MÉMOIRE

SUR

LE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES DES QUATRE FONCTIONS

$$\frac{1}{2u}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^{2u},\ \frac{1}{2u+1}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^{2u+1},\ \frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^{2u},\ \frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^{2u+1};$$

PAR A. MEYER,

DOCTEUR EN SCIENCES, PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES A L'UNIVERSITÉ DE BRUXELLES.

AVERTISSEMENT PRÉLIMINAIRE.

En faisant

$$\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^i = \left(\frac{n}{1+\sqrt{1-n^2}}\right)^i = \lambda^i,$$

l'auteur de la *Mécanique céleste*, donne (tom. Ier, pag. 180), le développement en série de λ^i, en s'appuyant sur la formule de Lagrange qu'il a généralisée. Or, il est facile de voir que les développements de nos quatre fonctions sont virtuellement compris dans celui de λ^i, donné par Laplace. En effet, les deux premières donnent

$$\frac{1}{i}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^i = \frac{1}{i}\left(\frac{n}{1+\sqrt{1-n^2}}\right)^i = \frac{1}{i}\lambda^i,$$

i étant un entier quelconque, pair ou impair.

De plus, en posant $\lambda^i = f(n)$, on trouve par la différentiation,

$$\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left(\frac{n}{1+\sqrt{1-n^2}}\right)^i = \frac{n}{i}f'(n).$$

En sorte que les deux dernières de nos quatre fonctions se développeront au moyen de la dérivation de la formule qui donne λ^i en série.

Pour arriver au même résultat, nous avons suivi une marche très-élémentaire, basée sur la comparaison des termes semblables de deux séries identiques, obtenus par des procédés différents.

De plus, nous avons cru devoir donner séparément les résultats pour les cas de i pair et impair, afin de faciliter l'emploi de nos séries pour le développement de plusieurs fonctions qui en dépendent. Pour ne citer qu'un exemple, posons successivement

$$\frac{a^2-b^2}{a^2}=n^2,\quad \frac{a^2-b^2}{b^2}=-n'^2,$$

on aura respectivement :

$$\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^u=\left[\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right]^{2u},\quad \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^u=(-1)^u\left[\frac{1-\sqrt{1-(n'\sqrt{-1})^2}}{n'\sqrt{-1}}\right]^{2u}.$$

On pourra donc, au moyen de la série qui équivaut à la première de nos fonctions, obtenir le développement d'une puissance entière quelconque de $\frac{a-b}{a+b}$, ordonné suivant les puissances croissantes de n, ou de n'.

MÉMOIRE

SUR

LE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES DE QUATRE FONCTIONS.

§ 1.

DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DES DEUX FONCTIONS

$$\frac{1}{2u}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^{2u},\quad \frac{1}{2u+1}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^{2u+1}.$$

La fonction $l\,(1+n\cos.x)$, l désignant des logarithmes népériens, se développe en série, en employant la méthode indirecte des coefficients indéterminés, ou bien, en se servant directement de la formule

$$l\,(1+z)=z-\frac{z^3}{2}+\frac{z^3}{3}-\text{etc.}$$

1^{er} *Développement de* $l\,(1+n\cos.x)$.

Comme on a

$$\cos.x=\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2},$$

on a d'abord

$$(1)\ \ldots\ l(1+n\cos.x)=l\left(1+n\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2}\right)=l\left(2+ne^{x\sqrt{-1}}+ne^{-x\sqrt{-1}}\right)-l\,2,$$

soit

$$2+ne^{x\sqrt{-1}}+ne^{-x\sqrt{-1}}=\left(A+Be^{x\sqrt{-1}}\right)\left(A+Be^{-x\sqrt{-1}}\right)=A^2+B^2+ABe^{x\sqrt{-1}}+ABe^{-x\sqrt{-1}}.$$

On en tire :

$$A^2 + B^2 = 2, \quad AB = n;$$

de là :

(3) . . . . $(A-B)^2 = 2-2n, \quad A-B = \sqrt{2-2n}$

(4) . . . . $(A+B)^2 = 2+2n, \quad A+B = \sqrt{2+2n}$

Les valeurs (3) et (4) conduisent à :

(5). . $2A = \sqrt{2-2n} + \sqrt{2+2n}, \quad 2B = \sqrt{2+2n} - \sqrt{2-2n}, \quad \frac{B}{A} = \frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n} = m;$

de ces expressions on tire sans peine $A^2 = \frac{n}{m}$, il suffira pour cela d'élever 2 A au carré, et de multiplier les deux nombres par $nm = 1 - \sqrt{1-n^2}$,
on a donc aussi :

(6) . . . . $l\frac{A^2}{2} = l\frac{n}{2m} = -l\frac{2m}{n}.$

Cela posé, on a successivement :

(7) . . . $$\left\{\begin{aligned} l(1+n\cos. x) &= -l\,2 + l\left(A + Be^{x\sqrt{-1}}\right)\left(A + Be^{-x\sqrt{-1}}\right) \\ &= l\frac{A^2}{2} + l\left(1+me^{x\sqrt{-1}}\right)\left(1+me^{-x\sqrt{-1}}\right) \\ &= -l\frac{2m}{n} + l\left(1+me^{x\sqrt{-1}}\right)\left(1+me^{-x\sqrt{-1}}\right) \\ &= -l\frac{2m}{n} + l\left(1+me^{x\sqrt{-1}}\right) + l\left(1+me^{-x\sqrt{-1}}\right); \end{aligned}\right.$$

Mais on a, par la série connue :

$$l\left(1+me^{x\sqrt{-1}}\right) = me^{x\sqrt{-1}} - \tfrac{1}{2}m^2e^{2x\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{3}m^3e^{3x\sqrt{-1}} - \text{etc.}$$

$$l\left(1+me^{-x\sqrt{-1}}\right) = me^{-x\sqrt{-1}} - \tfrac{1}{2}m^2e^{-2x\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{3}m^3e^{-3x\sqrt{-1}} - \text{etc.}$$

donc, en ajoutant :

$$l\left(1+me^{x\sqrt{-1}}\right) + l\left(1+me^{-x\sqrt{-1}}\right) = m\left(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}\right) - \tfrac{1}{2}m^2\left(e^{2x\sqrt{-1}} + e^{-2x\sqrt{-1}}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{3}m^3\left(e^{3x\sqrt{-1}} + e^{-3x\sqrt{-1}}\right) - \text{etc.} = 2\left[m\cos. x - \tfrac{1}{2}m^2\cos. 2x + \tfrac{1}{3}m^3\cos. 3x - \text{etc.}\right]$$

on a donc enfin

$$l\,(1+n\cos.x) = -l\frac{2m}{n} + 2\left[m\cos.x - \tfrac{1}{2}m^2\cos.2x + \tfrac{1}{3}m^3\cos.3x - \text{etc.}\right].$$

Si l'on remet ici pour m sa valeur (5), on a

$$(a)\quad .\ .\ l\,(1+n\cos.x) = -l2\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n^2} + 2\left\{\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\cos.x - \tfrac{1}{2}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^2\cos.2x + \tfrac{1}{3}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^3\cos.3x - \text{etc.}\right\}$$

2me *Développement de* $l\,(1+n\cos.x)$.

On a :

$$(8)\quad .\ .\ .\ .\ .\ l\,(1+n\cos.x) = l\left[1+\tfrac{1}{2}n\left(e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}\right)\right] = \tfrac{1}{2}n\left(e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}\right) - \tfrac{1}{2}\frac{n^2}{2^2}\left(e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\frac{n^3}{2^3}\left(e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}\right)^3 - \text{etc.}$$

Avant d'aller plus loin, fixons le sens de deux notations que nous introduirons dans le double but d'abréger les calculs, et de mettre la loi de déduction plus en évidence.

La notation (p,q) exprimera dans la suite, le nombre des combinaisons que l'on peut faire avec p lettres prises q à q; en sorte que l'on a généralement

$$(p,q) = \frac{p\,(p-1)\ldots.(p-q+1)}{1.2.\ldots.q}.$$

Pour indiquer une série entière, au moyen d'un seul terme, nous ferons précéder son terme général du signe sommatoire $(+)$.

Revenons maintenant à la série (8), et développons les termes de son deuxième membre par la formule du binôme; on aura en ordonnant :

$$(9).\ .\ .\ .\ .\ \left\{\begin{aligned}
l(1+n\cos.x) = &-\left\{\frac{1}{2}[2,1]\frac{n^2}{2}+\frac{1}{4}[4,2]\frac{n^4}{4}+\frac{1}{6}[6,3]\frac{n^6}{2^6}+\ldots\right\}\\
&+\left\{\frac{1}{2}n+\frac{1}{3}[3,1]\frac{n^3}{2^3}+\frac{1}{5}[5,2]\frac{n^5}{2^5}+\frac{1}{7}[7,3]\frac{n^7}{2^7}+\text{etc.}\right\}\left(e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}\right)\\
&-\left\{\frac{1}{2}\frac{n^2}{2^2}+\frac{1}{4}\frac{n^4}{2^4}[4,1]+\frac{1}{6}[6,2]\frac{n^6}{2^6}+\ldots\right\}\left(e^{2x\sqrt{-1}}+e^{-2x\sqrt{-1}}\right)\\
&+\left\{\frac{1}{3}\frac{n^3}{2^3}+\frac{1}{5}[5,1]\frac{n^5}{2^5}+\frac{1}{7}[7,2]\frac{n^7}{2^7}+\ldots\right\}\left(e^{3x\sqrt{-1}}+e^{-3x\sqrt{-1}}\right)\\
&-\left\{\frac{1}{4}\frac{n^4}{4}+\frac{1}{6}[6,1]\frac{n^6}{2^6}+\frac{1}{8}[8,2]\frac{n^8}{2^8}+\ldots\right\}\left(e^{4x\sqrt{-1}}+e^{-4x\sqrt{-1}}\right)\\
&+\left\{\frac{1}{5}\frac{n^5}{2^5}+\frac{1}{7}[7,1]\frac{n^7}{2^7}+\frac{1}{9}[9,2]\frac{n^9}{2^9}+\ldots\right\}\left(e^{5x\sqrt{-1}}+e^{-5x\sqrt{-1}}\right)\\
&-\text{Etc.}
\end{aligned}\right.$$

Faisons pour abréger :

$$
(10)\ \ \left\{\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \frac{1}{2}[2,1]\frac{n^2}{2}+\frac{1}{4}[4,2]\frac{n^4}{2^4}+\frac{1}{6}[6,3]\frac{n^6}{2^6}+\ldots+\frac{1}{2p}[2p,p]\frac{n^{2p}}{2^{2p}}+\ldots=(+)\frac{1}{2p}[2p,p]\frac{n^{2p}}{2^{2p}};\ p=1,2,3,\ldots\\
\mathrm{II} &= \frac{n}{2}+\frac{1}{3}[3,1]\frac{n^3}{3}+\frac{1}{5}[5,2]\frac{n^5}{2^5}+\frac{1}{7}[7,2]\frac{n^7}{2^7}+\ldots+\frac{1}{2p-1}[2p-1,p]\frac{n^{2p-1}}{2^{2p-1}}+\ldots=(+)\frac{1}{2p-1}[2p-1,p]\frac{n^{2p-1}}{2^{2p-1}};\ p=1,2,3,\ldots\\
\mathrm{III} &= \frac{1}{2}\frac{n^2}{2}+\frac{1}{4}[4,1]\frac{n^4}{2^4}+\frac{1}{6}[6,2]\frac{n^6}{2^6}+\frac{1}{8}[8,3]\frac{n^8}{2^8}+\ldots+\frac{1}{2p}[2p,p-1]\frac{n^{2p}}{2^{2p}}\ldots=(+)\frac{1}{2p}[2p,p-1]\frac{n^{2p}}{2^{2p}};\ p=1,2,3,\text{ etc.}\\
\mathrm{IV} &= \frac{1}{3}\frac{n^3}{2^3}+\frac{1}{5}[5,1]\frac{n^5}{2^5}+\frac{1}{7}[7,2]\frac{n^7}{2^7}+\frac{1}{9}[9,3]\frac{n^9}{2^9}+\ldots+\frac{1}{2p+1}[2p+1,p-1]\frac{n^{2p+1}}{2^{2p+1}}\ldots=(+)\frac{1}{2p+1}[2p+1,p-1]\frac{n^{2p+1}}{2^{2p+1}};\ p=1,2,3,\text{ etc.}\\
\mathrm{V} &= \frac{1}{4}\frac{n^4}{2^4}+\frac{1}{6}[6,1]\frac{n^6}{2^6}+\frac{1}{8}[8,2]\frac{n^8}{2^8}+\ldots+\frac{1}{2p+2}[2p+2,p-1]\frac{n^{2p+2}}{2^{2p+2}}+\ldots=(+)\frac{1}{2p+2}[2p+2,p-1]\frac{n^{2p+2}}{2^{2p+2}};\ p=1,2,3,\text{ etc.}\\
\mathrm{VI} &= \frac{1}{5}\frac{n^5}{2^5}+\frac{1}{7}[7,1]\frac{n^7}{2^7}+\frac{1}{9}[9,2]\frac{n^9}{2^9}+\ldots+\frac{1}{2p+3}[2p+3,p-1]\frac{n^{2p+3}}{2^{2p+3}}+\ldots=(+)\frac{1}{2p+3}[2p+3,p-1]\frac{n^{2p+3}}{2^{2p+3}};\ p=1,2,3,\text{ etc.}\\
&\text{Etc., Etc.}
\end{aligned}\right.
$$

En substituant ces valeurs dans (9), et en considérant qu'en général

$$e^{rx\sqrt{-1}}+e^{-rx\sqrt{-1}}=\cos. rx,$$

on a :

$$(b).\ \ldots\ l(1+n\cos. x)=-\mathrm{I}+2[\mathrm{II}\cos. x-\mathrm{III}\cos. 2x+\mathrm{IV}\cos. 3x-\mathrm{V}\cos. 4x+\mathrm{VI}\cos. 5x-\text{etc.}]$$

Mais par le 1[er] développement, on a :

$$l(1+n\cos. x)=-l2\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}+2\left[\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\cos. x-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^2\cos. 2x+\frac{1}{3}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^3\cos. 3x\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{u}\right)^4\cos. 4x+\frac{1}{5}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^5\cos. 5x-\text{etc.}\right].$$

Donc, en comparant les coefficients, on aura les relations :

$$
\begin{aligned}
l2\,\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n} &= \mathrm{I}=(+)\frac{1}{2p}[2p,p]\frac{n^{2p}}{2^{2p}}=\frac{1}{2}[2,1]\frac{n^2}{2}+\frac{1}{4}[4,2]\frac{n^4}{2^4}+\frac{1}{6}[6,3]\frac{n^6}{2^6}+\ldots+\frac{1}{2p}[2p,p]\frac{n^{2p}}{2^{2p}}+\text{etc.}\\
\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n} &= \mathrm{II}=(+)\frac{1}{2p-1}[2p-1,p]\frac{n^{2p-1}}{2^{2-p1}}=\frac{n}{2}+\frac{1}{3}[3,1]\frac{n^3}{2^3}+\frac{1}{5}[5,2]\frac{n^5}{2^5}+\frac{1}{7}[7,2]\frac{n^7}{2^7}+\ldots+\frac{1}{2p-1}[2p-1,p]\frac{n^{2p-1}}{2^{2p-1}}+\text{etc.}\\
\frac{1}{2}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^5}}{n}\right)^2 &= \mathrm{III}=(+)\frac{1}{2p}[2p,p-1]\frac{n^{2p}}{2^{2p}}=\frac{1}{2}\frac{n^2}{2^2}+\frac{1}{4}[4,1]\frac{n^4}{2^4}+\frac{1}{6}[6,2]\frac{n^6}{2^6}+\frac{1}{8}[8,3]\frac{n^8}{2^8}+\ldots+\frac{1}{2p}[2p,p-1]\frac{n^{2p}}{2^{2p}}+\text{etc.}\\
\frac{1}{3}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^3 &= \mathrm{IV}=(+)\frac{7}{2p+1}[2p+1,p-1]\frac{n^{2p+1}}{2^{2p+1}}=\frac{1}{3}\frac{n^3}{2^3}+\frac{1}{5}[5,1]\frac{n^5}{2^5}+\frac{1}{7}[7,2]\frac{n^7}{2^7}+\frac{1}{9}[9,3]\frac{n^9}{2^9}+\ldots+\frac{1}{2p+1}[2p+1,p-1]\frac{n^{2p+1}}{2^{2p+1}}+\text{etc.}\\
\frac{1}{4}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{2}\right)^4 &= \mathrm{V}=(+)\frac{1}{2p+2}[2p+2,p-1]\frac{n^{2p+2}}{2^{2p+2}}=\frac{1}{4}\frac{n^4}{2^4}+\frac{1}{6}[6,1]\frac{n^6}{2^6}+\frac{1}{8}[8,2]\frac{n^8}{2^8}+\ldots+\frac{1}{2p+2}[2p+2,p-1]\frac{n^{2p+2}}{2^{2p+2}}+\text{etc.}\\
\frac{2}{5}\left(\frac{1-\sqrt{1-n2}}{2}\right)^5 &= \mathrm{VI}=(+)\frac{1}{2p+3}[2p+3,p-1]\frac{n^{2p+3}}{2^{2p+3}}=\frac{1}{5}\frac{n^5}{2^5}+\frac{1}{7}[7,1]\frac{n^7}{2^7}+\frac{1}{9}[9,2]\frac{n^9}{2^9}+\ldots+\frac{1}{2p+3}[2p+3,p-1]\frac{n^{2p+3}}{2^{2p+3}}+\text{etc.}
\end{aligned}
$$

Etc., etc.

La loi de ces résultats est évidente; on en conclut aisément

$$(c) \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{2u}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^{2u} = (+)\frac{1}{2(p+u-1)}[2(p+u-1),p-1]\frac{n^{2(p+u-1)}}{2^{2(p+u-1)}},$$

$$(d) \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{2u+1}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^{2u+1} = (+)\frac{1}{2p+2u-1}[2p+2u-1,p-1]\frac{n^{2p+2u-1}}{2^{2p+2u-1}};$$

ou bien, en développement :

$$(c') \quad \frac{1}{2u}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^{2u} = \frac{1}{2u}\frac{n^{2u}}{2^{2u}} + \frac{1}{2u+2}[2u+2,1]\frac{n^{2u+2}}{2^{2u+2}} + \frac{1}{2u+4}[2u+4,2]\frac{n^{2u+4}}{2^{2u+4}} + \ldots + \frac{1}{2(p+u-1)}[2(p+u-1),p-1]\frac{n^{2(p+u-1)}}{2^{2(p+u-1)}} + \text{etc.}$$

$$(d') \quad \frac{1}{2u+1}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^{2u+1} = \frac{1}{2u+1}\cdot\frac{n^{2u+1}}{2^{2u+1}} + \frac{1}{2u+3}[2u+3,1]\frac{n^{2u+3}}{2^{2u+3}} + \frac{1}{2u+5}[2u+5,2]\frac{n^{2u+5}}{2^{2u+5}} + \ldots + \frac{1}{2p+2u-1}[2p+2u-1,p-1]\frac{n^{2p+2u-1}}{2^{2p+2u-1}} + \text{etc.}$$

Dans ces formules le terme général est le $p^2{}_{,,}$; on déduit par conséquent (c') et (d') respectivement de (c) et de (d), en faisant dans ces dernières p successivement égal à 1, 2, 3, etc., puis en prenant la somme des résultats.

§ 2.

DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES DES FONCTIONS.

$$\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^{2u}, \quad \frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^{2u+1}.$$

La fonction $\frac{1}{(1+n\cos. x)}$ se développe en série, selon les cosinus des arcs multiples, en employant la méthode indirecte des coefficients indéterminés, ou bien, en se servant directement de la formule

$$(1+z)^{-1} = 1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{8}z^3 + \text{etc.}$$

1er *Développement.*

Soit

$$\frac{1}{1+n\cos. x} = \frac{A+Be^{x\sqrt{-1}}}{a+be^{x\sqrt{-1}}} + \frac{A+Be^{-x\sqrt{-1}}}{a+be^{-x\sqrt{-1}}}.$$

En réduisant au même dénominateur, et en posant

$$\cos. x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2},$$

il vient

$$\frac{2}{2+ne^{x\sqrt{-1}}+ne^{-x\sqrt{-1}}} = \frac{2(Aa+Bb)+(Ba+Ab)e^{x\sqrt{-1}}+(Ab+aB)e^{-x\sqrt{-1}}}{a^2+abe^{x\sqrt{-1}}+abe^{-x\sqrt{-1}}+b^2},$$

d'où l'on tire :

$$Aa+Bb=1, \quad Ba+Ab=0, \quad a^2+b^2=2, \quad ab=n.$$

De ces valeurs on déduit :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{a}{a^2 - b^2}, \quad B = \frac{b}{b^2 - a^2}, \quad a - b = \sqrt{2 - 2n}, \quad a + b = \sqrt{2 + 2n}, \quad a^2 - b^2 = 2\sqrt{1 - n^2}, \\ 2a = \sqrt{2 - 2n} + \sqrt{2 + 2n}, \quad 2b = \sqrt{2 + 2n} - \sqrt{2 - 2n}, \quad \frac{b}{a} = \frac{1 - \sqrt{1 - n^2}}{n} = m. \end{array} \right.$$

On a donc, en substituant,

$$\frac{1}{1 + n \cos. x} = \frac{1}{a^2 - b^2} \left\{ \frac{a - be^{x\sqrt{-1}}}{a + be^{x\sqrt{-1}}} + \frac{a - be^{-x\sqrt{-1}}}{a + be^{-x\sqrt{-1}}} \right\} = \frac{1}{a^2 - b^2} \left\{ \frac{1 - \frac{b}{a} e^{x\sqrt{-1}}}{1 + \frac{b}{a} e^{x\sqrt{-1}}} + \frac{1 - \frac{b}{a} e^{-x\sqrt{-1}}}{1 + \frac{b}{a} e^{-x\sqrt{-1}}} \right\}$$

$$(2) \ldots \quad \frac{1}{1 + n \cos. x} = \frac{1}{a^2 - b^2} \left\{ \frac{1 - me^{x\sqrt{-1}}}{1 + me^{x\sqrt{-1}}} + \frac{1 - me^{-x\sqrt{-1}}}{1 + me^{-x\sqrt{-1}}} \right\}.$$

Mais on trouve par la division effective :

$$\frac{1 - me^{x\sqrt{-1}}}{1 + me^{x\sqrt{-1}}} = 1 - 2me^{x\sqrt{-1}} + 2m^2 e^{2x\sqrt{-1}} - 2m^3 e^{3x\sqrt{-1}} + \text{etc.},$$

$$\frac{1 - me^{-x\sqrt{-1}}}{1 + me^{-x\sqrt{-1}}} = 1 - 2me^{-x\sqrt{-1}} + 2m^2 e^{-2x\sqrt{-1}} - 2m^3 e^{-3x\sqrt{-1}} + \text{etc.}$$

En substituant ces expressions dans la formule (2), il vient :

$$\frac{1}{1 + n \cos. x} = \frac{1}{2\sqrt{1 - n^2}} \left[2 - 2m\left(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}\right) + 2m^2\left(e^{2x\sqrt{-1}} + e^{-2x\sqrt{-1}}\right) - 3m^3\left(e^{3x\sqrt{-1}} + e^{-3x\sqrt{-1}}\right) + \ldots \right]$$

d'où

$$\frac{1}{1 + n \cos. x} = \frac{1}{\sqrt{1 - n^2}} [1 - 2m \cos. x + 2m^2 \cos. 2x - 2m^3 \cos. 3x - \text{etc.}];$$

ou bien :

$$\frac{1}{1 + n \cos. x} = \frac{1}{\sqrt{1 - n^2}} \left[1 - 2\, \frac{1 - \sqrt{1 - n^2}}{n} \cos. x + 2 \left(\frac{1 - \sqrt{1 - n^2}}{n} \right)^2 \cos. 2x - 2 \left(\frac{1 - \sqrt{1 - n^2}}{n} \right)^3 \cos. 3x - \text{etc.} \right].$$

2me *Développement.*

On a :

$$\frac{1}{1 + n \cos. x} = \left[1 + n\, \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} \right]^{-1} = 1 - \tfrac{1}{2} n \left(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}\right) + \tfrac{1}{4} n^2 \left(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-2\sqrt{-1}}\right)^2$$
$$- \tfrac{1}{8} n^3 \left(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}\right)^3 + \tfrac{1}{16} \left(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}\right)^4 - \text{etc.}$$

En développant les termes du second membre par la formule du binôme, il vient successivement :

$$\frac{1}{1 + n \cos. x} = 1 - \tfrac{1}{2} n \left[e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}\right] + \tfrac{1}{4} n^2 \left[e^{2x\sqrt{-1}} + (2, 1) + e^{-2x\sqrt{-1}}\right] - \tfrac{1}{8} n^3 \left[e^{3x\sqrt{-1}} + (3, 1)\, e^{x\sqrt{-1}}\right.$$
$$\left. + (3, 1)\, e^{-x\sqrt{-1}} + e^{-3x\sqrt{-1}}\right] + \tfrac{1}{16} n^4 \left[e^{4x\sqrt{-1}} + (4, 1)\, e^{2x\sqrt{-1}} + (4, 2) + (4, 1)\, e^{-2x\sqrt{-1}} + e^{-4x\sqrt{-1}}\right] - \text{etc.}$$

ou bien, en ordonnant :

$$(3) \quad \left\{\begin{aligned}\frac{1}{1+n\cos.x} = &\left\{1+[2,1]\frac{n^2}{2^2}+[4,2]\frac{n^4}{2^4}+\ldots\right\} - \left\{\frac{n}{2}+[3,1]\frac{n^3}{2^3}+[5,2]\frac{n^5}{2^5}+\ldots\right\}\left(e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}\right)+\\ &+\left\{\frac{n^2}{2}+[4,1]\frac{n^4}{2^4}+[6,2]\frac{n^6}{2^6}+\ldots\right\}\left(e^{2x\sqrt{-1}}+e^{-2x\sqrt{-1}}\right)-\left\{\frac{n^3}{2^3}+[5,1]\frac{n^5}{2^5}+[7,2]\frac{n^7}{2^7}+\ldots\right\}\left(e^{3x\sqrt{-1}}+e^{-3x\sqrt{-1}}\right)+\\ &+\left\{\frac{n^4}{2^4}+[6,1]\frac{n^6}{2^6}+[8,2]\frac{n^8}{2^8}+\ldots\right\}\left(e^{4x\sqrt{-1}}+e^{-4x\sqrt{-1}}\right)-\text{etc.}\end{aligned}\right.$$

Soit, pour abréger :

$$\mathrm{I} = 1+[2,1]\frac{n^2}{2^2}+[4,2]\frac{n^4}{2^4}+[6,3]\frac{n^6}{2^6}+\ldots+[2(p-1),p-1]\frac{n^{2(p-1)}}{2^{2(p-1)}}+\ldots = (+)[2(p-1),p-1]\frac{n^{2(p-1)}}{2^{2(p-1)}},$$

$$\mathrm{II} = \frac{n}{2}+[3,1]\frac{n^3}{2^3}+[5,2]\frac{n^5}{2^5}+[7,3]\frac{n^7}{2^7}+\ldots+[2p-1,p-1]\frac{n^{2p-1}}{2^{2p-1}}+\ldots = (+)[2p-1,p-1]\frac{n^{2p-1}}{2^{2p-1}},$$

$$\mathrm{III} = \frac{n^2}{2^2}+[4,1]\frac{n^4}{2^4}+[6,2]\frac{n^6}{2^6}+[8,3]\frac{n^8}{2^8}+\ldots+[2p,p-1]\frac{n^{2p}}{2^{2p}}+\ldots = (+)[2p,p-1]\frac{n^{2p}}{2^{2p}},$$

$$\mathrm{IV} = \frac{n^3}{2^3}+[5,1]\frac{n^5}{2^5}+[7,2]\frac{n^7}{2^7}+[9,3]\frac{n^9}{2^9}+\ldots+[2p+1,p-1]\frac{n^{2p+1}}{2^{2p+1}}+\ldots = (+)[2p+1,p-1]\frac{n^{2p+1}}{2^{2p+1}},$$

$$\mathrm{V} = \frac{n^4}{2^4}+[6,1]\frac{n^6}{2^6}+[8,2]\frac{n^8}{2^8}+[10,3]\frac{n^{10}}{2^{10}}+\ldots+[2(p+1),p-1]\frac{n^{2(p+1)}}{2^{2(p+1)}}+\ldots = (+)[2(p+1),p-1]\frac{n^{2(p+1)}}{2^{2(p+1)}},$$

$$\mathrm{VI} = \frac{n^5}{2^5}+[7,1]\frac{n^7}{2^7}+[9,2]\frac{n^9}{2^9}+[11,3]\frac{n^{11}}{2^{11}}+\ldots+[2p+3,p-1]\frac{n^{2p+3}}{2^{2p+3}}+\ldots = (+)[2p+3,p-1]\frac{n^{2p+3}}{2^{2p+3}},$$

Etc.

En substituant ces valeurs dans (3), et considérant qu'on a, en général,

$$2\cos.rx = e^{rx\sqrt{-1}}+e^{-rx\sqrt{-1}},$$

il vient :

$$\frac{1}{1+n\cos.x} = \mathrm{I}-2\,\mathrm{II}\cos.x+2\,\mathrm{III}\cos.2x-2\,\mathrm{IV}\cos.3x+2\,\mathrm{V}\cos.4x-2\,\mathrm{VI}\cos.5x+\text{etc.}$$

Mais on a, par le premier développement :

$$\frac{1}{1+n\cos.x} = \frac{1}{\sqrt{1-n^2}}-\frac{2}{\sqrt{1-n^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)\cos.x+\frac{2}{\sqrt{1-n^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^2\cos.2x-\frac{2}{\sqrt{1-n^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^3\cos.3x+$$
$$+\frac{2}{\sqrt{1-n^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^4\cos.4x-\frac{2}{\sqrt{1-n^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^5\cos.5x+\text{etc.}$$

Donc en comparant les coefficients :

$$\frac{1}{\sqrt{1-n^2}} = \mathrm{I} = (+)[2(p-1),p-1]\frac{n^{2(p-1)}}{2^{2(p-1)}} = 1+[2,1]\frac{n^2}{2^2}+[4,2]\frac{n^4}{2^4}+[6,3]\frac{n^6}{2^6}+\ldots+[2(p-1),p-1]\frac{n^{2(p-1)}}{2^{2(p-1)}}+\ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^2 = \mathrm{II} = (+)[2p+1,p-1]\frac{n^{2p-1}}{2^{2p-1}} = \frac{n}{2}+[3,1]\frac{n^3}{2^3}+[5,2]\frac{n^5}{2^5}+[7,3]\frac{n^7}{2^7}+\ldots+[2p-1,p-1]\frac{n^{2p-1}}{2^{2p-1}}+\ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^2 = \mathrm{III} = (+)[2p,p-1]\frac{n^{2p}}{2^{2p}} = \frac{n^2}{2^2}+[4,1]\frac{n^4}{2^4}+[6,2]\frac{n^6}{2^6}+[8,2]\frac{n^8}{2^8}+\ldots+[2p,p-1]\frac{n^{2p}}{2^{2p}}+\ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^3 = \mathrm{IV} = (+)[2p+1,p-1]\frac{n^{2p+1}}{2^{2p+1}} = \frac{n^3}{2^3}+[5,1]\frac{n^5}{2^5}+[7,2]\frac{n^7}{2^7}+[9,3]\frac{n^9}{2^9}+\ldots+[2p+1,p-1]\frac{n^{2p+1}}{2^{2p+1}}+\ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^4 = \mathrm{V} = (+)[2(p+1),p-1]\frac{n^{2(p+1)}}{2^{2(p+1)}} = \frac{n^4}{2^4}+[6,1]\frac{n^6}{2^6}+[8,2]\frac{n^8}{2^8}+[10,3]\frac{n^{10}}{2^{10}}+\ldots+[2(p+1),p-1]\frac{n^{2(p+1)}}{2^{2(p+1)}}+\ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^5 = \mathrm{VI} = (+)[2p+3,p-1]\frac{n^{2p+3}}{2^{2p+3}} = \frac{n^5}{2^5}+[7,1]\frac{n^7}{2^7}+[9,2]\frac{n^9}{2^9}+[11,3]\frac{n^{11}}{2^{11}}+\ldots+[2p+3,p-1]\frac{n^{2p+3}}{2^{2p+3}}+\ldots$$

La loi de ces résultats est évidente, on en conclut aisément :

$$(e) \ldots\ldots\ldots \quad \frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^{2u} = (+)\,[2(p+u-1),\, p-1]\,\frac{n^{2(p+u-1)}}{2^{2(p+u-1)}}$$

$$(f) \ldots\ldots\ldots \quad \frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^{2u+1} = (+)\,[2p+2u-1,\, p-1]\,\frac{n^{2p+2u-1}}{2^{2p+2u-1}}.$$

ou bien, en développement ;

$$\ldots \frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^{2u} = \frac{n^{2u}}{2^{2u}} + [2u+2,1]\,\frac{n^{2u+2}}{2^{2u+2}} + [2u+4,2]\,\frac{n^{2u+4}}{2^{2u+4}} + \ldots + [2(p+u-1),p-1]\,\frac{n^{2(p+u-1)}}{2^{2(p+u-1)}} + \text{etc.}$$

$$\ldots \frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^{2u+1} = \frac{n^{2u+1}}{2^{2u+1}} + [2u+3,1]\,\frac{n^{2u+3}}{2^{2u+3}} + [2u+5,2]\,\frac{n^{2u+5}}{2^{2u+5}} + \ldots + [2p+2u-1,p-1]\,\frac{n^{2p+2u-1}}{2^{2p+2u-1}} + \text{etc.}$$

Dans toutes ces formules le terme général est le p^2, on doit donc faire successivement $p = 1, 2, 3, \ldots$ dans les formules (e), (f), pour en déduire les formules (e'), (f').

§ 3.

CAS PARTICULIERS POUR $n = 1°$.

L'on voit sans peine que dans les formules trouvées (c'), (d'), (e'), (f'), n ne saurait dépasser l'unité, il nous importe de savoir ce que deviennent ces séries pour le cas de $n=1$, puis d'en déduire les séries particulières qui répondent successivement à $u = 0, 1, 2, 3$, etc.

1° Pour $n = 1$, (c') devient :

$$(g) \ldots\ldots \quad \frac{1}{0} = \frac{1}{2^{2u}} + [2u+2,1]\,\frac{1}{2^{2u+2}} + [2u+4,2]\,\frac{1}{2^{2u+4}} + [2u+6,3]\,\frac{1}{2^{2u+4}} + \text{etc.}$$

De là on tire :

Pour $u = 0$, $\frac{1}{0} = 1 + [2,1]\,\frac{1}{2^2} + [4,2]\,\frac{1}{2^4} + [6,3]\,\frac{1}{2^6} + \text{etc.} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{4.3}{2.4}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{6.5.4}{2.4.6}\cdot\frac{1}{2^3} + \text{etc.}$

$u = 1$, $\frac{1}{0} = \frac{1}{2^2} + [4,1]\,\frac{1}{2^4} + [6,2]\,\frac{1}{2^6} + [8,3]\,\frac{1}{2^8} + \text{etc.} = \frac{1}{2^2} + \frac{4}{2}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{6.5}{2.4}\cdot\frac{1}{2^4} + \frac{8.7.6}{2.4.6}\cdot\frac{1}{2^5} + \text{etc.}$

$u = 2$, $\frac{1}{0} = \frac{1}{2^4} + [6,1]\,\frac{1}{2^6} + [8,2]\,\frac{1}{2^8} + [10,3]\,\frac{1}{2^{10}} + \text{etc.} = \frac{1}{2^4} + \frac{6}{2}\cdot\frac{1}{2^5} + \frac{8.7}{2.4}\cdot\frac{1}{2^6} + \frac{10.9.8}{2.4.6}\,\frac{1}{2^7} + \text{etc.}$

Etc.

2° Pour $n = 1$, (d') donne :

$$(h) \ldots\ldots\ldots \quad \frac{1}{0} = \frac{1}{2^{2u+1}} + [2u+3,1]\,\frac{1}{2^{2u+3}} + [2u+5,2]\,\frac{1}{2^{2u+5}} + [2u+7,3]\,\frac{1}{2^{2u+7}} + \text{etc}$$

De là on tire :

Pour $u = 0$, $\frac{1}{0} = \frac{1}{2} + [3,1]\,\frac{1}{2^3} + [5,2]\,\frac{1}{2^5} + [7,3]\,\frac{1}{2^7} + \text{etc.} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{5.4}{2.4}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{7.6.5}{7.4.6}\cdot\frac{1}{2^4} + \text{etc.}$

$u = 1$, $\frac{1}{0} = \frac{1}{2^3} + [5,1]\,\frac{1}{2^5} + [7,2]\,\frac{1}{2^7} + [9,3]\,\frac{1}{2^9} + \text{etc.} = \frac{1}{2^3} + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2^4} + \frac{7.6}{2.4}\cdot\frac{1}{2^5} + \frac{9.8.7}{2.4.6}\cdot\frac{1}{2^6} + \text{etc.}$

$u = 2$, $\frac{1}{0} = \frac{1}{2^5} + [7,1]\,\frac{1}{2^7} + [9,2]\,\frac{1}{2^7} + [11,3]\,\frac{1}{2^{11}} + \text{etc.} = \frac{1}{2^5} + \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{2^6} + \frac{9.8}{2.4}\cdot\frac{1}{2^7} + \frac{11.10.9}{2.4.6}\cdot\frac{1}{2^8} + \text{etc.}$

Etc.

3° Pour $n = 1$, (e') donne :

$$(k). \quad \ldots \quad \frac{1}{2u} = \frac{1}{2u} \cdot \frac{1}{2^{2u}} + \frac{1}{2u+2}[2u+2,1]\frac{1}{2^{2u+2}} + \frac{1}{2u+4}[2u+4,2]\frac{1}{2^{2u+4}} + \frac{1}{2u+6}[2u+6,3]\frac{1}{2^{2u+6}} + \text{etc.}$$

De là on tire :

$$\text{Pour } u = 0, \quad \frac{1}{0} = \frac{1}{0}$$

$$u = 1, \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4}[4,1]\frac{1}{2^4} + \frac{1}{6}[6,2]\frac{1}{2^6} + \frac{1}{8}[8,3]\frac{1}{2^8} + \text{etc.} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{6.5}{2.4} \cdot \frac{1}{2^4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{8.7.6}{2.4.6} \cdot \frac{1}{2^5} + \text{etc.}$$

$$u = 2, \quad \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^4} + \frac{1}{6}[6,1]\frac{1}{2^6} + \frac{1}{8}[8,2]\frac{1}{2^8} + \frac{1}{10}[10,3]\frac{1}{2^{10}} + \cdots = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{1}{8} \cdot \frac{8.7}{2.4} \cdot \frac{1}{2^6} + \frac{1}{10} \cdot \frac{10.9.8}{2.4.6} \cdot \frac{1}{2^7} + \text{etc.}$$

Etc.

4° Pour $n = 1$, (f') donne :

$$(l). \quad \frac{1}{2u+1} = \frac{1}{2u+1} \cdot \frac{1}{2^{2u+1}} + \frac{1}{2u+3}[2u+3,1]\frac{1}{2^{2u+3}} + \frac{1}{2u+5}[2u+5,2]\frac{1}{2^{2u+5}} + \frac{1}{2u+7}[2u+7,3]\frac{1}{2^{2u+7}} + \text{etc.}$$

De là on tire :

$$\text{Pour } u = 0, \quad 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}[3,1]\frac{1}{2^3} + \frac{1}{5}[5,2]\frac{1}{2^5} + \frac{1}{7}[7,3]\frac{1}{2^7} + \text{etc.} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{5.4}{2.4} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{7} \cdot \frac{7.6.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{2^4} + \text{etc.}$$

$$u = 1, \quad \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{5}[5,1]\frac{1}{2^5} + \frac{1}{7}[7,2]\frac{1}{2^7} + \frac{1}{9}[9,3]\frac{1}{2^9} + \text{etc.} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2^4} + \frac{1}{7} \cdot \frac{7.6}{2.4} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{1}{9} \cdot \frac{9.8.7}{2.4.6} \cdot \frac{1}{2^6} + \text{etc.}$$

$$u = 2, \quad \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{1}{7}[7,1]\frac{1}{2^7} + \frac{1}{9}[9,2]\frac{1}{2^9} + \frac{1}{11}[11,3]\frac{1}{2^{11}} + \text{etc.} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{1}{7} \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{2^6} + \frac{1}{9} \cdot \frac{9.8}{2.4} \cdot \frac{1}{2^7} + \frac{1}{11} \cdot \frac{11.10.9}{2.4.6} \cdot \frac{1}{2^8} + \text{etc.}$$

Etc.

Cette analyse nous fait voir que les séries (g) et (h) sont toujours divergentes pour des valeurs entières de u; tandis que les suites (k) et (l) sont toujours convergentes pour les mêmes valeurs de u. Il faut cependant, quant à la série (k), excepter le cas de $u = 0$.

§ 4.

CAS PARTICULIERS POUR $n < 1$, SAVOIR : $n = \cos. x$.

Comme $n < 1$, en faisant $n = \cos. x$, on a :

$$\sqrt{1-n^2} = \sin. x, \quad 1 + \sqrt{1-n^2} = 1 + \sin. x.$$

De plus on a :

$$\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n} = \frac{n}{1+\sqrt{1-n^2}} = \frac{\cos. x}{1+\sin. x} = \frac{\sin. \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1 + \cos. \left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}x\right).$$

On a donc :

$$\frac{1}{2u}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^{2u}=\frac{1}{2u}\,tg^{2u}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}x\right),$$

$$\frac{1}{2u+1}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^{2u+1}=\frac{1}{2u+1}\,tg^{2u+1}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}x\right),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^{2u}=\frac{1}{\sin. x}\,tg^{2u}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}x\right),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^{2u+1}=\frac{1}{\sin. x}\,tg^{2u+1}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}x\right).$$

En faisant usage de ces transformations, on aura

1° A la place de la formule (c') :

$$\frac{1}{2u}\,tg^{2u}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}x\right)=\frac{1}{2u.2^{2u}}\cos.^{2u}x+\frac{[2u+2,1]}{(2u+2)\,2^{2u+2}}\cos.^{2u+2}x+\frac{[2u+4,2]}{(2u+4)\,2^{2u+4}}\cos.^{2u+4}x+\ldots+\frac{[2(p+u-1),p-1]}{2(p+u-1)2^{2(p+u-1)}}\cos.^{2(p+u-1)}x+\text{etc.}$$

Mais si m est pair, on a, en général :

$$2^{m-1}\cos.^m x=\cos.\,mx+[m,1]\cos.\,(m-2)\,x+[m,2]\cos.\,(m-4)\,x+\ldots+\frac{1}{2}\left[m,\frac{m}{2}\right].$$

Si donc, à l'aide de cette formule, on remplace dans la précédente, les puissances des cosinus par les cosinus des arcs multiples, il vient :

(I).

$$\frac{1}{2u}\,tg^{2u}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}x\right)=\frac{1}{2}\left\{\frac{[2u,u]}{2u.2^{4u-1}}+\frac{[2u+2,1]\,[2u+2,u+1]}{(2u+2)\,2^{4u+3}}+\ldots\ldots+\frac{[2(p+u-1),p-1]\,[(2(p+u-1),p+u-1]}{2(p+u-1)\,2^{4p+4u-5}}+\ldots\right\}+$$

$$+\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\left\{\frac{[2u,3]}{2u.2^{4u-1}}+\frac{[2u+2,1]\,[2u+2,4]}{[2u+2].2^{4u+3}}+\frac{[2u+4,2]\,[2u+4,5]}{(2u+4).\,2^{4u+7}}+\frac{[2u+6,3]\,[2u+6,6]}{(2u+6)\,2^{4u+11}}+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{[2(p+u-1),p-1]\,[2(p+u-1),p+2]}{2(p+u-1).\,2^{4p+4u-5}}+\ldots\right\}\cos.\,(2u-6)\,x$$

$$+\left\{\frac{[2u,2]}{2u.2^{4u-1}}+\frac{[2u+2,1]\,[2u+2,3]}{(2u+2).\,2^{4u+3}}+\frac{[2u+4,2]\,[2u+4,4]}{(2u+4).\,2^{4u+7}}+\frac{[2u+6,3]\,[2u+6,5]}{(2u+6).\,2^{4u+11}}+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{[2(p+u-1),p-1]\,[2(p+u-1),p+1]}{2(p+u-1).\,2^{4p+4u-5}}+\ldots\right\}\cos.\,(2u-4)\,x$$

$$+\left\{\frac{[2u,1]}{2u.2^{4u-1}}+\frac{[2u+2,1]\,[2u+2,2]}{(2u+2).\,2^{4u+3}}+\frac{[2u+4,2]\,[2u+4,3]}{(2u+4).\,2^{4u+7}}+\frac{[2u+6,3]\,[2u+6,4]}{(2u+6).\,2^{4u+11}}+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{[2(p+u-1),p-1]\,[2(p+u-1),p]}{2(p+u-1).\,2^{4p+4u-5}}+\ldots\right\}\cos.\,(2u-2)\,x$$

$$+\left\{\frac{[2u,0]}{2u.2^{4u-1}}+\frac{[2u+2,1]\,[2u+2,1]}{(2u+2).\,2^{4u+3}}+\frac{[2u+4,2]\,[2u+4,2]}{(2u+4).\,2^{4u+7}}+\frac{[2u+6,3]\,[2u+6,3]}{(2u+6).\,2^{4u+11}}+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{[2(p+u-1),p-1]\,[2(p+u-1),p-1]}{2(p+u-1).\,2^{4p+4u-5}}+\ldots\right\}\cos.\,(2u)\,x$$

$$+\left\{\ldots\ldots+\frac{[2u+2,1][2u+2,0]}{(2u+2).2^{4u+3}}+\frac{[2u+4,2][2u+4,1]}{(2u+4).2^{4u+7}}+\frac{[2u+6,3][2u+6,2]}{(2u+6).2^{4u+11}}+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{[2(p+u-1),p-1][2(p+u-1),p]}{2(p+u-1).2^{4p+4u-5}}+\ldots\right\}\cos.(2u+2)x$$

$$+\left\{\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{[2u+4,2][2u+4,0]}{(2u+4).2^{4u+7}}+\frac{[2u+6,3][2u+6,1]}{(2u+6).2^{4u+11}}+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{[2(p+u-1),p-1][2(p+u-1),p-1]}{2(p+u-1).2^{4p+4u-5}}+\ldots\right\}\cos.(2u+4)x$$

$$+\left\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{[2u+6,3][2u+6,0]}{(2u+6).2^{4u+11}}+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{[2(p+u-1),p-1][2(p+u-1),p-2]}{2(p+u-1).2^{4p+4u-5}}+\ldots\right\}\cos.(2u+6)x$$

$+$ Etc.

Remar. 1. Comme on a en général :

$$2^{2v-1}=1+[2v,1]+[2v,2]+[2v,3]+\ldots+\tfrac{1}{2}[2v,v],$$

il est facile de voir que la série (I), reproduit la série (k), si l'on pose $x=0$.

Remar. 2. Il serait facile de déduire de (I) plusieurs séries particulières correspondantes à $u=0, 1, 2, 3$, etc.; il suffirait pour cela de remarquer 1°, qu'en général $(v, 0)=1$; et 2°, qu'il faut, dans les développements particuliers, rejeter tous les termes qui donnent des cosinus affectés d'arcs négatifs.

2° A la place de la formule (d'):

$$\frac{1}{2u+1}tg^{2u+1}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}x\right)=\frac{1}{2u+1}\cdot\frac{\cos.^{2u+1}x}{2^{2u+1}}+\frac{[2u+3,1]}{(2u+3).2^{2u+3}}\cos.^{2u+3}x+\frac{[2u+5,2]}{(2u+5).2^{2u+5}}\cos.^{2u+5}x+\ldots$$
$$+\frac{[2p+2u-1,p-1]}{(2p+2u-1).2^{2p+2u-1}}\cos.^{2p+2u-1}x+\ldots$$

Mais si m est impair, on a en général :

$$2^{m-1}\cos.^{m}x=\cos.mx+[m,1]\cos.(m-2)x+[m,2]\cos.(m-4)x+\ldots+\left[m,\frac{m-1}{2}\right]\cos.x.$$

Donc si, à l'aide de cette formule, on remplace les puissances des cosinus, par les cosinus des arcs multiples, on obtiendra :

(II).

$$\frac{1}{2u+1}tg^{2u+1}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}x\right)=\left\{\frac{[2u+1,u]}{(2u+1).2^{4u+1}}+\frac{[2u+3,u+1]}{(2u+3).2^{4u+5}}+\frac{[2u+5,u+2]}{(2u+5).2^{4u+9}}+\frac{[2u+7,u+3]}{(2u+7).2^{4u+13}}+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{[2p+2u-1,p+u-1]}{(2p+2u-1.)2^{4p+4u-3}}+\ldots\right\}\cos.x\ldots$$

$$
\begin{aligned}
&+\left\{\frac{[2u+1,3]}{(2u+1).2^{4u+1}}+\frac{[2u+3,1][2u+3,4]}{(2u+3).2^{4u+5}}+\frac{[2u+5,2][2u+5,5]}{(2u+5).2^{4u+9}}+\frac{[2u+7,3][2u+7,6]}{(2u+7).2^{4u+13}}+\ldots\right.\\
&\qquad\left.+\frac{[2p+2u-1,p-1][2p+2u-1,p+2]}{(2p+2u-1).2^{4p+4u-3}}+\ldots\right\}\cos.(2u-5)\,x\\
&+\left\{\frac{[2u+1,2]}{(2u+1).2^{4u+1}}+\frac{[2u+3,1][2u+3,3]}{(2u+3).2^{4u+5}}+\frac{[2u+5,2][2u+5,4]}{(2u+5).2^{4u+9}}+\frac{[2u+7,3][2u+7,5]}{(2u+7).2^{4u+13}}+\ldots\right.\\
&\qquad\left.+\frac{[2p+2u-1,p-1][2p+2u-1,p+1]}{(2p+2u-1).2^{4p+4u-3}}+\ldots\right\}\cos.(2u-3)\,x\\
&+\left\{\frac{[2u+1,1]}{(2u+1).2^{4u+1}}+\frac{[2u+3,1][2u+3,2]}{(2u+3).2^{4u+5}}+\frac{[2u+5,2][2u+5,3]}{(2u+5).2^{4u+9}}+\frac{[2u+7,3][2u+7,4]}{(2u+7).2^{4u+13}}+\ldots\right.\\
&\qquad\left.+\frac{[2p+2u-1,p-1][2p+2u-1,p]}{(2p+2u-1).2^{4p+4u-3}}+\ldots\right\}\cos.(2u-1)\,x\\
&+\left\{\frac{[2u+1,0]}{(2u+1).2^{4u+1}}+\frac{[2u+3,1][2u+3,1]}{(2u+3).2^{4u+5}}+\frac{[2u+5,2][2u+5,2]}{(2u+5).2^{4u+9}}+\frac{[2u+7,3][2u+7,3]}{(2u+7).2^{4u+13}}+\ldots\right.\\
&\qquad\left.+\frac{[2p+2u-1,p-1][2p+2u-1,p-1]}{(2p+2u-1).2^{4p+4u-3}}+\ldots\right\}\cos.(2u+1)\,x\\
&+\left\{\ldots\ldots+\frac{[2u+3,1][2u+3,0]}{(2u+3).2^{4u+5}}+\frac{[2u+5,2][2u+5,1]}{(2u+5).2^{4u+9}}+\frac{[2u+7,3][2u+7,2]}{(2u+7).2^{4u+13}}+\ldots\right.\\
&\qquad\left.+\frac{[2p+2u-1,p-1][2p+2u-1,p-2]}{(2p+2u-1).2^{4p+4u-3}}+\ldots\right\}\cos.(2u+3)\,x\\
&+\left\{\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{[2u+5,2][2u+5,0]}{(2u+5).2^{4u+9}}+\frac{[2u+7,3][2u+7,1]}{(2u+7).2^{4u+13}}+\ldots\right.\\
&\qquad\left.+\frac{[2p+2u-1,p-1][2p+2u-1,p-3]}{(2p+2u-1).2^{4p+4u-3}}+\ldots\right\}\cos.(2u+5)\,x\\
&+\left\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{[2u+7,3][2u+7,0]}{(2u+7).2^{4u+13}}+\ldots\right.\\
&\qquad\left.+\frac{[2p+2u-1,p-1][2p+2u-1,p-4]}{(2p+2u-1).2^{4p+4u-3}}+\ldots\right\}\cos.(2u+7)\,x\\
&+\text{Etc.}
\end{aligned}
$$

Remar. 3. En faisant $x = 0$ et en sommant les colonnes verticales, on reproduira avec la plus grande facilité la série (l).

En faisant $u = 0, 1, 2, \ldots$ la série (II) en donnerait une infinité d'autres.

3° A la place de la formule (e').

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sin.\,x}\cdot tg^{2u}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}x\right) &= \frac{\cos.^{2u}x}{2^{2u}}+\frac{[2u+2,1]}{2^{2u+2}}\cos.^{2u+2}x+\frac{[2u+4,2]}{2^{2u+4}}\cos.^{2u+4}x+\ldots\\
&\quad+\frac{[2(p+u-1),p-1]}{2^{2(p+u-1)}}\cos.^{(2p+u-1)}x+\text{etc.}
\end{aligned}
$$

Si, on remplace les puissances des cosinus en fonction des cosinus des arcs multiples, il vient :

(III).

$$
\begin{aligned}
\frac{tg^{2u}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}x\right)}{\sin.\ x} = \frac{1}{2}\Bigg\{ & \frac{[2u,u]}{2^{4u-1}} + \frac{[2u+2,u+1][2u+2,1]}{2^{4u+3}} + \frac{[2u+4,u+2][2u+4,2]}{2^{4u+7}} + \frac{[2u+6,u+3][2u+6,3]}{2^{4u+11}} + \dots \\
& + \frac{[2(p+u-1),p+u-1][(2(p+u-1),p-1]}{2^{4p+4u-5}} + \dots \Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$
\begin{aligned}
+ \Bigg\{ & \frac{[2u,3]}{2^{4u-1}} + \frac{[2u+2,1][2u+2,4]}{2^{4u+3}} + \frac{[2u+4,2][2u+4,5]}{2^{4u+7}} + \frac{[2u+6,3][2u+6,6]}{2^{4u+11}} + \dots \\
& + \frac{[2(p+u-1),p-1][2(p+u-1),p+2]}{2^{4p+4u-5}} + \dots \Bigg\} \cos.\ (2u-6)\ x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+ \Bigg\{ & \frac{[2u,2]}{2^{4u-1}} + \frac{[2u+2,1][2u+2,3]}{2^{4u+3}} + \frac{[2u+4,2][2u+4,4]}{2^{4u+7}} + \frac{[2u+6,3][2u+6,5]}{2^{4u+11}} + \dots \\
& + \frac{[2(p+u-1),p-1][2(p+u-1),p+1]}{2^{4p+4u-5}} + \dots \Bigg\} \cos.\ (2u-4)\ x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+ \Bigg\{ & \frac{[2u,1]}{2^{4u-1}} + \frac{[2u+2,1][2u+2,2]}{2^{4u+3}} + \frac{[2u+4,2][2u+4,3]}{2^{4u+7}} + \frac{[2u+6,3][2u+6,4]}{2^{4u+11}} + \dots \\
& + \frac{[2(p+u-1),p-1][2(p+u-1),p]}{2^{4p+4u-5}} + \dots \Bigg\} \cos.\ (2u-2)\ x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+ \Bigg\{ & \frac{[2u,0]}{2^{4u-1}} + \frac{[2u+2,1][2u+2,1]}{2^{4u+3}} + \frac{[2u+4,2][2u+4,2]}{2^{4u+7}} + \frac{[2u+6,3][2u+6,3]}{2^{4u+11}} + \dots \\
& + \frac{[2(p+u-1),p-1][2(p+u-1),p-1]}{2^{4p+4u-5}} + \dots \Bigg\} \cos.\ (2u)\ x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+ \Bigg\{ & \dots + \frac{[2u+2,1][2u+2,0]}{2^{4u+3}} + \frac{[2u+4,2][2u+4,1]}{2^{4u+7}} + \frac{[2u+6,3][2u+6,2]}{2^{4u+11}} + \dots \\
& + \frac{[2(p+u-1),p-1][2(p+u-1),p-2]}{2^{4p+4u-5}} + \dots \Bigg\} \cos.\ (2u+2)\ x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+ \Bigg\{ & \dots\dots\dots\dots + \frac{[2u+4,2][2u+4,0]}{2^{4u+7}} + \frac{[2u+6,3][2u+6,1]}{2^{4u+11}} + \dots \\
& + \frac{[2(p+u-1),p-1][2(p+u-1),p-3]}{2^{4p+4u-5}} + \dots \Bigg\} \cos.\ (2u+4)\ x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+ \Bigg\{ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \frac{[2u+6,3][2u+6,0]}{2^{4u+11}} + \dots \\
& + \frac{[2(p+u-1),p-1][2(p+u-1),p-4]}{2^{4p+4u-5}} + \dots \Bigg\} \cos.\ (2u+6)\ x
\end{aligned}
$$

+ Etc.

4° A la place de la formule (f').

$$\frac{1}{\sin. x} tg^{2u+1}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}x\right) = \frac{\cos.^{2u+1} x}{2^{2u+1}} + \frac{[2u+3, 1]}{2^{2u+3}} \cos.^{2u+3} x + \frac{[2u+5, 2]}{2^{2u+5}} \cos.^{2u+5} x + \ldots + \frac{[2p+2u-1, p-1]}{2^{2p+2u-1}} \cos.^{2p+2u-1} x + \text{etc.}$$

En changeant les puissances en cosinus des arcs multiples, on obtient :

(IV).

$$\frac{tg^{2u+1}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}x\right)}{\sin. x} = \left\{ \frac{[2u+1, u]}{2^{4u+1}} + \frac{[2u+3, u+1]}{2^{4u+5}} + \frac{[2u+5, u+2]}{2^{4u+9}} + \frac{[2u+7, u+3]}{2^{4u+13}} + \ldots + \frac{[2p+2u-1, p+u-1]}{2^{4p+4u-3}} + \ldots \right\} \cos. x +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \left\{ \frac{[2u+1, 3]}{2^{4u+1}} + \frac{[2u+3, 1][2u+3, 4]}{2^{4u+5}} + \frac{[2u+5, 2][2u+5, 5]}{2^{4u+9}} + \frac{[2u+7, 3][2u+7, 6]}{2^{4u+13}} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{[2p+2u-1, p-1][2p+2u-1, p+2]}{2^{4p+4u-3}} + \ldots \right\} \cos. (2u-5)x$$

$$+ \left\{ \frac{[2u+1, 2]}{2^{4u+1}} + \frac{[2u+3, 1][2u+3, 3]}{2^{4u+5}} + \frac{[2u+5, 2][2u+5, 4]}{2^{4u+9}} + \frac{[2u+7, 3][2u+7, 5]}{2^{4u+13}} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{[2p+2u-1, p-1][2p+2u-1, p+1]}{2^{4p+4u-3}} + \ldots \right\} \cos. (2u-3)x$$

$$+ \left\{ \frac{[2u+1, 1]}{2^{4u+1}} + \frac{[2u+3, 1][2u+3, 2]}{2^{4u+5}} + \frac{[2u+5, 2][2u+5, 3]}{2^{4u+9}} + \frac{[2u+7, 3][2u+7, 4]}{2^{4u+13}} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{[2p+2u-1, p-1][2p+2u-1, p]}{2^{4p+4u-3}} + \ldots \right\} \cos. (2u-1)x$$

$$+ \left\{ \frac{[2u+1, 0]}{2^{4u+1}} + \frac{[2u+3, 1][2u+3, 1]}{2^{4u+5}} + \frac{[2u+5, 2][2u+5, 2]}{2^{4u+9}} + \frac{[2u+7, 3][2u+7, 3]}{2^{4u+13}} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{[2p+2u-1, p-1][2p+2u-1, p-1]}{2^{4p+4u-3}} + \ldots \right\} \cos. (2u+1)x$$

$$+ \left\{ \ldots + \frac{[2u+3, 1][2u+3, 0]}{2^{4u+5}} + \frac{[2u+5, 2][2u+5, 1]}{2^{4u+9}} + \frac{[2u+7, 3][2u+7, 2]}{2^{4u+13}} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{[2p+2u-1, p-1][2p+2u-1, p-2]}{2^{4p+4u-3}} + \ldots \right\} \cos. (2u+3)x$$

$$+ \left\{ \ldots\ldots\ldots + \frac{[2u+5, 2][2u+5, 0]}{2^{4u+9}} + \frac{[2u+7, 3][2u+7, 1]}{2^{4u+13}} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{[2p+2u-1, p-1][2p+2u-1, p-3]}{2^{4p+4u-3}} + \ldots \right\} \cos. (2u+5)x$$

$$+ \left\{ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{[2u+7, 3][2u+7, 0]}{2^{4u+13}} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{[2p+2u-1, p-1][2p+2u-1, p-4]}{2^{4p+4u-3}} + \ldots \right\} \cos. (2u+7)x$$

+ Etc., etc.

§ 5.

CAS PARTICULIERS POUR $n < 1$, SAVOIR : $n = \sin. x$.

Comme $n < 1$, en faisant $n = \sin. x$, on a :

$$\sqrt{1-n^2} = \cos. x, \quad 1 + \sqrt{1-n^2} = 1 + \cos. x, \quad \frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n} = \frac{n}{1+\sqrt{1-n^2}} = \frac{\sin. x}{1 + \cos. x} = tg\, \frac{1}{2} x.$$

On a donc :

$$\frac{1}{2u} \left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^{2u} = \frac{1}{2u}\, tg^{2u} \frac{1}{2} x,$$

$$\frac{1}{2u+1} \left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^{2u+1} = \frac{1}{2u+1}\, tg^{2u+1} \frac{1}{2} x,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-n^2}} \left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^{2u} = \frac{1}{\cos. x}\, tg^{2u} \frac{1}{2} x,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-n^2}} \left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^{2u+1} = \frac{1}{\cos. x}\, tg^{2u+1} \frac{1}{2} x.$$

En faisant usage de ces transformations, on aura :

1° A la place de (c').

$$\frac{1}{2u} \cdot tg^{2u} \frac{1}{2} x = \frac{1}{2u} \cdot \frac{\sin.^{2u} x}{2^{2u}} + \frac{[2u+2, 1]}{(2u+2).\, 2^{2u+2}} \sin.^{2u+2} x + \frac{[2u+4, 2]}{(2u+4).\, 2^{2u+4}} \sin.^{2u+4} x + \ldots + \frac{[2(p+u-1), p-1]}{2(p+u-1).\, 2^{2(p+u-1)}} \sin.^{2(p+u-1)} x + \text{etc.}$$

Mais si m est pair, on a en général :

$$(-1)^{\frac{m}{2}}\, 2^{m-1} \sin.^m x = \cos. mx - [m, 1] \cos. (m-2) x + [m, 2] \cos. (m-4) x + \ldots + \frac{1}{2} x\, (-1)^{\frac{m}{2}} [m, \tfrac{m}{2}].$$

Donc, en changeant les puissances des sinus en cosinus des arcs multiples, il vient :

(V).

$$\frac{1}{2u}\, tg^{2u} \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} \left\{ \frac{[2u, u]}{2u.\, 2^{4u-1}} + \frac{[2u+2, u+1]\,[2u+2, 1]}{(2u+2).\, 2^{4u+3}} + \frac{[2u+4, u+2]\,[2u+4, 2]}{(2u+4).\, 2^{4u+7}} + \ldots + \frac{[2(p+u-1), p+u-1]\,[2(p+u-1), p-1]}{2(p+u-1).\, 2^{4p+4u-5}} + \ldots \right\} + \ldots$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \left\{ - \frac{(-1)^u [2u, 3]}{2u.\, 2^{4u-1}} + \frac{(-1)^{u+1} [2u+2, 1]\,[2u+2, 4]}{(2u+2).\, 2^{4u+3}} - \frac{(-1)^{u+2} [2u+4, 2]\,[2u+4, 5]}{(2u+4).\, 2^{4u+7}} + \frac{(-1)^{u+3} [2u+6, 3]\,[2u+6, 6]}{(2u+6).\, 2^{4u+11}} - \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{(-1)^{2p+u+1} [2(p+u-1), p-1]\,[2(p+u-1, p+2]}{2(p+u-1),\, 2^{4p+4u-5}} + \ldots \right\} \cos. (2u-6) x$$

$$+ \left\{ + \frac{(-1)^u [2u, 2]}{2u.\, 2^{4u-1}} - \frac{(-1)^{u+1} [2u+2, 1]\,[2u+2, 3]}{(2u+2).\, 2^{4u+3}} + \frac{(-1)^{u+2} [2u+4, 2]\,[2u+4, 4]}{(2u+4).\, 2^{4u+7}} - \frac{(-1)^{u+3} [2u+6, 3]\,[2u+6, 5]}{(2u+6).\, 2^{4u+11}} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{(-1)^{2p+u} [2(p+u-1), p-1]\,[2(p+u-1), p+1]}{2(p+u-1).\, 2^{4p+4u-5}} + \ldots \right\} \cos. (2u-1) x$$

$$+\left\{-\frac{(-1)^{u}[2u,1]}{2u.\,2^{4u-1}}+\frac{(-1)^{u+1}[2u+2,1][2u+2,2]}{(2u+2).\,2^{4u+3}}-\frac{(-1)^{u+2}[2u+4,2][2u+4,3]}{(2u+4).\,2^{4u+7}}+\frac{(-1)^{u+3}[2u+6,3][2u+6,4]}{(2u+6).\,2^{4u+11}}-\dots\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^{2p+u-1}[2(p+u-1),p-1][2(p+u-1),p]}{2(p+u-1).\,2^{4p+4u-5}}+\dots\right\}\cos.\,(2u-2)\,x$$

$$+\left\{+\frac{(-1)^{u}[2u,0]}{2u.\,2^{4u-1}}-\frac{(-1)^{u+1}[2u+2,1][2u+2,1]}{(2u+2).\,2^{4u+3}}+\frac{(-1)^{u+2}[2u+4,2][2u+4,2]}{(2u+4).\,2^{4u+7}}-\frac{(-1)^{u+3}[2u+6,3][2u+6,3]}{(2u+6).\,2^{4u+11}}+\dots\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^{2p+u-2}[2(p+u-1),p-1][2(p+u-1),p-1]}{2(p+u-1).\,2^{4p+4u-5}}+\dots\right\}\cos.\,(2u)\,x$$

$$+\left\{\dots\dots+\frac{(-1)^{u+1}[2u+2,1][2u+2,0]}{(2u+2).\,2^{4u+3}}-\frac{(-1)^{u+2}[2u+4,2][2u+4,1]}{(2u+4).\,2^{4u+7}}+\frac{(-1)^{u+3}[2u+6,3][2u+6,2]}{(2u+6).\,2^{4u+11}}-\dots\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^{2p+u-3}[2(p+u-1),p-1][2(p+u-1),p-2]}{2(p+u-1).\,2^{4p+4u-5}}+\dots\right\}\cos.\,(2u+2)\,x$$

$$+\left\{\dots\dots\dots\dots+\frac{(-1)^{u+2}[2u+4,2][2u+4,0]}{(2u+4).\,2^{4u+7}}-\frac{(-1)^{u+3}[2u+6,3][2u+6,1]}{(2u+6).\,2^{4u+11}}+\dots\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^{2p+u-4}[2(p+u-1),p-1][2(p+u-1),p-3]}{2(p+u-1).\,2^{4p+4u-5}}+\dots\right\}\cos.\,(2u+4)\,x$$

$$+\left\{\dots\dots\dots\dots\dots\dots+\frac{(-1)^{u+3}[2u+6,3][2u+6,0]}{(2u+6).\,2^{4u+11}}-\dots\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^{2p+u-5}[2(p+u-1),p-1][2(p+u-1),p-4]}{2(p+u-1).\,2^{4p+4u-5}}+\dots\right\}\cos.\,(2u+6)\,x$$

+ Etc., etc.

2° A la place de (d').

$$\frac{1}{2u+1}\,tg^{2u+1}\tfrac{1}{2}x=\frac{1}{2u+1}\cdot\frac{\sin.^{2u+1}x}{2^{2u+1}}+\frac{[2u+3,1]}{(2u+3).\,2^{2u+3}}\sin.^{2u+3}x+\frac{[2u+5,2]}{(2u+5).\,2^{2u+5}}\sin.^{2u+5}x+\dots+\frac{[2p+2u-1,p-1]}{(2p+2u-1).\,2^{2p+2u-1}}\sin.^{2p+2u-1}x+\text{etc.}$$

Mais, si m est impair, on a en général :

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}\,2^{m-1}\sin.^{m}x=\sin.\,mx-[m,1]\sin.\,(m-2)\,x+[m,2]\sin.\,(m-4)\,x-\dots(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left[m,\frac{m-1}{2}\right]\sin.\,x.$$

En changeant les puissances des sinus en sinus des arcs multiples, il vient :

(VI).

$$\frac{1}{2u+1}\,tg^{2u+1}\tfrac{1}{2}x=\left\{\frac{[2u-1,u]}{(2u+1).\,3^{4u+1}}+\frac{[2u+3,u+1][2u+3,1]}{(2u+3).\,2^{4u+5}}+\frac{[2u+5,u+2][2u+5,2]}{(2u+5).\,2^{4u+9}}+\dots+\frac{[2p+2u-1,p+u-1][2p+2u-1,p-1]}{(2p+2u-1).\,2^{4p+4u-3}}+\dots\right\}\sin.\,x$$

$$+\left\{\begin{aligned}&-\frac{(-1)^{u}[2u+1,3]}{(2u+1).\,2^{4u+1}}+\frac{(-1)^{u+1}[2u+3,1][2u+3,4]}{(2u+3).\,2^{4u+5}}-\frac{(-1)^{u+2}[2u+5,2][2u+5,5]}{(2u+5).\,2^{4u+9}}+\frac{(-1)^{u+3}[2u+7,3][2u+7,6]}{(2u+7).\,2^{2u+13}}-\ldots\\&+\frac{(-1)^{2p+u+1}[2p+2u-1,p-1][2p+2u-1,p+2]}{(2p+2u-1).\,2^{4p+4u-3}}+\ldots\end{aligned}\right\}\sin.(2u-5)\,x$$

$$+\left\{\begin{aligned}&+\frac{(-1)^{u}[2u+1,2]}{(2u+1).\,2^{4u+1}}-\frac{(-1)^{u+1}[2u+3,1][2u+3,3]}{(2u+3).\,2^{4u+5}}+\frac{(-1)^{u+2}[2u+5,2][2u+5,4]}{(2u+5).\,2^{4u+9}}-\frac{(-1)^{u+3}[2u+7,3][2u+7,5]}{(2u+-7).\,2^{2u+13}}+\ldots\\&+\frac{(-1)^{2p+u}[2p+2u-1,p-1][2p+2u-1,p+1]}{(2p+2u-1).\,2^{4p+4u-3}}+\ldots\end{aligned}\right\}\sin.(2u-3)\,x$$

$$+\left\{\begin{aligned}&-\frac{(-1)^{u}[2u+1,1]}{(2u+1).\,2^{4u+1}}+\frac{(-1)^{u+1}[2u+3,1][2u+3,2]}{(2u+3).\,2^{4u+5}}-\frac{(-1)^{u+2}[2u+5,2][2u+5,3]}{(2u+5).\,2^{4u+9}}+\frac{(-1)^{u+3}[2u+7,3][2u+7,4]}{(2u+7).\,2^{2u+13}}+\ldots\\&+\frac{(-1)^{2p+u-1}[2p+2u-1,p-1][2p+2u-1,p]}{(2p+2u-1).\,2^{4p+4u-3}}+\ldots\end{aligned}\right\}\sin.(2u-1)\,x$$

$$+\left\{\begin{aligned}&+\frac{(-1)^{u}[2u+1,0]}{(2u+1).\,2^{4u+1}}-\frac{(-1)^{u+1}[2u+3,1][2u+3,1]}{(2u+3).\,2^{4u+5}}+\frac{(-1)^{u+2}[2u+5,2][2u+5,2]}{(2u+5).\,2^{4u+9}}-\frac{(-1)^{u+3}[2u+7,3][2u+7,3]}{(2u+7).\,2^{4u+13}}+\ldots\\&+\frac{(-1)^{2p+u-2}[2p+2u-1,p-1][2p+2u-1,p-1]}{(2p+2u-1).\,2^{4p+4u-3}}+\ldots\end{aligned}\right\}\sin.(2u+1)\,x$$

$$+\left\{\begin{aligned}&\ldots\ldots\ldots+\frac{(-1)^{u+1}[2u+3,1][2u+3,0]}{(2u+3).\,2^{4u+5}}-\frac{(-1)^{u+2}[2u+5,2][2u+5,1]}{(2u+5).\,2^{4u+9}}+\frac{(-1)^{u+3}[2u+7,3][2u+7,2]}{(2u+7).\,2^{2u+13}}-\ldots\\&+\frac{(-1)^{2p+u-3}[2p+2u-1,p-1][2p+2u-1,p-2]}{(2p+2u-1).\,2^{4p+4u-3}}+\ldots\end{aligned}\right\}\sin.(2u+3)\,x$$

$$+\left\{\begin{aligned}&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{(-1)^{u+2}[2u+5,2][2u+5,0]}{(2u+5).\,2^{4u+9}}-\frac{(-1)^{u+3}[2u+7,3][2u+7,1]}{(2u+7).\,2^{2u+13}}+\ldots\\&+\frac{(-1)^{2p+u-4}[2p+2u-1,p-1][2p+2u-1,p-3]}{(2p+2u-1).\,2^{4p+4u-3}}+\ldots\end{aligned}\right\}\sin.(2u+5)\,x$$

$$+\left\{\begin{aligned}&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{(-1)^{u+3}[2u+7,3][2u+7,0]}{(2u+7).\,2^{2u+13}}-\ldots\\&+\frac{(-1)^{2p+u-5}[2p+2u-1,p-1][2p+2u-1,p-4]}{(2p+2u-1).\,2^{4p+4u-3}}+\ldots\end{aligned}\right\}\sin.(2u+7)\,x$$

+ Etc., etc.

Il serait facile d'obtenir la valeur de cette suite correspondante à $x = \frac{1}{2}\pi$.

3° A la place de (e').

$$\frac{1}{\cos.\,x}\cdot tg^{2u}\,\frac{1}{2}\,x=\frac{\sin.^{2u}x}{2^{2u}}+\frac{[2u+2,1]}{2^{2u+2}}\sin.^{2u+2}x+\frac{[2u+4,2]}{2^{2u+4}}\sin.^{2u+4}x+\ldots+\frac{[2(p+u-1),p-1]}{2^{2(p+u-1)}}\sin.^{2(p+u-1)}x+\text{etc.}$$

En remplaçant les puissances des sinus par les cosinus des arcs multiples, il vient :

(VII).

$$\frac{tg^{2u}\frac{1}{2}x}{\cos.\,x}=\frac{1}{2}\Big\{\frac{[2u,u]}{2^{4u-1}}+\frac{[2u+2,u+1][2u+2,1]}{2^{4u+3}}+\frac{[2u+4,u+2][2u+4,2]}{2^{4u+7}}+\ldots+\frac{[2(p+u-1),p+u-1][2(p+u-1),p-1]}{2^{4p+4u-5}}+\ldots\Big\}$$

+ Etc. . . . .

$$+\Big\{-\frac{(-1)^u[2u,3]}{2^{4u-1}}+\frac{(-1)^{u+1}[2u+2,1][2u+2,4]}{2^{4u+3}}-\frac{(-1)^{u+2}[2u+4,2][2u+4,5]}{2^{4u+7}}+\frac{(-1)^{u+3}[2u+6,3][2u+6,6]}{2^{4u+11}}-\ldots$$
$$+\frac{(-1)^{2p+u-1}[2(p+u-1),p-1][2(p+u-1),p+2]}{2^{4p+4u-5}}+\ldots\Big\}\cos.\,(2u-6)\,x$$

$$+\Big\{+\frac{(-1)^u[2u,2]}{2^{4u-1}}-\frac{(-1)^{u+1}[2u+2,1][2u+2,3]}{2^{4u+3}}+\frac{(-1)^{u+2}[2u+4,2][2u+4,4)}{2^{4u+7}}-\frac{(-1)^{u+3}[2u+6,3][2u+6,5]}{2^{4u+11}}+\ldots$$
$$+\frac{(-1)^{2p+u}[2(p+u-1),p-1][2(p+u-1),p+1]}{2^{4p+4u-5}}+\ldots\Big\}\cos.\,(2u-4)\,x$$

$$+\Big\{-\frac{(-1)^u[2u,1]}{2^{4u-1}}+\frac{(-1)^{u+1}[2u+2,1][2u+2,2]}{2^{4u+3}}-\frac{(-1)^{u+2}[2u+4,2][2u+4,3]}{2^{4u+7}}+\frac{(-1)^{u+3}[2u+6,3][2u+6,4]}{2^{4u+11}}-\ldots$$
$$+\frac{(-1)^{2p+u-1}[2(p+u-1),p-1][2(p+u-1),p}{2^{4p+4u-5}}+\ldots\Big\}\cos.\,(2u-2)\,x$$

$$+\Big\{+\frac{(-1)^u[2u,0]}{2^{4u-1}}-\frac{(-1)^{u+1}[2u+2,1][2u+2,1]}{2^{4u+3}}+\frac{(-1)^{u+2}[2u+4,2][2u+4,2]}{2^{4u+7}}-\frac{(-1)^{u+3}[2u+6,3][2u+6,3]}{2^{4u+11}}+\ldots$$
$$+\frac{(-1)^{2p+u-2}[2(p+u-1),p-1][2(p+u-1,p-1]}{2^{4p+4u-5}}+\ldots\Big\}\cos.\,(2u)\,x$$

$$+\Big\{\ldots\ldots+\frac{(-1)^{u+1}[2u+2,1][2u+2,0]}{2^{4u+3}}-\frac{(-1)^{u+2}[2u+4,2][2u+4,1]}{2^{4u+7}}+\frac{(-1)^{u+3}[2u+6,3][2u+6,2]}{2^{4u+11}}-\ldots$$
$$+\frac{(-1)^{2p+u-3}[2(p+u-1),p-1][2(p+u-1),p-2]}{2^{4p+4u-5}}+\ldots\Big\}\cos.\,(2u+2)\,x$$

$$+\Big\{\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{(-1)^{u+2}[2u+4,2][2u+4,0]}{2^{4u+7}}-\frac{(-1)^{u+3}[2u+6,3][2u+6,1]}{2^{4u+11}}+\ldots$$
$$+\frac{(-1)^{2p+u-4}[2(p+u-1),p-1][2(p+u-1),p-3]}{2^{4p+4u-5}}+\ldots\Big\}\cos.\,(2u+4)\,x$$

$$+\Big\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{(-1)^{u+3}[2u+6,3][2u+6,0]}{2^{4u+11}}-\ldots$$
$$+\frac{(-1)^{2p+u-5}[2(p+u-1),p-1][2(p+u-1),p-4]}{2^{4p+4u-5}}+\ldots\Big\}\cos.\,(2u+6)\,x$$

+ Etc., etc.

4° A la place de (f').

$$\frac{1}{\cos..\,x}\,tg^{2u+1}\frac{1}{2}x=\frac{\sin.^{2u+1}x}{2^{2u+1}}+\frac{[2u+3,1]}{2^{2u+3}}\sin.^{2u+3}x+\frac{[2u+5,2]}{2^{2u+5}}\sin.^{2u+5}x+\ldots+\frac{[2p+2u-1,p-1]}{2^{2p+2u-1}}\sin.^{2p+2u-1}+\text{etc.}$$

En changeant les puissances des sinus, en sinus des arcs multiples, il vient :

(VIII).

$$\frac{tg^{2u+1}\frac{1}{2}x}{\cos.\ x} = \left\{ \frac{[2u+1,u]}{2^{4u+1}} + \frac{[2u+3,u+1]}{2^{4u+5}} + \frac{[2u+5,u+2][2u+5,2]}{2^{4u+9}} + \ldots + \frac{[2p+2u-1,p+u-1][2p+2u-1,p-1]}{2^{4p+4u-3}} + \ldots \right\} \sin.\ x +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \left\{ -\frac{(-1)^{u}[2u+1,3]}{2^{4u+1}} + \frac{(-1)^{u+1}[2u+3,1][2u+3,4]}{2^{4u+5}} - \frac{(-1)^{u+2}[2u+5,2][2u+5,5]}{2^{4u+9}} + \frac{(-1)^{u+3}[2u+7,3][2u+7,6]}{2^{4u+13}} - \ldots \right.$$
$$\left. - \frac{(-1)^{2p+u+1}[2p+2u-1,p-1][2p+2u-1,p+2]}{2^{4p+4u-3}} \ldots \right\} \sin.\ (2u-5)\ x$$

$$+ \left\{ + \frac{(-1)^{u}[2u+1,2]}{2^{4u+1}} - \frac{(-1)^{u+1}[2u+3,1][2u+3,3]}{2^{4u+5}} + \frac{(-1)^{u+2}[2u+5,2][2u+5,4]}{2^{4u+9}} - \frac{(-1)^{u+3}[2u+7,3][2u+7,5]}{2^{4u+13}} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{(-1)^{2p+u}[2p+2u-1,p-1][2p+2u-1,p+1]}{2^{4p+4u-3}} \ldots \right\} \sin.\ (2u-3)\ x$$

$$+ \left\{ -\frac{(-1)^{u}[2u+1,1]}{2^{4u+1}} + \frac{(-1)^{u+1}[2u+3,1][2u+3,2]}{2^{4u+5}} - \frac{(-1)^{u+2}[2u+5,2][2u+5,3]}{2^{4u+9}} + \frac{(-1)^{u+3}[2u+7,3][2u+7,4]}{2^{4u+13}} - \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{(-1)^{2p+u-1}[2p+2u-1,p-1][2p+2u-1,p]}{2^{4p+4u-3}} \ldots \right\} \sin.\ (2u-1)\ x$$

$$+ \left\{ + \frac{(-1)^{u}[2u+1,0]}{2^{4u+1}} - \frac{(-1)^{u+1}[2u+3,1][2u+3,1]}{2^{4u+5}} + \frac{(-1)^{u+2}[2u+5,2][2u+5,2]}{2^{4u+9}} - \frac{(-1)^{u+3}[2u+7,3][2u+7,3]}{2^{4u+13}} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{(-1)^{2p+u-2}[2p+2u-1,p-1][2p+2u-1,p-1]}{2^{4p+4u-3}} \ldots \right\} \sin.\ (2u+1)\ x$$

$$+ \left\{ \ldots\ldots + \frac{(-1)^{u+1}[2u+3,1][2u+3,0]}{2^{4u+5}} - \frac{(-1)^{u+2}[2u+5,2][2u+5,1]}{2^{4u+9}} + \frac{(-1)^{u+3}[2u+7,3][2u+7,2]}{2^{4u+13}} - \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{(-1)^{2p+u-3}[2p+2u-1,p-1][2p+2u-1,p-2]}{2^{4p+4u-3}} \ldots \right\} \sin.\ (2u+3)\ x$$

$$+ \left\{ \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{(-1)^{u+2}[2u+5,2][2u+5,0]}{2^{4u+9}} - \frac{(-1)^{u+3}[2u+7,3][2u+7,1]}{2^{4u+13}} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{(-1)^{2p+u-4}[2p+2u-1,p-1][2p+2u-1,p-3]}{2^{4p+4u-3}} \ldots \right\} \sin.\ (2u+5)\ x$$

$$+ \left\{ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{(-1)^{u+3}(2u+7,3][2u+7,0]}{2^{4u+13}} - \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{(-1)^{2p+u-5}[2p+2u-1,p-1][2p+2u-1,p-4]}{2^{4p+4u-3}} \ldots \right\} \sin.\ (2u+7)\ x$$

+ Etc.

FIN.