein Kaufmann verliert bei einer Unternehmung $\frac{1}{5}$ seines Einsatzes und bezahlt aus dem Reste eine Schuld von 240 Fr. Das Uebrige setzt er in einen zweiten Handel, wobei er $\frac{1}{4}$ des Einsatzes gewinnt. Er theilt 300 Fr. unter die Armen und mit dem Reste unternimmt er einen dritten Handel, wobei er die $\frac{3}{7}$ des Einsatzes gewinnt.

Nun bezahlt er noch eine Schuld von 2800 Fr. und behält noch 3200 Fr. Wie stark war sein erster Einsatz?

Vor der Bezahlung der letzten Schuld besaß er $3200 + 2800 = 6000$ Fr. Da er aber bei dem dritten Unternehmen die $\frac{3}{7}$ des Einsatzes gewonnen hat, so sind diese 6000 Fr. die $\frac{10}{7}$ des Einsatzes in dieses dritte Unternehmen; $\frac{1}{7} =$ 600 Fr., $\frac{7}{7} = 4200$ Fr. Damals hatte er 300 Fr. unter die Armen vertheilt, hat also $4200 + 300$ Fr. aus dem zweiten Handel gezogen. Diese 4500 Fr. sind die $\frac{5}{4}$ des Einsatzes in den zweiten Handel, $\frac{1}{4}$ davon ist 900 Fr. und $\frac{4}{4} = 3600$. Diese 3600 Fr. besaß der Kaufmann nach dem er eine Schuld von 240 Fr. bezahlt hat; vor dieser Bezahlung also $3600 + 240 = 3840$ Fr. Diese 3840 sind die $\frac{4}{5}$ des Einsatzes in das erste Unternehmen, $\frac{1}{5}$ davon ist 960 Fr. und der gesuchte Einsatz beträgt 5 mal $960 = 4800$ Fr.

Zur Ubung.

1. Fünf Kartenspieler verabreden, daß der Gewinner von jedem der vier Verlierer so viel Geld erhalten soll, als dieser Gewinner vor dem Spiele besaß.
Nachdem jeder ein Spiel gewonnen hat, nämlich der erste das erste, der zweite das zweite u. s. w. besitzt jeder 2560 Centimes. Wieviel hatte jeder anfänglich.

2. Jemand verzehrt $\frac{1}{5}$ seiner Habe und 5 Fr.; $\frac{1}{5}$ des Restes

und 5₰; $\frac{1}{5}$ des neuen Restes und 5₰. Da bleiben ihm noch 11₰ übrig. Wieviel besaß er am Anfang?

3. Ein Kapital wird 5 Jahre lang zu 4 pro % auf einfache Zinsen ausgeliehen. Nach dieser Zeit werden die Zinsen zu dem Kapital gelegt, und die Summe auf zwei Jahre zu 5 % ausgegeben. Die Zinsen werden wieder zum Kapital gelegt, und das Ganze bringt in einem Jahre, zu 6 pro % ausgeliehen, 190₰,08 Zinsen ein. Man suche das erste Kapital.

4. Eine Frau verkauft die Hälfte ihrer Eier und ein halbes Ei; die Hälfte des Restes und ein halbes Ei; die Hälfte des neuen Restes und ein halbes Ei; da bleiben ihr noch 7 Eier; wie viel hatte sie am Anfang?

5. In der ersten Woche seiner Reise legt ein Reisender $\frac{1}{4}$ seines Weges zurück und 12 Meilen; in der zweiten Woche $\frac{1}{3}$ des Restes und 8 Meilen, in der dritten Woche $\frac{1}{4}$ des Restes und 20 Meilen; in der vierten Woche die Hälfte des Restes und 6 Meilen. Nun bleibt ihm noch ein Weg von 23 Meilen zu machen. Wie groß war die vorgenommene Reise?

6. Jemand bezahlt die Hälfte seiner Schuld weniger 25₰; die Hälfte des Restes weniger 25₰; die Hälfte des neuen Restes weniger 25₰; die Hälfte des dritten Restes weniger 25₰ und schuldet noch 100 Franken. Wie viel war er Anfangs schuldig?

7. Dieselbe Aufgabe mit Ersetzung der Worte „weniger 25₰," durch die Worte „und 25₰".

8. 5 Ellen Tuch gelten 6₰ mehr als 16 Ellen Kasimir; 7 Ellen Kasimir gelten 8₰ mehr als 18 Ellen Leinwand, 8 Ellen Leinwand gelten 4₰ mehr als 12 Ellen Baum-

wollenzeug; 10 Ellen Baumwollenzeug kosten 30$^{\text{ß}}$. Wie viel kosten 23 Ellen Tuch?

9. Eine Zahl wird mit 3 multiplizirt, zu dem Produkt addirt man 116, und wenn man diese Summe mit 8 dividirt, so entsteht 43. als Quotient. Man suche diese Zahl.

10. Zu dem Doppelten einer Zahl wird 5 addirt; zu dem Doppelten der Summe addirt man wieder 5; zu dem Doppelten der neuen Summe addirt man wieder 5, und es enstecht 179. Man suche die erste Zahl.

Regel des falschen Satzes.

Bei der Anwendung dieser Regel wird die richtige Auflösung einer Aufgabe gesucht vermittelst willkührlich angesetzter Zahlen. Rechnet man mit der gewählten Zahl, als wollte man die Probe der Aufgabe machen, so wird man im Allgemeinen einen Irrthum finden. Dieser Irrthum wird durch eine neue Wahl zuerst vermindert, und endlich ganz vernichtet.

Erstes Beispiel. Mit 29 Stück Geld, wovon die einen 5$^{\text{ß}}$, die andern 2$^{\text{ß}}$ werth sind, soll eine Summe von 109 Franken bezahlt werden. Wie viele sind von jeder Münzart zu nehmen?

Nimmt man 29 Stücke, jedes zu 5$^{\text{ß}}$ so entsteht eine Summe von $5 \times 29 = 145$$^{\text{ß}}$, also $145 - 109 = 36$$^{\text{ß}}$ zu viel. Wird eines dieser Stücke durch ein anderes von 2$^{\text{ß}}$ ersetzt so wird der Irrthum um 3$^{\text{ß}}$ vermindert. Der Irrthum wird also um 36$^{\text{ß}}$ vermindert oder ganz gehoben wenn man dieses so oft macht, als 3 in 36 enthalten ist, nämlich 12 mal.

Man nehme also 12 Stücke von 2₰ mit 17 Stücken von 5₰.

Zweites Beispiel. Jemand will eine Summe Geld unter mehre Armen vertheilen. Es fehlen ihm 32^s um jedem 9^s zu geben; gibt er aber jedem nur 7^s, so behält er 24^s übrig. Wie viel Arme sind es, und wie stark ist die zu vertheilende Summe.

Gesetzt es seyen 35 Armen; um jedem 9^s zu geben, müßte man 35 mal $9 = 315^s$ haben; da aber dazu 32^s fehlen, so beträgt die gesuchte Summe $315 - 32 = 283$ S. Gibt man aber jedem 7^s, so braucht man 35 mal $7 = 245$ und es erübrigt $283 - 245 = 38^s$, statt 24. Der Irrthum ist also 14^s. Man versuche nun, es seien 34 Armen; um jedem 9^s zu geben, müßte man 34 mal $9 = 306^s$ haben; da aber dazu 32^s fehlen, so beträgt die gesuchte Summe $306 - 32 = 274^s$.

Gibt man jedem 7^s, so vertheilt man 34 mal $7 = 238$ und es bleibt $274 - 238 = 36$ anstatt 24, der Irrthum ist noch $36 - 24 = 12^s$.

Da der Irrthum um 2^s kleiner geworden ist, so vermindere man die zuerst angesetzte Zahl der Armen so oft um 1, als 2 in 14 enthalten ist, nämlich um 7. Die Anzahl der Armen ist also $35 - 7 = 28$.

Die zu vertheilende Summe beträgt $9 \times 28 - 32$, oder auch $7 \times 28 + 24$. Beides gibt 220^s.

Drittes Beispiel. 6 Malter Weizen und 5 Malter Roggen kosten 340₰;

11 Malter Weizen und 7 Malter Roggen kosten 567₰.

Man suche den Preis eines Malters von beiden Getreidearten.

Versuchen wir die willkührlich gewählte Zahl 29ß als Preis von einem Malter Weizen, so kosten 6 Malter 6 mal 29 = 174ß, und es bleibt für 5 Malter Roggen 340 — 174 = 166ß, für ein Malter also 166 : 5 = $33\frac{1}{5}$. 11 Malter Weizen kosten demnach 11 mal 29 = 319ß und 7 Malter Roggen, 7 mal $33\frac{1}{5} = 232\frac{2}{5}$, zusammen 319 + $232\frac{2}{5} = 551\frac{2}{5}$ statt 567. Man begeht also hier einen Irrthum von 567 — $551\frac{2}{5} = 15\frac{3}{5}$ß.

Erhöhen wir den Preis von einem Malter Weizen um 1ß; so kosten 6 Malter Weizen 6 mal 30 = 180ß und es bleibt für 5 Malter Roggen 340 — 180 = 160ß, für ein Malter Roggen 160 : 5 = 32ß. 11 Malter Weizen kosten demnach 11 mal 30 = 330ß und 7 Malter Roggen 7 mal 32 = 224ß, zusammen 330 + 224 = 554 statt 567. Der Irrthum ist noch 567 — 551 = 13ß.

Durch die Hinzusetzung von 1ß zu der zuerst probirten Zahl ist der Irrthum um $2\frac{3}{5}$ kleiner geworden; damit derselbe nun um $15\frac{3}{5}$ kleiner und folglich ganz getilgt werde, setze man so oft 1ß zu, als $2\frac{3}{5}$ in $15\frac{3}{5}$ enthalten ist, nämlich 6 mal.

Der richtige Preis von einem Malter Weizen ist also 29 + 6 = 35 Fr. 6 Malter Weizen kosten also 6 mal 35 oder 210 Fr. und es bleibt 340 — 210 = 130 Fr. für 5 Malter Roggen; ein Malter Roggen kostet 130 : 5 = 26ß.

Und wirklich kosten nun 11 Malter Weizen 11 mal 35 = 385ß, und 7 Malter Roggen 7 mal 26 = 182ß zusammen 385 + 182 = 567.

Wichtig ist es zu bemerken, daß die Regel des falschen Satzes nicht angewendet werden kann, wenn die gesuchte Zahl, womit man die Probe anstellt, durch sich selbst multiplicirt werden soll. Man wird sich dessen leicht überzeugen, wenn man nach dieser Methode eine Zahl suchen wollte, deren Produkt mit sich selbst 729 machte, oder wenn man folgende Aufgabe zu lösen suchte:

Ein Stück Land, welches 5 mal so lang als breit ist, enthält 845 Quadratmeter; wie lang und wie breit ist dasselbe?

Man muß daher die hier angegebene Methode nur mit Vorsicht gebrauchen, und es wird rathsam sein, jedesmal auch mit den gefundenen Resultaten die Probe zu machen.

Zur Uebung.

1. Wenn man zu den $\frac{4}{5}$ einer Zahl 7 addirt, so erhält man dasselbe Resultat, als wenn man die $\frac{3}{5}$ derselben Zahl von 430 abzieht. Man suche diese Zahl.

2. Bruder und Schwester besitzen zusammen 95 $\mathcal{A}$. Verzehrt der Bruder $\frac{1}{5}$ seines Geldes und die Schwester $\frac{1}{8}$ des ihrigen, so verzehren sie zusammen 16 $\mathcal{A}$. Wie viel besitzen beide?

3. Die Hälfte eines Landgutes weniger 10 Hectar ist Ackerland, der dritte Theil weniger 15 Hectar ist Waldung; der fünfte Theil und 18 Hectare besteht in Wiesen. Wieviel Hectare beträgt dieses Landgut?

4. Vor 7 Jahren war der ältere Bruder 3 mal so alt als der jüngere; nach 7 Jahren wird er zweimal so alt seyn. Wie alt sind beide?

5. Für jede gut gelöste Aufgabe bekömmt ein Kind 7 Cents, für jede mißlungene muß es 3 Cents geben. Für 35 Aufgaben hat dieses Kind 95 Cents bekommen. Wieviel davon waren gut gemacht und wieviel mißlungen?

6. In 3 Tagen gewinnt der Vater soviel als der Sohn

in 5. Wenn der Vater 8 Tage arbeitet und der Sohn 3 so gewinnen sie zusammen 46ℳ,55. Wieviel gewinnt jeder täglich?

7. 7 Tagelohne des Vaters und 5 des Sohnes gelten zusammen 22ℳ,70,

9 Tagelohne des Vaters und 3 des Sohnes gelten zusammen 24ℳ,90.

Wie viel gewinnt jeder täglich?

8. Nach 9 gewonnenen und 7 verlorenen Spielen hat Jemand 93ℳ Gewinn.

Nach 12 verlorenen und 8 gewonnenen Spielen hat er 4ℳ Verlust.

Wie hoch ist der Gewinn bei einem gewonnenen Spiel und wie stark der Verlust bei einem verlorenen?

9. Zwei Knaben besitzen Äpfel. Gibt der Erste dem Zweiten 25 Stück, so haben Beide eine gleiche Zahl; gibt aber der Zweite dem Ersten 25 Stück, so hat der Erste deren zweimal so viel als der Zweite.

Wieviel Äpfel haben Beide?

10. 7 Hämmel kosten 22ℳ mehr als 8 Schafe. 10 Schafe kosten 40ℳ mehr als 5 Hämmel. Wieviel kostet ein Hammel und wieviel ein Schaf?

Benennungen der Decimal-

Benennungen.	Verhältniß zur Einheit.
	Längenmaß.
Myriameter . .	10000 Meter.
Kilometer . .	1000 „
Hectometer . .	100 „
Decameter . .	10 „
Meter . . .	1 „
Decimeter . .	zehnte Theil eines Meters
Centimeter . .	hundertste „ „ „
Millimeter . .	tausendste „ „ „
	Maaß für Flüßigkeiten und Getreide.
Kiloliter . . .	1000 Liter.
Hectoliter . . .	100 „
Decaliter . . .	10 „
Liter	1 „
Deciliter . . .	zehnte Theil eines Liters.
Centiliter . . .	hundertste „ „ „
	Gewicht.
Kilogramm . .	1000 Gramm.
Hektogramm . .	100 „
Decagramm . .	10 „
Gramm . . .	1 „
Decigramm . .	zehnte Theil eines Gramms.

Anmerkung. — Anstatt 5 Kilometer kann man sagen (livre métrique). — Statt Are: Meter = Ruthe (perche trique). Für Quadratmeter, Quadratdecimeter 2c. schreibt

Maaße und Gewichte.

Benennungen.	Verhältniß zur Einheit.
Flächenmaaß. A. Feldmaaß.	
Myriare . . .	10000 Are.
Kiliare. . . .	1000 "
Hectare . . .	100 "
Decare. . . .	10 "
Are	1
Deciare . . .	zehnte Theil eines Are.
Centiare . . .	hunderte " " "
Flächenmaaß. B. Für kleinere Flächen.	
Quadratmeter .	Ein Quadratmeter.
Quadratdecimeter	hundertste Theil eines Quadratmeters
Quadratcentimeter	10tausendste " " "
Quadratmillimeter	millionste " " "
Maaß für feste Körper. A. Für Brennholz.	
Decastere . . .	10 Stere.
Stere	1 "
Decistere . . .	zehnte Theil eines Stere.
B. Für andere feste Körper.	
Kubikmeter . . .	Kubikmeter.
Kubikdecimeter . .	tausendste Theil eines Kubikmeters.
Kubikcentimeter .	millionste " " "

Stunde (lieue). — Statt Kilogramm: Meter = Pfund
métrique). — Statt Stere: Meter = Korde (corde mé-
man künftig □Meter, □Decimeter 2c.

Werth der römischen Ziffern.

I	= j	= 1
II	= ij	= 2
III	= iij	= 3
IV	= iv	= 4
V	= v	= 5
VI	= vj	= 6
VII	= vij	= 7
VIII	= viij	= 8
IX	= ix	= 9
X	= x	= 10
XX	= xx	= 20
XXX	= xxx	= 30
XL	= xl	= 40
L	= l	= 50
LX	= lx	= 60
LXX	= lxx	= 70
LXXX	= lxxx	= 80
XC	= xc	= 90
C	= c	= 100
CC	= cc	= 200
CCC	= ccc	= 300
CCCC	= cccc	= 400
D od. IↃ	= d	= 500
DC	= dc	= 600
DCC	= dcc	= 700
DCCC	= dccc	= 800
DCCCC	= dcccc	= 900
M o. CIↃ	= m	= 1000
MC	= mc	= 1100
MCC	= mcc	= 1200
MCCC	= mccc	= 1300
MCCCC	= mcccc	= 1400
MD	= md	= 1500

Inhalt.

Druckfehler.

Seite 4. Zeile 11 lies für fetzte — letzte.
— 16. „ 27 „ „ ersten — erste,
— 18. „ 29 „ „ zweie — zweier.
— 20. In der Multiplications-Tabelle lies für 8 mal 8 isi 64 — 8 mal 8 ist 64.
— 21. Zeile 18 lies für Enheit — Einheit
— 26. „ 31 statt: also 4 mal 11 — 4 mal 5 || 4 mal 6 lies: also 4 mal 11 — 4 mal 5 = 4 mal 6.
— 44. „ 15 lies für Pimzahlen — Primzahlen.
— 50. „ 23 „ „ 5168 — 51681.
— 54. „ 28 „ „ Anwort — Antwort.
— 71. „ 13 „ „ $\frac{120}{66}$ — $\frac{102}{66}$.
— 74. „ 22 „ „ $\frac{7}{3}$ — $\frac{3}{7}$.

In der nämlichen Buchhandlung findet man nebst anderen Schulbüchern, folgende empfehlenswerthe Schriften:

	Fr.	Ct.
Karte des Großherzogthums Luxemburg, nach dem Traktat vom 15. November 1831, von Neugebauer, gestochen von Konen. Colorirt.	2	„
Paquet. Luxemburger Geschichte zum Gebrauche der Primärschulen.	1	10
Clomes. Elementarbuch der Erdbeschreibung zum Gebrauche der Primärschulen, mit einer topographisch-statistischen Erdbeschreibung des Großherzogthums Luxemburg, und einem Abrisse der Geographie Palestinas, 3te Auflage, in Tuch gebunden.	1	75
Gobart. Anfangsgründe der Arithmetik für niedere und höhere Primärschulen. Kartonnirt.	1	10
Laur. Arithmetik zum Gebrauche der Primärschulen.	1	25
Clasen. Theoretisch-praktische Anleitung zur Kenntniß der deutschen Sprache. Kartonnirt.	„	70
— Dezimalsystem.	„	30
Ferner alle anderen Werke desselben Verfassers.		
Stehres. Leben der Gräfinn Yolanda von Vianden.	2	„
— Ausführliches Handbuch der französischen Sprache für untere und mittlere Klassen höherer Unterrichtsanstalten. Theoretischer Theil.	1	„
— Französisches Elementarbuch, zunächst für die Primärschulen des Großherzogthums Luxemburg.	„	80
Ferner alle anderen Schriften desselben Verfassers.		
Stammer. Sämmtliche Schulschriften.		
Ahn. Französische Sprachlehre.	1	90
— Praktischer Lehrgang zur Erlernung der französischen Sprache, 1ster Cursus.	„	95
— Desselben 2ter Cursus.	„	95
— Französisches Lesebuch.	1	90
AMI DES ECOLIERS. Livre de lecture à l'usage des écoles primaires.	„	50

	Fr.	Ct.
Drieselmann. Deutsches Lesebuch.	1	53
Lesebuch für die mittlere Classen in katholischen Elementarschulen, bearbeitet von praktischen Schulmännern, in Tuch gebunden.	„	90
Desaga. Deutsche Sprachlehre.	1	95
Happich. Kopfrechenaufgaben.	4	60
Martin. Lehrbuch der katholischen Kirche 2 Bände.	8	60
Nippel. Die Schönheit der katholischen Religion, neu bearbeitet von Himioben.	3	35
Goffine. Unterrichts- und Erbauungsbuch.	3	„
Stapf. Erziehungslehre.	3	35
Schwarz. dto. 3 Bände.	8	60
Bacher. Hand- und Methodenbuch.	1	20
Demeter dto. Ausgabe in einem Bande.	1	50
— dto. Ausgabe in 3 Bänden.	12	15
DEGERANDO. Cours normal des instituteurs primaires.	2	50
ENGLING et PARIZEL. Manuel des instituteurs, ou traité élémentaire de pédagogie et de méthodique.	2	80
Galura. Lehrbuch der Wohlerzogenheit.	1	10
Welter. Allgemeine Weltgeschichte, 3 Bände.	6	50
Annegarn. dto. 7 Bände.	10	„
TINANT. Flore Luxembourgeoise.	5	„
Löhr. Deutsche Flora.	5	80
Kape. Der kleine Botaniker.	„	95
Schmid. Naturlehre für Schule und Haus.	1	65
Eifeler Schulfreund, per Jahr 4 Hefte.	2	50
Werner. Französische Sprachlehre. 2ter Abdruck der dritten Auflage, in Tuch gebunden.	1	„

Luxemburg.
Buch- u. Steindruckerei von M. Behrens u. Comp.