

MÉMOIRE

SUR

LA THÉORIE MATHÉMATIQUE

de la Chaleur et de la Lumière

par

DE COLNET-D'HUART,

Directeur de l'Athénée de Luxembourg, Membre de plusieurs Académies
et Sociétés savantes.

LUXEMBOURG.

Imprimerie et librairie de Pierre BRUCK, Editeur.

1870.

MÉMOIRE

sur

LA THÉORIE MATHÉMATIQUE

de la

CHALEUR ET DE LA LUMIÈRE.

INTRODUCTION.

1.

La physique mathématique est une science de création moderne, elle date du commencement de ce siècle.

Augustin Fresnel et Fourier ont inauguré l'application de l'analyse et des principes de la mécanique rationnelle aux phénomènes de la lumière et de la chaleur; Fresnel en s'appuyant sur un principe d'une simplicité et d'une fécondité admirables, principe qui a donné naissance à la théorie mathématique de l'élasticité, théorie que nous devons à Poisson, à Navier, à Cauchy et à Lamé. De son côté Fourier créa cette analyse élégante à l'aide de laquelle il détermina le mouvement de la chaleur dans les corps de figure régulière. L'analyse de Fourier doit son extension à Poisson, à Cauchy, à Duhamel et surtout à Lamé qui a étendu la théorie mathématique de la chaleur aux formes cristallines.

2.

Cependant les méthodes suivies par Fresnel et par Fourier sont différentes: Fresnel considère la lumière comme un mouvement vibratoire transversal; Fourier considère la chaleur comme un fluide qui se trouve en plus ou moins d'abondance dans les milieux pondérables.

Depuis que ces deux grands géomètres ont publié leurs immortels travaux, et surtout depuis que les physiciens modernes ont prouvé que la chaleur aussi bien que la lumière consistent dans

des mouvements des atomes pondérables on s'est, dans tous les pays du monde, évertué à trouver le lien qui unit la théorie inaugurée par Fresnel à celle inaugurée par Fourier.

3.

On s'est demandé, comment il se fait que, par exemple, dans le nombre infini de rayons du soleil, qui traversent une plaque de verre coloré, certains rayons soient absorbés en pénétrant dans la surface de la plaque, tandis que d'autres la traversent sans subir de transformation.

Pourquoi les rayons du soleil qui tombent sur un corps opaque, sont éteints dans la surface de celui-ci et l'échauffent?

Ni les formules de Fourier ni celles de Fresnel ne rendent compte de ce phénomène, un des plus importants de la nature.

Quel est le procédé mécanique que la nature emploie pour transformer la chaleur rayonnante et une notable partie de la lumière en chaleur de conductibilité?

Et réciproquement par quel procédé mécanique la chaleur de conductibilité se transforme-t-elle en chaleur rayonnante et en lumière?

Tel est le problème que je me suis proposé de résoudre dans ce mémoire.

4.

D'après Fresnel, lorsqu'une molécule M est déplacée de sa position d'équilibre, il résulte de l'action mutuelle de M et d'une molécule voisine N une force qui tend à l'y ramener et qui est dirigée suivant leur plus courte distance.

A ce principe vient s'ajouter cet autre: lorsqu'une molécule M tourne autour d'un axe passant par son centre de figure, il résulte de l'action mutuelle de M et d'une molécule voisine N , dont le centre est situé dans le plan de l'équateur de M , une force tangentielle, qui tend à ramener M au repos. En outre M repousse, durant son mouvement, la molécule N et cette force est dirigée suivant leur plus courte distance.

Le principe de Fresnel se déduit des phénomènes qui se produisent lorsqu'un corps solide parfaitement élastique est étiré.

Le principe que j'ajoute à celui de Fresnel se déduit des phénomènes moléculaires qui accompagnent la torsion d'un corps solide parfaitement élastique. Si ce corps est cylindrique, par exemple, et que la torsion se fait suivant un plan perpendiculaire à l'axe, outre la résistance que l'élasticité oppose à la torsion, résistance qui est une force tangentielle, on remarque que le diamètre du cylindre augmente. Ce dernier fait preuve qu'il s'y produit une répulsion entre les molécules tordues et que cette répulsion est dirigée perpendiculairement à l'axe de rotation, c'est-à-dire dans le plan de l'équateur.

5.

De même qu'on déduit du principe de Fresnel les équations aux différentielles partielles qui régissent les vibrations lumineuses, de même on déduit du principe, que je viens d'énoncer, les équations qui régissent le mouvement de la chaleur de conductibilité dans les milieux pondérables. L'analyse me conduit à ce théorème important que la dilatation des corps est proportionnelle à la vitesse de rotation des atomes pondérables. Or la dilatation sert à mesurer la température; d'un

autre côté la chaleur étant un mouvement moléculaire, j'en conclus que ce mouvement est un mouvement de rotation des atomes pondérables.

6.

J'ai démontré en 1863 que les forces qui font vibrer lumineusement les atomes, provoquent en même temps ceux-ci à tourner autour d'eux-mêmes. Ces rotations engendrent donc des forces tangentielles dont Fresnel, qui les ignorait, n'a pas tenu compte. Ce sont ces forces qui, comme je le prouverai plus bas, produisent la dispersion de la lumière dans les corps transparents, et l'absorption des rayons lumineux dans les corps opaques.

Ainsi tout atome qui vibre *lumineusement* tourne autour de son centre de figure; ce mouvement gyrotoire est un grand nombre de fois plus rapide que le mouvement vibratoire; il est périodique, sa périodicité est inverse de celle des vibrations; l'axe instantané de rotation est situé dans le plan de l'onde et perpendiculaire au rayon vecteur de la trajectoire décrite par l'atome.

7.

Je démontrerai ces propriétés par l'analyse, cependant il est possible de les rendre visibles à l'aide d'une figure.

Soit ox (fig. 1.) la direction de la propagation de la lumière. Puisque les vibrations lumineuses sont transversales (Fresnel), les forces qui les produisent sont dirigées perpendiculairement à ox . Représentons l'intensité et la direction de chaque force, qui agit au même instant t sur chacun des points de la droite ox par les ordonnées de la courbe $A B C D E F G \dots$, courbe qui est comme on sait, une sinusoïde. Il est évident que les résultantes de la somme algébrique des forces, telles que $(aa \ bb)$, qui agissent sur les éléments de l'atome dont le centre est situé en B , formeront un couple qui tend à faire tourner cet atome de la gauche vers la droite dans le sens de la flèche; il est encore évident que l'axe instantané de rotation de B est perpendiculaire à la direction ox de la propagation et, par suite, située dans le plan de l'onde qui est, comme on sait, perpendiculaire à ox (Fresnel). On voit que D n'est sollicité que par une série infinie de couples tendant à le faire tourner de la droite vers la gauche. L'atome F tourne comme B de la gauche vers la droite. La résultante de toutes les forces parallèles et dirigées dans le même sens qui agissent sur T est dirigée de haut en bas, mais cette résultante ne passe pas par le centre de figure de T ; T est donc sollicité à la fois à se mouvoir de haut en bas et à tourner dans le sens de la flèche.

8.

En continuant cet examen, on verra que le mouvement gyrotoire d'un atome qui vibre lumineusement est périodique, que durant la première moitié d'une vibration, la rotation étant dirigée dans un sens, dans la seconde moitié de la vibration elle sera dirigée en sens contraire; que la rotation atteint sa vitesse maxima au moment où le mouvement de translation atteint sa vitesse minima, c'est-à-dire au moment où cette vitesse est nulle. Toutes ces propriétés ont été démontrées rigoureusement par l'analyse et nous trouverons plus bas l'occasion de les reproduire.

9.

Si, comme l'admettent les physiciens, le volume d'un atome pondérable est un grand nombre de fois plus considérable que celui d'un atome d'éther, il sera démontré que la rotation d'un atome pondérable sera aussi un grand nombre de fois plus rapide que celui d'un atome d'éther. Car si le diamètre (ab) de l'atome B était infiniment petit, le levier du couple qui fait tourner B serait infiniment petit et sa vitesse de rotation nulle. Il résulte de là que les phénomènes produits par le mouvement de rotation des atomes dans les milieux pondérables, n'ont plus lieu dans l'éther, pourvu que les atomes inpondérables soient un grand nombre de fois plus petits que les atomes pondérables.

10.

Outre les mouvements de rotation périodiques des atomes, des mouvements non périodiques peuvent aussi se produire.

Il est facile de faire voir que le mouvement de rotation des atomes suit identiquement les mêmes lois que celles que suit le mouvement de la chaleur, lois que Fourier a déduites de son analyse.

Mais avant de nous occuper d'une manière générale de cette question, proposons-nous de résoudre un problème extrêmement simple: Une sphère de rayon r et de densité δ tourne, à l'époque t , autour d'un de ses diamètres avec une vitesse ε . Une force proportionnelle à cette vitesse ε tend à retarder le mouvement de la sphère; on demande quelles seront les lois qui régiront ce mouvement.

La force d'inertie est

$$\frac{8\pi r^5 \delta}{15} \frac{d\varepsilon}{dt};$$

la force rétrograde

$$- a\varepsilon,$$

a étant un coefficient constant; on doit donc avoir

$$\frac{8\pi r^5 \delta}{15} \frac{d\varepsilon}{dt} = - a\varepsilon.$$

ou plus simplement en posant

$$\frac{15a}{8\pi r^5 \delta} = k, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = - k\varepsilon,$$

dont l'intégrale est

$$\varepsilon = ce^{-kt}$$

c étant une constante introduite par l'intégration. Cette dernière expression montre que la vitesse de rotation ε décroît en progression géométrique quand le temps t croît en progression arithmétique. Ce problème donne à la vitesse de rotation de la sphère des propriétés que Newton avait reconnu être celles de la chaleur.

11.

Théorème. Dans un corps homogène et d'élasticité constante les atomes sont sphériques.

Car l'action élastique des atomes est la même, quelque soit la direction qu'on considère; mais cela ne peut avoir lieu que si la surface de l'atome est la même dans quelque direction qu'on la considère. Or une seule surface satisfait à cette condition, c'est la surface sphérique.

12.

Théorème. Les atomes des milieux cristallins, quelque soit le système auxquels ils appartiennent, sont sphériques.

Car en comprimant un corps homogène et d'élasticité constante, dont les molécules sont sphérique, ce corps ainsi comprimé prend les propriétés élastiques d'un corps cristallin. On en conclut par analogie que les corps cristallins ne diffèrent des corps homogènes et d'élasticité constante qu'en ce que leurs atomes sont plus rapprochés dans une direction que dans une autre, et par suite que leurs atomes sont sphériques.

13.

En 1865, j'ai fait voir que la vitesse de rotation des atomes pondérables conduisait aux lois qui régissent le mouvement de la chaleur, 1° dans les cristaux, 2° dans les corps homogènes et d'élasticité constante.

La marche que j'ai suivi, est à peu-près la suivante.

Soit, à l'époque t , ε la vitesse de rotation d'un atome sphérique M dont les coordonnées du centre sont (x, y, z) ; prolongeons le plan de l'équateur de M, et soit ε' la vitesse de rotation d'un atome N situé dans le rayon d'activité des forces moléculaires de M et dont le centre se trouve dans le plan de l'équateur de M. Soient

$$x + x, y + Y, z + Z,$$

les coordonnées de N, r la distance qui sépare le centre de M de celui de N, r sera une très petite quantité et l'on a

$$r^2 = x^2 + Y^2 + Z^2,$$

les valeurs de x, Y, Z sont donc aussi des quantités très petites. Soient (α, β, γ) les angles que fait avec les axes des x, y, z l'axe instantané de rotation de M; α', β', γ' , ceux que fait avec les mêmes axes des coordonnées, l'axe instantané de N. $\varepsilon, \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ ne sont fonction que des coordonnées x, y, z et du temps t ; on déduira $\varepsilon', \cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma'$ de $\varepsilon, \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ en changeant dans celles-ci x, y, z en $x + x, y + Y, z + Z$ et en développant d'après le théorème de Taylor. On trouve ainsi

$$(a) \dots \varepsilon' - \varepsilon = \frac{d\varepsilon}{dx}x + \frac{d\varepsilon}{dy}Y + \frac{d\varepsilon}{dz}Z + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\varepsilon}{dx^2}x^2 + \frac{d^2\varepsilon}{dy^2}Y^2 + \frac{d^2\varepsilon}{dz^2}Z^2 + 2\frac{d^2\varepsilon}{dxdy}XY + 2\frac{d^2\varepsilon}{dxdz}XZ + 2\frac{d^2\varepsilon}{dydz}YZ \right) + \text{etc.}$$

$$\cos\alpha' = \cos\alpha + x \frac{d\cos\alpha}{dx} + Y \frac{d\cos\alpha}{dy} + Z \frac{d\cos\alpha}{dz} + \text{etc.}$$

$$\cos\beta' = \cos\beta + x \frac{d\cos\beta}{dx} + Y \frac{d\cos\beta}{dy} + Z \frac{d\cos\beta}{dz} + \text{etc.}$$

$$\cos\gamma' = \cos\gamma + x \frac{d\cos\gamma}{dx} + Y \frac{d\cos\gamma}{dy} + Z \frac{d\cos\gamma}{dz} + \text{etc.}$$

Or x, y, z étant de très petites quantités, les termes qui renferment ces quantités, peuvent dans les expressions de $\cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma'$ être négligés sans erreur sensible, en sorte que $\cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma'$ ne diffèrent de $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ que de quantités insensibles et l'on peut considérer l'axe instantané de rotation de N comme parallèle à celui de M.

14.

Si donc, à l'époque t , ε surpasse ε' , l'action mutuelle de l'atome M et de l'atome voisin N consiste à diminuer ε et à augmenter ε' , durant l'instant dt cette action sera proportionnelle à $(\varepsilon - \varepsilon')$ et à une fonction $F(r)$ de la distance r qui sépare le centre M de celui de N, en sorte que cette force sera exprimée par

$$(\varepsilon - \varepsilon') F(r) \cdot dt$$

$F(r)$ étant essentiellement positive. Mais, pendant le même instant dt , la vitesse ε de M est diminuée de $d\varepsilon$, et l'on aura

$$-d\varepsilon = (\varepsilon - \varepsilon') F(r) dt$$

ou

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = (\varepsilon' - \varepsilon) F(r).$$

Cela posé la caractéristique Σ désignant une somme de termes semblables entre-eux relatifs aux divers atomes N, N', N'' . . ., situés dans le plan de l'équateur de M, on aura pour la somme des actions réciproques de M et des atomes N, N', N'', . . .

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \Sigma(\varepsilon' - \varepsilon) F(r).$$

ou en ayant égard au développement (a)

$$(b) \dots \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dx} \Sigma_{XF}(r) + \frac{d\varepsilon}{dy} \Sigma_{YF}(r) + \frac{d\varepsilon}{dz} \Sigma_{ZF}(r) + \frac{d^2\varepsilon}{dx^2} \Sigma_{X^2F}(r) + \frac{d^2\varepsilon}{dy^2} \Sigma_{Y^2F}(r) + \frac{d^2\varepsilon}{dz^2} \Sigma_{Z^2F}(r) + \\ 2 \frac{d^2\varepsilon}{dx dy} \Sigma_{XYF}(r) + 2 \frac{d^2\varepsilon}{dx dz} \Sigma_{XZF}(r) + 2 \frac{d^2\varepsilon}{dy dz} \Sigma_{YZF}(r).$$

15.

$F(r)$ étant toujours positive. Si le corps qu'on considère est homogène, les atomes N, N', N'' sont symétriquement disposés autour de M, et l'on doit avoir

$$\Sigma_{XF}(r) = \Sigma_{YF}(r) = \Sigma_{ZF}(r) = 0;$$

car la projection sur les axes des coordonnées de la distance r qui sépare M de N étant x, y, z , il existera nécessairement un autre atome N' à une distance $-r$ de M, pour lequel ces projections sont $-x, -y, -z$; ces deux atomes N et N' fournissent aux séries $\Sigma_{XF}(r), \Sigma_{YF}(r), \Sigma_{ZF}(r)$ deux termes égaux et de signes contraires qui se détruisent. On prouve ainsi, que tous les termes de ces séries, se détruisent deux à deux, et par suite que chacune de ces séries est nulle.

Si donc nous posons

$$\frac{\Sigma X^2 F(r)}{2} = a^2 \quad \frac{\Sigma Y^2 F(r)}{2} = b^2 \quad \frac{\Sigma Z^2 F(r)}{2} = c^2 \quad \Sigma XY F(r) = 2\alpha^2 \quad \Sigma XZ F(r) = 2\beta^2 \quad \Sigma YZ F(r) = 2\gamma^2$$

l'équation précédente prendra la forme .

$$(c) \dots \frac{d\epsilon}{dt} = a^2 \frac{d^2\epsilon}{dx^2} + b^2 \frac{d^2\epsilon}{dy^2} + c^2 \frac{d^2\epsilon}{dz^2} + 2\alpha^2 \frac{d^2\epsilon}{dxdy} + 2\beta^2 \frac{d^2\epsilon}{dxdz} + 2\gamma^2 \frac{d^2\epsilon}{dydz}$$

Telle est l'équation aux différentielles partielles qui régit le mouvement de rotation des atomes dans les corps homogènes symétriques, c'est-à-dire, dans les corps qui affectent la forme cristalline. Cette équation est identiquement la même que celle à laquelle est parvenu M. Lamé, lorsque cet illustre géomètre a appliqué la méthode de Fourier à la recherche du mouvement de la chaleur dans les corps cristallins.

16.

On en conclut que le mouvement de rotation dans les cristaux suit les mêmes lois que le mouvement de la chaleur, et comme la physique expérimentale a mis hors de doute cette vérité que la chaleur n'est pas un fluide, mais consiste dans un mouvement des atomes, on peut, sans trop présupposer, admettre que la chaleur consiste dans le mouvement de rotation des atomes. Par la suite nous prouverons rigoureusement ce théorème.

17.

Quand le corps qu'on considère est homogène et d'élasticité constante, tous les atomes sont régulièrement disposés autour de M et dans ce cas il est évident qu'on doit avoir, comme l'a prouvé Cauchy,

$$\begin{aligned} \Sigma XF(r) &= \Sigma YF(r) = \Sigma ZF(r) = 0 \\ \Sigma XY F(r) &= \Sigma XZ F(r) = \Sigma YZ F(r) = 0 \\ \frac{\Sigma X^2 F(r)}{2} &= \frac{\Sigma Y^2 F(r)}{2} = \frac{\Sigma Z^2 F(r)}{2} = k \end{aligned}$$

et l'équation (b) prend la forme

$$(d) \dots \frac{d\epsilon}{dt} = k \left(\frac{d^2\epsilon}{dx^2} + \frac{d^2\epsilon}{dy^2} + \frac{d^2\epsilon}{dz^2} \right)$$

Cette équation aux différentielles partielles, qui régit le mouvement de rotation des atomes dans les corps homogènes et d'élasticité constante, à laquelle je suis parvenu en 1865, a exactement la même forme que celle que Fourier a trouvée, en cherchant les lois que suit le mouvement de la chaleur dans les corps homogènes et d'élasticité constante.

Déjà en 1861, Lamé avait entrevu que la chaleur de conductibilité consistait en un mouvement de rotation des atomes. Dans ses immortelles leçons sur la théorie mathématique de la chaleur

(Paris 1861) cet illustre géomètre s'exprime (page 96) ainsi: „Nos cinq premières leçons prouvent „qu'il suffirait d'entreprendre ce travail pour en déduire des conséquences imprévues, qui rappellent: „la dynamique, l'élasticité, la lumière, l'électricité, et qui indiquent en même temps nettement la „véritable cause de la chaleur, quand on rapproche les formules de la leçon précédente, de celles „qui régissent les rotations des corps.“

On verra plus bas qu'en effet la lumière et la chaleur sont proches parents.

CHAPITRE I^{er}.

Expressions des forces élastiques de traction, du mouvement de rotation des atomes et des forces élastiques de torsion dans les milieux homogènes.

18.

Équilibre des atomes.

Soit (x, y, z) les coordonnées du centre d'un atome sphérique quelconque m faisant partie d'un milieu pondérable; $x + x, y + y, z + z$ celles du centre d'un atome voisin m' situé à une distance extrêmement petite r du premier m ,

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Si l'on suppose que, sans tourner sur lui-même, l'atome m soit écarté actuellement de sa position d'équilibre, il résulte de l'action mutuelle de m et de m' une force $F(r)$ qui tend à l'y ramener et qui est dirigée suivant la plus courte distance (Fresnel, voyez paragraphe 4).

P'osons pour abrégé

$$\frac{F(r)}{r} = f(r),$$

les composantes de cette force élastique sont

$$(1) \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \Sigma m_x f(r) = 0 \\ \Sigma m_y f(r) = 0 \\ \Sigma m_z f(r) = 0 \end{array} \right.$$

La caractéristique Σ indiquant la somme des actions qu'exercent sur l'atome m les autres atomes du système.

19.

Composantes des forces élastiques de traction.

Supposons maintenant, d'après Cauchy, que, par une cause quelconque, les atomes aient été dérangés très peu de leurs positions d'équilibre et exécutent des mouvements très petits autour de ces positions. Soient $x + \xi, y + \eta, z + \zeta$ les coordonnées variables des centres de l'atome m pendant le mouvement; celles du centre de l'atome m' seront $x + \xi + x + \Delta\xi, y + \eta + y + \Delta\eta,$

$s + \xi + z + \Delta\zeta$. La distance variable des centres des atomes m et m' étant représentée par $r + \rho$, sera fournie par l'équation

$$(r + \rho)^2 = (x + \Delta\xi)^2 + (y + \Delta\eta)^2 + (z + \Delta\zeta)^2$$

Les composantes des forces élastiques provoquées par le déplacement du centre de l'atome m seront à l'époque t , en les désignant par (A, B, C)

$$(a) \dots \left\{ \begin{array}{l} A = \Sigma mf(r + \rho) (x + \Delta\xi) \\ B = \Sigma mf(r + \rho) (y + \Delta\eta) \\ C = \Sigma mf(r + \rho) (z + \Delta\zeta). \end{array} \right.$$

Ces composantes représenteraient la totalité des forces élastiques provoquées par le déplacement de l'atome m , si celui-ci n'était pas en même temps sollicité à tourner autour d'un axe passant par son centre.

Si nous négligeons, avec Fresnel et les géomètres de son école, les quantités petites du second ordre, c'est-à-dire les puissances de ρ ou de (ξ, η, ζ) supérieures à la première, nous aurons

$$\rho = \frac{x\Delta\xi + y\Delta\eta + z\Delta\zeta}{r}$$

$$f(r + \rho) = f(r) + f'(r)\rho.$$

et en ayant égard aux équations (1) les formules (a) deviennent

$$(b) \dots \left\{ \begin{array}{l} A = \Sigma mf(r)\Delta\xi + \Sigma mf'(r) \frac{x(x\Delta\xi + y\Delta\eta + z\Delta\zeta)}{r} \\ B = \Sigma mf(r)\Delta\eta + \Sigma mf'(r) \frac{y(x\Delta\xi + y\Delta\eta + z\Delta\zeta)}{r} \\ C = \Sigma mf(r)\Delta\zeta + \Sigma mf'(r) \frac{z(x\Delta\xi + y\Delta\eta + z\Delta\zeta)}{r}. \end{array} \right.$$

20.

Mouvement de rotation d'un atome.

Nous appellerons, dans ce qui va suivre, composantes des forces élastiques de traction, les trois composantes (A, B, C) provoquées par le déplacement du centre de m . Cherchons maintenant à déterminer le mouvement de rotation provoqué par les composantes (A, B, C).

Remarquons d'abord que les variables (ξ, η, ζ) qui entrent dans les valeurs des (A, B, C) ne peuvent être fonctions que des (x, y, z) et du temps t . Les (A, B, C) ne sont donc elles-mêmes fonctions que des coordonnées (x, y, z) de m et du temps t .

Soit, à l'époque t , c, fig. 2, la position du centre de l'atome sphérique m .

Les coordonnées de c sont $x + \xi, y + \eta, z + \zeta$.

Par le point c, menons les axes rectangulaires (cx', cy', cz') respectivement parallèles aux

(x, y, z) , et soient (x', y', z') les coordonnées courantes d'un point quelconque E de la sphère m , r son rayon, nous aurons

$$r^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2;$$

$\rho dx' dy' dz'$ sera l'élément de la masse de m au point E, ρ étant une constante qui représente la densité de l'atome.

Cela posé, observons qu'à l'époque t , (A, B, C) sont les composantes des forces élastiques de traction agissant sur le point c , centre de la sphère. Puisque les (A, B, C) sont fonction de (x, y, z) , ils varient d'un point à un autre. Représentons par A', B', C' les valeurs qui prennent les (A, B, C) au point E.

Le rayon r de m étant une très petite quantité, les coordonnées (x', y', z') seront aussi très petites, et les (A', B', C') s'obtiendront à l'aide des (A, B, C) des composantes qui agissent, à la même époque, sur le point E, en remplaçant dans celles-ci (x, y, z) par $(x+x', y+y', z+z')$, en développant d'après le théorème de Taylor suivant les puissances de (x', y', z') , ce qui fournit

$$A' = A + \frac{dA}{dx} x' + \frac{dA}{dy} y' + \frac{dA}{dz} z' + \dots$$

$$B' = B + \frac{dB}{dx} x' + \frac{dB}{dy} y' + \frac{dB}{dz} z' + \dots$$

$$C' = C + \frac{dC}{dx} x' + \frac{dC}{dy} y' + \frac{dC}{dz} z' + \dots$$

Prenons les moments de ces forces par rapport aux axes des x' , des y' et des z' nous aurons:

$$C'y' - B'z' = Cy' + \frac{dC}{dx} x'y' + \frac{dC}{dy} y'^2 + \frac{dC}{dz} y'z' + \dots$$

$$- Bz' - \frac{dB}{dx} x'z' - \frac{dB}{dy} y'z' - \frac{dB}{dz} z'^2 \dots$$

$$A'z' - C'x' = Az' + \frac{dA}{dx} x'z' + \frac{dA}{dy} y'z' + \frac{dA}{dz} z'^2 + \dots$$

$$- Cx' - \frac{dC}{dx} x'^2 - \frac{dC}{dy} x'y' - \frac{dC}{dz} x'z' - \dots$$

$$B'x' - A'y' = Bx' + \frac{dB}{dx} x'^2 + \frac{dB}{dy} x'y' + \frac{dB}{dz} x'z' + \dots$$

$$- Ay' - \frac{dA}{dx} x'y' - \frac{dA}{dy} y'^2 - \frac{dA}{dz} y'z' - \text{etc.}$$

Multiplions les deux membres de chacune de ces équations par $\rho dx' dy' dz'$, intégrons e étendons les limites à la sphère toute entière, nous aurons pour les moments par rapport aux (x', y', z') des forces élastiques qui agissent sur la sphère toute entière

$$\int (C'y' - B'z') \rho dx' dy' dz' = \frac{4\pi r^5 \rho}{15} \left(\frac{dC}{dy} - \frac{dB}{dz} \right),$$

$$\int (A'z' - C'x') \rho dx' dy' dz' = \frac{4\pi r^5 \rho}{15} \left(\frac{dA}{dz} - \frac{dC}{dx} \right),$$

$$\int (B'x' - A'y') \rho dx' dy' dz' = \frac{4\pi r^5 \rho}{15} \left(\frac{dB}{dx} - \frac{dA}{dy} \right).$$

Appelons ε la vitesse de rotation de m , à l'époque t , et (p, q, r) les composantes de cette vitesse de rotation de m respectivement autour des axes des x' des y' et des z' , et observons que le moment d'inertie de la sphère m est $\frac{8\pi r^5 \rho}{15}$, nous aurons, réductions faites,

$$(2) \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{dC}{dy} - \frac{dB}{dz} \right), \\ \frac{dq}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{dA}{dz} - \frac{dC}{dx} \right), \\ \frac{dr}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{dB}{dx} - \frac{dA}{dy} \right), \\ \varepsilon^2 = p^2 + q^2 + r^2. \end{array} \right.$$

Telles sont les trois équations du mouvement de rotation provoqué par les forces élastiques de traction. Dès que la nature du milieu qu'on considère, sera donnée, il sera facile de déterminer en fonction de x, y, z et du temps t la forme des fonctions A, B et C et les équations (2) ne contiendront plus rien d'indéterminé.

Les trois équations prouvent que pour que la rotation de m soit nulle, il faut que l'on ait

$$\frac{dC}{dy} = \frac{dB}{dz}, \quad \frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}, \quad \frac{dB}{dx} = \frac{dA}{dy};$$

d'où l'on déduit:

$$\frac{dA}{dx} + \frac{dA}{dy} + \frac{dA}{dz} = \frac{d(A+B+C)}{dx}, \quad \frac{dB}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dB}{dz} = \frac{d(A+B+C)}{dy}, \quad \frac{dC}{dx} + \frac{dC}{dy} + \frac{dC}{dz} = \frac{d(A+B+C)}{dz}.$$

21.

Des forces élastiques de torsion.

Dans ce qui précède, nous avons cherché les expressions des composantes (A, B, C) des forces élastiques qui sont provoquées, à une époque t , dans le milieu que nous considérons lorsque, par l'influence d'une force extérieure, le centre de l'atome sphérique a été déplacé d'une très petite quantité de sa position d'équilibre. En outre, nous avons déterminé l'expression du mouvement de rotation que ces forces élastiques, ainsi produites, impriment à l'atome sphérique m .

Supposons maintenant que sans déplacer le centre de l'atome m , une force lui imprime un mouvement de rotation autour d'un de ses diamètres.

Il est hors de doute que si la translation d'un atome est capable de provoquer dans le milieu pondérable des forces élastiques, sa rotation doit en provoquer également. Car l'équilibre moléculaire est détruit dans l'un et dans l'autre cas; en effet, si l'expérience prouve qu'en étirant une barre

cylindrique dans le sens de la longueur on éprouve une résistance, elle prouve aussi qu'on éprouve une résistance en la tordant.

Dans le premier cas, cette résistance est dirigée, comme l'indique Fresnel dans son principe, suivant la plus courte distance qui sépare l'atome déplacé de la position qu'il occupait durant l'équilibre. Dans le cas d'une torsion, il est évident que la résistance est tangentielle à l'atome et située dans le plan de l'équateur. De plus l'expérience prouve que la torsion de l'atome m provoque une répulsion de m contre les atomes voisins dont les centres sont situés dans le plan de l'équateur de m . En effet, quand un cylindre est tordu suivant un plan perpendiculaire à son axe le diamètre du cylindre augmente.

22.

Forces élastiques provoquées par la composante autour de l'axe des z' .

Soit donc c (fig. 3) la position du centre de la sphère m ; les coordonnées de ce centre sont (x, y, z) .

Par le point c menons trois axes rectangulaires (cx', cy', cz') respectivement parallèles aux (x, y, z) .

Nommons, comme dans le paragraphe 18, ε la vitesse de rotation de l'atome sphérique m à l'époque t ; (p, q, r) les composantes de cette vitesse de rotation respectivement autour des axes des (x', y', z') ; on aura, comme on sait

$$\varepsilon^2 = p^2 + q^2 + r^2.$$

A l'époque t , la force accélératrice agissant sur la molécule m et tendant à accélérer son mouvement de rotation est représentée par

$$\frac{d\varepsilon}{dt}$$

et les composantes de cette force autour les axes des (x', y', z') sont

$$\frac{dp}{dt}, \frac{dq}{dt}, \frac{dr}{dt}.$$

Nous admettrons que la rotation soit dirigée de la gauche vers la droite.

Proposons-nous d'abord de déterminer l'expression des forces élastiques provoquées par la composante de la rotation de m autour de l'axe des z' .

Soit E le centre d'un atome m_1 , situé dans le plan des $(x'y')$, r la distance CE qui sépare le centre de m de celui de m_1 ; désignons par $(x+x, y+y, z+0)$, les coordonnées du point E , nous aurons

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

La force qui tend à accélérer le mouvement de rotation de m autour de z' est $\frac{dr}{dt}$; soit $\frac{dr}{dt} + \frac{dAr}{dt}$ celle qui tend à accélérer la rotation de m_1 , autour d'une parallèle à z' passant par son centre E .

Si $\frac{dr}{dt}$ surpasse $\frac{dr}{dt} + \frac{d\Delta r}{dt}$, l'action mutuelle de m et de m_1 consistera à retarder la rotation de m par une force tangentielle, située dans le plan des $(x' y')$, et dirigée perpendiculairement à la plus courte distance CE qui sépare les centres des deux atomes. Cette force sera donc dirigée suivant la tangente AB, de A vers B; elle sera proportionnelle à la différence $\frac{dr}{dt} - \left(\frac{dr}{dt} + \frac{d\Delta r}{dt}\right)$ et à une fonction $\psi(r)$ de la distance $CE = r$, fonction qui est essentiellement positive. Cette force élastique aura donc pour expression

$$-\frac{d\Delta r}{dt} \psi(r).$$

Il est facile de déterminer les composantes parallèles aux axes des (x', y', z') ou aux axes des (x, y, z) de cette force élastique à l'aide des projections X et Y de la droite CE, on trouvera :

composante parallèle à l'axe des x $\frac{-Y\psi(r)}{r} \frac{d\Delta r}{dt},$

composante parallèle à l'axe des y $\frac{X\psi(r)}{r} \frac{d\Delta r}{dt},$

composante parallèle à l'axe des z zéro . .

23.

Forces provoquées par la composante autour de l'axe des y' .

En répétant les mêmes raisonnements et des constructions semblables à celles du paragraphe précédent, nous trouverons l'expression des forces élastiques provoquées, à l'époque t , par la composante du mouvement de rotation de m autour de l'axe des y' .

Soit c (fig. 4) la position du centre de l'atome m dont les coordonnées sont (x, y, z) , E' celle du centre d'un atome m_1 situé dans le plan des $(z' x')$. Soient $(x+x, y+0, z+z)$ les coordonnées du point E', r la distance CE', on a

$$r^2 = x^2 + z^2.$$

La force élastique tangentielle sera dirigée suivant la droite A'B', de A' vers B', perpendiculairement à la droite CE' enfin elle sera située dans le plan des $(z' x')$ qui est aussi le plan dans lequel sont situés les équateurs de m et de m_1 .

La force qui, à l'époque t , tend à accélérer le mouvement de rotation de m autour de l'axe des y est $\frac{dq}{dt}$, celle qui tend à accélérer la rotation de m_1 autour d'une parallèle à y' passant par le centre E' est $\frac{dq}{dt} + \frac{d\Delta q}{dt}$, et si $\frac{dq}{dt}$ surpasse $\frac{dq}{dt} + \frac{d\Delta q}{dt}$ l'action mutuelle de m et de m_1 consiste à retarder la rotation de m ; cette force est proportionnelle à la différence $\frac{dq}{dt} - \left(\frac{dq}{dt} + \frac{d\Delta q}{dt}\right)$ et à une fonction $\psi(r)$ de r , $\psi(r)$ étant essentiellement positive. L'expression de cette force est

$$-\psi(r) \frac{d\Delta q}{dt}$$

et ses composantes parallèles aux (x, y, z) sont:

celle parallèle à l'axe des x	$\frac{z\psi(r)}{r} \frac{d \cdot \Delta q}{dt}$,
celle parallèle à l'axe des y	zéro,
celle parallèle à l'axe des z	$-\frac{x\psi(r)}{r} \frac{d \cdot \Delta q}{dt}$.

24.

Forces provoquées par la composante autour de l'axe des x' .

Enfin, la rotation de m autour de l'axe des x' engendrera des forces élastiques qu'on déterminera à l'aide de la construction (fig. 5).

c est toujours le centre de m , E' est la position du centre d'un atome m_s , E' est situé dans le plan des $(y' z')$ à une distance $CE' = r$ de c ; les coordonnées de E' sont $(x + 0, y + Y, z + Z)$, et l'on a

$$r^2 = Y^2 + Z^2.$$

$\frac{dp}{dt}$ est l'expression de la force qui, à l'époque t , accélère le mouvement de rotation de m autour de l'axe des x' ; $\frac{dp}{dt} + \frac{d \cdot \Delta p}{dt}$ celle qui accélère le mouvement de m_s autour d'un axe parallèle à x' et passant par le centre E' . La force élastique tendant à retarder le mouvement de m autour de x' est proportionnelle à $\frac{dp}{dt} - \left(\frac{dp}{dt} + \frac{d \cdot \Delta p}{dt} \right)$ et à une fonction $\psi(r)$ de r toujours positive. Cette force est dirigée suivant $A'B'$ tangente en r'' à l'atome m et par conséquent perpendiculaire à CE' . L'expression de cette force est

$$-\psi(r) \frac{d \cdot \Delta p}{dt},$$

et ses composantes sont

celle parallèle à l'axe des x	zéro,
celle parallèle à l'axe des y	$-\frac{z\psi(r)}{r} \frac{d \cdot \Delta p}{dt}$,
celle parallèle à l'axe des z	$\frac{Y\psi(r)}{r} \frac{d \cdot \Delta p}{dt}$.

25.

Répulsion provoquée par la rotation des atomes.

Il nous reste à trouver l'action répulsive que l'atome m qui tourne autour d'un de ses diamètres avec une vitesse de rotation ϵ exerce, comme nous l'avons vu, contre les atomes situés dans le plan de son équateur.

Considérons un atome m' dont le centre soit situé dans le plan de l'équateur de m et dont les coordonnées soient $(x + X, y + Y, z + Z)$, et soit r' la distance qui sépare le centre de m de celui de m' , on aura

$$r'^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

La force accélératrice de m est $\frac{d\varepsilon}{dt}$, celle de m' est $\frac{d \cdot (\varepsilon + \Delta\varepsilon)}{dt}$ ou $\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{d \cdot \Delta\varepsilon}{dt}$; la force répulsive sera proportionnelle à la différence $\frac{d\varepsilon}{dt} - \left(\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{d \cdot \Delta\varepsilon}{dt}\right) = -\frac{d \cdot \Delta\varepsilon}{dt}$ et à une fonction $f(r')$ de r' , $f(r')$ étant essentiellement positive. Cette force répulsive aura pour expression

$$f(r') \frac{d \cdot \Delta\varepsilon}{dt};$$

ses composantes parallèles aux (x, y, z) sont:

$$\begin{aligned} \text{celle parallèle à l'axe des } x & \dots \dots \frac{x f(r')}{r'} \frac{d \cdot \Delta\varepsilon}{dt}, \\ \text{celle parallèle à l'axe des } y & \dots \dots \frac{y f(r')}{r'} \frac{d \cdot \Delta\varepsilon}{dt}, \\ \text{celle parallèle à l'axe des } z & \dots \dots \frac{z f(r')}{r'} \frac{d \cdot \Delta\varepsilon}{dt}. \end{aligned}$$

La caractéristique S désignant une somme de termes semblables entre eux relatifs aux divers atomes dont les centres sont intégralement situés soit dans les plans $(x'y', x'z', y'z')$, ou dans le plan de l'équateur de m ; on aura pour la somme des composantes des forces élastiques provoquées par la rotation de m , en posant pour abrégier

$$\frac{\psi(r)}{r} = \varphi(r) \quad \text{et} \quad \frac{f(r')}{r'} = \varpi(r')$$

$$\begin{aligned} \text{composantes parallèles à l'axe des } x & \quad S_{zy}\varphi(r) \frac{d \cdot \Delta q}{dt} - S_{y\varphi}(r) \frac{d \cdot \Delta r}{dt} + S_x\varpi(r') \frac{d \cdot \Delta\varepsilon}{dt}, \\ \text{composantes parallèles à l'axe des } y & \quad S_x\varphi(r) \frac{d \cdot \Delta r}{dt} - S_{z\varphi}(r) \frac{d \cdot \Delta p}{dt} + S_y\varpi(r') \frac{d \cdot \Delta\varepsilon}{dt}, \\ \text{composantes parallèles à l'axe des } z & \quad S_y\varphi(r) \frac{d \cdot \Delta p}{dt} - S_x\varphi(r) \frac{d \cdot \Delta q}{dt} + S_z\varpi(r') \frac{d \cdot \Delta\varepsilon}{dt}. \end{aligned}$$

26.

Expression des composantes des forces élastiques de torsion.

Désignons par \mathfrak{A} les composantes parallèles à l'axe des x des forces élastiques provoquées par la rotation de m , par \mathfrak{B} celles parallèles à l'axe des y et par \mathfrak{C} celles parallèles à l'axe des z . Nous appellerons ces composantes, composantes des forces élastiques de torsion; nous aurons

$$\begin{aligned} \text{(3) } \dots \dots \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{A} &= S_{zy}\varphi(r) \frac{d \cdot \Delta q}{dt} - S_{y\varphi}(r) \frac{d \cdot \Delta r}{dt} + S_x\varpi(r') \frac{d \cdot \Delta\varepsilon}{dt}, \\ \mathfrak{B} &= S_x\varphi(r) \frac{d \cdot \Delta r}{dt} - S_{z\varphi}(r) \frac{d \cdot \Delta p}{dt} + S_y\varpi(r') \frac{d \cdot \Delta\varepsilon}{dt}, \\ \mathfrak{C} &= S_y\varphi(r) \frac{d \cdot \Delta p}{dt} - S_x\varphi(r) \frac{d \cdot \Delta q}{dt} + S_z\varpi(r') \frac{d \cdot \Delta\varepsilon}{dt}, \\ \varepsilon^2 &= p^2 + q^2 + r^2. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

On donnera aux expressions précédentes une forme plus simple et plus facile pour les applications en observant que $\frac{d\mathcal{A}\varepsilon}{dt}$ représente la différence entre la force $\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{d\mathcal{A}\varepsilon}{dt}$ qui, à l'époque t , accélère le mouvement de l'atome m' dont les coordonnées sont $(x+x, y+y, z+z)$ et la force $\frac{d\varepsilon}{dt}$ qui accélère le mouvement de l'atome m dont les coordonnées du centre sont (x, y, z) .

Mais ε est une fonction de x, y, z et de t ; on obtiendra donc $\varepsilon + \mathcal{A}\varepsilon$ en remplaçant dans ε , x par $x+x$, y par $y+y$, z par $z+z$, puis en développant d'après le théorème de Taylor, suivant les puissances de (x, y, z) . En négligeant les puissances supérieures de (x, y, z) à côté des premières, on trouvera

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\varepsilon &= \frac{d\varepsilon}{dx}x + \frac{d\varepsilon}{dy}y + \frac{d\varepsilon}{dz}z, \\ \frac{d\cdot\mathcal{A}\varepsilon}{dt} &= \frac{d^2\varepsilon}{dxdt}x + \frac{d^2\varepsilon}{dydt}y + \frac{d^2\varepsilon}{dzdt}z,\end{aligned}$$

et à l'aide de cette expression on trouvera sans peine

$$\begin{aligned}\text{Sx}\omega(r') \frac{d\mathcal{A}\varepsilon}{dt} &= \frac{d^2\varepsilon}{dxdt} \text{Sx}^2\omega(r') + \frac{d^2\varepsilon}{dydt} \text{Sxy}\omega(r') + \frac{d^2\varepsilon}{dzdt} \text{Sxz}\omega(r') \\ \text{Sy}\omega(r') \frac{d\mathcal{A}\varepsilon}{dt} &= \frac{d^2\varepsilon}{dxdt} \text{Sxy}\omega(r') + \frac{d^2\varepsilon}{dydt} \text{Sy}^2\omega(r') + \frac{d^2\varepsilon}{dzdt} \text{Syz}\omega(r'), \\ \text{Sz}\omega(r') \frac{d\mathcal{A}\varepsilon}{dt} &= \frac{d^2\varepsilon}{dxdt} \text{Sxz}\omega(r') + \frac{d^2\varepsilon}{dydt} \text{Syz}\omega(r') + \frac{d^2\varepsilon}{dzdt} \text{Sz}^2\omega(r').\end{aligned}$$

Or, si le corps est homogène on doit avoir

$$\text{Sxy}\omega(r') = 0, \text{Sxz}\omega(r') = 0, \text{Syz}\omega(r') = 0;$$

car, en supposant les atomes symétriquement distribués par rapport aux plans des coordonnées, les sommes qui contiennent une puissance impaire de x, y ou z sont nulles. On a donc

$$\begin{aligned}\text{Sx}\omega(r') \frac{d\mathcal{A}\varepsilon}{dt} &= \frac{d^2\varepsilon}{dt dx} \text{Sx}^2\omega(r'), \\ \text{Sy}\omega(r') \frac{d\mathcal{A}\varepsilon}{dt} &= \frac{d^2\varepsilon}{dt dy} \text{Sy}^2\omega(r'), \\ \text{Sz}\omega(r') \frac{d\mathcal{A}\varepsilon}{dt} &= \frac{d^2\varepsilon}{dt dz} \text{Sz}^2\omega(r').\end{aligned}$$

27.

Simplifications.

La valeur de $\frac{d\mathcal{A}r}{dt}$ telle qu'elle a été définie dans le paragraphe 22, est la différence entre $\left(\frac{dr}{dt} + \frac{d\mathcal{A}r}{dt}\right)$ et $\frac{dr}{dt}$. Or $\frac{dr}{dt}$ est, comme nous l'avons vu dans le même paragraphe, la force qui accélère la composante du mouvement de rotation de m autour de l'axe des z' fig. 3; $\left(\frac{dr}{dt} + \frac{d\mathcal{A}r}{dt}\right)$ est celle qui accélère le mouvement de rotation de m , autour d'une parallèle à l'axe des z' passant par le centre ε de m' , centre qui est situé dans le plan des $x'y'$.

L'atome m_1 a pour coordonnées $(x+x, y+y, z+o)$, les coordonnées de l'atome m sont (x, y, z) . Puisque r est une fonction de (x, y, z) et du temps t , on trouvera $r+\Delta r$ en changeant dans r , x en $x+x$, y en $y+y$, z en $z+o$, et en développant d'après le théorème de Taylor suivant les puissances ascendantes de (x, y, z) ; on aura en négligeant les puissances de x , y et de z supérieures à la première

$$\Delta r = \frac{dr}{dx}x + \frac{dr}{dy}y,$$

$$\frac{d\Delta r}{dt} = \frac{d^2r}{dxdt}x + \frac{d^2r}{dydt}y,$$

De même $\frac{dq}{dt} + \frac{d \cdot \Delta q}{dt}$ accélère (paragraphe 23) le mouvement de rotation autour d'un axe parallèle à celui des y' de l'atome m_2 (fig. 4), tandis que $\frac{dq}{dt}$ représente une force qui accélère la rotation de m autour de y' ; les coordonnées de m_2 sont $(x+x, y+o, z+z)$, ceux de m sont (x, y, z) et comme q est fonction de (x, y, z) et de t , on aura

$$\Delta q = \frac{dq}{dx}x + \frac{dq}{dz}z,$$

$$\frac{d\Delta q}{dt} = \frac{d^2q}{dxdt}x + \frac{d^2q}{dzdt}z.$$

On néglige les puissances supérieures à la première des quantités très petites x et z .

Enfin (paragraphe 24) $\frac{dp}{dt} + \frac{d\Delta p}{dt}$ accélère la rotation autour d'un axe parallèle à l'axe des x' et passant par le centre de figure de l'atome m_3 (fig. 5), $\frac{dp}{dt}$ accélère celle de l'atome m . L'atome m_3 est situé dans le plan des $(y'z')$ et les coordonnées de son centre sont $(x+o, y+y, z+z)$, celles de m sont (x, y, z) , on aura donc en opérant toujours de la même manière

$$\frac{d \cdot \Delta p}{dt} = \frac{d^2p}{dydt}y + \frac{d^2p}{dzdt}z.$$

28.

Expressions simplifiées des forces élastiques de torsion.

Si nous observons que toutes les sommes qui contiennent les puissances impaires de x , y ou de z sont nulles, les expressions du paragraphe précédent se réduiront à

$$S_y \varphi(r) \frac{d\Delta r}{dt} = \frac{d^2r}{dydt} S_y^2 \varphi(r), \quad S_x \varphi(r) \frac{d\Delta r}{dt} = \frac{d^2r}{dxdt} S_x^2 \varphi(r),$$

$$S_x \varphi(r) \frac{d \cdot \Delta q}{dt} = \frac{d^2q}{dxdt} S_x^2 \varphi(r), \quad S_z \varphi(r) \frac{d\Delta q}{dt} = \frac{d^2q}{dzdt} S_z^2 \varphi(r),$$

$$S_z \varphi(r) \frac{d\Delta p}{dt} = \frac{d^2p}{dzdt} S_z^2 \varphi(r), \quad S_y \varphi(r) \frac{d \cdot \Delta p}{dt} = \frac{d^2p}{dydt} S_y^2 \varphi(r).$$

En ayant égard à ces expressions et à celles trouvées dans le paragraphe 26, les équations (3) prendront la forme

$$(4) \dots \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A} = \frac{d^2q}{dzdt} S_z^2 \mathfrak{q}(r) - \frac{d^2r}{dydt} S_y^2 \mathfrak{q}(r) + \frac{d^2\varepsilon}{dxdt} S_x^2 \mathfrak{q}(r'), \\ \mathfrak{B} = \frac{d^2r}{dxdt} S_x^2 \mathfrak{q}(r) - \frac{d^2p}{dzdt} S_z^2 \mathfrak{q}(r) + \frac{d^2\varepsilon}{dydt} S_y^2 \mathfrak{q}(r'), \\ \mathfrak{C} = \frac{d^2p}{dydt} S_y^2 \mathfrak{q}(r) - \frac{d^2q}{dxdt} S_x^2 \mathfrak{q}(r) + \frac{d^2\varepsilon}{dzdt} S_z^2 \mathfrak{q}(r'). \end{array} \right.$$

$$\varepsilon^2 = p^2 + q^2 + r^2.$$

Telles sont, à l'époque t , les équations qui fournissent les composantes (\mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C}) parallèles aux axes des (x, y, z) des forces élastiques de torsion dans un corps homogène.

CHAPITRE II.

Expression des forces élastiques de traction, du mouvement de rotation, et des forces élastiques de torsion dans les corps homogènes et d'élasticité constante.

29.

Les expressions (b) du chapitre précédent, fournissent les valeurs des projections A, B, C des forces qui, à l'époque t , produisent les petites vibrations de l'atome m ; ces expressions ont la forme élégante que leur a donnée Cauchy. (x, y, z) sont les coordonnées de la position qu'occupe le centre de l'atome m lorsqu'il est en repos et c'est autour de cette position d'équilibre que m oscille; (ξ, η, ζ) sont, à l'époque t , les projections parallèlement aux (x, y, z) de ces petites oscillations de m . Ces variables (ξ, η, ζ) sont donc fonction de (x, y, z) et du temps t .

La molécule voisine m' , lorsqu'elle est en repos, a pour coordonnées $(x+x, y+y, z+z)$; et les projections parallèlement aux (x, y, z) de ses petits déplacements sont, à la même époque t , $(\xi + \Delta\xi, \eta + \Delta\eta, \zeta + \Delta\zeta)$. Enfin r est la distance qui sépare le centre de m de celui de m' durant l'équilibre, et $r + \varrho$ est la même distance qui les sépare après le temps t pendant le mouvement. On a donc comme on l'a vu au commencement du précédent chapitre

$$(a) \dots \left\{ \begin{array}{l} r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \\ (r + \varrho)^2 = (x + \Delta\xi)^2 + (y + \Delta\eta)^2 + (z + \Delta\zeta)^2, \end{array} \right.$$

ou en négligeant les carrés et les puissances supérieures de $\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\zeta$,

$$\varrho = \frac{x\Delta\xi + y\Delta\eta + z\Delta\zeta}{r}.$$

Ainsi ϱ représente la partie variable de la distance, qui à l'époque t , sépare le centre de m de celui de m' . D'après ce qui précède, il est évident qu'on obtiendra $\xi + \Delta\xi, \eta + \Delta\eta, \zeta + \Delta\zeta$, à

l'aide de ξ, η, ζ , en changeant dans celles-ci (x, y, z) en $(x+x, y+y, z+z)$. Développons d'après le théorème de Taylor suivant les puissances de x, y, z , nous aurons

$$(b) \dots \left\{ \begin{array}{l} d\xi = \frac{d\xi}{dx}x + \frac{d\xi}{dy}y + \frac{d\xi}{dz}z + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\xi}{dx^2}x^2 + \frac{d^2\xi}{dy^2}y^2 + \frac{d^2\xi}{dz^2}z^2 + 2\frac{d^2\xi}{dxdy}xy + 2\frac{d^2\xi}{dxdz}xz + 2\frac{d^2\xi}{dydz}yz \right) + \text{etc.} \\ d\eta = \frac{d\eta}{dx}x + \frac{d\eta}{dy}y + \frac{d\eta}{dz}z + \dots \\ d\zeta = \frac{d\zeta}{dx}x + \frac{d\zeta}{dy}y + \frac{d\zeta}{dz}z + \dots \end{array} \right.$$

et par suite

$$\rho = \frac{1}{r} \left[\begin{array}{l} \frac{d\xi}{dx}x^2 + \frac{d\eta}{dy}y^2 + \frac{d\zeta}{dz}z^2 + \left(\frac{d\zeta}{dy} + \frac{d\eta}{dz} \right) yz, \\ + \left(\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx} \right) xz + \left(\frac{d\eta}{dx} + \frac{d\xi}{dy} \right) xy. \end{array} \right]$$

Or, d'après la première équation (a) $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$ sont les cosinus des angles que fait la direction de r avec les axes des (x, y, z) ; désignons respectivement ces *cosinus* par $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, la valeur de ρ pourra s'écrire

$$\frac{\rho}{r} = \left[\begin{array}{l} \frac{d\xi}{dx} \cos^2\alpha + \frac{d\eta}{dy} \cos^2\beta + \frac{d\zeta}{dz} \cos^2\gamma + \left(\frac{d\zeta}{dy} + \frac{d\eta}{dz} \right) \cos\beta \cos\gamma \\ + \left(\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx} \right) \cos\gamma \cos\alpha + \left(\frac{d\eta}{dx} + \frac{d\xi}{dy} \right) \cos\alpha \cos\beta. \end{array} \right]$$

Le rapport $\frac{\rho}{r}$ est la dilatation linéaire au point (x, y, z) . Cette dilatation se réduit à $\frac{d\xi}{dx}$ si r est parallèle aux x , ou si $\alpha=0, \beta=\frac{\pi}{2}, \gamma=\frac{\pi}{2}$; à $\frac{d\eta}{dy}$ si r est parallèle aux y , ou si $\alpha=\frac{\pi}{2}, \beta=0, \gamma=\frac{\pi}{2}$; à $\frac{d\zeta}{dz}$ si r est parallèle aux z , ou si $\alpha=\frac{\pi}{2}, \beta=\frac{\pi}{2}, \gamma=0$.

D'après ces valeurs, la ligne dx , prise lors de l'état primitif, devient $dx \left(1 + \frac{d\xi}{dx} \right)$ après la déformation, dy devient $dy \left(1 + \frac{d\eta}{dy} \right)$ et dz devient $dz \left(1 + \frac{d\zeta}{dz} \right)$. L'élément primitif $dx dy dz$ devient alors

$$dx dy dz \left(1 + \frac{d\xi}{dx} \right) \left(1 + \frac{d\eta}{dy} \right) \left(1 + \frac{d\zeta}{dz} \right),$$

ou simplement

$$dx dy dz \left(1 + \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} \right),$$

en négligeant les produits des dilatations linéaires; et la dilatation cubique au point (x, y, z) , que nous désignerons dorénavant par \mathfrak{D} , est donnée par la formule

$$(5) \dots \mathfrak{D} = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}$$

30.

Ramenons maintenant les seconds membres des expressions (b) du paragraphe 19, qui ont la forme générale que leur a donnée Cauchy, à ce qu'ils deviennent lorsqu'on considère un milieu homogène et d'élasticité constante.

Remplaçons dans ces expressions $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ et $\Delta\zeta$ par les développements (b) du paragraphe précédent, et observons que dans un corps homogène et d'élasticité constante, les atomes sont régulièrement distribués, c'est-à-dire qu'on peut regarder chaque atome comme centre de tout le système et supposer que tous sont placés deux à deux symétriquement par rapport à l'un d'eux, en un mot, que leur distribution est la même par rapport aux trois plans des coordonnées. De cette régularité dans la distribution des atomes résulte comme on sait, que toute série telle que $\Sigma mx^2f(r)$, $\Sigma my^2f(r)$, $\Sigma mz^2f(r)$, $\Sigma mxy^2f(r)$, $\Sigma mxz^2f(r)$, et en général toute série qui contient une puissance impaire de x de y ou de z est nulle. En outre, puisque la distribution des atomes est la même par rapport aux trois plans, on doit avoir

$$\begin{aligned} \Sigma mx^2f(r) &= \Sigma my^2f(r) = \Sigma mz^2f(r), \\ \Sigma mx^2y^2 \frac{f'(r)}{r} &= \Sigma mx^2z^2 \frac{f'(r)}{r} = \Sigma my^2z^2 \frac{f'(r)}{r}, \\ \Sigma mx^4 \frac{f'(r)}{r} &= \Sigma my^4 \frac{f'(r)}{r} = \Sigma mz^4 \frac{f'(r)}{r}. \end{aligned}$$

Cela étant, les expressions des A, B, C fournies par les équations (b) du paragraphe 19 prendront, réductions faites, la forme suivante:

$$\begin{aligned} A &= \frac{d^2\xi}{dx^2} \left(\Sigma \frac{mx^2f(r)}{2} + \Sigma \frac{mx^4f'(r)}{2r} \right) + \frac{d^2\xi}{dy^2} \left(\Sigma \frac{my^2f(r)}{2} + \Sigma \frac{mx^2y^2f'(r)}{2r} \right) \\ &\quad + \frac{d^2\xi}{dz^2} \left(\Sigma \frac{mz^2f(r)}{2} + \Sigma \frac{mx^2z^2f'(r)}{2r} \right) + \frac{d^2\eta}{dxdy} \Sigma \frac{mx^2y^2f'(r)}{r} + \frac{d^2\zeta}{dxdz} \Sigma \frac{mx^2z^2f'(r)}{r}, \\ B &= \frac{d^2\eta}{dx^2} \left(\Sigma \frac{mx^2f(r)}{2} + \Sigma \frac{mx^2y^2f'(r)}{2r} \right) + \frac{d^2\eta}{dy^2} \left(\Sigma \frac{my^2f(r)}{2} + \Sigma \frac{my^4f'(r)}{2r} \right) \\ &\quad + \frac{d^2\eta}{dz^2} \left(\Sigma \frac{mz^2f(r)}{2} + \Sigma \frac{my^2z^2f'(r)}{2r} \right) + \frac{d^2\xi}{dxdy} \Sigma \frac{mx^2y^2f'(r)}{r} + \frac{d^2\zeta}{dydz} \Sigma \frac{my^2z^2f'(r)}{r}, \\ C &= \frac{d^2\zeta}{dx^2} \left(\Sigma \frac{mx^2f(r)}{2} + \Sigma \frac{mx^2z^2f'(r)}{2r} \right) + \frac{d^2\zeta}{dy^2} \left(\Sigma \frac{my^2f(r)}{2} + \Sigma \frac{my^2z^2f'(r)}{2r} \right) \\ &\quad + \frac{d^2\zeta}{dz^2} \left(\Sigma \frac{mz^2f(r)}{2} + \Sigma \frac{mz^4f'(r)}{2r} \right) + \frac{d^2\xi}{dxdz} \Sigma \frac{mx^2z^2f'(r)}{r} + \frac{d^2\eta}{dydz} \Sigma \frac{my^2z^2f'(r)}{r}. \end{aligned}$$

31.

Concevons maintenant qu'on fasse tourner les axes des coordonnées de l'angle φ autour d'une parallèle à l'axe des z ; on aura

$$x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi,$$

et

$$x'^4 = x^4 \cos^4 \varphi + y^4 \sin^4 \varphi + 6x^2 y^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + 4x^3 y \cos^3 \varphi \sin \varphi + 4x y^3 \cos \varphi \sin^3 \varphi;$$

or, les sommes qui contiennent des puissances impaires de x ou de y sont nulles, et en outre on

doit avoir $\Sigma \frac{m y^4 f'(r)}{2r} = \Sigma \frac{m x^4 f'(r)}{2r}$, d'où résulte

$$\begin{aligned} \Sigma \frac{m x'^4 f'(r)}{2r} &= (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) \Sigma \frac{m x^4 f'(r)}{2r} + 6 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \Sigma \frac{m x^2 y^2 f'(r)}{2r} \\ &= (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)^2 \Sigma \frac{m x^4 f'(r)}{2r} + 2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \left[3 \Sigma \frac{m x^2 y^2 f'(r)}{2r} - \Sigma \frac{m x^4 f'(r)}{2r} \right]. \end{aligned}$$

Mais la quantité $\Sigma \frac{m x'^4 f'(r)}{2r}$ doit conserver la même valeur, quelle que soit la direction des axes des coordonnées; on a donc

$$\Sigma \frac{m x^4 f'(r)}{2r} = 3 \Sigma \frac{m x^2 y^2 f'(r)}{2r},$$

et ainsi

$$\Sigma \frac{m x^4 f'(r)}{2r} = \frac{1}{2} \Sigma \frac{m x^2 y^2 f'(r)}{r}.$$

Posons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma m x^2 f(r) &= \frac{1}{2} \Sigma m y^2 f(r) = \frac{1}{2} \Sigma m z^2 f(r) = g, \\ \frac{1}{2} \Sigma \frac{m x^2 y^2 f'(r)}{r} &= \frac{1}{2 \cdot 3} \Sigma \frac{m x^4 f'(r)}{r} = h, \end{aligned}$$

les expressions des (A, B, C) du paragraphe précédent deviennent en définitif

$$(6) \dots \left\{ \begin{aligned} A &= (g+h) \left(\frac{d^2 \xi}{dx^2} + \frac{d^2 \xi}{dy^2} + \frac{d^2 \xi}{dz^2} \right) + 2h \frac{d \cdot}{dx} \left(\frac{d \xi}{dx} + \frac{d \eta}{dy} + \frac{d \zeta}{dz} \right), \\ B &= (g+h) \left(\frac{d^2 \eta}{dx^2} + \frac{d^2 \eta}{dy^2} + \frac{d^2 \eta}{dz^2} \right) + 2h \frac{d \cdot}{dy} \left(\frac{d \xi}{dx} + \frac{d \eta}{dy} + \frac{d \zeta}{dz} \right), \\ C &= (g+h) \left(\frac{d^2 \zeta}{dx^2} + \frac{d^2 \zeta}{dy^2} + \frac{d^2 \zeta}{dz^2} \right) + 2h \frac{d \cdot}{dz} \left(\frac{d \xi}{dx} + \frac{d \eta}{dy} + \frac{d \zeta}{dz} \right). \end{aligned} \right.$$

Il est facile de s'assurer, en ayant égard à l'équation (5), que les expressions des A, B, C peuvent encore s'écrire sous la forme suivante

$$(7) \dots \left\{ \begin{aligned} A &= (g+3h) \frac{d \vartheta}{dx} + (g+h) \left[\frac{d \cdot}{dz} \left(\frac{d \xi}{dz} - \frac{d \zeta}{dx} \right) - \frac{d \cdot}{dy} \left(\frac{d \eta}{dx} - \frac{d \xi}{dy} \right) \right], \\ B &= (g+3h) \frac{d \vartheta}{dy} + (g+h) \left[\frac{d \cdot}{dx} \left(\frac{d \eta}{dx} - \frac{d \xi}{dy} \right) - \frac{d \cdot}{dz} \left(\frac{d \zeta}{dy} - \frac{d \eta}{dz} \right) \right], \\ C &= (g+3h) \frac{d \vartheta}{dz} + (g+h) \left[\frac{d \cdot}{dy} \left(\frac{d \zeta}{dy} - \frac{d \eta}{dz} \right) - \frac{d \cdot}{dx} \left(\frac{d \xi}{dz} - \frac{d \zeta}{dx} \right) \right], \\ \vartheta &= \frac{d \xi}{dx} + \frac{d \eta}{dy} + \frac{d \zeta}{dz}. \end{aligned} \right.$$

On ne perdra point de vue que ϑ désigne la dilatation au point (x, y, z) .

32.

Les seconds membres des équations (7) fournissent l'expression des composantes des forces élastiques de traction, forces qui résultent, à l'époque t , du déplacement du centre de la molécule m , lorsque le milieu qu'on considère est homogène et d'élasticité constante. Ces expressions sont bien connues; elles ont été trouvées par Cauchy et par Lamé. Examinons maintenant si ces forces ne sont pas de nature à faire tourner l'atome m autour de son centre de figure. Si tel est le cas, si ces forces tendent à faire tourner m , elles provoqueront évidemment des forces élastiques tangentiels, qui n'entrent pas dans les équations (7), et auxquelles on devra avoir égard puisqu'elles sont de nature à modifier le mouvement de m .

Dans le paragraphe 20, nous avons vu que les seconds membres des équations (2) fournissent à l'aide des (A, B, C), des couples qui, à l'époque t , agissent sur m , et que p, q, r représentent les composantes des vitesses de rotation de m . Déterminons maintenant la forme des équations (2) lorsque le milieu est homogène et d'élasticité constante.

On déduit des équations (7)

$$\frac{dc}{dy} = (g+3h) \frac{d^2\vartheta}{dydz} + (g+h) \left[\frac{d^2}{dy^2} \left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} \right) - \frac{d^2}{dx dy} \left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx} \right) \right],$$

$$\frac{dB}{dz} = (g+3h) \frac{d^2\vartheta}{dydz} + (g+h) \left[\frac{d^2}{dx dz} \left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} \right) - \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} \right) \right],$$

ce qui fournit, réductions faites,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dc}{dy} - \frac{dB}{dz} \right) = \left(\frac{g+h}{2} \right) \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} \right) + \frac{d^2}{dy^2} \left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} \right) + \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} \right) \right].$$

Remarquons d'abord que le terme en ϑ a disparu dans l'expression précédente, qui est celle d'un couple qui fait tourner l'atome sphérique m autour de l'axe des x . Cette remarque est importante et nous aurons l'occasion d'y revenir plus tard.

Si nous nommons, avec Lamé, potentiel du second ordre de α l'expression

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2} + \frac{d^2\alpha}{dy^2} + \frac{d^2\alpha}{dz^2},$$

et si, pour abrégé, nous désignons par $\mathcal{A}^2\alpha$ le potentiel du second ordre par rapport à α , en sorte que prendre le \mathcal{A}^2 d'une fonction c'est faire la somme des trois résultats obtenus, en dérivant successivement cette fonction deux fois par rapport à x , deux fois par rapport à y et deux fois par rapport à z , on pourra écrire

$$\mathcal{A}^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2},$$

et

$$\mathcal{A}^4 = \frac{d^4}{dx^4} + \frac{d^4}{dy^4} + \frac{d^4}{dz^4} + 2 \frac{d^4}{dx^2 dy^2} + 2 \frac{d^4}{dx^2 dz^2} + 2 \frac{d^4}{dy^2 dz^2},$$

nous pourrons, à l'aide de ces notations adoptées par Lamé, écrire comme suit l'équation précédente

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dC}{dy} - \frac{dB}{dz} \right) = \frac{g+h}{2} A^2 \left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} \right).$$

Remplaçons dans la première des équations (2) l'expression de $\frac{1}{2} \left(\frac{dC}{dy} - \frac{dB}{dz} \right)$ par cette valeur, nous aurons pour l'équation du mouvement de rotation de m autour d'un axe parallèle à l'axe des x ,

$$(8) \dots \begin{cases} \frac{dp}{dt} = \frac{g+h}{2} A^2 \left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} \right), \\ \frac{dq}{dt} = \frac{g+h}{2} A^2 \left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx} \right), \\ \frac{dr}{dt} = \frac{g+h}{2} A^2 \left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} \right), \\ \varepsilon^2 = p^2 + q^2 + r^2. \end{cases}$$

La seconde et la troisième équation précédente s'obtiennent à l'aide des groupes d'équations (7) et (2) de la même manière qu'on a obtenu la première.

Les trois premières équations précédentes serviront à déterminer p , q , r , et la quatrième fournira la vitesse de rotation de m . De plus, on sait que les *cosinus* des angles que fait l'axe instantané de rotation avec les axes des (x, y, z) sont fournis respectivement par les expressions

$$\frac{p}{\varepsilon}, \quad \frac{q}{\varepsilon}, \quad \frac{r}{\varepsilon};$$

en sorte que ce mouvement n'a plus rien d'indéterminé.

Pour que la vitesse de rotation fût nulle, il faudrait que l'on eût:

$$(d) \dots \dots \frac{d\zeta}{dy} = \frac{d\eta}{dz}, \quad \frac{d\xi}{dz} = \frac{d\zeta}{dx}, \quad \frac{d\eta}{dx} = \frac{d\xi}{dy},$$

or, nous verrons que quand ces conditions sont remplies le mouvement vibratoire ne saurait plus être transversal ou lumineux, mais qu'il pourrait encore être longitudinal.

33.

Si les équations (d) n'ont pas lieu, l'atome m tourne autour d'un de ses diamètres et ce mouvement provoque des forces élastiques de torsion qu'il n'est pas permis de négliger, puisque les forces élastiques de torsion fournissent des composantes parallèles aux axes (x, y, z) . Nous avons, dans le chapitre précédent, représenté ces composantes par $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ et leurs expressions sont données par le groupe d'équations (4) du paragraphe 28. Or, ces composantes agissent sur l'atome m de même et en même temps que les composantes (A, B, C) en sorte que les composantes qui agissent sur m , à l'époque t , sont:

celles parallèles à l'axe des x $A + \mathfrak{A}$,
 celles parallèles à l'axe des y $B + \mathfrak{B}$,
 celles parallèles à l'axe des z $C + \mathfrak{C}$,

et l'on doit avoir pour les équations du mouvement de m ,

$$(9) \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2\xi}{dt^2} = A + \mathfrak{A}, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} = B + \mathfrak{B}, \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} = C + \mathfrak{C}. \end{array} \right.$$

34.

Cherchons l'expression des $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ lorsque le corps est homogène et d'élasticité constante. Dans ce cas les molécules sont symétriquement distribuées par rapport aux plans des coordonnées et l'on sait qu'on doit avoir alors

$$S_z^2\varphi(r) = S_r^2\varphi(r) = S_x^2\varphi(r) = 2s^2,$$

$$S_x^2\omega(r') = S_y^2\omega(r') = S_z^2\omega(r') = k^2.$$

s et k étant des constantes à déterminer par l'expérience pour chaque milieu en particulier. Substituons ces valeurs dans les équations (4) du paragraphe 28, nous aurons pour les composantes parallèles aux (x, y, z) des forces élastiques de torsion qui, à l'époque t , réagissent sur l'atome m ,

$$\mathfrak{A} = 2s^2 \left(\frac{d^2q}{dt dz} - \frac{d^2r}{dt dy} \right) + k^2 \frac{d^2\varepsilon}{dt dx},$$

$$\mathfrak{B} = 2s^2 \left(\frac{d^2r}{dt dx} - \frac{d^2p}{dt dz} \right) + k^2 \frac{d^2\varepsilon}{dt dy},$$

$$\mathfrak{C} = 2s^2 \left(\frac{d^2p}{dt dy} - \frac{d^2q}{dt dx} \right) + k^2 \frac{d^2\varepsilon}{dt dz}.$$

ou en ayant égard aux équations (8)

$$(10) \dots \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A} = s^2(g+h) \mathcal{A}^2 \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{d\xi}{ds} - \frac{d\zeta}{dx} \right) - \frac{d}{dy} \left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} \right) \right] + k^2 \frac{d^2\varepsilon}{dt dx}, \\ \mathfrak{B} = s^2(g+h) \mathcal{A}^2 \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} \right) - \frac{d}{ds} \left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} \right) \right] + k^2 \frac{d^2\varepsilon}{dt dy}, \\ \mathfrak{C} = s^2(g+h) \mathcal{A}^2 \left[\frac{d}{dy} \left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx} \right) \right] + k^2 \frac{d^2\varepsilon}{dt dz}, \end{array} \right.$$

$$\varepsilon^2 = p^2 + q^2 + r^2.$$

Substituons dans les équations (9) les valeurs des (A, B, C) fournies par le groupe des

équations (7) du paragraphe 31 et les valeurs (A, B, C) du groupe des équations précédentes, nous trouverons enfin pour les équations du mouvement de l'atome m

$$(11) \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= (g+3h)\frac{d\vartheta}{dx} + (g+h) \left\{ \frac{d}{dz} \left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx} \right) - \frac{d}{dy} \left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} \right) \right\} + \beta^2 A^2 \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx} \right) - \frac{d}{dy} \left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} \right) \right] \\ &\quad + k^2 \frac{d^2\varepsilon}{dt dx}, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= (g+3h)\frac{d\vartheta}{dy} + (g+h) \left\{ \frac{d}{dx} \left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} \right) - \frac{d}{dz} \left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} \right) \right\} + \beta^2 A^2 \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} \right) - \frac{d}{dz} \left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} \right) \right] \\ &\quad + k^2 \frac{d^2\varepsilon}{dt dy}, \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= (g+3h)\frac{d\vartheta}{dz} + (g+h) \left\{ \frac{d}{dy} \left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx} \right) \right\} + \beta^2 A^2 \left[\frac{d}{dy} \left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx} \right) \right] \\ &\quad + k^2 \frac{d^2\varepsilon}{dt dz}, \\ \vartheta &= \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}, \\ \varepsilon^2 &= p^2 + q^2 + r^2. \end{aligned} \right.$$

L'intégration de ces trois équations doit fournir les propriétés de la chaleur de conductibilité aussi bien que celles de la chaleur rayonnante et de la lumière et nous faire connaître le procédé mécanique employé par la nature pour transformer la chaleur rayonnante en chaleur de conductibilité et réciproquement.

Nous terminerons ce chapitre par une observation générale.

Nous avons vu que quand un atome m est déplacé d'une très petite quantité de sa position d'équilibre, les actions réciproques de m et des atomes voisins consistent à repousser cet atome m vers sa position d'équilibre. Or, ces forces provoquent m à tourner autour d'un de ses diamètres, ce mouvement engendre à son tour des forces élastiques que nous avons été amenés naturellement à déterminer en suivant une voie analogue à celle qu'ont suivie Fresnel et les géomètres de son école pour déterminer les lois du mouvement de la lumière. Nous sommes arrivés à cette conséquence si importante que le mouvement de rotation engendre des forces élastiques qui sont de nature à déplacer le centre de l'atome. Ainsi pas de déplacement transversal de m sans qu'en même temps il n'y ait rotation, mais aussi pas de rotation sans qu'en même temps il n'y ait de déplacement transversal, et en effet les équations (4) prouvent que les forces élastiques provoquées par la rotation, sont des composantes (A, B, C) parallèles aux (x, y, z) qui nécessairement déplacent le centre de m .

De là une connexité entre le mouvement vibratoire de l'atome qui produit le rayonnement dans lequel le temps est un *cosinus*, et le mouvement calorifique qui n'a rien de périodique, qui diminue avec le temps sans pouvoir jamais devenir rigoureusement nul et dans lequel le temps est une exponentielle négative. Ce sont ces dernières propriétés auxquelles nous conduira l'intégration des équations (11).

CHAPITRE III.

Intégration des équations qui régissent les mouvements des atomes dans l'hypothèse que le milieu qu'on considère est parfaitement translucide et diathermane.

35.

Simplification des équations aux différentielles partielles qui régissent les mouvements des atomes.

Plaçons l'origine sur la première onde plane qui met en mouvement le premier atome de la surface du milieu pondérable que nous considérons.

Soient (m, n, l) les *cosinus* des angles que la normale à cette onde, qui est la direction de la propagation des vibrations, fait avec les axes des (x, y, z) , on aura

$$(a) \dots m^2 + n^2 + l^2 = 1.$$

Si l'on désigne par P la distance de l'origine à la dernière onde plane qui vibre, l'équation du plan de celle-ci sera

$$P = mx + ny + lz.$$

Soit τ la durée d'une vibration, λ la longueur d'ondulation, V la vitesse de la propagation des ondes, en sorte qu'on ait

$$(c) \dots V = \frac{\lambda}{\tau},$$

V est une constante; λ est susceptible d'une infinité de valeurs, à chaque valeur particulière de λ correspond une valeur de τ telle que le rapport de λ à τ soit toujours égal à V .

Enfin soient (α, β, γ) les *cosinus* des angles que fait la direction de la vibration avec les (x, y, z) , on aura

$$(b) \dots \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Nous satisferons aux équations (11) du paragraphe 34 en posant

$$(A) \dots \begin{cases} u = c \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{mx + ny + lz}{\lambda} \right) & s = c \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{mx + ny + lz}{\lambda} \right), \\ \xi = \alpha u, & \eta = \beta u, & \zeta = \gamma u. \end{cases}$$

De ces valeurs on déduit pour l'expression de la dilatation \mathcal{D}

$$(e) \dots \mathcal{D} = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = \frac{2\pi}{\lambda} (m\alpha + n\beta + l\gamma)s.$$

Posons pour simplifier

$$(d) \dots m\alpha + n\beta + l\gamma = \sigma,$$

σ représentera le *cosinus* de l'angle que fait la direction de la vibration avec celle de la propagation du mouvement vibratoire.

36.

Valeur de la vitesse de rotation quand le mouvement est vibratoire.

L'expression de la vitesse de rotation ε s'obtient à l'aide de la cinquième équation (11)

$$\varepsilon^2 = p^2 + q^2 + r^2,$$

et des trois premières équations (8) qui fournissent les valeurs de (p, q, r) .

On déduit des valeurs des (ξ, η, ζ) du paragraphe précédent, en ayant égard à l'équation (a) les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} &= \frac{2\pi}{\lambda} s(\gamma n - \beta l), & A^2 \cdot \left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} \right) &= -\frac{8\pi^3}{\lambda^3} s(\gamma n - \beta l); \\ \frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx} &= \frac{2\pi}{\lambda} s(\alpha l - \gamma m), & A^2 \cdot \left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx} \right) &= -\frac{8\pi^3}{\lambda^3} s(\alpha l - \gamma m); \\ \frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} &= \frac{2\pi}{\lambda} s(\beta m - \alpha n), & A^2 \cdot \left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} \right) &= -\frac{8\pi^3}{\lambda^3} s(\beta m - \alpha n). \end{aligned}$$

Substituons ces expressions dans les équations (8) et intégrons par rapport à t ,

$$(f) \dots \begin{cases} p = \frac{4\pi^2\tau}{\lambda^3} \left(\frac{g+h}{2} \right) (\gamma n - \beta l) u, \\ q = \frac{4\pi^2\tau}{\lambda^3} \left(\frac{g+h}{2} \right) (\alpha l - \gamma m) u, \\ r = \frac{4\pi^2\tau}{\lambda^3} \left(\frac{g+h}{2} \right) (\beta m - \alpha n) u, \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$(f') \dots \dots \varepsilon = \frac{4\pi^2\tau}{\lambda^3} \left(\frac{g+h}{2} \right) u \sqrt{(\gamma n - \beta l)^2 + (\alpha l - \gamma m)^2 + (\beta m - \alpha n)^2};$$

ou en ayant égard aux équations (a) et (b) du paragraphe précédent

$$\varepsilon = \frac{4\pi^2\tau}{\lambda^3} \left(\frac{g+h}{2} \right) u \sqrt{1 - (\alpha m + \beta n + \gamma l)^2},$$

ou plus simplement en ayant égard à l'équation (d) du paragraphe précédent

$$(g) \dots \dots \varepsilon = \frac{4\pi^2\tau}{\lambda^3} \left(\frac{g+h}{2} \right) u \sqrt{1 - \sigma^2}.$$

37.

Équations de condition.

Si, après avoir convenablement différencié les expressions des $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$ et ε des deux paragraphes précédents, nous les substituons dans les trois premières équations du paragraphe 34,

et si nous avons égard aux équations (a), (b), (c), (d) et (e) du paragraphe 35 nous trouverons sans peine les équations de condition suivantes :

$$V^2\alpha = (g+3h)m\sigma + (g+h) \left[l^2\alpha + n^2\alpha + m^2\alpha - mly - mn\beta - \frac{4\pi^2g^2}{\lambda^2} (l^2\alpha + n^2\alpha + m^2\alpha - m^2\alpha - mlg - mn\beta) \right] - \frac{4\pi^2mk^2}{\lambda^2} \left(\frac{g+h}{2} \right) \sqrt{1-\sigma^2},$$

$$V^2\beta = (g+3h)n\sigma + (g+h) \left[m^2\beta + l^2\beta + n^2\beta - n^2\beta - mn\alpha - nly - \frac{4\pi^2g^2}{\lambda^2} (m^2\beta + l^2\beta + n^2\beta - n^2\beta - mn\alpha - nly) \right] - \frac{4\pi^2nk^2}{\lambda^2} \left(\frac{g+h}{2} \right) \sqrt{1-\sigma^2},$$

$$V^2\gamma = (g+3h)l\sigma + (g+h) \left[n^2\gamma + m^2\gamma + l^2\gamma - l^2\gamma - nl\beta - ml\alpha - \frac{4\pi^2g^2}{\lambda^2} (n^2\gamma + m^2\gamma + l^2\gamma - l^2\gamma - nl\beta - ml\alpha) \right] - \frac{4\pi^2lk^2}{\lambda^2} \left(\frac{g+h}{2} \right) \sqrt{1-\sigma^2}.$$

Ces équations peuvent s'écrire plus simplement comme suit si l'on a égard à l'équation (d) du paragraphe (35),

$$(12) \dots \begin{cases} V^2\alpha = (g+3h)m\sigma + (g+h) \left[\alpha - m\sigma - \frac{4\pi^2g^2}{\lambda^2} (\alpha - m\sigma) \right] - \frac{4\pi^2mk^2}{\lambda^2} \left(\frac{g+h}{2} \right) \sqrt{1-\sigma^2}, \\ V^2\beta = (g+3h)n\sigma + (g+h) \left[\beta - n\sigma - \frac{4\pi^2g^2}{\lambda^2} (\beta - n\sigma) \right] - \frac{4\pi^2nk^2}{\lambda^2} \left(\frac{g+h}{2} \right) \sqrt{1-\sigma^2}, \\ V^2\gamma = (g+3h)l\sigma + (g+h) \left[\gamma - l\sigma - \frac{4\pi^2g^2}{\lambda^2} (\gamma - l\sigma) \right] - \frac{4\pi^2lk^2}{\lambda^2} \left(\frac{g+h}{2} \right) \sqrt{1-\sigma^2}. \end{cases}$$

38.

Des vibrations longitudinales.

Or σ représente le *cosinus* de l'angle que fait la direction du déplacement de l'atome m , à l'époque t , avec la direction de la propagation des vibrations. Si nous faisons

$$\sigma = 1,$$

la direction du déplacement de l'atome m sera parallèle à la direction de la propagation; dans ce cas on dit que la vibration est longitudinale. Pour $\sigma = 1$ les équations (12) se réduisent à

$$V^2\alpha = (g+3h)m + (g+h) \left[\alpha - m - \frac{4\pi^2g^2}{\lambda^2} (\alpha - m) \right],$$

$$V^2\beta = (g+3h)n + (g+h) \left[\beta - n - \frac{4\pi^2g^2}{\lambda^2} (\beta - n) \right],$$

$$V^2\gamma = (g+3h)l + (g+h) \left[\gamma - l - \frac{4\pi^2g^2}{\lambda^2} (\gamma - l) \right].$$

On observera que le terme provenant de la vitesse de rotation ε a disparu, en sorte que la vitesse de rotation n'a aucune action sur les vibrations longitudinales.

Ajoutons les trois équations précédentes après avoir multiplié la première par α , la seconde par β et la troisième par γ nous aurons, en ayant égard aux équations du paragraphe 35,

$$V^2 = g + 3h.$$

Il résulte donc des équations (12) que la vitesse de propagation des vibrations longitudinales est constante et égale à $\sqrt{g + 3h}$. Pour distinguer cette vitesse dans ce qui va suivre désignons la par Ω , nous aurons

$$(13) \dots V = \Omega = \sqrt{g + 3h}.$$

Jusqu'à présent, on ne connaît pas les phénomènes qu'engendrent les vibrations longitudinales; cependant nous avons des motifs de croire que probablement une ou plusieurs forces élastiques inconnues dans l'état actuel de la science se développent lors du déplacement longitudinal du centre de l'atome m , et que si ces forces étaient connues les vibrations longitudinales conduiraient aux phénomènes électriques et peut-être à la véritable cause de l'attraction universelle. Quoiqu'il en soit, nous considérons cette vitesse Ω comme constante tel que cela résulte de nos équations; d'ailleurs Lamé dans sa théorie de l'élasticité des corps solides et Cauchy dans ses exercices d'analyse et de physique mathématique sont arrivés au même résultat.

39.

Vibrations transversales. Dispersion de la lumière.

Posons maintenant

$$\sigma = 0.$$

L'angle que fait le déplacement de l'atome m , à l'époque t , avec la direction de la propagation sera droit, c'est-à-dire que les vibrations seront dirigées perpendiculairement à la propagation; dans ce cas on dit que les vibrations sont transversales ou bien que l'atome m vibre lumineusement. Fresnel a prouvé par l'expérience que la lumière est produite par des vibrations transversales, et il résulte des expériences de Melloni et des physiciens modernes que la chaleur rayonnante est, elle aussi, produite par le même genre de vibrations. Si nous faisons $\sigma = 0$ dans les équations (12) nous trouverons

$$V^2 \alpha = (g + h) \alpha \left(1 - \frac{4\pi^2 \beta^2}{\lambda^2} \right) - \frac{4\pi^2 k^2 m}{\lambda^2} \left(\frac{g + h}{2} \right),$$

$$V^2 \beta = (g + h) \beta \left(1 - \frac{4\pi^2 \alpha^2}{\lambda^2} \right) - \frac{4\pi^2 k^2 n}{\lambda^2} \left(\frac{g + h}{2} \right),$$

$$V^2 \gamma = (g + h) \gamma \left(1 - \frac{4\pi^2 \delta^2}{\lambda^2} \right) - \frac{4\pi^2 k^2 l}{\lambda^2} \left(\frac{g + h}{2} \right).$$

Observons que le terme en ε des équations (11) ne disparaît pas lorsqu'on fait $\sigma = 0$. Ajouton

les équations précédentes après les avoir multipliées la première par α , la deuxième par β et la troisième par γ et puisque $\sigma = \alpha m + \beta n + \gamma l = 0$ on aura

$$V^2 = (g + h) \left(1 - \frac{4\pi^2 g^2}{\lambda^2} \right).$$

De cette expression résulte que pour les vibrations transversales, la vitesse de propagation V n'est plus constante, mais qu'elle varie avec la longueur d'ondulation λ du rayon qu'on considère.

Si nous posons

$$(14) \dots \omega = \sqrt{g + h},$$

ω aura une valeur constante, et puisque $\sqrt{g + 3h}$ surpasse $\sqrt{g + h}$ on aura

$$\Omega > \omega,$$

et la vitesse de propagation des vibrations transversales aura pour expression

$$(15) \dots V = \omega \sqrt{1 - \frac{4\pi^2 g^2}{\lambda^2}},$$

mais V étant plus petit que ω on en conclut qu'à plus forte raison la vitesse de propagation V des vibrations transversales sera moindre que celle des vibrations longitudinales. Nous verrons par la suite que cette différence est exprimée par un très grand nombre.

L'équation (15) nous apprend que *les ondes transversales, en d'autres termes les ondes lumineuses et calorifiques, se propageant dans le même milieu, éprouvent des retards d'autant plus grands que les ondes sont plus courtes.* Ce fait conduit à l'explication rationnelle du phénomène de la dispersion de la lumière.

40.

L'éther ne possède pas la propriété de disperser la lumière.

On sait quelles hypothèses ont dû être faites sur la constitution de l'éther pour expliquer la dispersion de la lumière. Il résulterait de l'hypothèse faite dans ce but par Cauchy, que les différents rayons lumineux se propageraient avec les vitesses différentes dans l'éther; mais les observations faites par Arago prouvent le contraire. Parmi ces hypothèses je citerai la suivante: l'éther serait partagé en concamérations dans les corps pondérables et dans chacune de ces concamérations il serait soumis à des variations périodiques de densité. Or, admettre que l'éther acquiert une densité dans ces concamérations, c'est supposer que ce fluide impondérable devient pondérable. La théorie de l'élasticité lève toutes ces difficultés. Nous avons vu dans l'introduction que si réellement, comme l'admettent tous les physiciens, le diamètre d'un atome d'éther serait très petit à côté de celui d'un atome pondérable, la vitesse de rotation de l'atome d'éther doit être nulle.

Or si l'on a $\varepsilon = 0$, à cause de l'équation $\varepsilon^2 = p^2 + q^2 + r^2$ on doit avoir $p = 0$, $q = 0$ et $r = 0$. Mais alors les équations (10) du paragraphe 34 donnent $\mathfrak{A} = 0$, $\mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{C} = 0$ et par suite les termes en \mathfrak{s}^2 et en ε des équations (11) disparaissent et la vitesse de propagation des ondes transversales se réduit à

$$V = \omega,$$

ce qui prouve que dans l'éther la vitesse de propagation des ondes transversales est constante et la même pour toute espèce de rayon lumineux.

41.

Indépendance des vibrations longitudinales et des vibrations transversales.

En résumé, il résulte de ce qui précède que, quand une onde plane se propage dans un milieu pondérable homogène et d'élasticité constante, si la vibration qu'elle apporte est parallèle à la direction de la propagation, en d'autres termes, si la vibration est longitudinale, sa vitesse de propagation Ω (13) est constante quelle que soit la valeur de λ , c'est-à-dire pour toute espèce d'onde.

Si au contraire l'onde apporte des vibrations perpendiculaires à la direction de la propagation, en d'autres termes, des vibrations transversales appelées aussi vibrations lumineuses, sa vitesse de

propagation $\omega \sqrt{1 - \frac{4\pi^2 k^2}{\lambda^2}}$ (15) et (14) est moindre que celle Ω des vibrations longitudinales et

il sera prouvé que cette différence est égale à un très grand nombre; la vitesse de propagation des vibrations transversales varie avec λ , et les ondes éprouvent des retards d'autant plus grands que les longueurs d'ondes sont plus courtes.

De ce que les vibrations longitudinales se propagent avec une rapidité qui est plus grande que celle avec laquelle se propagent les vibrations transversales, il résulte qu'au centre même de l'ébranlement, le déplacement du premier atome se décompose pour chaque direction du déplacement et fournit une vibration longitudinale et une vibration transversale, lesquelles se séparent immédiatement, puisque la première se propage plus vite que la seconde. Il résulte de là qu'un atome situé à une certaine distance du centre d'ébranlement, a cessé depuis quelque temps de vibrer longitudinalement au moment où la vibration transversale commence.

Il en résulte aussi que la partie des équations (11) qui régit les vibrations longitudinales et dont les termes ont pour facteurs $(g + 3h)$, carré de la vitesse de propagation de cette espèce de vibrations, est indépendante de cette partie des équations qui régit les vibrations transversales et dont les termes ont pour facteurs $g + h$, carré de ω .

42.

Séparation du groupe des équations (11) en deux autres groupes.

En ayant égard aux équations (13) et (14) et aux considérations précédentes, les trois premières équations (11) se partagent chacune en deux équations différentes; celles qui régissent les vibrations longitudinales sont

$$(16) \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \Omega^2 \frac{d\vartheta}{dx}, \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} = \Omega^2 \frac{d\vartheta}{dy}, \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \Omega^2 \frac{d\vartheta}{dz}, \end{array} \right.$$

on sait que ces vibrations se propagent avec une vitesse $\Omega = \sqrt{g + 3h}$;

et les équations qui régissent les vibrations transversales, qui se propagent avec une vitesse dont la partie constante est $\omega = \sqrt{g+h}$, sont

$$(17) \dots \begin{cases} \frac{d^2\xi}{dt^2} = \omega^2 \left\{ \frac{d}{dz} \left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\xi'}{dx} \right) - \frac{d}{dy} \left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} \right) + \mathfrak{B}^2 A^2 \cdot \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\xi'}{dx} \right) - \frac{d}{dy} \left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} \right) \right] \right\} + k^2 \frac{d^2\varepsilon}{dxdt}, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} = \omega^2 \left\{ \frac{d}{dx} \left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} \right) - \frac{d}{dz} \left(\frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dz} \right) + \mathfrak{B}^2 A^2 \cdot \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} \right) - \frac{d}{dz} \left(\frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dz} \right) \right] \right\} + k^2 \frac{d^2\varepsilon}{dydt}, \\ \frac{d^2\xi}{dt^2} = \omega^2 \left\{ \frac{d}{dy} \left(\frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dz} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\xi'}{dx} \right) + \mathfrak{B}^2 A^2 \cdot \left[\frac{d}{dy} \left(\frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dz} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\xi'}{dx} \right) \right] \right\} + k^2 \frac{d^2\varepsilon}{dzdt}. \end{cases}$$

Les trois équations (16) ne trouvant, dans l'état actuel de la science, aucune application à la théorie de la lumière, de la chaleur ou de l'électricité, nous ne nous en occuperons pas davantage. Ajoutons les trois équations (17), après avoir dérivé la première par rapport à x , la seconde par rapport à y et la troisième par rapport à z , et si nous avons égard à l'équation (5) du paragraphe 29, nous aurons, réductions faites,

$$\frac{d^2\mathcal{P}}{dt^2} = k^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{d^2\varepsilon}{dx^2} + \frac{d^2\varepsilon}{dy^2} + \frac{d^2\varepsilon}{dz^2} \right),$$

équation qui, intégrée par rapport à t , donne

$$(18) \dots \frac{d\mathcal{P}}{dt} = k^2 \left(\frac{d^2\varepsilon}{dx^2} + \frac{d^2\varepsilon}{dy^2} + \frac{d^2\varepsilon}{dz^2} \right).$$

Cette équation prouve que les vibrations transversales sont toujours accompagnées de dilatations et de contractions, puisque \mathcal{P} ne saurait être nul.

En effet, si \mathcal{P} était nul on déduirait de l'équation précédente et de l'équation (9) du paragraphe 36

$$\frac{d^2\varepsilon}{dx^2} + \frac{d^2\varepsilon}{dy^2} + \frac{d^2\varepsilon}{dz^2} = m^2 + n^2 + l^2 = 0.$$

Or, d'après l'équation (a) du paragraphe 35 on doit avoir

$$m^2 + n^2 + l^2 = 1,$$

donc \mathcal{P} ne saurait être nul.

D'un autre côté ε ne peut pas être nul: En effet, la cinquième équation (11) qui est

$$\varepsilon^2 = p^2 + q^2 + r^2,$$

prouve que si $\varepsilon = 0$ on devrait avoir

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = 0;$$

mais alors les trois équations (8) se réduiraient à

$$\frac{d\xi'}{dy} = \frac{d\eta}{dz}, \quad \frac{d\xi}{dz} = \frac{d\xi'}{dx}, \quad \frac{d\eta}{dx} = \frac{d\xi}{dy},$$

relations qui annuleraient les seconds membres des équations (17), c'est-à-dire, qui annuleraient les forces élastiques qui produisent les vibrations lumineuses et obscures.

43.

Les équations (e), (A) et (d) du paragraphe 35 conduisent à l'expression suivante

$$\mathcal{D} = \frac{2\pi C}{\lambda} \sigma \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{mx + ny + lz}{\lambda} \right).$$

Cette expression prouve que \mathcal{D} est périodique, que sa période a la même durée que celle d'une vibration lumineuse dont la longueur d'ondulation est λ . σ représente le *cosinus* de l'angle que fait le déplacement de l'atome m avec la direction de la propagation; si σ est positif, \mathcal{D} sera positif dans la première moitié de l'onde lumineuse et le milieu s'y dilatera, tandis que dans la seconde moitié de la même onde \mathcal{D} sera négatif et le milieu y sera contracté; or, il résulte de l'équation précédente que dans la même onde la contraction sera égale à la dilatation, en sorte que l'onde totale ne changera pas de volume. On arriverait à la même conclusion si σ était négatif, par conséquent le volume du milieu qui vibre lumineusement, reste invariable.

Les équations (g) du paragraphe 36, (A) du paragraphe 35, (14) et (15) du paragraphe 39 donnent

$$(h) \dots \varepsilon = \frac{2\pi^2 C \omega^2}{V \lambda^2} \sqrt{1 - \sigma^2} \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{mx + ny + lz}{\lambda} \right).$$

De cette équation résulte que la vitesse de rotation ε est périodique, sa période est identique à celle d'une vibration, mais sa valeur absolue est incomparablement plus grande que celle de la dilatation. Comparons en effet la valeur maxima de ε à celle de \mathcal{D} , et remplaçons V par sa valeur fournie par l'équation (15), nous trouverons

$$\frac{\varepsilon}{\mathcal{D}} = \frac{\pi \omega}{\lambda \sqrt{1 - \frac{4\pi^2 \mathcal{G}^2}{\lambda^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1 - \sigma^2}}{\sigma}.$$

On sait que $\frac{1}{\lambda}$ est de l'ordre des grandeurs de la vitesse de propagation V ; enfin $\frac{\sqrt{1 - \sigma^2}}{\sigma}$ est la tangente de l'angle que fait le déplacement de l'atome m avec la direction de la propagation du mouvement vibratoire, et l'expérience prouve que cet angle est presque droit, puisque les vibrations lumineuses sont sensiblement transversales. De là résulte que le rapport de ε à \mathcal{D} est exprimé par une grandeur de l'ordre du cube d'un très grand nombre comparable à celui qui exprime la vitesse de propagation des vibrations lumineuses et qui d'après Foucault est d'environ 298,000,000 de mètres par seconde. Cette vitesse de rotation si prodigieuse n'explique-t-elle pas suffisamment pourquoi la force vive des atomes qui vibrent lumineusement est si intense. C'est, en effet, la lumière qui transporte sur la surface de notre globe les forces vives produites sur le soleil par la chaleur qui s'y dégage, ce sont ces forces vives qui donnent la vie et le mouvement à tout ce qui nous entoure et qui mettent à notre disposition toutes les forces que nous utilisons dans l'industrie.

44.

Remplaçons maintenant les valeurs de ϑ et de ε , convenablement dérivées, dans l'équation (18), et si nous avons égard à l'équation (a) du paragraphe 35, nous trouverons

$$\sigma = -k^2 \frac{2\pi^2 \omega^2}{V^2 \lambda^2} \sqrt{1 - \sigma^2}.$$

Cette relation nous apprend que le *cosinus* σ de l'angle que fait la direction du déplacement de l'atome m avec la direction de la propagation du mouvement vibratoire est négatif, par conséquent cet angle est obtus. Mais l'expérience prouve que cet angle ne diffère pas sensiblement d'un angle droit puisque les vibrations lumineuses sont transversales, il s'en suit que l'expression

$$k^2 \frac{2\pi^2 \omega^2}{V^2 \lambda^2}$$

qui, en ayant égard à l'équation (15), peut s'écrire

$$k^2 \frac{2\pi^2}{\left(1 - \frac{4\pi^2 \bar{s}^2}{\lambda^2}\right) \lambda^2},$$

doit être une très petite fraction; mais pour cela il faut que la fraction $\frac{k}{\lambda}$ soit très petite, c'est-à-dire que le coefficient k doit être petit à côté de λ . On sait d'ailleurs par l'équation (15) que \bar{s} est très petit à côté de λ , car si tel n'était pas le cas, la fraction $\frac{4\pi^2 \bar{s}^2}{\lambda^2}$ différerait peu de l'unité et la vitesse de propagation V ne serait plus un très grand nombre comme le prouvent l'expérience et les observations astronomiques. Ainsi les coefficients k et \bar{s} sont des quantités du même ordre de grandeur. On arriverait à la même conclusion en discutant la nature des séries dont les quantités $\omega \bar{s}$ et ωk représentent les sommes, car ces séries sont de la même nature.

45.

Nous avons représenté (paragraphe 20) par p la composante de la vitesse de rotation de l'atome sphérique m autour d'un axe parallèle à l'axe des x et passant par le centre de m , par q la composante de la même vitesse autour d'un axe passant par le centre de m et parallèle à l'axe des y , enfin par r la composante de cette vitesse de rotation autour d'un axe parallèle à l'axe des z . Nommons a , b , c les *cosinus* des angles que fait l'axe instantané de rotation avec des parallèles aux axes des (x, y, z) , nous aurons comme on sait

$$a = \frac{p}{\varepsilon},$$

$$b = \frac{q}{\varepsilon},$$

$$c = \frac{r}{\varepsilon},$$

ou en ayant égard aux équations (f) et (f') du paragraphe 36

$$a = \frac{\gamma n - \beta l}{\sqrt{(\gamma n - \beta l)^2 + (\alpha l - \gamma m)^2 + (\beta m - \alpha n)^2}},$$

$$b = \frac{\alpha l - \gamma m}{\sqrt{(\gamma n - \beta l)^2 + (\alpha l - \gamma m)^2 + (\beta m - \alpha n)^2}},$$

$$c = \frac{\beta m - \alpha n}{\sqrt{(\gamma n - \beta l)^2 + (\alpha l - \gamma m)^2 + (\beta m - \alpha n)^2}},$$

on déduit de ces équations

$$1^\circ \dots \dots am + bn + cl = 0,$$

équation qui nous apprend que l'axe instantané de rotation est perpendiculaire à la direction de la propagation du mouvement vibratoire.

$$2^\circ \dots \dots a\alpha + b\beta + c\gamma = 0,$$

d'où résulte que l'axe instantané est aussi perpendiculaire au déplacement de l'atome m .

Ainsi l'axe instantané de rotation d'un atome m est à la fois perpendiculaire à la direction de la propagation du mouvement vibratoire et au déplacement de l'atome m . Ce théorème complète la détermination de tout ce qui est relatif au mouvement de rotation quand l'atome vibre lumineusement.

CHAPITRE IV.

Transformation de la lumière et des rayons obscurs en chaleur de conductibilité dans la surface des corps parfaitement opaques et athermanes.

46.

Dans le précédent chapitre, j'ai déduit des équations aux différentielles partielles (17) du paragraphe (42) des équations intégrales qui régissent les vibrations transversales (lumineuses) des atomes et quoique cette intégrale soit plus générale que celles auxquelles soient parvenus jusqu'à présent les géomètres, puisqu'elle comprend la dispersion de la lumière et le mouvement de rotation des atomes, mouvement inséparable des vibrations lumineuses, l'intégrale à laquelle je suis parvenu n'est qu'une solution particulière des équations (17).

Avant d'en chercher l'intégrale générale, j'en déduirai une autre intégrale particulière, celle qui comprend la transformation du mouvement vibratoire lumineux en chaleur de conductibilité dans la surface des corps parfaitement opaques et athermanes. La discussion des équations auxquelles nous parviendrons facilitera l'étude des équations intégrales plus générales. Ces dernières comprennent le cas où l'intensité d'un rayon lumineux ou obscur, en pénétrant dans un milieu quelconque, diminue au fur et à mesure qu'il s'y propage, en sorte qu'il soit sensiblement éteint après avoir parcouru une épaisseur plus ou moins considérable.

47.

Équations intégrales dans le cas d'un corps opaque.

Le problème dont nous allons chercher la solution peut être énoncé comme suit :

Un faisceau de rayons lumineux ou obscurs se propage à travers un milieu parfaitement diathermane et translucide, il tombe sur la surface d'un corps parfaitement opaque et athermane, quel sera le mouvement des atomes qu'il provoquera dans une couche plus ou moins épaisse de ce corps opaque ?

Plaçons l'origine des coordonnées sur le premier atome de la surface du milieu opaque. Cet atome est mis en mouvement par les rayons lumineux qui, après s'être propagés dans le milieu translucide, le frappent; les forces qui mettent en mouvement les atomes du milieu opaque ont donc la même origine et sont identiques à celles qui ont produit le mouvement vibratoire lumineux dans le corps translucide. Ces mouvements sont régis par les mêmes équations aux différentielles partielles (17), mais les équations intégrales sont, comme nous venons de le voir dans le précédent chapitre, périodiques dans le milieu translucide, tandis qu'elles n'ont plus rien de périodique dans le corps opaque.

Il suffit donc, pour résoudre la question qui nous occupe de déduire des équations (17) de nouvelles équations intégrales dans lesquelles le temps n'entre pas dans une des transcendentes trigonométriques.

Pour satisfaire aux équations (17) du paragraphe 42 et au problème tel qu'il est énoncé, nous poserons

$$(a) \dots \left\{ \begin{array}{l} \xi = ae^{-ak^2h^2t} \sin(mx + ny + lz), \\ \eta = be^{-ak^2h^2t} \sin(mx + ny + lz), \\ \zeta = ce^{-ak^2h^2t} \sin(mx + ny + lz), \\ m^2 + n^2 + l^2 = h^2; \end{array} \right.$$

a, b, c, m, n, l et a étant des constantes.

Nous en déduirons d'après l'équation (5) paragraphe 29,

$$(b) \dots \vartheta = (am + bn + cl)e^{-ak^2h^2t} \cos(mx + ny + lz).$$

Déterminons la valeur de ε en substituant les valeurs précédentes des ξ, η, ζ dans les équations (8) du paragraphe 32 et observons que l'on a posé $\omega^2 = g + h$, nous trouverons

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\frac{\omega^2 h^2}{2} (cn - bl) e^{-ak^2h^2t} \cos(mx + ny + lz), \\ \frac{dq}{dt} &= -\frac{\omega^2 h^2}{2} (al - cm) e^{-ak^2h^2t} \cos(mx + ny + lz), \\ \frac{dr}{dt} &= -\frac{\omega^2 h^2}{2} (bm - an) e^{-ak^2h^2t} \cos(mx + ny + lz); \end{aligned}$$

intégrons par rapport à t ,

$$(c) \dots \begin{cases} p = \frac{\omega^2}{2ak^2} (cn - bl) e^{-ak^2 h^2 t} \cos(mx + ny + lz), \\ q = \frac{\omega^2}{2ak^2} (al - cm) e^{-ak^2 h^2 t} \cos(mx + ny + lz), \\ r = \frac{\omega^2}{2ak^2} (bm - an) e^{-ak^2 h^2 t} \cos(mx + ny + lz). \end{cases}$$

Substituons ces valeurs dans la quatrième équation du groupe (8), nous aurons pour la vitesse de rotation ε

$$(d) \dots \varepsilon = \frac{\omega^2}{2ak^2} e^{-ak^2 h^2 t} \cos(mx + ny + lz) \sqrt{(cn - bl)^2 + (al - cm)^2 + (bm - an)^2}.$$

L'équation (b) comparée à l'équation précédente fournit

$$(e) \dots \varepsilon = \frac{\omega^2 \sqrt{(cn - bl)^2 + (al - cm)^2 + (bm - an)^2}}{2ak^2(am + bn + cl)} \mathcal{P}.$$

48.

La dilatation est proportionnelle à la vitesse de rotation des atomes.

Si l'on substitue la valeur de \mathcal{P} fournie par l'équation (b) et celle de ε fournie par l'équation (d) après les avoir convenablement différenciées, dans l'équation (18) on trouvera la relation suivante

$$(f) \dots \frac{\omega^2 \sqrt{(cn - bl)^2 + (al - cm)^2 + (bm - an)^2}}{2ak^2(nm + bn + cl)} = a,$$

et l'équation (e) peut s'écrire

$$(19) \dots \varepsilon = a\mathcal{P} = a(am + bn + cl) e^{-ak^2 h^2 t} \cos(mx + ny + lz).$$

Cette relation si simple est très importante; elle nous apprend que *la dilatation du milieu est en chacun de ses points proportionnelle à la vitesse de rotation des atomes. Or la dilatation sert à mesurer la température, donc en mesurant la température du milieu on mesure la vitesse de rotation de ses atomes. Mais qu'est-ce que la température? C'est d'après les physiciens modernes un mouvement des atomes. J'en conclus que la température est la vitesse de rotation des atomes, car c'est elle qui produit la dilatation des corps.*

L'équation (19) nous apprend encore que quand le temps augmente en progression arithmétique la vitesse de rotation des atomes aussi bien que le volume du milieu diminuent en progression géométrique, en d'autres termes, la vitesse de rotation diminue avec le temps sans pouvoir jamais devenir rigoureusement nulle. Tel est le caractère distinctif du mouvement de la chaleur.

Si nous substituons la valeur précédente de \mathcal{P} dans l'équation (18) nous trouverons

$$(20) \dots \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} = ak^2 \left(\frac{d^2 \varepsilon}{dx^2} + \frac{d^2 \varepsilon}{dy^2} + \frac{d^2 \varepsilon}{dz^2} \right),$$

équation qui est celle à laquelle est parvenu Fourier et qui régit le mouvement de la chaleur de conductibilité dans les milieux pondérables.

49.

Équation de condition importante.

Substituons maintenant les valeurs de ξ η ζ , fournies par les équations (a) dans les équations (17), nous trouverons les trois équations de conditions suivantes

$$aa^2k^4h^4 = \omega^2 \left\{ -ah^2 + m(am + bn + cl) - s^2h^2 \left[-ah^2 + m(am + bn + cl) \right] \right\} + a^2k^4h^2m(am + bn + cl),$$

$$ba^2k^4h^4 = \omega^2 \left\{ -bh^2 + n(am + bn + cl) - s^2h^2 \left[-bh^2 + n(am + bn + cl) \right] \right\} + a^2k^4h^2n(am + bn + cl),$$

$$ca^2k^4h^4 = \omega^2 \left\{ -ch^2 + l(am + bn + cl) - s^2h^2 \left[-ch^2 + l(am + bn + cl) \right] \right\} + a^2k^4h^2l(am + bn + cl).$$

Multiplions les deux membres de la première équation par m, ceux de la seconde par n, ceux de la troisième par l et ajoutons les, membres à membres, nous trouverons l'identité

$$a^2k^4h^4(mn + bn + cl) = a^2k^4h^4(am + bn + cl).$$

Mais les trois équations de conditions précédentes peuvent être écrites sous la forme suivante

$$\left[ah^2 - m(am + bn + cl) \right] \left(a^2k^4h^2 + \omega^2 - \omega^2s^2h^2 \right) = 0,$$

$$\left[bh^2 - n(am + bn + cl) \right] \left(a^2k^4h^2 + \omega^2 - \omega^2s^2h^2 \right) = 0,$$

$$\left[ch^2 - l(am + bn + cl) \right] \left(a^2k^4h^2 + \omega^2 - \omega^2s^2h^2 \right) = 0.$$

On satisfait à la fois à ces équations en posant

$$a^2k^4 = \omega^2 \left(s^2 - \frac{1}{h^2} \right),$$

d'où

$$(h) \dots ak^2 = \omega \sqrt{s^2 - \frac{1}{h^2}}.$$

50.

Coefficient de conductibilité.

ak^2 est le coefficient constant de l'équation (20); c'est ce coefficient que Fourier appelle coefficient de conductibilité. L'équation (15)

$$V = \omega \sqrt{1 - \frac{4\pi^2s^2}{\lambda^2}},$$

telle nous l'avons trouvée dans le chapitre précédent, fournit la vitesse V de propagation d'un rayon dont la longueur d'ondulation est λ ; dans cette équation ω représente une vitesse plus grande que V, tandis que s est une très petite fraction moindre que $\frac{\lambda}{2\pi}$, cela résulte évidemment de l'équation précédente, car si $2\pi s$ était égal ou surpassait λ la vitesse V de propagation serait nulle ou imaginaire.

Le coefficient de conductibilité ak^2 est fourni par une expression qui a une certaine analogie avec celle de la vitesse de propagation V de l'équation précédente. En effet, l'équation (h) peut s'écrire

$$ak^2 = \omega \bar{s} \sqrt{1 - \frac{1}{h^2 \bar{s}^2}},$$

$\omega \bar{s}$ est le produit d'un très grand nombre ω , qui surpasse la vitesse V de propagation, par la quantité excessivement petite \bar{s} qui est moindre que λ ; le produit $\omega \bar{s}$ se réduit ainsi à un nombre ordinaire. C'est en effet à ce résultat qu'on arrive en faisant le produit $V\lambda$ qui ne peut pas différer considérablement du produit $\omega \bar{s}$.

Le produit $\omega \bar{s}$ pour les verres très réfringents, dont on fabrique les lentilles, varie de 5 à 11.

On voit par ce qui précède que le coefficient de conductibilité n'est pas, comme la vitesse de propagation V , représenté par un très grand nombre variant de deux à trois cent millions de mètres par seconde suivant la nature du milieu qu'on considère, mais qu'au contraire ak^2 , qui d'ailleurs varie aussi, comme on sait, d'un corps à un autre, est un nombre d'une grandeur ordinaire. Ce résultat est conforme à l'expérience; car en plongeant dans un foyer ardent, par exemple, l'extrémité d'une barre de fer d'un mètre de longueur, la température de la barre étant celle de l'air ambiant, on peut tenir à la main l'autre extrémité pendant un nombre de secondes assez considérable avant que sa température ne s'élève sensiblement.

51.

L'épaisseur de la surface du corps parfaitement opaque, dans laquelle la lumière se transforme en chaleur, est de l'ordre des grandeurs des longueurs d'ondulation.

Pour que l'expression précédente qui fournit la valeur des coefficients de conductibilité ak^2 soit réelle il faut que le produit $h\bar{s}$ surpasse l'unité. Or \bar{s} étant moindre que $\frac{\lambda}{2\pi}$ il faut que h soit un très grand nombre de l'ordre des vitesses de propagation. En effet, on doit avoir

$$h\bar{s} > 1; h > \frac{1}{\bar{s}} > \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Or, la quatrième équation (a) est

$$h^2 = m^2 + n^2 + l^2,$$

la somme $m^2 + n^2 + l^2$ est donc un très grand nombre qui surpasse $\frac{4\pi^2}{\lambda^2}$. Désignons par \mathcal{E} l'épaisseur de la couche de la surface du corps opaque dans laquelle se fait la transformation des rayons lumineux et obscurs en chaleur de conductibilité. Soient (e, e', e'') les projections de \mathcal{E} sur les axes des (x, y, z), nous aurons

$$(i) \dots \mathcal{E}^2 = e^2 + e'^2 + e''^2.$$

Immédiatement après que la première ondulation aura pénétré dans le corps opaque et s'y sera transformée en chaleur, la température ϵ au point $x=0, y=0, z=0$ sera

$$\epsilon = a(am + bn + cl)e^{-ak^2 h^2 \tau}.$$

τ représentant comme on sait la durée d'une ondulation, est excessivement petit.

Mais la température ε devant être nulle au-delà de l'épaisseur \mathcal{E} de la surface, on aura $\varepsilon = 0$ pour $x = \varepsilon$, $y = e'$, $z = e''$, d'où résulte

$$\cos(me + ne' + le'') = 0;$$

on déduit de cette relation

$$me + ne' + le'' = (2i - 1) \frac{\pi}{2};$$

i étant un nombre entier et positif quelconque. Mais d'après la nature du problème les six constantes (e , e' , e'') (m , n , l), sont essentiellement positives, on doit donc avoir

$$(k) \dots \left\{ \begin{array}{l} me = (2i - 1) \frac{\pi}{2} \text{ d'où } m = \left(\frac{2i - 1}{e} \right) \frac{\pi}{2}, \\ ne' = (2i' - 1) \frac{\pi}{2} \quad n = \left(\frac{2i' - 1}{e'} \right) \frac{\pi}{2}, \\ le'' = (2i'' - 1) \frac{\pi}{2} \quad l = \left(\frac{2i'' - 1}{e''} \right) \frac{\pi}{2}, \end{array} \right.$$

i , i' , i'' étant des nombres entiers et positifs quelconques.

Substituons ces valeurs dans celle de \mathfrak{h} nous aurons

$$(l) \dots \mathfrak{h}^2 = \frac{\pi^2}{4} \left[\left(\frac{2i - 1}{e} \right)^2 + \left(\frac{2i' - 1}{e'} \right)^2 + \left(\frac{2i'' - 1}{e''} \right)^2 \right];$$

et puisque \mathfrak{h} est un très grand nombre qui surpasse $\frac{2\pi}{\lambda}$ il faut que les (e , e' , e'') et par suite l'épaisseur \mathcal{E} soient extrêmement petites, moindres que $\frac{\lambda}{2\pi}$.

De là résulte que la transformation des rayons lumineux et obscurs en chaleur de conductibilité se fait dans une épaisseur de la surface du corps parfaitement opaque et athermane moindre qu'une longueur d'ondulation.

52.

Le corps opaque émet des rayons obscurs et lumineux.

Deux séries d'intégrales particulières ont été déduites des équations (17), ce sont celles que nous avons discutées dans le chapitre précédent et qui ne s'appliquent que dans le cas où le milieu qu'on considère est parfaitement translucide et diathermane, la seconde série d'intégrales déduites des mêmes équations et dont nous venons de nous occuper ne s'applique qu'aux corps parfaitement opaques et athermanes; elles nous ont appris que les rayons lumineux et obscurs pénètrent dans une couche de la surface du corps opaque dont l'épaisseur \mathcal{E} est extrêmement petite, moindre qu'une longueur d'ondulation, et dans cette couche si mince ces rayons lumineux et obscurs se transforment en chaleur de conductibilité.

Or, que le mouvement atomistique ait lieu dans un corps translucide ou dans un corps opaque, ce sont identiquement les mêmes forces dont les expressions entrent dans les équations (17) qui le produisent.

Nous avons vu que ces mouvements, par l'effet de l'élasticité, se transmettent du corps translucide au corps opaque en contact avec le premier. Réciproquement, si une couche extrêmement mince \mathcal{E} du corps opaque est échauffée, le mouvement des atomes qui constitue la chaleur de conductibilité se transmettra aux atomes du corps translucide qui vibreront lumineusement; car la chaleur de conductibilité dans la couche \mathcal{E} de la surface du corps opaque satisfait aux équations (17). c'est-à-dire que dans cette couche extrêmement mince \mathcal{E} les atomes sont mis en mouvement par des forces dont les expressions entrent dans les équations (17), et puisque ce mouvement se communique par l'effet de l'élasticité de la matière aux atomes du corps translucide, il faut qu'à une époque quelconque t la force vive dont est animé le premier atome de la surface du corps opaque en contact avec le premier atome du corps translucide soit égale à la force vive de rotation moyenne durant la vibration, dont ce dernier atome est animé.

53.

Forces vives dues au mouvement de rotation d'un atome du milieu translucide qui vibre lumineusement.

La moyenne des forces vives dues au mouvement de rotation durant une vibration d'un atome m est évidemment fournie par l'expression

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \epsilon^2 dt.$$

Supposons le mouvement vibratoire parfaitement transversal ce qui suppose $\sigma = 0$ et substituons dans l'expression précédente la valeur de ϵ telle que nous l'avons trouvée paragraphe 36, nous aurons

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \epsilon^2 dt = \frac{4\pi^4 \tau^2 \omega^4 C^2}{\lambda^6} \int_0^{\tau} \cos^2 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{mx + ny + lz}{\lambda} \right) dt = \frac{2\pi^4 \tau^2 \omega^4 C^2}{\lambda^6}.$$

Nous avons vu (paragraphe 35 et 39) que

$$V = \frac{\lambda}{\tau} = \omega \sqrt{1 - \frac{4\pi^2 \beta^2}{\lambda^2}};$$

d'où

$$\tau^2 = \frac{\lambda^2}{\omega^2 \left(1 - \frac{4\pi^2 \beta^2}{\lambda^2}\right)} = \frac{\lambda^4}{\omega^2 (\lambda^2 - 4\pi^2 \beta^2)}.$$

Substituons cette valeur de τ dans l'expression de la force vive de l'atome translucide qui vibre lumineusement, nous aurons

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \epsilon^2 dt = \frac{2\pi^4 \omega^2 C^2}{\lambda^2 (\lambda^2 - 4\pi^2 \beta^2)}.$$

Posons pour simplifier les écritures

$$(p) \dots 2\pi^4 \omega^2 C^2 = p^2;$$

p étant une constante, la force vive d'un atome du milieu translucide qui vibre sera représentée par

$$\frac{p^2}{\lambda^2 (\lambda^2 - 4\pi^2 \beta^2)}.$$