DE
NOVO SYSTEMATE COORDINATARUM.

DISSERTATIO MATHEMATICA

QUAM

AD SUMMOS IN PHILOSOPHIA HONORES

AB AMPLISSIMO PHILOSOPHORUM ORDINE

IN ACADEMIA FRIDERICIA GUILELMIA RHENANA RITE IMPETRANDOS

SCRIPSIT

ET UNA CUM THESIBUS ADIECTIS

DIE XVII. MENSIS MARTII A. MDCCCXLIX.

PUBLICE DEFENDET

GUILELMUS STAMMER,

SOD. EXT. SEM. PHYS. BONN.

ADVERSARIORUM MUNERE FUNGENTUR:

AUG. BEER, PHIL. DOCT.
GUIL. NEINHAUS, PHIL. CAND.
RUD. FRANZ, PHIL. STUD.

BONNAE,

FORMIS CAROLI GEORGII.

MDCCCXLIX.

PARENTIBUS

OPTIMIS CARISSIMIS

HASCE STUDIORUM PRIMITIAS

GRATO PIOQUE ANIMO

OBTULIT

AUCTOR.

1. A puncto fixo F (Fig. I.) in circuli circumferentia AFB iacente, quae e centro C radio $CF = R$ descripta est, arcus FA, FB in directione opposita abscindamus et in arcuum extremitatibus A, B tangentes circuli AM, BM ducamus quae sese in puncto M secabunt. Quum in quovis circumferentiae puncto una tantum tangens duci possit, patet punctum M unicum semper exstare, igitur arcubus FA, FB perfecte determinatum esse. Vice versa, quum e puncto M extra circulum iacente duae solum ad circulum tangentes strui possint, dato puncto M perfecte determinantur arcus AF, BF qui a punctis contactus tangentium cum puncto fixo F includuntur. Itaque datis centro et radio circuli atque puncto fixo in circumferentia posito, quodcunque punctum extra circulum situm, duobus arcubus definiri potest, quibus igitur tanquam coordinatis uti licet. Quas novas coordinatas *circulares* vocemus et litteris ξ, η designemus, ita ut ξ arcum FA sinistrorsum a puncto F numeratum, η contra arcum FB dextrorsum descriptum denotet. Punctum fixum F origo coordinatarum est.

De hoc coordinatarum systemate in hoc libello egimus; idque ita, ut primum rationem exponeremus, quae inter systema coordinatarum orthogonalium et nostrum systema intercedat, deinde aequationes nonnullorum locorum geometricorum disquiremus, postremo de aequatione generali primi gradus disputaremus.

Priusquam autem rem ipsam exponamus, praemonendum est, omnibus formulis trigonometricis circulum subesse, cuius radius longitudinis unitas sit, itaque arcus nostros radio R

dividendos esse, si coordinatis circularibus illas formulas applicemus. Simplicius tamen videtur esse, in omnibus formulis trigonometricis, coordinatis ξ, η non arcus ***FA***, ***FB*** sed angulos ad centrum ***FCA***, ***FCB*** quos in nostro circulo metiuntur, substituere, ita ut et π non semicircumferentiam sed duos angulos rectos designet. Quod si tenemus, litterae ξ, η sine ulla mutatione in formulas intrare possunt.

2. Transformatio autem nostrarum coordinatarum in coordinatas orthogonales simplicissima evadit, si originem coordinatarum orthogonalium in centro circuli locamus et axem ordinatarum in diametro puncti fixi ponimus.

Si igitur litterae x, y coordinatas orthogonales puncti M, et x', y', x'', y'' coordd. punctorum contactus seu extremitatum coordinatarum circularium A, B designant, fit:

$$x' = -R\sin\xi, \qquad y' = R\cos\xi;$$
$$x'' = R\sin\eta, \qquad y'' = R\cos\eta;$$

idque in quocunque quadrante punctum M situm est.

Aequationes tangentium in A et B sunt:

$$x'x + y'y = R^2,$$
$$x''x + y''y = R^2,$$

unde:

$$-xR\sin\xi + yR\cos\xi = R^2$$
$$xR\sin\eta + yR\cos\eta = R^2.$$

Quarum aequationum, radio R divisarum, si priorem per $\cos\eta$ multiplicatam, ab altera per $\cos\xi$ multiplicata subtrahimus, erit

$$x(\sin\xi\cos\eta+\sin\eta\cos\xi) = R(\cos\xi-\cos\eta),$$

$$x = R\frac{\cos\xi-\cos\eta}{\sin\xi\cos\eta+\sin\eta\cos\xi} = R\frac{\sin\frac{1}{2}(\eta+\xi)\sin\frac{1}{2}(\eta-\xi)}{\sin\frac{1}{2}(\eta+\xi)\cos\frac{1}{2}(\eta+\xi)},$$

$$x = R\frac{\sin\frac{1}{2}(\eta-\xi)}{\cos\frac{1}{2}(\eta+\xi)}. \tag{1}$$

Simili modo invenitur:

$$y = R\frac{\cos\frac{1}{2}(\eta-\xi)}{\cos\frac{1}{2}(\eta+\xi)}. \tag{2}$$

Utramque formulam etiam e figura directe deducere possumus; est enim:

$$ACM = \tfrac{1}{2}(\eta+\xi),$$
$$FCM = \tfrac{1}{2}(\eta+\xi) - \xi = \tfrac{1}{2}(\eta-\xi),$$
$$x = CD = CM\cos MCD = CM\sin MCF$$
$$= CM\sin\tfrac{1}{2}(\eta-\xi);$$
$$y = MD = CM\sin MCD = CM\cos\tfrac{1}{2}(\eta-\xi);$$

sed:

$$R = CB = CM\cos MCB = CM\cos\tfrac{1}{2}(\eta+\xi);$$

igitur:

$$CM = \frac{R}{\cos\frac{1}{2}(\eta+\xi)}, \tag{3}$$
$$x = R\frac{\sin\frac{1}{2}(\eta-\xi)}{\cos\frac{1}{2}(\eta+\xi)},$$
$$y = R\frac{\cos\frac{1}{2}(\eta-\xi)}{\cos\frac{1}{2}(\eta+\xi)}.$$

3. Ut coordinatas circulares coordinatis orthognalibus exprimamus, formulas (1), (2) ita componamus opus est, ut primo priorem per alteram dividamus, deinde earum quadrata summemus:

$$\frac{x}{y} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\eta-\xi)}{\cos\frac{1}{2}(\eta-\xi)} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\eta-\xi);$$

$$x^2+y^2 = R^2\frac{[\sin\frac{1}{2}(\eta-\xi)]^2+[\cos\frac{1}{2}(\eta-\xi)]^2}{[\cos\frac{1}{2}(\eta+\xi)]^2} = \frac{R^2}{[\cos\frac{1}{2}(\eta+\xi)]^2} =$$
$$= R^2\{1+[\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\eta+\xi)]^2\},$$
$$x^2+y^2-R^2 = [\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\eta+\xi)]^2R^2.$$

Ex quo sequitur:

$$\operatorname{angtang}\frac{x}{y} = \tfrac{1}{2}(\eta-\xi),$$

$$\operatorname{angtang}\frac{1}{R}\sqrt{x^2+y^2-R^2} = \tfrac{1}{2}(\eta+\xi),$$

et denique:

$$\eta = \operatorname{angtang}\frac{1}{R}\sqrt{x^2+y^2-R^2} + \operatorname{angtang}\frac{x}{y}, \tag{4}$$

$$\xi = \operatorname{angtang}\frac{1}{R}\sqrt{x^2+y^2-R^2} - \operatorname{angtang}\frac{x}{y}. \tag{5}$$

Hae formulae etiam figurae ope demonstrari possunt; fit enim:

$$\frac{x}{y} = \frac{CD}{MD} = \cot MCD = \tang\tfrac{1}{2}(\eta-\xi),$$

$$\frac{1}{R}\sqrt{x^2+y^2-R^2} = \frac{1}{R}\sqrt{CD^2+MD^2-CB^2} = \frac{1}{R}\sqrt{CM^2-CB^2} =$$

$$= \frac{1}{R}MB = \frac{MB}{CB} = \tang MCB = \tang\tfrac{1}{2}(\eta+\xi).$$

4. Nulli intra circuli circumferentiam iacenti puncto coordinatas reales respondere, non solum constructio, sed etiam hae formulae ostendunt. Talis enim puncti coordinatae orthog. hanc condicionem impleant, necesse est:

$$x^2+y^2-R^2<0,$$

quare, quae secundum locum obtinent, membra aequationum (4), (5) imaginaria evadunt.

Puncta *in* circumferentia sita dantur relatione:

$$x^2+y^2-R^2 = 0,$$

unde:

$$\eta+\xi = 2\operatorname{ang}\tang 0 = 2n\pi, \tag{6}$$

quae relatio etiam e figurae inspectione prodit.

5. Iam formulas hactenus inventas ad simplicissima loca geometrica definienda applicemus. Primum autem quaeramus *lineae rectae* inter coordinatas circulares aequationem.

Quum quas in systemate vulgarium coordinatarum, lineae rectae aequatio contineat quantitates constantes, a nostro systemate coordinatarum alienas esse pateat; antequam aequatio illa transformetur, aliae constantes in eam introducendae sunt. Magis enim consentaneum videtur, lineam rectam NQ (Fig. II.) definiri longitudine perpendiculi CH e centro in rectam demissi, et angulo FCH quem perpendiculum cum radio puncti fixi F includat; — simili modo in geometria spatii plana interdum determinari constat. Si igitur hac aequatione inter coordinatas orthog. linea recta datur:

$$y = ax + b,$$

et si P longitudinem perpendiculi CH, ω angulum FCH denotat, evenit:

$$a = \tang NEX = -\tang NEC = -\tang\omega,$$

$$P = CG\cos\omega = b\cos\omega,$$
$$b = \frac{P}{\cos\omega}.$$

Quare illa aequatio transit in hanc:

$$y = -x\tan g\omega + \frac{P}{\cos\omega},$$

quae, formulis (1), (2) adhibitis, hoc modo transformatur:

$$R\,\frac{\cos\frac{1}{2}(\eta-\xi)}{\cos\frac{1}{2}(\eta+\xi)} = -R\frac{\sin\frac{1}{2}(\eta-\xi)}{\cos\frac{1}{2}(\eta+\xi)}\tan g\omega + \frac{P}{\cos\omega},$$
$$R\cos\tfrac{1}{2}(\eta-\xi)\cos\omega = -R\sin\tfrac{1}{2}(\eta-\xi)\sin\omega + P\cos\tfrac{1}{2}(\eta+\xi),$$
$$R\cos[\tfrac{1}{2}(\eta-\xi)-\omega] = P\cos\tfrac{1}{2}(\eta+\xi),$$
$$\frac{\cos[\frac{1}{2}(\eta-\xi)-\omega]}{\cos\frac{1}{2}(\eta+\xi)} = \frac{P}{R}. \qquad (7)$$

Puncta intersectionis circuli cum recta dantur relatione (6)

$$\eta+\xi = 2n\pi,$$

quam si cum aequatione (7) componimus, inde prodit:

$$R\cos(n\pi-\eta-\omega) = P\cos n\pi,$$
$$\cos(\eta-\omega) = \frac{P}{R},$$

ex quo patet, nullam esse intersectionem, si $P>R$; sin autem $P<R$, haec aequatio duos praebet valores η', η'', qui relatione $\frac{1}{2}(\eta''+\eta') = \omega+\pi$ inter se iuncti, theorema, idque notissimum e theoria circuli, exprimunt. Si $P=R$, sequitur:

$$\omega-\eta = 0, \qquad \eta = \omega,$$

et recta circulum in puncto $\eta'=\omega$, tanget; tangentis igitur aequatio haec est:

$$\cos[\tfrac{1}{2}(\eta-\xi)-\eta'] = \cos\tfrac{1}{2}(\eta+\xi),$$
$$\tfrac{1}{2}(\eta-\xi)-\eta' = \begin{cases}\tfrac{1}{2}(\eta+\xi)\\ 2\pi-\tfrac{1}{2}(\eta+\xi)\end{cases},$$

ex quo deducitur:

$$\xi = -\eta'$$

aut:

$$\eta = 2\pi+\eta'.$$

Hae relationes (quae simul valere non possunt) docent, **unam** coordinatarum tangentis semper constantem manere.

Ut recta punctum datum (ξ', η') contineat, necesse est simul sit:

$$\frac{\cos[\frac{1}{2}(\eta-\xi)-\omega]}{\cos\frac{1}{2}(\eta+\xi)} = \frac{P}{R}$$

et

$$\frac{\cos[\frac{1}{2}(\eta'-\xi')-\omega]}{\cos\frac{1}{2}(\eta'+\xi')} = \frac{P}{R},$$

quibus ex aequationibus sequitur:

$$\cos[\tfrac{1}{2}(\eta-\xi)-\omega]\cos\tfrac{1}{2}(\eta'+\xi') = \cos[\tfrac{1}{2}(\eta'-\xi')-\omega]\cos\tfrac{1}{2}(\eta+\xi);$$

explicando et dividendo per $\cos\omega$, fit:

$$[\cos\tfrac{1}{2}(\eta-\xi)+\sin\tfrac{1}{2}(\eta-\xi)\operatorname{tang}\omega]\cos\tfrac{1}{2}(\eta'+\xi') =$$
$$= [\cos\tfrac{1}{2}(\eta'-\xi')+\sin\tfrac{1}{2}(\eta'-\xi')\operatorname{tang}\omega]\cos\tfrac{1}{2}(\eta+\xi),$$
$$[\sin\tfrac{1}{2}(\eta-\xi)\cos\tfrac{1}{2}(\eta'+\xi') - \sin\tfrac{1}{2}(\eta'-\xi')\cos\tfrac{1}{2}(\eta+\xi)]\operatorname{tang}\omega =$$
$$= \cos\tfrac{1}{2}(\eta'-\xi')\cos\tfrac{1}{2}(\eta+\xi) - \cos\tfrac{1}{2}(\eta-\xi)\cos\tfrac{1}{2}(\eta'+\xi'),$$
$$\left(\frac{\sin\frac{1}{2}(\eta-\xi)}{\cos\frac{1}{2}(\eta+\xi)} - \frac{\sin\frac{1}{2}(\eta'-\xi')}{\cos\frac{1}{2}(\eta'+\xi')}\right)\operatorname{tang}\omega =$$
$$= \frac{\cos\frac{1}{2}(\eta'-\xi')}{\cos\frac{1}{2}(\eta'+\xi')} - \frac{\cos\frac{1}{2}(\eta-\xi)}{\cos\frac{1}{2}(\eta+\xi)}.$$

Si in hac aquatione ξ'', η'' loco ξ, η ponimus, adipiscimur valorem $\operatorname{tang}\omega$ qui ad rectam per duo puncta η', ξ' et η'', ξ'' transeuntem pertinet:

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\cos\frac{1}{2}(\eta'-\xi')\cos\frac{1}{2}(\eta''+\xi'') - \cos\frac{1}{2}(\eta''-\xi'')\cos\frac{1}{2}(\eta'+\xi')}{\sin\frac{1}{2}(\eta''-\xi'')\cos\frac{1}{2}(\eta'+\xi') - \sin\frac{1}{2}(\eta'-\xi')\cos\frac{1}{2}(\eta''+\xi'')} =$$
$$= \frac{-\sin\frac{1}{2}(\eta''+\eta')\sin\frac{1}{2}(\xi''-\xi') - \sin\frac{1}{2}(\eta''-\eta')\sin\frac{1}{2}(\xi''+\xi')}{-\cos\frac{1}{2}(\eta''+\eta')\sin\frac{1}{2}(\xi''-\xi') + \sin\frac{1}{2}(\eta''-\eta')\cos\frac{1}{2}(\xi''+\xi')}. \qquad (8)$$

Lineae rectae centrum circuli transeuntis, aequatio invenitur ponendo $P=0$ in aequatione (7), unde:

$$\cos[\tfrac{1}{2}(\eta-\xi)-\omega] = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}(\eta-\xi)-\omega = (1\pm\tfrac{1}{2})\pi,$$
$$\eta-\xi = 2(1\mp\tfrac{1}{2})\pi+2\omega = (2\pm1)\pi+2\omega,$$

quod nos docet, differentiam $\eta-\xi$ semper constantem esse.

6. Si in aequatione lineae rectae (7) ponitur:

$$\omega = 0,$$

id est, si recta radio FC perpendicularis est (Fig. III.), sequitur:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\eta-\xi)}{\cos\frac{1}{2}(\eta+\xi)} = \frac{P}{R}.$$

Iam videamus quid haec aequatio in figura significet. Quem ad finem punctum M lineae SM cum centro iungamus et tangentes MA, MB ducamus; quo fit (vide §. 2.):

$$FCM = \tfrac{1}{2}(\eta-\xi),$$
$$ACM = \tfrac{1}{2}(\eta+\xi),$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(\eta-\xi) = \sin SMC,$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(\eta+\xi) = \sin AMC;$$

igitur:

$$\frac{\sin SMC}{\sin AMC} = \frac{P}{R} = \frac{CK}{CF}.$$

Si radius CA lineam SM versus prolongatur et per puncta A, F perpendicula AV, QFW in lineam CM ducuntur, invenitur:

$$CV = R\cos\tfrac{1}{2}(\eta+\xi),$$
$$CW = R\cos\tfrac{1}{2}(\eta-\xi),$$
$$\frac{CW}{CV} = \frac{P}{R};$$

praeterea:

$$CW = CQ\cos\tfrac{1}{2}(\eta+\xi),$$

igitur:

$$CQ = \frac{CW}{\cos\frac{1}{2}(\eta+\xi)} = R\frac{\cos\frac{1}{2}(\eta-\xi)}{\cos\frac{1}{2}(\eta+\xi)} = P.$$

Unde hoc theorema prodit:

Si e centro circuli perpendiculum demittitur in lineam rectam, et e puncto in quo id circumferentiam secat, perpendicula in rectas centrum cum punctis lineae datae iungentes, demittuntur, haec perpendicula radios resp. punctorum contactus tangentium ex iisdem punctis ductarum, secant in circumferentia circuli qui cum circulo

dato concentricus est et radio utitur distantia centri a linea recta.

7. Si in aequatione circuli, cuius radius est ϱ et cuius centrum coordd. orthog. x', y' determinatur:

$$(y-y')^2 + (x-x')^2 = \varrho^2,$$

coordd. orthog. in circulares transmutamus, fit:

$$\frac{R^2}{[\cos\frac{1}{2}(\eta+\xi)]^2} + \frac{R^2}{[\cos\frac{1}{2}(\eta'+\xi')]^2} - \frac{2R^2\cos\frac{1}{2}[\eta-\eta'-(\xi-\xi')]}{\cos\frac{1}{2}(\eta+\xi)\cos\frac{1}{2}(\eta'+\xi')}.$$

Quae formula, si ponimus:

$$\eta' = \xi' = 0,$$

i. e. si centrum in origine coordinatarum circularium locamus, et si praeterea

$$\varrho = R$$

facimus, has subit transformationes:

$$\frac{1}{[\cos\frac{1}{2}(\eta+\xi)]^2} + 1 - \frac{2\cos\frac{1}{2}(\eta-\xi)}{\cos\frac{1}{2}(\eta+\xi)} = 1,$$

$$1 - 2\cos\tfrac{1}{2}(\eta-\xi)\cos\tfrac{1}{2}(\eta+\xi) = 0,$$

$$1 = \cos\eta + \cos\xi,$$

$$\cos\eta = 1 - \cos\xi = \sin\text{vers}\xi;$$

quod theorema his verbis enunciatur:

Tangentes e puncto *M* (Fig. IV.) circumferentiae circuli *SMC* ad alium ductae circulum *AFB*, qui cum eodem radio e centro *C* in priore circumferentia sito, descriptus est, cum prioris circuli centro *F* eos includunt arcus *FA*, *FB*, ut alterius cosinus *CK*, alterius sinum versum *DF* aequet.

8. Aequatio circuli, cuius centrum in centro C circuli fixi positum sit, deducitur ex aequatione:

$$y^2 + x^2 = \varrho^2,$$

unde:

$$R^2 = \varrho^2[\cos\tfrac{1}{2}(\eta+\xi)]^2,$$

$$\eta+\xi = 2\text{ang}\cos\pm\frac{R}{\varrho},$$

quae summam coordinatarum semper constantem manere ostendit.

9. Inversam nunc instituamus disquisitionem, i. e. loca geometrica quaeramus qui simplicissimis aequationibus respondent:

Aequationem

$$\eta = \xi$$

nil aliud quam ipsam diametrum *CF* puncti fixi *F* (aut potius eius puncta extra circulum sita) exprimere, non solum facillime e figura evincitur, sed etiam coordinatarum orthog. ope probatur. Si enim ad eam formulas (4), (5) adhibemus, evadit:

$$\text{angtang}\frac{1}{R}\sqrt{x^2+y^2-R^2} + \text{angtang}\frac{x}{y} =$$

$$= \text{angtang}\frac{1}{R}\sqrt{x^2+y^2-R^2} - \text{angtang}\frac{x}{y},$$

$$2\text{angtang}\frac{x}{y} = 0,$$

$$\frac{x}{y} = 0; \quad x = 0.$$

Eodem modo aequatio:

$$\eta = \xi + c,$$

in hanc transit:

$$\text{angtang}\frac{x}{y} = \tfrac{1}{2}c,$$

$$\frac{x}{y} = \text{tang}\tfrac{1}{2}c,$$

$$y = x\cot\tfrac{1}{2}c;$$

itaque est aequatio lineae rectae, circuli centrum transeuntis et cum axe abscissarum angulum $(90^0 - \frac{1}{2}c)$ includentis.

Deinde aequatio:

$$\eta = -\xi$$

si easdem formulas adhibemus, dat:

$$\text{angtang}\frac{1}{R}\sqrt{x^2+y^2-R^2} = 0,$$

$$x^2+y^2-R^2 = 0,$$

quae est aequatio ipsius circuli, quo ad coordinatas determinandas utimur. Observandum tamen est, hac suppositione unam coordinatarum circul. negativam fieri. Si igitur aliquam ob causam coordinatas negativas excludamus, illa aequatione solum punctum F (origo coordd. circul.) definitur, cetera vero circumferentiae puncta aequatione

$$\eta = -\xi+2n\pi$$

designantur (§. 4.).

Ex aequatione

$$\eta = -\xi + c$$

prodit:

$$2\text{angtang}\frac{1}{R}\sqrt{x^2+y^2-R^2} = c,$$

$$\frac{1}{R}\sqrt{x^2+y^2-R^2} = \text{tang}\tfrac{1}{2}c,$$

$$x^2+y^2 = R^2(1+\text{tang}\tfrac{1}{2}c^2),$$

quae est aequatio circuli ex eodem, quo circulus fixus, centro C, sed radio $R\sqrt{1+\text{tang}\frac{1}{2}c^2} = \dfrac{R}{\cos\frac{1}{2}c}$ descripti, qui igitur locus geometricus est verticis anguli dati $[180^0-(\eta+\xi) = 180^0-c]$, cuius latera circulum fixum tangent.

Ex aequatione

$$\eta = c$$

sequitur:

$$\text{angtang}\frac{1}{R}\sqrt{x^2+y^2-R^2}+\text{angtang}\frac{x}{y} = c,$$

$$\frac{y\sqrt{x^2+y^2-R^2}+Rx}{Ry-x\sqrt{x^2+y^2-R^2}} = \text{tang}c. \tag{9}$$

Si x', y' sunt coordd. extremitatis arcus c, scimus esse:

$$x' = R\sin c,\ y' = R\cos c,$$

unde:

$$\text{tang}c = \frac{x'}{y'},$$

quam formulam si in aequatione (9) substituimus, invenimus:

$$yy'+xx' = R^2;$$

igitur $\eta = c$ rectam determinat, quae circulum in extremitate arcus c (ab origine coordd. circularium numerati) tanget.

Si omnia quae hac §. invenimus, cum formulis supra (§§. 5. seqq.) repertis comparamus, intelligimus unaquaque formula omnes eiusdem speciei loca geometrica, sed nulla alia, designari, itaque illis aequationibus haec loca complete exprimi. Quoniam autem nobis non in animo fuit proprietates linearum rectarum et circuli, nostrarum coordinatarum ope demonstrare, sed indicare tantum voluimus, quomodo coordinatis circularibus haec loca geometrica exprimi possent; statim, his rebus missis, ad eam quaestionem progrediamur, quam imprimis hoc opusculo tractare statuimus, nempe ad eam curvam examinandam, quae in nostro systemate coordd. aequatione generali primi gradus designetur. In qua disquisitione omnes arcus *imaginarios* reiiciendos statuamus, quia non construi possunt.

10. Data igitur aequatione:

$$\eta = a\xi + b,$$

primo constantes a, b quid significent, quaerendum est. Quod ut inveniamus, ponamus $\xi=0$, unde fit $\eta=b$; igitur constans b est arcus ab origine coordinatarum circularium dextrorsum numeratus; si contra ponimus $\eta=0$, prodit: $-\frac{b}{\xi} = a$, quod, quum ξ et b arcus exprimant, docet constantem a nihil aliud esse quam numerum abstractum sive rationem arcus b ad eum arcum ξ qui suppositioni $\eta=0$ respondeat.

Hoc posito aequationem simpliciorem reddere possumus. Si enim, curva non mutata, punctum F sive originem coordinatarum, arcu $\frac{b}{a+1}$ dextrorsum in circumferentia promovemus, vel, quod idem est, si radium CF angulo $\frac{b}{a+1}$ torquemus, coordinatae η arcu (angulo) $\frac{b}{a+1}$ diminuuntur, ξ contra eodem arcu augentur, ita ut, novis coordinatis litteris

ξ_1, η_1 designatis, sit:

$$\eta_1 = \eta - \frac{b}{a+1}, \quad \xi_1 = \xi + \frac{b}{a+1},$$

unde:

$$\eta = \eta_1 + \frac{b}{a+1}, \quad \xi = \xi_1 - \frac{b}{a+1},$$

quos valores si in aequatione data substituimus, haec prodit aequatio:

$$\eta_1 + \frac{b}{a+1} = a\xi_1 - \frac{ab}{a+1} + b,$$

unde:

$$\eta_1 = a\xi_1,$$

ita ut si rursus η, ξ loco η_1, ξ_1 ponimus, aequatio:

$$\eta = a\xi$$

eandem atque aequatio data designet curvam, et ut hanc solam perscrutemur necesse sit.

Illa transformatio coordinatarum semper effici potest, nisi $a = -1$, quo $\frac{b}{a+1} = \infty$ fiat; cuius rei causa facillime explicatur: ex aequatione $\eta = a\xi$ enim sequitur ut evanescente ξ etiam η evanescat, i. e. ut nova coordinatarum origo circulo ac curvae communis sit; aequatione $\eta = -\xi + b$ vero circulum exprimi reperimus (§. 9.), qui cum circulo fixo concentricus sit, igitur cum nullo puncto tangeat. Hunc autem circulum ut iam satis e geometria cognitum, excludamus, et constantem a eos tantum valores denotare statuamus qui a -1 differant. Sed et omnes valores constantis a qui unitate minores sunt, excludere licet; si enim $a = \frac{1}{c}$ est, ubi $c > 1$, inde sequitur: $\xi = c\eta$; itaque curva $\eta = c\xi$ a curva $\eta = a\xi$ in eo solum differt quod coordinatae inter se permutatae sunt. Si praeterea aequationem $\eta = \xi$, ut rectam exprimentem, omittimus, omnes curvae, quae hic nobis considerandae sunt, formantur si in aequatione $\eta = a\xi$, constans a omnes numeros integros fractosque designat, qui una parte limitibus $+1$ et $+\infty$, altera -1 et $-\infty$ continentur.

11. Quo posito, nostra aequatio, si ad eam formulas (4), (5) adhibemus, evadit:

$$(a-1)\text{angtang}\frac{1}{R}\sqrt{x^2+y^2-R^2} = (a+1)\text{angtang}\frac{x}{y},$$

quae primo adspectu transscendens videtur, semper autem in formam algebraicam redigi potest dum a realis et rationalis est numerus. Sit enim $a=\frac{\mu}{\nu}$, ubi μ et ν reales integri numeri et minimi quidem sint, quibus eius fractionis valor exprimatur, ita ut nullus iis communis sit factor; et ponatur insuper $\mu > \nu$ (§. 10.). Quo pacto aequatio in hanc transit:

$$(\mu-\nu)\text{angtang}\frac{1}{R}\sqrt{x^2+y^2-R^2} = (\mu+\nu)\text{angtang}\frac{x}{y},$$

quae, si brevitatis causa ponimus:

$$\text{angtang}\frac{1}{R}\sqrt{x^2+y^2-R^2} = \vartheta, \qquad \text{angtang}\frac{x}{y}=\zeta,$$

i. e.: $$\text{tang}\vartheta = \frac{1}{R}\sqrt{x^2+y^2-R^2}, \qquad \text{tang}\zeta = \frac{x}{y}, \tag{10}$$

hanc formam induit:

$$(\mu-\nu)\vartheta = (\mu+\nu)\zeta; \tag{11}$$

ex quo sequitur:

$$\text{tang}(\mu-\nu)\vartheta = \text{tang}(\mu+\nu)\zeta.$$

Quum in hac formula coefficientes $(\mu-\nu)$, $(\mu+\nu)$ integros numeros designent, $\text{tang}(\mu-\nu)\vartheta$ et $\text{tang}(\mu+\nu)\zeta$ per series *finitas* secundum potestates expressionum $\text{tang}\vartheta$ et $\text{tang}\zeta$ progredientes explicari possunt. Est enim, si m numerum aliquem denotat:

$$\text{tang}mz = \frac{m\,\text{tg}z - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\text{tg}z^3 + \frac{m(m-1)\ldots(m-4)}{1.2.3.4.5}\text{tg}z^5 + \ldots}{1 - \frac{m(m-1)}{1.2}\text{tg}z^2 + \frac{m(m-1)(m-3)(m-3)}{1.2.3.4}\text{tg}z^4 + \ldots} \tag{12}$$

cuius fractionis numerator atque denominator series finita est si numerus m integer; infinita, si fractus vel irrationilis est. Et quum praeterea quantitates quas $\text{tang}\vartheta$, $\text{tang}\zeta$ exprimunt

(10), functiones algebraicae coordinatarum x, y sint, aequatio (11) evoluta constat e seriebus finitis quantitatum algebraicarum, itaque *algebraica* est.

Ut melius huius aequationis formam perspiciamus, primo numerum $\mu+\nu$ parem esse fingamus, quo fit ut et $\mu-\nu$ par sit. Quo posito elucet, in serie, qua numerator expressionis $\operatorname{tang}(\mu+\nu)\zeta$ constat (12), summae potestatis functionis $\operatorname{tang}\zeta$ exponentem esse $(\mu+\nu-1)$, in ea vero, qua denominator constituitur, $(\mu+\nu)$ esse exponentem. Simili modo patet in functionis $\operatorname{tang}(\mu+\nu)\vartheta$ evolutae numeratore et denominatore summas functionis $\operatorname{tang}\vartheta$ potestates numeris resp. $(\mu-\nu-1)$ et $(\mu-\nu)$ indicari; quo fit ut in aequationis (11) per denominatorum productum multiplicatae, membro sinistro, terminus summas earum functionum potestates exhibens, sit productum $\operatorname{tang}\vartheta^{\mu-\nu-1}\operatorname{tang}\zeta^{\mu+\nu}$, in dextro vero membro, $\operatorname{tang}\vartheta^{\mu-\nu}\operatorname{tang}\zeta^{\mu+\nu-1}$, quorum utrumque dimensionis $(2\mu-1)$ est.

Est autem (10.):

$$\operatorname{tang}\zeta^{\mu+\nu-1} = \frac{x^{\mu+\nu-1}}{y^{\mu+\nu-1}}, \quad \operatorname{tang}\zeta^{\mu+\nu} = \frac{x^{\mu+\nu}}{y^{\mu+\nu}},$$

$$\operatorname{tang}\vartheta^{\mu+\nu-1} = \frac{1}{R^{\mu-\nu-1}}\sqrt{(x^2+y^2-R^2)^{\mu-\nu-1}},$$

$$\operatorname{tang}\vartheta^{\mu-\nu} = \frac{1}{R^{\mu-\nu}}\sqrt{(x^2+y^2-R^2)^{\mu-\nu}};$$

ita ut producta illa sint:

$$\frac{x^{\mu+\nu}}{R^{\mu-\nu-1}y^{\mu+\nu}}\sqrt{(x^2+y^2-R^2)^{\mu-\nu-1}} =$$

$$\frac{x^{\mu+\nu}}{R^{\mu-\nu-1}y^{\mu+\nu}}(x^2+y^2-R^2)^{\frac{\mu-\nu-2}{2}}\sqrt{x^2-y^2-R^2} \quad (13)$$

et

$$\frac{x^{\mu+\nu-1}}{R^{\mu-\nu}y^{\mu+\nu-1}}\sqrt{(x^2+y^2-R^2)^{\mu-\nu}} =$$

$$\frac{x^{\mu+\nu-1}}{R^{\mu-\nu}y^{\mu+\nu-1}}(x^2+y^2-R^2)^{\frac{\mu-\nu}{2}}; \qquad (14)$$

ceteri aequationis termini hanc illis analogam praebent formam:

$$\frac{x^m}{R^n y^m}(x^2+y^2-R^2)^{\frac{n}{2}} \text{ vel } \frac{x^m}{R^n y^m}(x^2+y^2-R^2)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{x^2+y^2-R^2},$$

prout n numerus par vel impar est. Et quum $m<\mu+\nu-1$, $n<\mu-\nu-1$, planum est, terminos (13) et (14) tum etiam summas coordinatarum x, y potestates continere, quum omnes termini amovendorum denominatorum caussa per $y^{\mu+\nu}$ multiplicantur. Iam ut et radix ex aequatione dispareat, omnes terminos sola praeditos radice $\sqrt{x^2+y^2-R^2}$ ita componamus, ut productum forment, cuius alter factor ipsa radix, alter summa quantitatum rationalium sit; et hoc productum in primo, ceteros omnes terminos in altero aequationis membro ponamus. Quo facto, si aequationis membra per se ipsa multiplicantur, termini summas coordd. potestates exhibentes hi sunt:

$$\frac{1}{R^{2(\mu-\nu-1)}}x^{2\mu+2\nu}(x^2+y^2-R^2)^{\mu-\nu-1}$$

et $$\frac{1}{R^{2(\mu-\nu)}}x^{2\mu+2\nu-2}y^2(x^2+y^2-R^2)^{\mu-\nu}. \qquad (15)$$

Iam observemus omnes aequationes, quibus usi simus, homogeneas esse, si x, y, R ut quantitates lineares, expressiones $\tan g\vartheta$ et $\tan g\zeta$ contra ut rationes sive numeros consideremus, itaque et aequationem terminalem per $R^{2(\mu-\nu)}$ multiplicatam, homogeneam esse; ex quo sequitur, ut nullus terminus maioris sit dimensionis, ratione habita coordinatarum, quam duo termini ex evolutione alterius expressionum (15) progredientes:

$$x^{2\mu+2\nu-2}y^2x^{2(\mu-\nu)} = x^{4\mu-2}y^2$$

et $$x^{2\mu+2\nu-2}y^2y^{2(\mu-\nu)} = x^{2(\mu+\nu-1)}y^{2(\mu-\nu+1)},$$

qui factorem R non contineant; igitur aequationis gradus est 4μ.

Ut summam utriusque coordinatae potestatem inveniamus, observemus abscissam x in radice $\tang\vartheta$ et in *numeratore* expressionis $\tang\zeta$ exstare, ita ut summa eius potestas e multiplicatione summarum potestatum functionum $\tang\vartheta$, $\tang\zeta$ prodeat; igitur exponente $(4\mu-2)$ denotetur. Quum vero ordinata y et in radice $\tang\vartheta$ et in *denominatore* $\tang\zeta$ sit, summa eius potestas in eo termino exstat, qui multiplicando summam potestatem functionis $\tang\vartheta$ per minimam functionis $\tang\zeta$ producitur, i. e. in termino $\tang\vartheta^{\mu-\nu}\tang\zeta$, qui quum aequatio per $y^{\mu+\nu}$ multiplicetur et deinde quadretur, evadit (omisso factore R):

$$(x^2+y^2-R^2)^{\mu-\nu}y^{2(\mu+\nu-1)},$$

ubi y exponente $4\mu-2$ praeditus est. Itaque unicuique valori ordinatae respondent $4\mu-2$ valores abscissae, et unicuique valori abscissae, $4\mu-2$ valores ordinatae.

Si $\mu+\nu$ et $\mu-\nu$ impares numeri sunt, eandem demonstrationem adhiberi posse, maxime perspicuum est, ab eo autem, quod ultimo loco diximus, in eo differre, quod summus ordinatae exponens non $4\mu-2$ sed 4μ sit.

Redeamus ad aequationem (11) quae formulae (12) ope evoluta, in hanc formam transit:

$$\frac{m\mathrm{tg}\vartheta-{}^3m\mathrm{tg}\vartheta^3+{}^5m\mathrm{tg}\vartheta^5-\ldots}{1-{}^2m\mathrm{tg}\vartheta^2+{}^4m\mathrm{tg}\vartheta^4-\ldots}=\frac{n\mathrm{tg}\zeta-{}^3n\mathrm{tg}\zeta^3+{}^5n\mathrm{tg}\zeta^5-\ldots}{1-{}^2n\mathrm{tg}\zeta^2+{}^4n\mathrm{tg}\zeta^4-\ldots},$$

ubi $m=\mu-\nu$, $n=\mu+\nu$; ex hac aequatione sequitur:

$$\begin{aligned}&\tang\vartheta(m-{}^3m\tang\vartheta^2+{}^5m\tang\vartheta^4-\ldots)(1-{}^2n\tang\zeta^2+\ldots)\\ &=\tang\zeta(n-{}^3n\tang\zeta^2+{}^5n\tang\zeta^4-\ldots)(1-{}^2m\tang\vartheta^2+\ldots),\end{aligned}$$

in qua formula si pro $\tang\vartheta$, $\tang\zeta$, earum functiones coordinatarum x, y substituuntur, in utroque producto summarum quae parenthesibus includuntur, pares solum exstant coordinatarum exponentes, ita ut aequatio postquam (vide supra) quadrata sit, nullam imparem coordinatarum potestatem contineat. Ex quo sequitur, ut unicuique alterius coordinatae valori valores alterius coordinatae respondentes, bini signo tantum differant; itaque curva nostra aequatione illa inter coordd. orthog. expressa, et abscissarum et ordinatarum axe in binas partes congruentes dividatur.

Praeterea summa radii R potestas in functione $tang\vartheta^{\mu-\nu}$ exstat, igitur in aequatione finali numero $2(\mu-\nu)$ exprimitur, ex quo sequitur, quum omnis termini sint gradus 4μ, ut terminus illam potestatem exhibens etiam productum coordinatarum (vel unam coord.) dimensionis $4\mu-2(\mu-\nu)=2(\mu+\nu)$ contineat. Itaque circuli centrum ($x=o$, $y=o$) punctum multiplum curvae est.

Haec et alia quae ex aequatione evoluta inter coordd. orthog. concluduntur, non omnino cum curva $\eta=a\xi$ convenire, non solum e figura perspicitur, sed etiam aequatione $\eta=a\xi$ perscrutanda evincitur (conf. §. 4. et quae inferius scripsimus). *)

Quam ob rem et quod illius aequationis forma non apta sit ad eam explorandam, ea relicta, solum systema coordinatarum circularium ad investigandam curvam nostram adhibeamus.

12. Quum omnes arcus imaginarios reiecerimus, sequitur, ut et coefficiens a semper realis sit, quia si imaginarius esset, etiam alterutra coordinatarum imaginaria evaderet.

Deinde distinguendum est, utrum coefficiens a positivus an negativus sit; inveniemus enim altero signo aliam respondere curvae formam aliasque proprietates. Priore itaque disquisitionis sequentis parte aequationem $\eta=a\xi$, ubi coefficiens a positivus, posteriore, ubi negativus est, considerabimus.

Si coefficiens a positivus est, arcus positivos tantum adhibere licet. Si enim ξ est arcus negativus i. e. dextror-

*) Hoc non mirum videtur si consideramus, non solum aequatione quadranda numerum radicum duplicari, sed etiam expressiones imaginarias disparere et centrum circuli esse intersectionem tangentium imaginariarum.

sum numeratus, propter aequationem $\eta = a\xi$ etiam η negativus fit arcus, itaque sinistrorsum descriptus. Tum autem semper duo arcus positivi η', ξ' reperiuntur:

$$\xi' = 2\pi - \xi, \qquad \eta' = 2a\pi - \eta,$$

vel

$$\xi' = 2\nu\pi - \xi, \qquad \eta' = 2\mu\pi - \eta,$$

ita ut eorum extremitates in extremitates arcuum η, ξ cadant, et ut sit $\eta' = a\xi'$; qui arcus igitur negativos arcus perfecte supplent.

13. Nulla curvae puncta intra circulum sita esse iam §. 4. vidimus. Quaeramus itaque puncta quae *in circumferentia* iaceant. Haec autem dantur aequationibus:

$$\eta + \xi = 2n\pi \quad \text{atque} \quad \eta = a\xi,$$

unde:

$$\xi = \frac{2n\pi}{a+1} = \frac{n}{a+1} 2\pi.$$

Ad quae puncta construenda coefficienti n omnes valores integri attribuendi sunt; et quum ξ nunquam negativus sit, minimus eius valor est 0, igitur primum illorum punctorum in ipsa coordinatarum origine situm; cetera puncta ut describamus, circumferentiam sinistrorsum percurrimus, per arcus $\frac{1}{a+1} 2\pi$ progredientes. Ad numerum eorum determinandum, distinguendum iterum est, an a integer, fractus, irrationalis sit numerus.

A. Si coefficiens a integer est, semel tantum percurramus circumferentiam oportet; nam punctum quod tota circumferentia percursa construitur, est:

$$\xi_{a+1} = \frac{a+1}{a+1} 2\pi = 2\pi,$$

itaque in primum punctum ξ_0 cadit. Reliqua autem puncta

$$\xi_{a+1+m} = \frac{a+1+m}{a+1} 2\pi = 2\pi + \frac{m}{a+1} 2\pi$$

in puncta

$$\xi_m = \frac{m}{a+1} 2\pi,$$

iam antea (in prima circumferentia sita) descripta cadere, conspicuum est. Itaque **curvae ac circulo communia sunt $a+1$ puncta quae circumferentiam in totidem partes aequales dividunt.**

B. Si $a = \frac{\mu}{\nu}$, numerus fractus est, illa puncta dantur aequatione:

$$\xi_n = \frac{n\nu}{\mu+\nu} 2\pi.$$

Quorum ut aliquod ξ_v in punctum ξ_m prius constructum cadat, oportet esse:

$$\xi_v = \xi_m + 2r\pi ,$$

i. e.

$$\frac{v\nu}{\mu+\nu} 2\pi = \left(\frac{m\nu}{\mu+\nu} + r\right) 2\pi ,$$

$$\frac{v\nu}{\mu+\nu} = \frac{m\nu}{\mu+\nu} + r,$$

$$r = \frac{(v-m)\nu}{\mu+\nu}.$$

Quum r numerum integrum designet, sed ν ad μ, igitur et ad summam $\mu+\nu$ numerus primus sit, necesse est, factorem $(v-m)$ per $\mu+\nu$ dividi posse, quo fit ut minimus litterae v valor sit: $v=\mu+\nu+m$, ergo $v-m=\mu+\nu$ et $r=\nu$. Igitur primum punctum quod in punctum primo loco formatum $\xi_0=0$ cadit, est

$$\xi_{\mu+\nu} = 2\nu\pi ,$$

omnia autem cetera puncta $\xi_{\mu+\nu+m}$ in puncta ξ_m cadunt. Ex quo sequitur ut ad omnia ea puncta describenda, ν circumferentias percurrere oporteat, et, quum bina puncta intervallo $\frac{\nu}{\mu+\nu} 2\pi$ seiungantur, eorum numerus sit $2\nu\pi : \frac{\nu}{\mu+\nu} 2\pi = \mu+\nu$. Haec puncta, in constructione quidem in ν circumferentiis sita, in figura tamen una circumferentia comprehenduntur. Arcus qui duo puncta ξ_m, ξ_v seiungit, est $\frac{(v-m)\nu}{\mu+\nu} 2\pi = 2k\pi + \frac{p}{\mu+\nu} 2\pi$, ubi $k < \nu$, $p < \mu+\nu$, ex quo sequitur ut arcus in figura illis punctis interpositus, sit $\frac{p}{\mu+\nu}2\pi$, igitur nunquam minor, neque quum sint $\mu+\nu$ arcus qui inter duo proxima (in figura) puncta iaceant, ullus eorum maior esse possit quam $\frac{2\pi}{\mu+\nu}$. Itaque puncta circulo ac curvae communia circumferentiam in $\mu+\nu$ partes aequales dividunt.

C. Si a est quantitas irrationalis, illorum punctorum infinitus est numerus. Si enim punctum ξ_v cum puncto ξ_m coincideret, esset:

$$\xi_v = \xi_m + 2r\pi,$$

i. e.

$$\frac{v}{a+1}2\pi = \frac{m}{a+1}2\pi + 2r\pi,$$

unde sequeretur, ut

$$a = \frac{m-v+r}{v-m},$$

quod impossibile est, quia quantitas irrationalis a nunquam fractionem rationalem $\frac{m-v+r}{v-m}$ aequare potest.

Quam ob causam solos valores *rationales* coefficientis a considerabimus.

14. Quum omnia puncta circulo ac curvae communia, quae deinceps *puncta contactus* vocabimus, in ν primis circumferentiis (ratione habita coordinatae ξ) sita sint, probabile esse videtur nullum coordinatarum ξ maiorem valorem ad curvam describendam, quam $2\nu\pi$, esse adhibendum, ideo maximum coordinatarum η valorem esse $2\mu\pi$; quod nunc examinemus. Si punctum aliquod describatur coordinatis ξ', η', ita ut $\xi' > 2\nu\pi$, $\eta' > 2\mu\pi$, sunt ν arcus ξ minores quam $2\nu\pi$ quibus eadem ac ξ' extremitas est, quorum aliquis littera ξ'' designetur, ita ut $\xi'' < 2\nu\pi$. Igitur $\xi' = \xi'' + 2m\pi$, unde:

$$\eta' = \frac{\mu}{\nu}\xi' = \frac{\mu}{\nu}\xi'' + 2\frac{\mu}{\nu}m\pi = \eta'' + 2\frac{\mu}{\nu}m\pi,$$

in qua aequatione litterae m eum valorem attribui licet, ut per ν divisibilis sit, unde si ponimus $\frac{m}{\nu} = r$, evenit:

$$\eta' = \eta''+2r\pi.$$

Haec formula docet, extremitatem arcus η' in extremitatem arcus η'' cadere, igitur arcubus η', ξ' non aliud punctum describi quam iam antea coordinatis η'', ξ'' in resp. μ, ν primis circumferentiis comprehensis, descriptum sit.

Sed etiam *necesse* est ad omnia curvae puncta describenda, ut coordinatis ξ, η omnes valores inde a 0 usque ad $2\nu\pi$, $2\mu\pi$ attribuantur. Si enim duo puncta ξ', η' et ξ'', η'' illo modo constructa coincidant, duplice modo id effectum esse potest:

A. Extremitas arcus ξ'' in extremitatem ξ', et η'' in η' cadit; i. e.:

$$\xi'' = \xi' + 2m\pi, \qquad \eta'' = \eta' + 2n\pi,$$

unde:

$$\eta'' = \eta' + 2\frac{\mu}{\nu}m\pi,$$

$$2\frac{\mu}{\nu}m\pi = 2n\pi,$$

$$n = m\frac{\mu}{\nu},$$

id quod fieri nequit, nisi $m = 0$ aut $m = p\nu$, ubi p integer est numerus; suppositione autem nostra erat $m > 0$ et $m < \nu$; igitur falsa erat hypothesis illa.

B. Extremitas arcus ξ'' in extremitatem arcus η', et η'' in ξ' cadit, i. e.:

$$\xi'' = 2m\pi - \eta'; \qquad \eta'' = 2n\pi - \xi',$$

unde:

$$2m\pi - \xi'' = \frac{\mu}{\nu}(2n\pi - \eta'') = \frac{\mu}{\nu}(2n\pi - \frac{\mu}{\nu}\xi''),$$

$$\xi'' = \frac{\left(\frac{\mu}{\nu}n - m\right)2\pi}{\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2 - 1} = \frac{(\mu n - \nu m)2\nu\pi}{\mu^2 - \nu^2}$$

ex qua formula sequitur, quum m et n, μ et ν integri numeri sint, numerum finitum tantum punctorum coincidentium exstare. Quod ut melius intelligas, sit h incrementum infinite parvum arcus ξ'', unde:

$$\xi''+h = 2m\pi-\eta'+h,$$

$$\eta''+\frac{\mu}{\nu}h = 2n\pi-\xi'+\frac{\mu}{\nu}h.$$

Si etiam novorum arcuum extremitates in extremitates arcuum iam antea formatorum ξ_1, η_1 caderent, necesse esset: ut:

$$2m\pi-\eta'+h=2r\pi+\eta_1\,,$$

$$2n\pi-\xi'+\frac{\mu}{\nu}h=2v\pi+\xi_1\,,$$

unde:

$$h = \frac{\left(\frac{\mu}{\nu}(v-n)+m-r\right)2\pi}{\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2-1} = \frac{[\mu(v-n)+\nu(m-r)]2\nu\pi}{\mu^2-\nu^2};$$

quae aequatio sibi ipsi repugnat, quia membrum sinistrum quantitas infinite parva, membrum dextrum quantitas finita est. Ex quo sequitur, ut illa puncta sint singularia, quia bis in constructione curvae describantur, puncta autem adiacentia semel tantum construantur.

Tanquam corollarium eius curvae proprietatis aliam hanc proprietatem apponimus: Unaquaeque circuli tangens curvam in $\mu+\nu$ punctis secat. Ad construendam enim curvam, in omni circuli puncto tangentem duximus quae arcum ξ determinavit; quum autem circumferentiam ad omnes arcus ξ abscindendos νies percurrerimus, unoquoque puncto et ideo unaquaque tangente νies usi sumus. Sed unumquodque punctum circumferentiae est etiam extremitas μ arcuum diversorum η, ita ut unaquaque tangente ad definiendas coordinatas η μies usi simus. Igitur omnem tangentem circuli in describenda curva $(\mu+\nu)$ies adhibuimus, ex quo sequitur ut unicuique tangenti $\mu+\nu$ puncta cum curva sint communia, q. e. d.

15. Si η, ξ coordinatae cuiuslibet puncti sunt, punctum circumferentiae quod ab initio coordd. circul. eodem

arcu atque extremitates coordinatae ξ, sed in directione contraria numerato, distat, extremitas est ν arcuum ξ ad curvam construendam adhibitorum, quos littera ξ' designemus, ita ut sit:

$$\xi' = 2m\pi - \xi,$$

unde: $$\eta' = 2\frac{\mu}{\nu}m\pi - \frac{\mu}{\nu}\xi = 2\frac{\mu}{\nu}m\pi - \eta.$$

Dato valore ξ, η, coefficiens indeterminatus m huic soli condicioni subiectus est, (§. 14.) ne sit $\xi' > 2\nu\pi$, neve $\eta' > 2\mu\pi$, quae non negligitur ponendo $m = \nu$; quo fit:

$$\xi' = 2\nu\pi - \xi,$$
$$\eta' = 2\mu\pi - \eta.$$

Hasce relationes ita interpretamur, ut cuilibet puncto ξ, η, aliud respondeat punctum cuius coordinatarum η', ξ' extremitates eodem ac prioris puncti arcu, sed directione opposita numerato, ab initio coordd. distent; ex quo patet puncta ipsa ad diametrum originis coordd. symmetrice sita esse. Igitur **diameter originis coordd. curvam in duas partes congruentes dividit.**

Eam diametrum *principalem* deinceps vocabimus.

16. Origine coordinatarum inde a puncto F in aliud punctum contactus: $\left(\xi_n = \frac{2n\nu\pi}{\mu+\nu},\ \eta_n = \frac{2n\mu\pi}{\mu+\nu}\right)$ promota, novae coordinatae ξ', η' cum prioribus ξ, η his relationibus iunctae sunt:

$$\xi = \xi' + \frac{2n\nu\pi}{\mu+\nu},$$

$$\eta = \eta' - \frac{2n\nu\pi}{\mu+\nu},$$

quibus adhibitis, aequatio $\eta = \frac{\mu}{\nu}\xi$ in hanc transit:

$$\eta' - \frac{2n\mu\pi}{\mu+\nu} = \frac{\mu}{\nu}\xi' + \frac{2n\mu\pi}{\mu+\nu},$$

$$\eta' = \frac{\mu}{\nu}\xi' + 2n\pi,$$

$$\eta'-2n\pi=\frac{\mu}{\nu}\xi',$$

quae nos docet, arcum $\eta'-2n\pi$ eodem modo se habere ad arcum ξ', atque η ad ξ, i. e. si $\xi'=\xi$, extremitatem arcus $\eta'-2n\pi$ tanto distare a puncto ξ_n, η_n, quanto extremitatem arcus η ab initio coordinatarum. Quum autem arcuum η' et $\eta'-2n\pi$ eadem sint puncta extremitatis, arcubus ξ' η' idem atque arcubus ξ', $\eta'-2n\pi$ determinatur punctum. Igitur si $\xi'=\xi$, punctum ξ', η' pari modo se habet ad diametrum puncti contactus ξ_n, η_n, ac ξ, η ad diametrum principalem, quare aequatio $\eta'=\frac{\mu}{\nu}\xi'$ ipsa eadem puncta dat atque $\eta=\frac{\mu}{\nu}\xi$. Itaque si curva tota angulo $\frac{2n\pi}{\mu+\nu}$ circum centrum circuli torquetur, omnia curvae puncta in loca ubi iam antea alia eiusdem curvae puncta fuerunt, cadunt; unde haec curvae proprietas prodit: Illae $\mu+\nu$ lineae rectae quae centrum circuli cum punctis contactus iungunt, curvam non solum in binas sed etiam in $\mu+\nu$ partes congruentes dividunt.

17. Antequam in investiganda curva nostra pergamus, nonnulla nobis observanda sunt, quae ad ipsam constructionem pertinent.

I. Aequatio ipsa modum indicat quo curva construatur: a puncto *F* enim tot arcus ξ quot necesse videtur, in circumferentia sinistrorsum abscindantur, quorum amplitudo inde a 0 usque ad $2\nu\pi$ crescat. Quibus respondentes, arcus $\eta=\frac{\mu}{\nu}\xi$ dextrorsum describantur, et quaeratur intersectio tangentis in extremitate cuiusque arcus ξ cum tangente in extremitate arcus η arcui ξ respondentis; quae intersectiones linea curva inter se iungantur. Quod ut quam facillime efficiatur, simplicissimum videtur esse, extremitates *b, c, d* etc. (Fig. V.) circini ope determinari, cuius inter acumina eadem maneat distantia $Fb=bc=cd$ etc.; deinde si coefficiens a integer est, eo puncto quaesito quod a puncto F arcu $a \cdot Fb$ distet (quod punctum est c, d, e, f etc. prout $a = 2$, 3, 4, 5 etc.), distantia acuminum aequetur cordae id punctum cum puncto F iungenti, et circino ita accomodato puncta B, C, D etc. dextrorsum eodem modo quo antea puncta b, c, d etc., determinentur; quo facto arcus FB, FC, FD etc. coordinatas η eorundem punctorum quorum ξ arcus Fb, Fc, Fd sint, esse patet. Sin $a = \frac{\mu}{\nu}$, non semper arcus ξ per ν dividi possunt; igitur non arcus ξ, sed $\frac{\xi}{\nu}$ construantur, qui per ν et μ multiplicentur ea ratione quam modo instituimus.

II. Haec methodus etiam ad tangentes ducendas inservit. Non enim necesse est tangentes ut perpendicula in radios construere, sed ad tangentem in aliquo puncto c construendam sufficit, ut per illud punctum recta ducatur parallela cordae, quae duo circumferentiae puncta b et d, vel F et e, eodem arcu ab illo puncto distantia iungat; quod facillime efficitur ope anguli recti lignei (gallice: *Equerre*) qui uno latere regulae adiacens movetur.

III. Quae constructiones si propter exiguitatem arcuum $\frac{\xi}{\nu}$ nimis difficiles sunt, eas primum in circulo concentrico sed maiore radio conscripto perfici et deinde in circulum datum referri iuvabit (cf. fig. X.).

IV. Curva nostra rationem praestat circumferentiae in quotlibet partes dividendae. Ut enim circumferentia in n partes dividatur, nil necesse est nisi puncta quaerere, quae curvae $\eta = (n-1)\xi$ et circulo communia sint, quod quomodo fiat, infra docebimus.

V. Ad arcum aliquem FD in n partes dividendum, constructa curva: $\eta = n\xi$ cuius initium altera extremitas F arcus sit, e puncto in quo curva a tangente in altera extremitate arcus secetur, alia tangens ad arcum productum ducatur, cuius punctum contactus d eum arcum Fd cum puncto F includet, ut sit $Fd = \frac{1}{n} FD$.

VI. Punctis circulo et curvae communibus constructis, curvae descriptio multo simplicior reddi potest: Postquam enim ea curvae pars quae inter puncta $\xi = 0$ et $\xi = \frac{\pi}{a+1}$ sita est, constructa est, circuli concentrici describantur qui radios per illa puncta transeuntes, in punctis G, H etc., G_1, H_1 etc. secent. Omnia puncta quae in his circumferentiis resp. a punctis G_1, H_1 etc. iisdem arcubus ac puncta curvae iam formata M, N etc. (ut sit $GM' = G_1M_1 =$ etc. $= GM$; $HN' = H_1N_1$ etc. $= HN$) a punctis G, H, distent, essse puncta curvae, e §. 16. satis elucet.

18. Quibus praemissis, curvam (Fig. VI.) construi fingamus: Primum curvae punctum est ipsa coordd. origo, in cuius dextram partem puncta sequentia cadunt, propterea quod $\eta > \xi$. Coordinata ξ arcu infinite parvo h crescente, etiam η arcu infinite parvo ah augetur, ita ut tangentes in extremitatibus arcuum $\xi + h$, $\eta + ah$ infinite proxima sint tangentibus in extremitatibus ξ, η, quare et eorum intersectiones, i. e. puncta ξ, η et $\xi + h$, $\eta + ah$ infinite proxima sunt; curva igitur *continua* est.

Curva ad dextram deflectens simul a circulo recedit; radius vector r enim datur aequatione:

$$r = \frac{R}{\cos\frac{1}{2}(\eta + \xi)} = \frac{R}{\cos\frac{1}{2}(a+1)\xi},$$

ubi r crescit crescente ξ. Si $\xi = \frac{\pi}{a+1} = \frac{\nu\pi}{\mu+\nu}$, fit $r = \infty$, quod etiam e figura elucet, quia hac suppositione tangentes, quarum intersectiones puncta curvae sunt, parallelae evadunt. Igitur curva in infinitum abit. Omnia puncta hactenus formata in eodem latere diametri LS, quae extremitatem arcus $\xi = \frac{\pi}{a+1}$ transit, iacent, quia summa angulorum quos binae tangentes e punctis curvae structae cum hac diametro includunt, minor est duobus angulis rectis. Si autem $\xi > \frac{\pi}{a+1}$, i. e. si $\xi = \frac{\pi}{a+1} + h$ ubi $h < \frac{2\pi}{a+1}$, illa summa maior evadit, quo efficitur ut iam omnia puncta in alterum diametri latus cadant. Sit M punctum curvae cuius coord. sit $\xi = \frac{\pi}{a+1} - h$, et M' aliud punctum quod detur aequatione $\xi' = \frac{\pi}{a+1} + h$; anguli quos horum punctorum radii vectores CM, $M'CK$ cum diametro principali includunt, sunt:

$$\tfrac{1}{2}(\eta - \xi) = \frac{1}{2}\left(\frac{a-1}{a+1}\pi - (a-1)h\right) = FCM,$$

$$\tfrac{1}{2}(\eta' - \xi') = \frac{1}{2}\left(\frac{a-1}{a+1}\pi + (a-1)h\right) = FCK,$$

quibus si angulus $FL = \frac{\pi}{a+1}$ additur, fit:

$$MCL = \tfrac{1}{2}[\pi - (a-1)h],$$
$$KCL = \tfrac{1}{2}[\pi + (a-1)h];$$

igitur $KCS = MCL$. Quum autem punctum M' non eodem atque M latere lineae LS situm sit, necesse est in linea KC producta iaceat, unde $M'CL = KCS = MCL$; praeterea $A'CL = h = ACL$, itaque et $CM' = CM$; ex quo sequitur ut linea recta $M'M$ in diametrum LS perpendicularis sit et ab ea in duas partes aequales dividatur.

Si h inde a 0 usque ad $\frac{\pi}{a+1}$ crescit, ea curvae pars describitur cuius coordinatis ξ omnes valores inter $\frac{\pi}{a+1}$ et $\frac{2\pi}{a+1}$ iacentes attribuuntur; et quum unicuique eius puncto $\frac{\pi}{a+1} + h$ aliud punctum $\frac{\pi}{a+1} - h$ in parte iam prius formata respondeat, elucet, alteram partem circum diametrum LS ut axem conversam, omnino cum priore congruere.

Suppositio: $\xi = \frac{2\pi}{a+1}$ secundum punctum circulo et curvae commune dat.

Si ξ inter limites $\frac{2\pi}{a+1}$ et $\frac{3\pi}{a+1}$ sumitur, nova curvae pars $M''E$ aequalis est ei parti cuius ξ inde a 0 usque ad $\frac{\pi}{a+1}$ (§. 16.) crescit. Igitur ea curvae pars, quae formatur crescente ξ inde a $\frac{\pi}{a+1}$ usque ad $\frac{3\pi}{a+1}$, ramus continuus est qui circulum in puncto E tanget, in utramque partem in infinitum a circulo recedit, a diametro CE bifariam secatur.

Si hoc modo procedimus, omnes curvae partes, quarum coordinatis ξ valores binis proximis imparibus multiplis arcus $\frac{\pi}{a+1}$ comprehensos attribuimus, parti modo formatae aequales fiunt. Ea autem portio, quam describimus augendo ξ a $\frac{2a+1}{a+1}\pi$ usque ad 2π (vel a $\frac{2(\mu+\nu)-\nu}{\mu+\nu}\pi$ ad $2\nu\pi$), una cum portione primo loco formata $\left(\xi = 0 \text{ usque ad } \xi = \frac{\pi}{a+1}\right)$ talem constituit partem (conf. §§. 15. 16.).

Igitur curva nostra constat e $\mu+\nu$ ramis in infinitum excurrentibus, aequalibus, qui circulum in totidem punctis eodem arcu inter se distantibus tangent et a radiis punctorum contactus in binas partes aequales dividuntur. *)

---

*) Ad circulum in quotlibet n partes aequales dividendum, construas eam partem curvae $\eta=(n-1)\xi$ cuius coordinatae ξ inter 0 et $\frac{2\pi}{a+1}$ iaceant, deinde circulum concentricum ducas qui curvam in duobus punctis N, N' secabit. Arcu NN' in duas partes aequales diviso, linea punctum divisionis H cum centro iungens, cum diametro dimidiam partem anguli desiderati includit. Sin

19. Iam accuratius inquiramus illorum ramorum formam. *) Radium vectorem r puncti ξ, η, aequatione:

$$r = \frac{R}{\cos\frac{1}{2}(a+1)\xi}$$

exprimi supra diximus; pars eius r', a recta circulum in puncto F tangente, intercepta, est:

$$r' = \frac{R}{\cos\frac{1}{2}(a-1)\xi},$$

quae, dum $\xi < \frac{\pi}{a+1}$, semper minor est quam r; ex quo sequitur ut totus semiramus primus in alio latere illius tangentis iaceat ac circulus. Igitur in universum rami infiniti a circulo separantur tangentibus circuli in iis punctis, quae ramis ac circumferentiae communia sunt.

Rectae curvam tangentis formulam duplice modo invenire possumus: aut ex aequatione lineae rectae duo puncta data continentis (8), aut coefficientis differentialis ope. Si enim in aequatione (8) ponitur $\eta'' = \eta'$, $\xi'' = \xi'$, fit $\text{tang}\,\omega = \frac{0}{0}$, igitur primum uterque fractionis terminus secundum ξ'' ut variabilem differentiandus est, quo fit:

$$\frac{a\sin\xi + \sin a\xi}{-a\cos\xi + \cos a\xi} = \text{tang}\,\omega. \qquad (16)$$

Altera methodo, formulae:

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi} : \frac{dx}{d\xi}$$

ope, invenitur:

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{a\sin\xi + \sin a\xi}{a\cos\xi - \cos a\xi},$$

---

autem curvam construis a $\xi = \frac{\pi}{a+1}$ usque ad $\xi = \frac{3\pi}{a+1}$, immediate datur punctum E, a puncto F arcu desiderato distans. Etiam curva alia: $\eta = \frac{n-\nu}{\nu}\xi$ uti posse, tibi elucebit.

*) Cum rebus hac et sequentibus §§. expositis conferantur figg. X. XI.

ubi α angulum denotat quem tangens curvae cum axe abscissarum includit. Quam formulam cum priore convenire ex §. 5. elucet.

Ex aequatione (16) sequitur ut $\tang\omega$ negativa sit dum $\xi < \frac{\pi}{a}$: numeratorem enim positivum esse apertum est; quod ad denominatorem, dum $\xi < \frac{1}{2}\frac{\pi}{a}$, et $\cos\xi$ et $\cos a\xi$ positivi sunt, sed $\cos\xi > \cos a\xi$, dum autem $\xi > \frac{1}{2}\frac{\pi}{a}$ et $\xi < \frac{\pi}{a}$, $\cos\xi$ posit. manet, $\cos a\xi$ autem negativus evadit; ita ut denominator semper (illa suppositione $\xi < \frac{\pi}{a}$) negativus sit. Igitur anguli, quae perpendicula in tangentes primi semirami ex centro demissa, cum diametro principali includunt, aut maiores quam unus et minores quam duo aut maiores quam tres et minores quam quatuor anguli recti aut etiam negativi sed inter 0^0 et $\frac{1}{2}\pi$ siti sunt, quarum rerum quae eveniat nihil refert, quia directio tangentis eadem manet.

Si $\xi=0$, fit:

$$\tang\omega = 0,$$

quod ostendit, tangentem in puncto F perpendicularem esse in radium eius puncti, ideo congruere cum circuli in eodem puncto tangente. Ergo in punctis quae circulo et curvae cummunia sunt, tangentes quoque communes sunt.

Crescente ξ, e formula (16) non immediate patet, quisnam sit progressus valorum $\tang\omega$; differentiamus igitur illam formulam, quo fit:

$$\frac{d\tang\omega}{d\xi} = \frac{(a-a^2)[1+\cos(a+1)\xi]}{(\cos a\xi - a\cos\xi)^2}, \qquad (17)$$

quam expressionem semper negativam manere perspicuum est; igitur et incrementum quod capit $\tang\omega$, semper negativum manet. Ex quo sequitur, ut angulus a tangente et diametro principali comprehensus, per quantitates infinite parvas minuatur, curva igitur motu continuo tangentis describatur. Itaque **curva nullam inflexionem exhibet.**

Quum, si $\xi=0$, sit $\tang\omega=0$, sequitur ut primo $\tang\omega$ negativa sit, quod iam supra reperimus; valor absolutus $\tang\omega$ crescit, igitur angulus ω, qui, ut facile tibi persuadebis, in puncto F erat 0^0, decrescit usque ad -90^0 (facilius enim videtur esse, angulum ω habere pro angulo negativo, cuius valor absolutus augeatur); tum $\tang\omega=\mp\infty$; deinde angulo ω semper decrescente, ipsa $\tang\omega$ positiva decrescit usque ad $\omega=\pi$ etc. etc.

Sin autem $\cos a\xi=a\cos\xi$, *quum denominator* illius expressionis (17) evanescat, ea *non* uti *possumus*. Tum autem et $\tang\omega=\infty$; itaque aequatio $\cos a\xi=a\cos\xi$ ea curvae puncta praebet, in quibus tangens diametro principali parallela est. Praeterea illa aequatio locum habere non potest donec $a\xi<\frac{1}{2}\pi$; igitur necesse est ut aut ξ in primo et $a\xi$ in quarto, aut eorum neuter in primo aut in quarto quadrante situs sit, quia utrique cosinui idem signum esse oportet. Quare talis tangens non *primo* semiramo est; qui quum ob hanc causam motu continuo tangentis descriptum sit, patet, et in eo puncto alius rami, in quo $\tang\omega=\infty$, motum tangentis non mutari.

In aequatione (17) ille coefficiens differentialis evanescit si:
$$\cos(a+1)\xi = -1\,,$$
unde:
$$(a+1)\xi = (2n+1)\pi\,,$$
$$\xi = \frac{2n+1}{a+1}\pi\,,$$
i. e. si punctum curvae infinito a circulo distat (§§. *18.* et *16.*), igitur si tangens in asymptotam transit. Asymptota ergo datur relatione:
$$\tang\omega = \frac{a\sin\frac{\pi}{a+1}+\sin\frac{a\pi}{a+1}}{\cos\frac{a\pi}{a+1}-a\cos\frac{\pi}{a+1}} = \tang\frac{a\pi}{a+1}\,. \qquad (18)$$

Hac suppositione non solum $\frac{d\tang\omega}{d\xi}$ sed etiam $\frac{d^2\tang\omega}{d\xi^2}$ evanescit, et fit:

$$\frac{d^3 \operatorname{tang}\omega}{d\xi^3} = \frac{a-a^2}{\left(\cos\frac{\pi}{a+1}\right)^2},$$

quae fractio negativa est. Itaque asymptotae cum curva est contactus superioris ordinis, nec motus eius unquam mutatur.

Neque *cuspis* curvae est; quum enim in primo semiramo non inflexio sit, cuspis nec centrum versus nec dextrorsum spectare potest, et quum radius vector et angulus quem cum diametro principali includit, semper crescant, cuspis nec centro aversa (in directione radii) est, nec sinistrorsum spectat. Quod vero in primo semiramo locum non habet, id neque in tota curva exstat (§. 16.). Igitur omnes rami convexitatem centro obvertunt.

20. Distantia tangentis a centro datur aequatione (7):

$$P = R\,\frac{\cos[\tfrac{1}{2}(a-1)\xi-\omega]}{\cos\tfrac{1}{2}(a+1)\xi},$$

unde, explicando et dividendo per $\cos\xi$:

$$P = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(a-1)\xi+\sin\tfrac{1}{2}(a-1)\xi\operatorname{tang}\omega}{\cos\tfrac{1}{2}(a+1)\xi\,\frac{1}{\cos\omega}} =$$

$$= \frac{\cos\tfrac{1}{2}(a-1)\xi+\sin\tfrac{1}{2}(a-1)\xi\operatorname{tang}\omega}{\cos\tfrac{1}{2}(a+1)\xi\sqrt{1+\operatorname{tang}\omega^2}}.$$

Cum qua expressione si conferimus aequationem (16):

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\sin a\xi+a\sin\xi}{\cos a\xi-a\cos\xi} =$$

$$= \frac{(a-1)\cos\tfrac{1}{2}(a+1)\xi\sin\tfrac{1}{2}(a-1)\xi-(a+1)\cos\tfrac{1}{2}(a-1)\xi\sin\tfrac{1}{2}(a+1)\xi}{(a-1)\cos\tfrac{1}{2}(a+1)\xi\cos\tfrac{1}{2}(a-1)\xi+(a+1)\sin\tfrac{1}{2}(a+1)\xi\sin\tfrac{1}{2}(a-1)\xi},$$

inde prodit:

$$P = R\,\frac{a-1}{\sqrt{(a+1)^2-4a[\cos\tfrac{1}{2}(a+1)\xi]^2}}. \tag{19}$$

Ubi quum P semper positivum sit, necesse est signum positivum radicis sumatur, igitur $\cos\omega$ positivus est in primo semiramo, ex quo sequitur, ut angulus ω negativus sit et eius valor absolutus minor quam $\frac{1}{2}\pi$. Si in illa expressione ponitur $(a+1)\xi = 0$, fit $P = R\frac{a-1}{a-1} = R$, quod iam alio modo invenimus; sin coordinatae ξ alius est valor, radix semper maior est quam $(a-1)$, ergo $P < R$, i. e. tangens curvae semper secat circumferentiam circuli.

Si tangens in asymptatam transit, fit $\xi = \frac{\pi}{a+1}$ (§. 19.), igitur:

$$P = R\,\frac{a-1}{a+1}. \tag{20}$$

Itaque ad construendam primi semirami asymptatam, a radio qui cum diametro principali angulum $\frac{\pi}{a+1}$ sinistrorsum numeratum constituit, quantitatem $\frac{a-1}{a+1}R$ abscindamus et in puncto divisionis perpendiculum in radium ducamus, quod perpendiculum asymptota erit.

Pari modo omnes ceterae asymptotae construuntur, dummodo loco diametri principalis radii contactus sumantur et observetur cuique asymptotae unius semirami respondere alterius semirami asymptatam symmetrice ad radium contactus sitam (§§. 15. 16.). Sed accuratius examinemus asymptotas.

Radius in quem asymptota prima perpendicularis ducitur, nihil aliud est quam radius CL (§. 18.); igitur eadem recta est asymptota prioris cruris secundi rami. Eodem modo alteri secundi rami cruri cum priore crure tertii rami asymptota est communis etc., quare ad omnes asymptotas construendas iis solum uti radiis necesse est, qui a radiis contactus angulo $\frac{\pi}{a+1} = \frac{\nu\pi}{\mu+\nu}$ *sinistrorsum* numerato distent. Quum radii contactus eodem angulo inter se distent, patet et illos radios eodem angulo inter se distare, igitur a s y m p t o t a s c o n s t i t u e r e p o l y g o n u m r e g u l a r e $\mu+\nu$ laterum cuius centrum cum centro circuli dati coincidat et cuius apothema sit $\frac{\mu-\nu}{\mu+\nu} R = \frac{a-1}{a+1} R$.

Si ν numerus par est, radius cuius ab initio coordinatarum distantia est $\frac{\nu}{\mu+\nu}\pi$, in aliquem radium contactus cadit (§. 13.); itaque omnes illi radii in radios contactus cadunt; sin contra ν impar, radius ille bipartit angulum ab iis radiis contactus inclusum quorum a radio principali distantia angularis est $\frac{\nu-1}{\mu+\nu}\pi$ et $\frac{\nu+1}{\mu+\nu}\pi$, omnesque illi radii angulos a binis radiis contactus consequentibus constitutos bipartiunt. Igitur si ν impar est (quod et fit si a integer est), radii contactus cum radiis, sin par, cum apothematibus polygoni asymptotarum coincidunt.

21. Angulus ϑ, quem duae asymptotae eiusdem rami includunt, supplementum est anguli a radiis quibus ad construendas asymptatas usi sumus, inclusi, i. e.

$$\vartheta = \pi - 2\frac{\nu}{\mu+\nu}\pi = \frac{\mu-\nu}{\mu+\nu}\pi. \tag{21}$$

Hic angulus metitur ramorum infinitorum extentionem in latitudinem, quia latera eius inter omnium angulorum latera proxime ad curvam accedunt et optime eius cursum indicant; quod tum quoque fit quum anguli vertex in centro ponitur, nova enim latera a prioribus quantitate finita distant, et omnes aliae rectae per centrum ductae aut ramum secant aut ab eo recedunt. Ex quo sequitur ut curvae diversis coefficientis a seu $\frac{\mu}{\nu}$ valoribus respondentes, anguli ϑ ope inter se comparari queant, si ramorum latitudo spectetur.

Hoc posito, primum nobis obviam fit, in formula: $\vartheta = \frac{\mu-\nu}{\mu+\nu}\pi$, omnes angulos inde a 0 usque ad duos angulos rectos contineri. Ut enim aliquis angulus $\frac{m}{n}\pi$ describatur, sufficit numeros μ et ν ita determinare ut fiat $\mu-\nu=m$, $\mu+\nu=n$; nam ex his aequationibus patet fieri $\mu>\nu$, et quum m et n inter se primi sint, μ atque ν nullum factorem communem continere possunt. Ab altera parte, aliis valoribus numerorum μ et ν alii anguli ϑ valores respondent; si enim esset:

$$\frac{\mu-\nu}{\mu+\nu}\pi = \frac{\mu'-\nu'}{\mu'+\nu'}\pi,$$

sequeretur:

$$\mu\nu'-\nu\mu' = \mu'\nu-\nu'\mu,$$

unde:

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{\mu'}{\nu'},$$

quod nunquam fieri potest quia fractiones $\frac{\mu}{\nu}$, $\frac{\mu'}{\nu'}$ reductae sunt. Igitur si coefficienti a omnes valores reales rationales attribuuntur, curvae inde ortae omnes inter se differunt angulo ab asymptotis incluso, neque ullus eius anguli valor qui 180° non excedat, omittitur.

Fractionis $\frac{\mu-\nu}{\mu+\nu}\pi$ valor augetur crescente μ et decrescente ν. Minimum igitur fractio valorem nanciscitur, ideo angustissimi sunt rami, ubi ν maximum, μ minimum valorem adeptus est; quum autem $\mu>\nu$, minimus numeri μ valor est $\nu+1$, quo fractio evadit $\frac{\pi}{2\nu+1}$, quae crescente ν, in infinitum descrescit et cuius limes est 0; et quum μ simul crescat, numerus ramorum in infinitum crescit, ipsi vero magis magisque coarctantur et linearum rectarum formae propiores accedunt.

Maximum vero fractio valorem nanciscitur, ubi $\nu=1$, $\mu=\max.$, igitur $\vartheta = \pi - \frac{2}{\mu+1}\pi$, qui angulus crescente μ limiti π appropinquat, quo fit ut ramorum numero crescente, cruribus magis magisque discedentibus limites sint infinite multae circuli tangentes. Itaque omnes curvae inclusae sunt inter duo infinite multarum rectarum systemata, quorum alterum e partibus radiorum circuli extra circumferentiam sitis, alterum e circuli tangentibus constat.

Quod ad asymptotas ipsas, quum fractio $\frac{\mu-\nu}{\mu+\nu}R$ una cum angulo ϑ decrescat aut crescat, patet asymptotis easdem esse limites ac ramis curvae.

Ut eas solum curvas comparemus quibus idem ramorum infinitorum est numerus, primo quaeramus quotnam curvae e dato numero p ramorum constent. Ponendum itaque (§. 18.) est $\mu+\nu=p$, quo fit ut valores fractionis $\frac{\mu}{\nu}$ sint $\frac{p-1}{1}$, $\frac{p-2}{2}$ etc. usque ad $\frac{\frac{1}{2}(p+1)}{\frac{1}{2}(p-1)}$ aut $\frac{\frac{1}{2}p+1}{\frac{1}{2}p-1}$, quorum expressio generalis est $\frac{p-m}{m}$, ubi $m<\frac{1}{2}p$. Quum autem ex his frationibus eae solum eligendae sint, quarum numeratori cum denominatore nullus factor communis sit, quantitates m ita determinentur oportet, ut m et $p-m$, ideoque m et p, non eodem numero dividantur. Igitur numerus curvarum (qui idem est ac numerus valorum qui litterae m attribui possunt) non alius est ac numerus omnium numerorum, qui primi sunt ad p et minores quam $\frac{1}{2}p$, et qui, si notatione Gaussiana utimur, est $\frac{1}{2}\varphi(p) = \frac{1}{2}b^{\beta-1}c^{\gamma-1}\ldots.(b-1)(c-1)\ldots.$, ubi b, c etc. factores primos numeri p, et β, γ etc. eorum exponentes designant. Quo posito, latissimi sunt rami eius curvae, in cuius aequatione est $\nu=1$, $\mu=p-1$, igitur $a=p-1$; et angustissimi, ubi ponitur: $\nu=\frac{1}{2}p-1$, si p numerus par, et $\nu=\frac{1}{2}(p-1)$ si impar est, quo fit: $a=\frac{\frac{1}{2}p+1}{\frac{1}{2}p-1}$ aut $\frac{\frac{1}{2}(p+1)}{\frac{1}{2}(p-1)}$; angulus ϑ vero decrescit a $\frac{p-2}{p}\pi$ usque ad $\frac{2}{p}\pi$ aut $\frac{1}{p}\pi$.

22. Iam ad puncta singularia progrediamur. Quorum quum viderimus (§. 19.) nec inflexiones nec cuspides curvae

esse, atque ex constructione pateat (§. 18.) nec puncta coniugata curvam praebere, *multiplicia* tantum puncta restant, de quibus hic disseramus.

Punctum duplex quum intersectione duorum ramorum formetur, in utroque ramo describendo constructum est. Igitur etiam si ex eo ad coordinatas determinandas tangentes ad circulum struimus, extremitates arcuum, quos tangentes puncti in priore ramo siti in circumferentia abscindunt, cum extremitatibus arcuum ab alterius rami tangentibus abscissorum congruant necesse est. Quod duplice modo fieri posse, primo adspectu videtur; si enim ξ', η' coordinatae illius puncti sunt quatenus in priore ramo constructum esse putatur, et ξ'', η'' eiusdem puncti quatenus in altero ramo situm esse censetur, illa conditio expletur, si:

$$\eta'' = \eta' + 2m\pi\,, \qquad \xi'' = \xi' + 2n\pi\,,$$

aut:

$$\eta'' = 2m\pi - \xi', \qquad \xi'' = 2n\pi - \eta',$$

quarum sumptionum autem altera tantum locum habere potest (§. 14.). Ex quo sequitur, ut nulla alia puncta multiplicia quam *duplicia* exstare possint; si enim idem punctum etiam in tertio ramo iaceret, ita ut et coordinatis η''', ξ''' esset constructum, esset:

$$\eta''' = 2m'\pi - \xi', \qquad \xi''' = 2n'\pi - \eta',$$

et

$$\eta''' = 2m''\pi - \xi'', \qquad \xi''' = 2n'' - \eta'',$$

unde sequeretur:

$$\xi'' = 2(m'' - m')\pi + \xi', \qquad \eta'' = 2(n'' - n')\pi + \eta',$$

id quod falsum esse iam diximus.

Ergo hae tantum aequationes:

$$\eta'' = 2m\pi - \xi', \qquad \xi'' = 2n\pi - \eta'$$

nobis investigandae sunt; quae si pro η' et η'' eorum valores $\frac{\mu}{\nu}\xi'$, $\frac{\mu}{\nu}\xi''$ substituuntur, evadunt:

$$\frac{\mu}{\nu}\xi'' = 2m\pi - \xi', \qquad \xi'' = 2n\pi - \frac{\mu}{\nu}\xi', \tag{22}$$

e quibus prodit:

$$2n\frac{\mu}{\nu}\pi - \frac{\mu^2}{\nu^2}\xi' = 2m\pi - \xi',$$

$$\xi' = \frac{2\nu(n\mu - m\nu)\pi}{\mu^2 - \nu^2}. \qquad (23)$$

Quum autem nullum punctum sit in curva, cui non primi semirami punctum respondeat, sufficit intersectiones primi semirami cum ceteris ramis quaeri (§. 16.); ponamus igitur:

$$\xi' < \frac{\nu\pi}{\mu+\nu};$$

itaque:

$$\frac{2\nu(n\mu - m\nu)\pi}{\mu^2 - \nu^2} < \frac{\nu}{\mu+\nu}\pi,$$

$$2(n\mu - m\nu) < \mu - \nu,$$

$$m > n\frac{\mu}{\nu} - \frac{\mu-\nu}{2\nu};$$

et quum $\xi' > 0$, sequitur:

$$2\nu(n\mu - m\nu)\pi > 0,$$

$$m < n\frac{\mu}{\nu}.$$

Insuper, condicionibus (§. 14.):

$$\xi'' > 0, \qquad \xi'' < 2\nu\pi$$

cum aequatione (22) coniunctis, prodit:

$$0 < n < \nu + 1,$$

ita ut omnes quibus utamur, condiciones hae sint:

$$n > 0, \qquad n < \nu + 1, \qquad (24)$$

$$m < n\frac{\mu}{\nu}, \qquad (25)$$

$$m > n\frac{\mu}{\nu} - \frac{\mu-\nu}{2\nu}. \qquad (26)$$

Igitur litterae n omnes valores integri inde ab 1 usque ad ν incl. attribuendi sunt et quaerendum est, quotnam et qui valores litterae m unicuique illorum valorum respondeant. Ad quod assequendum, sit k maximus numerus qui in quoto $\frac{\mu}{\nu}$ contineatur, i. e. ponatur:

$$\mu = k\nu+\varrho,$$

ubi $\varrho<\nu$; quare condiciones (25), (26) sic scribuntur:

$$m>nk+\frac{n\varrho}{\nu}-\frac{\mu-\nu}{2\nu},$$

$$m<nk+\frac{n\varrho}{\nu}.$$

Iam quum numerus ν primus sit ad μ, primus est etiam ad residuum ϱ, quo fit, ut si litterae m omnes ν valores inde ab 1 usque ad ν, attribuantur, residua, quae e divisione $\frac{n\varrho}{\nu}$ prodeant, nihil aliud sint quam ipsi ν primi numeri integri, sed alio ordine dispositi; quae si residua littera σ denotamus, est:

$$n\varrho = p\nu+\sigma,$$

ubi p et σ cum n variantur, unde:

$$m>kn+p+\frac{\sigma}{\nu}-\frac{\mu-\nu}{2\nu},$$

$$m<kn+p+\frac{\sigma}{\nu}.$$

Hae conditiones ut simul impleri possint, necesse est numerus integer proxime inferior numero $(kn+p+\frac{\sigma}{\nu})$ maior sit quam $\left(kn+p+\frac{\sigma}{\nu}-\frac{\mu-\nu}{2\nu}\right)$, i. e. (quum $\sigma\leqq\nu$) sit:

$$kn+p>kn+p+\frac{\sigma}{\nu}-\frac{\mu-\nu}{2\nu},$$

ex quo sequitur:

$$\frac{\sigma}{\nu}<\frac{\mu-\nu}{2\nu},$$

$$\mu-\nu>2\sigma.$$

Quum minimus litterae σ valor sit 1, et quum, ut iam indicaverimus, litterae n semper is attribui possit valor ut eveniat $\sigma=1$, illa condicio docet, in primo semiramo intersectionem sitam esse, si differentia inter numeratorem et denominatorem fractionis $\frac{\mu}{\nu}$ non minor quam 3 sit.

23. Porro sit v numerus valorum, qui litterae m attribui possunt, si in condicionibus (25), (26) pro n aliquis eorum numerorum, qui hac littera designantur, ponitur. Hic numerus itaque ita determinatur, ut dato valore numeri n, inter secunda illarum inaequationum membra accurate v nec plures numeri integri iaceant, i. e. ut, si illi numeri inde a maximo numerantur, v^{us} numerus adhuc maior quam $\left(kn+p+\frac{\sigma}{\nu}-\frac{\mu-\nu}{2\nu}\right)$, $(v+1)^{us}$ vero aequalis aut minor sit. Igitur quum maximus numerus sit $(kn+p)$, necesse est, ut fiat:

$$kn+p-(v-1)>nk+p+\frac{\sigma}{\nu}-\frac{\mu-\nu}{2\nu},$$

$$kn+p-v\leqq nk+p+\frac{\sigma}{\nu}-\frac{\mu-\nu}{2\nu},$$

unde:

$$v\geqq\frac{\mu-\nu}{2\nu}-\frac{\sigma}{\nu},$$

$$v<\frac{\mu-\nu}{2\nu}-\frac{\sigma}{\nu}+1.$$

E quibus relationibus ut v determinemus, ponamus:

$$\mu-\nu=r\cdot 2\nu+\tau,$$

unde:

$$v>r+\frac{\tau}{2\nu}-\frac{\sigma}{\nu},$$

$$v<r+\frac{\tau}{2\nu}-\frac{\sigma}{\nu}+1.$$

Quum $\tau<2\nu$ et $\sigma>0$, differentia $\frac{\tau}{2\nu}-\frac{\sigma}{\nu}$ minor est quam $+1$; et quum $\sigma<\nu+1$, et $\tau>0$, (propterea quod ν numerus primus sit ad $\mu-\nu$), maior ea est quam -1; quare:

$$\text{si } \frac{\tau}{2\nu}-\frac{\sigma}{\nu}\leqq 0, \text{ fit: } \sigma\geqq\frac{\tau}{2}, \quad v=r;$$

$$\text{si } \frac{\tau}{2\nu}-\frac{\sigma}{\nu}>0, \text{ fit: } \sigma<\frac{\tau}{2}, \quad v=r+1.$$

Si autem n mutatur, mutatur et σ, ita quidem ut σ

omnes ν primos numeros percurrat, quorum, si τ par est (itaque etiam $\mu-\nu$ per 2 dividitur), $\frac{1}{2}(\tau-2)$ numeri minores, igitur $\nu-\frac{1}{2}(\tau-2)$ maiores (inter quos unus aequalis) sunt quam $\frac{\tau}{2\nu}$; sin τ impar (itaque et $\mu-\nu$ impar) est, $\frac{1}{2}(\tau-1)$ illorum numerorum minores et $\nu-\frac{1}{2}(\tau-1)$ maiores sunt quam $\frac{\tau}{2\nu}$. Idcirco $\frac{1}{2}(\tau-2)$ aut $\frac{1}{2}(\tau-1)$ volores litterae n attribui possunt, quorum unicuique respondeant $r+1$ valores diversi litterae m; reliquorum $[\nu-\frac{1}{2}(\tau-2)]$ aut $[\nu-\frac{1}{2}(\tau-1)]$ valorum litterae n unicuique respondent r valores litterae m.

Et quum ex aequatione (23) pateat, aliis litterarum n, m valoribus (inter datos fines) alios coordinatae ξ' respondere valores, numerus intersectionum denique est:

I. Si $\mu-\nu$ par est:

$$\frac{\tau-2}{2}(r+1)+\left(\nu-\frac{\tau-2}{2}\right)r = \nu r+\frac{\tau-2}{2} = \frac{2\nu\pi+\tau}{2}-1$$
$$= \frac{\mu-\nu}{2}-1 = \frac{\mu-\nu-2}{2}; \qquad (27)$$

II. sin $\mu-\nu$ impar:

$$\frac{\tau-1}{2}(r+1)+\left(\nu-\frac{\tau-1}{2}\right)r = \nu r+\frac{\tau-1}{2} = \frac{2\nu r+\tau-1}{2} =$$
$$= \frac{\mu-\nu-1}{2}. \qquad (28)$$

Itaque numerus intersectionum sive punctorum duplicium est numerus proxime minor dimidia parte differentiae $\mu-\nu$.

24. Valores coordinatarum ξ'' horum punctorum in ceteris ramis positorum illinc deducuntur (22):

$$\xi''= 2n\pi-\frac{\mu}{\nu}\xi'= 2n\pi-\frac{2\mu(n\mu-m\nu)\pi}{\mu^2-\nu^2} = \frac{2\nu(m\mu-n\nu)\pi}{\mu^2-\nu^2}. \qquad (29)$$

Si valores coordinatarum ξ', ξ'' datis m et n respondentes, summantur, fit:

$$\xi'+\xi''= \frac{2\nu[m(\mu-\nu)+n(\mu-\nu)]\pi}{\mu^2-\nu^2} = \frac{2\nu(m+n)}{\mu+\nu}\pi, \qquad (30)$$

id quod exprimit coordinatam ξ alicuius puncti contactus

(§. 13.); et quum illa summa a ξ'' differat valore coordinatae ξ' qui minor sit quam $\frac{\nu\pi}{\mu+\nu}$, illud punctum est punctum contactus ipsius rami in quo ξ'' iacet (§. 18.). Ex quo sequitur (quod etiam alio modo probari potest), ut distantia angularis cuiusvis puncti intersectionis ab utriusque rami puncto contactus eadem sit. Porro quum e §. 18. eluceat, coordinatis crescentibus, quemvis ramum a sinistra ad dextram describi, haec proprietas docet, dextram primi rami partem sinistras tantum ceterorum ramorum partes secare, quo fit, ut radius vector puncti intersectionis angulum a radiis contactus inclusum bipartiat.

Si quis ramus a primo semiramo in duobus punctis ξ'', ξ''' secaretur, necesse esset esse (30.):

$$\frac{2(m'+n')\nu\pi}{\mu+\nu} = \frac{2(m''+n'')\nu\pi}{\mu+\nu},$$

unde:

$$m'+n' = m''+n'',$$

i. e. (§. 22.):

$$kn'+n'+p'-u' = kn''+n''+p''-u'',$$

ubi u' et u'' maiores sunt quam -1 et minores quam $\frac{\mu-\nu}{2\nu}$; ponamus $n''= n'+n_1$, unde evadit:

$$p'-u' = kn_1+n_1+p''-u'',$$
$$u''-u' = p''-p'+(k+1)n_1,$$

quod falsum est, quia $u''-u' < \frac{\mu-\nu}{2\nu} < k$ et $p'' \geqq p'$. Igitur primus semiramus a nullo ramo bis secatur. Nec totus ramus qui in puncto F circulum tanget, ab ullo ramo bis secari potest quoniam omnis ramus angulo minore quam duobus rectis angulis, continetur. Praeterea ramus se ipsum non secat quia utrinque a diametro principali recedit. Ex quo sequitur ut omnes intersectiones quae in curva exstant, inveniamus, si curvam dextrorsum percurrentes singulorum semiramorum dextrorum intersectiones cum ceteris ramis determinemus. Numerus intersectionum itaque est:

$$(\mu+\nu)\frac{\mu-\nu-2}{2} \text{ aut } (\mu+\nu)\frac{\mu-\nu-1}{2},$$

i. e. aequalis producto quod formatur, si summam denominatoris et numeratoris coefficientis a per numerum proxime inferiorem dimidio eorum differentiae multiplicamus.

Haec puncta intersectionis omnia quantitate finita a circulo distant, quoniam posuimus $\xi' < \frac{\nu\pi}{\mu+\nu}$; si contra ponimus $\xi' = \frac{\nu\pi}{\mu+\nu}$, sequitur $m = nk+p+\frac{\sigma}{\nu} - r\cdot 2\nu - \frac{\tau}{2\nu}$, unde patet, necese esse:

sit $\mu-\nu$ per 2 divisibilis,

et $\sigma = \frac{\tau}{2}$.

Igitur intersectio infinite remota in ea tantum curva locum habet, cuius ramorum numerus par est. *) Quum autem haec puncta intersectionis non solum binis cruribus se secantibus sed etiam binis aliis, in quae illa transeunt (§. 18.) communia sint, numerus eorum punctorum est $\frac{2(\mu+\nu)}{4}$ $= \frac{\mu+\nu}{2}$, ita ut omnium intersectionum quae in curva, cuius ramorum numerus par est, inveniantur, hic est numerus:

$$(\mu+\nu)\left(\frac{\mu-\nu-2}{2}\right)+\frac{\mu+\nu}{2} = (\mu+\nu)\frac{\mu-\nu-1}{2},$$

i. e. idem atque in ea curva in cuius aequatione $\mu+\nu$ numerus impar est.

Distantia angularis intersectionum in primo semiramo iacentium ab origine coordinatarum datur formula:

---

*) Cf. *Plücker* Theorie der algebr. Curven, p. 88.

$$\tfrac{1}{2}(\eta'-\xi') = \tfrac{1}{2}\frac{\mu-\nu}{\nu}\xi' = \frac{n\mu-m\nu}{\mu+\nu}\pi, \tag{31}$$

in qua fractione numerator omnes numeros integros inde ab 1 usque ad [$\frac{1}{2}(\mu-\nu-2)$ aut] $\frac{1}{2}(\mu-\nu-1)$ designat. Si enim b eiusmodi est numerus, ex aequatione:

$$n\mu-m\nu = b$$

semper pro n et m numeri integri inveniuntur qui fines praescriptos non egrediant. Itaque illae intersectiones in [$\frac{1}{2}(\mu-\nu-2)$ aut] $\frac{1}{2}(\mu-\nu-1)$ primis radiis sita sunt, quorum ab origine coordinatarum distantia angularis multiplum anguli $\dfrac{\pi}{\mu+\nu}$ est.

Quare si intersectionem alicuius rami cum primo, secundo etc. (in figura, non in constructione) sequentium ramorum, vocamus *intersectionem primi, secundi etc. ordinis*, et si deinde omnes eiusdem ordinis intersectiones lineis rectis inter se iungimus, exsistunt $\frac{1}{2}(\mu-\nu-2)$ aut $\frac{1}{2}(\mu-\nu-1)$ polygona regularia $\mu+\nu$ laterum, circulo concentrica, quorum anguli alternis aut in radios, qui angulos a radiis contactus formatos bipartiunt, aut in ipsos radios contactus cadunt.

Polygonorum radii r dantur formula (3):

$$r = \frac{R}{\cos\frac{1}{2}(\eta+\xi)} = \frac{R}{\cos\dfrac{b\pi}{\mu-\nu}},$$

ubi b ordinem intersectionum exprimit. Itaque spatium inter bina polygona consequentia eo latior fit quo magis latera a circulo recedunt.

Si $3b=\mu-\nu$, fit $r=2R$; quod ostendit, si differentia $\mu-\nu$ numero 3 dividi possit, uni polygonorum esse radium duplum radii circuli.

25. Singularitati modo consideratae alia respondet singularitas si curva ut continuo tangentis motu descripta consideratur, scilicet *tangentes duplices*, de quibus nunc loquamur.

Ut tangens cum alia tangente coincidat, et perpendicula in utramque e centro demissa et angulos a perpendiculis cum radio puncti F inclusos, aequalia esse oportet, i. e.:

$$P = P'; \qquad \omega = \omega' + 2m\pi, \tag{32}$$

e quarum condicionum priore sequitur (19):

$$(\cos\tfrac{1}{2}\frac{\mu+\nu}{\nu}\xi)^2 = (\cos\tfrac{1}{2}\frac{\mu+\nu}{\nu}\xi')^2,$$

unde:

$$\cos\tfrac{1}{2}\frac{\mu+\nu}{\nu}\xi = \pm\cos\tfrac{1}{2}\frac{\mu+\nu}{\nu}\xi',$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mu+\nu}{\nu}\xi = n\pi \pm \frac{1}{2}\frac{\mu+\nu}{\nu}\xi',$$

$$\xi = \frac{2n\nu\pi}{\mu+\nu} \pm \xi'.$$

In qua formula signum (+) reiiciendum est; si enim esset $\xi = \frac{2n\nu\pi}{\mu+\nu} + \xi'$, ex §. 16. erueretur: $\omega = \omega' + \frac{2n\nu\pi}{\mu+\nu}$, id quod cum altera condicionum (32) comparatum, dat:

$$m = \frac{2n\nu\pi}{\mu+\nu},$$

igitur $n = p(\mu+\nu)$, $m = 2p\nu\pi$. Si autem curvam tangentis ope describi fingimus, valor absolutus anguli ω, in primo semiramo describendo, crescit a 0 usque ad $\frac{\nu\pi}{\mu+\nu}$, igitur ad totam curvam construendam augetur a 0 usque ad $2(\mu+\nu)\frac{\nu\pi}{\mu+\nu} = 2\nu\pi$; ex quo sequitur ut $m < \nu$, ideo hypothesis falsa sit. Restant igitur aequationes:

$$\xi = \frac{2n\nu\pi}{\mu+\nu} - \xi', \qquad \omega = \omega' + 2m\pi,$$

e quarum priore facillime evincitur figurae ope (cf. §. 18.), lineam rectam puncta ξ et ξ' iungentem, i. e. tangentem communem, perpendicularem esse in radium, qui bipartiat arcum inter puncta contactus circuli cum ramis, puncta ξ et ξ' continentibus, situm; eiusmodi radios esse $\mu+\nu$ in aperto est. Et quum in aequatione $\omega = \omega' + 2m\pi$, littera m

(ut supra diximus) omnes ν primos numeros (incl. 0) designet, sequitur, ut in eundem radium sint ν tangentes perpendiculares, ita ut inde omnium illarum tangentium numerus $\nu(\mu+\nu)$ prodeat. Hoc numero etiam asymptotas comprehendi facillime intelligitur, id quod optime convenit cum eo quod §. 19. de contactu asymptotae cum curva diximus. Igitur $\nu(\mu+\nu)$ tangentes duplices sunt curvae, inter quas $\mu+\nu$ asymptotae exstant, curvam in quaternis punctis osculantes.

Ex quo sequitur ut, si coefficiens a integer sit, curva, praeter asymptotas, nullas tangentes duplices exhibeat.

Numerus punctorum duplicium si numero tangentium duplicium additur, inde prodit,

$$\tfrac{1}{2}(\mu-\nu+1)(\mu+\nu) + \nu(\mu+\nu) = \tfrac{1}{2}(\mu+\nu+1)(\mu+\nu),$$

quae expressio quum non nisi e *summa* $\mu+\nu$ pendeat, in omnibus curvis, quae eodem numero ramorum constant, summa numerorum illarum singularitatum eadem est.

---

26. Iam ad alteram curvam (§. 12.) progrediamur, in cuius aequatione:

$$\eta = a\xi,$$

coefficiens a negativus sit.

In hac aequatione si coordinata ξ positiva sumitur, altera coordinata η negativa evadit; i. e. tum utraque coordinata *sinistrorsum* numeratur. Quo posito coefficiens a ut positivus, coordinata η vero ut negativa, i. e. sinistrorsum descripta accipi potest; sed ne coordinatas confundamus, huius novae curvae coordinatas non litteris ξ, η sed φ, ψ denotabimus, curvasque ipsas signis I. et II. distinguemus.

Quum itaque curvae II. aequatio sit:

$$\psi = a\varphi,$$

curvae I. autem:

$$\eta = a\xi,$$

sequitur, ut si ponatur $a=a$, $\varphi=\xi$, eveniat $\psi=\eta$, igitur ut extremitas arcus ψ tantum, quantum extremitas arcus η, a puncto F distet, dummodo distantias directione opposita metiamur. Ex quo relatio simplicissima prodit punctorum curvae II. ad puncta curvae I., si, quod deinceps semper supponemus, coefficiens a in utraque curva idem est.

Si enim e puncto M (Fig. VII.) curvae I., tangentes MA, MB circuli struimus, est:

$$FA = \xi - 2m\pi, \qquad FB = \eta - 2n\pi,$$

igitur si ponimus $\varphi=\xi$, evadit:

$$\psi = -\eta = -(FB+2n\pi) = FG + 2n'\pi,$$

ubi $FB=FG$ et $n'=n$ sed ita ut n directione opposita numeretur. Itaque punctum N intersectionis tangentium in A et G, est punctum curvae II. puncto M curvae I. respondens. Et quum tangens in puncto G tangentem in B in linea CF producta secet, haec sequitur constructio curvae II: e puncto M curvae I. duabus ad circulum ductis tangentibus, ex eo puncto diametri principalis, in quo a tangente coordinatam η abscindentem secatur, tertiam tangentem ad circulum ducamus, quae tangentem coordinatae ξ sive φ in puncto N curvae II. secabit.

Haec relatio reciproca est, i. e. eodem modo, quo punctum curvae II. dato puncto curvae I. respondens invenitur, etiam e puncto curvae II. ad punctum respondens curvae I. concluditur.

27. Puncta circulo et curvae II. communia dantur aequatione:

$$\psi = \varphi + 2n\pi,$$

quia ψ et φ eadem directione numerantur. Inde:

$$\varphi = \frac{2n\nu\pi}{\mu-\nu},$$

quare, si eandem ac supra (§§. 13. 14.) demonstrationem adhibemus, eiusmodi puncta esse $\mu-\nu$ invenitur; coordinata φ vero ad describendam totam curvam (ut ξ in curva I.) ν, et coordinata ψ (ut η) μ circumferentias percurrit; idcirco et curva II. a quacunque tangente in $\mu+\nu$ punctis secatur. *)

Primum curvae punctum ponamus in puncto F cuius coordd. sunt $\varphi=0$, $\psi=0$. Sequentium curvae punctorum distantia angularis ab origine coordd. est:

$$\varphi+\tfrac{1}{2}(\psi-\varphi) = \tfrac{1}{2}(\psi+\varphi) = \tfrac{1}{2}(a+1)\varphi, \qquad (33)$$

quae augetur crescente φ, ita ut curva sinistrorsum se flectens a puncto F recedat.

Radii vectoris longitudo r quum exprimatur formula:

$$r = \frac{R}{\cos\frac{1}{2}(\psi-\varphi)} = \frac{R}{\cos\frac{1}{2}(a-1)\varphi},$$

elucet eam crescere una cum coordinata φ usque ad $\varphi = \frac{\pi}{a-1}$. Tum enim fit $r=\infty$, i. e. punctum curvae abit in infinitum, quod etiam ex eo intelligitur quod tangentes quibus ad puncta construenda utimur, parallelae sunt, quoniam $\psi-\varphi = (a-1)\frac{\pi}{a-1} = \pi$. Si pergitur in curva describenda, eodem modo quem supra (§. 18.) docuimus, demonstratur, curvam II. constare ex $\mu-\nu$ ramis infinitis qui circulum in totidem punctis, ab initio coordinatarum arcubus $\frac{2n\nu}{\mu-\nu}\pi$ distantibus, tangeant, atque eorundem punctorum radiis dividantur in binas partes congruentes ad ipsas diametros symmetrice sitas.

Igitur et in hac curva ad perscrutandam ramorum formam primus tantum semiramus examinetur necesse est, qui construitur augendo coordinatam φ inde a 0 usque ad $\frac{\nu\pi}{\mu-\nu}$.

28. Rectae circulum in puncto F tangentis radius vector r' est:

*) Cum rebus in hac et sequente §§. expositis, cf. Figg. XII, XIII.

$$r' = \frac{R}{\cos\frac{1}{2}\cdot\frac{\mu+\nu}{\nu}\varphi},$$

ex quo patet, primum semiramum contineri inter circumferentiam et illam tangentem, dum $\varphi < \frac{\nu\pi}{\mu+\nu}$; sin autem simul fiat: $\varphi > \frac{3\nu\pi}{\mu+\nu}$ et $\varphi < \frac{\nu\pi}{\mu-\nu}$, curvae radium vectorem secare tangentem, itaque tangentem etiam a curva secari; quod evenit, si $2\nu > \mu$, sive $\frac{\mu}{\nu} < 2$.

Tangens trigonometrica anguli, quem perpendiculum e centro in tangentem curvae demissum cum radio principali includit, invenitur e formula (16) mutato signo coefficientis a, quo fit:

$$\operatorname{tang}\zeta = \frac{-a\sin\varphi - \sin a\varphi}{a\cos\varphi + \cos a\varphi}, \tag{34}$$

cuius fractionis signum, dum φ ad primum semiramum pertinet, i. e. dum augetur intra fines 0 et $\frac{\nu\pi}{\mu-\nu}$, semper negativum manet, si a ita determinatum est, ut sit:

$$a\cos\frac{\pi}{a-1} + \cos\frac{a\pi}{a-1} > 0;$$

quod si non fit, signum eo saepius mutatur quo minor est a.

Ex illa formula deducitur:

$$\frac{d\operatorname{tang}\zeta}{d\varphi} = \frac{-(a^2+a)[1+\cos(a-1)\varphi]}{(a\cos\varphi + \cos a\varphi)^2}, \tag{35}$$

quae fractio semper negativa est, unde sequitur, ut curva continuo motu tangentis describatur. Sin autem tangens parallela fit diametro principali, quoniam denominator evanescit, utamur formula:

$$\cot\zeta = \frac{1}{\operatorname{tang}\zeta} = -\frac{a\cos\varphi + \cos a\varphi}{a\sin\varphi + \sin a\varphi},$$

unde:

$$\frac{d\cot\zeta}{d\varphi} = \frac{(a^2+a)[1+\cos(a-1)\varphi]}{(a\sin\varphi+\sin a\varphi)^2},$$

quae expressio quum illa quoque suppositione positiva sit, elucet, signum incrementi quod capit tangζ, nunquam mutari. Si contra numerator fractionis (35) evanescit, tangens fit asymptota curvam in quatuor punctis osculans; asymptotae igitur aequatio est:

$$\operatorname{tang}\zeta = -\operatorname{tang}\frac{\pi}{a-1}.$$

Quum prima curvae pars inter circulum et eius tangentem iaceat, nec $\frac{d\operatorname{tang}\zeta}{d\xi}$ signum unquam mutet; omnes rami *concavitatem* circuli centro obvertunt.

Distantia tangentis curvae a centro, pari modo ac formula (18) reperta, est:

$$P = R\frac{+(a+1)}{+\sqrt{(a-1)^2+4a\cos^2\frac{1}{2}(a-1)\xi}}, \qquad (34)$$

itaque semper maior est quam radius; igitur asymptotae distantia a centro exprimitur formula:

$$P = R\,\frac{a+1}{a-1} = \frac{R(\mu+\nu)}{\mu-\nu},$$

quae distantia semper finita manet dum μ et ν finiti sunt, i. e. dum a rationalis est; infinita vero evadit si $\mu=\nu+b=\infty$.

Distantia angularis v punctorum curvae ab origine coordinatarum datur formula:

$$v = \frac{1}{2}\,\frac{\mu+\nu}{\nu}\,\varphi,$$

unde, si $\varphi = \frac{\nu\pi}{\mu-\nu}$, fit:

$$v = \frac{1}{2}\,\frac{\mu+\nu}{\mu-\nu}\pi = \tfrac{1}{2}\pi+\frac{\nu}{\mu-\nu}\pi,$$

ex quo patet, radios vectores ultimorum eiusdem rami punctorum maiorem semper angulum includere quam duos rectos, eoque maiorem esse hunc angulum quo minor sit $\mu-\nu$ et quo maior ν. Maximum angulum illi radii vectores includunt, si $\mu = \nu+1 = \infty$, qua suppositione curva reducitur ad unum ramum, circulum infinite multis circuitibus involventem. Si contra $\nu=1$, $\mu = \infty$, ille angulus duos angulos rectos quantitate infinite parva superans, minimum nanciscitur valorem, et curva infinite multis ramis constat.

Radius vectoris longitudo quum sit:

$$r = \frac{R}{\cos\frac{1}{2}\frac{\mu-\nu}{\nu}\varphi} = \frac{R}{\cos\frac{\mu-\nu}{\mu+\nu}v},$$

eo maior est quo maior $\mu-\nu$ et quo minor $\mu+\nu$; igitur si plures curvae inter se comparantur, ea proxime ad circulum accedit, cuius coefficiens a minimus est, et si $\nu = \infty = \mu-1$, curva ad spiralis formam accedens primum spatio infinite parvo a circumferentia seiungitur, quod spatium deinde magis magisque usque in infinitum crescit.

29. Multa de his rebus, praesertim de peculiari ramorum forma, addere possumus; sed quum fines huiusce libelli nos moneant, ne diutius in illis moremur, postremo paucis verbis in comparationem duarum illarum curvarum classium inquiramus.

Primum nobis obviam fit relatio quaedam inter ramorum infinitorum extentionem. Si enim in classe I. coefficiens a crescit inde ab 1 usque ad ∞, primo singulorum ramorum, infinite multorum, crus alterum alteri proxime accedit, ita ut crura paullum a radiis prolongatis discrepent, deinde crura magis magisque discedunt et tangentibus circuli appropinquant. Tum, si a negativus fit et decrescit, rami qui antea convexitatem circuli centro obvertebant, tangentes, ut ita dicam, transgressi, circulum versus magis magisque curvantur simulque eorum numerus diminuitur, ita ut postremo unus tantum restet ramus circulum infinite multis circuitibus circumdans.

Quod ad numerum ramorum, iam reperimus (§. 21.) *definitum* semper esse numerum curvarum I. quae dato numero ramorum constent; curvarum II. contra hic numerus semper *infinitus* est, quia infinite multi numeri inter se primi μ et ν inveniri possunt, quorum differentia datum numerum aequet.

In puncto, curvae I. ac circulo communi, quum tangentes quae eius puncti coordinatas abscindunt, coincidant, diametrum in eodem puncto secant; quod idem est punctum, in quo tangens coordinatam ξ sive φ determinans, a tangente coordinatam ψ abscindente secatur, i. e. punctum curvae II. (§. 26.) illi puncto curvae I. respondens. Contra cuivis puncto curvae I. in diametro primo sito, respondet punctum curvae II. in circumferentia iacens. Ex quo sequitur, quum haec relatio reciproca sit, ut curva I. in $\mu - \nu$, curva II. in $\mu + \nu$ punctis a diametro principali secetur.

Si punctum curvae et circulo commune in ipso diametro principali iacet, idem manet in altera curva; eiusmodi puncta sunt 1 vel 2, prout $\mu + \nu$ impar vel par est. Sin autem in curva I. punctum contactus non in diametro principali iacet, aliud quoque punctum contactus curvae I. exstat eodem arcu ab initio coordinatarum distans, quibus punctis unum itaque tantum punctum curvae II. respondet, quod quum ob hanc causam bis construatur, punctum *duplex* est.

Si in curva I. coordinata ξ inde a 0 usque ad $\frac{n}{a+1}$ augetur, puncta respondentia curvae II. primam partem primi semirami constituunt. Si fit $\xi = \frac{n}{a+1}$, tangentes ME, ND (Fig. VIII.) parallelae fiunt, et punctum curvae I. in infinitum recedit; cui puncto ut videamus quodnam punctum curvae II. respondeat, sit E extremitas arcus ξ, et D arcus η. Igitur punctum H curvae II. formatur intersectione tangentium ME et GL, quo facillime demonstratur, id in radio CH perpendiculari in radium principalem situm esse. Igitur omnibus punctis alterius curvae infinite remotis ea alterius curvae puncta respondent quorum radius vector cum radio principali multiplum impar quadrantis includit.

Videamus etiam quaenam puncta punctis duplicibus respondeant. Si B (Fig. IX.) punctum duplex curvae I. est, coordinata ξ, quae ad alterum ramorum sese secantium pertinet, a tangente BH, ea vero quae ad alterum ramum pertinet, a tangente BK absciuditur; igitur puncto B respondent duo puncta D, G curvae II. quae symmetrice ad diametrum principalem sita esse facillime demonstratur. Sed ponendo $ACF = BCF$, $CA = CB$, aliud determinatur punctum intersectionis A curvae I. (§. 15.) cui, quum omnia ad diametrum principalem symmetrice se habeant, eadem ac puncto B, puncta D, G respondent; haec igitur ipsa sunt puncta duplicia curvae II. Itaque binis alterius curvae punctis duplicibus ad diametrum principalem symmetrice sitis, binae alterius curvae intersectiones respondent, quo fit ut numerus intersectionum extra diametrum sitarum in utraque curva idem sit. Intersectionibus vero in ipsa diametro iacentibus puncta contactus respondere iam supra demonstravimus.

Harum relationum ope facillime invenitur numerus intersectionum quae in curva II. exstant. Si enim $\mu+\nu$, ideo et $\mu-\nu$, impar est, $\mu+\nu-1$ puncta extra diametrum iacentia curvae I. cum circulo communia sunt, quibus in curvae II. respondent $\frac{1}{2}(\mu+\nu-1)$ puncta intersectionis in diametro principali iacentia. Simili modo invenitur, in curva I. esse $\frac{1}{2}(\mu-\nu-1)$ puncta intersectionis in diam. princ. sita, ex quo sequitur ut numerus huius curvae punctorum intersectionis extra diam. principalem sitorum sit $\frac{1}{2}(\mu-\nu-1)\cdot(\mu+\nu) - \frac{1}{2}(\mu-\nu-1) = \frac{1}{2}(\mu-\nu-1)(\mu+\nu-1)$, quibus totidem eiusdem generis puncta in curva II. respondent. Igitur omnium intersectionum in curva II. numerus est:

$$\tfrac{1}{2}(\mu+\nu-1) + \tfrac{1}{2}(\mu-\nu-1)(\mu+\nu-1) = \tfrac{1}{2}(\mu+\nu-1)(\mu-\nu).$$

Eodem modo, si $\mu+\nu$ impar est, ille numerus invenitur:

$$\tfrac{1}{2}(\mu+\nu-2) + \tfrac{1}{2}(\mu-\nu-1)(\mu+\nu) - \tfrac{1}{2}(\mu-\nu-2) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(\mu+\nu-1)(\mu-\nu).$$

VITA.

Natus sum, **Guilelmus Stammer**, Luciliburgi die X. mensis Iulii anni MDCCCXXVI. patre **Henrico**, matre **Dorothea** e gente **Cramer**. Fidem confiteor catholicam. Prima institutione imbutus sum a parentibus carissimis, quibus hoc loco ob eximiam sollertiam et caritatem qua me erudiverunt, ardentissimas gratias palam me agere maximo opere laetor. Matheseos prima rudimenta suavissima me edocuit mater, cetera elementa dilectissimus pater, qui idem lingua vernacula me instituere perrexit per illos sex annos, per quos inde ab a. MDCCCXXXVIII. disciplina Athenaei, quod Luciliburgi floret, usus sum; cuius magistros pio semper colam animo, imprimis autem non possum non **P. J. van Kerckhoff**, virum doctissimum, dicere, qui primus physices et chemiae amorem in me excitavit et amicissime nutrivit. Examine maturitatis peracto, otio domestico per annum fruitus, mense Octobri anni MDCCCXLV. Bonnam adii inque cives academicos receptus sum a VV. cll. **Plücker**, illius temporis rectore magnifico, et **Bergemann**, facultatis philosophiae decano. A quo tempore in hac alma litterarum universitate studiis mathematicis physicisque me dedi, exceptis mensibus aestivis anni MDCCCXLVIII, quos domi transegi. Scholis interfui virorum clarissimorum: **Arndt**, **Bergemann**, **G. Bischof**, **Brandis**, **Breidenstein**, **Dahlmann**, **Düntzer**, **Goldfuss**, Heine, Loebell, Noeggerath, Plücker, Radicke, Treviranus, Welcker; exercitationibus insuper adfui seminarii physici, moderantibus viris cll. Goldfuss, Budge, Treviranus, Noeggerath, Bischof, Plücker. Quibus viris omnibus ~~quum~~ pro eorum erga me benevolentia et institutione qua me adauxerunt, gratias ago quam maximas, praecipue autem Ill. Plücker pro summa, qua me adiuvit, humanitate pio gratoque animo semper venerabor.

THESES.

1. *In mathesi pura non solum formalis, sed etiam realis inest veritas.*
2. *Mathesis in eruditione universali maximi est momenti.*
3. *Ad rudimenta matheseos docenda ea adhibeatur methodus quam Pestalozzi monstravit.*
4. *Nulla adhuc proposita est theoria parallelarum ex omni parte perfecta.*
5. *Geometria in Algebra et Analysi non ad propositiones demonstrandas sed ad eum tantum finem uti licet, ut propositiones alia via demonstratae clarius a mente perspiciantur.*
6. *Spectrum a lumine solis exhibitum e tribus tantum constat coloribus, rubro, fulvo, caeruleo.*
7. *Psychrometrum reliquis hygrometris praeferendum est.*
8. *Phaenomena irradiationis optime e hypothesi quam Plateau protulit, explicantur.*
9. *Non recte Humboldt, ab alio observatore, ut alium arcum coelestem, ita et aliam auroram borealem videri, affirmat.*
10. *Nexus quidam inter compositionem chemicam et formam crystallographicam corporum negari nequit.*

11. *In separandis duobus salibus, quae in eadem solutione continentur, non solum relativa sed etiam absoluta salium quantitas permagni est momenti.*

12. *Phosphorus luce aut calore ruber factus non combinatio chemica sed modificatio allotropica est.*

13. *Maior pars actionum chemicarum, quae in regno inorganico c a t a l y t i c a e vocantur, e condensatione fluidorum in superficie corporum deduci potest.*

14. *Floris partes pro foliis mutatis haberi possunt.*

15. *Metamorphoses animalium quae ad superiores classes pertinent, non semper classium inferiorum speciem praebent.*

16. *Ars memoriae, qualis novissimis temporibus proposita est, nec omnino reiicienda nec ubique usurpanda est.*
