ESSAI

SUR UNE

EXPOSITION NOUVELLE DE LA THÉORIE ANALYTIQUE

DES

PROBABILITÉS A POSTÉRIORI.

PAR

A. MEYER.

LIÉGE,

H. DESSAIN, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,

PLACE S^{t}.-LAMBERT, N° 9-28.

1857.

AVERTISSEMENT.

C'est à l'ouvrage qui paraît aujourd'hui que Monsieur Meyer semblait attacher le plus d'importance, et c'est celui sur lequel il comptait surtout pour asseoir sa réputation ; aussi s'occupa-t-il avec la plus grande ardeur de sa publication et ne cessa-t-il, quoique déjà fort souffrant, d'en corriger lui-même les épreuves. La première moitié environ était imprimée quand la maladie le força d'abandonner ce travail ; il voulut bien nous le confier ; et à sa mort, survenue peu de temps après, nous nous trouvâmes naturellement chargé de surveiller le reste de la publication. Nous avons rempli ce devoir avec soin ; trop heureux si nous avions pu par ce moyen acquitter en partie notre dette de reconnaissance envers notre excellent et regretté professeur.

Parmi les fautes qui sont restées, il en est que l'on apercevra aisément et qui ne peuvent pas nuire à l'intelligence du texte ; d'autres, plus graves, devraient être corrigées à la main par le lecteur qui ne voudrait pas se trouver arrêté par elles dans cette étude ; nous les avons consignées dans un errata placé en tête de l'ouvrage.

Liége, août 1857.

F. Folie,

Docteur en Sciences.

ERRATA.

Pag.	Lig.	Au lieu de :	Lisez.
3	2	$\int_{\gamma}^{\infty} c^{-t^2}\,dt$	$\int_{\gamma}^{\infty} e^{-t^2}\,dt$
5	15	calculés	calculé
8	2	$P_\gamma + K_\gamma$	$T_\gamma + K_\gamma$
12	19	$K_\rho\, H_\rho$	$K_\rho\, H_{g,\rho}$
»	2 *en rem*^{t}	le nombre	le nombre m
»	»	$2g-1$	$m=2g-1$
13	3	$\int_{0}^{\gamma} e^{-t}\,dt$	$\int_{0}^{\gamma} e^{-t^2}\,dt$
14	5	$\beta_{4,4}$	$\beta_{3,4}$
23	3	$\frac{f^{1v}x}{fx}$	$\frac{f^{IV}x}{fx}$
»	12	»	»
»	17	»	»
24	4	»	»
25	3	$\frac{r^2}{s}$	$\frac{r_2}{s}$
»	9	$\int_{-\alpha}^{\alpha} y_m\, e^{-t^2}\,dx$	$\int_{-\infty}^{\infty} y_m\, e^{-t^2}\,dx$
26	2	$\frac{(2i-1)(2i-3)\ldots5.3}{2^{i-1}}$	$\frac{(2i-1)(2i-3)\ldots.5.3}{2^{i-1}}.\gamma$
27	2	$\frac{r_2}{s}\int_{-\infty}^{\infty} i^4\, e^{-\tau^2}\,d\tau$	$\frac{r_2}{s}\int_{-\infty}^{\infty} \tau^4 e^{-\tau^2}\,d\tau$
28	12 *en rem*^{t}	$\frac{p}{\mu}+\frac{\gamma}{\mu}\sqrt{\frac{2pq}{\mu}}$	$\frac{p}{\mu}\pm\frac{\gamma}{\mu}\sqrt{\frac{2pq}{\mu}}$
29	4	$x(1-x)\frac{p}{p}$	$x(1-x)\frac{q}{p}$
29	18	comprise	compris
40	1	$=$	$P=$
41	1	trouvé	trouvée
44	11	$i=1,2,\ldots s$	$i=1,2,\ldots.s$
»	5 *en rem*^{t}	$\int^{a'} d\varepsilon_1\,\varphi\varepsilon_4$	$\int_{-a}^{a'} d\varepsilon_1\,\varphi\varepsilon_1$
46	4	$+$	$+$ etc.
»	10	$-3\,\mu_4\,\mu$	$-3\,\mu_4\,\mu_2$
48	5	$\iota =$	$\tau =$
51	4 *en rem*^{t}	$\nu-\mu$	$\nu-\mu_2$
54	8	$M_4 s + M_5 s\sqrt{-1}$	$M_4 s\theta^4 + M_5 s\theta^5\sqrt{-1}$

Pag.	Lig.	Au lieu de :	Lisez
59	10	$\int_{-a}^{a'} \varphi\varepsilon_s\, d\varepsilon^s$	$\int_{-a}^{a'} \varphi\varepsilon_s\, d\varepsilon_s$
»	1 *en rem*^{t}	$\int_{-a}^{a'} \varphi\varepsilon_s\, e^{\varepsilon_s\theta\sqrt{-1}}$	$\int_{-a}^{a'} d\varepsilon_s\varphi\varepsilon_s e^{\varepsilon_s\theta\sqrt{-1}}$
66	1	$\psi(\iota)$	$\psi(\tau)$
»	7	»	»
»	2 *en rem*^{t}	»	»
»	4 *en rem*^{t}	$K_i^{(2)} - 3K_i^{(2)} K_i$	$K_i^{(3)} - 3K_i^{(2)} K_i$
73	7	$a_i n_i$	$a_i,\ n_i$
74	11 *en rem*^{t}	$\iota = S\,F_i^4 a_i x$	$\tau = S\,F_i a_i x$
75	3 *en rem*^{t}	$\mu_2-3\mu_1\mu_2+2\mu_1^2$	$\mu_3-3\mu_2\mu_1+2\mu_1^2$
»	2 »	»	»
76	2	»	»
75	1 *en rem*^{t}	$S\,F_i^3\,\theta\sqrt{-1}$	$S\,F_i^3\,\theta^3\sqrt{-1}$
81	2	,	$\times$
»	4	.	:
»	8 *en rem*^{t}	γ'	γ
82	4	»	»
85	11 et 12 *en rem*^{t}	s_h	S_h
»	9 et 10 »	s_i	S_i
95	3	K2	k—2
97	5 *en rem*^{t}	ω	ω'
98	12 et 14 »	$e^{-\frac{\varepsilon_1}{2}\frac{2p_1-s}{2p_1(s-p_1)}}$	$e^{\frac{\varepsilon_1}{2}\frac{2p_1-s}{2p\,(s-p_1)}}$
99	7 *en rem*^{t}	K_i	k_i
106	8	$e^{\Delta_1 s\theta\sqrt{-1}\ \frac{\theta^2 s}{2}(\Delta_2-\Delta_1^2)}$	. . . . $e^{\Delta_1 s\theta\sqrt{-1}-\frac{\theta^2 s}{2}(\Delta_2-\Delta_1^2)}$
»	12	$\Delta_1 - \gamma$	$\Delta_1 - \nu$
»	14	$v = \Delta_1$	$\nu = \Delta_1$
107	5	$sv + l$	$s\nu + l$
110	1 *en rem*^{t}	$\frac{11}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}$
111	1	$=$	$P=$
116	9	$e^{-\tau\theta\sqrt{-1}}$	$e^{\tau\theta\sqrt{-1}}$
»	10	$e^{-\theta\sqrt{-1}}$	$e^{-\tau\theta\sqrt{-1}}$
117	10	$b^2 - b_1^2$	$b_2 - b_1^2$
121	9	$e^{\alpha_n\nu\sqrt{-1}}$	$e^{-\alpha n\nu\sqrt{-1}}$

AVANT-PROPOS.

En écrivant cet essai, j'ai eu primitivement en vue la nécessité de rendre plus rigoureux les calculs, et de concentrer les méthodes et les principes dans l'exposition de la théorie des probabilités à postériori. Pour atteindre ce but, je mets d'abord hors de doute la convergence des séries que l'on rencontre dans cette théorie, à l'aide des 3 théorèmes démontrés dans la 1re section. J'ai recours ensuite aux théorèmes de Fourier et de Lejeune-Dirichlet, c'est-à-dire, à un procédé unique, pour la mise en équation, ce qui assure une constante uniformité à toutes mes déductions analytiques. Enfin, je fais ressortir la dépendance des cas spéciaux de la théorie des probabilités à postériori, d'une proposition unique, due à Laplace, ce qui donne une grande unité scientifique aux principes de cette théorie.

J'ai partagé ce travail en quatre sections : dans la 1re se trouvent les théorèmes sur la convergence; dans la 2e je donne les théorèmes de Bayes et de Laplace, sur la probabilité des causes ; dans la 3e j'expose les fondements de la théorie des erreurs; dans la quatrième enfin, je traite de la probabilité appliquée à la vie humaine.

Ces quatre sections embrassent ainsi ce qu'il y a de mieux connu, et en même temps de plus utile, la partie la plus étendue et la plus intéressante du grand ouvrage de Laplace sur la théorie des probabilités.

PREMIÈRE SECTION.

THÉORÈMES

SUR

LA CONVERGENCE DES SÉRIES DANS LE CALCUL

DES

PROBABILITÉS A POSTÉRIORI.

Théorème I.

En posant :

$$\int_0^\gamma c^{-t^2}\, dt = \mathrm{T}_\gamma,\quad \int_\gamma^\infty c^{-t^2}\, dt = \mathrm{S}_\gamma,\quad 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{T}_\gamma = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{S}_\gamma,\quad \frac{\mathrm{S}_\gamma}{\mathrm{T}_\gamma} = \alpha_\gamma,$$

$$\mathrm{P}_\gamma = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{T}_\gamma,\quad \delta = a + \frac{b}{s} + \frac{c}{s^2} + \text{etc.},$$

a, b..., *désignant des constantes inconnues, si l'on a une probabilité exacte*

$$\mathrm{P}'_\gamma = \mathrm{P}_\gamma + \frac{\delta}{s}\cdot \mathrm{P}_\gamma$$

qu'une inconnue x, *déterminée par* s *expériences, est comprise entre les limites*

$$m \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}}\sqrt{k},$$

dans lesquelles m *et* k *désignent des quantités connues, je dis que* 1°, *en supposant* s *très-grand, on pourra écrire approximativement*

$$\mathrm{P}'_\gamma = \mathrm{P}_\gamma^{-}; \tag{1}$$

2° *qu'à l'aide d'une table de* α_γ *on pourra préciser l'approximation de la formule* (1) ; *et* 3° *que* s *pourra être supposé assez grand pour que l'on puisse assigner telle approximation que l'on voudra à la formule* (1).

Démonstration.

Comme P'_γ ne peut jamais surpasser l'unité, ni devenir négatif, on a toujours

$$P_\gamma + \frac{\delta}{s} P_\gamma \leqq 1,$$

d'où :

$$\frac{\delta}{s} \leqq \frac{1 - P_\gamma}{P_\gamma} = \frac{1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} T_\gamma}{\frac{2}{\sqrt{\pi}} T_\gamma} = \frac{S_\gamma}{T_\gamma} = \alpha_\gamma .$$

Mais quand γ croît les quantités

$$S_\gamma = \int_\gamma^\infty e^{-t^2}\, dt, \quad T_\gamma = \int_0^\gamma e^{-t^2}\, dt,$$

convergent rapidement, la première vers zéro, et la seconde vers $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$: donc α_γ convergera, pour des valeurs croissantes de γ, rapidement vers zéro. On a, en effet :

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = 0{,}886226945,$$

$$\begin{array}{ll}
T_1 = 0{,}746823950 & S_1 = 0{,}139402995 \\
T_{1,5} = 0{,}856188380 & S_{1,5} = 0{,}030038556 \\
T_2 = 0{,}882081390 & S_2 = 0{,}004145555 \\
T_{2,5} = 0{,}885766048 & S_{2,5} = 0{,}000460897 \\
T_3 = 0{,}886201436 & S_3 = 0{,}000025509 \\
T_4 = 0{,}886223472 & S_4 = 0{,}000003873,
\end{array}$$

d'où :

$$\alpha_1 = \frac{S_1}{T_1} = 0{,}186\ldots$$

$$\alpha_{1,5} = \frac{S_{1,5}}{T_{1,5}} = 0{,}035\ldots$$

$$\alpha_2 = \frac{S_2}{T_2} = 0{,}004\ldots$$

$$\alpha_{2,5} = \frac{S_{2,5}}{T_{2,5}} = 0{,}0004\ldots$$

$$\alpha_3 = \frac{S_3}{T_3} = 0{,}00002\ldots$$

$$\alpha_4 = \frac{S_4}{T_4} = 0{,}000004\ldots$$

Cela posé, si l'écart $x - m$ doit être renfermé dans les limites constantes $\pm \Delta$, on aura, abstraction faite du signe :

$$x - m < \Delta,$$

et par conséquent

$$\Delta = \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{k},$$

d'où :

$$\gamma = \frac{\Delta \sqrt{s}}{\sqrt{k}}. \tag{2}$$

Donc, 1° si s est donné et très-grand, alors γ, quelque petit que soit Δ, conservera encore une valeur assez grande pour que α_γ, et par suite $\frac{\delta}{s}$, soient insensibles, ce qui permettra de négliger, dans l'expression de P'_γ, le terme affecté du facteur $\frac{\delta}{s}$.

2° Soit ρ la valeur de γ déduite de l'équation (2), pour un s et un Δ donnés ; si, en supposant construit une table de la quantité α_γ, on trouve que les n premières décimales de α_ρ sont des zéros, alors, en posant

$$P'_\gamma = P_\gamma,$$

et en prenant $\gamma = \rho$, les n premières décimales de P_ρ, pris dans la table des P_γ, ou calculés directement, seront exactes, et les autres pourront être rejetées, comme étant trop faibles de plusieurs unités. On aura alors, en ne conservant que ces n premiers chiffres, la valeur de P'_γ, à moins de $\frac{1}{n}$ près.

En effet, si les n premiers chiffres décimaux de α_ρ sont des zéros, en multipliant α_ρ par la fraction P_γ, les n premiers chiffres décimaux du produit seront encore des zéros, il est donc clair que le produit

$$\frac{\delta}{s} P_\rho < \alpha_\rho P_\rho,$$

n'aura aucune influence sur les n premiers chiffres décimaux du terme P_ρ.

On a, par exemple, pour

$$\gamma = 1;\ 2;\ 2,5;\ 3;\ 4,$$

les valeurs exactes

$$P'_1 = P_1 + \frac{\delta}{s} P_1$$

$$P'_2 = P_2 + \frac{\delta}{s} P_2$$

$$P'_{2,5} = P_{2,5} + \frac{\delta}{s} P_{2,5}$$

$$P'_3 = P_3 + \frac{\delta}{s} P_3$$

$$P'_4 = P_4 + \frac{\delta}{s} P_4,$$

mais on a :

$$P_1 = 0{,}8427\,,\quad P = 0{,}99532\,,\quad P_{25} = 0{,}99948\,,$$
$$P_3 = 0{,}999971\,,\quad P_4 = 0{,}999996\,,$$

on a donc, en ayant égard aux valeurs ci-dessus de α_γ :

$$P_1\,\alpha_1 = 0{,}186 \times 0{,}8427\ldots$$
$$P_2\,\alpha_2 = 0{,}0039\ldots$$
$$P_{2,5}\,\alpha_{2,5} = 0{,}0003\ldots$$
$$P_3\,\alpha_3 = 0{,}000019\ldots$$
$$P_4\,\alpha_4 = 0{,}0000039\ldots$$

On aura donc :

$$P'_1 = 0{,}8427 + < 0{,}186 \times 0{,}8427\ldots$$
$$P'_2 = 0{,}99532 + < 0{,}0039\ldots$$
$$P'_{2,5} = 0{,}99948 + < 0{,}0003\ldots$$
$$P'_3 = 0{,}999971 + < 0{,}000019\ldots$$
$$P'_4 = 0{,}999996 + < 0{,}0000039\ldots$$

On voit par là, que $\gamma = 1$, n'est pas assez grand pour qu'on puisse se permettre de poser

$$P'_1 = 0{,}8427\,,$$

mais que l'on aura :

$$P'_2 = 0{,}99 \quad \text{à moins de } \frac{1}{100} \text{ près,}$$

$$P'_{2,5} = 0{,}999 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \frac{1}{1000} \text{ près,}$$

$$P'_3 = 0{,}9999 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \frac{1}{10000} \quad \text{»}$$

$$P'_4 = 0{,}99999 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \frac{1}{10000} \quad \text{»}$$

3° Si Δ et s ne sont pas donnés, on pourra toujours, quel que soit Δ, faire s assez grand, pour que l'équation (2) donne pour γ telle valeur que l'on voudra, et par conséquent pour P'_γ telle valeur approchée que l'on voudra.

Théorème II.

Les mêmes choses étant posées que dans le théorème précédent, soit de plus

$$e^{-\gamma^2} = K_\gamma\,,\quad \frac{K_\gamma}{\sqrt{2\pi}} = Q_\gamma\,,\quad h < 1\,;$$

si l'on a une probabilité exacte

$$P'_\gamma = Q_\gamma \cdot \frac{1}{\sqrt{hs}} + P_\gamma + \frac{\delta}{s}\left[\, Q_\gamma \cdot \frac{1}{\sqrt{hs}} + P_\gamma \,\right]$$

qu'une inconnue x, *déterminée par* s *expériences, est comprise entre les limites*

$$m \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{k},$$

dans lesquelles m *et* k *sont des quantités connues, je dis que* 1° *en supposant* s *très-grand, on pourra écrire approximativement :*

$$P'_\gamma = Q_\gamma \cdot \frac{1}{\sqrt{hs}} + P_\gamma\ ; \tag{1}$$

2° *Que le terme* Q_γ *est à peu près du même ordre que la quantité*

$$\alpha_\gamma = \frac{S_\gamma}{T_\gamma},$$

et que l'on a sensiblement

$$P'_\gamma = P_\gamma\ ; \tag{2}$$

3° *Que l'on pourra, à l'aide d'une table des valeurs* α_γ, *préciser l'approximation des formules* (1, ou (2;

4° *Que* s *peut être supposé assez grand pour que l'on puisse assigner telle approximation que l'on voudra aux formules* (1, ou (2.

Démonstration.

Comme P'_γ ne peut surpasser l'unité, ni être négatif, on a toujours :

$$Q_\gamma \cdot \frac{1}{\sqrt{hs}} + P_\gamma + \frac{\delta}{s}\left[Q_\gamma \cdot \frac{1}{\sqrt{hs}} + P_\gamma \right] \leqq 1.$$

Si nous posons, pour un moment

$$b = Q_\gamma \cdot \frac{1}{\sqrt{hs}},\ a = P_\gamma,$$

nous trouvons :

$$\frac{\delta}{s} \leqq \frac{1-(a+b)}{a+b} = \frac{1-a}{a}\left\{ 1 - \frac{b}{(a+b)(1-a)} \right\};$$

d'où :

$$\frac{\delta}{s} \leqq \frac{S_\gamma}{T_\gamma}\left\{ 1 - \frac{\dfrac{K_\gamma}{2\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{hs}}}{\dfrac{2}{\sqrt{\pi}} S_\gamma \left(T_\gamma + \dfrac{K_\gamma}{2\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{hs}}\right)} \right\}.$$

Mais en remplaçant au dénominateur le terme $\dfrac{K_\gamma}{2\sqrt{2}}\ \dfrac{1}{\sqrt{hs}}$ par la valeur un peu plus grande K_γ nous aurons à fortiori :

$$\frac{\delta}{s} \leqq \frac{S_\gamma}{T_\gamma}\left\{ 1 - \frac{\dfrac{K_\gamma}{2\sqrt{2}}}{\dfrac{2}{\sqrt{\pi}} S_\gamma (T_\gamma + K_\gamma)} \right\},$$

Posons :

$$P_\gamma + K_\gamma = V_\gamma ,$$

$$H_\gamma = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} S_\gamma \cdot \frac{V_\gamma}{K_\gamma} ,$$

$$\alpha_\gamma \left\{ 1 - \frac{1}{H_\gamma} \cdot \frac{1}{\sqrt{hs}} \right\} = \beta_\gamma ,$$

nous aurons :

$$\frac{\delta}{s} \leqq \beta_\gamma .$$

Mais quand γ croît, la quantité β_γ, à cause du facteur α_γ, converge rapidement vers zéro. On a en effet :

$$\log \left(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \right) = 0,5039901,$$

$$\begin{array}{llll}
K_1 & = 0,3678794 , & V_1 & = 1,1147033 , \\
K_2 & = 0,0183156 , & V_2 & = 0,9003969 , \\
K_{2,5} & = 0,0019304 , & V_{2,5} & = 0,8876964 , \\
K_3 & = 0,0001234 , & V_3 & = 0,8863248 , \\
K_4 & = 0,0000001125 , & V_4 & = 0,8862235 ,
\end{array}$$

d'où :

$$\beta_1 = 0,186 \ldots \left\{ 1 - 0,74 \ldots \frac{1}{\sqrt{hs}} \right\}$$

$$\beta_2 = 0,004 \ldots \left\{ 1 - 1,537 \ldots \frac{1}{\sqrt{hs}} \right\}$$

$$\beta_{2,5} = 0,0004 \ldots \left\{ 1 - 1,479 \ldots \frac{1}{\sqrt{hs}} \right\}$$

$$\beta_3 = 0,00002 \ldots \left\{ 1 - 1,710 \ldots \frac{1}{\sqrt{hs}} \right\}$$

$$\beta_4 = 0,000004 \ldots \left\{ 1 - 0,0102 \ldots \frac{1}{\sqrt{hs}} \right\}$$

Comme $h < 1$, et que s est très-grand, on peut supposer $\sqrt{hs}$ au moins égal à 10, et alors on a :

$$\begin{array}{ll}
\beta_1 & = 0,186 + 0,93 \ldots \\
\beta_2 & = 0,0034 \ldots \\
\beta_{2,5} & = 0,000348 \ldots \\
\beta_3 & = 0,000016 \ldots \\
\beta_4 & = 0,0000019 \ldots
\end{array}$$

Cela posé : si l'écart $x - m$ doit être renfermé dans les limites constantes $\pm \Delta$, on aura, abstraction faite du signe,

$$x - m < \Delta ,$$

et par conséquent:

$$\Delta = \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{k};$$

d'où :

$$\gamma = \frac{\Delta \cdot \sqrt{s}}{\sqrt{k}}. \tag{5}$$

Donc 1° Si s est très-grand, alors γ, quelque petit que soit Δ, conservera encore une valeur assez grande pour que β_γ, et par suite $\frac{\delta}{s}$, soient insensibles, ce qui permettra de négliger dans l'expression de P'_γ, le terme affecté du facteur $\frac{\delta}{s}$.

2° On a de plus :

$$Q_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{sh}} = 0{,}146728 \cdot \frac{1}{\sqrt{sh}},$$

$$Q_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{sh}} = 0{,}0073078 \cdot \frac{1}{\sqrt{sh}},$$

$$Q_{2,5} \cdot \frac{1}{\sqrt{sh}} = 0{,}00077011 \cdot \frac{1}{\sqrt{sh}}$$

$$Q_3 \cdot \frac{1}{\sqrt{sh}} = 0{,}00004922 \cdot \frac{1}{\sqrt{sh}},$$

$$Q_4 \cdot \frac{1}{\sqrt{sh}} = 0{,}000000044 \cdot \frac{1}{\sqrt{sh}},$$

ce qui fait voir que le terme $Q_\gamma \cdot \frac{1}{\sqrt{sh}}$ est au moins de l'ordre de α_γ, et qu'il exerce par conséquent très peu d'influence sur la valeur du terme P_γ, dans les limites de l'approximation à laquelle on s'arrête. On peut donc écrire approximativement

$$P'_\gamma = P_\gamma .$$

3° Comme les quantités β_γ sont à peu près du même ordre que celles α_γ, il est clair que si l'on possède une table de ces dernières valeurs, on pourra préciser l'approximation des formules (1 ou (2, ainsi qu'il a été dit dans le théorème précédent. En effet, pour $\sqrt{hs} = 10$, on a par exemple :

$$P_1 + Q_1 \cdot \frac{1}{10} = 0{,}8573$$

$$P_2 + Q_2 \cdot \frac{1}{10} = 0{,}99605$$

$$P_{2,5} + Q_{2,5} \cdot \frac{1}{10} = 0{,}9995570$$

$$P_3 + Q_3 \cdot \frac{1}{10} = 0{,}9999759$$

$$P_4 + Q_4 \cdot \frac{1}{10} = 0{,}999996$$

donc :

$$
\begin{aligned}
P'_1 &= 0{,}8573 &&+ < 0{,}186 \times 0{,}8573\ldots\\
P'_2 &= 0{,}99605 &&+ < 0{,}0033\ldots\\
P'_{2,5} &= 0{,}999557 &&+ < 0{,}00034\ldots\\
P'_3 &= 0{,}9999759 &&+ < 0{,}000016\ldots\\
P'_4 &= 0{,}999996 &&+ < 0{,}00000188\ldots
\end{aligned}
$$

Il suit de là que si γ ne surpasse pas 1, on ne pourra pas négliger le terme de P'_γ qui a $\frac{\delta}{s}$ pour facteur. Mais si $\gamma = 2;\ 2{,}5;\ 3;\ 4;$ on aura :

$$
\begin{aligned}
P'_2 &= 0{,}99 && \text{à moins de } \frac{1}{100} \text{ près}\\
P'_{2,5} &= 0{,}999 && \text{»}\quad \frac{1}{1000} \quad \text{»}\\
P'_3 &= 0{,}9999 && \text{»}\quad \frac{1}{10000} \quad \text{»}\\
P'_4 &= 0{,}99999 && \text{»}\quad \frac{1}{100000} \quad \text{»}
\end{aligned}
$$

et l'on voit en même temps que dans les limites de cette approximation le terme $Q_\gamma \cdot \frac{1}{\sqrt{sh}}$ n'exerce aucune influence.

4° Enfin si Δ et s ne sont pas donnés, alors il est clair que, quelque petit que soit Δ, en multipliant indéfiniment les expériences, on pourra obtenir, par la formule (3, un γ, qui conduira, comme nous avons fait voir dans le 1[er] théorème, à telle approximation que l'on voudra.

Théorème III.

Les mêmes choses étant posées que dans les théorèmes précédents, soient de plus

$$H_{\gamma,g} = \frac{\gamma^{2g-2}}{1\cdot 2\ldots(g-1)} + \frac{\gamma^{2g-4}}{1\cdot 2\ldots(g-2)} + \ldots + \frac{\gamma^2}{1} + 1,$$

$$L_{\gamma,g} = \frac{\gamma^{2g-3}}{\frac{2g-3}{2}\cdot\frac{2g-5}{2}\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}} + \frac{\gamma^{2g-5}}{\frac{2g-5}{2}\cdot\frac{2g-7}{2}\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}} + \ldots + \frac{\gamma}{\frac{1}{2}},$$

si l'on a les probabilités exactes

$$P'_{2g} = 1 - K_\gamma H_{\gamma,g} + \frac{\delta}{s}(1 - K_\gamma H_{\gamma,g}), \text{ ou} \tag{a}$$

$$P'_{2g-1} = P_\gamma - K_\gamma L_{\gamma,g} + \frac{\delta}{s}(P_\gamma - K_\gamma L_{\gamma,g}), \tag{b}$$

que l'inconnue x, *déterminée par* s *expériences, est comprise dans les limites*

$$m \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}}\sqrt{k}$$

m *et* k *désignant des quantités connues ; je dis que* 1° *en supposant* s *très-grand, on pourra écrire approximativement*

$$P'_{2g} = 1 - K_\gamma \; H_{\gamma,g} , \tag{1}$$

$$P'_{2g-1} = P_\gamma - K_\gamma \; L_{\gamma,g} ; \tag{2}$$

2° *Que* g *croissant, il faut que* γ, *et par conséquent* s *deviennent de plus en plus grands, pour obtenir par les formules* (1 *et* (2 *des valeurs suffisamment approchées;*

3° *Que l'on pourra, à l'aide de tables, préciser les approximations correspondantes aux formules* (1 *et* (2 ;

4° *Concevoir* s *assez grand pour que l'on obtienne, quel que soit* g, *telle approximation que l'on voudra pour les valeurs de* P'_{2g}, *et* P'_{2g-1}.

Démonstration.

(A)

Considérons d'abord la formule (a), on aura évidemment

$$1 - K_\gamma \; H_{\gamma,g} + \frac{\delta}{s} \; [\, 1 - K_\gamma \; H_{\gamma,g} \,] \leqq 1.$$

d'où :

$$\frac{\delta}{s} \leqq \frac{K_\gamma \; H_{\gamma,g}}{1 - K_\gamma \; H_{\gamma,g}} = \alpha_{g,\gamma}.$$

Fesons $g = 1, 2, 3, 4....$

Nous aurons :

$$\frac{K_\gamma}{1 - K_\gamma} = \alpha_{1,\gamma}$$

$$\frac{K_\gamma \; (\gamma^2 + 1)}{1 - K_\gamma \; (\gamma^2 + 1)} = \alpha_{2,\gamma}$$

$$\frac{K_\gamma \left(\frac{\gamma^4}{1 \cdot 2} + \frac{\gamma^2}{1} + 1 \right)}{1 - K_\gamma \left(\frac{\gamma^4}{1 \cdot 2} + \frac{\gamma^2}{1} + 1 \right)} = \alpha_{3,\gamma}$$

$$\frac{K_\gamma \left(\frac{\gamma^6}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\gamma^4}{1 \cdot 2} + \frac{\gamma^2}{1} + 1 \right)}{1 - K_\gamma \left(\frac{\gamma^6}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\gamma^4}{1 \cdot 2} + \frac{\gamma^2}{1} + 1 \right)} = \alpha_{4,\gamma}$$

Fesons maintenant dans chacune de ces expressions

$$\gamma = 1;\ 2;\ 2,5;\ 3;\ 4;$$

nous trouverons aisément les systèmes des valeurs suivantes :

$\alpha_{1,1} = 0,581...$	$\alpha_{2,1} = 2,7...$	$\alpha_{3,1} = 11,4...$	$\alpha_{4,1} = 1,4...$
$\alpha_{1,2} = 0,018...$	$\alpha_{2,2} = 0,1008...$	$\alpha_{3,2} = 0,31...$	$\alpha_{4,2} = 0,76...$
$\alpha_{1,2\cdot5} = 0,0019...$	$\alpha_{2,2\cdot5} = 0,014...$	$\alpha_{3,2\cdot5} = 0,035...$	$\alpha_{4,2\cdot5} = 0,11...$
$\alpha_{1,3} = 0,00012...$	$\alpha_{2,3} = 0,0012...$	$\alpha_{3,3} = 0,0062...$	$\alpha_{4,3} = 0,021...$
$\alpha_{1,4} = 0,00000011...$	$\alpha_{2,4} = 0,0000019...$	$\alpha_{3,4} = 0,0000015..$	$\alpha_{4,4} = 0,00009...$

On voit par là que $\alpha_{g,\gamma}$, donc $\frac{\delta}{s}$, convergent vers zéro, quand γ croît, mais cette convergence n'est pas rapide quand g est un peu grand, (3, 4, etc.). Cela posé, si l'écart $x - m$ doit être renfermé dans les limites constantes $\pm\,\Delta$, on aura, abstraction faite du signe :

$$x - m < \Delta,$$

et par conséquent

$$\Delta = \frac{\gamma}{\sqrt{s}}\sqrt{k}$$

d'où :

$$\gamma = \frac{\Delta\sqrt{s}}{\sqrt{k}}. \tag{3}$$

Donc 1° si s est très-grand, alors γ, quelque petit que soit Δ, et quelque grand que soit g, conservera une valeur assez grande pour que la quantité correspondante $\alpha_{g,\gamma}$ soit très-petite, et pour que l'on puisse négliger par conséquent le terme de P'_{2g} affecté du facteur $\frac{\delta}{s}$.

2° Si g est un peu grand, il faut que s soit néanmoins assez grand pour que la valeur de γ déduite de (3, permette de négliger le terme en $\frac{\delta}{s}$. Il faut donc que le nombre des expériences soit d'autant plus grand que $2g$, qui, comme nous verrons plus tard, représente le nombre des inconnues x, sera plus grand.

3° Soit ρ la valeur de γ, déduite de l'équation (3 pour un Δ et un s donnés, si, en supposant construit une table des valeurs $\alpha_{g,\gamma}$, on trouve que pour un g également donné, la quantité $\alpha_{g,\rho}$ a ses n premiers chiffres décimaux égaux à des zéros, alors, en posant

$$P'_{2g} = 1 - K_\rho H_\rho,$$

les n premiers chiffres décimaux de cette expression seront exacts, et l'on pourra supprimer les autres comme étant trop faibles de plusieurs unités. On aura alors la valeur de P'_{2g} à moins de $\frac{1}{n}$ près. En effet, si les n premiers chiffres décimaux de $\alpha_{g,\rho}$ sont des zéros, en multipliant $\alpha_{g,\gamma}$ par la fraction $1 - K_\rho H_\gamma$, les n premiers chiffres décimaux du produit seront encore des zéros; il est donc clair que le produit

$$\frac{\delta}{s}(1 - K_\gamma H_\gamma) < \alpha_{g,\gamma}(1 - K_\gamma H_\gamma)$$

n'aura aucune influence sur les n premières décimales de la quantité $1 - K_\gamma\ H_\gamma$.

4° Si Δ et s ne sont pas donnés, il est clair qu'en multipliant convenablement le nombre s des observations, on pourra obtenir, à l'aide de l'équation (3, pour γ telle valeur ρ, et par conséquent pour P'_{2g} telle approximation que l'on voudra.

(B).

Considérons maintenant la formule (b), qui a lieu comme nous verrons plus tard, quand le nombre des inconnues x est impair, de la forme $2g - 1$. Nous avons d'abord évidemment :

$$P_\gamma - K_\gamma\, L_{\gamma,g} + \frac{\delta}{s}\,(P_\gamma - K_\gamma\, L_{\gamma,g}) \lesseqgtr 1.$$

Fesons, pour un moment,

$$a = P_\gamma = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t}\, dt,\ b = K_\gamma\, L_{\gamma,g},$$

il viendra :

$$\frac{\delta}{s} \leqq \frac{1-(a-b)}{a-b} = \frac{1-a}{a}\,[1 + \frac{b}{(a-b)(1-a)}].$$

Mais on a :

$$\frac{1-a}{a} = \frac{S_\gamma}{T_\gamma},\ 1-a = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, S_\gamma,$$

Il vient donc

$$\frac{\delta}{s} \leqq \frac{S_\gamma}{T_\gamma} \left\{ 1 + \frac{K_\gamma\, L_{g,\gamma}}{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\, S_\gamma\, (\frac{2}{\sqrt{\pi}}\, T_\gamma - K_\gamma\, L_{g,\gamma})} \right\} = \beta_{g,\gamma}.$$

Soit

$$G_{g,\gamma} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, T_\gamma - K_\gamma\, L_{g,\gamma},$$

$$V_{g,\gamma} = \frac{K_\gamma\, L_{g,\gamma}}{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\, S_\gamma\, G_{g,\gamma}},$$

nous aurons :

$$\beta_{g,\gamma} = \frac{S_\gamma}{T_\gamma}\,(1 + V_{g,\gamma}) = \alpha_\gamma\,(1 + V_{g,\gamma}).$$

Si nous fesons d'abord $g = 2, 3, 4$, il vient :

$$\beta_{2,\gamma} = \alpha_\gamma\,(1 + V_{2,\gamma})$$
$$\beta_{3,\gamma} = \alpha_\gamma\,(1 + V_{3,\gamma}),$$
$$\beta_{4,\gamma} = \alpha_\gamma\,(1 + V_{4,\gamma}).$$

Posons maintenant dans chacune de ces trois dernières équations, successivement

$$\gamma = 1;\ 2;\ 2{,}5;\ 3;\ 4;$$

nous trouverons les systèmes de valeurs suivantes :

$$\beta_{2,1} = 0{,}186 \times 44{,}83\ldots$$
$$\beta_{2,2} = 0{,}004 \times 17{,}9\ldots = 0{,}071\ldots$$
$$\beta_{2,2\cdot5} = 0{,}0004 \times 19{,}7\ldots = 0{,}0078\ldots$$
$$\beta_{2,3} = 0{,}0002 \times 26{,}7\ldots = 0{,}00053\ldots$$
$$\beta_{2,4} = 0{,}000004 \times 1{,}205\ldots = 0{,}000048\ldots$$

$$\beta_{3,1} = -\ 0{,}186 \times 19{,}7\ldots$$
$$\beta_{3,2} = 0{,}004 \times 79{,}5\ldots = 0{,}31\ldots$$
$$\beta_{3,2\cdot5} = 0{,}0004 \times 100{,}7\ldots = 0{,}0402\ldots$$
$$\beta_{3,3} = 0{,}00002 \times 182{,}08\ldots = 0{,}0036\ldots$$
$$\beta_{4,4} = 0{,}000004 \times 2{,}4\ldots = 0{,}0000096\ldots$$

$$\beta_{4,1} = -\ 0{,}186 \times 15{,}005\ldots$$
$$\beta_{4,2} = 0{,}004 \times 257{,}01\ldots = 1{,}028\ldots$$
$$\beta_{4,2\cdot5} = 0{,}0004 \times 275{,}01\ldots = 0{,}108\ldots$$
$$\beta_{4,3} = 0{,}00002 \times 393{,}81\ldots = 0{,}0079\ldots$$
$$\beta_{4,4} = 0{,}000004 \times 8{,}6\ldots = 0{,}0000034\ldots$$

On voit par là que $\beta_{g,\gamma}$, donc $\frac{\delta}{s}$, convergent vers zéro quand γ croit; cette convergence est d'autant moins rapide que g est plus grand. Cela posé, si l'écart $x - m$ doit être renfermé dans les limites $\pm\ \Delta$, supposées constantes, on aura, abstraction faite du signe :

$$x - m < \Delta,$$

et par conséquent

$$\Delta = \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{k}$$

d'où :

$$\gamma = \frac{\Delta \sqrt{s}}{\sqrt{k}} \tag{4}$$

Donc 1° si s est très-grand, alors γ, quelque petit que soit Δ, et quelque grand que soit g, conservera une valeur assez grande pour que la valeur de $\beta_{g,\gamma}$ correspondante à cette valeur de γ soit très-petite, et pour que l'on puisse négliger par conséquent le terme de P'_{2g-1} affecté du facteur $\frac{\delta}{s}$.

2° Si g est un peu grand, il faut que s soit encore assez grand pour que la valeur de γ déduite de (4 permette de négliger le terme en $\frac{\delta}{s}$.

3° Soit ρ la valeur de γ déduite de l'équation (4 pour un Δ et un s donnés, si, en supposant construit une table des valeurs $\beta_{g,\gamma}$, on trouve que les n premiers chiffres décimaux de $\beta_{g,\rho}$ sont des zéros, alors en posant

$$P'_{2g-1} = P_\gamma - K_\gamma\, L_{g,\gamma} \tag{5}$$

Les n premiers chiffres décimaux de cette valeur approchée seront exacts, et les autres pourront être négligés, comme étant trop faibles de plusieurs unités. L'on voit aussi que n doit être au moins égal à 1, c'est-à-dire, il faut que s soit au moins assez grand pour que la valeur $\gamma = \rho$ correspondante ait au moins son premier chiffre décimal égal à zéro; sans cela, il n'est plus permis de négliger le terme en $\frac{\delta}{s}$.

On a, en effet :

$$K_1\ L_{2,1} = 0,7357,\quad K_1\ L_{3,1} = 1,21385,\quad K_1\ L_{4,1} = 1,3979,$$
$$K_2\ L_{2,2} = 0,0722,\quad K_2\ L_{3,2} = 0,26740,\quad K_2\ L_{4,2} = 0,54214,$$
$$K_{2,5}\ L_{2,2\cdot 5} = 0,00965,\quad K_{2,5}\ L_{3,2\cdot 5} = 0,04990,\quad K_{2,5}\ L_{4,2\cdot 5} = 0,12458,$$
$$K_3\ L_{2,3} = 0,000740,\quad K_3\ L_{3,3} = 0,005182,\quad K_3\ L_{4,3} = 0,011120,$$
$$K_4\ L_{2,3} = 0,000000,\quad K_4\ L_{3,4} = 0,000011,\quad K_4\ L_{4,4} = 0,000035,$$

et par conséquent l'expression (5, pour $g = 2, 3, 4$, $\gamma = 1; 2; 2{,}5; 3; 4$, nous fournira les systèmes de valeurs :

$$\begin{aligned}
P_1 - K_1\ L_{2,1} &= 0,1070\\
P_2 - K_2\ L_{2,2} &= 0,92306\\
P_{2,5} - K_{2,5}\ L_{2,2\cdot 5} &= 0,98983\\
P_3 - K_3\ L_{2,3} &= 0,999231\\
P_4 - K_4\ L_{2,4} &= 0,999996.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_1 - K_1\ L_{3,1} &= -\ 0,3711\\
P_2 - K_2\ L_{3,2} &= 0,72792\\
P_{2,5} - K_{2,5}\ L_{3,2\cdot 5} &= 0,94958\\
P_3 - K_3\ L_{3,3} &= 0,994789\\
P_4 - K_4\ L_{3,4} &= 0,999985.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_1 - K_1\ L_{4,1} &= -\ 0,5552\\
P_2 - K_2\ L_{4,2} &= 0,45318\\
P_{2,5} - K_{2,5}\ L_{4,2\cdot 5} &= 0,87490\\
P_3 - K_3\ L_{4,3} &= 0,988851\\
P_4 - K_4\ L_{4,4} &= 0,999965.
\end{aligned}$$

Mais comme on a $\frac{\delta}{s} < \beta_{g,\gamma}$, il est clair que la valeur exacte de P'_{2g-1}, pourra s'écrire :

$$P'_{2g-1} = P_\gamma - K_\gamma\ L_{g,\gamma} + < \beta_{g,\gamma}\ (P_\gamma - K_\gamma\ L_{g,\gamma}).$$

Cette formule, en ayant égard aux valeurs ci-dessus de $\beta_{g,\gamma}$, et en y posant :

$$g = 2,\ \gamma = \begin{cases}1\\2\\2{,}5\\3\\4\end{cases},\ g = 3,\ \gamma = \begin{cases}1\\2\\2{,}5\\3\\4\end{cases},\ g = 4,\ \gamma = \begin{cases}1\\2\\2{,}5\\3\\4\end{cases},$$

conduira aux systèmes suivants de valeurs exactes :

$$\begin{aligned}
P'_3 &= 0,1170 + < 0,186 \times 0,44\ldots && \text{pour } g = 2,\ \gamma = 1\\
P'_3 &= 0,92306 + < 0,064\ldots && \text{»}\quad \gamma = 2\\
P'_3 &= 0,98983 + < 0,0069\ldots && \text{»}\quad \gamma = 2{,}5\\
P'_3 &= 0,999231 + < 0,00049\ldots && \text{»}\quad \gamma = 3\\
P'_3 &= 0,999996 + < 0,000039\ldots && \text{»}\quad \gamma = 4.
\end{aligned}$$

$P'_5 =$ » » pour $g = 3$, $\gamma = 1$
$P'_5 =$ » » » $\gamma = 2$
$P'_5 = 0{,}94958 + < 0{,}037\ldots$ » $\gamma = 2{,}5$
$P'_5 = 0{,}994789 + < 0{,}0029\ldots$ » $\gamma = 3$
$P'_5 = 0{,}999985 + < 0{,}0000089\ldots$ » $\gamma = 4.$

$P'_7 =$ » » pour $g = 4$, $\gamma = 1$
$P'_7 =$ » » » $\gamma = 2$
$P'_7 =$ » » » $\gamma = 2{,}5$
$P'_7 = 0{,}988851 + < 0{,}0069\ldots$ » $\gamma = 3$
$P'_7 = 0{,}999963 + < 0{,}0000029\ldots$ » $\gamma = 4.$

Si donc on ne veut conserver dans les approximations que les valeurs qui ont des chiffres décimaux exacts, on trouve les systèmes suivants :

$P'_3 = 0{,}9$ pour $g = 2$, $\gamma = 2$
$P'_3 = 0{,}98$ » $\gamma = 2{,}5$
$P'_3 = 0{,}999$ » $\gamma = 3$
$P'_3 = 0{,}9999$ » $\gamma = 4$

$P'_5 = 0{,}9$ pour $g = 3$, $\gamma = 2{,}5$
$P'_5 = 0{,}99$ » $\gamma = 3$
$P'_5 = 0{,}99998$ » $\gamma = 4$

$P'_7 = 0{,}98$ pour $g = 4$, $\gamma = 3$
$P'_7 = 0{,}99996$ » $\gamma = 4.$

Fesons des évaluations analogues pour la formule (a). A cet effet on a :

Pour $g = 1$, $\gamma = 1$, $1 - K_1\, H_{1,1} = 0{,}6321206$
» $\gamma = 2$, $1 - K_2\, H_{1,2} = 0{,}9816844$
» $\gamma = 2{,}5$, $1 - K_{2,5}\, H_{1,2\cdot 5} = 0{,}9980696$
» $\gamma = 3$, $1 - K_3\, H_{1,3} = 0{,}9998766$
» $\gamma = 4$, $1 - K_4\, H_{1,4} = 0{,}9999998875.$

Pour $g = 2$, $\gamma = 1$, $1 - K_1\, H_{2,1} = 0{,}2642420$
» $\gamma = 2$, $1 - K_2\, H_{2,2} = 0{,}9084220$
» $\gamma = 2{,}5$, $1 - K_{2,5}\, H_{2,2\cdot 5} = 0{,}9860046$
» $\gamma = 3$, $1 - K_3\, H_{2,3} = 0{,}9987660$
» $\gamma = 4$, $1 - K_4\, H_{2,4} = 0{,}9999980875$

Pour $g = 3$, $\gamma = 1$, $1 - K_1\, H_{3,1} = 0{,}0803015$
» $\gamma = 2$, $1 - K_2\, H_{3,2} = 0{,}7618972$
» $\gamma = 2{,}5$, $1 - K_{2,5}\, H_{3,2\cdot 5} = 0{,}9656389$
» $\gamma = 3$, $1 - K_3\, H_{3,3} = 0{,}9937683$
» $\gamma = 4$, $1 - K_4\, H_{3,4} = 0{,}9999984$

Pour $g = 4$, $\gamma = 1$, $1 - K_1 \, \Pi_{4,1} = 0{,}41139296$
» $\gamma = 2$, $1 - K_2 \, \Pi_{4,2} = 0{,}56775184$
» $\gamma = 2{,}5$, $1 - K_{2,5} \, \Pi_{4,2\cdot 5} = 0{,}89942616$
» $\gamma = 3$, $1 - K_3 \, \Pi_{4,3} = 0{,}97877352$
» $\gamma = 4$, $1 - K_4 \, \Pi_{4,4} = 0{,}9999077$.

Comme on a $\frac{\delta}{s} < \alpha_{g,\gamma}$, on trouve par la formule (a) :

$$P'_{2g} = 1 - K_\gamma \, \Pi_{g,\gamma} + < \alpha_{g,\gamma} \, (1 - K_\gamma \, \Pi_{g,\gamma}).$$

Si donc nous fesons dans cette formule successivement

$$g = 1,\ \gamma = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 2{,}5 \\ 3 \\ 4 \end{cases} \quad g = 2,\ \gamma = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 2{,}5 \\ 3 \\ 4 \end{cases} \quad g = 3,\ \gamma = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 2{,}5 \\ 3 \\ 4 \end{cases} \quad g = 4,\ \gamma = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 2{,}5 \\ 3 \\ 4 \end{cases}$$

nous trouverons, en ayant égard aux valeurs ci-dessus de $\alpha_{g,\gamma}$, les systèmes suivants :

Pour $g = 1$, $\gamma = 1$, on a $P'_2 = 0{,}6321206 + < 0{,}881 \; (0{,}632\ldots)$
» $\gamma = 2$, » $P'_2 = 0{,}9816844 + < 0{,}018\ldots$
» $\gamma = 2{,}5$, » $P'_2 = 0{,}9980696 + < 0{,}00189\ldots$
» $\gamma = 3$, » $P'_2 = 0{,}9993766 + < 0{,}000119\ldots$
» $\gamma = 4$, » $P'_2 = 0{,}9999998 + < 0{,}00000109\ldots$

Pour $g = 2$, $\gamma = 1$, on a $P'_4 =$ » »
» $\gamma = 2$, » $P'_4 =$ » »
» $\gamma = 2{,}5$, » $P'_4 = 0{,}9860046 + < 0{,}0138\ldots$
» $\gamma = 3$, » $P'_4 = 0{,}9987660 + < 0{,}00119\ldots$
» $\gamma = 4$, » $P'_4 = 0{,}999998 \;\; + < 0{,}00000199\ldots$

Pour $g = 3$, $\gamma = 1$, on a $P'_6 =$ » »
» $\gamma = 2$, » $P'_6 =$ » »
» $\gamma = 2{,}5$ » $P'_6 = 0{,}9656389 + < 0{,}033\ldots$
» $\gamma = 3$, » $P'_6 = 0{,}9937683 + < 0{,}0059\ldots$
» $\gamma = 4$, » $P'_6 = 0{,}9999984 + < 0{,}00000149\ldots$

Pour $g = 4$, $\gamma = 1$, on a $P'_8 =$ » »
» $\gamma = 2$, » $P'_8 =$ » »
» $\gamma = 2{,}5$, » $P'_8 =$ » »
» $\gamma = 3$, » $P'_8 = 0{,}9787752 + < 0{,}0205\ldots$
» $\gamma = 4$, » $P'_8 = 0{,}9999077 + < 0{,}000089\ldots$

Si nous ne voulons conserver que les valeurs approchées de P'_{2g} dans lesquelles tous les chiffres sont exacts, nous trouverons :

Pour $g = 1$, $\gamma = 2$, $P'_2 = 0{,}9$
» $\gamma = 2{,}5$, $P'_2 = 0{,}99$
» $\gamma = 3$, $P'_2 = 0{,}999$
» $\gamma = 4$, $P'_2 = 0{,}99999$

Pour $g = 2$, $\gamma = 2{,}5$, $P'_4 = 0{,}9$
» $\gamma = 3$, $P'_4 = 0{,}99$
» $\gamma = 4$, $P'_4 = 0{,}99999$

Pour $g = 3$, $\gamma = 2{,}5$, $P'_6 = 0{,}9$
» $\gamma = 3$, $P'_6 = 0{,}99$
» $\gamma = 4$, $P'_6 = 0{,}99999$

Pour $g = 4$, $\gamma = 3$, $P'_8 = 0{,}9$
» $\gamma = 4$, $P'_8 = 0{,}9999$

DEUXIÈME SECTION.

THÉORÈMES

DE

BAYES ET DE LAPLACE

SUR

LA PROBABILITÉ DES CAUSES.

Soit $y = f(x)$ la probabilité d'un évènement dépendant de l'inconnue x; x se nomme la cause de cet évènement. Ordinairement les valeurs inconnues de x sont renfermées entre deux limites $\alpha, < \beta$, et les probabilités de deux quelconque x_i, $x_{i'}$, de ces valeurs, seront évidemment proportionnelles aux fonctions $f(x_i)$, $f(x_{i'})$. Nous pouvons donc établir le théorème suivant dû à Bayes.

Théorème I.

$x = \begin{cases} b \\ a \end{cases}$ *désignant les limites de toutes les valeurs possibles de* x, *si* y = fx *est la probabilité de l'une quelconque des valeurs de* x, *regardée comme certaine, je dis que l'on aura une probabilité*

$$P = \frac{\int_\alpha^\beta y dx}{\int_a^b y dx},$$

que l'inconnue x *est comprise dans les limites* α *et* β.

Démonstration.

Comme x est susceptible de toutes les valeurs possibles comprises entre $a < b$, parmi lesquelles se trouvent les valeurs α et β, il est clair que ces valeurs constitueront la suite continue

$$a, a + da, a + 2da, \dots \alpha, \alpha + d\alpha, \alpha + 2d\alpha, \dots \beta, \dots b. \qquad (1)$$

A ces valeurs répondront les fonctions

$$f(a), f(a+da), f(a+2da), \ldots f(\alpha), f(\alpha+d\alpha), f(\alpha+2d\alpha), \ldots f(\beta), \ldots f(b). \qquad (2)$$

soient

$$p_a, p_{a+da}, p_{a+2da}, \ldots p_\alpha, p_{\alpha+d\alpha}, p_{\alpha+2d\alpha}, \ldots p_\beta, \ldots p_b$$

les probabilités de x correspondantes aux valeurs (1). Ces probabilités étant proportionnelles aux fonctions (2), nous aurons

$$p_a : p_{a+da} : p_{a+2da} : \ldots : p_\alpha : p_{\alpha+d\alpha} : p_{\alpha+2d\alpha} : \ldots : p_\beta : \ldots : p_b ::$$
$$f(a) : f(a+da) : f(a+2da) : \ldots : f(\alpha) : f(\alpha+d\alpha) : f(\alpha+2d\alpha) : \ldots : f(\beta) : \ldots : f(b),$$

d'où :

$$p_a + p_{a+da} + \ldots + p_b : p_\alpha + p_{\alpha+d\alpha} + p_{\alpha+2d\alpha} + \ldots + p_\beta :: f(a) + f(a+da) + \ldots + f(b) :$$
$$f(\alpha) + f(\alpha+d\alpha) + f(\alpha+2d\alpha) + \ldots + f(\beta),$$

mais on a évidemment :

$$p_a + p_{a+da} + p_{a+2da} + \ldots + p_b = 1,$$
$$p_\alpha + p_{\alpha+d\alpha} + p_{\alpha+2d\alpha} + \ldots + p_\beta = \mathrm{P};$$

on a donc :

$$1 : \mathrm{P} = f(a) + f(a+da) + f(a+2da) + \ldots + f(b) :$$
$$f(\alpha) + f(\alpha+d\alpha) + f(\alpha+2d\alpha) + \ldots + f(\beta)$$

d'où l'on tire, à cause de $d\alpha = da$:

$$\mathrm{P} = \frac{\{ f(\alpha) + f(\alpha+d\alpha) + f(\alpha+2d\alpha) + \ldots + f(\beta) \}\, d\alpha}{\{ f(a) + f(a+da) + f(a+2da) + \ldots + f(b) \}\, da}$$

$$= \frac{\int_\alpha^\beta fx dx}{\int_a^b fx dx} = \frac{\int_\alpha^\beta y dx}{\int_a^b y dx}.$$

Corollaire 1. La probabilité p d'une valeur unique de x est par conséquent exprimée par

$$p = \frac{y dx}{\int_a^b y dx}. \qquad (3)$$

Corollaire 2. Soit $z = \psi x$ la probabilité d'un évènement futur, due à la cause x, et $y = fx$ la probabilité d'un évènement observé, soit P_1 la probabilité de l'évènement futur en vertu de la cause dont la probabilité est la valeur p ci-dessus, nous aurons évidemment :

$$\mathrm{P}_i = pz = \frac{zy dx}{\int^b y dx}.$$

Donc si Π exprime la probabilité que l'évènement futur arrivera en vertu de l'une des causes $x = \begin{cases}\beta \\ \alpha\end{cases}$, nous aurons

$$\Pi = \frac{\int_\alpha^\beta zydx}{\int_a^b ydx}.$$

Laplace a démontré dans les mémoires de l'Académie des sciences pour 1783, puis avec un peu plus de clarté, à la page 402, (édition de 1847), de son traité des probabilités, un théorème sur la probabilité des causes, qu'il faut regarder comme un des résultats les plus généraux de la théorie des probabilités. Il renferme, en effet, comme cas particuliers, la plupart des propositions relatives aux probabilités à postériori, et nommément le théorème inverse de Bernoulli, ainsi que je le ferai voir tout-à-l'heure, après avoir démontré le théorème de Laplace. J'ai apporté des modifications notables à la démonstration de cette proposition, et quoique mes déductions procèdent au fond des idées de Laplace, elles sont à la fois plus claires et plus rigoureuses que celles de cet auteur.

Théorème II.

THÉORÈME DE LAPLACE.

x étant la cause inconnue d'un évènement composé, dont la probabilité est

$$y = (fx)^s,$$

si m *désigne la valeur de* x *qui rend* y *un maximum, je dis qu'en supposant* s *très-grand, on aura, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{s}$, une probabilité*

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-\tau^2} d\tau,$$

que l'inconnue, ou la cause x, *est comprise entre les limites*

$$m \pm \frac{\gamma}{\sqrt{-s\left(\frac{f''x}{2fx}\right)_m}} = m \pm \frac{\gamma}{\sqrt{-\left(\frac{d^2 \log y}{2dx^2}\right)_m}}.$$

Démonstration.

Soit $y = (fx)^s$ la probabilité d'un évènement en vertu de la cause x; si $x = \begin{cases}b \\ a\end{cases}$ sont les valeurs extrêmes de x déduites de l'équation

$$y = 0,$$

on pourra regarder ces valeurs comme les limites de toutes les valeurs possibles de x, et alors on aura, par le théorème de Bayes, une probabilité

$$P = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} y dx}{\int_{a}^{b} y dx},$$

que x est compris dans les limites α et β.

Soit donc m la valeur de x qui rend y un maximum, déduite de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

soit de plus λ une quantité telle que l'on ait :

$$x = \begin{cases} \beta = m + \lambda \\ \alpha = m - \lambda \end{cases},$$

on aura :

$$P = \frac{\int_{m-\lambda}^{m+\lambda} y dx}{\int_{a}^{b} y dx}.$$

Désignons par R_m ce que devient généralement une fonction R de x, lorsqu'on y remplace x par m, nous poserons

$$y = y_m e^{-t^2}, \tag{1}$$

expression dans laquelle y_m est la valeur maximum de y. On tire de cette équation

$$t^2 = \log y_m - \log y. \tag{2}$$

Mais la relation (1) fait voir que t devient zéro, quand y devient y_m, c'est-à-dire, quand x se change en m. Il est donc clair que t^2 est de cette forme :

$$t^2 = \log y_m - \log y = (x-m)^2 \left\{ A + B(x-m) + C(x-m)^2 + \ldots \right\}. \tag{3}$$

Soit :

$$u = \left\{ A + B(x-m) + C(x-m)^2 + \ldots \right\}^{-\frac{1}{2}}, \tag{4}$$

on aura :

$$x = m + ut;$$

En développant cette fonction par le théorème de Lagrange, on trouve :

$$x = m + u_m t + \frac{1}{1\cdot2}\left(\frac{d\cdot u^2}{dx}\right)_m + \frac{1}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{d^2\cdot u^3}{dx^2}\right)_m + \text{etc.} \tag{5}$$

Calculons d'abord les valeurs des coëfficients de t dans cette formule. A cet effet, on a successivement :

$$\log y = s \log fx, \quad \frac{d \log y}{dx} = s\,\frac{f'x}{fx},$$

$$\frac{d^2 \log y}{dx^2} = s\left\{\frac{f''x}{fx} - \left(\frac{f'x}{fx}\right)^2\right\},$$

$$\frac{d^3 \log y}{dx^3} = s\left\{\frac{f'''x}{fx} - 3\,\frac{f''x}{fx}\cdot\frac{f'x}{fx} + 2\left(\frac{f'x}{fx}\right)^3\right\},$$

$$\frac{d^4 \log y}{dx^4} = s\left\{\frac{f^{iv}x}{fx} - 4\,\frac{f'''x}{fx}\cdot\frac{f'x}{fx} + 5\,\frac{f''x}{fx}\left(\frac{f'x}{fx}\right)^2 - \left[\frac{f''x}{fx} + 4\left(\frac{f'x}{fx}\right)^2 + 2\left(\frac{f''x}{fx} - \frac{f'x^2}{fx^2}\right)\right]\left[\frac{f''x}{fx} - \frac{f'x^2}{fx^2}\right]\right\}, \text{ etc., etc.}$$

Si nous posons, dans ces formules, $x = m$, alors y devient un maximum, et l'on aura, par la condition du maximum :

$$\left(\frac{f'x}{fx}\right)_m = 0;$$

par conséquent les formules précédentes se changeront en celles-ci :

$$\left(\frac{d\log y}{dx}\right)_m = s\left(\frac{f'x}{fx}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d^2\log y}{dx^2}\right)_m = s\left(\frac{f''x}{fx}\right)_m,$$

$$\left(\frac{d^3\log y}{dx^3}\right)_m = s\left(\frac{f'''x}{fx}\right)_m,$$

$$\left(\frac{d^4\log y}{dx^4}\right)_m = s\left\{\left(\frac{f^{iv}x}{fx}\right)_m - 3\left(\frac{f''x}{fx}\right)^2_m\right\}, \text{ etc., etc.}$$

Différentions maintenant l'équation (5) deux fois, trois fois, etc., et posons $x = m$ après les différentiations, nous trouverons :

$$A = -\frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{d^2\log y}{dx^2}\right)_m = -\frac{s}{1\cdot 2}\left(\frac{f''x}{fx}\right)_m,$$

$$B = -\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{d^3\log y}{dx^3}\right)_m = -\frac{s}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{f'''x}{fx}\right)_m,$$

$$C = -\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{d^4\log y}{dx^4}\right)_m = -\frac{s}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left[\left(\frac{f^{iv}x}{fx}\right)_m - 3\left(\frac{f''x}{fx}\right)^2_m\right], \text{ etc., etc.}$$

On a d'un autre côté :

$$u = \left\{A + B(x-m) + C(x-m)^2 + \text{etc.}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$u^2 = A^{-1} - A^{-2}\left\{B + C(x-m) + \ldots\right\}(x-m),$$

$$u^3 = A^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}A^{-\frac{5}{2}}B(x-m) + \left\{-\frac{3}{2}A^{-\frac{5}{2}}C + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}A^{-\frac{7}{2}}B^2\right\}(x-m)^2 + \text{etc., etc.}$$

d'où l'on conclut

$$u_m = A^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{A}} = \frac{1}{\sqrt{-s\left(\frac{f''x}{2fx}\right)_m}},$$

$$\left(\frac{d\cdot u^2}{dx}\right)_m = -\mathrm{A}^{-2}\,\mathrm{B} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\left(\frac{f'''x}{fx}\right)_m}{s\left(\frac{f''x}{fx}\right)_m},$$

$$\left(\frac{d^2\cdot u^3}{dx^2}\right)_m = -3\,\mathrm{A}^{-\frac{5}{2}}\,\mathrm{C} + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 4}\,\mathrm{A}^{-\frac{7}{2}}\,\mathrm{B}^2$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{s\sqrt{s}}\left\{\frac{\left(\frac{f^{\text{iv}}x}{fx}\right)_m}{\left(\frac{f''x}{fx}\right)_m\sqrt{\left(\frac{f''x}{fx}\right)_m}} - 3\sqrt{\left(\frac{f''x}{fx}\right)_m} - \frac{5}{6}\cdot\frac{\left(\frac{f'''x}{fx}\right)_m}{\left(\frac{f''x}{fx}\right)_m^3\sqrt{\left(\frac{f''x}{fx}\right)_m}}\right\},$$

etc., etc.

Ces expressions font voir que les termes

$$u_m,\ \left(\frac{d\cdot u^2}{dx}\right)_m,\ \left(\frac{d^2\cdot u^3}{dx^2}\right)_m,\ \text{etc.}$$

sont respectivement de l'ordre

$$\frac{1}{\sqrt{s}},\ \left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)^2,\ \left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)^3,\ \text{etc.}$$

Cela posé, soit

$$x = m + u_m\,\tau, \tag{6}$$

alors aux limites

$$x = \begin{cases} m+\lambda \\ m-\lambda \end{cases},\ \text{répondront les limites}\ \tau = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{u_m} = \gamma \\ -\dfrac{\lambda}{u_m} = -\gamma; \end{cases}$$

et la formule (5), en y mettant pour x sa valeur (6), deviendra :

$$\tau = t + \frac{1}{u_m}\left(\frac{d\cdot u^2}{1\cdot 2\,dx}\right)_m t^2 + \frac{1}{u_m}\left(\frac{d^2\cdot u^3}{1\cdot 2\cdot 3\,dx^2}\right)_m t^3 + \text{etc.} \tag{7}$$

Mais quand on a

$$x = y + by^2 + cy^3 + \text{etc.}$$

il vient, par le retour des suites :

$$y = x - bx^2 + (2b^2 - c)\,x^3 - \text{etc.}$$

Soit donc

$$b = \frac{1}{u_m}\left(\frac{d\cdot u^2}{1\cdot 2\,dx}\right)_m,\ \mathrm{C} = \frac{1}{u_m}\left(\frac{d^2u^3}{1\cdot 2\cdot 3\,dx^2}\right)_m,\ \text{etc.}$$

Nous aurons, à la place de la formule (7), la suivante :

$$t = \tau - \frac{1}{u_m}\left(\frac{d\cdot u^2}{1\cdot 2\,dx}\right)_m \tau^2 + \left[2\cdot\frac{1}{u_m^2}\left(\frac{d\cdot u^2}{1\cdot 2\,dx}\right)_m - \frac{1}{u_m}\left(\frac{d^2\cdot u^3}{1\cdot 2\cdot 3\,dx^2}\right)_m\right]\tau^3 - \text{etc.};$$

d'où :

$$t^2 = \tau^2 - \frac{1}{u_m}\left(\frac{d\cdot u^2}{dx}\right)_m \tau^3 + \left[\frac{5}{u_m^2}\left(\frac{d\cdot u^2}{2\,dx}\right)_m^2 - \frac{1}{3\,u_m}\left(\frac{d^2\cdot u^3}{dx^2}\right)\right]\tau^4 + \text{etc.}$$

Observons que les coëfficients de τ^3, τ^4, etc., dans cette dernière formule, sont respectivement de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{s}}$, $(\frac{1}{\sqrt{s}})^2$, etc. Posons donc pour abréger :

$$\frac{1}{u_m}\left(\frac{d\cdot u^2}{dx}\right)_m = -\frac{r_1}{\sqrt{s}},\ \frac{3}{u_m^2}\left(\frac{d\cdot u^2}{2\,dx}\right)_m^2 - \frac{1}{3u_m}\left(\frac{d^2\cdot u^3}{dx^2}\right)_m = \frac{r^2}{s}, \text{ etc.,}$$

Nous aurons :

$$t^2 = \tau^2 + \frac{r_1}{\sqrt{s}}\tau^3 + \frac{r_2}{s}\tau^4 + \frac{r_3}{s\sqrt{s}}\tau^5 + \frac{r_4}{s^2}\tau^6 + \dots$$

comme à $y = o$ répondent $x = \begin{cases} b \\ a \end{cases}$, il est clair, par l'équation (1), qu'à $y = o$, répondront aussi $t = \begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases}$, et par conséquent $\tau = \begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases}$. On a donc:

$$\text{P} = \frac{\int_{m-\lambda}^{m+\lambda} y dx}{\int_a^b y dx}$$

$$= \frac{\int_{m-\lambda}^{m+\lambda} y_m e^{-t^2} dx}{\int_{-\alpha}^{\alpha} y_m e^{-t^2} dx}$$

$$= \frac{\int_{-\gamma}^{\gamma} y_m e^{-\tau^2 + \frac{r_1}{\sqrt{s}}\tau^3 + \frac{r_2}{s}\tau^4 + \frac{r_3}{s\sqrt{s}}\tau^5 + \frac{r_4}{s^2}\tau^6 + \dots} \frac{dx}{d\tau} d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} y_m e^{-\tau^2 + \frac{r_1}{\sqrt{s}}\tau^3 + \frac{r_2}{s}\tau^4 + \frac{r_3}{s\sqrt{s}}\tau^5 + \frac{r_4}{s^2}\tau^6 + \dots} \frac{dx}{d\tau} d\tau}$$

Mais de $x = m + u_m \tau$ on déduit $\frac{dx}{d\tau} = u_m$, on a donc :

$$\text{P} = \frac{y_m\, u_m \int_{-\gamma}^{\gamma} e^{-\tau^2} d\tau \left(1 + \frac{r_1}{\sqrt{s}}\tau^3 + \frac{r_2}{s}\tau^4 + \frac{r_3}{s\sqrt{s}}\tau^5 + \frac{r_4}{s^2}\tau^6 + \dots\right)}{y_m\, u_m \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau \left(1 + \frac{r_1}{\sqrt{s}}\tau^3 + \frac{r_2}{s}\tau^4 + \frac{r_3}{s\sqrt{s}}\tau^5 + \frac{r_4}{s^2}\tau^6 + \dots\right)}$$

$$= \frac{y_m\, u_m \cdot \text{N}}{y_m\, u_m \cdot \text{D}} = \frac{\text{N}}{\text{D}}.$$

Mais on a généralement :

$$\int_{-\gamma}^{\gamma} e^{-t^2}\, dt \cdot t^{2i+1} = 0$$

$$\int_{-\gamma}^{\gamma} e^{-t^2}\, dt \cdot t^{2i} = -e^{-\gamma^2}\left\{\gamma^{2i-1} + \frac{2i-1}{2}\gamma^{2i-3} + \ldots + \frac{(2i-1)(2i-3)\cdot 5\cdot 3}{2^{i-1}}\right\}$$

$$+ \frac{1\cdot 3\ldots 2i-1}{2^i}\int_{-\gamma}^{\gamma} e^{-t^2}\, dt,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt \cdot t^{2i} = \frac{1\cdot 3\ldots(2i-1)}{2^i}\sqrt{\pi} \quad ;$$

on a donc

$$N = \int_{-\gamma}^{\gamma} e^{-\tau^2}\, d\tau + \frac{r_2}{s}\int_{-\gamma}^{\gamma} \tau^4 e^{-\tau^2}\, d\tau + \frac{r_4}{s^2}\int_{-\gamma}^{\gamma} \tau^6 e^{-\tau^2}\, d\tau + \text{etc.}$$

$$= \int_{-\gamma}^{\gamma} e^{-\tau^2}\, d\tau\left\{1 + \frac{r_2}{s}\cdot\frac{1\cdot 3}{2^2} + \frac{r_4}{s^2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3} + \ldots\right\}$$

$$-\frac{1}{s}\left\{r_2 e^{-\gamma^2}\left(\gamma^3 + \frac{3}{2}\gamma\right) + \frac{r_4}{s}\cdot e^{-\gamma^2}\left(\gamma^5 + \frac{5}{2}\gamma^3 + \frac{5\cdot 3}{2^2}\gamma\right) + \ldots\right\}.$$

Posons

$$r_2\cdot\frac{1\cdot 3}{2^2} + \frac{r_4}{s}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3} + \text{etc.} = \delta,$$

$$r_2 e^{-\gamma^2}\left(\gamma^3 + \frac{3}{2}\gamma\right) + \frac{r_4}{s} e^{-\gamma^2}\left(\gamma^5 + \frac{5}{2}\gamma^3 + \frac{5\cdot 3}{2^2}\gamma\right) + \ldots = \delta^1 \;;$$

nous aurons :

$$N = \int_{-\gamma}^{\gamma} e^{-\tau^2}\, d\tau\left\{1 + \frac{\delta}{s}\right\} - \frac{\delta^1}{s}$$

$$= \int_{-\gamma}^{\gamma} e^{-\tau^2}\, d\tau + \frac{1}{s}\int_{-\gamma}^{\gamma} e^{-\tau^2}\, d\tau\left\{\delta - \frac{\delta^1}{\int_{-\gamma}^{\gamma} e^{-\tau^2}\, d\tau}\right\}$$

Soit

$$\delta - \frac{\delta^1}{\int_{-\gamma}^{\gamma} e^{-\tau^2}\, d\tau} = \varepsilon,$$

il vient :

$$N = \int_{-\gamma}^{\gamma} e^{-\tau^2}\, d\tau\left\{1 + \frac{\varepsilon}{s}\right\}.$$

On a ensuite:

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau + \frac{r_2}{s} \int_{-\infty}^{\infty} \tau^4 e^{-\tau^2} d\tau + \frac{r_4}{s^2} \int_{-\infty}^{\infty} \tau^6 e^{-\tau^2} d\tau + \dots$$

$$= \sqrt{\pi} \left\{ 1 + \frac{1}{s} \left(r_2 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2^2} + \frac{r_4}{s} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3} + \dots \right) \right\}$$

$$= \sqrt{\pi} \left\{ 1 + \frac{\delta}{s} \right\}.$$

Il vient donc

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\int_{-\gamma}^{\gamma} e^{-\tau^2} d\tau \left(1 + \frac{\varepsilon}{s}\right)}{\left(1 + \frac{\delta}{s}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\gamma}^{\gamma} e^{-\tau^2} d\tau \left(1 + \frac{\varepsilon}{s}\right) \left(1 + \frac{\delta}{s}\right)^{-1}.$$

Mais le produit $\left(1 + \frac{\varepsilon}{s}\right)\left(1 + \frac{\delta}{s}\right)^{-1}$, conduit évidemment à une série de la forme

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{s}\right)\left(1 + \frac{\delta}{s}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{s}\left(a + \frac{b}{s} + \frac{c}{s^2} + \dots\right).$$

Si donc nous posons

$$a + \frac{b}{s} + \frac{c}{s^2} + \dots = \eta,$$

nous aurons finalement:

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\gamma}^{\gamma} e^{-\tau^2} d\tau \left(1 + \frac{\eta}{s}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\gamma}^{\gamma} e^{-\tau^2} d\tau + \frac{\eta}{s} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\gamma}^{\gamma} e^{-\tau^2} d\tau. \qquad (a)$$

C'est la probabilité que x est compris entre $m \pm \lambda = m \pm \gamma u_m$

$$= m \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{-\left(\frac{f''x}{2fx}\right)_m}}.$$

Nous pouvons donc, conformément au théorème 1 de la première section, concevoir s assez grand pour que nous puissions négliger $\frac{\eta}{s}$ comme insensible. Alors on aura, à moins de quantités près de l'ordre $\frac{1}{s}$:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt.$$

Remarque. Observons 1° que γ, donc P, restant constant, les limites

$$m \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{-\left(\frac{f''x}{2fx}\right)}}$$

se resserreront quand s croît.

2° L'intervalle des limites restant constant, ce qui exige que γ augmente, quand s croît, la probabilité P s'approchera de l'unité de plus en plus, à mesure que s augmentera.

3° On peut donc, en augmentant s, resserrer à la fois les limites, et augmenter P; pour $s = \infty$, on aura $x = m$, $P = 1$.

Théorème III.

THÉORÈME INVERSE DE BERNOULLI.

x *et* 1 — x *désignant les probabilités simples et inconnues de deux évènements contraires* A *et* B, *en supposant que* A *arrive* p *fois*, *et* B q *fois en un très-grand nombre* $\mu = p + q$ *d'épreuves*, *je dis qu'on aura la probabilité*

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-\tau^2} d\tau$$

que x *est compris entre*

$$\frac{p}{\mu} + \frac{\gamma}{\mu} \sqrt{\frac{2pq}{\mu}}.$$

Démonstration.

L'évènement A arrivant p fois, l'évènement B q fois en $\mu = p + q$ coups, la probabilité de cela, en vertu de la cause x, sera :

$$\frac{\mu!}{p!\,q!} x^p (1-x)^q = \frac{\mu!}{p!\,q!} y.$$

De l'équation

$$y = x^p (1-x)^q = o,$$

on tire $x = \begin{cases} 1 \\ o \end{cases}$; ce sont les limites entre lesquelles sont comprises toutes les valeurs possibles de x.

Soit P la probabilité que l'inconnue x est comprise entre deux limites α et β, on aura, par le théorème de Bayes :

$$P = \frac{\int_\alpha^\beta y dx}{\int_0^1 y dx}.$$

p et q étant de très-grands nombres de l'ordre μ, en écrivant

$$y = x^p (1-x)^q = [x (1-x)^{\frac{q}{p}}]^p,$$

et en comparant cette expression à la valeur de y du théorème précédent, on trouve

$$s = p,\ fx = x (1-x)^{\frac{p}{p}}.$$

Comme l'équation

$$\frac{dy}{dx} = x^{p-1} (1-x)^{q-1} [p - (p+q)x] = o,$$

conduit à

$$x = \frac{p}{p+q} = \frac{p}{\mu},$$

nous aurons ici :

$$m = \frac{p}{\mu}.$$

On a de plus :

$$\log y = p \log x + q \log (1-x),$$

$$-\frac{d^2 \log y}{dx^2} = \frac{p}{x^2} + \frac{q}{(1-x)^2};$$

il vient par conséquent :

$$-\left(\frac{d^2 \log y}{2dx^2}\right)_m = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{\frac{p^2}{(p+q)^2}} + \frac{q}{\left(1-\frac{p}{p+q}\right)^2}\right) = \frac{(p+q)^3}{2pq} = \frac{\mu^3}{2pq}.$$

Nous avons donc, par le théorème de Laplace, une probabilité

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-\tau^2} d\tau$$

que x est comprise entre

$$\frac{p}{\mu} \pm \gamma \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu^3}{2pq}}} = \frac{p}{\mu} \pm \frac{\gamma}{\mu} \sqrt{\frac{2pq}{\mu}}.$$

Remarque. En fesant usage de la formule de Fourier

$$\varphi x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\, e^{u(t-x)\sqrt{-1}}\, du dt, \qquad (*)$$

on peut établir très rigoureusement le théorème direct de Bernoulli sur les épreuves répétées, ainsi que nous allons le faire voir, sans prendre pour base le développement du binome, dont il est difficile de se faire une idée dans le cas de continuité.

(*) Voir la note à la fin de l'ouvrage.

Théorème IV.

THÉORÈME DIRECT DE BERNOULLI.

x, et 1 — x étant les probabilités simples, supposées constantes et connues des évènements contraires A et B, le rapport $\frac{m}{s}$ du nombre de fois m que A arrivera le plus probablement en un très-grand nombre s d'épreuves, à ce nombre s, est, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{s}$, compris entre les limites

$$x \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{2x(1-x)},$$

avec une probabilité

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi s x (1-x)}}.$$

Démonstration.

La probabilité $Q_{m+l} = \varphi(\lambda)$ pour A d'arriver

$$\lambda = m + l$$

fois en μ épreuves, est évidemment le coëfficient de ν^λ dans le développement de $(1 - x + x\nu)^s$. Mais ce coëfficient étant indépendant de ν, on peut faire $\nu = e^{\theta\sqrt{-1}}$, et alors la probabilité $\varphi(\lambda)$ sera le coëfficient de $e^{\lambda\theta\sqrt{-1}}$ dans le développement de la fonction

$$X = (1 - x + xe^{\theta\sqrt{-1}})^s = [1 - x(1 - e^{\theta\sqrt{-1}})]^s = \Sigma\,\varphi(\lambda)\, e^{\lambda\theta\sqrt{-1}}.$$

Pour passer au cas de continuité, supposons que s soit divisé en une infinité de parties égales à $d\lambda$ prise pour unité, alors en multipliant la fonction précédente par $d\lambda = 1$, nous pourrons poser évidemment

$$X = \Sigma\,\varphi(\lambda)\, e^{\lambda\theta\sqrt{-1}} = \int \phi(\lambda)\, e^{\lambda\theta\sqrt{-1}}\, d\lambda. \tag{1}$$

Les limites des intégrales sont sous-entendues, ce sont les limites extrêmes de toutes les valeurs possibles de λ.

Multiplions l'équation (1) par $e^{-\lambda\theta\sqrt{-1}}\, d\theta$, puis intégrons entre les limites $\pm\infty$, nous aurons, par une formule bien connue de Fourier :

$$\int_{-\infty}^{\infty} X d\theta e^{-\lambda\theta\sqrt{-1}}\, d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} d\theta\, e^{-\lambda\theta\sqrt{-1}} \int \varphi(\lambda)\, d\lambda \cdot e^{\lambda\theta\sqrt{-1}} = 2\pi\varphi(\lambda)$$

d'où :

$$\varphi(\lambda) = Q_{m+l} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta\, e^{-(m+l)\theta\sqrt{-1}}\, X$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-l\theta\sqrt{-1}}\, d\theta \cdot X e^{-m\theta\sqrt{-1}}.$$

Pour effectuer l'intégration il faut d'abord évaluer le facteur

$$X e^{-m\theta\sqrt{-1}} = e^{-m\theta\sqrt{-1}} \left[1 - x(1 - e^{\theta\sqrt{-1}})\right].$$

A cet effet on a :

$$\begin{aligned}
\log X e^{-m\theta\sqrt{-1}} &= -m\theta\sqrt{-1} + s \log\left[1 - x(1 - e^{\theta\sqrt{-1}})\right] \\
&= -m\theta\sqrt{-1} + s\left\{ -x(1 - e^{\theta\sqrt{-1}}) - \frac{1}{2}x^2(1 - e^{\theta\sqrt{-1}})^2 - \right. \\
&\qquad \left. \frac{1}{3}x^3(1 - e^{\theta\sqrt{-1}})^3 - \text{etc.} \right\} \\
&= -m\theta\sqrt{-1} + s\left\{ -x(1 - e^{\theta\sqrt{-1}}) - \frac{1}{2}x^2(1 - 2e^{\theta\sqrt{-1}} + e^{2\theta\sqrt{-1}}) \right. \\
&\qquad - \frac{1}{3}x^3(1 - 3e^{\theta\sqrt{-1}} + \\
&\qquad 3e^{2\theta\sqrt{-1}} - e^{3\theta\sqrt{-1}}) \\
&\qquad \left. - \text{etc.} \right\}
\end{aligned}$$

Si nous développons les exponentielles par la formule

$$e^{i\theta\sqrt{-1}} = 1 + i\theta\sqrt{-1} - \frac{i^2\theta^2}{2} - \frac{i^3\theta^3\sqrt{-1}}{6} + \frac{i^4\theta^4}{24} + \text{etc.},$$

nous trouverons, en ordonnant :

$$\log X e^{-m\theta\sqrt{-1}} = (sx - m)\theta\sqrt{-1} - \frac{s\theta^2}{2}(x - x^2) -$$

$$s\left\{x - 3x^2 + 2x^3\right\}\frac{\theta^3\sqrt{-1}}{6} + \text{etc.}$$

Posons, pour abréger,

$$sR = -\frac{s\theta^3\sqrt{-1}}{6}\left\{x - 3x^2 + 2x^3\right\} + \text{etc.}$$

puis

$$m = sx,$$

nous aurons, en passant aux nombres :

$$\begin{aligned}
X e^{-m\theta\sqrt{-1}} &= e^{-\frac{s\theta^2}{2}(x - x^2)} \cdot e^{sR} \\
&= e^{-\frac{s\theta^2}{2}(x - x^2)}(1 + sR + \text{etc.}).
\end{aligned}$$

En substituant cette valeur dans l'expression ci-dessus, nous obtiendrons :

$$Q_{m+l} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\theta\, e^{-\left[l\theta\sqrt{-1} + \frac{s(x - x^2)}{2}\theta^2\right]}(1 + sR + \text{etc.}).$$

Completons le carré dans l'exposant de e, nous aurons:

$$Q_{m+l} = \frac{e^{-\frac{l^2}{2sx(1-x)}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \cdot e^{-\left[\frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{2sx(1-x)}} + \theta\sqrt{\frac{sx(1-x)}{2}}\right]^2} (1 + sR + \text{etc.}).$$

Posons

$$\frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{2sx(1-x)}} + \theta\sqrt{\frac{sx(1-x)}{2}} = u,$$

d'où :

$$\theta = u\sqrt{\frac{2}{sx(1-x)}} - \frac{l\sqrt{-1}}{sx(1-x)}.$$

Si nous substituons cette valeur de θ dans l'expression ci-dessus de sR + etc., il n'y aura que les termes aux puissances impaires de u qui resteront affectés de $\sqrt{-1}$, termes qui disparaîtront par l'intégration. Nommons R_1 ce que devient R par le changement de θ en u, nous aurons :

$$Q_{m+l} = \frac{e^{-\frac{l^2}{2sx(1-x)}}}{\pi\sqrt{2sx(1-x)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du\,(1 + sR_1 + \text{etc.}).$$

En effectuant les intégrations par les formules

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{2i+1}\, e^{-t^2}\, dt = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{2i}\, e^{-t^2}\, dt = \frac{1\cdot 3\ldots(2i-1)}{2^i}\sqrt{\pi},$$

les divers termes ordonnés constitueront une série progressant suivant les exposants croissants de $\frac{1}{s}$, et l'on aura évidemment un résultat de cette forme :

$$Q_{m+l} = \frac{e^{-\frac{l^2}{2sx(1-x)}}}{\pi\sqrt{2sx(1-x)}}\sqrt{\pi}\left\{1 + \frac{1}{s}\left(a + \frac{b}{s} + \frac{c}{s^2} + \ldots\right)\right\}$$

Soit

$$a + \frac{b}{s} + \frac{c}{s^2} + \ldots = \delta,$$

nous aurons :

$$Q_{m+l} = \frac{e^{-\frac{l^2}{2sx(1-x)}}}{\sqrt{2\pi sx(1-x)}}\left\{1 + \frac{\delta}{s}\right\}.$$

En changeant l en $-l$, on trouvera de même :

$$Q_{m-l} = \frac{e^{-\frac{l^2}{2sx(1-x)}}}{\sqrt{2\pi sx(1-x)}}\left(1+\frac{\delta}{s}\right),$$

et par conséquent

$$Q_{m+l} + Q_{m-l} = \frac{2e^{-\frac{l^2}{2sx(1-x)}}}{\sqrt{2\pi sx(1-x)}}\left(1+\frac{\delta}{s}\right).$$

Soit

$$g = \frac{1}{\sqrt{2sx(1-x)}},$$

on aura :

$$Q_{m+l} + Q_{m-l} = \frac{2g}{\sqrt{\pi}}\, e^{-g^2l^2}\left(1+\frac{\delta}{s}\right) = \psi(l),$$

$$Q_m = \frac{g}{\sqrt{\pi}}\left(1+\frac{\delta}{s}\right) = \frac{1}{2}\,\psi(o).$$

Cela posé, la probabilité P que m est compris entre les limites $m \pm l$ aura pour valeur la somme

$$\begin{aligned} P &= Q_{m+l} + Q_{m+l-1} + \cdots + Q_{m+1} + Q_m + Q_{m-1} + \cdots + Q_{m-l+1} + Q_{m-l} \\ &= Q_{m+l} + Q_{m-l} + \overset{l-1}{\underset{0}{S}}\,[Q_{m+l} + Q_{m-l}] - Q_m \\ &= Q_{m+l} + Q_{m-l} + \overset{l}{\underset{0}{\Sigma}}\,[Q_{m+l} + Q_{m-l}] - Q_m \\ &= \psi(l) + \overset{l}{\underset{0}{\Sigma}}\,\psi(l) - \frac{1}{2}\,\psi(o). \end{aligned}$$

Mais on a :

$$\Sigma\,\psi(l) = c + \int \psi(l)\,dl - \frac{1}{2}\psi(l) + \frac{B_1}{1\cdot 2}\,\psi'(l) - \frac{B_3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,\psi'''l + \text{etc.},$$

formule dans laquelle B_1 B_3, etc., désignent les nombres bernoulliens.

On a de plus

$$\psi'(l) = -2g^2 l\,\psi(l),$$
$$\psi'''(l) = 4g^4 l\,(3 - 2g^2l^2)\,\psi(l),\ \text{etc., etc.}$$

Or g est de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{s}}$, l de l'ordre $\sqrt{s}$, $\psi(l)$ est au moins de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{s}}$; il suit de là que $\psi'(l)$ est de l'ordre $\frac{1}{s}$, $\psi'''l$ de l'ordre $\frac{1}{s^2}$, etc. Si donc nous prenons la formule sommatoire ci-dessus dans les limites de sa convergence, nous pourrons négliger les termes affectés des facteurs $\psi'(l)$, $\psi'''l$, etc., et poser simplement :

$$\Sigma\,\psi(l) = c + \int \psi(l)\,dl - \frac{1}{2}\,\psi(l).$$

Nous aurons alors

$$\sum_0^l \psi(l) = \int_0^l \psi(l)\,dl - \frac{1}{2}[\psi(l) - \psi(o)],$$

et par suite :

$$P = \psi(l) + \int_0^l \psi(l)\,dl - \frac{1}{2}[\psi(l) - \psi(o)] - \frac{1}{2}\psi(o)$$

$$= \frac{1}{2}\psi(l) + \int_0^l \psi(l)\,dl$$

$$= \left\{ \frac{g}{\sqrt{\pi}} e^{-(lg)^2} + \frac{2g}{\sqrt{\pi}} \int_0^l e^{-(lg)^2}\,dl \right\} \left(1 + \frac{\delta}{s}\right).$$

Soit $lg = \gamma$, il vient :

$$P = \left\{ \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi s x(1-x)}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-\gamma^2}\,d\gamma \right\} \left(1 + \frac{\delta}{s}\right).$$

Changeons γ en t sous le signe $\int$, nous aurons :

$$P = \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi s x(1-x)}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2}\,dt +$$

$$\frac{\delta}{s} \left\{ \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi s x(1-x)}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2}\,dt \right\}. \qquad (a)$$

C'est la probabilité que m est compris entre $sx \pm l$, ou la probabilité que $\frac{m}{s}$ est compris entre $x \pm \frac{l}{s} = x \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{2x(1-x)}.$

Nous pouvons donc, conformément au 2e théorème de la 1re section, attribuer à s une valeur suffisamment grande, pour que le terme $\frac{\delta}{s}$ soit insensible, et alors on aura :

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2}\,dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi s x(1-x)}}.$$

Remarque. Dans le théorème précédent de Bernoulli, on suppose que les probabilités simples données, ne varient pas d'une épreuve aux épreuves consécutives.

Poisson, dans le 3e chapitre de son ouvrage sur les probabilités, cherche la probabilité des limites qui renferment le nombre des répétitions d'un évènement en un grand nombre d'épreuves, quand les possibilités simples, ou les causes, varient d'une épreuve à la consécutive. Son analyse est assez compliquée, et il donne au résultat le nom de loi des grands nombres. Cependant M. Bienaymé a fait voir récemment qu'il n'en était rien de cette prétendue loi ; le résultat, en effet, auquel Poisson applique ce nom, n'est rien autre chose que le théorème de Bernoulli, dans le cas où les possibilités simples, c'est-à-dire les causes, bien que variables, peuvent être prises indifféremment dans un ensemble ou un système de causes constant. Je suis parvenu à la formule de Poisson par une analyse simple et rigoureuse, dont le développement fait l'objet du théorème suivant.

Théorème V.

THÉORÈME DE POISSON.

$x_1, x_2, \ldots x_s$ étant les probabilités simples, supposées variables, d'un évènement A, à la 1re, 2e, … se épreuve, en supposant connue la moyenne

$$\frac{Sx_i}{s} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_s}{s},$$

et la moyenne des carrés

$$\frac{Sx_i^2}{s} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_s^2}{s},$$

le rapport $\frac{m}{s}$ du nombre de fois m *que* A *arrivera en un très-grand nombre* s *d'épreuves, à ce nombre* s, *est, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{s}$, compris entre les limites*

$$\frac{Sx_i}{s} \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{2\frac{Sx_i(1-x_i)}{s}},$$

avec une probabilité

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2}\, dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi\, Sx_i(1-x_i)}}.$$

Démonstration.

Soit $\lambda = m + l$; on reconnait, par la fonction

$$X = (1 - x_1 + x_1 \nu)(1 - x_2 + x_2 \nu) \ldots (1 - x_s + x_s \nu)$$
$$= \Sigma\, Q_\lambda \nu^\lambda,$$

que $Q_\lambda = Q_{m+l}$ est la probabilité pour A d'arriver $\lambda = m + l$ fois en s épreuves. Comme Q_λ est fonction de λ, ne renfermant pas ν, nous pouvons poser

$$Q_\lambda = \varphi(\lambda),$$
$$\nu = e^{\theta\sqrt{-1}},$$
$$X = \Sigma \varphi(\lambda)\, e^{\lambda\theta\sqrt{-1}}.$$

Si nous supposons que le nombre s se compose d'une infinité de parties égales $d\lambda$, prises pour unités, nous aurons, en multipliant l'équation précédente par $1 = d\lambda$:

$$X = \int \varphi(\lambda)\, e^{\lambda\theta\sqrt{-1}}\, d\lambda, \qquad (1)$$

les limites sous-entendues de l'intégrale sont les valeurs extrêmes de toutes les valeurs possibles de λ.

Multiplions cette équation par $e^{-\lambda\theta\sqrt{-1}}\, d\theta$, et intégrons entre les limites $\pm\infty$, nous aurons, par une formule bien connue de Fourier :

$$\int_{-\infty}^{\infty} X e^{-\lambda\theta\sqrt{-1}}\, d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda\theta\sqrt{-1}}\, d\theta \int \varphi(\lambda)\, e^{\lambda\theta\sqrt{-1}}\, d\lambda = 2\pi\varphi(\lambda);$$

d'où :

$$Q_{m+l} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(m+l)\theta\sqrt{-1}}\, d\theta\, X$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-l\theta\sqrt{-1}}\, d\theta \cdot X e^{-m\theta\sqrt{-1}}$$

Pour effectuer l'intégration, il faut d'abord évaluer le facteur

$$A = X e^{-m\theta\sqrt{-1}}.$$

Désignons, en général, par $\Pi\,\{k_i\}$, le produit

$$\Pi\, k_i = k_1 \cdot k_2 \ldots k_s,$$

nous aurons :

$$X e^{-m\theta\sqrt{-1}} = e^{-m\theta\sqrt{-1}}\, \Pi\,[1 - x_i + x_i\,v]$$

$$= e^{-m\theta\sqrt{-1}}\, \Pi\,[1 - x_i(1 - e^{\theta\sqrt{-1}})].$$

On a donc aussi :

$$\log A = -m\theta\sqrt{-1} + S\log[1 - x_i(1 - e^{\theta\sqrt{-1}})]$$

$$= -m\theta\sqrt{-1} - Sx_i(1 - e^{\theta\sqrt{-1}}) - \frac{1}{2}Sx_i^2(1 - e^{\theta\sqrt{-1}})^2 - \frac{1}{3}Sx_i^3(1 - e^{\theta\sqrt{-1}})^3 - \text{etc.}$$

$$= -m\theta\sqrt{-1} - Sx_i(1 - e^{\theta\sqrt{-1}}) - \frac{1}{2}Sx_i^2(1 - 2e^{\theta\sqrt{-1}} + e^{2\theta\sqrt{-1}}) - \frac{1}{3}Sx_i^3(1 - 3e^{\theta\sqrt{-1}} + 3e^{2\theta\sqrt{-1}} - e^{3\theta\sqrt{-1}}) - \text{etc.}$$

Développons les exponentielles par la série

$$e^{i\theta\sqrt{-1}} = 1 + i\theta\sqrt{-1} - \frac{i^2\theta^2}{2} - \frac{i^3\theta^3\sqrt{-1}}{6} + \ldots$$

nous trouverons :

$$\log A = [Sx_i - m]\,\theta\sqrt{-1} - [Sx_i\,(1 - x_i)]\,\frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^3\sqrt{-1}}{6}\,\{Sx_i - 3\,Sx^2_i + 2\,Sx^3_i\} + \theta^4 M_4 + \theta^5 M_5 + \ldots$$

Posons, pour abréger,

$$R = -\frac{\theta^3\sqrt{-1}}{6}\,[Sx_i - 3\,Sx^2_i + 2\,Sx^3_i] + \theta^4 M_4 + \text{etc.}$$

$$= \theta^3 M_3 + \theta^4 M_4 + \theta^5 M_5 + \text{etc.},$$

puis

$$m = Sx_i\,,$$

nous aurons, en passant aux nombres :

$$A = e^{-\frac{\theta^2}{2}[Sx_i\,(1-x_i)]}\,.\,e^{R}$$

$$= e^{-\frac{\theta^2}{2}[Sx_i\,(1-x_i)]}\,(1 + R + \text{etc.})$$

En substituant cette valeur dans l'expression ci-dessus, nous obtiendrons :

$$Q_{m+l} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\theta\, e^{-\left\{l\theta\sqrt{-1} + \frac{\theta^2}{2}[Sx_i\,(1-x_i)]\right\}}\,(1 + R + \text{etc.}).$$

Complétons le carré dans l'exposant de e, nous aurons:

$$Q_{m+l} = \frac{e^{-\frac{l^2}{2Sx_i(1-x_i)}}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\theta\,.\,e^{-\left\{\frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{2Sx_i(1-x_i)}} + \theta\sqrt{\frac{Sx_i(1-x_i)}{2}}\right\}^2}\,(1 + R + \text{etc.}).$$

Posons

$$\frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{2Sx_i(1-x_i)}} + \theta\sqrt{\frac{Sx_i(1-x_i)}{2}} = u,$$

d'où :

$$\theta = \frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{Sx_i\,(1-x_i)}} - \frac{l\sqrt{-1}}{Sx_i\,(1-x_i)}.$$

Si nous substituons cette valeur de θ dans la série R + etc., il n'y aura que les termes aux puissances impaires de u qui seront affectés de $\sqrt{-1}$, et ces termes disparaîtront par l'intégration.

Nommons R_1, ce que devient R par le changement de θ en u, nous pourrons écrire :

$$Q_{m+l} = \frac{e^{-\frac{l^2}{2Sx_i(1-x_i)}}}{2\pi}\,.\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{Sx_i\,(1-x_i)}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du\,(1 + R_1 + \text{etc.}).$$

En effectuant les intégrations par les formules

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{2i+1}\, e^{-t^2}\, dt = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{2i}\, e^{-t^2}\, dt = \frac{1\cdot 3 \ldots (2i-1)}{2^i} \sqrt{\pi},$$

et en posant, pour abréger,

$$\sigma = \mathrm{S}x_i\,(1 - x_i),$$

les termes de la série $R_1 +$ etc., auront pour dénominateurs respectifs les termes de la suite

$$\sigma^2,\ \sigma^3,\ \sigma^4,\ \text{etc.}$$

Or σ étant de l'ordre s, comme exprimant une somme de s termes, tout au plus égaux à l'unité, nous pourrons poser

$$\sigma = s \cdot k. \tag{1}$$

De plus, les facteurs M_3, M_4, etc., qui multiplient θ^3, θ^4, etc., dans l'expression de R, sont tous de l'ordre s, car ils expriment des polynomes dont chaque terme est une somme de s termes égaux ou inférieurs à l'unité. Nous pouvons donc écrire

$$M_3 = s \cdot h_1,\ M_4 = s \cdot h_2,\ \text{etc.} \tag{2}$$

Si donc nous remplaçons dans la série

$$R_1 + \text{etc.},$$

après les intégrations, les quantités σ, M_3, M_4, etc., par leurs valeurs (1 et (2 ci-dessus, il est clair que cette série sera, après les intégrations, de la forme

$$\frac{\sqrt{\pi}}{s}\left(a + \frac{b}{s} + \frac{c}{s^2} + \ldots\right) = \sqrt{\pi} \cdot \frac{\delta}{s},$$

et que l'on aura par conséquent :

$$Q_{m+l} = \frac{e^{-\frac{l^2}{2\mathrm{S}x_i(1-x_i)}}}{2\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mathrm{S}x_i(1-x_i)}} \sqrt{\pi}\left(1 + \frac{\delta}{s}\right)$$

$$= \frac{e^{-\frac{l^2}{2\mathrm{S}x_i(1-x_i)}}}{\sqrt{2\pi\,\mathrm{S}x_i(1-x_i)}}\left(1 + \frac{\delta}{s}\right).$$

Changeons l en $-l$, il vient :

$$Q_{m-l} = \frac{e^{-\frac{l^2}{2\mathrm{S}x_i(1-x_i)}}}{\sqrt{2\pi\,\mathrm{S}x_i(1-x_i)}}\left(1 + \frac{\delta}{s}\right),$$

et par conséquent :

$$Q_{m+l} + Q_{m-l} = \frac{2e^{-\frac{l^2}{2\mathrm{S}x_i(1-x_i)}}}{\sqrt{2\pi\,\mathrm{S}x_i(1-x_i)}}\left(1 + \frac{\delta}{s}\right).$$

Soit pour abréger

$$g = \frac{1}{\sqrt{2\,\mathrm{S}x_i(1-x_i)}},$$

g sera de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{s}}$. Posons en outre

$$Q_{m+l} + Q_{m-l} = \psi(l),$$

$\psi(l)$ sera au moins de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{s}}$,

et nous aurons

$$Q_{m+l} + Q_{m-l} = \frac{2g}{\sqrt{\pi}}\, e^{-(lg)^2} \left(1 + \frac{\delta}{s}\right) = \psi(l),$$

$$Q_m = \frac{1}{2}\psi(o).$$

Cela posé, la probabilité P que m est compris entre $m \pm l$, est exprimée par la somme

$$P = Q_{m+l} + Q_{m+l-1} + \cdots + Q_{m+1} + Q_m + Q_{m-1} + \cdots + Q_{m-l+1} + Q_{m-l}$$

ou

$$P = Q_{m+l} + Q_{m-l} + \overset{l-1}{\underset{0}{\mathrm{S}}}\,[Q_{m+l} + Q_{m-l}] - Q_m,$$

$$= Q_{m+l} + Q_{m-l} + \overset{l}{\underset{0}{\Sigma}}\,[Q_{m+l} + Q_{m-l}] - Q_m$$

$$= \psi(l) + \overset{l}{\underset{0}{\Sigma}}\,\psi(l) - \frac{1}{2}\psi(o).$$

Mais on a :

$$\Sigma\,\psi(l) = c + \int \psi(l)\,dl - \frac{1}{2}\psi(l) + \frac{B_1}{1\cdot 2}\psi'(l) - \frac{B_3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\psi'''\,l + \text{etc.},$$

$$\psi'(l) = -2g^2\,l\,\psi(l),$$

$$\psi'''(l) = 4g^2\,l\,(3 - 2g^2\,l^2)\,\psi(l), \text{ etc.};$$

si donc on prend la série précédente dans les limites de sa convergence, on pourra négliger les termes en $\psi'\,l$, $\psi'''\,l$, etc. qui sont respectivement de l'ordre $\frac{1}{s}$, $\frac{1}{s^2}$. On aura ainsi :

$$\Sigma\,\psi(l) = c + \int \psi(l)\,dl - \frac{1}{2}\psi(l),$$

et par suite :

$$\overset{l}{\underset{0}{\Sigma}}\,\psi(l) = \int_0^l \psi(l)\,dl - \frac{1}{2}[\psi(l) - \psi(o)],$$

$$P = \psi(l) + \int_0^l \psi(l)\,dl - \frac{1}{2}[\psi(l) - \psi(o)] - \frac{1}{2}\psi(o)$$

$$= \frac{1}{2}\psi(l) + \int_0^l \psi(l)\,dl$$

$$= \left\{ \frac{g}{\sqrt{\pi}} e^{-(lg)^2} + \frac{2g}{\sqrt{\pi}} \int_0^l e^{-(lg)^2} dl \right\} (1 + \frac{\delta}{s}).$$

Soit $lg = \gamma$, il vient :

$$P = \left\{ \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi S x_i (1 - x_i)}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-\gamma^2} d\gamma \right\} (1 + \frac{\delta}{s}).$$

Changeons γ en t sous le signe $\int$, nous aurons :

$$P = \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi S x_i (1 - x_i)}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt +$$

$$\frac{\delta}{s} \left\{ \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi S x_i (1 - x_i)}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt \right\}. \qquad (a)$$

C'est la probabilité que m est compris entre

$$S x_i \pm l = S x_i \pm \frac{\gamma}{g}$$
$$= S x_i \pm \gamma \sqrt{2 S x_i (1 - x_i)}.$$

C'est donc aussi la probabilité que le rapport inconnu $\frac{m}{s}$ est compris entre les limites

$$\frac{S x_i}{s} \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{\frac{2 S x_i (1 - x_i)}{s}}.$$

On peut donc, conformément au théorème 2e de la 1re section, prendre s assez grand pour qu'on puisse négliger $\frac{\delta}{s}$ comme insensible, et alors on aura :

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi S x_i (1 - x_i)}}.$$

Remarque. Fesons voir maintenant comment les théorèmes directs de Bernoulli et de Poisson dépendent du théorème II de Laplace sur la probabilité des causes.

A cet effet, en fesant abstraction de la série $\frac{\delta}{s}$, qu'il est permis de négliger, nous avons

1° $$Q_{m+l} = y = \frac{e^{-\frac{l^2}{2s(1-x)x}}}{\sqrt{2\pi s x (1 - x)}} = M \cdot e^{-\frac{l^2}{2 s x (1-x)}} ;$$

c'est la probabilité que le nombre inconnu m des répétitions de l'évènement A en s épreuves, ait pour valeur $sx + l$. La valeur de l qui rend y un maximum trouvé par l'équation $\frac{dy}{dl} = o$, est $l = o$, ce qui donne pour le nombre m la valeur sx. On a de plus

$$\log y = \log \mathrm{M} - \frac{l^2}{2sx(1-x)};$$

donc :

$$-\frac{d^2 \log y}{2\,dl^2} = \frac{1}{2s(1-x)x}.$$

On a donc, par le théorème II de Laplace, une probabilité

$$\mathrm{P} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2}\,dt \qquad (\alpha)$$

que l'inconnue m est comprise dans les limites

$$sx \pm \frac{\gamma}{\sqrt{\frac{1}{2sx(1-x)}}} = sx \pm \gamma \sqrt{s}\,\sqrt{2x(1-x)},$$

ou que le rapport inconnu $\frac{m}{s}$ est compris dans les limites

$$x \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{2x(1-x)}.$$

2°
$$\mathrm{Q}_{m+l} = y = \frac{e^{-\frac{l^2}{2\mathrm{S}x_i(1-x_i)}}}{\sqrt{2\pi \mathrm{S}x_i(1-x_i)}} = \mathrm{M} \cdot e^{-\frac{l^2}{2\mathrm{S}x_i(1-x_i)}},$$

est la probabilité que A arrivera en s épreuves un nombre m fois, ayant pour valeur $\mathrm{S}x_i + l$. l'équation $\frac{dy}{dl} = o$, donne $l = o$, pour la valeur de l, donc $m = \mathrm{S}x_i$, pour la valeur de m, propres à rendre y un maximum. On a aussi :

$$\log y = \log \mathrm{M} - \frac{l^2}{2\mathrm{S}x_i(1-x_i)},$$

d'où :

$$-\frac{d^2 \log y}{2\,dl^2} = \frac{1}{2\mathrm{S}x_i(1-x_i)};$$

on a donc, par le théorème II de Laplace, une probabilité :

$$\mathrm{P} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2}\,dt \qquad (\beta)$$

que l'inconnue m est compris dans les limites

$$\mathrm{S}x_i \pm \frac{\gamma}{\sqrt{\frac{1}{2\mathrm{S}x_i(1-x_i)}}} = \mathrm{S}x_i \pm \gamma \sqrt{2\mathrm{S}x_i(1-x_i)},$$

ou que le rapport inconnu $\frac{m}{s}$ est compris entre

$$\frac{\mathrm{S}x_i}{s} \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{\frac{2\,\mathrm{S}x_i\,(1 - x_i)}{s}}.$$

Les formules (α et (β coïncident avec les expressions de Bernoulli et de Poisson, aux termes

$$\frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi s(1-x)x}}, \quad \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi\,\mathrm{S}x_i(1-x_i)}} \text{ près.}$$

Mais nous avons reconnu dans le 2e théorème de la 1re section que ces termes pouvaient se négliger, comme n'exerçant aucune influence sur les chiffres exacts de la probabilité P.

TROISIÈME SECTION.

THÉORIE DES ERREURS.

Laplace a donné le premier une théorie complète de la probabilité des erreurs dont restent affectées des grandeurs inconnues, conclues d'un grand nombre d'observations, et fondé les vrais principes de la règle des moindres carrés que Legendre avait trouvé empiriquement. Cependant M. Bienaymé a reconnu tout récemment que les formules de Laplace, dans le cas de plusieurs grandeurs inconnues, étaient défectueuses, et leur a substitué les vraies expressions qui régissent ce cas spécial des probabilités. « Les règles de Laplace ne donnaient l'erreur et la proba-
» bilité que chacune pouvait avoir que si elle était seule, et quelque grandes que fussent les
» erreurs des autres inconnues. Le théorème de M. Bienaymé, au contraire, sert à calculer
» la probabilité de l'ensemble des erreurs d'un système, qui ne peuvent en réalité être isolées
» les unes des autres. En effet, la probabilité que les erreurs restent dans certaines limites est
» le produit des probabilités séparées que chacune ne s'écarte pas de ses limites propres, et
» cette probabilité du concours des erreurs séparées, doit être inférieure à la probabilité de
» chacune considérée isolément. »

En reproduisant, dans cet essai, les théorèmes de Laplace et de M. Bienaymé, que je déduis d'une analyse plus simple et plus rigoureuse, je fais observer que ce ne sera qu'à partir de cette publication que la théorie des moindres carrés devra être considérée comme définitivement fondée, puisque je mets hors de doute la convergence des séries auxquelles conduisent ces sortes de recherches, et que je n'assigne d'avance aucune forme spéciale à la fonction inconnue par laquelle on représente la probabilité de l'erreur de chaque observation. Je ne pars pas non plus comme Gauss, dans ses dernières recherches, d'un postulatum qui lui-même ne trouve sa réalité que dans les formules définitives des probabilités, qui comprennent toute cette théorie.

J'ai partagé cette section en trois parties; dans la première je donne le théorème de Laplace sur les résultats moyens des observations d'une seule inconnue, en la faisant précéder de deux lemmes sur la probabilité de la moyenne des carrés, et de la moyenne simple des erreurs. Ces lemmes que je démontre par des procédés nouveaux, sont également dus à Laplace, seulement je les présente sous une forme plus générale, en ne supposant pas les erreurs constantes préalablement éliminées, comme le fait Laplace. Dans la 2e partie je démontre les formules relatives à la probabilité des limites qui renferment une seule grandeur inconnue, engagée dans une fonction donnée par un très-grand nombre d'observations. Dans la 3e partie enfin, je donne la démonstration du théorème de M. Bienaymé, relatif à la probabilité des limites qui renferment l'une quelconque des inconnues, engagées dans une fonction donnée par un très grand nombre d'observations. En général, mes déductions se distinguent 1° par les procédés analytiques qui s'appuyent sur le théorème de Fourier, et le facteur de discontinuité de Lejeune-Dirichlet; 2° par la preuve de la convergence des séries qu'on rencontre dans ces recherches; 3° par la dépendance que j'établis entre la théorie des erreurs et le théorème général de Laplace, sur la probabilité des causes, qui est fondamental dans la doctrine des probabilités à postériori.

Lemme I.

Un très grand nombre s d'observations O_i *d'une chose* ξ *donnant lieu aux erreurs*

$$\varepsilon_i = \xi - O_i, \; (i = 1, 2, \ldots s)$$

comprises entre les limites — a *et* a', *si l'on pose*

$$\mu_i = \int_{-a}^{a'} \varepsilon^i \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon,$$

et

$$x = \frac{S\varepsilon^2_i}{s} = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_s^2}{s} = \frac{x'}{s},$$

je dis qu'on aura, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{s}$, *la probabilité*

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2}\, dt,$$

que x *est compris entre les limites*

$$\mu_2 \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{2(\mu_4 - \mu_2^2)}.$$

1re *démonstration.*

Soit $x' = sx = S\varepsilon^2_i = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_s^2$, et désignons par $\varphi\varepsilon_i$ la probabilité inconnue d'une erreur ε_i, on aura :

$$\int_{-a}^{a'} \varphi\, \varepsilon_i\, d\varepsilon_i = 1.$$

Posons ensuite

$$X = \int_{-a}^{a'} d\varepsilon_1 \varphi\varepsilon_1 \int_{-a}^{a'} d\varepsilon_2 \varphi\varepsilon_2 \ldots \int_{-a}^{a'} d\varepsilon_s \varphi\varepsilon_s \cdot e^{\theta x' \sqrt{-1}},$$

et nommons

$$y = \psi(\tau)$$

la probabilité que x' a pour valeur

$$\tau = \nu s + l.$$

Cela posé, comme $\psi(\tau)$ réunit les probabilités relatives à des valeurs égales à τ, il est clair que le produit ci-dessus pourra être représenté aussi par

$$X = \int \psi(\tau)\, e^{\tau\theta\sqrt{-1}}\, d\tau,$$

expression dans laquelle les limites de l'intégrale sont sous-entendues.

Multiplions cette équation par $e^{-\tau\theta\sqrt{-1}}\, d\theta$, puis intégrons entre les limites $\pm\infty$, nous trouverons :

$$\int_{-\infty}^{\infty} X\, e^{-\tau\theta\sqrt{-1}}\, d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau\theta\sqrt{-1}}\, d\theta \int \psi(\tau)\, e^{\tau\theta\sqrt{-1}}\, d\tau = 2\pi\psi(\tau) = 2\pi\cdot y,$$

d'où :

$$y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\theta\, e^{-\tau\theta\sqrt{-1}}\cdot X.$$

Mais on a :

$$X = \int_{-a}^{a'} d\varepsilon_1\, \varphi\varepsilon_1 \int_{-a}^{a'} d\varepsilon_2\, \varphi\varepsilon_2 \ldots \int_{-a}^{a'} d\varepsilon_s\, \varphi\varepsilon_s\, e^{\theta x'\sqrt{-1}}$$

$$= \int_{-a}^{a'} d\varepsilon_1\, \varphi\varepsilon_1 \int_{-a}^{a'} d\varepsilon_2\, \varphi\varepsilon_2 \ldots \int_{-a}^{a'} d\varepsilon_s\, \varphi\varepsilon_s\, e^{\theta(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\ldots+\varepsilon_s^2)\sqrt{-1}}$$

$$= \int_{-a}^{a'} d\varepsilon_1\, \varphi\varepsilon_1\, e^{\varepsilon_1^2\theta\sqrt{-1}} \int_{-a}^{a'} d\varepsilon_2\, \varphi\varepsilon_2\, e^{\varepsilon_2^2\theta\sqrt{-1}} \ldots \int_{-a}^{a'} d\varepsilon_s\, \varphi\varepsilon_s\, e^{\varepsilon_s^2\theta\sqrt{-1}};$$

et comme on a aussi :

$$\int_{-a}^{a'} \varphi\varepsilon_i\, d\varepsilon_i\, e^{\varepsilon_i^2\theta\sqrt{-1}} = da\,\Big\{ \varphi(-a)\, e^{(-a)^2\theta\sqrt{-1}} + \varphi(-a+da)\, e^{(-a+da)^2\theta\sqrt{-1}} +$$

$$\varphi(-a+2\,da)\, e^{(-a+2da)^2\theta\sqrt{-1}} + \ldots +$$

$$\varphi(-2\,da)\, e^{(-2\,da)^2\sqrt{-1}} + \varphi(-da)\, e^{(-da)^2\theta\sqrt{-1}} + \varphi(o) +$$

$$\varphi(da)\, e^{(da)^2\theta\sqrt{-1}} + \varphi(2\,da)\, e^{(2\,da)^2\theta\sqrt{-1}} + \ldots + \varphi(a')\, e^{a'^2\theta\sqrt{-1}} \Big\}$$

$$= \int_{-a}^{a'} \varphi\varepsilon\, d\varepsilon\, e^{\varepsilon^2\theta\sqrt{-1}},$$

il suit que l'on pourra écrire :

$$X = \Big\{ \int_{-a}^{a'} \varphi\varepsilon\, d\varepsilon\, e^{\varepsilon^2\theta\sqrt{-1}} \Big\}^s.$$

Développons l'exponentielle, nous trouverons d'abord :

$$\int_{-a}^{a'} d\varepsilon\,\varphi\varepsilon\,e^{\varepsilon^2\theta\sqrt{-1}} = \int_{-a}^{a'} d\varepsilon\,\varphi\varepsilon\left(1+\varepsilon^2\theta\sqrt{-1}-\frac{\varepsilon^4\theta^2}{2}-\frac{\varepsilon^6\theta^3\sqrt{-1}}{6}+\ldots\right)$$

$$= \int_{-a}^{a'} d\varepsilon\,\varphi\varepsilon + \theta\sqrt{-1}\int_{-a}^{a'}\varepsilon^2\varphi\varepsilon\,d\varepsilon - \frac{\theta^2}{2}\int_{-a}^{a'}\varepsilon^4\varphi\varepsilon\,d\varepsilon -$$

$$\frac{\theta^3\sqrt{-1}}{6}\int_{-a}^{a'}\varepsilon^6\varphi\varepsilon\,d\varepsilon + \text{etc.}$$

$$= 1+\mu_2\theta\sqrt{-1}-\mu_4\frac{\theta^2}{2}-\mu_6\frac{\theta^3\sqrt{-1}}{6}+\text{etc.}$$

$$= e^{\log\left[1+\mu_2\theta\sqrt{-1}-\mu_4\frac{\theta^2}{2}-\mu_6\frac{\theta^3\sqrt{-1}}{6}+\text{etc.}\right]}$$

$$= e^{\mu_2\theta\sqrt{-1}-\frac{\theta^2}{2}(\mu_4-\mu_2^2)-\frac{\theta^3}{6}(\mu_4-3\mu_4\mu_2+2\mu_2^3)\sqrt{-1}+\ldots}$$

puis :

$$X = e^{\mu_2 s\theta\sqrt{-1}-\frac{\theta^2 s}{2}(\mu_4-\mu_2^2)-\frac{\theta^3 s}{6}(\mu_4-3\mu_4\mu_2+2\mu_2^3)\sqrt{-1}+\ldots}$$

$$= e^{\mu_2 s\theta\sqrt{-1}-\frac{\theta^3 s}{2}(\mu_4-\mu_2^2)}\cdot e^{-\frac{\theta^3 s}{6}(\mu_4-3\mu_4\mu+2\mu_2^3)\sqrt{-1}+\ldots}$$

$$= e^{\mu_2 s\theta\sqrt{-1}-\frac{\theta^3 s}{2}(\mu_4-\mu_2^2)}\,(1+\text{R}+\text{etc.})$$

$$\text{R} = -\frac{\theta^3 s}{6}(\mu_4-3\mu_4\mu_2+2\mu_2^3)\sqrt{-1}+\text{etc.}$$

En substituant cette valeur dans l'expression ci-dessus de y, dans laquelle il faudra remplacer τ par sa valeur $\nu s+l$, nous aurons :

$$y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\theta\,e^{-(\mu_2-\nu)s\theta\sqrt{-1}-l\theta\sqrt{-1}-\frac{\theta^2 s}{2}(\mu_4-\mu_2^2)}\,(1+\text{R}+\ldots).$$

Posons, pour simplifier,

$$\nu = \mu_2\,;$$

il vient :

$$y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\theta\,e^{-\left[\frac{\theta^2 s}{2}(\mu_4-\mu_2^2)+l\theta\sqrt{-1}\right]}\,(1+\text{R}+\ldots).$$

En complétant maintenant le carré de l'exposant de e, nous obtiendrons sans peine :

$$y = \frac{e^{-\frac{l^2}{2s(\mu_4-\mu_2^2)}}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\theta\,e^{-\frac{s(\mu_4-\mu_2^2)}{2}\left(\theta+\frac{l\sqrt{-1}}{s(\mu_4-\mu_2^2)}\right)^2}\,(1+\text{R}+\ldots)$$

Posons

$$\sqrt{\frac{s(\mu_4-\mu_2^2)}{2}}\left(\theta+\frac{l\sqrt{-1}}{s(\mu_4-\mu_2^2)}\right)=t,$$

d'où :

$$\theta=\frac{t}{\sqrt{s}\sqrt{\frac{\mu_4-\mu_2^2}{2}}}-\frac{l\sqrt{-1}}{s(\mu_4-\mu_2^2)},$$

et désignons par R_1 ce que devient alors R, nous aurons :

$$y=\frac{e^{-\frac{l^2}{2(\mu_4-\mu_2^2)s}}}{\pi\sqrt{2}\sqrt{s}\sqrt{\mu_4-\mu_2^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\,dt\,(1+R_1\ \text{etc.}).$$

Si maintenant nous représentons, pour abréger, par $M_3 s$, $M_4 s$, etc., les coëfficients des termes en θ^3, θ^4, etc., dans l'expression de R, savoir, si nous fesons

$$R=-sM_3\theta^3\sqrt{-1}+sM_4\theta^4+s\sqrt{-1}\,M_5\theta^5-\text{etc.},$$

il sera facile de s'assurer que ces divers termes seront de la forme

$$-sM_3\theta^3\sqrt{-1}=-\frac{at^3\sqrt{-1}}{\sqrt{s}}-\frac{bt^2}{s}+\frac{ct\sqrt{-1}}{s\sqrt{s}}+\frac{d}{s^2},$$

$$sM_4\theta^4=\frac{a't^4}{s}-\frac{b't^3\sqrt{-1}}{s\sqrt{s}}-\frac{c't^2}{s^2}+\frac{d't}{s^2\sqrt{s}}+\frac{c'}{s^3},\ \text{etc.}$$

Si donc on intègre l'expression

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\,dt\,(1+R_1+\text{etc.}),$$

par les formules

$$\int_{-\infty}^{\infty}t^{2i+1}e^{-t^2}\,dt=o,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}t^{2i}e^{-t^2}\,dt=\frac{1\cdot3\ldots(2i-1)}{2^i}\sqrt{\pi},$$

il est évident que les termes imaginaires, c'est-à-dire ceux qui ont pour dénominateurs des puissances impaires de $\sqrt{s}$, disparaîtront, et que par conséquent l'intégrale ci-dessus sera de la forme :

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\,dt\,(1+R_1+\text{etc.})=\sqrt{\pi}\left\{1+\frac{1}{s}\left(\alpha+\frac{\beta}{s}+\frac{\gamma}{s^2}+\text{etc.}\right)\right\}.$$

Soit donc

$$\alpha+\frac{\beta}{s}+\frac{\gamma}{s^2}+\text{etc.}=\delta,$$

nous pourrons écrire :

$$y = \frac{e^{-\frac{l^2}{2(\mu_4 - \mu_2^2)s}}}{\pi\sqrt{2(\mu_4 - \mu_2^2)s}} \sqrt{\pi} \left\{ 1 + \frac{\delta}{s} \right\}$$

$$= \frac{e^{-\frac{l^2}{2(\mu_4 - \mu_2^2)s}}}{\sqrt{2\pi s(\mu_4 - \mu_2^2)}} \left(1 + \frac{\delta}{s}\right). \tag{1}$$

C'est la probabilité que x' coïncide avec la valeur

$$\varepsilon = \nu s + l = \mu_2 s + l,$$

ou celle que $x = \mu_2 + \frac{l}{s}$. De cette équation on tire

$$l = s(x - \mu_2),$$

en sorte que la probabilité de x est

$$y = \frac{e^{-\frac{s(x-\mu_2)^2}{2(\mu_4 - \mu_2^2)}}}{\sqrt{2\pi s(\mu_4 - \mu_2^2)}} \left(1 + \frac{\delta}{s}\right). \tag{2}$$

Posons, pour abréger

$$M = \frac{1}{\sqrt{2\pi s(\mu_4 - \mu_2^2)}},$$

nous obtiendrons, par deux procédés différents, la probabilité P' que $x' = sx$ est compris entre les deux limites $\mu_2 s \pm l$, ou que celle de x est compris entre $\mu_2 \pm \frac{l}{s}$.

Premier procédé. Soit P' la probabilité dont il s'agit, nous aurons évidemment, par la formule (1) :

$$P' = M \int_{-l}^{l} e^{-\frac{l^2}{2(\mu_4 - \mu_2^2)s}} dl \cdot \left(1 + \frac{\delta}{s}\right)$$

$$= 2M \int_{0}^{l} e^{-\frac{l^2}{2(\mu_4 - \mu_2^2)s}} dl \left(1 + \frac{\delta}{s}\right).$$

Posons

$$\frac{l}{\sqrt{2(\mu_4 - \mu_2^2)s}} = \gamma,\ dl = d\gamma \sqrt{2(\mu_4 - \mu_2^2)s},$$

nous aurons

$$P' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\gamma} e^{-\gamma^2} d\gamma \left(1 + \frac{\delta}{s}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\gamma} e^{-t^2} dt \left(1 + \frac{\delta}{s}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt + \frac{\delta}{s} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt. \qquad (a)$$

C'est la probabilité que $x' = sx$ est entre

$$\mu_2 s \pm l = \mu_2 s \pm \gamma \sqrt{2 s (\mu_4 - \mu_2^2)},$$

ou que x est entre

$$\mu_2 \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{2 (\mu_4 - \mu_2^2)}.$$

2[e] *procédé*. La condition du maximum, savoir $\frac{dy}{dx} = o$, appliquée à l'équation (2), nous conduit à :

$$\mathrm{M}\, e^{-\frac{s(x-\mu_2)}{2(\mu_4-\mu_2^2)}}\, s(x-\mu_2) = o,$$

c'est-à-dire à

$$x = \mu_2.$$

μ_2 est donc la valeur de x qui rend y un maximum ; c'est la quantité que nous avons désignée par m dans le théorème II de Laplace sur la probabilité des causes.

La même équation (2) nous fournit encore

$$\log y = \log \mathrm{M} - \frac{s(x-\mu_2)^2}{2(\mu_4 - \mu_2^2)},$$

et par conséquent

$$\left(\frac{d^2 \log y}{2dx^2}\right)_m = \frac{s}{2(\mu_4 - \mu_2^2)}.$$

Nous avons donc, en vertu du même théorème de Laplace, la probabilité

$$\mathrm{P}' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt \left(1 + \frac{\delta}{s}\right),$$

que x est compris entre

$$\mu_2 \pm \frac{\gamma}{\sqrt{\frac{s}{2(\mu_4 - \mu_2^2)}}} = \mu_2 \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{2(\mu_4 - \mu_2^2)}.$$

Nous pouvons maintenant obtenir une valeur très approchée, P pour la probabilité dont il s'agit. Car on pourra, conformément au théorème I de la 1[re] section, en prenant s très grand, négliger la fraction $\frac{\delta}{s}$, et alors on aura, à la place de la probabilité exacte

$$\mathrm{P}' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt \left(1 + \frac{\delta}{s}\right),$$

la probabilité très approchée :

$$\mathrm{P} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt.$$

1[re] *Remarque.* Quand γ, donc quand P restent constants, les limites ci-dessus entre lesquelles est comprise la valeur de

$$x = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_s^2}{s},$$

se resserreront à mesure que s augmentera.

On pourra donc, en augmentant s, resserrer à la fois ces limites, et augmenter la probabilité P. Pour $s = \infty$, on a donc $x = \mu_2$, et $P = 1$.

2[e] *remarque.* Supposons avec Laplace que les erreurs négatives soient aussi probables que les positives, alors on aura

$$\varphi(-\varepsilon) = \varphi(\varepsilon),$$
$$a' = a.$$

Cela posé, soient

$$k_o = \int_{-1}^{1} \varphi\varepsilon' \, d\varepsilon', \quad k_i = \int_{0}^{1} \varphi\varepsilon' \cdot \varepsilon'^i \cdot d\varepsilon'$$

et fesons

$$\varepsilon = a\varepsilon',$$

nous aurons :

$$\int_{-a}^{a} \varphi\varepsilon \, d\varepsilon = a \int_{-1}^{1} \varphi\varepsilon' \, d\varepsilon' = a k_o = 1,$$

$$\mu_2 = \int_{-a}^{a} \varepsilon^2 \varphi\varepsilon \, d\varepsilon = 2a^3 \int_{0}^{1} \varepsilon'^2 \varphi\varepsilon' \, d\varepsilon' = 2a^3 k_2 = \frac{2a^2 k_2}{k_o},$$

$$\mu_4 = \int_{-a}^{a} \varepsilon^4 \varphi\varepsilon \, d\varepsilon = 2a^5 \int_{0}^{1} \varepsilon'^4 \varphi\varepsilon' \, d\varepsilon' = 2a^5 k_4 = \frac{2a^4 k_4}{k_o}.$$

Soit

$$\beta = \frac{k_o}{\sqrt{k_o k_4 - 2k_2^2}},$$

nous aurons, par les formules ci-dessus, la probabilité

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\gamma} e^{-t^2} dt,$$

que $x = \frac{S\varepsilon_i^2}{s}$ est compris entre

$$\frac{2a^2 \cdot k_2}{k_o} \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \cdot \frac{2a^2}{\beta}.$$

C'est sous cette dernière forme que Laplace a présenté son théorème.

2[e] *démonstration.* Soit

$$X' = \int_{-a}^{a'} \varphi\varepsilon_1 \, d\varepsilon_1 \int_{-a}^{a'} \varphi\varepsilon_2 \, d\varepsilon_2 \ldots \int_{-a}^{a'} \varphi\varepsilon_s \, d\varepsilon_s = 1;$$

cette expression réunit toutes les probabilités possibles relatives aux diverses combinaisons, ou fonctions des erreurs ε_i.

Soit donc P' la probabilité que la fonction

$$x' = sx = S\varepsilon^2_i.$$

coïncide avec une quantité prise entre les limites α et β, il est clair qu'on obtiendra P' en écartant de X' les termes qui produiront des valeurs de x' situées en dehors de ces limites, et en conservant les autres. A cet effet, il suffira d'introduire dans l'expression ci-dessus de X', le facteur de discontinuité

$$F = \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^\beta \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta(x'-\tau)\sqrt{-1}}\, d\theta\, d\tau,$$

qui jouit de la propriété de se réduire à zéro pour les valeurs de x' situées en dehors des limites α et β, et de devenir égal à l'unité pour toutes les valeurs de x' comprises entre α et β. On a donc, d'après cela :

$$P' = \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^\beta d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x'\sqrt{-1}}\, d\theta \int_{-a}^{a'} \int_{-a}^{a'} \cdots \int_{-a}^{a'} \varphi\varepsilon_1\, \varphi\varepsilon_2 \ldots \varphi\varepsilon_s\, d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_s\, e^{-\theta\tau\sqrt{-1}}.$$

Mettons pour x' sa valeur $S\varepsilon^2_i$, et séparons les variables, nous aurons :

$$P' = \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^\beta d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\theta\, e^{-\theta\tau\sqrt{-1}} \left\{ \int_{-a}^{a'} \varphi\varepsilon_1\, e^{\varepsilon_1^2\theta\sqrt{-1}}\, d\varepsilon_1 \int_{-a}^{a'} \varphi\varepsilon_2\, e^{\varepsilon_2^2\theta\sqrt{-1}}\, d\varepsilon_2 \ldots \right.$$

$$\left. \ldots \int_{-a}^{a'} \varphi\varepsilon_s\, e^{\varepsilon_s^2\theta\sqrt{-1}}\, d\varepsilon_s \right\}.$$

Posons

$$\tau = \nu s + l = x';$$

alors aux limites $x' = \begin{cases} \beta = \nu s + l \\ \alpha = \nu s - l \end{cases}$, répondront les limites $l = \begin{cases} l \\ -l \end{cases}$, et nous trouverons :

$$P' = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{l} dl \int_{-\infty}^{\infty} d\theta\, e^{-l\theta\sqrt{-1} - \nu s\theta\sqrt{-1}} \left\{ \int_{-a}^{a'} \varphi\varepsilon \cdot e^{\varepsilon^2\theta\sqrt{-1}}\, d\varepsilon \right\}^s$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{l} dl \int_{-\infty}^{\infty} d\theta\, e^{(\nu-\mu_2)s\theta\sqrt{-1} - l\theta\sqrt{-1} - \frac{\theta^2 s}{2}(\mu_4-\mu_2^2)} (1 + R + \ldots).$$

Pour $\nu = \mu_2$ on a :

$$P' = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{l} dl \int_{-\infty}^{\infty} d\theta\, e^{-[\frac{\theta^2 s}{2}(\mu_4-\mu_2^2) + l\theta\sqrt{-1}]} (1 + R + \ldots).$$

Donc, en opérant comme dans la 1re démonstration, et en négligeant la fraction $\frac{\delta}{s}$, on trouve:

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-l}^{l} \frac{e^{-\frac{l^2}{2s(\mu_4 - \mu_2^2)}}}{\sqrt{2s(\mu_4 - \mu_2^2)}} \cdot dl$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{l} \frac{e^{-\frac{l^2}{2s(\mu_4 - \mu_2^2)}}}{\sqrt{2s(\mu_4 - \mu_2^2)}} \cdot dl.$$

Pour achever l'opération, il suffira de poser, comme dans le 1[er] procédé :

$$\frac{l}{\sqrt{2s(\mu_4 - \mu_2^2)}} = \gamma.$$

Lemme II.

Un très grand nombre s *d'observations* O_i *d'une chose* ξ *donnant lieu aux erreurs*

$$\varepsilon_i = \xi - O_i,$$
$$(i = 1, 2, \dots s)$$

comprises entre les limites $-a$ *et* a', *si l'on pose*

$$\mu_i = \int_{-a}^{a'} \varepsilon^i \varphi\varepsilon \, d\varepsilon,$$

et

$$x' = sx = S\varepsilon_i = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_s,$$

je dis qu'on aura, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{s}$, *la probabilité*

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\gamma} e^{-t^2} \, dt,$$

que x *est compris entre les limites*

$$\mu_1 \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)}.$$

1[re] *démonstration.*

Soit $\varphi\varepsilon_i$ la probabilité inconnue de l'erreur ε_i, nous aurons

$$\int_{-a}^{a'} \varphi\,\varepsilon_i \, d\varepsilon_i = 1.$$

Posons ensuite

$$X = \int_{-a}^{a'} d\varepsilon_1 \, \varphi\varepsilon_1 \int_{-a}^{a'} d\varepsilon_2 \, \varphi\varepsilon_2 \dots \int_{-a}^{a'} d\varepsilon_s \, \varphi\varepsilon_s \, e^{\theta x' \sqrt{-1}},$$

et nommons

$$y = \psi(\gamma)$$

la probabilité que x' a pour valeur

$$\imath = \nu s + l.$$

Cela posé, comme $\psi(\imath)$ réunit les probabilités relatives à tous les systèmes de valeurs $\imath$, il est clair que le produit ci-dessus pourra être représenté aussi par

$$X = \int \psi(\imath)\, e^{\imath\theta\sqrt{-1}}\, d\imath,$$

expression dans laquelle les limites de l'intégrale sont sous-entendues.

Multiplions cette équation par $e^{-\imath\theta\sqrt{-1}}\, d\theta$, puis intégrons entre les limites $\pm\infty$, nous trouverons :

$$\int_{-\infty}^{\infty} X e^{-\imath\theta\sqrt{-1}}\, d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\imath\theta\sqrt{-1}}\, d\theta \int \psi(\imath)\, e^{\imath\theta\sqrt{-1}}\, d\imath = 2\pi\psi(\imath) = 2\pi y,$$

d'où :

$$y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\theta\, e^{-\imath\theta\sqrt{-1}}\, X.$$

Mais on a :

$$\begin{aligned}
X &= \int_{-a}^{a'} d\varepsilon_1 \varphi\varepsilon_1 \int_{-a}^{a'} d\varepsilon_2 \varphi\varepsilon_2 \ldots \int_{-a}^{a'} d\varepsilon_s \varphi\varepsilon_s\, e^{\theta x'\sqrt{-1}} \\
&= \int_{-a}^{a'} d\varepsilon_1 \varphi\varepsilon_1 \int_{-a}^{a'} d\varepsilon_2 \varphi\varepsilon_2 \ldots \int_{-a}^{a'} d\varepsilon_s \varphi\varepsilon_s\, e^{\theta(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_s)\sqrt{-1}} \\
&= \int_{-a}^{a'} d\varepsilon_1 \varphi\varepsilon_1\, e^{\varepsilon_1\theta\sqrt{-1}} \int_{-a}^{a'} d\varepsilon_2 \varphi\varepsilon_2\, e^{\varepsilon_2\theta\sqrt{-1}} \ldots \int_{-a}^{a'} d\varepsilon_s \varphi\varepsilon_s\, e^{\varepsilon_s\theta\sqrt{-1}};
\end{aligned}$$

et comme on a aussi :

$$\int_{-a}^{a'} \varphi\varepsilon_i\, d\varepsilon_i\, e^{\varepsilon_i\theta\sqrt{-1}} = \int_{-a}^{a'} \varphi\varepsilon\, d\varepsilon\, e^{\varepsilon\theta\sqrt{-1}},$$

ce qui se démontre comme dans le théorème précédent, il suit que l'on pourra écrire :

$$X = \left\{\int_{-a}^{a'} \varphi\varepsilon\, d\varepsilon\cdot e^{\varepsilon\theta\sqrt{-1}}\right\}^s.$$

Développons l'exponentielle, nous trouverons d'abord :

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a'} \varphi\varepsilon\, d\varepsilon\, e^{\varepsilon\theta\sqrt{-1}} &= \int_{-a}^{a'} \varphi\varepsilon\, d\varepsilon \left[1 + \varepsilon\theta\sqrt{-1} - \frac{\varepsilon^2\theta^2}{2} - \frac{\varepsilon^3\theta^3\sqrt{-1}}{6} + \ldots\right] \\
&= \int_{-a}^{a'} \varphi\varepsilon\, d\varepsilon + \theta\sqrt{-1}\int_{-a}^{a'} \varepsilon\varphi\varepsilon\, d\varepsilon - \frac{\theta^2}{2}\int_{-a}^{a'} \varepsilon^2\varphi\varepsilon\, d\varepsilon - \\
&\qquad \frac{\theta^3\sqrt{-1}}{6}\int_{-a}^{a'} \varepsilon^3\varphi\varepsilon\, d\varepsilon + \ldots
\end{aligned}$$

$$= 1 + \mu_1 \theta \sqrt{-1} - \frac{\mu_2 \theta^2}{2} - \frac{\mu_3 \theta^3 \sqrt{-1}}{6} + \ldots$$

$$= e^{\log\left[1 + \mu_1 \theta \sqrt{-1} - \frac{\mu_2 \theta^2}{2} - \frac{\mu_3 \theta^3 \sqrt{-1}}{6} + \ldots\right]}$$

$$= e^{\mu_1 \theta \sqrt{-1} - \frac{\theta^2}{2}(\mu_2 - \mu_1^2) - \frac{\theta^3 \sqrt{-1}}{6}(\mu_3 - 3\mu_2 \mu_1 + 2\mu_1^3) + \ldots},$$

puis :

$$X = e^{\mu_1 \theta s \sqrt{-1} - \frac{\theta^2 s}{2}(\mu_2 - \mu_1^2) - \frac{\theta^3 s}{6}(\mu_3 - 3\mu_2 \mu_1 + 2\mu_1^3)\sqrt{-1} + \ldots}$$

Nommons $M_3 s$, $M_4 s$, $M_5 s$, etc., les coëfficients des termes en $\theta^3 \sqrt{-1}$, θ^4, $\theta^5 \sqrt{-1}$, etc., puis écrivons

$$R = - M_3 s \theta^3 \sqrt{-1} + M_4 s + M_5 s \sqrt{-1} - \text{etc.},$$

nous aurons :

$$X = e^{\mu_1 \theta s \sqrt{-1} - \frac{\theta^2 s}{2}(\mu_2 - \mu_1^2)} \cdot e^R$$

$$= e^{\mu_1 \theta s \sqrt{-1} - \frac{\theta^2 s}{2}(\mu_2 - \mu_1^2)} (1 + R + \text{etc.})$$

En substituant cette valeur dans l'expression ci-dessus de y, dans laquelle il faudra remplacer τ par sa valeur $\nu s + l$, nous obtiendrons :

$$y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \, e^{-(\nu - \mu_1) s \theta \sqrt{-1} - l\theta\sqrt{-1} - \frac{\theta^2 s}{2}(\mu_2 - \mu_1^2)} (1 + R + \text{etc.}).$$

Posons, pour simplifier,

$$\nu = \mu_1,$$

il vient :

$$y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \cdot e^{-\left[\frac{s\theta^2}{2}(\mu_2 - \mu_1^2) + l\theta\sqrt{-1}\right]} (1 + R + \text{etc.}).$$

En complétant maintenant le carré de l'exposant de e, nous obtiendrons sans peine :

$$y = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{l^2}{2(\mu_2 - \mu_1^2)s}} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \, e^{-\frac{s}{2}(\mu_2 - \mu_1^2)\left(\theta + \frac{l\sqrt{-1}}{s(\mu_2 - \mu_1^2)}\right)^2} (1 + R + \text{etc.})$$

Posons

$$\sqrt{\frac{s}{2}(\mu_2 - \mu_1^2)} \left(\theta + \frac{l\sqrt{-1}}{s(\mu_2 - \mu_1^2)}\right) = t,$$

d'où :

$$\theta = \frac{t}{\sqrt{s}\sqrt{\frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2}}} - \frac{l\sqrt{-1}}{s(\mu_2 - \mu_1^2)},$$

et désignons par R_1 ce que devient alors R, nous aurons :

$$y = \frac{e^{-\frac{l^2}{2(\mu_2-\mu_1^2)s}}}{\pi\sqrt{2s(\mu_2-\mu_1^2)}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt\,(1+R_1+\text{etc.}).$$

Il est maintenant facile de s'assurer que les divers termes dont se compose R, quand on y change θ en t, prendront les formes

$$-sM_3\theta^3\sqrt{-1} = -\frac{at^3\sqrt{-1}}{\sqrt{s}} - \frac{bt^2}{s} + \frac{ct\sqrt{-1}}{s\sqrt{s}} + \frac{d}{s^2},$$

$$sM_4\theta^4 = \frac{a't^4}{s} - \frac{b't^3\sqrt{-1}}{s\sqrt{s}} - \frac{c't^2}{s^2} + \frac{d't\sqrt{-1}}{s^2\sqrt{s}} + \frac{e'}{s^3}, \text{ etc.}$$

Donc en intégrant l'expression

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt\,(1+R_1+\text{etc.}),$$

par les formules

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{2i+1}\,e^{-t^2}\,dt = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{2i}\,e^{-t^2}\,dt = \frac{1\cdot3\ldots(2i-1)}{2^i}\sqrt{\pi},$$

il est évident que les termes affectés de $\sqrt{-1}$, c'est-à-dire ceux qui ont pour dénominateurs des puissances impaires de $\sqrt{s}$, disparaîtront, et que par conséquent l'intégrale ci-dessus sera de la forme :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt\,(1+R_1+\text{etc.}) = \sqrt{\pi}\left\{1+\frac{1}{s}\left(\alpha+\frac{\beta}{s}+\frac{\gamma}{s^2}+\text{etc.}\right)\right\}$$

Nommons δ la somme de la série

$$\alpha+\frac{\beta}{s}+\frac{\gamma}{s^2}+\text{etc.},$$

nous pourrons écrire :

$$y = \frac{e^{-\frac{l^2}{2(\mu_2-\mu_1^2)s}}}{\pi\sqrt{2s(\mu_2-\mu_1^2)}}\sqrt{\pi}\left(1+\frac{\delta}{s}\right)$$

$$= \frac{e^{-\frac{l^2}{2(\mu_2-\mu_1^2)s}}}{\sqrt{2\pi s(\mu_2-\mu_1^2)}}\left(1+\frac{\delta}{s}\right). \qquad (1)$$

C'est la probabilité que x' coïncide avec la valeur

$$\tau = \nu s + l = \mu_1 s + l,$$

ou celle que $x = \mu_1 + \frac{l}{s}$. De cette équation on tire

$$l = s(x - \mu_1),$$

en sorte que la probabilité de x est

$$y = \frac{e^{-\frac{s(x-\mu_1)^2}{2(\mu_2-\mu_1^2)}}}{\sqrt{2\pi s(\mu_2 - \mu_1^2)}} \left(1 + \frac{\delta}{s}\right). \tag{2}$$

Posons, pour abréger

$$M = \frac{1}{\sqrt{2\pi s(\mu_2 - \mu_1^2)}},$$

nous obtiendrons, par deux procédés différents, la probabilité P′ que $x' = sx$ est compris entre $\mu_1 s \pm l$, ou que x est entre $\mu_1 \pm \frac{l}{s}$.

Premier procédé. Soit P′ la probabilité dont il s'agit, nous aurons évidemment, par la formule (1) :

$$P' = M \int_{-l}^{l} e^{-\frac{l^2}{2(\mu_2-\mu_1^2)s}}\, dl \left(1 + \frac{\delta}{s}\right)$$

$$= 2M \int_{0}^{l} e^{-\frac{l^2}{2(\mu_2-\mu_1^2)s}}\, dl \left(1 + \frac{\delta}{s}\right).$$

Posons

$$\frac{l}{\sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)s}} = \gamma,\ dl = d\gamma \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)s},$$

nous aurons

$$P' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma {}^{-\gamma^2} d\gamma \left(1 + \frac{\delta}{s}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt \left(1 + \frac{\delta}{s}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt + \frac{\delta}{s} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt. \tag{a}$$

C'est la probabilité que $x' = sx = S\varepsilon_i$ est entre

$$\mu_1 s \pm l = \mu_1 s \pm \gamma \sqrt{2s(\mu_2 - \mu_1^2)},$$

ou que $x = \frac{S\varepsilon_i}{s}$ est entre

$$\mu_1 \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)}.$$

2° *procédé.* La condition du maximum, savoir $\frac{dy}{dx} = o$, appliquée à l'équation (2), nous conduit à

$$M\, e^{-\frac{s(x-\mu_1)}{2(\mu_2-\mu_1^2)}}\, s(x-\mu_1) = o,$$

c'est-à-dire à

$$x = \mu_1.$$

μ_1 est donc la valeur de x qui rend y un maximum.

La même équation (2) nous fournit encore

$$\log y = \log M - \frac{s(x-\mu_1)^2}{2(\mu_2-\mu_1^2)},$$

et par conséquent

$$\left(\frac{d^2 \log y}{2dx^2}\right)_m = \frac{s}{2(\mu_2-\mu_1^2)}.$$

Nous avons donc, par le théorème II de Laplace, sur la probabilité des causes, la probabilité

$$P' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt \left(1 + \frac{\delta}{s}\right),$$

que x est compris entre

$$\mu_1 \pm \frac{\gamma}{\sqrt{\frac{s}{2(\mu_2-\mu_1^2)}}} = \mu_1 \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{2(\mu_2-\mu_1^2)}.$$

Nous pouvons maintenant obtenir à la place de la probabilité exacte P' une valeur très approchée P, en négligeant le terme $\frac{\delta}{s}$, conformément au théorème I de la première section, et alors la probabilité exacte

$$P' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt + \frac{\delta}{s} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt$$

deviendra la probabilité très approchée :

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt.$$

1^re^ *Remarque.* Quand γ, donc quand P restent constants, les limites ci-dessus qui renferment l'inconnue

$$x = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_s}{s},$$

se resserreront à mesure que s croîtra. On peut donc, en augmentant s, resserrer à la fois ces limites, et augmenter la probabilité P. Donc, pour $s = \infty$, on a $x = \mu_1$, $P = 1$.

2° *remarque.* Supposons avec Laplace et Gauss que les erreurs négatives soient aussi probables que les positives, ce qui suppose que les erreurs constantes ont été écartées des observations, nous aurons

$$\varphi(-\varepsilon) = \varphi(\varepsilon),\ a = a',$$

et par conséquent :

$$\mu_1 = \int_{-a}^{a} \varepsilon \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = 0.$$

On a, dans ce cas, la probabilité

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2}\, dt,$$

que x, ou $\frac{S\varepsilon_i}{s}$ est compris entre

$$\pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{2\mu_2}. \tag{b}$$

Si nous posons avec Laplace

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\varepsilon')\, d\varepsilon' = k_0, \int_0^{1} \varepsilon'^2 \varphi(\varepsilon')\, d\varepsilon' = k_2, \varepsilon = a\varepsilon',$$

nous trouverons :

$$\int_{-a}^{a} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = a \int_{-1}^{1} \varphi(\varepsilon')\, d\varepsilon' = ak_0 = 1,$$

$$\mu_2 = \int_{-a}^{a} \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = 2a^3 \int_0^{1} \varepsilon'^2 \varphi(\varepsilon')\, d\varepsilon' = 2a^3 k_2 = \frac{2a^2 k_2}{k_0}.$$

Donc

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2}\, dt$$

sera la probabilité que x est compris entre

$$\pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \cdot 2a \sqrt{\frac{k_2}{k_0}}. \tag{c}$$

Comme on a :

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2}\, dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-\gamma^2}\, d\gamma = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{l} e^{-\frac{l^2}{2\mu_2 s}} \frac{dl}{\sqrt{2\mu_2}},$$

on pourra encore poser avec Laplace :

$$\mu_2 = \frac{2a^2 k_2}{k_0}, \frac{l}{a\sqrt{s}} = r, l = ar\sqrt{s};$$

alors on aura la probabilité

$$P = \sqrt{\frac{k_0}{\pi k_2}} \int_0^{r} e^{-\frac{k_0 r_2}{4k_2}}\, dr \tag{d}$$

que $x' = sx$ est entre $\pm l = \pm ar\sqrt{s}$. C'est sous cette forme que Laplace a présenté son théorème. Si $\varphi(\varepsilon')$ est constant, on a :

$$k_o = 2\int_0^1 \varphi\varepsilon'\,d\varepsilon' = 2\int_0^1 c\,d\varepsilon' = 2c,\ k_2 = \int_0^1 \varepsilon'^2\,\varphi\varepsilon'\,d\varepsilon' = \int_0^1 c\,\varepsilon'^2\,d\varepsilon' = \frac{c}{3},$$

alors $\dfrac{k_o}{k_2} = 2c : \dfrac{c}{3} = 6$, et la formule ($d$) nous donnera

$$P = \sqrt{\frac{6}{\pi}}\int_0^r e^{-\frac{3r^2}{2}}\,dr = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^r e^{-\frac{3r^2}{2}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot dr.$$

Cette formule de Laplace peut être employée lorsqu'une valeur exacte de **P** n'est pas exigée.

2^e^ *démonstration.* Comme on a

$$\int_{-a}^{a'} \varphi(\varepsilon_i)\,d\varepsilon_i = 1,$$

le produit

$$X' = \int_{-a}^{a'} \varphi\varepsilon_1\,d\varepsilon_1 \int_{-a}^{a'} \varphi\varepsilon_2\,d\varepsilon_2 \ldots \int_{-a}^{a'} \varphi\varepsilon_s\,d\varepsilon^s = 1,$$

réunit toutes les probabilités possibles relatives aux diverses combinaisons, ou fonctions des erreurs ε_i.

Soit P' la probabilité que la fonction

$$x' = sx = Sx_i = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_s$$

coïncide avec une quantité prise entre les limites α et β, alors il est clair qu'on obtiendra P' en écartant de X' les termes qui produiront des valeurs de x' situées en dehors de ces limites, et en conservant les autres. Pour atteindre ce but, il faudra introduire dans X' le facteur

$$F = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta\int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta(x'-\bar{\imath})\sqrt{-1}}\,d\theta\,d\bar{\imath},$$

qui jouit de la propriété de se réduire à l'unité pour toutes les valeurs de x' prises entre α et β, et de s'annuler pour toutes les autres. On a donc

$$P' = X'\cdot F,$$

ou :

$$P' = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta d\bar{\imath}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x'\sqrt{-1}}\int_{-a}^{a'}\int_{-a}^{a'}\ldots\int_{-a}^{a'} \varphi\varepsilon_1\,\varphi\varepsilon_2\ldots\varphi\varepsilon_s\,d\varepsilon_1\,d\varepsilon_2\ldots d\varepsilon_s\,e^{-\theta\bar{\imath}\sqrt{-1}}\,d\theta.$$

Mettons pour x' sa valeur $S\varepsilon_i$, et séparons les variables, nous aurons :

$$P' = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta d\bar{\imath}\int_{-\infty}^{\infty} d\theta\,e^{-\theta\bar{\imath}\sqrt{-1}}\left\{\int_{-a}^{a'}\varphi\varepsilon_1\,e^{\varepsilon_1\theta\sqrt{-1}}\,d\varepsilon_1\int_{-a}^{a'}\varphi\varepsilon_2\,e^{\varepsilon_2\theta\sqrt{-1}}\,d\varepsilon_2\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\int_{-a}^{a'}\varphi\varepsilon_s\,e^{\varepsilon_s\theta\sqrt{-1}}\right\}.$$

Posons

$$\gamma = \nu s + l = x',$$

alors aux limites $x' = \begin{cases} \beta = \nu s + l \\ \alpha = \nu s - l \end{cases}$, répondront les limites $l = \begin{cases} l \\ -l \end{cases}$, et l'expression ci-dessus deviendra :

$$\mathrm{P}' = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{l} dl \int_{-\infty}^{\infty} d\theta\, e^{-l\theta\sqrt{-1} - \nu s\theta\sqrt{-1}} \left\{ \int_{-a}^{a'} \varphi\varepsilon \cdot e^{\varepsilon\theta\sqrt{-1}}\, d\varepsilon \right\}^{s}.$$

Mettons pour

$$\left\{ \int_{-a}^{a'} \varphi\varepsilon \cdot e^{\varepsilon\theta\sqrt{-1}}\, d\varepsilon \right\}^{s}$$

sa valeur trouvée précédemment, puis fesons

$$\nu = \mu_1,$$

nous trouverons, en opérant comme dans la 1re démonstration, d'abord

$$\mathrm{P}' = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{l} dl \int_{-\infty}^{\infty} d\theta\, e^{-\left[\frac{\theta^2 s}{2}(\mu_2 - \mu_1^2) + l\theta\sqrt{-1}\right]} (1 + \mathrm{R} + \text{etc.})$$

puis, en négligeant le terme $\frac{\delta}{s}$:

$$\mathrm{P} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-l}^{l} \frac{e^{-\frac{l^2}{2(\mu_2 - \mu_1^2)}}}{\sqrt{2s(\mu_2 - \mu_1^2)}}\, dl$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{l} \frac{e^{-\frac{l^2}{2(\mu_2 - \mu_1^2)s}}}{\sqrt{2s(\mu_2 - \mu_1^2)}}\, dl.$$

Donc, en posant

$$\gamma = \frac{l}{\sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)s}},$$

on retrouve le résultat final comme dans la première démonstration.

Remarque. Les deux lemmes, celui relatif à la moyenne des carrés, et celui relatif à la moyenne simple des erreurs, doivent être considérées comme des propositions auxiliaires, servant à établir le théorème suivant de Laplace, relatif aux résultats moyens des observations.

Théorème I.

La moyenne $\mu = \dfrac{\mathrm{S}o_i}{s}$ *d'un très grand nombre* s *d'observations* O_i *d'une inconnue* ξ *conduisant aux* s *erreurs approchées*

$$\varepsilon_i' = \mu - \mathrm{O}_i,$$
$$(i = 1, 2, \dots s)$$

je dis qu'il y aura une probabilité très approchée

$$\mathrm{P} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2}\, dt,$$

que la grandeur inconnue ξ *est comprise entre*

$$\mu \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{2.\frac{\mathrm{S}\varepsilon_i'^2}{s}},$$

ou que l'écart $\xi - \mu$ *est compris dans les limites*

$$\pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{2\frac{\mathrm{S}\varepsilon_i'^2}{s}}.$$

Démonstration.

Représentons par δ' une quantité dont la valeur absolue est inférieure à

$$\frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{2\mu_2},$$

il est clair que δ' convergera vers zéro à mesure que s croîtra. Cela posé, comme on a

$$\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_s}{s} = \frac{\xi - o_1 + \xi - o_2 + \dots + \xi - o_s}{s} = \xi - \frac{o_1 + o_2 + \dots + o_s}{s} = \xi - \mu,$$

on aura, par le théorème précédent, une probabilité

$$\mathrm{P} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2}\, dt$$

que $\xi - \mu$ est compris entre

$$\pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{2\mu_2}.$$

On peut donc poser :

$$\xi = \mu + \delta',$$

et dans cette expression ξ convergera vers μ, et δ' vers zéro, à mesure que s croîtra. Donc, quand s est très grand, δ' est insensible.

Soit, en second lieu, δ une quantité dont la valeur absolue est inférieure à

$$\frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{2(\mu_4 - \mu_2^2)},$$

il est clair que δ sera très petit quand on suppose s très grand, et que cette quantité convergera également vers zéro, à mesure que s croîtra. Or on a une probabilité

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2}\, dt$$

que $\frac{S\varepsilon_i^2}{s} = \frac{S(\xi - o_i)^2}{s}$ est compris dans les limites

$$\mu_2 \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{2(\mu_4 - \mu_2^2)}\,;$$

on peut donc poser :

$$\mu_2 = \frac{S(\xi - o_i)^2}{s} - \delta$$

$$= \frac{S(\mu - o_i + \delta')^2}{s} - \delta$$

$$= \frac{S(\mu - o_i)^2}{s} + \delta'^2 - \delta.$$

Donc μ_2 convergera vers $\frac{S(\mu - o_i)^2}{s}$, et $\delta'^2 - \delta$ vers zéro, à mesure que s augmentera. Si donc on suppose s très-grand, on pourra négliger la très petite quantité $\delta'^2 - \delta$, et l'on aura la valeur très approchée

$$\mu_2 = \frac{S(\mu - o_i)^2}{s} = \frac{S\,\varepsilon_i'^2}{s}. \qquad (a)$$

En substituant cette valeur à la place de μ_2 dans les limites ci-dessus de l'écart $\xi - \mu$, nous aurons la probabilité

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2}\, dt\,,$$

que l'écart $\xi - \mu$ est compris dans les limites

$$\pm \frac{2}{\sqrt{s}} \sqrt{2\frac{S\,\varepsilon_i'^2}{s}}.$$

1re *remarque*. Les formules du second lemme et du premier théorème, peuvent servir à découvrir l'existence des causes des phénomènes, et à déterminer leur étendue.

En effet, si le phénomène dont il s'agit donne le résultat

$$S\,o_i = s\mu\,,$$

on aura, quand $\mu_1 = o$, la probabilité

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2}\, dt = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\gamma^\infty e^{-t^2}\, dt = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{e^{-\gamma^2}}{2\gamma} (1 - \text{etc.}) \right\},$$

$$= 1 - \frac{e^{-\gamma^2}}{\gamma\sqrt{\pi}},$$

que $S o_i$ est compris dans les limites $\pm \gamma \sqrt{s} \sqrt{2 \mu_2}$, c'est-à-dire que $S o_i < \gamma \sqrt{s} \sqrt{2 \mu_2}$.
Si donc on pose $\gamma \sqrt{s} \sqrt{2 \mu_2} = s \mu$, on aura :

$$\gamma = \frac{\mu \sqrt{s}}{\sqrt{2 \mu_2}}.$$

Comme il ne s'agit pas ici d'une évaluation exacte de P, on pourra poser

$$\mu_2 = \frac{2 a^2 k_2}{k_o} = \frac{a^2}{3}, \text{ savoir } \frac{k_o}{k_2} = 6.$$

on a alors :

$$\gamma = \frac{\mu \sqrt{6 s}}{2 a}$$

$$P = 1 - \frac{e^{-\frac{3 \mu^2 s}{2 a^2}}}{\frac{\mu}{a} \sqrt{\frac{3}{2} s \cdot \pi}}.$$

Donc si la quantité

$$\frac{1}{\frac{\mu}{a} \sqrt{\pi \frac{3}{2} s} \cdot e^{+\frac{3 \mu^2 s}{2 a^2}}}$$

est très petite, on sera presque certain que, dans l'hypothèse de $\mu_1 = o$, ou de l'existence de causes purement fortuites, on devra trouver $S o_i < \mu s$. Mais puisqu'au contraire l'observation donne

$$S o_i = \mu s,$$

il est très vraisemblable que le phénomène n'est pas le résultat de causes purement accidentelles, ou qu'on n'a pas $\mu_1 = o$.

Quant à l'étendue du phénomène, en la désignant par ξ, on a

$$\varepsilon_i = \xi - \frac{S o_i}{s},$$

et pour s observations on aura

$$S \varepsilon_i = S (\xi - \mu).$$

On a alors la probabilité

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt,$$

que $\xi - \mu$ est entre

$$\pm \gamma \sqrt{\frac{2 S \varepsilon_i'^2}{s}},$$

ou que ξ est entre

$$\mu \pm \gamma \sqrt{\frac{2 S \varepsilon_i'^2}{s}}.$$

Pour donner un exemple de ce calcul, recherchons, d'après Laplace, avec quelle probabilité est indiquée la cause et l'étendue des variations diurnes du baromètre. On sait que vers 9 heures du matin le baromètre est plus élevé que vers 9 heures du soir, ensuite il remonte jusque vers 11 heures du soir, et il redescend jusque vers 4 heures du matin, pour revenir à son maximum de hauteur vers 9 heures. Ces variations sont-elles purement fortuites? Pour s'en assurer, soient h_i' la hauteur barométrique à 9 heures du matin le 1[er] jour, h_i cette même hauteur à 9 heures du soir le 1[er] jour, nous ferons

$$o_i = h_i' - h_i, \; \mu = \frac{\mathrm{S}\, o_i}{s}, \; \mathrm{S}\, o_i = s\mu.$$

$\mathrm{S}\, o_i$ est l'excès de la somme des hauteurs du matin sur celles du soir, correspondant à s jours, et cet excès observé a pour valeur $s\mu$. S'il est purement fortuit, on a une probabilité

$$\mathrm{P} = 1 - \frac{1}{\frac{\mu}{a}\sqrt{\frac{3}{2}\pi s \cdot e^{\frac{3\mu^2 s}{2a^2}}}}$$

que $\mathrm{S}\, o_i < s\mu$.

Mais il résulte des observations de Ramond qu'on a $\mu = 1^{\mathrm{mm}}$. Donc, pour $s = 400$ jours, on a $\mu s = 400^{\mathrm{mm}}$. On trouve aussi que $\pm\, a = \pm\, 4^{\mathrm{mm}}$ sont les limites des différences entre les hauteurs du matin et celles du soir. On a donc

$$\frac{3\mu^2 s}{2a^2} = 37{,}5,$$

ce qui donne, pour le terme

$$\frac{1}{\sqrt{\pi \cdot 37{,}5 \cdot e^{37{,}5}}},$$

une valeur excessivement petite. « Il est donc extrêmement probable que s'il n'existait point de cause constante de l'excès observé $\mathrm{S}\, o_i = 400^{\mathrm{mm}}$ de la somme des hauteurs du matin, sur les hauteurs barométriques du soir, cet excès serait plus petit que 400^{mm}; il indique donc, avec une extrême vraisemblance, l'existence d'une cause constante qui l'a produit. »

Quant à l'étendue du phénomème, soit ξ la vraie variation diurne, on aura

$$\mathrm{S}\, \varepsilon_i = s\,(\xi - \mu),$$

et par suite la probabilité

$$\mathrm{P} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2}\, dt,$$

que ξ est compris entre

$$\mu \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{\frac{2\, \mathrm{S}\, \varepsilon_i'}{s}}.$$

Dans cette formule on a $\varepsilon_i' = \mu - o_i$.

Le lemme 2, relatif à la probabilité de la moyenne arithmétique des erreurs d'une série d'observations, suppose que celles-ci ont toutes une même précision; cette proposition de Laplace a été modifiée par Poisson, en ce sens qu'il recherche la probabilité de la moyenne arithmétique des observations elles-mêmes, en les supposant inégalement possibles. Je reproduis ici ce théorème de Poisson en le déduisant d'une analyse plus simple et plus rigoureuse que celle développée dans le quatrième chapitre de l'ouvrage sur la probabilité des jugements de ce géomètre.

Théorème II.

Etant donné un très grand nombre s *d'observations* o_i *d'une chose* ξ, *susceptible d'une suite de valeurs contiguës* z *comprises entre les limites* a $<$ b, *si nous nommons* $\varphi_i z$ *la probabilité de* z *correspondante à la* 1^re^ *observation ou épreuve, en posant*

$$k_i = \int_a^b z\,\varphi_i z\,dz\,,\quad \overset{(n)}{k_i} = \int_a^b z^n\,\varphi_i z\,dz\,,$$

et

$$x' = sx = o_1 + o_2 + \ldots + o_s = \mathrm{S}\,o_i\,,$$

je dis qu'on aura, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{s}$, *la probabilité*

$$\mathrm{P} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\gamma e^{-t^2}\,dt$$

que

$$x = \frac{\mathrm{S}\,o_i}{s} = \frac{o_1 + o_2 + \ldots + o_s}{s}\,.$$

est compris entre les limites

$$\frac{\mathrm{S}\,k_i}{s} \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}}\sqrt{\frac{2}{s}\cdot\mathrm{S}\,[\overset{(2)}{k_i} - k_i^2\,]}.$$

1^re^ *démonstration.*

Comme la chose ξ est susceptible de toutes les valeurs contiguës z comprises entre a et b, et que la probabilité de z, correspondante à la 1^re^ observation, est $\varphi_i z$, on aura évidemment, pour cette 1^re^ épreuve, la probabilité résultante

$$\int_a^b \varphi_i z\,dz = 1\,,$$

et en fesant $i = 1, 2 \ldots s$, on aura s relations semblables. Désignons par $\Pi\,f(i)$ généralement un produit des s valeurs

$$\Pi\,f(i) = f(1)\,f(2) \ldots f(s)\,,$$

et posons

$$\mathrm{X} = \Pi\int_a^b \varphi_i z\,dz\cdot e^{z\theta\sqrt{-1}}\,,$$

si alors $y = \psi(\iota)$ indique la probabilité que x' ait pour valeur

$$\iota = \nu s + l,$$

nous aurons évidemment

$$X = \int \psi(\iota)\, e^{\iota\theta\sqrt{-1}}\, d\iota,$$

les limites de l'intégrale étant sous-entendues. Multiplions cette équation par $e^{-l\theta\sqrt{-1}}\, d\theta$, et intégrons entre les limites $\pm\,\infty$, nous aurons :

$$\int_{-\infty}^{\infty} X\, e^{-\iota\theta\sqrt{-1}}\, d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\iota\theta\sqrt{-1}}\, d\theta \int \psi(\iota)\, e^{\iota\theta\sqrt{-1}}\, d\iota = 2\pi\psi\,\iota = 2\pi y,$$

d'où :

$$y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X\, e^{-\iota\theta\sqrt{-1}}\, d\theta.$$

Mettons pour ι sa valeur ci-dessus, il vient :

$$y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-l\theta\sqrt{-1}}\, d\theta \cdot X\, e^{-\nu s\theta\sqrt{-1}}.$$

Mais on a

$$X\, e^{-\nu s\theta\sqrt{-1}} = e^{-\nu s\theta\sqrt{-1}}\, \Pi \int_a^b \varphi_i z\, dz \cdot e^{z\theta\sqrt{-1}};$$

d'où :

$$\log\left(X\, e^{-\nu s\theta\sqrt{-1}}\right) = -\nu s\theta\sqrt{-1} + S\log\int_a^b \varphi_i z\, dz\, e^{z\theta\sqrt{-1}}$$

$$= -\nu s\theta\sqrt{-1} + S\log\int_a^b \varphi_i z\, dz\left(1 + z\theta\sqrt{-1} - \frac{z^2\theta^2}{2} - \frac{z^3\theta^3\sqrt{-1}}{6} + \ldots\right)$$

$$= -\nu s\theta\sqrt{-1} + S\log\left[1 + \theta\sqrt{-1}\int_a^b z\varphi_i z\, dz - \frac{\theta^2}{2}\int_a^b z^2\varphi_i z\, dz - \right.$$

$$\left.\frac{\theta^3\sqrt{-1}}{6}\int_a^b z^3\varphi_i z\, dz + \ldots\right]$$

$$= -\nu s\theta\sqrt{-1} + S\log\left[1 + k_i\theta\sqrt{-1} - \frac{\theta^2}{2}\overset{(2)}{k_i} - \frac{\theta^3\sqrt{-1}}{6}\overset{(3)}{k_i} + \ldots\right]$$

$$= -\nu s\theta\sqrt{-1} + S\left\{\left[k_i\theta\sqrt{-1} - \frac{\theta^2}{2}\left[\overset{(2)}{k_i} - k_i^2\right] - \frac{\theta^3\sqrt{-1}}{6}\left[\overset{(2)}{k_i} - 3\overset{(2)}{k_i}k_i\right.\right.\right.$$

$$\left.\left. + 2k_i^3\right] + \ldots\right\}$$

$$= (Sk_i - \nu s)\,\theta\sqrt{-1} - \frac{\theta^2}{2}\left[S\overset{(2)}{k_i} - k_i^2\right] - \frac{\theta^3\sqrt{-1}}{6}\left[S\overset{(2)}{k_i} - 3S\overset{(2)}{k_i}k_i + \right.$$

$$\left. + 2Sk_i^3\right] + \text{etc.}$$

Fesons

$$\nu s = \mathrm{S}\, k_i,\ \nu = \frac{\mathrm{S}\, k_i}{s},$$

nommons $s\mathrm{M}_3$, $s\mathrm{M}_4$, etc., les coëfficients de $\theta^3\sqrt{-1}$, θ^4, etc., nous aurons :

$$\log(\mathrm{X}\, e^{-\nu s \theta\sqrt{-1}}) = -\frac{\theta^2}{2}[\mathrm{S}\, \overset{(2)}{k_i} - \mathrm{S}\, k_i^2] - \theta^3\sqrt{-1}\, \mathrm{M}_3\, s + \theta^4\, \mathrm{M}_4\, s + \text{etc.}$$

Cela posé, il vient

$$\mathrm{X}\, e^{-\nu s\theta\sqrt{-1}} = e^{-\frac{\theta^2}{2}[\mathrm{S}\overset{(2)}{k_i} - \mathrm{S}\, k_i^2]} \cdot e^{-\theta^3\sqrt{-1}\,\mathrm{M}_3 s + \theta^4 \mathrm{M}_4 s + \text{etc.}}$$

Posons

$$\mathrm{R} = -\theta^3\, \mathrm{M}_3\, s\sqrt{-1} + \theta^4\, \mathrm{M}_4\, s + \text{etc.},$$

nous aurons

$$\mathrm{X}\, e^{-\nu s\theta\sqrt{-1}} = e^{-\frac{\theta^2}{2}(\mathrm{S}\overset{(2)}{k_i} - \mathrm{S}\, k_i^2)}\, (1 + \mathrm{R} + \text{etc.}$$

Donc

$$y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\theta\, e^{-[l\theta\sqrt{-1} + \frac{\theta^2}{2}(\mathrm{S}\overset{(2)}{k_i} - \mathrm{S}\, k_i^2)]}\, (1 + \mathrm{R} + \text{etc.})$$

Fesons, pour abréger :

$$h_i = \overset{(2)}{k_i} - k_i^2$$

$$sh = \mathrm{S}\, h_i = \mathrm{S}\,(\overset{(2)}{k_i} - k_i^2)$$

$$k = \frac{\mathrm{S}\, k_i}{s},$$

nous aurons, en complétant le carré dans l'exposant de e :

$$y = \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{l^2}{2sh}} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta\, e^{-\frac{sh}{2}(\theta + \frac{l\sqrt{-1}}{sh})^2}\, (1 + \mathrm{R} + \ldots)$$

Posons

$$\sqrt{\frac{sh}{2}}\,(\theta + \frac{l\sqrt{-1}}{sh}) = t,$$

d'où :

$$\theta = \frac{\sqrt{2}\cdot t}{\sqrt{sh}} - \frac{l\sqrt{-1}}{sh},$$

et désignons par R_1 ce que devient alors R, nous aurons :

$$y = \frac{e^{-\frac{l^2}{2sh}}}{\pi\sqrt{2sh}} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-t^2}\, (1 + \mathrm{R}_1 + \text{etc.}).$$

On s'assurera facilement que les divers termes dont se compose R sont de la forme :

$$- sM_5\theta^3\sqrt{-1} = \frac{At^3\sqrt{-1}}{\sqrt{s}} - \frac{Bt^2}{s} + \frac{Ct\sqrt{-1}}{s\sqrt{s}} + \frac{D}{s^2},$$

$$sM_4\theta^4 = \frac{A't^4}{s} - \frac{B't^3\sqrt{-1}}{s\sqrt{s}} - \frac{C't^2}{s^2} + \frac{D't\sqrt{-1}}{s^2\sqrt{s}} + \frac{E'}{s^3}, \text{ etc.}$$

Donc, en intégrant l'expression

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt\, (1 + R_1 + \text{etc.}),$$

par les formules

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{2i+1}\, e^{-t^2}\, dt = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{2i}\, e^{-t^2}\, dt = \frac{1\cdot 3\ldots(2i-1)}{2^i}\sqrt{\pi},$$

il est clair que les termes affectés de $\sqrt{-1}$, c'est-à-dire ceux qui ont pour dénominateurs des puissances impaires de $\sqrt{s}$, disparaîtront, et que l'intégrale ci-dessus sera de la forme

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt\, (1 + R_1 + \text{etc.}) = \sqrt{\pi}\left\{1 + \frac{1}{s}\left(\alpha + \frac{\beta}{s} + \frac{\gamma}{s^2} + \text{etc.}\right)\right\}$$

Nommons δ la somme de la série

$$\alpha + \frac{\beta}{s} + \frac{\gamma}{s^2} + \ldots,$$

nous pourrons écrire :

$$y = \frac{e^{-\frac{l^2}{2sh}}}{\pi\sqrt{2sh}}\sqrt{\pi}\left(1 + \frac{\delta}{s}\right)$$

$$= \frac{e^{-\frac{l^2}{2sh}}}{\sqrt{2\pi sh}}\cdot\left(1 + \frac{\delta}{s}\right). \tag{1}$$

C'est la probabilité que x' coïncide avec la valeur

$$i = \nu s + l = S k_i + l = sk + l,$$

ou que x coïncide avec $k + \frac{l}{s}$, et alors on a

$$l = s(x - k),$$

et

$$y = \frac{e^{-\frac{s(x-k)^2}{2h}}}{\sqrt{2\pi sh}}\left(1 + \frac{\delta}{s}\right). \tag{2}$$

Posons, pour abréger

$$M = \frac{1}{\sqrt{2\pi sh}},$$

nous obtiendrons, par deux procédés différents, la probabilité P' que $x' = sx$, est compris entre $ks \pm l$, ou que x est entre $k \pm \frac{l}{s}$.

Premier procédé. Soit P' la probabilité dont il s'agit, il est clair qu'on obtiendra sa valeur en intégrant l'expression (1 entre les limites $\pm l$, ce qui donne :

$$P' = M \int_{-l}^{l} e^{-\frac{l^2}{2hs}} dl \left(1 + \frac{\delta}{s}\right)$$

$$= 2M \int_{0}^{l} e^{-\frac{l^2}{2hs}} dl \left(1 + \frac{\delta}{s}\right).$$

Posons

$$\frac{l}{\sqrt{2hs}} = \gamma,\ dl = d\gamma \sqrt{2hs},$$

$$l = \gamma \sqrt{2hs},$$

nous aurons

$$P' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\gamma} e^{-\gamma^2} d\gamma \left(1 + \frac{\delta}{s}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\gamma} e^{-t^2} dt \left(1 + \frac{\delta}{s}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\gamma} e^{-t^2} dt + \frac{\delta}{s} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\gamma} e^{-t^2} dt. \qquad (a)$$

C'est la probabilité que $x' = sx = So_i$ est entre

$$ks \pm l = ks \pm \gamma \sqrt{2hs},$$

ou que $x = \frac{So_i}{s}$ est compris entre

$$k \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{2h}$$

$$k \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{2h} = \frac{S k_i}{s} \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{\frac{2}{s} \overset{(2)}{S} [k_i - k_i^2]}.$$

2° *procédé.* La condition du maximum appliquée à l'équation (2, conduit à

$$M\, e^{-\frac{s(x-k)^2}{2h}} s(x-k) = o,$$

c'est-à-dire à

$$x = k.$$

k est donc la valeur de x qui rend y un maximum. La même équation (2) nous fournit encore

$$\log y = \log \mathrm{M} - \frac{s\,(x-k)^2}{2\,h},$$

et par conséquent

$$\left(\frac{d^2 \log y}{2dx^2}\right) = -\frac{s}{2\,h},$$

Nous avons donc, par le théorème II de Laplace, sur la probabilité des causes, la probabilité

$$\mathrm{P}' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2}\, dt \left(1 + \frac{\delta}{s}\right),$$

que x est compris entre

$$k \pm \frac{\gamma}{\sqrt{\frac{s}{2\,h}}} = k \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{2\,h}.$$

Cherchons maintenant pour P' une valeur approchée. A cet effet, on pourra, en concevant s suffisamment grand, négliger la petite quantité $\frac{\delta}{s}$, et l'on aura :

$$\mathrm{P} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2}\, dt.$$

Remarque. La probabilité P restant constante, ce qui exige que γ ne varie pas, il est clair que l'intervalle des limites

$$k \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{2\,h}$$

se resserrera quand s augmentera.

On peut donc, en augmentant s, resserrer à la fois ces limites, et augmenter P. Donc quand $s = \infty$, on a $x = k$, et $\mathrm{P} = 1$.

2[e] *démonstration.* Comme on a

$$\int_a^b \varphi_i z\, dz = 1,$$

le produit

$$\mathrm{X}' = \Pi \int_a^b \varphi_i z\, dz = 1$$

réunit toutes les probabilités possibles relatives aux diverses combinaisons, ou fonctions des valeurs z ou o_i; soit P' la probabilité que la fonction

$$x' = sx = \mathrm{S}o_i = o_1 + o_2 + \ldots + o_s$$

coïncide avec une quantité prise entre les limites α et β, alors il est clair qu'on obtiendra P' en écartant de X' les termes qui produiront des valeurs de x' situées en dehors de ces limites, et en conservant les autres. Pour atteindre ce but, il faudra introduire dans X' le facteur

$$F = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta(x'-\tilde{\imath})\sqrt{-1}}\, d\theta\, d\tilde{\imath},$$

qui jouit de la propriété de se réduire à l'unité pour toutes les valeurs de x' prises entre α et β, et de s'annuler pour toutes les autres. On a donc

$$P' = X' \cdot F,$$

ou :

$$P' = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} d\tilde{\imath} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x' \sqrt{-1}} \int_{a}^{b} \varphi_1 z \cdot \varphi_2 z \ldots \varphi_s z\, dz\, e^{-\theta \tilde{\imath} \sqrt{-1}}\, d\theta.$$

Mettons pour x' sa valeur $\mathrm{S}o_i$, puis séparons les variables, en observant que z représente l'une quelconque des valeurs contiguës de ξ entre α et β, à la 1^re^ 2^e^ etc. épreuve, nous aurons :

$$P' = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} d\tilde{\imath} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta \mathrm{S} o_i \sqrt{-1}} \int_{a}^{b} \varphi_1 z\, dz \int_{a}^{b} \varphi_2 z\, dz \ldots \int_{a}^{b} \varphi_s z\, dz\, e^{-\tilde{\imath}\theta\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} d\tilde{\imath} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tilde{\imath}\theta\sqrt{-1}}\, d\theta\, \Big[\int_{a}^{b} \varphi_1 z\, dz\, e^{\theta z \sqrt{-1}} \int_{a}^{b} \varphi_2 z\, dz\, e^{\theta z\sqrt{-1}} \ldots$$

$$\ldots \int_{a}^{b} \varphi_s z\, dz\, e^{\theta z \sqrt{-1}} \Big].$$

Posons

$$\tilde{\imath} = \nu s + l = x',$$

alors aux limites $x' = \begin{cases} \beta = \nu s + l \\ \alpha = \nu s - l \end{cases}$, répondront $l = \begin{cases} l \\ -l \end{cases}$, et l'on aura :

$$P' = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{l} dl \int_{-\infty}^{\infty} d\theta\, e^{-l\theta\sqrt{-1}}\, X\, e^{-\nu s \theta \sqrt{-1}}$$

mais on a trouvé

$$X\, e^{-\nu s \theta \sqrt{-1}} = e^{-\frac{\theta^2}{2}(\mathrm{S}\overset{(2)}{k_i} - \mathrm{S} k_i^2)} (1 + R + \ldots)$$

donc

$$P' = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{l} dl \int_{-\infty}^{\infty} d\theta\, (e^{-[l\theta\sqrt{-1} + \frac{\theta^2}{2}(\mathrm{S}\overset{(2)}{k_i} - \mathrm{S}k_i^2)]}\ (1 + R + \ldots)$$

$$P' = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{l} dl \cdot e^{-\frac{l^2}{2sh}} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta\, l^{-\frac{sh}{2}(\theta + \frac{l\sqrt{-1}}{sh})^2}\ (1 + R + \ldots)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^l dl \cdot \frac{e^{-\frac{l^2}{2sh}}}{\sqrt{2sh}} \sqrt{\pi} \left(1 + \frac{\delta}{s}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi sh}} \int_0^l e^{-\frac{l^2}{2sh}} \left(1 + \frac{\delta}{s}\right).$$

En posant donc

$$\frac{l}{\sqrt{2hs}} = \gamma,$$

on obtient la probabilité P′ sous la forme cherchée, et on achève les calculs comme dans la première démonstration.

Remarque. Si z conserve la même valeur à toutes les épreuves, c'est-à-dire si la probabilité $\varphi_i z$ reste constante, on aura alors :

$$k = k_i = \int_a^b \varphi_i z \cdot z\,dz = \int_a^b \varphi z \cdot z\,dz, = \mu_1'$$

$$\overset{(2)}{k_i} = \int_a^b \varphi_i z \cdot z^2\,dz = \int_a^b \varphi z \cdot z^2\,dz, = \mu_2'$$

$h = h_i$, et alors on a la probabilité

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2}\,dt$$

que $x = \frac{So_i}{s}$ est compris entre

$$\int_a^b \varphi z \cdot z\,dz \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{2\left[\int_a^b z^2 \varphi z\,dz - \left(\int_a^b z \varphi z\,dz\right)^2\right.}$$

ou entre

$$\mu'_1 \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{2\left[\mu'_2 - \mu_1'^2\right]}$$

c'est la formule donnée par Laplace, avec la seule différence que dans celle-ci on a

$$x = \frac{S\varepsilon_i}{s}, \mu_1 = \int_a^b \varepsilon \varphi \varepsilon \cdot d\varepsilon, \mu_2 = \int_a^b \varepsilon^2 \varphi \varepsilon\,d\varepsilon.$$

Théorème III.

Une grandeur inconnue ξ, engagée dans une fonction $f(\xi)$, donnée par un très grand nombre s d'observations o_i, dont les erreurs ε_i, comprises entre les limites $-a$, a', ont pour probabilité inconnue $\varphi(\varepsilon_i)$, étant connue à une très petite correction η près, liée aux erreurs des observations par s équations linéaires données de la forme

$$\varepsilon_i = a_i \eta - n_i,$$

dans lesquelles a_i n_i sont des constantes connues, je dis qu'en posant

$$\mu = \frac{\mathrm{S}\, a_i n_i}{\mathrm{S}\, a_i^2}, \quad \mu_i = \int_{-a}^{a'} \varepsilon^i \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon,$$

on aura une probabilité

$$\mathrm{P} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2}\, dt,$$

que la valeur la plus plausible de η est comprise entre les limites

$$\mu + \mu_1 \frac{\mathrm{S}\, a_i}{\mathrm{S}\, a_i^2} \pm \frac{\gamma}{\sqrt{\mathrm{S}\, a_i^2}} \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)}.$$

1[re] *Démonstration.*

Soit A_i une valeur approchée de l'inconnue ξ, et η une correction inconnue très petite, en sorte que l'on ait

$$\xi = \mathrm{A}_i + \eta,$$

on aura, par le théorème de Maclaurin

$$f(\xi) = f(\mathrm{A}_i + \eta) = f(\mathrm{A}_i) + f'(\mathrm{A}_i)\eta + f''(\mathrm{A}_i)\frac{\eta^2}{1 \cdot 2} + \text{etc.}$$

Posons

$$f(\mathrm{A}_i) = \alpha_i; \quad f'(\mathrm{A}_i) = a_i,$$

et négligeons les termes en η qui dépassent le 1[er] degré, nous aurons

$$\xi = f(\mathrm{A}_i + \eta) = \alpha_i + a_i \eta.$$

mais on a aussi

$$\xi = o_i + \varepsilon_i,$$

il vient donc

$$o_i + \varepsilon_i = \alpha_i + a_i \eta,$$

$$\varepsilon_i = a_i \eta - (o_i - \alpha_i).$$

Faisons

$$o_i - \alpha_i = n_i,$$

nous obtenons l'équation de condition

$$\varepsilon_i = a_i \eta - n_i, \tag{1}$$

qui en représente s, à cause de

$$i = 1, 2, \dots s.$$

Il s'agit de déterminer η de la manière la plus avantageuse, en faisant usage de l'ensemble de ces équations. A cet effet, multiplions chacune des équations (1 par un facteur indéterminé F_i, puis ajoutons les s équations résultantes, nous aurons

$$\tau = S\,F_i\,\varepsilon_i = S\,F_i\,a_i\,\eta - S\,F_i\,n_i. \tag{2}$$

Comme les ε_i sont inconnues, nous déterminerons d'abord η par la condition que τ soit égal à zéro, et les facteurs F_i par la condition que les limites qui renfermeront cette valeur de η soient les plus étroites possibles, et leur probabilité la plus grande possible.

Soit donc η' la valeur de η, qui répond à $\tau = o$, nous trouverons, par l'équation (2):

$$\eta' = \frac{S\,F_i\,n_i}{S\,F_i\,a_i}. \tag{3}$$

Soit x l'erreur de ce résultat, on aura

$$\eta = \eta' + x = \frac{S\,F_i\,n_i}{S\,F_i\,a_i} + x,$$

et par conséquent

$$\tau = S\,F_i\,\varepsilon_i = S\,F_i\,a_i\left(\frac{S\,F_i\,n_i}{S\,F_i\,a_i} + x\right) - S\,F_i\,n_i,$$

$$= S\,F_i\,a_i\,x\,;$$

d'où :

$$x = \frac{S\,F_i\,\varepsilon_i}{S\,F_i\,a_i}, \tag{4}$$

cherchons maintenant la probabilité

$$y = \psi(\tau)$$

que $\iota = S\,F_i\,a_i\,x$ ait pour valeur $\nu s + l$.

A cet effet, désignons par Π un produit de s facteurs, tel que

$$\Pi\, f(i) = f(1) \cdot f(2) \dots f(s),$$

et posons

$$X = \Pi \int_{-a}^{a'} \varphi(\varepsilon_i)\, d\varepsilon_i\, e^{\tau\theta\sqrt{-1}}, \tag{a}$$

Comme $\psi(\tau)$ réunit les probabilités relatives à tous les systèmes de valeurs τ, nous pourrons représenter le produit X aussi par l'intégrale

$$X = \int \psi(\tau)\, e^{\tau\theta\sqrt{-1}}\, d\tau,$$

prise entre des limites convenables que nous sous-entendons. Multiplions cette équation par $e^{-\tau\theta\sqrt{-1}}\, d\theta$, et intégrons le produit entre $\pm\,\infty$, nous obtiendrons :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau\theta\sqrt{-1}}\, d\theta \cdot X = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau\theta\sqrt{-1}}\, d\theta \int \psi(\tau)\, e^{\tau\theta\sqrt{-1}}\, d\tau = 2\pi\,\psi(\tau) = 2\pi\,y,$$

d'où :

$$y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \, e^{-z\theta\sqrt{-1}} X.$$

Si nous mettons, dans la formule (a), pour z sa valeur $\mathrm{S} F_i \varepsilon_i$, nous trouverons, en séparant les variables :

$$X = \Pi \int_{-a}^{a'} \varphi(\varepsilon_i) \, e^{F_i \varepsilon_i \theta \sqrt{-1}} \, d\varepsilon_i.$$

Mais on a :

$$\int_{-a}^{a'} \varphi(\varepsilon_i) \, e^{F_i \varepsilon_i \theta \sqrt{-1}} \, d\varepsilon_i = da \Big\{ \varphi(-a) \, e^{-F_i a \theta \sqrt{-1}} + \varphi(-a + da) \, e^{F_i(-a+da)\theta\sqrt{-1}} + \ldots$$

$$+ \varphi(-da) \, e^{F_i(-da)\theta\sqrt{-1}} + \varphi(o) +$$

$$+ \varphi(da) \, e^{F_i(da)\theta\sqrt{-1}} + \ldots + \varphi(a') \, e^{F_i a' \theta \sqrt{-1}} \Big\},$$

on peut donc supprimer l'indice i, dans ε_i, et écrire

$$\int_{-a}^{a'} \varphi(\varepsilon_i) \, e^{F_i \varepsilon_i \theta \sqrt{-1}} \, d\varepsilon_i = \int_{-a}^{a'} \varphi(\varepsilon) \, e^{F_i \varepsilon \theta \sqrt{-1}} \, d\varepsilon,$$

ce qui nous donnera

$$X = \Pi \int_{-a}^{a'} \varphi(\varepsilon) \, e^{F_i \varepsilon \theta \sqrt{-1}} \, d\varepsilon,$$

et par suite :

$$y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \, e^{-z\theta\sqrt{-1}} \, \Pi \int_{-a}^{a'} \varphi(\varepsilon) \, d\varepsilon \, e^{F_i \varepsilon \theta \sqrt{-1}}.$$

Développons l'exponentielle, il vient :

$$\int_{-a}^{a'} \varphi(\varepsilon) \, d\varepsilon \, e^{F_i \varepsilon \theta \sqrt{-1}} = \int_{-a}^{a'} \varphi(\varepsilon) \, d\varepsilon \left[1 + \theta F_i \varepsilon \sqrt{-1} - \frac{\theta^2 F_i^2 \varepsilon^2}{2} - \frac{\theta^3 F_i^3 \varepsilon^3 \sqrt{-1}}{6} + \text{etc.} \right]$$

$$= 1 + \mu_1 F_i \theta \sqrt{-1} - \frac{\mu_2 F_i^2 \theta^2}{2} - \frac{\mu_3 F_i^3 \theta^3 \sqrt{-1}}{6} + \ldots$$

$$= e^{\log\left[1 + \mu_1 F_i \theta \sqrt{-1} - \frac{\mu_2 F_i^2 \theta^2}{2} - \frac{\mu_3 F_i^3 \theta^3 \sqrt{-1}}{6} + \ldots\right]}$$

$$= e^{\mu_1 F_i \theta \sqrt{-1} - \frac{F_i^2 (\mu_2 - \mu_1^2)}{2} \theta^2 - \frac{F_i^3 \theta^3 \sqrt{-1}}{6} (\mu_3 - 3\mu_2 \mu_1 + 2\mu_1^3) + \ldots}$$

On a par conséquent

$$\Pi \int_{-a}^{a'} \varphi(\varepsilon) \, e^{F_i \varepsilon \theta \sqrt{-1}} \, d\varepsilon = e^{\mu_1 \mathrm{S} F_i \theta \sqrt{-1} - \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2} \mathrm{S} F_i^2 \theta^2 - \frac{\mu_3 - 3\mu_2\mu_1 + 2\mu_1^3}{6} \mathrm{S} F_i^3 \theta \sqrt{-1} + \ldots}$$

Fesons, pour abréger :

$$M_3 \, S \, F_i^3 = \frac{\mu_3 - 3 \mu_2 \mu_1 + 2 \mu^3}{6} \, S \, F_i^3 ;$$

désignons pareillement par $M_4 \, S \, F_i^4$, $M_5 \, S \, F_i^5$, etc., les coëfficients des termes en θ^4, $\theta^5 \sqrt{-1}$, puis posons

$$R = - M_3 \, S \, F_i^3 \, \theta^3 \sqrt{-1} + M_4 \, S \, F_i^4 \, \theta^4 + M^5 \, S \, F_i^5 \, \theta^5 \sqrt{-1} - \text{etc.},$$

nous aurons :

$$\Pi \int_{-a}^{a'} \varphi(\varepsilon) \, e^{F_i \varepsilon \theta \sqrt{-1}} \, d\varepsilon = e^{\mu_1 S F_i \theta \sqrt{-1} - \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2} S F_i^2 \theta^2} \quad (1 + R + \text{etc.}),$$

donc

$$y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \, e^{-\tau \theta \sqrt{-1}} \quad e^{\mu_1 S F_i \theta \sqrt{-1} - \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2} S F_i^2 \theta^2} \quad (1 + R + \ldots).$$

Mettons pour τ sa valeur $\nu s + l$, nous aurons :

$$y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \, e^{(\nu s - \mu_1 S F_i) \theta \sqrt{-1} - l \theta \sqrt{-1} - \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2} S F_i^2 \theta^2} \quad (1 + R + \ldots)$$

On simplifie cette expression en disposant de l'indéterminée ν de manière à faire disparaître le 1er terme de l'exposant de e, cela nous fournira d'abord

$$\nu s = \mu_1 S F_i, \; \nu = \frac{\mu_1 S F_i}{s},$$

puis

$$y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \, e^{-\left[\frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2} S F_i^2 \theta^2 + l \theta \sqrt{-1}\right]} \quad (1 + R + \ldots).$$

Si maintenant nous complétons le carré dans l'exposant de e, nous obtiendrons :

$$y = \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{l^2}{2(\mu_2 - \mu_1^2) S F_i^2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \, e^{-\frac{S F_i^2}{2} (\mu_2 - \mu_1^2) \left(\theta + \frac{l \sqrt{-1}}{S F_i^2 (\mu_2 - \mu_1^2)}\right)^2} \quad (1 + R + \ldots).$$

Posons

$$\sqrt{S F_i^2 \left(\frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2}\right)} \left(\theta + \frac{l \sqrt{-1}}{S F_i^2 \cdot (\mu_2 - \mu_1^2)}\right) = t,$$

d'où :

$$\theta = \frac{t}{\sqrt{S F_i^2} \sqrt{\frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2}}} - \frac{l \sqrt{-1}}{S F_i^2 (\mu_2 - \mu_1^2)},$$

et nommons R_1 ce que devient alors R, nous aurons :

$$y = \frac{1}{\pi} \frac{e^{-\frac{l^2}{2 S F_i^2 (\mu_2 - \mu_1^2)}}}{\sqrt{2 S F_i^2 (\mu_2 - \mu_1^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cdot dt \, (1 + R_1 + \text{etc.}).$$

Il est maintenant évident que les divers termes dont se compose R, auront les formes :

$$-\mathrm{M}_3\,\mathrm{S\,F}_i^3\,\theta^3\sqrt{-1} = -\frac{\mathrm{S\,F}_i^3\,at^3\sqrt{-1}}{\mathrm{S\,F}_i^2\sqrt{\mathrm{S\,F}_i^2}} - \frac{\mathrm{S\,F}_i^3\,bt^2}{(\mathrm{S\,F}_i^2)^2} + \frac{\mathrm{S\,F}_i^3\,ct\sqrt{-1}}{(\mathrm{S\,F}_i^2)^2\sqrt{\mathrm{S\,F}_i^2}} + \frac{\mathrm{S\,F}_i^3\cdot d}{(\mathrm{S\,F}_i^2)^3},$$

$$\mathrm{M}_4\,\mathrm{S\,F}_i^4\,\theta^4 = \frac{\mathrm{S\,F}_i^4\,a'\,t^4}{(\mathrm{S\,F}_i^2)^2} - \frac{\mathrm{S\,F}_i^4\,b'\,t^3\sqrt{-1}}{(\mathrm{S\,F}_i^2)^2\sqrt{\mathrm{S\,F}_i^2}} - \frac{\mathrm{S\,F}_i^4\,c'\,t^2}{(\mathrm{S\,F}_i^2)^3} + \frac{\mathrm{S\,F}_i^4\,d'\,t\sqrt{-1}}{(\mathrm{S\,F}_i^2)^3\sqrt{\mathrm{S\,F}_i^2}} + $$

$$+ \frac{\mathrm{S\,F}_i^4\cdot e'}{(\mathrm{S\,F}_i^2)^4}, \text{ etc., etc.}$$

Posons

$$\mathrm{S\,F}_i^n = s\cdot\mathrm{H}_n,$$

puis

$$\frac{a\,\mathrm{H}_3}{\mathrm{H}_2\sqrt{\mathrm{H}_2}} = \mathrm{A},\ \frac{b\,\mathrm{H}_3}{\mathrm{H}_2^2} = \mathrm{B},\ \frac{c\,\mathrm{H}_3}{\mathrm{H}_2^2\sqrt{\mathrm{H}_2}} = \mathrm{C},\ \frac{d\,\mathrm{H}_3}{\mathrm{H}_2^3} = \mathrm{D},$$

$$\frac{a'\,\mathrm{H}_4}{\mathrm{H}_2^2} = \mathrm{A}'\ \frac{b'\,\mathrm{H}_4}{\mathrm{H}_2^2\sqrt{\mathrm{H}_2}} = \mathrm{B}',\ \frac{c'\,\mathrm{H}_4}{\mathrm{H}_2^3} = \mathrm{C}',\ \frac{d'\,\mathrm{H}_4}{\mathrm{H}_2^3\sqrt{\mathrm{H}_2}} = \mathrm{D}',\ \frac{e'\,\mathrm{H}_4}{\mathrm{H}_2^4} = \mathrm{E}', \text{ etc., etc.}$$

nous aurons :

$$-\mathrm{M}_3\,\mathrm{S\,F}_i^3\,\theta^3\sqrt{-1} = -\frac{\mathrm{A}\,t^3\sqrt{-1}}{\sqrt{s}} - \frac{\mathrm{B}\,t^2}{s} + \frac{\mathrm{C}\,t\sqrt{-1}}{s\sqrt{s}} + \frac{\mathrm{D}}{s^2},$$

$$\mathrm{M}_4\,\mathrm{S\,F}_i^4\,\theta^4 = \frac{\mathrm{A}'\,t^4}{s} - \frac{\mathrm{B}'\,t^3\sqrt{-1}}{s\sqrt{s}} - \frac{\mathrm{C}'\,t^2}{s^2} + \frac{\mathrm{D}'\,t\sqrt{-1}}{s^2\sqrt{s}} + \frac{\mathrm{E}'}{s^3}, \text{ etc.}$$

Donc, en intégrant l'expression

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt\,(1+\mathrm{R}_1+\text{etc.}),$$

par les formules

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{2i+1}\,e^{-t^2}\,dt = o,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{2i}\,e^{-t^2}\,dt = \frac{1\cdot3\ldots(2i-1)}{2^i}\sqrt{\pi},$$

les termes affectés de $\sqrt{-1}$, c'est-à-dire ceux qui ont pour dénominateurs des puissances impaires de $\sqrt{s}$, disparaîtront, et le résultat sera de la forme

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt\,(1+\mathrm{R}_1+\text{etc.}) = \sqrt{\pi}\left(1+\frac{1}{s}\left[\alpha+\frac{\beta}{s}+\frac{\gamma}{s^2}+\text{etc.}\right]\right).$$

Nommons δ la somme de la série

$$\alpha+\frac{\beta}{s}+\frac{\gamma}{s^2}+\text{etc.},$$

nous pourrons écrire :

$$y = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{e^{-\frac{l^2}{2\,\mathrm{S}\,\mathrm{F}_i^2 (\mu_2 - \mu_1^2)}}}{\sqrt{2\,\mathrm{S}\,\mathrm{F}_i^2 (\mu_2 - \mu_1^2)}} \sqrt{\pi}\,\left(1 + \frac{\delta}{s}\right)$$

$$= \frac{e^{-\frac{l^2}{2\,\mathrm{S}\,\mathrm{F}_i^2 (\mu_2 - \mu_1^2)}}}{\sqrt{2\pi\,\mathrm{S}\,\mathrm{F}_i^2 (\mu_2 - \mu_1^2)}} \left(1 + \frac{\delta}{s}\right). \tag{1}$$

C'est la probabilité que

$$\begin{aligned} i &= \mu s + l \\ &= \mu_1\,\mathrm{S}\,\mathrm{F}_i + l \\ &= \mathrm{S}\,\mathrm{F}_i\,a_i\,x, \end{aligned}$$

ou que

$$l = \mathrm{S}\,\mathrm{F}_i\,a_i\,x - \mu_1\,\mathrm{S}\,\mathrm{F}_i,$$

Substituons cette valeur de l dans la formule (1, alors

$$y = \frac{e^{-\frac{(\mathrm{S}\,\mathrm{F}_i a_i x - \mu_1\,\mathrm{S}\,\mathrm{F}_i)^2}{2\,\mathrm{S}\,\mathrm{F}_i^2 (\mu_2 - \mu_1^2)}}}{\sqrt{2\pi\,\mathrm{S}\,\mathrm{F}_i^2 (\mu_2 - \mu_1^2)}} \left(1 + \frac{\delta}{s}\right) \tag{2}$$

exprime la probabilité de x.

Posons pour abréger

$$\mathrm{M} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\mathrm{S}\,\mathrm{F}_i^2 (\mu_2 - \mu_1^2)}},$$

nous obtiendrons par deux procédés différents la probabilité P″ que i est entre $\mu_1\,\mathrm{S}\,\mathrm{F}_i \pm l$, ou que x est compris entre

$$\frac{\mu_1\,\mathrm{S}\,\mathrm{F}_i}{\mathrm{S}\,\mathrm{F}_i\,a_i} \pm \frac{l}{\mathrm{S}\,\mathrm{F}_i\,a_i}.$$

Premier procédé. Nous avons évidemment par la formule (1, en l'intégrant de $-l$ à $+l$.

$$\mathrm{P}' = \mathrm{M} \int_{-l}^{l} e^{-\frac{l^2}{2\,\mathrm{S}\,\mathrm{F}_i^2 (\mu_2 - \mu_1^2)}}\,dl\,\left(1 + \frac{\delta}{s}\right)$$

$$= 2\,\mathrm{M} \int_{0}^{l} e^{-\frac{l^2}{2\,\mathrm{S}\,\mathrm{F}_i^2 (\mu^2 - \mu_1^2)}}\,dl\,\left(1 + \frac{\delta}{s}\right).$$

Posons

$$\frac{l}{\sqrt{2\,\mathrm{S}\,\mathrm{F}_i^2 (\mu_2 - \mu_1^2)}} = \gamma',\ dl = d\gamma' \sqrt{2\,\mathrm{S}\,\mathrm{F}_i^2 (\mu_2 - \mu_1^2)},$$

nous aurons

$$\mathrm{P}'' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\gamma'} e^{-\gamma'^2}\,d\gamma'\left(1 + \frac{\delta}{s}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma'} e^{-t^2} dt \,(1 + \frac{\delta}{s})$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma'} e^{-t^2} dt + \frac{\delta}{s} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt. \qquad (\alpha)$$

C'est la probabilité que $i = \mathrm{S\,F}_i a_i x$ est compris entre $\mu_1 \mathrm{S\,F}_i \pm l$, ou que x est compris entre

$$\frac{\mu_1 \mathrm{S\,F}_i}{\mathrm{S\,F}_i a_i} \pm \frac{l}{\mathrm{S\,F}_i a_i} = \frac{\mu_1 \mathrm{S\,F}_i}{\mathrm{S\,F}_i a_i} \pm \frac{\gamma'}{\sqrt{\mathrm{S\,F}_i a_i}} \sqrt{\frac{2\,\mathrm{S\,F}_i^2 (\mu_2 - \mu_1^2)}{\mathrm{S\,F}_i a_i}}.$$

$$= \frac{\mu_1 \mathrm{S\,F}_i}{\mathrm{S\,F}_i a_i} \pm \frac{\gamma' \sqrt{\mathrm{S\,F}_i^2}}{\mathrm{S\,F}_i a_i} \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)}.$$

2^e^ *procédé.* La condition du maximum, savoir $\frac{dy}{dx} = o$, appliquée à l'équation (2), nous conduit à

$$\mathrm{S\,F}_i a_i x - \mu_1 \mathrm{S\,F}_i = o,$$

d'où :

$$x = \frac{\mu_1 \mathrm{S\,F}_i}{\mathrm{S\,F}_i a_i}.$$

On a aussi, par la même équation

$$\log y = \log \mathrm{M} - \frac{(\mathrm{S\,F}_i a_i x - \mu_1 \mathrm{S\,F}_i)^2}{2\,\mathrm{S\,F}_i^2 (\mu_2 - \mu_1^2)},$$

d'où l'on tire :

$$-\left(\frac{d^2 \log y}{2dx^2}\right)_m = \frac{(\mathrm{S\,F}_i a_i)^2}{2\,\mathrm{S\,F}_i^2 (\mu_2 - \mu_1^2)};$$

on a donc, par le théorème II de Laplace sur la probabilité des causes, la probabilité

$$\mathrm{P}'' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma'} e^{-t^2} dt\,(1 + \frac{\delta}{s})$$

que x est compris entre

$$\frac{\mu_1 \mathrm{S\,F}_i}{\mathrm{S\,F}_i a_i} \pm \frac{\gamma'}{\sqrt{\frac{(\mathrm{S\,F}_i a_i)^2}{2\,\mathrm{S\,F}_i^2 (\mu_2 - \mu_1^2)}}} = \frac{\mu_1 \mathrm{S\,F}_i}{\mathrm{S\,F}_i a_i} \pm \frac{\gamma'}{\sqrt{\mathrm{S\,F}_i a_i}} \sqrt{\frac{2\,\mathrm{S\,F}_i^2 (\mu_2 - \mu_1^2)}{\mathrm{S\,F}_i a_i}}.$$

$$= \frac{\mu_1 \mathrm{S\,F}_i}{\mathrm{S\,F}_i a_i} \pm \frac{\gamma' \sqrt{\mathrm{S\,F}_i^2}}{\mathrm{S\,F}_i a_i} \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)}; \qquad (c)$$

on a en outre

$$\gamma' = \frac{l}{\frac{\sqrt{\mathrm{S\,F}_i^2}}{\mathrm{S\,F}_i a_i} \cdot \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)}}. \qquad (d)$$

Les formules (*c*) et (*d*) font voir que les limites (*c*) sont les plus étroites possibles, et la valeur

(d) de γ', donc celle de P'', la plus grande possible, quand on détermine le facteur arbitraire F_i par la condition

$$\frac{S\,F_i^2}{(S\,F_i\,a_i)^2} = \text{minimum}.$$

Or on a :

$$(F_i - a_i)^2 = F_i^2 - 2\,F_i\,a_i + a_i^2,$$

d'où :

$$F_i^2 = (F_i - a_i)^2 + a_i\,(2\,F_i - a_i),$$
$$S\,F_i^2 = S\,(F_i - a_i)^2 + S\,a_i\,(2\,F_i - a_i).$$

Donc $\dfrac{S\,F_i^2}{(S\,F_i\,a_i)^2}$ sera un maximum, quand on aura :

$$w = \frac{S\,(F_i - a_i)^2 + S\,a_i\,(2\,F_i - a_i)}{(S\,F_i\,a_i)^2} = \text{minimum}.$$

Mais l'équation $\dfrac{d\,w}{d\,F_i} = o$, conduit à :

$$[\,2\,S\,(F_i - a_i) + 2\,S\,a_i\,]\;S\,F_i\,a_i - 2\,a_i\,[S\,(F_i - a_i)^2 + S\,a_i\,(2\,F_i - a_i)] = o,$$

équation à laquelle on satisfait en posant

$$F_i = a_i.$$

Soient P', γ, et x', ce que deviennent P'', γ' et x, pour cette valeur de F_i, nous aurons :

$$x' = \frac{S\,a_i\,\varepsilon_i}{S\,a_i^2},\; \gamma = \frac{l}{\dfrac{\sqrt{S\,a_i^2}}{S\,a_i^2}\sqrt{2\,(\mu_2 - \mu_1^2)}} = \frac{l\sqrt{S\,a_i^2}}{\sqrt{2\,(\mu_2 - \mu_1^2)}}.$$

Donc

$$P' = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\gamma} e^{-t^2}\,dt\,(1 + \frac{\delta}{s}),$$

sera la plus grande probabilité possible que l'inconnue

$$x' = \frac{S\,a_i\,\varepsilon_i}{S\,a_i^2}$$

est comprise, pour le même γ, dans les plus étroites limites possibles :

$$\frac{\mu_1\,S\,a_i}{S\,a_i^2} \pm \frac{\gamma}{\sqrt{S\,a_i^2}}\sqrt{2\,(\mu_2 - \mu_1^2)}.$$

Soit μ ce que devient $\eta' = \dfrac{S\,F_i\,n_i}{S\,F_i\,a_i}$, pour $F_i = a_i$, on aura :

$$\mu = \frac{S\,a_i\,n_i}{S\,a_i^2}\,;$$

x' est alors l'erreur commise en posant $\eta = \mu$. On a donc

$$\eta = \mu + x',$$

et

$$P' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2}\, dt\,,\ (1 + \frac{\delta}{s}) \qquad (a')$$

est la plus grande probabilité possible que η est, pour un l donné, compris entre les plus étroites limites possibles.

$$\mu + \frac{\mu_1\, S\, a_i}{S\, a_i^2} \pm \frac{\gamma}{\sqrt{S\, a_i^2}} \sqrt{2\,(\mu_2 - \mu_1^2)}. \qquad (e)$$

1re *remarque*. En supposant s très-grand, et en ayant égard au théorème I de la première section, nous pouvons, en négligeant le terme $\frac{\delta}{s}$, écrire à la place de la probabilité exacte P′, sa valeur très approchée

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2}\, dt.$$

2e *remarque*. Quand γ, donc quand P restent constants, les limites (e), qui comprennent l'inconnue η, se resserreront à mesure que $S\, a_i^2$ ou s croîtront. On peut donc, en augmentant s, resserrer à la fois ces limites, et augmenter P. Donc, pour $s = \infty$, on a exactement

$$\eta = \mu \text{ et } P = 1.$$

3e *remarque*. Supposons avec Laplace que les causes d'erreurs constantes soient éliminées des observations, alors les erreurs subsistantes étant purement fortuites, les négatives seront aussi probables que les positives, et l'on aura

$$\varphi(-\varepsilon) = \varphi(\varepsilon)\,,\ a' = a\,,$$

$$\mu_1 = \int_{-a}^{a} 2\,\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = o.$$

Pour ce cas spécial, on a une probabilité

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2}\, dt\,,$$

que η est compris entre

$$\mu \pm \frac{\gamma'}{\sqrt{S\, a_i^2}} \sqrt{2\,\mu_2}. \qquad (f)$$

Soit ε_i' ce que devient ε_i dans le cas du facteur le plus avantageux $F_i = a_i$, et lorsqu'on fait $\eta = \mu$, on aura :

$$\varepsilon_i' = a_i\, \mu - n_i = a_i \frac{S\, a_i\, n_i}{S\, a_i^2} - n_i$$

et

$$\varepsilon_i'^2 = (a_i\, \mu - n_i)^2.$$

Or, nous avons vu, dans le théorème I, formule (a), qu'on pouvait poser approximativement :

$$\mu_2 = \frac{S\, \varepsilon_i'^2}{s}\,,$$

On a donc la probabilité

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2}\, dt$$

que η est compris entre les limites

$$\mu \pm \frac{\gamma'}{\sqrt{S\, a_i^2}} \sqrt{\frac{2\, S\, \varepsilon_i'^2}{s}}. \qquad (g)$$

Cette formule ne contient plus aucun élément qui ne puisse se déduire des observations.

Si nous remplaçons, dans la formule (*f*), μ_2 par sa valeur $\frac{2\, a^2\, k_2}{k_0}$, cette formule se changera en celle-ci :

$$\pm \frac{2\, a\, \gamma \sqrt{\frac{k_2}{k_0}\, S\, a_i^2}}{S\, a_i^2} \qquad (h)$$

c'est sous cette forme que Laplace a présenté son théorème.

4ᵉ *Remarque.* Nous avons vu ci-dessus que la valeur de x qui rend y un maximum, est

$$m = \frac{\mu_1\, S\, F_i}{S\, F_i\, a_i}.$$

Donc, quand $\mu_1 = o$, on a $m = o$, mais alors on a aussi $\eta = \mu$; donc la valeur de η la plus probable est

$$\mu = \frac{S\, a_i\, n_i}{S\, a_i^2}.$$

C'est précisément celle que l'on trouve par la méthode des moindres carrés. En effet, cette méthode consiste à déterminer η par la condition

$$S\, \varepsilon_i^2 = S\, [a_i\, \eta - n_i]^2 = \text{minimum}.$$

Or, en différentiant cette équation on a :

$$S\, a_i\, (a_i\, \eta - n_i) = S\, a_i\, \varepsilon_i = o\,; \qquad (k)$$

d'où :

$$\eta = \frac{S\, a_i\, n_i}{S\, a_i^2} = \mu.$$

L'équation (*k*) fait voir aussi que le facteur le plus avantageux $F_i = a_i$, est précisément celui dont on fait usage dans la méthode des moindres carrés.

2ᵉ *démonstration.* Le produit

$$X' = \Pi \int_{-a}^{a'} \varphi(\varepsilon_i)\, d\varepsilon_i = 1\,,$$

réunit toutes les probabilités possibles relatives aux diverses combinaisons, ou fonctions des erreurs ε_i.

Si donc P'' désigne la probabilité que la fonction

$$\zeta = S\, F_i\, \varepsilon_i$$

coïncide avec une quantité prise entre les limites α et β, il est clair qu'on obtiendra P'' en écartant de X' les termes qui produiront des valeurs de ζ situées en dehors des limites α et β, et en conservant les autres. Soit donc

$$F = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta(\zeta - \tau)\sqrt{-1}} \, d\tau,$$

on aura

$$P'' = X' F$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta\tau\sqrt{-1}} \, d\theta \, \Pi \int_{-a}^{a'} \varphi \, \varepsilon_i \, d\varepsilon_i \, e^{\theta \zeta \sqrt{-1}}.$$

Mettons pour ζ sa valeur ci-dessus, puis séparons les variables, nous obtiendrons, comme dans la première démonstration :

$$P'' = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \, e^{-\theta\tau\sqrt{-1}} \; \Pi \int_{-a}^{a'} \varphi(\varepsilon) \, d\varepsilon \, e^{\theta F_i \varepsilon \sqrt{-1}}.$$

Posons

$$\tau = \nu s + l = \zeta,$$

alors aux limites $\zeta = \begin{cases} \beta = \nu s + l \\ \alpha = \nu s - l \end{cases}$, répondront $l = \begin{cases} l \\ -l \end{cases}$, et l'on aura :

$$P'' = \int_{-l}^{l} dl \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \, e^{-(\mu_1 S F_i - \nu s)\theta\sqrt{-1} - l\theta\sqrt{-1} - \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2} S F_i^2 \theta^2} (1 + R + \text{etc.} \right\}$$

Faisons

$$\nu s = \mu_1 S F_i, \; \nu = \frac{\mu_1 S F_i}{s},$$

nous trouverons, en ayant égard à la valeur de y, trouvée dans la première démonstration :

$$P'' = \int_{-l}^{l} dl \cdot y$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-l}^{l} dl \cdot \frac{e^{-\frac{l^2}{2 S F_i^2 (\mu_2 - \mu_1^2)}}}{\sqrt{2 S F_i^2 (\mu_2 - \mu_1^2)}} \left(1 + \frac{\delta}{s}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{l} dl \cdot \frac{e^{-\frac{l^2}{2 S F_i^2 (\mu_2 - \mu_1^2)}}}{\sqrt{2 S F_i^2 (\mu_2 - \mu_1^2)}} \left(1 + \frac{\delta}{s}\right).$$

Soit

$$\gamma' = \frac{l}{\sqrt{2 S F_i^2 (\mu_2 - \mu_1^2)}},$$

on a la probabilité

$$P'' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt \left(1 + \frac{\delta}{s}\right),$$

que ζ ou $S\, F_i\, \varepsilon_i$ est compris entre

$$\nu s \pm l = \mu_1\, S\, F_i \pm l = \mu_1\, S\, F_i \pm \gamma' \sqrt{S\, F_i^2} \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)}.$$

Mais on a

$$S\, F_i\, \varepsilon_i = S\, F_i\, a_i\, x\,,$$

donc P″ est aussi la probabilité que x est compris entre

$$\frac{\mu_1\, S\, F_i}{S\, F_i\, a_i} \pm \frac{\gamma' \sqrt{S\, F_i^2}}{S\, F_i\, a_i} \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)}.$$

C'est la formule trouvée ci-dessus. Le reste du calcul s'achève comme dans la première démonstration.

Théorème III.

THÉORÈME DE BIENAYMÉ.

m *grandeurs inconnues* ξ_i *d'une fonction* $f(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m)$, *donnée par un très-grand nombre* s *d'observations* o_h, *dont les erreurs* ε_h, *comprises entre les limites* $-a$, a', *ont pour probabilités inconnues* $\varphi(\varepsilon_h)$, *étant connues à de petites corrections* η_i *près, liées aux erreurs* ε_h *par* s *équations linéaires*

$$\varepsilon_h = -n_h + a_{1,h}\,\eta_1 + a_{2,h}\,\eta_2 + \ldots + a_{i,h}\,\eta_i + \ldots + a_{m,h}\,\eta_m\,,$$

dans lesquelles les coëfficients n_h, $a_{1,h}$, $a_{2,h}$, ... *sont des constantes connues, je dis qu'en posant :*

$$m_i = \frac{S_h\, a_{i,h}\, n_h}{S_h\, a_{i,h}^2}\,,\quad \mu_h = \int_{-a}^{a'} \varepsilon^h\, \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon\,,$$

il y aura, quand $m = 2k - 1$, *une probabilité*

$$P_{2k-1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-u^2} du - e^{-\gamma^2} \left\{ \frac{\gamma^{2k-3}}{\Gamma\left(\frac{2k-1}{2}\right)} + \frac{\gamma^{2k-5}}{\Gamma\left(\frac{2k-3}{2}\right)} + \ldots + \frac{\gamma}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \right\},$$

et quand $m = 2k$, *une probabilité*

$$P_{2k} = 1 - e^{-\gamma^2} \left\{ \frac{\gamma^{2k-2}}{\Gamma\left(\frac{2k}{2}\right)} + \frac{\gamma^{2k-4}}{\Gamma\left(\frac{2k-2}{2}\right)} + \ldots + \frac{\gamma^2}{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)} + \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)} \right\},$$

que la valeur la plus plausible de la correction η_i *est comprise entre les limites*

$$m_i + \frac{\mu_1\, S_h\, a_{i,h}}{S_h\, a_{i,h}^2} \pm \frac{\gamma}{\sqrt{S_h\, a_{i,h}^2}} \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)}$$

Démonstration.

La fonction $f(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_m)$ aux m inconnues ξ_i est donnée par un très-grand nombre s d'observations

$$o_1, o_2, \ldots o_h, \ldots o_s,$$

affectées des erreurs

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_h, \ldots \varepsilon_s,$$

ayant pour probabilité

$$\varphi(\varepsilon_1), \varphi(\varepsilon_2) \ldots \varphi(\varepsilon_h), \ldots \varphi(\varepsilon_s);$$

si nous désignons par

$$A_1, A_2, \ldots A_i, \ldots A_m$$

des valeurs très-approchées de ces inconnues, et par

$$\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_i, \ldots \eta_m$$

leurs corrections très-petites, nous aurons :

$$\xi_1 = A_1 + \eta_1, \xi_2 = A_2 + \eta_2, \ldots \xi_i = A_i + \eta_i, \ldots \xi_m = A_m + \eta_m.$$

cela posé, si nous développons la fonction

$$f(A_1 + \eta_1, A_2 + \eta_2, \ldots A_m + \eta_m)$$

suivant les puissances croissantes des η, nous aurons, en négligeant les puissances des η supérieures à la 1[re], pour chaque observation, une équation linéaire de la forme

$$o_h + \varepsilon_h = \alpha_h + a_{1,h}\eta_1 + a_{2,h}\eta_2 + \ldots + a_{i,h}\eta_i + \ldots + a_{m,h}\eta_m.$$

Soit

$$o_h - \alpha_h = n_h,$$

nous aurons s équations représentées par

$$\varepsilon_h = -n_h + a_{1,h}\eta_1 + a_{2,h}\eta_2 + \ldots + a_{i,h}\eta_i + \ldots a_{m,h}\eta_m, \qquad (1)$$

dans laquelle il faudra faire $h = 1, 2 \ldots s$.

Il s'agit de déterminer η_i de la manière la plus avantageuse, en fesant usage de toutes ces équations, s étant supposé plus grand que m.

Pour abréger, nous représenterons toujours par h un indice qui varie de 1 à s, et par i un indice qui varie de 1 à m ; nous désignerons en conséquence par S_h une somme telle que

$$S_h f(h) = f(1) + f(2) + \ldots + f(s),$$

et par S_i une somme telle que

$$S_i f(i) = f(1) + f(2) + \ldots + f(m).$$

De même, les notations Π_h, Π_i seront employées pour indiquer des produits tels que ceux-ci :

$$\Pi_h f(h) = f(1) \cdot f(2) \ldots f(s),$$
$$\Pi_i f(i) = f(1) \cdot f(2) \ldots f(m),$$

cela posé, pour trouver η_i, multiplions les s équations (1, par le facteur indéterminé $F_{i,h}$, et ajoutons les produits, nous obtiendrons :

$$\tau_i = S_h F_{i,h}\varepsilon_h = -S_h F_{i,h} n_h + \eta_1 S_h F_{i,h} a_{1,h} + \eta_2 S_h F_{i,h} a_{2,h} + \ldots + \eta_{i-1} S_h F_{i,h} a_{i-1,h} + \eta_i S_h F_{i,h} a_{i,h} + \eta_{i+1} S_h F_{i,h} a_{i+1,h} + \ldots + \eta_m S_h F_{i,h} a_{m,h}.$$

Posons ensuite :

$$\left.\begin{array}{l}\tau_i = S_h F_{i,h}\,\varepsilon_h = o\,, \\ \quad S_h F_{i,h}\, a_{1,h} = o\,, \\ \quad S_h F_{i,h}\, a_{2,h} = o\,, \\ \quad \text{etc.} \\ \quad S_h F_{i,h}\, a_{i-1,h} = o\,, \\ \quad S_h F_{i,h}\, a_{i+1,h} = o\,, \\ \quad \text{etc.} \\ \quad S_h F_{i,h}\, a_{m,h} = o\,, \end{array}\right\} \text{(A)}$$

et nommons η_i' la valeur η_i correspondante à ces équations de condition, nous aurons :

$$\eta_i' = \frac{S_h F_{i,h}\, n_h}{S_h F_{i,h}\, a_{i,h}}.$$

Soit x_i l'erreur que comporte η_i', on aura :

$$\eta_i = \eta_i' + x_i = \frac{S_h F_{i,h}\, n_h}{S_h F_{i,h}\, a_{i,h}} + x_i,$$

et par conséquent ;

$$\tau_i = S_h F_{i,h}\,\varepsilon_h = -S_h F_{i,h}\, n_h + \eta_1 S_h F_{1,h}\, a_{1,h} + \ldots + \eta_{i-1} S_h F_{i,h}\, a_{i-1,h} + S_h F_{i,h}\cdot a_{i,h}\left[\frac{S_h F_{i,h} n_h}{S_h F_{i,h}\, a_{i,h}} + x_i\right] + \eta_{i+1}' S_h F_{i,h}\, a_{i+1,h} + \ldots + \eta_m S_h F_{i,h}\, a_{m,h}.$$

Cette équation, en ayant égard aux relations (A), se réduit à :

$$x_i = \frac{S_h F_{i,h}\,\varepsilon_h}{S_h F_{i,h}\, a_{i,h}},$$

d'où :

$$\tau_i = S_h F_{i,h}\,\varepsilon_h = x_i\, S_h F_{i,h}\, a_{i,h}.$$

Soit

$y_i = \psi(\tau_i)$ la probabilité que

$\tau_i = x_1 S_h F_{i,h}\, a_{i,h}$

ait pour valeur $\tau_i = \nu s + l_i$, et posons :

$$X = \Pi_h \int_{-a}^{a'} \varphi(\varepsilon_h)\, d\varepsilon_h\, e^{\tau_i \theta \sqrt{-1}}\,; \tag{2}$$

comme $\psi(\tau_i)$ réunit les probabilités relatives à tous les systèmes de valeurs τ_i, nous pourrons représenter le produit X aussi par l'intégrale

$$X = \int \psi(\tau_i)\, e^{\tau_i \theta \sqrt{-1}}\, d\tau_i,$$

prise entre des limites convenables que nous sous-entendons.

Multiplions cette dernière par $e^{-\tau_i \theta \sqrt{-1}}\, d\theta$, et intégrons le produit entre $\pm\infty$, nous obtiendrons :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau_i \theta \sqrt{-1}}\, d\theta \cdot X = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau_i \theta \sqrt{-1}}\, d\theta \int \psi(\tau_i)\, e^{\tau_i \theta \sqrt{-1}}\, d\tau_i = 2\pi\, \psi(\tau_i) = 2\pi\, y_i\,;$$

d'où :

$$y_i = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau_i\theta\sqrt{-1}}\, d\theta\ \mathrm{X}.$$

Si nous mettons dans la formule (2) pour τ_i sa valeur $\mathrm{S}_h\,\mathrm{F}_{i,h}\,\varepsilon_h$, nous trouverons, en séparant les variables :

$$\mathrm{X} = \Pi_h \int_{-a}^{a'} \varphi(\varepsilon_h)\, d\varepsilon_h . e^{\mathrm{F}_{i,h}\varepsilon_h\theta\sqrt{-1}}.$$

On démontre aisément, par le procédé indiqué dans la théorême précédent, que l'on peut omettre l'indice h dans ε_h, et écrire simplement :

$$\mathrm{X} = \Pi_h \int_{-a}^{a'} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon . e^{\mathrm{F}_{i,h}\varepsilon\theta\sqrt{-1}}.$$

Mais, en développant l'exponenticlle, on trouve :

$$\int_{-a}^{a'} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon\, e^{\mathrm{F}_{i,h}\varepsilon\theta\sqrt{-1}} = \int_{-a}^{a'}\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon\, [1 + \mathrm{F}_{i,h}\varepsilon\theta\sqrt{-1} - \frac{\theta^2\mathrm{F}_{i,h}^2\ \varepsilon^2}{2} - \frac{\theta^3\mathrm{F}_{i,h}^3\ \varepsilon^3\sqrt{-1}}{6} + \text{etc.}]$$

$$= 1 + \mu_1\,\mathrm{F}_{i,h}\,\theta\sqrt{-1} - \frac{\mu_2\,\mathrm{F}_{i,h}^2\ \theta^2}{2} - \frac{\mu_3\,\mathrm{F}_{i,h}^3\,\theta^3\sqrt{-1}}{6} + \ldots$$

$$= e^{\log(1 + \mu_1\,\mathrm{F}_{i,h}\,\theta\sqrt{-1} - \frac{\mu_2\,\mathrm{F}_{i,h}^2\ \theta^2}{2} - \frac{\mu_3\,\mathrm{F}_{i,h}^3\ \theta^3\sqrt{-1}}{6} + \ldots)}$$

$$= e^{\mu_1\,\mathrm{F}_{i,h}\theta\sqrt{-1} - \frac{\mu_2-\mu_1^2}{2}\,\mathrm{F}_{i,h}^2\,\theta^2 - \frac{\theta^3\,\mathrm{F}_{i,h}^3\ \theta^3\sqrt{-1}}{6}(\mu_3 - 3\mu_1\,\mu_2 + 2\mu_1^3) + \text{etc.}}$$

On a par conséquent

$$\mathrm{X} = e^{\mu_1\,\mathrm{S}_h\,\mathrm{F}_{i,h}\theta\sqrt{-1} - \frac{\mu_2-\mu_1^2}{2}\,\mathrm{S}_h\,\mathrm{F}_{i,h}^2\,\theta^2 - \frac{\mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3}{6}\mathrm{S}_h\mathrm{F}_{i,h}^3\,\theta^3\sqrt{-1} + \text{etc.}}$$

Fesons, pour abréger :

$$\mathrm{M}_3\,\mathrm{S}_h\,\mathrm{F}_{i,h}^3 = \frac{\mu_3 - 3\,\mu_2\,\mu_1 + 2\,\mu_1^3}{6}\,\mathrm{S}_h\,\mathrm{F}_{i,h}^3\ ;$$

désignons pareillement par $\mathrm{M}_4\,\mathrm{S}_h\,\mathrm{F}_{i,h}^4$, $\mathrm{M}_5\,\mathrm{S}_h\mathrm{F}_{i,h}^5$, etc., les coëfficients de θ^4, $\theta^5\sqrt{-1}$, etc., puis posons

$$\mathrm{R} = -\,\mathrm{M}_3\,\mathrm{S}_h\,\mathrm{F}_{i,h}^3\ \theta^3\sqrt{-1} + \mathrm{M}_4\mathrm{S}_h\,\mathrm{F}_{i,h}^4\ \theta^4 + \mathrm{M}_5\,\mathrm{S}_h\,\mathrm{F}_{i,h}^5\ \theta^5\sqrt{-1} - \text{etc.},$$

nous aurons :

$$\mathrm{X} = e^{\mu_1\,\mathrm{S}_h\,\mathrm{F}_{i,h}\theta\sqrt{-1} - \frac{\mu_2-\mu_1^2}{2}\mathrm{S}_h\,\mathrm{F}_{i,h}^2\ \theta^2}\ (1 + \mathrm{R} + \text{etc.}),$$

et par conséquent

$$y_i = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\theta\ e^{-\tau_i\theta\sqrt{-1}}\ e^{\mu_1\,\mathrm{S}_h\,\mathrm{F}_{i,h}\theta\sqrt{-1} - \frac{\mu_2-\mu_1^2}{2}\mathrm{S}_h\,\mathrm{F}_{i,h}^2\ \theta^2}.(1 + \mathrm{R} + \text{etc.}).$$

Mettons pour τ_i sa valeur $\nu s + l_i$, nous aurons :

$$y_i = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\theta\, e^{(\mu_1 S_h F_{i,h} - \nu s)\theta\sqrt{-1} - [l_i\theta\sqrt{-1} + \frac{\mu_2-\mu_1^2}{2} S_h F_{i,h}^2\, \theta^2]}\,(1 + R + \text{etc.})$$

On simplifie cette expression en disposant de l'indéterminée ν de manière à faire disparaître le 1^er^ terme de l'exposant de e, cela nous fournira d'abord

$$\nu s = \mu_1 S_h F_{i,h} \quad , \nu = \frac{\mu_1 S_h F_{i,h}}{s},$$

puis

$$y_i = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\theta\, e^{-[l_i\theta\sqrt{-1} + \frac{\mu_2-\mu_1^2}{2} S_h F_{i,h}^2\, \theta^2]}\,(1 + R + \text{etc.}).$$

Si maintenant nous complétons le carré dans l'exposant de e, nous obtiendrons :

$$y_i = \frac{1}{2\pi}\; e^{-\frac{l_i^2}{2 S_h F_{i,h}^2 (\mu_2-\mu_1^2)}}\int_{-\infty}^{\infty} d\theta\cdot e^{-\frac{\mu_2-\mu_1^2}{2} S_h F_{i,h}^2 \left(\theta + \frac{l_i\sqrt{-1}}{(\mu_2-\mu_1^2) S_h F_{i,h}^2}\right)^2}(1+R+\text{etc.}).$$

Posons

$$\sqrt{S_h F_{i,h}^2 \left(\frac{\mu_2-\mu_1^2}{2}\right)}\left(\theta + \frac{l_i\sqrt{-1}}{(\mu_2-\mu_1^2) S_h F_{i,h}^2}\right) = t,$$

d'où :

$$\theta = \frac{t}{\sqrt{\frac{\mu_2-\mu_1^2}{2} S_h F_{i,h}^2}} - \frac{l_i\sqrt{-1}}{(\mu_2-\mu_1^2) S_h F_{i,h}^2},$$

et nommons R_1 ce que devient alors R, nous aurons :

$$y_i = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{e^{-\frac{l_i^2}{2 S_h F_{i,h}^2 (\mu_2-\mu_1^2)}}}{\sqrt{2 S_h F_{i,h}^2 (\mu_2-\mu_1^2)}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt\,(1 + R_1 + \text{etc.}).$$

En ayant égard à la valeur précédente de θ, il sera facile d'exprimer en fonction de t, les divers termes dont se compose R ; ces termes seront en effet de la forme suivante :

$$-M_3 S_h F_{i,h}^3\, \theta^3\sqrt{-1} = -\frac{S_h F_{i,h}^3\, a t^3\sqrt{-1}}{S_h F_{i,h}^2 \sqrt{S_h F_{i,h}^2}} - \frac{S_h F_{i,h}^3\, b t^2}{(S_h F_{i,h}^2)^2} + \frac{S_h F_{i,h}^3\, c t\sqrt{-1}}{(S_h F_{i,h}^2)^2\sqrt{S_h F_{i,h}^2}} + \frac{S_h F_{i,h}^3\, d}{(S_h F_{i,h}^2)^3},$$

$$M_4 S_h F_{i,h}^4\, \theta^4 = \frac{S_h F_{i,h}^4\, a' t^4}{(S_h F_{i,h}^2)^2} - \frac{S_h F_{i,h}^4\, b' t^3\sqrt{-1}}{(S_h F_{i,h}^2)^2\sqrt{S_h F_{i,h}^2}} - \frac{S_h F_{i,h}^4\, c' t^2}{(S_h F_{i,h}^2)^3} + \frac{S_h F_{i,h}^4\, d' t\sqrt{-1}}{(S_h F_{i,h}^2)^3\sqrt{S_h F_{i,h}^2}} +$$
$$+ \frac{S_h F_{i,h}^4\, e'}{(S_h F_{i,h}^2)^4}.$$

etc., etc.

Posons $$S_h F^n_{i,h} = s\cdot H_n,$$

puis

$$\frac{a H_3}{H_2\sqrt{H_2}} = A,\ \frac{b H_3}{H_2^2} = B,\ \frac{c H_3}{H_2^2\sqrt{H_2}} = C,\ \frac{d H_3}{H_2^3} = D,$$

$$\frac{a' H_4}{H_2^2} = A', \frac{b' H_4}{H_2^2 \sqrt{H_2}} = B', \frac{c' H_4}{H_2^3} = C', \frac{d' H_4}{H_2^3 \sqrt{H_2}} = D', \frac{e' H_4}{H_2^4} = E',$$

etc., etc.

nous aurons :

$$-M_3 S_h F_{i,h}^3 \theta^3 \sqrt{-1} = \frac{A t^3 \sqrt{-1}}{\sqrt{s}} - \frac{B t^2}{s} - \frac{C t \sqrt{-1}}{s \sqrt{s}} + \frac{D}{s^2},$$

$$M_4 S_h F_{i,h}^4 \theta^4 = \frac{A' t^4}{s} - \frac{B' t^3 \sqrt{-1}}{s \sqrt{s}} - \frac{C' t^2}{s^2} + \frac{D' t \sqrt{-1}}{s^2 \sqrt{s}} + \frac{E'}{s^3},$$

etc. , etc.

Donc, en intégrant l'expression

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \,(1 + R_1 + \ldots.),$$

par les formules

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{2i+1} e^{-t^2} dt = o,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{2i} e^{-t^2} dt = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2i-1)}{2^i} \sqrt{\pi},$$

les termes affectés de $\sqrt{-1}$, c'est-à-dire ceux qui ont pour dénominateurs des puissances impaires de $\sqrt{s}$, disparaîtront, et le résultat sera de la forme :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \,(1 + R_1 + \ldots) = \sqrt{\pi}\left(1 + \frac{1}{s}\left[\alpha_i + \frac{\beta_i}{s} + \frac{\gamma_i}{s^2} + \ldots\right]\right).$$

Nommons δ_i la somme de la série

$$\alpha_i + \frac{\beta_i}{s} + \frac{\gamma_i}{s^2} + \text{etc.},$$

nous pourrons écrire :

$$y_i = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{e^{-\frac{l_i}{2 S_h F_{i,h}^2 (\mu_2 - \mu_1^2)}}}{\sqrt{2 S_h F_{i,h}^2 (\mu_2 - \mu_1^2)}} \sqrt{\pi} \left(1 + \frac{\delta_i}{s}\right)$$

$$= \frac{e^{-\frac{l_i}{2 S_h F_{i,h}^2 (\mu_2 - \mu_1^2)}}}{\sqrt{2 \pi S_h F_{i,h}^2 (\mu_2 - \mu_1^2)}} \left(1 + \frac{\delta_i}{s}\right). \qquad (\alpha)$$

C'est la probabilité que

$$\begin{aligned} \tau_i &= \nu s + l_i \\ &= \mu_1 S_h F_{i,h} + l_i \\ &= x_i S_h F_{i,h} a_{i,h}, \end{aligned}$$

ou que

$$l_i = x_i S_h F_{i,h} a_{i,h} - \mu_1 S_h F_{i,h},$$

En substituant cette valeur dans la formule précédente, il vient :

$$y_i = \frac{e^{-\frac{[x_i S_h F_{i,h} a_{i,h} - \mu_1 S_h F_{i,h}]^2}{2 S_h F^2_{i,h} (\mu_2 - \mu_1^2)}}}{\sqrt{2\pi S_h F^2_{i,h} (\mu_2 - \mu_1^2)}} \left(1 + \frac{\delta_i}{s}\right);$$

c'est la probabilité de x_i.

Fesons pour abréger

$$N_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi S_h F^2_{i,h} (\mu_2 - \mu_1^2)}}$$

$$\Pi_i N_i = N \,,\ \Pi\, y_i = y \,,\ \Pi_i \left(1 + \frac{\delta_i}{s}\right) = 1 + \frac{\delta}{s}$$

alors

$$y = N \cdot e^{-S_i \frac{[x_i S_h F_{i,h} a_{i,h} - \mu_1 S_h F_{i,h}]^2}{2 S_h F^2_{i,h} (\mu_2 - \mu_1^2)}} \left(1 + \frac{\delta}{s}\right), \qquad (\beta)$$

exprime la probabilité que les m erreurs x_i ont lieu en même temps. y sera évidemment un maximum quand on aura

$$x_i S_h F_{i,h} a_{i,h} - \mu_1 S_h F_{i,h} = o, \text{ ou, } x_i = \frac{\mu_1 S_h F_{i,h}}{S_h F_{i,h} a_{i,h}}.$$

La formule (α) donnera pareillement

$$y = N \cdot e^{-S_i \frac{l_i^2}{2 S_h F^2_{i,h} (\mu_2 - \mu_1^2)}} \left(1 + \frac{\delta}{s}\right);$$

c'est la probabilité de l_i. En intégrant cette expression m fois entre deux limites égales et de signes contraires, et en désignant par P'_m cette intégrale multiple, on aura la probabilité

$$P'_m = N \int_m e^{-S_i \frac{l_i^2}{2 S_h F^2_{i,h} (\mu_2 - \mu_1^2)}} \, dl_1\, dl_2 \ldots dl_m \left(1 + \frac{\delta}{s}\right)$$

que l_i ne sortira pas de ces limites.

Soit

$$\frac{l_i}{\sqrt{2 S_h F^2_{i,h} (\mu_2 - \mu_1^2)}} = \gamma_i \,,$$

donc

$$l_i = \gamma_i \sqrt{2 S_h F^2_{i,h} (\mu_2 - \mu_1^2)},$$

il viendra :

$$N = \frac{1}{\sqrt{2\pi S_h F^2_{1,h} (\mu_2 - \mu_1^2)}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi S_h F^2_{2,h} (\mu_2 - \mu_1^2)}} \cdots\cdots \times \frac{1}{\sqrt{2\pi S_h F^2_{m,h} (\mu_2 - \mu_1^2)}}$$

$$dl_1\, dl_2 \cdots dl_m = d\gamma_1\, d\gamma_2 \cdots d\gamma_m \sqrt{2 S_h F^2_{1,h} (\mu_2 - \mu_1^2)} \sqrt{2 S_h F^2_{2,h} (\mu_2 - \mu_1^2)} \cdots \sqrt{2 S_h F^2_{m,h} (\mu_2 - \mu_1^2)},$$

d'où :

$$N\, dl_1\, dl_2 \cdots dl_m = \frac{d\gamma_1\, d\gamma_2 \cdots d\gamma_m}{(\sqrt{\pi})^m},$$

et par suite :

$$P'_m = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^m {}_m\!\int e^{-S_i \gamma_i^2} d\gamma_1\, d\gamma_2 \cdots d\gamma_m \left(1 + \frac{\delta}{s}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^m {}_m\!\int_0 e^{-S_i \gamma_i^2} d\gamma_1\, d\gamma_2 \cdots d\gamma_m \left(1 + \frac{\delta}{s}\right)$$

si nous posons

$$S_i \gamma_i^2 = \gamma'^2, \tag{a}$$

alors aucune des valeurs γ_i ne pourra sortir des limites $\pm \gamma'$, donc aucune des valeurs l_i ne pourra sortir des limites

$$\pm \gamma' \sqrt{2\, S_h F_{i,h}^2 (\mu_2 - \mu_1^2)}.$$

De l'équation (a) on déduit :

$$\gamma_m = \sqrt{\left\{ \gamma'^2 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2 - \cdots - \gamma_{m-1}^2 \right\}},$$

donc

$$d\gamma_m = \frac{\gamma' d\gamma'}{\gamma_m}, \quad \gamma_m d\gamma_m = \gamma' d\gamma'.$$

Les limites relatives à γ', qui remplace γ_m, étant o et γ', nous pourrons écrire:

$$P'_m = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^m \int_0^{\gamma'} d\gamma_m\, e^{-S_i \gamma_i^2} {}_{m-1}\!\int_0 d\gamma_1\, d\gamma_2 \cdots d\gamma_{m-1} \left(1 + \frac{\delta}{s}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^m \int_0^{\gamma'} \gamma' d\gamma'\, e^{-\gamma'^2} {}_{m-1}\!\int_0 \frac{d\gamma_1\, d\gamma_2 \cdots d\gamma_{m-1}}{\sqrt{\gamma'^2 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2 - \cdots - \gamma_{m-1}^2}} \left(1 + \frac{\delta}{s}\right)$$

$$P'_m = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^m \int_0^{\gamma'} u\,du\, e^{-u^2} {}_{m-1}\!\int_0 \frac{dt_1\, dt_2 \cdots dt_{m-1}}{\sqrt{u^2 - t_1^2 - t_2^2 - \cdots - t_{m-1}^2}} \cdot \left(1 + \frac{\delta}{s}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^m \int_0^{\gamma'} u\,du\, e^{-u^2}\, V \left(1 + \frac{\delta}{s}\right) \tag{I}$$

$$V = {}_{m-1}\!\int_0 \frac{dt_1\, dt_2 \cdots dt_{m-1}}{\sqrt{u^2 - t_1^2 - t_2^2 - \cdots - t_{m-1}^2}}$$

$$= \int_0^{\sqrt{u^2}} dt_1 \int_0^{\sqrt{u^2 - t_1^2}} dt_2 \int_0^{\sqrt{u^2 - t_1^2 - t_2^2}} dt_3 \cdots\cdots \int_0^{\sqrt{u^2 - t_1^2 - t_2^2 \cdots - t_{m-2}^2}} dt_{m-2} \left(u^2 - t_1^2 - t_2^2 - \cdots - t_{m-1}^2\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{B}$$

Cette expression de P'_m est la probabilité que $\tau_i = \nu s + l_i = \mu_1 S_h F_{i,h} + l_i$

$$= x_i S_h F_{i,h}\, a_{i,h},$$

ne sort pas des limites

$$\mu_1 S_h F_{i,h} \pm \gamma' \sqrt{S_h F_{i,h}^2}\, \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)},$$

et par conséquent que x_i est compris dans les limites

$$\frac{\mu_1 S_h F_{i,h}}{S_h F_{i,h}\, a_{i,h}} \pm \frac{\gamma' \sqrt{S_h F_{i,h}^2}}{S_h F_{i,h}\, a_{i,h}} \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)}.$$

C'est donc aussi la probabilité que η_i est compris entre

$$\eta'_i + \frac{\mu_1 S_h F_{i,h}}{S_h F_{i,h} a_{i,h}} \pm \frac{\gamma' \sqrt{S_h F^2_{i,h}}}{S_h F_{i,h} a_{i,h}} \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)}.$$

Ces limites seront pour le même γ', et par conséquent pour la même probabilité P'_m, les plus étroites possibles quand $\frac{\sqrt{S_h F^2_{i,h}}}{S_h F_{i,h} a_{i,h}}$ est un minimum. De plus, comme γ_i ne sort pas des limites $\pm \gamma'$, il est clair que γ', donc P'_m, sera le plus grand possible, quand pour le même l_i, le facteur $S_h F^2_{i,h}$, dans l'expression $\gamma' = \frac{l_i}{\sqrt{2 S_h F^2_{i,h}(\mu_2 - \mu_1^2)}}$, et par conséquent le rapport $\frac{\sqrt{S_h F^2_{i,h}}}{S_h F_{i,h} a_{i,h}}$, sera un minimum. Par conséquent la valeur la plus avantageuse du facteur $F_{i,h}$, employé dans la détermination de η_i, sera celle qui se déduira de l'équation

$$\frac{S_h F^2_{i,h}}{(S_h F_{i,h} a_{i,h})^2} = \text{min}.$$

Or, en résolvant cette équation par le procédé indiqué dans le théorème précédent, nous trouverons, pour cette valeur la plus avantageuse :

$$F_{i,h} = a_{i,h} ;$$

ce qui est précisément, comme nous verrons, le facteur employé dans la méthode des moindres carrés. Cette méthode est donc la plus avantageuse pour déterminer les inconnues η_i.

Soit m_i ce que devient η'_i pour $F_{i,h} = a_{i,h}$, nous aurons la probabilité ci-dessus P'_m que η_i est compris entre

$$m_i + \frac{\mu_1 S_h a_{i,h}}{S_h a^2_{i,h}} \pm \frac{\gamma'}{\sqrt{S_h a^2_{i,h}}} \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)} ;$$

expression dans laquelle on a $m_i = \frac{S_h a_{i,h} n_h}{S_h a^2_{i,h}}$.

nous voyons donc, par la formule (β, pour $F_{i,h} = a_{i,h}$, que $x_i = \frac{\mu_1 S_h a_{i,h}}{S_h a^2_{i,h}}$ est la valeur de x_i qui rend y un maximum ; d'où il suit que la valeur la plus probable de η_i est

$$\eta_i = \frac{S_h a_{i,h} n_h + \mu_1 S_h a_{i,h}}{S_h a^2_{i,h}}.$$

Quand $\mu_1 = o$, cette valeur se réduit à m_i.

Mais $\mu_1 = o$, suppose que $\varphi(-\varepsilon) = \varphi(\varepsilon)$, qu'il n'y a pas d'erreurs constantes, et dans ce cas on aura toujours la probabilité ci-dessus P'_m que η_i est compris dans les limites

$$m_i \pm \frac{\gamma'}{\sqrt{S_h a^2_{i,h}}} \sqrt{2 \mu_2}. \tag{II}$$

Soit ε'_h ce que devient ε_h quand on pose

$$F_{i,h} = a_{i,h}, \; \eta_i = m_i,$$

nous aurons :

$$\varepsilon'^2_h = [-n_h + a_{1,h} m_1 + a_{2,h} m_2 + \cdots + a_{m,h} m_k]^2,$$

et nous pourrons poser approximativement, d'après la form. (a) Thé. I :

$$\mu_2 = \frac{S_h\, \varepsilon_h'^2}{s};$$

ce qui changera les limites (II) ci-dessus, en :

$$m_i \pm \frac{\gamma}{\sqrt{S_h\, a_{i,h}^2}} \sqrt{\frac{2 \cdot S_h\, \varepsilon_h'^2}{s}}. \qquad \text{(III.)}$$

Cette formule est définitive; elle ne contient plus rien qui ne soit donné par les observations.

Nous avons trouvé que

$$m_i = \frac{S_h\, a_{i,h}\, n_h}{S_h\, a^2_{i,h}}$$

était, dans le cas de $\mu_1 = o$, la valeur la plus probable de η_i. Or, c'est précisément cette valeur que l'on obtient par la méthode des moindres carrés. En effet, en posant, conformément à cette méthode :

$$S_h\, \varepsilon^2_h = S_h\, [-n_h + a_{1,h}\,\eta_1 + \cdots + a_{i,h}\,\eta_i + \cdots + a_{m,h}\,\eta_m]^2 = \text{minim.},$$

d'où :

$$\frac{d\, S_h\, \varepsilon^2_h}{d\eta_i} = o,$$

on trouve

$$S_h\, a_{i,h}\, [-n_h + a_{1,h}\,\eta_1 + a_{2,h}\,\eta_2 + \cdots + a_{i-1,h}\,\eta_{i-1} + a_{i,h}\,\eta_i + a_{i+1,h}\,\eta_{i+1} + \cdots + a_{m,h}\,\eta_m] = o, \qquad \text{(IV)}$$

ou

$$- S_h\, a_{i,h}\, n_h + S_h\, a_{i,h}\, a_{1,h}\,\eta_1 + S_h\, a_{i,h}\, a_{2,h}\,\eta_2 + \ldots + S_h\, a_{i,h}\, a_{i-1h}\,\eta_{i-1} + S_h\, a_{i,h}\, a_{i,h}\,\eta_i + S_h\, a_{i,h}\, a_{i+1,h}\,\eta_{i+1} + \ldots$$
$$+ S_h\, a_{i,h}\, a_{m,h}\,\eta_m = o. \qquad (b)$$

mais en posant dans les formules (A), $F_{i,h} = a_{i,h}$, on a :

$$S_h\, a_{i,h}\, a_{1,h} = o,\; S_h\, a_{i,h}\, a_{2,h} = o, \cdots S_h\, a_{i,h}\, a_{i-1,h} = o,\; S_h\, a_{i,h}\, a_{i+1,h} = o, \cdots S_h\, a_{i,h}\, a_{m,h} = o,$$

il vient donc, par l'équation (b) :

$$\eta_i = \frac{S_h\, a_{i,h}\; n_h}{S_h\, a^2_{i,h}} = m_i.$$

L'on voit, en même temps, par la formule (IV), que $F_{i,h} = a_{i,h}$ est effectivement le facteur employé dans la méthode des moindres carrés.

Pour achever maintemant la démonstration de notre théorème, nous n'avons plus qu'à réduire l'intégrale multiple P'_m.

Les intégrations successives contenues dans la formule (B) se ramènent toutes à la forme

$$\int_0^{\sqrt{a}} dt\,(a - t^2)^{\frac{\mu}{2}} = \frac{a^{\frac{\mu+1}{2}}}{2} \int_0^1 \tau^{\frac{\mu}{2}+1} (1-\tau)^{\frac{1}{2}-1}$$

$$= \frac{a^{\frac{\mu+1}{2}}}{2} \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}+1\right)}. \qquad (e)$$

Si donc nous posons successivement :

$$\sqrt{u^2 - t_1^2 - \cdots - t_{m-2}^2} = \sqrt{a},$$
$$\sqrt{u^2 - t_1^2 - \cdots - t_{m-3}^2} = \sqrt{a},$$
etc.
$$\sqrt{u^2 - t_1^2 - t_2^2} = \sqrt{a},$$
$$\sqrt{u^2 - t_1^2} = \sqrt{a},$$
$$\sqrt{u^2} = \sqrt{a},$$

nous trouvons, par la formule (e), pour l'expression de V, donnée par la formule (β), la valeur :

$$V = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{m-1} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1)} \cdot \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{4}{2})} \cdots \frac{\Gamma(\frac{m-1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})} u^{m-2}$$

$$= u^{m-2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^m \cdot \frac{2}{\Gamma(\frac{m}{2})}.$$

On a donc, par la formule (I) :

$$P'_m = \frac{2}{\Gamma(\frac{m}{2})} \int_0^{\gamma'} u^{m-1}\, du\, e^{-u^2} \left(1 + \frac{\delta}{s}\right).$$

Or, l'intégration par parties conduit à :

$$\int u^{m-1} e^{-u^2} du = -\tfrac{1}{2} e^{-u^2} u^{m-2} - \frac{m-2}{2} e^{-u^2} u^{m-4} - \frac{(m-2)(m-4)}{2^3} e^{-u^2} u^{m-4} - \text{etc.}$$
$$- \frac{(m-2)(m-4)\cdots(m-2i)}{2^{i+1}} e^{-u^2} u^{m-2i-2} +$$
$$\frac{(m-2)(m-4)\cdots(m-2i-2)}{2^{i+1}} \int e^{-u^2} u^{m-2i-3} du.$$

Donc, pour $u = \begin{cases} \gamma' \\ 0 \end{cases}$, il vient

$$\int_0^{\gamma'} u^{m-1} du\, e^{-u^2} = -\tfrac{1}{2} e^{-\gamma'^2} \Big\{ \gamma'^{m-2} + \frac{m-2}{2} \gamma'^{m-4} + \frac{(m-2)(m-4)}{2^2} \gamma'^{m-6} + \cdots$$
$$+ \frac{(m-2)(m-4)\cdots(m-2i)}{2^i} \gamma'^{m-2i-2} \Big\} +$$
$$\frac{(m-2)(m-4)\cdots(m-2i-2)}{2^{i+1}} \int_0^{\gamma'} e^{-u^2} du \cdot u^{m-2i-3}.$$

1° Soit $m = 2k-1$, $P'_m = P'_{2k-1}$, $i = k-2$, il vient, à cause de

$$\frac{1 \cdot 3 \cdots 2n-1}{2^n} \sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right),$$

$$P'_{2k-1} = \Big[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma'} e^{-u^2}\,du - e^{-\gamma'^2} \Big\{ \frac{\gamma'^{2k-3}}{\Gamma(\frac{2k-1}{2})} + \frac{\gamma'^{2k-5}}{\Gamma(\frac{2k-3}{2})} + \ldots + \frac{\gamma'}{\Gamma(\frac{3}{2})} \Big\} \Big] (1 + \frac{\delta}{s}), \qquad (1')$$

2° Soit $m = 2k$, $P'_m = P'_{2k}$, $i = K2$, il vient :

$$P'_{2k} = \Big[1 - e^{-\gamma'^2} \Big\{ \frac{\gamma'^{2k-2}}{\Gamma(\frac{2k}{2})} + \frac{\gamma'^{2k-4}}{\Gamma(\frac{2k-2}{2})} + \ldots + \frac{\gamma'^2}{\Gamma(\frac{4}{2})} + 1 \Big\} \Big] (1 + \frac{\delta}{s}). \qquad (2')$$

En prenant s très-grand on pourra, conformément au 3^e Théo. de la 1^re section, négliger la fraction $\frac{\delta}{s}$, et l'on trouvera, à la place des probabilités exactes P'_{2k-1}, P'_{2k}, les probabilités très-approchées

$$P_{2k-1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-u^2}\,du - e^{-\gamma^2} \Big\{ \frac{\gamma^{2k-3}}{\Gamma(\frac{2k-1}{2})} + \frac{\gamma^{2k-5}}{\Gamma(\frac{2k-3}{2})} + \ldots + \frac{\gamma}{\Gamma(\frac{3}{2})} \Big\},$$

quand m est impair, et

$$P_{2k} = 1 - e^{-\gamma^2} \Big\{ \frac{\gamma^{2k-2}}{\Gamma(\frac{2k}{2})} + \frac{\gamma^{2k-4}}{\Gamma(\frac{2k-2}{2})} + \ldots + \frac{\gamma^2}{\Gamma(\frac{4}{2})} + \Big\},$$

quand m est pair, que l'inconnue η_i est entre

$$m_i + \frac{\mu_1 S_h a_{i,h}}{S_h a^2_{i,h}} \pm \frac{\gamma}{\sqrt{S_h a^2_{i,h}}} \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)}.$$

QUATRIÈME SECTION.

PROBABILITÉS RELATIVES A LA VIE HUMAINE.

Je réunis dans cette section, en les démontrant d'une manière plus générale et plus rigoureuse, les formules de Laplace sur les erreurs des Tables de mortalité, la durée moyenne de la vie, celle des mariages, et les bénéfices éventuels des institutions d'assurances, fondées sur la probabilité de la vie humaine. Ces matières, que j'exposerai sous la formule de quatre théorèmes, comprennent les fondements, et la partie la plus utile de la branche de la théorie des probabilités à postériori, appliquée à la vie humaine.

Théorème I.

ε_i désignant l'erreur qui affecte le nombre m_i *d'une table de mortalité, construite sur un très-grand nombre* s *d'observations de l'ordre* s, *je dis qu'il y aura, aux quantités près de l'ordre* $\frac{1}{s^2}$, *une probabilité*

$$P_i = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2}\, dt$$

que le rapport $\frac{\varepsilon_i}{m_i}$ *est compris dans les limites*

$$\pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{\frac{2(s-m_i)}{m_i}}$$

Démonstration.

Soient s, m_1, m_2, ... m_i, ...
les nombres d'une table de mortalité, savoir les nombres des survivants aux âges

$$a_0,\ a_0+a_1,\ a_0+a_1+a_2,\ \ldots\ a_0+a_1+a_2+\ldots+a_i,\ \ldots;$$

ces nombres seront fautifs de quantités que je désignerai respectivement par

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots\ \varepsilon_i,\ \ldots .$$

Soient n_0, n_1, n_2, ... n_i, ... les nombres consécutifs d'une table de mortalité exacte, exprimant les vrais nombres des survivants aux âges ci-dessus, et par conséquent construite dans l'hypothèse où le nombre n_0 des observations, c'est-à-dire, des individus de l'âge a_0 serait infini. Si nous réduisons les nombres de cette table hypothétique par la proportion

$$n_0' : s :: n_i' : p_i ,$$

d'où :

$$p_i = s \cdot \frac{n_i'}{n_0} ,$$

nous aurons généralement

$$m_i = p_i + \varepsilon_i = s \frac{n_i}{n_0} + \varepsilon_i .$$

alors

$$s ,\ p_1 ,\ p_2 ,\ \ldots\ p_i ,\ \ldots .$$

seront les nombres vrais des survivants aux âges

$$a_0 ,\ a_0 + a_1 ,\ a_0 + a_1 + a_2 ,\ \ldots a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_i ,\ \ldots$$

quand le nombre des individus de l'âge a_0 est réduit de n_0 à s.

Cherchons d'abord la probabilité y_1, de ε_1, savoir celle que sur s individus de l'âge a_0, un nombre $m_1 = p_1 + \varepsilon_1$ vivra à l'âge $a_0 + a_1$.

Soit x la probabilité d'un individu de l'âge a_0 de vivre à l'âge $a_0 + a_1$, nous pourrons faire sur les valeurs de x toutes les suppositions, depuis $x = o$, jusqu'à $x = 1$. Soit ω la probabilité d'une de ces suppositions, ω' la probabilité que dans cette supposition, de s individus de l'âge a_0, un nombre m_1 vivra à l'âge $a_0 + a_1$, il est clair que $\omega\omega'$ sera la même probabilité correspondante à cette supposition, ou valeur de x, regardée, non comme certaine, mais seulement comme probable. Mais comme la cause x est susceptible de toutes les valeurs possibles entre les limites o et 1, il est clair que l'on aura :

$$y_1 = \int_0^1 \omega\omega' .$$

Or, on a manifestement

$$\omega = \frac{x^{p_1} (1-x)^{s-p_1} dx}{\int_0^1 x^{p_1} (1-x)^{s-p_1} dx} ,$$

$$\omega = \frac{s\,!}{m_1!\,(s-m_1)!} x^{m_1} (1-x)^{s-m_1} ;$$

il vient donc :

$$y_1 = \frac{s\,!}{m_1!\,(s-m_1)!} \frac{\int_0^1 x^{m_1+p_1} (1-x)^{2s-m_1-p_1} dx}{\int_0^1 x^{p_1} (1-x)^{s-p_1} dx.} .$$

Réduisons cette expression, par les formules connues :

$$\int_0^1 x^a (1-x)^b dx = \frac{a^{a+\frac{1}{2}} b^{b+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}}{(a+b)^{a+b+\frac{3}{2}}} ,$$

$$\eta! = \Gamma(\eta+1) = 1\cdot 2\cdots\eta = \eta^{\eta+\frac{1}{2}}\, e^{-\eta}\, \sqrt{2\pi},$$

et posons $m_1 = p_1 + \varepsilon_1$, nous trouverons :

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{s}{2p_1(s-p_1)}}\cdot\frac{\left(1+\frac{\varepsilon_1}{2p_1}\right)^{2p_1+\varepsilon_1+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\varepsilon_1}{s-p_1}\right)^{2(s-p_1)-\varepsilon_1+\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{\varepsilon_1}{p_1}\right)^{p_1+\varepsilon_1+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\varepsilon_1}{s-p_1}\right)^{s-p_1-\varepsilon_1+\frac{1}{2}}}.$$

Posons, pour un moment

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{s}{2p_1(s-p_1)}},$$

développons par la formule

$$\log(1\pm u) = \pm u - \frac{u^2}{2} \pm \cdots,$$

et négligeons les termes de l'ordre $\frac{1}{s^2}$, s et p_1 étant de l'ordre s, et très-grands, nous trouverons :

$$\begin{aligned}\log y_1 &= \log A + \varepsilon_1\left\{\frac{1}{4(s-p_1)} - \frac{1}{4p_1}\right\} - \varepsilon_1^2\left\{\frac{1}{2p_1} + \frac{1}{2(s-p_1)}\right\}\\ &= \log A + \frac{\varepsilon_1}{2}\cdot\frac{2p_1-s}{2p_1(s-p_1)} - \varepsilon_1^2\cdot\frac{s}{2p_1(s-p_1)}\\ &= \log\left\{A\cdot e^{-\frac{\varepsilon_1^2 s}{2p_1(s-p_1)}}\cdot e^{-\frac{\varepsilon_1}{2}\frac{2p_1-s}{2p_1(s-p_1)}}\right\},\end{aligned}$$

d'où

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{s}{sp_1(s-p_1)}}\cdot e^{-\frac{s}{2p_1(s-p_1)}\varepsilon_1^2}\cdot e^{-\frac{2p_1-s}{2p_1(s-p_1)}\frac{\varepsilon_1}{2}};$$

c'est la probabilité que sur s individus de l'âge a_0 un nombre

$$m_1 = p_1 + \varepsilon_1 = s\cdot\frac{n_1}{n_0} + \varepsilon_1$$

survivra à l'âge $a_0 + a_1$.

Donc, si nous nommons y_2 la probabilité que sur s individus de l'âge a_0 un nombre

$$m_2 = m_1\frac{n_2}{n_1} + u$$

survivra à l'âge $a_0 + a_1 + a_2$, on aura, par la formule précédente :

$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{m_1}{2p_2(m_1-p_2)}}\cdot e^{-\frac{m_1}{2p_2(m_1-p_2)}u^2}\cdot e^{\frac{2p_2-m_1}{2p_2(m_1-p_2)}\frac{u}{2}}.$$

mais comme on a

$$m_2 = s\cdot\frac{n_2}{n_0} + \varepsilon_2,$$

on aura aussi :

$$m_1 \frac{n_2}{n_1} + u = s.\frac{n_2}{n_0} + \varepsilon_2 ;$$

d'où :

$$u = s\cdot\frac{n_2}{n_0} + \varepsilon_2 - m_1\cdot\frac{n_2}{n_1},$$

$$= s\frac{n_2}{n_0} + \varepsilon_2 - \left(s\cdot\frac{n_1}{n_0} + \varepsilon_1\right)\frac{n_2}{n_1},$$

$$= \varepsilon_2 - \frac{n_2}{n_1}\varepsilon_1.$$

Remplaçons le rapport $\frac{n_2}{n_1}$ par $\frac{m_2}{m_1}$ dont il ne diffère pas beaucoup, puis mettons aussi à la place de p_1 et p_2, nombres inconnus, leurs valeurs approchées m_1, m_2, les deux formules ci-dessus deviendront :

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{s}{2m_1(s-m_1)}}\; e^{-\frac{s\varepsilon_1^2}{2m_1(s-m_1)}\;\frac{2m_1-s}{2m_1(s-m_1)}\cdot\frac{\varepsilon_1}{2}}$$

$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{m_1}{2m_2(m_1-m_2)}}\; e^{-\frac{m_1\left(\varepsilon_2-\frac{m_2}{m_1}\varepsilon_1\right)^2}{2m_2(m_1-m_2)}\;\frac{2m_2-m_1}{2m_2(m_1-m_2)}\cdot\frac{\left(\varepsilon_2-\frac{m_2}{m_1}\varepsilon_1\right)}{2}}.$$

Soit y_3 la probabilité que sur m_2 individus de l'âge $a_0 + a_1 + a_2$ un nombre m_3 arrivera à l'âge $a_0 + a_1 + a_2 + a_3$, on aura de même :

$$y_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{m_2}{2m_3(m_2-m_3)}}\; e^{-\frac{m_2\left(\varepsilon_3-\frac{m_3}{m_2}\varepsilon_2\right)^2}{2m_3(m_2-m_3)}\;\frac{2m_3-m_2}{2m_3(m_2-m_3)}\cdot\frac{\left(\varepsilon_3-\frac{m_3}{m_2}\varepsilon_2\right)}{2}}.$$

En général

$$y_i = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{m_{i-1}}{2m_i(m_{i-1}-m_i)}}\; e^{-\frac{m_{i-1}\left(\varepsilon_i-\frac{m_i}{m_{i-1}}\varepsilon_{i-1}\right)^2}{2m_i(m_{i-1}-m_i)}\;\frac{2m_i-m_{i-1}}{2m_i(m_{i-1}-m_i)}\cdot\frac{\left(\varepsilon_i-\frac{m_i}{m_{i-1}}\varepsilon_{i-1}\right)}{2}}$$

exprime la probabilité que sur m_{i-1} individus de l'âge $a_0 + a_1 + \dots + a_{i-1}$, un nombre m_i survivra à l'âge $a_0 + a_1 + \dots + a_{i-1} + a_i$.

Fesons, pour abréger :

$$K_i = \sqrt{\frac{m_{i-1}}{2m_i(m_{i-1}-m_i)}},$$

et nommons y la probabilité que sur s individus de l'âge a_0, m_1 arrivent à l'âge $a_0 + a_1$, m_2 à l'âge $a_0 + a_1 + a_2$, etc., m_i à l'âge $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{i-1} + a_i$, en même temps, nous aurons :

$$y = y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \dots y_i.$$

Posons

$$\Pi\, k_i = k_1\, k_2 \dots k_i,$$

$$S\, k_i^2 \left(\varepsilon_i - \frac{m_i}{m_{i-1}}\, \varepsilon_{i-1}\right)^2 = k_1^2 \varepsilon_1^2 + k_2^2 \left(\varepsilon_2 - \frac{m_2}{m_1}\, \varepsilon_1\right)^2 + \ldots + k_i^2 \left(\varepsilon_i - \frac{m_i}{m_{i-1}}\, \varepsilon_{i-1}\right)^2,$$

$$S\, L_{i-1}\, \varepsilon_{i-1} = L_1\, \varepsilon_1 + L_2\, \varepsilon_2 + \ldots + L_{i-1}\varepsilon_{i-1},$$

$$L_{i-1} = \frac{1}{4\, m_{i-1}} \cdot \frac{m_{i-1}^2 - m_{i-2}\, m_i}{(m_{i-2} - m_{i-1})\; (m_{i-1} - m_i)}$$

$$L_i = \frac{1}{4 m_i} \cdot \frac{2\, m_i - m_{i-1}}{m_{i-1} - m_i},$$

nous aurons :

$$y = \frac{\Pi\, k_i}{(\sqrt{\pi})^i}\, e^{-S\, k_i^2 \left(\varepsilon_i - \frac{m_i}{m_{i-1}} \varepsilon_{i-1}\right)^2}\, e^{S\, L_{i-1}\, \varepsilon_{i-1} + L_i\, \varepsilon_i^2}$$

$$= \frac{\Pi\, k_i}{(\sqrt{\pi})^i}\, e^{-S k_i^2 \left(\varepsilon_i - \frac{m_i^2}{m_{i-1}} \varepsilon_{i-1}\right)^2} \left(1 + S\, L_{i-1}\, \varepsilon_{i-1} + L_i\, \varepsilon_i + \text{etc.}\right). \qquad (a)$$

les quantités L_i, $S\, L_{i-1}$ sont de l'ordre $\frac{1}{s}$, si donc nous posons :

$$L_i = \frac{\lambda_i}{s},\ S\, L_{i-1} = \frac{\lambda_{i-1}}{s},\ S\, L_{i-1}\varepsilon_{i-1} + L_i\, \varepsilon_i = \frac{\Phi}{s},$$

il est clair que la série

$$1 + S\, L_{i-1}\, \varepsilon_{i-1} + L_i \varepsilon_i^2 + \text{etc.},$$

pourra s'écrire

$$1 + \frac{\Phi}{s} + \frac{1}{1 \cdot 2}\, \frac{\Phi^2}{s^2} + \text{etc.} = e^{\frac{\varphi}{s}},$$

qui est toujours convergente. Donc, puisque s est très-grand, on pourra négliger les termes supérieurs à l'ordre $\frac{1}{s}$, et alors on aura, aux termes de l'ordre $\frac{1}{s^2}$ près :

$$e^{\frac{\varphi}{s}} = 1 + \frac{\Phi}{s} = 1 + S\, L_{i-1}\, \varepsilon_{i-1} + L_i\, \varepsilon_i.$$

mais pour obtenir la probabilité cherchée P_i nous devons intégrer l'expression y entre des limites égales et de signes contraires, il est donc clair que les termes de cette intégrale relatifs aux puissances impaires des ε_{i-1}, ε_i s'en iront, et par conséquent il sera inutile d'écrire, dans la valeur approchée ci-dessus de $e^{\frac{\varphi}{s}}$, les deux termes $S\, L_{i-1}\, \varepsilon_{i-1} + L_i\, \varepsilon_i$. Par toutes ces considérations nous pourrons remplacer la formule (a) par la suivante :

$$y = \frac{\Pi\, k_i}{(\sqrt{\pi})^i}\, e^{-S k_i^2 \left(\varepsilon_i - \frac{m_i}{m_{i-1}} \varepsilon_{i-1}\right)^2}. \qquad (b)$$

Transformons cette expression dans le but de séparer les nouvelles variables à introduire à la place des variables ε_i, ε_{i-1}.

A cet effet posons :

$$\Omega_3 = k_3^2 \left(\varepsilon_3 - \frac{m_3}{m_2}\, \varepsilon_2\right)^2 + \ldots + k_i^2 \left(\varepsilon_i - \frac{m_i}{m_{i-1}}\, \varepsilon_{i-1}\right)^2,$$

$$\Omega_4 = k_4^2(\varepsilon_4 - \frac{m_4}{m_3}\varepsilon_3)^2 + \ldots + k_i^2(\varepsilon_i - \frac{m_i}{m_{i-1}}\varepsilon_{i-1})^2 ,$$

etc. , etc.

$$\Omega_{i-1} = k_{i-1}^2(\varepsilon_{i-1} - \frac{m_{i-1}}{m_{i-2}}\varepsilon_{i-2})^2 + \ldots + k_i^2(\varepsilon_i - \frac{m_i}{m_{i-1}}\varepsilon_{i-1})^2 ,$$

$$\Omega_i = k_i^2(\varepsilon_i - \frac{m_i^2}{m_{i-1}}\varepsilon_{i-1})^2 ,$$

$$a_2 = k_1^2 + k_2^2\frac{m_2^2}{m_1^2} = \frac{s - m_2}{2(s-m_1)(m_1 - m_2)}, \qquad b_2 = k_2^2\frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{2(m_1 - m_2)},$$

$$c_2 = k_2^2 - \frac{b_2^2}{a_2} = \frac{s}{2m_2(s - m_2)}, \qquad t_1 = \sqrt{a_2}\,(\varepsilon_1 - \frac{b_2}{a_2}\varepsilon_2),$$

$$a_3 = c_2 + k_3^2\frac{m_3^2}{m_2^2} = \frac{s - m_3}{2(s - m_2)(m_2 - m_3)}, \qquad b_3 = k_3^2\frac{m_3}{m_2} = \frac{1}{2(m_2 - m_3)},$$

$$c_3 = k_3^2 - \frac{b_3^2}{a_3} = \frac{s}{2m_3(s - m_3)}, \qquad t_2 = \sqrt{a_3}\,(\varepsilon_2 - \frac{b_3}{a_3}\varepsilon_2 ,$$

$$a_4 = c_3 + k_4^2\frac{m_4^2}{m_3^2} = \frac{s - m_4}{2(s - m_3)(m_3 - m_4)}, \qquad b_4 = k_4^2\frac{m_4}{m_3} = \frac{1}{2(m_3 - m_4)},$$

$$c_4 = k_4^2 - \frac{b_4^2}{a_4} = \frac{s}{2m_4(s - m_4)}, \qquad t_3 = \sqrt{a_4}\,(\varepsilon_4 + \frac{b_4}{a_4}\varepsilon_3),$$

etc. , etc. , etc.

$$c_i = k_i^2 - \frac{b_i^2}{a_i} = \frac{s}{2m_i(s - m_i)};$$

nous aurons successivement :

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}\,k_i^2(\varepsilon_i - \frac{m_i}{m_{i-1}}\varepsilon_{i-1})^2 &= k_1^2\varepsilon_1^2 + k_2^2(\varepsilon_2 - \frac{m_2}{m_1}\varepsilon_1)^2 + \Omega = t_1^2 + c_2\varepsilon_2^2 + \Omega_3 \\
&= t_1^2 + c_2\varepsilon_2^2 + k_3^2(\varepsilon_3 - \frac{m_3}{m_2}\varepsilon_2)^2 + \Omega_4 \\
&= t_1^2 + t_2^2 + c_3\varepsilon_3^2 + \Omega_4 \\
&= t_1^2 + t_2^2 + c_3\varepsilon_3^2 + k_4^2(\varepsilon_4 - \frac{m_4}{m_3}\varepsilon_3)^2 + \Omega_5 \\
&= t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + c_4\varepsilon_4^2 + \Omega_5 \\
&= \text{etc.} \\
&= t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_{i-1}^2 + c_i\varepsilon_i^2. \qquad (c)
\end{aligned}$$

Cela posé, la formule (b) pourra être remplacée par la suivante :

$$y = \frac{\Pi k_i}{(\sqrt{\pi})^i}\, e^{-\mathrm{S}\,t_{i-1}^2} . \, e^{-c_i\varepsilon_i^2}, \qquad (d)$$

formule dans laquelle on a

$$\mathrm{S}\,t_{i-1}^2 = t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_{i-1}^2 ,$$

et dans laquelle les nouvelles variables

$$t_1 , \; t_2 \ldots \; t_{i-1}$$

sont liées aux anciennes

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{i-1}$$

par les équations

$$t_1 = \sqrt{a_2}\left(\varepsilon_1 - \frac{b_2}{a_2}\varepsilon_2\right),$$

$$t_2 = \sqrt{a_3}\left(\varepsilon_2 - \frac{b_3}{a_3}\varepsilon_3\right),$$

$$t_{i-1} = \sqrt{a_i}\left(\varepsilon_{i-1} - \frac{b_i}{a_i}\varepsilon_i\right),$$

et desquelles on déduit

$$\frac{dt_1}{d\varepsilon^1} = \sqrt{a_2},\quad \frac{dt_2}{d\varepsilon_2} = \sqrt{a_3},\ \dots\ \frac{dt_{i-1}}{d\varepsilon_{i-1}} = \sqrt{a_{i-1}}. \qquad (e)$$

Nous pouvons maintenant obtenir par deux procédés différents la probabilité cherchée P_i.

1er *Procédé.*

Si l'on considère le nombre m_i, et par suite la variable ε_i isolément, les limites relatives aux autres variables $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{i-1}$, et par suite celles relatives à $t_1,\ t_2,\ \dots\ t_{i-1}$ seront quelconques, et pourront s'étendre de $-\infty$ à ∞. Nous aurons donc, en intégrant l'expression (d), relativement à ε_i, entre les limites $-\varepsilon_i,\ \varepsilon_i$, et relativement aux t_{i-1}, entre les limites $-\infty,\ \infty$, la formule :

$$P_i = \frac{\Pi k_i}{(\sqrt{\pi})^i}\int_{-\varepsilon_i}^{\varepsilon_i} d\varepsilon_i \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_1} d\varepsilon_1 \int_{-\varepsilon_2}^{\varepsilon_2} d\varepsilon_2 \dots \int_{-\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_{i-1}} d\varepsilon_{i-1}\ e^{-S k_i^2\left(\varepsilon_i - \frac{m_i}{m_{i-1}}\varepsilon_{i-1}\right)^2}$$

$$= \frac{k_1 k_2 \cdots k_i}{\sqrt{\pi}\sqrt{a_2}\sqrt{a_3}\dots\sqrt{a_i}}\int_{-\varepsilon_i}^{\varepsilon_i} e^{-c_i\varepsilon_i^2}\, d\varepsilon_i \cdot \frac{1}{(\sqrt{\pi})^{i-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} e^{-S t_{i-1}^2}\, dt_1\, dt_2 \dots dt_{i-1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\dots\frac{k_1 k_2 \dots k_i}{\sqrt{a_2}\sqrt{a_3}\dots\sqrt{a_i}}\int_0^{\varepsilon_i} e^{-c_i\varepsilon_i^2}\, d\varepsilon_i.$$

C'est la probabilité que le nombre isolé m_i de la table a une valeur comprise entre $p_i \pm \varepsilon_i$; c'est donc aussi la probabilité que ε_i, ou $m_i - p_i$ est compris entre $\pm\ \varepsilon_i$.

Mais on a

$$k_1\frac{k_2 k_3 \dots k_i}{\sqrt{a_2}\sqrt{a_3}\sqrt{a_i}} = \sqrt{\frac{s}{2m_i(s - m_i^2)}} = \sqrt{c_i};$$

il vient donc, pour la probabilité ci-dessus :

$$P_i = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\varepsilon_i} e^{-c_i\varepsilon_i^2}\sqrt{c_i}\, d\varepsilon_i\ .$$

Soit maintenant

$$\sqrt{c_i}\cdot\varepsilon_i = \gamma,\quad \varepsilon_i = \frac{\gamma}{\sqrt{c_i}},$$

on aura la probabilité

$$P_i = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-\gamma^2}\, d\gamma = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2}\, dt,$$

que ε_i, ou $m_i - p_i$ est compris entre les limites

$$\pm \varepsilon_i = \pm \frac{\gamma}{\sqrt{c_i}} = \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{2\, m_i\,(s - m^i)},$$

et par conséquent que le rapport $\frac{\varepsilon_i}{m_i}$ est compris entre

$$\pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{\frac{2\,(s - m_i)}{m_i}}.$$

Il suit encore de là que

$$P_i = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2}\, dt,$$

est la probabilité que m_i est compris entre

$$p_i \pm \varepsilon_i = p_i \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{2\, m_i\,(s - m_i)},$$

ou que

$$\frac{m_i}{s} \text{ est compris entre } \frac{p_i}{s} \pm \frac{\gamma}{s} \sqrt{\frac{2\, m_i\,(s - m_i)}{s}}.$$

Donc les rapports $\frac{m_i}{s}$ et $\frac{p_i}{s}$ différeront d'autant moins le plus probablement entre eux, que s sera plus grand. Le 1^{er} de ces rapports exprime la probabilité d'un individu de l'âge a_0 d'atteindre à l'âge $a_0 + a_1 + .. + a_i$ telle qu'elle résulte d'une table de mortalité construite sur s observations; le second rapport, savoir $\frac{p_i}{s}$, est au contraire la vraie probabilité qu'a cet individu d'arriver à l'âge indiqué.

2° *Procédé.*

Posons dans la formule (*d*)

$$M = \frac{\Pi k_i}{(\sqrt{\pi})^2} e^{-S\, t^2_{i-1}},$$

nous aurons

$$y = M \,.\, e^{-c_i \varepsilon^2_i}.$$

Si donc, on veut considérer seulement le nombre isolé m_i de la table de mortalité, correspondant à l'erreur ε_i, on trouvera, par la condition du maximum, savoir :

$$\frac{dy}{d\varepsilon^i} = 0,$$

que le maximum de y répond à

$$\varepsilon_i = 0;$$

c'est la valeur de m dans le théor. 2, 2^e sect., de Laplace. Comme on a d'ailleurs :

$$\log y = \log \mathrm{M} - c_i\, \varepsilon_i^2,$$

$$-\frac{d^2 \log y}{2\, d\varepsilon_i^2} = c_i,$$

on trouve, en vertu de ce théorème de Laplace : une probabilité

$$\mathrm{P}_i = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2}\, dt,$$

que l'inconnue ε_i, ou $m_i - p_i$, est compris entre les limites

$$\pm \frac{\gamma}{\sqrt{c_i}} = \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{2\, m_i\, (s - m_i)}.$$

P_i est donc aussi la probabilité que le rapport $\frac{\varepsilon_i}{m_i}$ est compris entre

$$\pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{\frac{2\,(s - m_i)}{m_i}}.$$

Observons que m_i augmente ou diminue, suivant que s croît, ou décroît.

1re *Rem.* 1° Si γ, donc P_i, restent constants, les limites ci-dessus se resserreront quand s augmentera, et le rapport $\frac{\varepsilon_i}{m_i}$ diminuera en même temps. De plus $\frac{\varepsilon_i}{m_i}$ augmente quand s diminue, et les limites alors s'écarteront. Donc, les nombres d'une table de mortalité sont d'autant moins sûrs qu'ils s'écartent davantage du 1er terme s. On a en effet :

$$\frac{\varepsilon_i}{m_i} < \frac{\varepsilon_{i+1}}{m_{i+1}}, \quad \gamma\, \frac{\sqrt{2\,(s - m_i)}}{m_i} < \gamma\, \frac{\sqrt{2\,(s - m_{i+1})}}{m_{i+1}},$$

à cause de $m_{i+1} < m_i$.

2° Si les limites restent constantes, ce qui exige que γ augmente quand s croît, la probabilité P_i que le rapport inconnu $\frac{\varepsilon_i}{m_i}$ tombe entre ces limites, s'approche de plus en plus de l'unité.

3° On peut donc, en augmentant s, diminuer à la fois le rapport $\frac{\varepsilon_i}{m_i}$, et augmenter γ ; ce rapport devient donc nul quand $s = \infty$, et alors on a $\mathrm{P}_i = 1$.

Théorème II.

$x' = s\,x = \mathrm{S}\,\omega_i = \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_s$ étant la somme des âges auxquels parviennent un très-grand nombre s *d'individus, nés à la même époque, si $\varphi(\omega)$ exprime la probabilité inconnue de l'âge ω, et* a, *la limite supérieure de la durée de la vie humaine, en posant*

$$\Delta_1 = \int_0^{a} \omega\, \varphi(\omega)\, d\omega,$$

$$\Delta_2 = \int_0^a \omega^2 \phi(\omega)\, d\omega,$$

je dis qu'il y aura une probabilité

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2}\, dt$$

que $x = \frac{S\,\omega_i}{s}$ *est compris entre les limites*

$$\Delta_1 \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{2\,(\Delta_2 - \Delta_1^2)}.$$

1re *Démonstration.*

Les probabilités correspondantes aux âges

$$\omega_1,\ \omega_2\ \ldots\ \omega_i\ \ldots\ \omega_s$$

sont respectivement

$$\phi(\omega_1),\ \phi(\omega_2),\ ..\ \phi(\omega_i),\ ..\ \phi(\omega_s);$$

Soit

$$y = \psi(\tau)$$

la probabilité que x' ait pour valeur

$$\tau = \nu s + l,$$

il est clair qu'en posant

$$X = \int_0^a \phi(\omega_1)\, d\omega_1 \int_0^a \phi(\omega_2)\, d\omega_2 \ldots \int_0^a \phi(\omega_s)\, d\omega_s\, e^{x'\theta\sqrt{-1}}$$

$$= \int_0^a \phi(\omega_1)\, d\omega_1\, e^{\omega_1\theta\sqrt{-1}} \int_0^a \phi(\omega_2)\, d\omega_2\, e^{\omega_2\theta\sqrt{-1}} \ldots \int_0^a \phi(\omega_s)\, d\omega_s\, e^{\omega_s\theta\sqrt{-1}}$$

$$= \int \psi(\tau)\, e^{\tau\theta\sqrt{-1}} d\tau,$$

on aura :

$$y = \psi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau\theta\sqrt{-1}}\, d\theta\, X.$$

Mais on a :

$$\int_0^a \phi(\omega_i)\, d\omega_i = da\,\{\phi(0) + \phi(da) + \phi(2\,da) + .. + \phi(a)\}$$

$$= \int_0^a \phi(\omega)\, d\omega = 1,$$

$$\int_0^a \phi(\omega_i)\, d\omega_i e^{\omega_i\theta\sqrt{-1}} = da\,\{\phi(0) + \phi(da)\, e^{da\theta\sqrt{-1}} + \phi(2\,da)\, e^{2da\theta\sqrt{-1}} + .. + \phi(a)\, e^{a\theta\sqrt{-1}}\}.$$

$$= \int_0^a \phi(\omega)\, d\omega\, e^{\omega\theta\sqrt{-1}};$$

il suit de là qu'on a

$$X = \left\{\int_0^a \phi(\omega)\, d\omega\, e^{\omega\theta\sqrt{-1}}\right\}^s.$$

Soit

$$\Delta_i = \int_0^a \omega^i \phi(\omega)\, d\omega,$$

on trouvera, par le procédé de développement déjà plusieurs fois employé :

$$X = e^{\Delta_1 s\theta\sqrt{-1} - \frac{\theta^2 s}{2}(\Delta_2 - \Delta_1^2) - M_3 \frac{\theta^3 s}{6}\sqrt{-1} + \dots}$$

$$= e^{\Delta_1 s\theta\sqrt{-1} - \frac{\theta^2 s}{2}(\Delta_2 - \Delta_1^2)} \left(1 - \frac{\theta^3 s}{6} M_3 \sqrt{-1} + \text{etc.}\right)$$

$$= e^{\Delta_1 s\theta\sqrt{-1}\ \frac{\theta^2 s}{2}(\Delta_2 - \Delta_1^2)} (1 + R + \dots)$$

$$R = -\frac{\theta^3 s}{6} M_3 \sqrt{-} + \text{etc.}$$

On a donc

$$y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\theta\, e^{-\tau\theta\sqrt{-1}}\left\{e^{\Delta_1 s\theta\sqrt{-1} - \frac{\theta^2 s}{2}(\Delta_2 - \Delta_1^2)}(1 + R + \text{etc.})\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\theta\, e^{(\Delta_1 - \eta)s\theta\sqrt{-1} - \left\{l\theta\sqrt{-1} + \frac{\theta^2 s}{2}(\Delta_2 - \Delta_1^2)\right\}} (1 + R + \dots).$$

Soit

$$v = \Delta_1,$$

il vient :

$$y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\theta\, e^{-\left\{\frac{\theta^2 s}{2}(\Delta_2 - \Delta_1^2) + l\theta\sqrt{-1}\right\}} (1 + R + \text{etc.}).$$

En complétant le carré dans l'exposant de e nous aurons :

$$y = \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{l^2}{2s(\Delta_2 - \Delta_1^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta\, e^{-\frac{s}{2}(\Delta_2 - \Delta_1^2)\left(\theta + \frac{l\sqrt{-1}}{s(\Delta_2 - \Delta_1^2)}\right)^2} (1 + R + \text{etc.}).$$

Soit

$$\sqrt{\frac{s}{2}(\Delta_2 - \Delta_1^2)}\left(\theta + \frac{l\sqrt{-1}}{s(\Delta_2 - \Delta_1^2)}\right) = t,$$

il vient, en négligeant les termes en $\frac{1}{s}$, $\frac{1}{s^2}$, etc., ce qui est permis, (voir le lemme II de la 3^e sect.)

$$y = \frac{1}{\pi\sqrt{2s(\Delta_2 - \Delta_1^2)}} e^{-\frac{l^2}{2s(\Delta_2-\Delta_1^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi s(\Delta_2 - \Delta_1^2)}} e^{-\frac{l^2}{2s(\Delta_2-\Delta_1^2)}}. \qquad (\alpha)$$

C'est la probabilité que la somme des âges auxquels les s individus parviendront, a pour valeur

$$\tau = sx = sv + l = s\Delta_1 + l.$$

On a donc

$$l = s(x - \Delta_1),$$

et

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi s(\Delta_2 - \Delta_1^2)}} e^{-\frac{s(x-\Delta_1)^2}{2(\Delta_2-\Delta_1^2)}}$$

$$= M_1 e^{-\frac{s(x-\Delta_1)^2}{2(\Delta^2-\Delta_1^2)}}. \qquad (\beta)$$

Nous pouvons maintenant obtenir par deux procédés, la probabilité cherchée P, que x', est compris entre $s\Delta_1 \pm l$, ou que x est entre $\Delta_1 \pm \frac{l}{s}$.

1er *Procédé.*

Intégrons (α) entre les limites $\pm l$, nous aurons:

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi s(\Delta_2 - \Delta_1^2)}} \int_{-l}^{l} e^{-\frac{l^2}{2s(\Delta_2-\Delta_1^2)}} dl$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^l e^{-\frac{l^2}{2s(\Delta_2-\Delta_1^2)}} \frac{dl}{\sqrt{2s(\Delta_2-\Delta_1^2)}}.$$

Soit

$$\frac{l}{\sqrt{2s(\Delta_2-\Delta_1^2)}} = \gamma,$$

$$l = \gamma\sqrt{2s(\Delta_2-\Delta_1^2)},$$

il vient :

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt.$$

C'est la probabilité que $x = \frac{S\omega_i}{s}$ est compris entre

$$\Delta_1 \pm \frac{l}{s} = \Delta_1 \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{2(\Delta_2 - \Delta_1^2)}.$$

2^{e} *Procédé.*

L'équation (β) donne

$$\log y = \log M - \frac{s(x-\Delta_1)^2}{2(\Delta_2-\Delta_1^2)},$$

d'où :

$$-\frac{d^2 \log y}{2\,d\,x^2} = \frac{s}{2(\Delta_2 - \Delta_1^2)}.$$

D'ailleurs l'équation $\frac{dy}{dx} = o$, donne $x = \Delta_1$; c'est la valeur de x qui rend y un maximum, c'est donc la quantité que nous avons désignée par m dans le théorème 2, 2ᵉ section. On a donc, en vertu de ce théorème, la probabilité

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2}\,dt$$

qui x est compris entre

$$\Delta_1 \pm \frac{\gamma}{\sqrt{\frac{s}{2(\Delta_2 - \Delta_1^2)}}} = \Delta_1 \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{2(\Delta_2 - \Delta_1^2)}.$$

Dans cette formule x est la durée moyenne des âges des s individus, tandis que Δ_1 est la vraie durée moyenne de la vie humaine, et que Δ_2 exprime la vraie moyenne des carrés des âges.

Remarquons 1° que x, pour le même γ, donc, pour la même probabilité, approche de plus en plus de Δ_1, à mesure que s augmente.

2° Pour le même intervalle des limites, la probabilité P, que x est compris dans cet intervalle, approche de plus en plus de 1, quand s augmente sans cesse.

3° On peut donc, en augmentant s, resserrer à la fois les limites, et faire croître P ; donc, quand s est infini, on a exactement :

$$x = \Delta_1,\ P = 1.$$

Rem. I. Δ_1, Δ_2 étant inconnus, on peut poser approximativement :

$$\Delta_1 = \frac{S\,\omega_i}{s},\ \Delta_2 = \frac{S\,\omega_i^2}{s},$$

et alors

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2}\,dt$$

sera la probabilité que l'écart $x - \Delta_1$ est compris entre les limites

$$\pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{2\left[\frac{S\,\omega_i^2}{s} - \left(\frac{S\,\omega_i}{s}\right)^2\right]}.$$

2ᵉ *Rem.* La probabilité de

$$\gamma = t = \sqrt{\frac{l^2}{2s(\Delta_2 - \Delta_1^2)}}$$

est

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi s(\Delta_2 - \Delta_1^2)}}\, e^{-\gamma^2};$$

donc la moyenne valeur de γ est

$$\pm \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \gamma\, e^{-\gamma^2}\, d\gamma = \pm \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}};$$

donc la valeur moyenne de

$$\frac{\gamma}{\sqrt{s}}\sqrt{2\left[\frac{S\omega_i^2}{s}-\left(\frac{S\omega_i}{s}\right)^2\right]}$$

est :

$$\pm\tfrac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{s}}\sqrt{2\left[\frac{S\omega_i^2}{s}-\left(\frac{S\omega_i}{s}\right)^2\right]}=$$

$$\pm\frac{\sqrt{\frac{S\omega_i^2}{s}-\left(\frac{S\omega_i}{s}\right)^2}}{2\pi s}=\pm N.$$

Donc en posant $x=\Delta_1$ on risque une erreur comprise entre ces deux limites $\pm N$.

3° *Rem.* Soient

$$\int_0^1\phi\,\omega'\,d\omega'=k_0\,,\quad\int_0^1\omega'\phi\,\omega'\,d\omega'=k_1\,,\quad\int_0^1\omega'^2\phi\,\omega'\,d\omega'=k_2\,,$$

on aura, pour $\omega=a\,\omega'$:

$$\int_0^a\phi\,\omega\,d\omega=a\int_0^1\phi\,\omega'\,d\omega'=a\,k_0=1\,,$$

$$\Delta_1=\int_0^a\omega\phi\,\omega\,d\omega=a^2\int_0^1\omega'\,\phi\,\omega'\,d\omega'=a^2\,k_1\,,$$

$$\Delta_2=\int_0^a\omega^2\phi\,\omega\,d\omega=a^3\int_0^1\omega'^2\phi\,\omega'\,d\omega'=a^3\,k_2.$$

On a donc aussi :

$$\Delta_2-\Delta_1^2=\frac{a^2\,(k_2\,k_0-k_1^2)}{k_0^2}.$$

Soit

$$\beta=\frac{k_0}{2\,(k_0\,k_2-k_1^2)}\,,$$

on aura, à la place de la formule (α), la suivante :

$$y=\frac{s}{a\sqrt{s\pi}}\,e^{-\frac{\beta^2 l^2}{s a^2}}.$$

Soit

$$r=\frac{l}{a\sqrt{s}}\,,\quad\text{donc } y=\frac{\beta}{a\sqrt{s\pi}}\,e^{-\beta^2 r^2}\,,$$

on aura :

$$P=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\gamma\beta\,e^{-\beta^2 r^2}\,dr$$

pour la probabilité que x est compris entre $a^2 k_1 \pm \frac{a r}{\sqrt{s}}$.

C'est sous cette forme que Laplace a présenté son théorème.

2° *Démonstration.*

Le polynome

$$X' = \Pi \int_0^a \varphi \omega_i d\omega_i = 1 ,$$

contient toutes les probabilités possibles, relatives aux diverses combinaisons, ou fonctions des âges ω_i. Si donc nous multiplions cette expression par le facteur

$$F = \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^\beta \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta(x'-\tau)\sqrt{-1}} d\theta\, d\tau$$

nous en écarterons toutes les probabilités relatives à des valeurs de $x' = S\,\omega_i$ situées en dehors des limites $x' = \begin{cases}\beta \\ \alpha\end{cases}$, et nous conserverons les autres. Soit donc P la probabilité que la fonction $x' = S\,\omega_i$ coïncide avec une quantité prise entre ces limites, on aura :

$$P = X' F$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\beta d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta\tau\sqrt{-1}} d\theta \left\{ \int_0^a \varphi \omega_1 d\omega_1 e^{\omega_1 \theta \sqrt{-1}} \ldots\ldots \int_0^a \varphi \omega_s d\omega_s e^{\omega_s \theta \sqrt{-1}} \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^\beta d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta\tau\sqrt{-1}} d\theta \left\{ \int_0^a \varphi \omega d\omega e^{\omega\theta\sqrt{-1}} \right\}^s .$$

Soit

$$\tau = \nu s + l = x'$$

$$\nu = \Delta_1 ,$$

$$x' = \begin{cases} \beta = \nu s + l , \\ \alpha = \nu s - l , \end{cases}$$

on trouve

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{l} d l \int_{-\infty}^{\infty} d\theta\, e^{-l\theta\sqrt{-1} - \nu s \theta \sqrt{-1}} \left\{ \int_0^a \varphi \omega d\omega e^{\omega\theta\sqrt{-1}} \right\}^s$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{l} d l \int_{-\infty}^{\infty} d\theta\, e^{-\left[\frac{\theta^2 s}{2}(\Delta_2 - \Delta_1^2) + l\theta\sqrt{-1}\right]} (1 + R + \text{etc.})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-l}^{l} \frac{e^{-\frac{l^2}{2s(\Delta_2 - \Delta_1^2)}}}{\sqrt{2s(\Delta_2 - \Delta_1^2)}} d l$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^l \frac{e^{-\frac{l^2}{2s(\Delta_2 - \Delta_1^2)}}}{\sqrt{2s(\Delta_2 - \Delta_1^2)}} \, dl.$$

Soit

$$\gamma = \frac{l}{\sqrt{2s(\Delta_2 - \Delta_1^2)}} \; ; \; l = \gamma \sqrt{2s(\Delta_2 - \Delta_1^2)} \, ,$$

on aura enfin :

$$\mathrm{P} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-\gamma^2} d\gamma = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt.$$

C'est la probabilité que x' est compris entre

$$\nu s \pm l = \Delta_1 s \pm l \; ,$$

ou que x est entre

$$\Delta_1 \pm \frac{l}{s} = \Delta_1 \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{2(\Delta_2 - \Delta_1^2)}.$$

Théorème III.

En supposant un très-grand nombre σ *de mariages entre garçons et filles du même âge* a_0, *ayant la même probabilité* p *de vivre après* a_1 *ans, si* s *et* m_1 *sont les nombres de la table de mortalité correspondants aux âges* a_0, $a_0 + a_1$, *en posant approximativement*

$$p = p' = \frac{m_1}{s} \, ,$$

et en désignant par

$$n_1 = \frac{\sigma m_1^2}{s^2}$$

le nombre de ces mariages subsistant le plus probablement dans a_1 *ans, et par*

$$n' = n_1 + \varepsilon$$

le vrai nombre des couples survivant à cette époque, je dis que l'on aura une probabilité

$$\mathrm{P} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt$$

que n' *est compris entre les limites*

$$\frac{\sigma m_1^2}{s^2} \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{2\sigma p'^2(1-p')[s + p'(s+4\sigma)]}$$

Démonstration.

Soient s et m_1 les nombres des survivants aux âges a_0, $a_0 + a_1$, donnés par la table de mortalité, en nommant p_1 le vrai nombre des survivants à l'âge $a_0 + a_1$, quand s est le nombre des survivants à l'âge a_0, on aura

$$m_1 = p_1 + \varepsilon_1 \; ,$$

ε_1 désignant l'erreur du nombre tabulaire m_1. Cela posé, il est clair que

$$p = \frac{p_1}{s}$$

sera la vraie possibilité pour un garçon et une fille de l'âge a_0, d'atteindre l'âge $a_0 + a_1$, tandis que

$$p' = \frac{m_1}{s}$$

sera la même possibilité approchée.

Il résulte de là que

$$p^2 = \frac{p_1^2}{s^2}$$

sera la vraie probabilité que le mariage d'un garçon et d'une fille de l'âge a_0, subsistera après a_1 ans.

Donc

$$\frac{\sigma!}{n!(\sigma - n)!}(p^2)^n(1 - p^2)^{\sigma - n}$$

exprimera la probabilité que sur σ mariages semblables un nombre n subsistera après a_1 ans. La valeur la plus probable de n est, d'après le théorème de Bernoulli :

$$n = \sigma p^2.$$

Donc

$$n_1 = \sigma \frac{m_1^2}{s^2}$$

sera la valeur approchée de ce nombre le plus probable. Si nous nommons ε l'erreur qui affecte ce nombre, et n' le vraie nombre de ces mariages subsistant après a_1 ans, nous aurons :

$$n' = \sigma \frac{m_1^2}{s^2} + \varepsilon. \tag{1}$$

Comme on a

$$m_1 = p_1 + \varepsilon_1, \; p = \frac{p_1}{s},$$

il vient, en éliminant p_1 :

$$p = \frac{m_1}{s} - \frac{\varepsilon_1}{s}, \text{ d'où : } n = \sigma \left[\frac{m_1}{s} - \frac{\varepsilon_1}{s}\right]^2 = \frac{\sigma m_1^2}{s^2} - \frac{2\sigma\varepsilon_1}{s^2};$$

on néglige le terme en ε_1^2 comme très-petit.

Soit maintenant l la correction de n, on aura :

$$n' = n + l = \sigma p^2 + l = \frac{\sigma m_1^2}{s^2} - \frac{2\sigma m_1}{s^2}\varepsilon_1 + l, \tag{2}$$

De plus la probabilité de ε_1 est, d'après le théor. I de la 4^e sect. :

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{s}{2m_1(s - m_1)}}\, e^{-\frac{s\varepsilon_1^2}{2m_1(s - m_1)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi p'(1 - p')s}}\, e^{-\frac{\varepsilon_1^2}{2p'(1 - p')s}}.$$

Nous savons d'un autre côté, par le théorème de Bernoulli, que la possibilité la plus probable de l est le l^e terme avant le plus grand terme du binome $(p^2+1-p^2)^\sigma$, savoir :

$$y_l = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma p^2(1-p^2)}}\, e^{-\frac{l^2}{2\sigma p^2(1-p^2)}}.$$

Mais en comparant les deux valeurs de n', fournies par les équations (1) et (2), on trouve :

$$l = \varepsilon + \frac{2\sigma m_1}{s^2}\varepsilon_1 .$$

Soit y_ε ce que devient y_l pour cette valeur de l, on aura, en remplaçant p par p' :

$$y_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma p'^2(1-p'^2)}}\, e^{-\frac{\left\{\varepsilon+\frac{2\sigma m_1}{s^2}\varepsilon_1\right\}^2}{2\sigma p'^2(1-p'^2)}} ;$$

c'est la probabilité de ε.

Soit y la probabilité de l'existence simultanée de ε et de ε_1, on aura :

$$y = y_1\, y_\varepsilon . \qquad (a)$$

Cette probabilité est évidemment celle que n' a pour valeur

$$\frac{\sigma m_1^2}{s^2} + \varepsilon .$$

Transformons l'expression (a) dans le but de séparer les variables $\varepsilon, \varepsilon_1$. A cet effet, posons

$$\mathrm{H} = \frac{1}{\sqrt{2\pi p'(1-p')s}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma p'^2(1-p'^2)}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma p'^3(1+p')(1-p')^2 s}},$$

$$\Omega^2 = \frac{\varepsilon_1^2}{2p'(1-p')s} + \frac{(\varepsilon+\frac{2\sigma m_1}{s^2}\varepsilon_1)^2}{2\sigma p'^2(1-p'^2)} ,$$

nous aurons

$$y = \mathrm{H}\, e^{-\Omega^2} .$$

Mais en développant le carré de $(\varepsilon + \frac{2\sigma m_1}{s^2})^2$, et en éliminant m_1 à l'aide de $m_1 = sp'$, on trouve

$$\Omega^2 = \frac{\varepsilon^2}{2\sigma p'^2(1-p'^2)} + \frac{s(1+p')+4\sigma p'}{2s^2p'(1-p'^2)}\left\{\varepsilon_1^2 + \frac{4s\varepsilon}{s(1+p')+4\sigma p'}\varepsilon_1\right\}.$$

Complétons le carré du second terme, nous aurons

$$\Omega^2 = \frac{s\varepsilon^2}{2\sigma p'^2(1-p')[s+p'(s+4\sigma)]} + \frac{s(1+p')+4\sigma p'}{2s^2p'(1-p'^2)}\left\{\varepsilon_1 + \frac{2s\varepsilon}{s(1+p')+4\sigma p'}\right\}^2.$$

Soient

$$h = \frac{s(1+p')+4\sigma p'}{2s^2p'(1-p'^2)},\quad g = \frac{2s\varepsilon}{s(1+p')+4\sigma p'}$$

$$\tau = \sqrt{h}(\varepsilon_1+g),$$

$$d\,\varepsilon_1 = \frac{d\,\tau}{\sqrt{h}},$$

$$k = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2\sigma p'^2(1-p')[s+p'(s+4\sigma)]}},$$

on trouve

$$y = \mathrm{H}\,e^{-\tau^2}\,e^{-k^2\varepsilon^2}, \qquad (b)$$

$$\frac{\mathrm{H}}{\sqrt{h}} = \frac{1}{\pi}\cdot k. \qquad (c)$$

Cela posé, nous obtiendrons, par deux procédés différents, l'intégrale cherchée P.

1^er^ *Procédé.*

En intégrant la formule (b) entre les limites $\pm\,\varepsilon$, et $\pm\,\varepsilon_1$ nous aurons d'abord :

$$\mathrm{P} = \mathrm{H}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} d\,\varepsilon\cdot e^{-k^2\varepsilon^2}\int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_1} d\,\varepsilon_1\cdot e^{-h(\varepsilon_1+g)^2}.$$

Mais si nous considérons la variable ε comme existant isolément, et quelle que soit la valeur de ε_1, nous pourrons étendre à $\pm\,\infty$ les limites de l'intégration par rapport à cette dernière variable, ce qui nous fournira successivement

$$\mathrm{P} = \mathrm{H}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} d\varepsilon\cdot e^{-k^2\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\,\varepsilon_1\cdot e^{h(\varepsilon_1+g)^2}$$

$$= \frac{2\,\mathrm{H}}{\sqrt{h}}\int_{0}^{\varepsilon} d\,\varepsilon\cdot e^{-k^2\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\,\tau\cdot e^{-\tau^2}$$

$$= \frac{2\,\mathrm{H}}{\sqrt{h}}\sqrt{\pi}\int_{0}^{\varepsilon} d\,\varepsilon\cdot e^{-k^2\varepsilon^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\;k\int_{0}^{\varepsilon} d\,\varepsilon\cdot e^{-k^2\varepsilon^3}.$$

C'est la probabilité que $\varepsilon = n' - n_1$ est compris entre $\pm\,\varepsilon$.

Soit $$k\cdot\varepsilon = \gamma, \qquad \varepsilon = \frac{\gamma}{k}$$

nous aurons :

$$\mathrm{P} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\gamma} e^{-\gamma^2}\,d\gamma = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\gamma} e^{-t^2}\,dt,$$

que $\varepsilon = n' - n_1$ est compris entre $\pm\,\frac{\gamma}{k}$, ou que n' est compris entre :

$$n_1 \pm \frac{\gamma}{k} = \frac{\sigma m_1^2}{s^2} \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}}\sqrt{2\sigma' p'^2(1-p')[s+p'(s+4\sigma)]}.$$

2° Procédé.

Soit $M = H e^{-\tau^2}$, la formule (*b*) pourra s'écrire :

$$y = M e^{-k^2 \varepsilon^2}.$$

$\varepsilon = o$ est la valeur de ε qui rend $y = M$ un maximum, valeur fournie par l'équation $\frac{dy}{d\varepsilon} = o$. De plus, de l'équation

$$\log y = \log M - k^2 \varepsilon^2,$$

on déduit :

$$-\left(\frac{d^2 \log y}{2\, d\varepsilon^2}\right) = k^2.$$

On a donc, par le théorème 2 de la seconde section, une probabilité

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2}\, dt, \tag{3}$$

que $\varepsilon = n' - n_1$ est compris entre $\pm \frac{\gamma}{k}$.

P est donc aussi la probabilité que n' est compris entre

$$n_1 \pm \frac{\gamma}{k} = \frac{\sigma m_1^2}{s^2} \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{2\sigma p'^2 (1 - p') [s + p'(s + 4\sigma)]}.$$

Théorème IV.

Si aux arrivées d'évènements exclusifs

$$A_1,\ A_2,\ \cdots A_i,\ \cdots A_n,$$

ayant respectivement pour probabilité

$$p_1,\ p_2,\ \cdots p_i,\ \cdots p_n,$$

sont attachés les bénéfices

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots \beta_i \cdots \beta_n,$$

positifs ou négatifs, selon qu'ils expriment des gains ou des pertes, en posant

$$b_h = S\, p_i \beta_i^h = p_1 \beta_1^h + p_2 \beta_2^h + \cdots + p_n \beta_n^h,$$

et en nommant $\tau = s\,x$ l'excès total inconnu des gains sur les pertes, ou le bénéfice réel éventuel, dépendant d'un très-grand nombre s de répétitions des mêmes évènements, je dis qu'il y aura une probabilité

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2}\, dt$$

que τ est compris entre les limites

$$s\,b_1 \pm \gamma\sqrt{s}\sqrt{2(b_2-b_1^2)} =$$

$$s\left\{ b_1 \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}}\sqrt{2(b_2-b_1^2)} \right\}.$$

Démonstration.

Soit $y = \psi(\tau)$ la probabilité que le bénéfice réel est

$$\tau = sx = s\nu + l,$$

et posons

$$X = \left(p_1 e^{\beta_1\theta\sqrt{-1}} + p_2 e^{\beta_2\theta\sqrt{-1}} + \ldots + p_n e^{\beta_n\theta\sqrt{-1}}\right)^s$$

$$= \Sigma\,\psi(\tau)\,e^{\tau\theta\sqrt{-1}}$$

$$= \int \psi(\tau)\,e^{-\tau\theta\sqrt{-1}}\,d\tau, \text{ pour } d\tau = 1\,;$$

multiplions par $e^{-\theta\sqrt{-1}}\,d\theta$, puis intégrons entre les limites $\pm\infty$, nous aurons :

$$\int_{-\infty}^{\infty} X\,e^{-\tau\theta\sqrt{-1}}\,d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau\theta\sqrt{-1}}\,d\theta \int \psi(\tau)\,e^{\tau\theta\sqrt{-1}}\,d\tau = 2\pi\psi(\tau) = 2\pi y\,;$$

d'où :

$$y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\theta\,e^{-\theta\tau\sqrt{-1}}\,X$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-l\theta\sqrt{-1}}\,d\theta \left\{ e^{-\nu\theta\sqrt{-1}}\left(p_1 e^{\beta_1\theta\sqrt{-1}} + p_2 e^{\beta_2\theta\sqrt{-1}} + \ldots + p_n e^{\beta_n\theta\sqrt{-1}}\right)\right\}^s.$$

Soit

$$A = \left\{ e^{-\nu\theta\sqrt{-1}}\left(p_1 e^{\beta_1\theta\sqrt{-1}} + p_2 e^{\beta_2\theta\sqrt{-1}} + \ldots + p_n e^{\beta_n\theta\sqrt{-1}}\right)\right\}^s,$$

il vient :

$$y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\theta\,e^{-l\theta\sqrt{-1}}\,e^{\log A}. \tag{1}$$

mais on a :

$$\log A = -\nu\theta s\sqrt{-1} + s\log\left[p^1 e^{\beta_1\theta\sqrt{-1}} + p_2 e^{\beta_2\theta\sqrt{-1}} + \ldots + p_n e^{\beta_n\theta\sqrt{-1}}\right]$$

$$= -\nu\theta s\sqrt{-1} + s\log\Big[p_1\left(1 + \beta_1\theta\sqrt{-1} - \frac{\beta_1^2\theta^2}{2} - \frac{\beta_1^3\theta^3\sqrt{-1}}{6} + \ldots\right) +$$

$$p_2\left(1 + \beta_2\theta\sqrt{-1} - \frac{\beta_2^2\theta^2}{2} - \frac{\beta_2^3\theta^3\sqrt{-1}}{6} + \ldots\right) +$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$p_n\left(1 + \beta_n\theta\sqrt{-1} - \frac{\beta^n\theta^2}{2} - \frac{\beta_n^3\theta^3\sqrt{-1}}{6} + \ldots\right)\Big].$$

Les évènements $A_1, A_2, \cdots A_n$ étant exclusifs, on a :

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1 ;$$

donc :

$$\log A = -\nu s \theta \sqrt{-1} + s \log \left\{ 1 + (\mathrm{S} p_i \beta_i) \theta \sqrt{-1} - \mathrm{S}(p_i \beta_i^2) \frac{\theta^2}{2} - \mathrm{S}(p_i \beta_i^3) \frac{\theta^3 \sqrt{-1}}{6} + \cdots \right\}$$

$$= -\nu s \theta \sqrt{-1} + s \log \left\{ 1 + b_1 \theta \sqrt{-1} - b_2 \frac{\theta^2}{2} - b_3 \frac{\theta^3 \sqrt{-1}}{6} + \text{etc.} \right\}$$

$$= -\nu s \theta \sqrt{-1} + s b_1 \theta \sqrt{-1} - \frac{s \theta^2}{2} (b_2 - b_1^2) - \frac{s \theta^3 \sqrt{-1}}{6} (b_3 - 3 b_1 b_2 + 2 b_1^3) + \cdots$$

Soit $B_3 = b_3 - b_1 b_2 + 2 b_1^3$,

etc.

nous aurons, à la place de la formule (1), la suivante :

$$y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-l\theta\sqrt{-1}} d\theta\, e^{(b_1 - \nu)\theta s \sqrt{-1} - \frac{1}{2} s \theta^2 (b_2 - b_1^2) - \frac{s B_3 \theta^3 \sqrt{-1}}{6} + \cdots}$$

Posons :

$$\nu = b_1 , \; R = -\frac{s B_3 \theta^3 \sqrt{-1}}{6} + \cdots$$

il vient

$$y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta\, e^{-\left\{ \frac{s\theta^2}{2} (b_2 - b_1^2) + l\theta \sqrt{-1} \right\}} (1 + R + \text{etc.}).$$

Complétons le carré dans l'exposant de e, nous aurons :

$$y = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{l^2}{2s(b_2 - b_1^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta\, e^{-\frac{s(b_2 - b_1^2)}{2} \left(\theta + \frac{l\sqrt{-1}}{s(b_2 - b_1^2)}\right)} (1 + R + \text{etc.}).$$

Soit

$$\sqrt{\frac{s}{2}(b_2 - b_1^2)} \left(\theta + \frac{l\sqrt{-1}}{s(b_2 - b_1^2)}\right) = t , \text{ d'où :}$$

$$\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s}\,(\sqrt{b_2 - b_1^2})} - \frac{l\sqrt{-1}}{s(b_2 - b_1^2)} .$$

Nommons R_1 ce que devient R après le changement de θ en t, nous aurons :

$$y = \frac{1}{\pi\sqrt{2s(b_2 - b_1^2)}} e^{-\frac{l^2}{2s(b_2 - b_1^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-t^2} (1 + R_1 + \text{etc.}) .$$

En exécutant les intégrations d'après les formules

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{2i+1} e^{-t^2} dt = o ,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{2i} e^{-t^2} dt = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2i-1)}{2^i} \sqrt{\pi} ,$$

les termes en $\sqrt{-1}$, savoir ceux qui ont pour dénominateurs des puissances impaires de $\sqrt{s}$, disparaîtront, et l'on aura un résultat de la forme :

$$y = \frac{1}{\pi\sqrt{2s(b_2 - b_1^2)}} e^{-\frac{l^2}{2s(b_2-b_1^2)}} \sqrt{\pi}\left(1 + \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s^2} + \text{etc.}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi s(b_2 - b_1^2)}} e^{-\frac{l^2}{2s(b_2-b_1^2)}} \left(1 + \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s^2} + \text{etc.}\right).$$

Soit δ la somme de la série $\alpha + \frac{\beta}{s} + \text{etc.}$,

il vient :

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi s(b_2 - b_1^2)}} e^{-\frac{l^2}{2(b_2-b_1^2)s}} \left(1 + \frac{\delta}{s}\right). \tag{3}$$

Observons que $b_2 - b_1^2$ est toujours positif; car on a :

$$b_2 - b_1^2 = (p_1\beta_1^2 + p_2\beta_2^2 + \cdots + p_n\beta_n^2)\cdot 1 - (p_1\beta_1 + p_2\beta_2 + \cdots + p_n\beta_n)^2$$

$$= (p_1\beta_1^2 + p_2\beta_2^2 + \cdots + p_n\beta_n^2)(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) - (p_1^2\beta_1^2 + p_2^2\beta_2^2 + \cdots + p_n^2\beta_n^2 + 2p_1p_2\beta_1\beta_2 + \cdots + 2p_{n-1}p_n\beta_{n-1}\beta_n)$$

$$= p_1p_2(\beta_1 - \beta_2)^2 + p_1p_3(\beta_1 - \beta_3)^2 + \cdots + p_np_{n-1}(\beta_{n-1} - \beta_n)^2.$$

Comme on a $\tau = \nu s + l = b_1 s + l = s x$,
il vient

$$l = s(x - b_1),$$

et par suite :

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi s(b_2 - b_1^2)}} e^{-\frac{s(x-b_1)^2}{2(b_2-b_1^2)}} \left(1 + \frac{\delta}{s}\right). \tag{4}$$

Cela posé, nous pouvons obtenir par deux procédés différents la probabilité cherchée P.

1^er^ *Procédé.*

La probabilité P′ que sx est compris entre $b_1 s \pm l$, s'obtiendra, en intégrant la formule (3) entre les limites $\pm l$; ce qui donne :

$$P' = \frac{1}{\sqrt{2\pi s(b_2 - b_1^2)}} \int_{-l}^{l} e^{-\frac{l^2}{2(b_2-b_1^2)s}} dl \left(1 + \frac{\delta}{s}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^l e^{-\frac{l^2}{2(b_2-b_1^2)s}} \frac{dl}{\sqrt{2(b_2-b_1^2)s}} \left(1 + \frac{\delta}{s}\right).$$

Posons

$$\frac{l}{\sqrt{2(b_2 - b_1^2)s}} = \gamma, \quad l = \gamma\sqrt{s}\sqrt{2(b_2 - b_1^2)},$$

nous aurons :

$$P' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-\gamma^2} d\gamma \left(1 + \frac{\delta}{s}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt + \frac{\delta}{s} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt. \tag{5}$$

C'est la probabilité que $\frac{\tau}{s} = x$ est compris entre

$$b_1 \pm \frac{l}{s} = b_1 \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{2(b_2 - b_1^2)}.$$

Or, comme s est très-grand, nous pouvons, d'après le théorème I de la 1re section, négliger dans la formule (5) le terme affecté du facteur $\frac{\delta}{s}$, ce qui nous fournit à la place de la valeur exacte P′, la valeur approchée

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt.$$

2e *Procédé.*

En écartant la suite $\frac{\delta}{s}$, qui doit disparaître du résultat final, en conformité du théorème I de la 1re section, la formule (4) pourra s'écrire ainsi :

$$y = M e^{-\frac{s(x-b_1)^2}{2(b_2-b_1^2)}}, \quad M = \frac{1}{\sqrt{2\pi s(b_2 - b_1^2)}}.$$

Or, la valeur de x qui rend y un maximum, déduite de l'équation $\frac{dy}{dx} = o$, est $x = b_1$; de plus, de l'équation

$$\log y = \log M - \frac{s(x-b_1)^2}{2(b_2-b_1^2)},$$

on tire :

$$-\frac{d^2 \log y}{2\,dx^2} = \frac{s}{2(b_2-b_1^2)},$$

on a donc, par le théorème 2 de la seconde section, la probabilité

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt$$

que x est compris entre les limites

$$b_1 \pm \frac{\gamma}{\sqrt{\frac{s}{2(b_2-b_1^2)}}} = b_1 \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{2(b_2 - b_1^2)}. \tag{a}$$

P est donc aussi la probabilité que $\tau = sx$ est compris entre

$$s\left[b_1 \pm \frac{\gamma}{\sqrt{s}} \sqrt{2(b_2 - b_1^2)}\right].$$

Donc 1° Si γ reste constant, donc P, en augmentant sans cesse le nombre s des répétitions, l'intervalle des limites se resserrera de plus en plus.

2° L'intervalle des limites restant constant, ce qui exige que γ augmente quand s croît, il est clair que P croîtra avec s.

3° On peut donc, en augmentant s, diminuer à la fois l'intervalle des limites, et faire croître P. Donc, quand $s = \infty$, cet intervalle s'annulle, et l'on a, à la fois :

$$\tau = s\,b_1\,,\ \mathrm{P} = 1.$$

Donc, pourvu que l'espérance mathématique b_1 soit positive, on pourra toujours, en multipliant les épreuves, obtenir une probabilité aussi proche de l'unité que l'on voudra, que le bénéfice réel τ différera aussi peu de $s\,b_1$ que l'on voudra.

Rem. Pour qu'un individu de l'âge a obtienne une rente viagère ρ il faut qu'il dépose à la caisse de l'établissement un capital

$$\mathrm{C} = \frac{\rho}{m_0}\left\{\frac{m_1}{r} + \frac{m_2}{r^2} + \cdots\right\},$$

plus un boni b à l'avantage de la caisse.

m_0, m_1, m_2, .. sont les nombres des survivants aux âges a, $a+1$, $a+2$, ... pris dans la table de mortalité, continués jusqu'à la limite de la table, et r exprime l'unité monétaire augmenté de son intérêt annuel.

Donc, pour s individus de l'âge a la caisse déboursera en viagers $s\,\mathrm{C}$, et recevra $s\,\mathrm{C} + s\,b$, quand b exprime l'avantage de la caisse par individu. On a donc ici :

$$b_1 = p_1\,\beta_1 + p_2\,\beta_2 + \ldots = \frac{\rho}{r}\,\frac{m_1}{m_0} + \frac{\rho}{r^2}\,\frac{m_2}{m_0} + \ldots = b\,,$$

$$b_2 - b_1^2 = \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 \frac{m_1}{m_0} + \left(\frac{\rho}{r^2}\right)^2 \frac{m_2}{m_0} + \ldots - \left[\frac{\rho}{r}\,\frac{m_1}{m_0} + \frac{\rho}{r^2}\,\frac{m^2}{m_0} + \ldots\right]^2,$$

et par suite, une probabilité

$$\mathrm{P} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2}\,dt$$

que le bénéfice réel τ de la caisse est compris entre

$$s\,b \pm \gamma\sqrt{s}\,\sqrt{2\,(b_2 - b_1^2)}\,,$$

Ce bénéfice sera donc à peu près certain, et peu différent de $s\,b$, quand le nombre des affaires s est très-grand. Donc, quelque faible que soit l'avantage b d'une caisse d'assurance, l'institution prospèrera certainement quand le nombre s de ses affaires sera considérable.

NOTE.

Ayant trouvé un procédé assez simple pour démontrer la formule de Fourier, dont nous avons fait un fréquent usage, nous croyons devoir, pour l'avantage de quelques lecteurs, reproduire ici cette démonstration.

Posons

$$\mathrm{F}\,x = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1\, e^{\alpha_1 x \sqrt{-1}} + \mathrm{A}_2\, e^{\alpha_2 x \sqrt{-1}} + \ldots + \mathrm{A}_n\, e^{\alpha_n x \sqrt{-1}} + \text{etc.}; \qquad (1)$$

comme on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\sqrt{-1}}\, dx = o,$$

on trouve aisément :

$$\mathrm{A}_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{F}\,\nu\, d\nu, \quad \mathrm{A}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{F}\,\nu\, d\nu\, e^{\alpha_n \nu \sqrt{-1}};$$

donc

$$\mathrm{F}\,x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{F}\,\nu\, d\nu \,.\, \Sigma_{n\,0}^{\infty}\, e^{\alpha n\,(x-\nu)\sqrt{-1}}.$$

Soient

$$x = \frac{\pi x'}{a}, \ \nu = \frac{\pi \nu'}{a},$$

on aura :

$$\mathrm{F}\,x' = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} \mathrm{F}\,\nu'\, d\nu' \,.\, \Sigma_{n\,0}^{\infty}\, e^{\alpha_n (x'-\nu')\frac{\pi}{a}\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{1}{a}\int_{0}^{a} \mathrm{F}\,\nu'\, d\nu'\, \Sigma_{n\,0}^{\infty}\, e^{\frac{\alpha_n \pi}{a}(x'-\nu')\sqrt{-1}}.$$

Changeons a en $2a$, il vient :

$$\mathrm{F}\,x' = \frac{1}{2a}\int_{0}^{2a} \mathrm{F}\,\nu'\, d\nu'\, \Sigma_{n\,0}^{\infty}\, e^{\frac{\alpha_n \pi}{2a}(x'-\nu')\sqrt{-1}};$$

et en omettant les accents :

$$F\,x = \frac{1}{2a}\int_0^{2a} F\,\nu\,d\nu \sum_{n\,0}^{\infty} e^{\frac{\alpha_n\pi}{2a}(x-\nu)\sqrt{-1}}$$

Soient

$$x = a + x'$$
$$\nu = a + \nu'.$$

on aura :

$$F\,x' = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} F\,\nu'\,d\nu' \sum_{n\,0}^{\infty} e^{\frac{\alpha_n\pi}{2a}(x'-\nu')\sqrt{-1}}$$

ou

$$F\,x = \int_{-a}^{a} F\,\nu\,d\nu \int_0^{\infty} e^{\frac{\alpha_n\pi}{2a}(x-\nu)\sqrt{-1}}\,\frac{d\,\alpha_n}{2\,a}.$$

Soit

$$\frac{\alpha_n\pi}{2a} = u, \text{ d'où : } \frac{d\,\alpha_n}{2\,a} = \frac{d\,u}{\pi},$$

on a :

$$F\,x = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} F\,\nu\,d\nu \int_0^{\infty} e^{u(x-\nu)\sqrt{-1}}\,d\,u$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} F\,\nu\,d\nu \int_{-\infty}^{\infty} e^{u(x-\nu)\sqrt{-1}}\,d\,u.$$

Soient

$$x = x' - m \qquad \nu' = \begin{cases} m + a = \beta \\ m - a = \alpha \end{cases}$$
$$\nu = \nu' - m,$$

il vient :

$$F\,x = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\beta} F\,\nu\,d\nu \int_{-\infty}^{\infty} e^{u(x-\nu)\sqrt{-1}}\,d\,u.$$

Rem. Soit $F\,x = F\,\nu = 1$, on a :

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\beta}\int_{-\infty}^{\infty} e^{u(x-\nu)\sqrt{-1}}\,d\,u\,d\nu.$$

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.