# QUELQUES

# DÉVELOPPEMENTS

# D'ANALYSE COMBINATOIRE,

PAR A. MEYER,

DOCTEUR EN SCIENCES. PROFESSEUR A L'INSTITUT GACCIA.

BRUXELLES,

IMPRIMERIE BALLEROY, BOULEVARD WATERLOO, 37.

SE TROUVE A PARIS, CHEZ BACHELIER, QUAI DES AUGUSTINS, 55.

1838.

Je me sers, dans cet opuscule, de quelques notations différentes de celles que l'on suit ordinairement. Cependant je prie le lecteur de ne pas croire que ce soit par un vain désir d'innover inutilement que je me suis un peu écarté des auteurs ; je l'ai fait dans le but de simplifier et de symétriser mes formules. D'ailleurs on verra, en examinant ces notations, qu'elles sont presque toujours fondées sur la nature même des choses ; je veux dire qu'elles rappellent à l'esprit une propriété fondamentale de l'opération ou de la quantité qu'elles désignent. C'est dans cette intention que je représente le *sinus* par C, et le *cosinus* par Ↄ. Car, en rapprochant ces deux signes ils forment un cercle entier, dont chacun, comme moitié, est le *complément* de l'autre. Cette circonstance est donc propre, comme l'on voit, à fixer dans l'esprit la propriété connue, que le sinus d'un arc est égal au cosinus de son *complément*. L'emploi de ces deux signes élémentaires présente encore un autre avantage : c'est qu'en les combinant convenablement et avec de légères altérations, on les rend propres à figurer les autres lignes trigonométriques, sans ôter, pour cela, à ces combinaisons, le caractère qui doit toujours présider à l'emploi d'une bonne notation, et qui consiste à faire en sorte que le signe rappelle toujours une propriété de la chose signifiée. Or, en mettant le signe du sinus, c'est-à-dire le C au-dessus du Ↄ qui représente le cosinus, on aura avec une légère altération le signe S, qui devient par-là très-propre à représenter la tangente, la tangente étant égale au sinus *sur* le cosinus. La cotangente serait représentée par le même signe renversé. La sécante, qui est égale à l'unité divisée par le cosinus, s'indiquerait par J, et la cosécante par L; le sinus versé par, et le cosinus versé par.

J'ai aussi préféré, pour des raisons analogues, le signe sommatoire (+) aux $\int$ de toute espèce dont se servent les auteurs qui emploient dans leur Analyse la méthode des agrégats et des intégrales de Rothé.

Il me reste à dire un mot sur le but que je me suis proposé en donnant les développements des différences $n^e$ des fonctions élémentaires, algébriques et transcendantes. Je voulais par ces développements, assigner d'une manière générale, les formes des différencielles $n^{es}$ de toutes ces fonctions, et fonder par là les véritables bases du calcul différentiel. Cependant comme j'ai été contraint, par des circonstances indépendantes de ma volonté, à donner à cet opuscule le moins d'étendue possible, je regrette de ne pouvoir développer l'idée de la différentielle et de faire servir mes développements des différences finies au but que j'avais en vue, en les calculant. Au reste, dans un ouvrage dont la première partie paraîtra prochainement, j'aurai occasion de revenir sur ce sujet.

A. MEYER.

*Bruxelles, le* 10 *juillet* 1838.

# § 1.

Nous nous proposons de donner, dans ce §, les expressions symboliques par lesquelles on parvient à représenter la somme des sommes et des différences différentes qu'on peut former avec un nombre donné d'éléments.

J'entends par éléments, des quantités dans lesquelles on ne considère ni la forme ni la valeur ; et par forme, la liaison algébrique ou transcendante des lettres qui entrent dans une expression analytique.

1$^{er}$. Problème.

*Soit une suite d'éléments* $a_1, a_2, \ldots a_r$; *on suppose*

1° *Qu'on en ait pris les sommes différentes* 1 à 1, 2 *à* 2, etc., *en général,* r — p *à* r — p;

2° *Qu'on ait pris la somme de toutes ces sommes différentes: on demande, pour cette somme, une expression symbolique.*

*Notations.* 1°. Le signe +, mis entre parenthèses, c'est-à-dire (+), est, dans toute la suite de cet opuscule l'équivalent d'un signe sommatoire. Pour représenter, par le moyen de ce signe, une somme de la forme $a_n + a_{n+1} + \ldots a_{n+r}$, nous écrirons à la droite du signe sommatoire (+), le terme général, $a_{n+r}$, mais nous ferons précéder son indice $n+r$, de celui $n$ du 1$^{er}$ terme de la somme, en séparant les deux indices par une virgule, de sorte que l'expression $a_{n,n+r}$ donne successivement chacun des termes de la somme précédente, en fesant l'indice qui précède la virgule, successivement égal à $n$, $n+1$, .... Il suit de ces explications que l'on a les équivalences

$$a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+r} = (+)\, a_{n,\,n+r}$$

$$a_1 + a_2 \quad + \ldots + a_\nu \quad = (+)\, a_{1,\nu}\ .$$

2°. Nous emploierons, pour l'écriture de produits composés de facteurs équidifférents, la notation dont Kramp s'est servi dans sa théorie des factorielles ; c'est ainsi que la somme des termes de la $r^e$ ligne horizontale du triangle de Pascal, représentée dans cette notation, jusqu'au $(r-p)^{\text{ième}}$ terme inclusivement, est de la forme

$$1 + \frac{(r-1)^{1/-1}}{1} + \frac{(r-1)^{2/-1}}{2\,!} + \frac{(r-1)^{3/-1}}{3!} + \ldots \frac{(r-1)^{r-p-1/-1}}{(r-p-1\,!)}$$

Mais comme les termes de cette somme peuvent être considérés comme les indices consécutifs d'une somme de la forme

$$a_1 + a_{\frac{(r-1)^{1/-1}}{1!}} + a_{\frac{(r-1)^{2/-1}}{2!}} + \ldots,$$

dans laquelle on suppose $a = 1$, nous pourrons, conformément à notre notation sommatoire, écrire

$$1 + \frac{(r-1)^{1/-1}}{1} + \frac{(r-1)^{2/-1}}{2!} + \ldots \frac{(r-1)^{r-p-1/-1}}{(r-p-1!)}, = (+)_{1,} \frac{(r-1)^{r-p-1/-1}}{(r-p-1!)} \quad (1).$$

3°. Nous désignerons par $\left(\begin{smallmatrix} m, & n, & p & \ldots \\ & + & & \end{smallmatrix}\right)$, les sommes différentes d'un certain nombre d'éléments, pris $m$ à $m$, $n$ à $n$, $p$ à $p$, etc. successivement ; ensuite, dans la supposition que $a_1$, $a_2$, .. $a_\nu$, désignent ces éléments, nous pourrons représenter les combinaisons précédentes en écrivant $\left(\begin{smallmatrix} m, & n, & p & \ldots \\ & + & & \end{smallmatrix}\right) a_{1,\nu}$. S'il s'agit de représenter la somme de toutes ces combinaisons, il suffit de faire précéder le symbole précédent du signe sommatoire dont nous sommes convenus, et écrire $(+)\left(\begin{smallmatrix} m, & n, & p, & \ldots \\ & + & & \end{smallmatrix}\right) a_{1,\nu}$. Il devient évident par-là que la somme des sommes différentes 1 à 1, 2 à 2, ... $r-p$ à $r-p$, des éléments $a_1$, $a_2$, .. $a_r$, aura pour symbole la formule

$$(+)\,(1,\ 2,\ \ldots\ r-p)\ a_{1,r}. \qquad (2).$$

*Solution.* On sait, par la théorie des combinaisons, que si l'on combine 1 à 1, 2 à 2, etc. $r-p$ à $r-p$, les éléments $a_1, a_2, \ldots a_r$, la lettre $a$, entrera 1 fois dans les combinaisons 1 à 1, $\frac{(r-1)^{1/-1}}{1}$ fois dans les combinaisons 2 à 2, $\frac{(r-1)^{2/-1}}{2!}$ fois dans les combinaisons 3 à 3 ; en général, $\frac{(r-1)^{r-p-1/-1}}{(r-p-1)!}$ fois dans les combinaisons $r-p$ à $r-p$ : il en est de même pour tous les autres éléments. En sorte que si les combinaisons formées entre ces éléments sont les sommes différentes 1 à 1, 2 à 2, etc. $r-p$ à $r-p$, il est évident, qu'en prenant la somme de toutes ces combinaisons, chacun des éléments $a_1$, $a_2$, .. $a_r$, se trouvera répété dans cette somme générale

$$1 + \frac{(r-1)^{1/-1}}{1} + \frac{(r-1)^{2/-1}}{2!} + \ldots \frac{(r-1)^{r-p-1/-1}}{(r-p-1)!}$$

fois ; par conséquent, en recourant aux expressions symboliques (1) et (2), on aura pour l'expression de la somme des sommes différentes 1 à 1, 2 à 2, ... $r-p$ à $r-p$ des éléments $a_1$, $a_2$, .. $a_r$, le symbole demandé, savoir :

$$(+)(1, 2, \ldots r-p)\ a_{1,r} = (+)\ a_{1,r} \times (+)_{r,} \frac{(r-1)}{(r-p-1)!}^{r-p-1/-1} .$$

2°. PROBLÈME.

*Supposons, en général,* r < n, p < r, *on demande l'expression symbolique de la somme des différences différentes que l'on obtient en prenant les sommes différentes* r *à* r *des* n *éléments* $a_1$, $a_2$, ... $a_n$, *en supposant que dans chacune de ces sommes il y ait* p *éléments soustractifs.*

*Notations.* 1°. Le signe $\Delta$, employé dans la théorie des différences finies est, dans toute la suite de cette brochure, l'équivalent d'un signe différentiel. Nous donnerons à ce signe pour indice à gauche celui de l'élément positif, et pour indice à droite celui de l'élément négatif ; en sorte que ${}_q\Delta_p = a_q - a_p$.

2°. Pour représenter les combinaisons par addition d'un certain nombre d'éléments pris $r$ à $r$, mais dans chacune desquelles il y a $p$ éléments soustractifs, nous emploierons la notation $(\overset{r}{p} -)$ ; nous mettrons à la droite de ce signe celui qui représente les éléments, à la gauche, dans le cas où il s'agit de la somme des combinaisons ainsi représentées, le signe sommatoire dont nous sommes convenus. Par conséquent le symbole $(+)(\overset{r}{p} -)\ a_{1,n}$ désigne la somme des combinaisons $r$ à $r$, entre les $n$ éléments $a_{1,n}$, dans chacune desquelles il y a $p$ termes soustractifs.

3°. Nous rappellerons ici que la notation $(\overset{r}{+})$ désigne les combinaisons par addition $r$ à $r$ d'éléments donnés ; elle n'est, en effet, qu'un cas particulier du § 3°, pag. 2.

*Solution.* Remarquons d'abord, que si les combinaisons entre les éléments $a_1, a_2, \ldots a_n$ sont binaires avec un terme soustractif, on obtient directement une formule assez élégante pour représenter la somme de ces combinaisons. Car on a les égalités

$$\begin{aligned} {}_1\Delta_n &= a_1 - a_n \\ {}_2\Delta_{n-1} &= a_2 - a_{n-1} \\ {}_3\Delta_{n-2} &= a_3 - a_{n-2} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ {}_i\Delta_{i+1} &= a_i - a_{i+1} ; \end{aligned}$$

$i$ étant le plus grand entier contenu dans $\frac{n}{2}$, par conséquent, en effectuant, les combinaisons deux à deux, et en additionnant, il est aisé de voir qu'on devra obtenir le résultat suivant

$$(+)(\overset{2}{1} -)\ a_{1,n} = (n-1)_1\,\Delta_n + (n-3)_2\,\Delta_{n-1} + (n-5)_3\,\Delta_{n-2} + \cdots +_i \Delta_{i+1} ;$$

c'est la formule que nous voulions chercher.

Passons au cas général, c'est-à-dire, supposons que l'on veuille avoir la somme des combinaisons $r$ à $r$ des $n$ éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n$, dans lesquelles combinaisons les $p$ derniers éléments sont soustractifs. La méthode la plus naturelle pour obtenir ces combinaisons, consiste à prendre les sommes différentes $r-p$ à $r-p$, et de retrancher de chacune de ces sommes tour à tour, les sommes $p$ à $p$ des $n$ éléments donnés. Il suit de là qu'on devra écrire chacune des sommes $r-p$ à $r-p$, autant de fois qu'il y a de sommes $p$ à $p$ des $n$ éléments, et que réciproquement chacune de ces dernières sommes se trouvera prise autant de fois qu'il y a de sommes $r-p$ à $r-p$.

Par conséquent pour avoir la somme des combinaisons $r$ à $r$ dans lesquelles les $p$ derniers termes sont soustractifs, ***il faudra multiplier la somme des sommes différentes des* n *éléments* r — p à r — p, *par le nombre de sommes différentes* p à p *des mêmes éléments et retrancher du produit la somme des sommes différentes de ces éléments pris* p à p, *somme qui doit être multipliée par le nombre de sommes différentes* r — p *à* r — p *avec les* n *éléments donnés.***

Ensuite on sait par la théorie des combinaisons, que si l'on combine $r-p$ à $r-p$ les $n$ éléments $a_1, a_2, \ldots a_n$, chaque élément entrera dans ces combinaisons $\dfrac{(n-1)^{r-p-1/-1}}{(r-p-1)!}$ fois; par conséquent la somme de ces combinaisons sera donnée par l'expression

$$(+)\binom{r-p}{+} a_{1,n} = (+)\, a_{1,n} \times \frac{(n-1)^{r-p-1/-1}}{(r-p-1)!}.$$

Et l'on voit de même que la somme des combinaisons $p$ à $p$ de ces $n$ éléments devra s'exprimer par la formule

$$(+)\, a_{1,n} \times \frac{(n-1)^{p-1/-1}}{p-1\,!}.$$

Il est inutile d'observer que ces sommes se rapportent à des combinaisons par addition. Cela posé, en construisant, par nos formules, le précepte posé plus haut, nous serons amené à l'égalité que voici :

$$(+)(\overset{r}{p}-)\, a_{1,n} = (+)\, a_{1,n} \left\{ \frac{(n-1)^{r-p-1/-1}}{(r-p-1)!} \times \frac{n^{p/-1}}{p!} - \frac{(n-1)^{p-1/-1}}{(p-1)} \times \frac{n^{r-p/-1}}{(r-p)!} \right\}.$$

Mais comme on a

$$\frac{(n-1)^{r-p-1/-1}}{(r-p-1)!} = \frac{(n-1)^{r-p/-1}}{(r-p)!} \times \frac{r-p}{n-r+p+1}\,; \quad \frac{(n-1)^{p-1/-1}}{(p-1)!} = \frac{n^{p/-1}}{p\,!} \times \frac{p}{n(n-p+1)}\,;$$

$$\frac{n^{r-p/-1}}{(r-p)!} = \frac{(n-1)^{r-p/-1}}{(r-p)!} \times \frac{n}{n-r+p},$$

on pourra écrire la formule ci-haut aussi de cette manière :

$$(+)(\overset{r}{p}-)\, a_{1,n} = (+)\, a_{1,n} \times \frac{n^{p/-1}}{p!} \times \frac{(n-1)^{r-p/-1}}{(r-p)!} \left\{ \frac{r-p}{n-r+p+1} - \frac{p}{(n-p+1)(n-r+p)} \right\}$$

C'est la formule à laquelle nous désirions arriver.

# § 2.

## *Développement combinatoire par rapport aux groupes.*

*Description de l'objet de ce §.*

Soient les groupes d'éléments en nombre quelconque

$$ {}^1a_1\ {}^1a_2\ {}^1a_3\ \ldots\ {}^1a_\alpha \qquad {}^2a_1\ {}^2a_2\ {}^2a_3\ \ldots{}^2a_\beta $$

$$ {}^3a_1\ {}^3a_2\ {}^3a_3\ \ldots\ {}^3a_\gamma\ ;\ \ldots\ldots\ {}^pa_1\ {}^pa_2\ {}^pa_3\ \ldots\ {}^pa_\omega $$

on se propose d'exprimer par des signes combinatoires la somme des produits combinés $r$ à $r$ de tous les éléments qui entrent dans ces groupes, mais de manière à en laisser subsister la distinction dans le développement.

*Notations.* Le signe $(.r)$, dans lequel se trouve un point, symbole des produits, indique les combinaisons par produit, ou les produits combinés d'un certain nombre d'éléments.

$(+)\ (.r)$ représente la somme de tous les produits différents des éléments donnés.

Par le signe $(+)\ {}^p(.r)$, on représente la somme des produits combinés différents $r$ à $r$ du $p^{\text{ième}}$ groupe.

### *Principe qui règle le développement combinatoire par rapport aux groupes.*

Soit $(+)\ (.r)$ l'indication du développement complet, et soit $(+)^m\ (.\delta)^n\ (.\epsilon)^o\ (.\zeta)\ldots{}^\nu(.\mu)$, l'un quelconque de ses termes, il faut, pour que ce terme appartienne au développement, que l'équation de condition

$$ r = \delta + \epsilon + \zeta + \ldots + \mu \ldots (i) $$

soit satisfaite. Toutes les sommes de produits combinés qui satisfont à cette condition, seront des termes du développement de $(+)\ (.r)$; de plus ce développement ne sera complet que lorsqu'on aura rassemblé toutes les sommes de produits combinés dont les indices satisfont à l'équation de condition $(i)$. Il faut savoir que le mot indice veut dire ici la lettre entre parenthèse.

Avant de passer au développement le plus général possible, il convient de montrer par quelques exemples particuliers, comment s'applique le principe précédent, et quel en est le sens.

*N. B.* Il suffit d'écrire les formules que je vais donner, pour, qu'en les lisant, on en comprenne le sens et la formation.

## 1er EXEMPLE.

*Trouver la somme des produits combinés 2 à 2 d'éléments donnés, partagés en 4 groupes.*

On a

$$
\begin{aligned}
(+)(.2) = {} & (+)^{1}(.2) + (+)^{1}(.1)\ \{ (+)^{2}(.1) + (+)^{3}(.1) + (+)^{4}(.1) \} \\
& + (+)^{2}(.2) + (+)^{2}(.1)\ \{ (+)^{3}(.1) + (+)^{4}(.1) \} \\
& + (+)^{3}(.2) + (+)^{3}(.1)\ \{ (+)^{4}(.1) + \} \\
& + (+)^{4}(.2)
\end{aligned}
$$

## 2me

*Trouver la somme des produits combinés 4 à 4*

On a

$$
\begin{aligned}
(+)(.4) = (+)^{1}(.4) & + (+)^{1}(.3)\ \{ (+)^{2}(.1) + (+)^{3}(.1) + (+)^{4}(.1) \} + (+)^{1}(.2)\ \{ (+)^{2}(.1)(+)^{3}(.1) \\
& + (+)^{1}(.2)\ \{ (+)^{2}(2) + (+)^{3}(.2) + (+)^{4}(.2) \} + (+)^{1}(.1)\ \{ (+)^{2}(.2)(+)^{3}(.1) \\
& + (+)^{1}(.1)\ \{ (+)^{2}(.3) + (+)^{3}(.3) + (+)^{4}(.3) \} + (+)^{1}(.1)\ \{ (+)^{2}(.1)(+)^{3}(.2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(+)^{2}(.4) & + (+)^{2}(.3)\ \{ (+)^{3}(.1) + (+)^{4}(.1) \} \\
& + (+)^{2}(.2)\ \{ (+)^{3}(.2) + (+)^{4}(.2) \} \\
& + (+)^{2}(.1)\ \{ (+)^{3}(.3) + (+)^{4}(.3) \}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
& + (+)^{2}(.2)\ \{ (+)^{3}(.1)(+)^{4}(.1) \} \\
& + (+)^{2}(.1)\ \{ (+)^{3}(.2)(+)^{4}(.1) \} \\
& + (+)^{2}(.1)\ \{ (+)^{3}(.1)(+)^{4}(.2) \}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(+)^{3}(.4) & + (+)^{3}(.3)\ \{ (+)^{4}(.1) \} \\
& + (+)^{3}(.2)\ \{ (+)^{4}(.2) \} \\
& + (+)^{3}(.1)\ \{ (+)^{4}(.3) \}
\end{aligned}
$$

**EXEMPLE.**

*d'éléments donnés partagés en 4 groupes.*

$$+\ (+)\,{}^{2}(.1)\,(+)\,{}^{4}(.1) + (+)\,{}^{5}(.1)\,(+)\,{}^{4}(.1)\ \}\qquad + (+)\,{}^{1}(.1)\qquad \{\ (+)\,{}^{2}(.1)\,(+)\,{}^{5}(.1)\,(+)\,(.1)\ \}$$

$$+\ (+)\,{}^{2}(.2)\,(+)\,{}^{4}(.1) + (+)\,{}^{5}(.2)\,(+)\,{}^{4}(.1)\ \}$$

$$+\ (+)\,{}^{2}(.1)\,(+)\,{}^{4}(.2) + (+)\,{}^{5}(.1)\,(+)\,{}^{4}(.2)\ \}$$

### *Remarque.*

Avant de donner le développement le plus général, nous allons écrire une table qui sert au partage des nombres depuis 1 — 9, en sommes équivalentes aux nombres donnés. (Voy. sur cette matière le chap. XVI du 1er vol. : *De Partitione numerorum*, de l'ouvrage d'Euler, intitulé : *Intr. in analy. infinitorum.*)

1

---

2

1 + 1

---

3

2 + 1
1 + 1 + 1

---

4

3 + 1
2 + 2
2 + 1 + 1
1 + 1 + 1 + 1

---

5

4 + 1
3 + 2
3 + 1 + 1
2 + 2 + 1
2 + 1 + 1 + 1
1 + 1 + 1 + 1 + 1

---

6

5 + 1
4 + 2
3 + 3
4 + 1 + 1
3 + 2 + 1
2 + 2 + 2
3 + 1 + 1 + 1
2 + 2 + 1 + 1
2 + 1 + 1 + 1 + 1
1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1

8

7 + 1
6 + 2
5 + 3
4 + 4
6 + 1 + 1
5 + 2 + 1
4 + 3 + 1
4 + 2 + 2
3 + 3 + 2
5 + 1 + 1 + 1
4 + 2 + 1 + 1
3 + 3 + 1 + 1
3 + 2 + 2 + 1
2 + 2 + 2 + 2
4 + 1 + 1 + 1 + 1
3 + 2 + 1 + 1 + 1
3 + 2 + 2 + 1 + 1
3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1
2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1
2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1
1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1

---

9
8 + 1
7 + 2
6 + 3
5 + 4
7 + 1 + 1
6 + 2 + 1
5 + 3 + 1
5 + 2 + 2
4 + 4 + 1
4 + 3 + 2
3 + 3 + 3
6 + 1 + 1 + 1
5 + 2 + 1 + 1
4 + 3 + 1 + 1
4 + 2 + 2 + 1
3 + 3 + 2 + 1
3 + 2 + 2 + 2
5 + 1 + 1 + 1 + 1
4 + 2 + 1 + 1 + 1
3 + 3 + 1 + 1 + 1
3 + 2 + 2 + 1 + 1
2 + 2 + 2 + 2 + 1
4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1
3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1
2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1
3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1
2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1
2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1
1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1

*Remarque.* Soit ${}^{m}(.r-n)$ un facteur quelconque du développement se rapportant comme coëfficient à une grande parenthèse, dans laquelle se trouve une somme de produits combinées $k$ à $k$ entre les éléments des groupes qui suivent le $m^{ième}$; dans ce cas le coëfficient ${}^{m}(.r-n)$ se trouvera repété devant plusieurs grandes parenthèses consécutives. Mais on trouvera de la manière suivante combien de fois il devra être repété. 1°. Cherchez dans la table page 8, le nombre $n$ et prenez les sommes de $k$ termes qui lui sont équivalentes; 2°. Permutez les chiffres de chacune de ces sommes de toutes les manières possibles; cela fait, le nombre de ces permutations est celui qui marque combien il y a dans le développement demandé de grandes parenthèses consécutives qui ont chacune pour coëfficient ${}^{m}(.r-n)$. De plus soit $\varepsilon\,\psi\,\zeta\,\ldots\,\pi$ une de ces permutations, supposons qu'il arrive que les différents facteurs de chacun des termes compris dans une même grande parenthèse aient pour indice de l'ordre de combinaison les lettres de la permutation précédente dans le même ordre où elles sont écrites; cela posé, nous ferons, pour abréger :

$$[+]\overset{\theta}{\underset{\xi}{[.n]}}\,(\alpha\,\beta\,\gamma\,\ldots\,\lambda) = (+)\overset{\theta}{(.\alpha)}\,(+)\overset{\eta}{(.\beta)}\,(+)\overset{\zeta}{(.\gamma)}\,\ldots\ldots\,(+)\overset{\xi}{(.\lambda)} + \text{etc.}$$

Le second membre est la somme des produits combinés $n$ à $n$, ayant tous pour indices $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, .. $\lambda$. Le nombre de ces produits est déterminé par celui des combinaisons possibles $n$ à $n$ entre les numéros des groupes $\theta$, $\eta$, $\zeta$, ................ $\xi$; $\theta$ et $\xi$ étant les limites de ces numéros, que nous supposons consécutifs et pris dans la suite des nombres naturels.

Voici maintenant la formule

$$
\begin{aligned}
(+)(.r) = (+)^{1}(.r) + \quad & (+)^{1}(.r-1)\,\{[+]^{2}_{p}[.1](1)\} + (+)^{1}(.r-2)\,\{[+]^{2}_{p}[.2](11)\} \\
+ \quad & (+)^{1}(.r-2)\,\{[+]^{2}_{p}[.1](2)\} + (+)^{1}(.r-3)\,\{[+]^{2}_{p}[.2](21)\} \\
+ \quad & (+)^{1}(.r-3)\,\{[+]^{2}_{p}[.1](3)\} + (+)(.r-3)\,\{[+]^{2}_{p}[.2](12)\} \\
+ \quad & \cdots\cdots\cdots \qquad + (+)(.r-4)\,\{[+]^{2}_{p}[.2](22)\} \\
& \qquad\qquad\qquad + (+)(.r-4)\,\{[+]^{2}_{p}[.2](31)\} \\
& \qquad\qquad\qquad + (+)(.r-4)\,\{[+]^{2}_{p}[.2](13)\} \\
& \qquad\qquad\qquad + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+ (+)^{2}(.r) + \quad & (+)^{2}(r-1)\,\{[+]^{3}_{p}[.1](1)\} + (+)^{2}(.r-2)\,\{[+]^{3}_{p}[.2](11)\} \\
+ \quad & (+)^{2}(r.-2)\,\{[+]^{3}_{p}[.1](2)\} + (+)^{2}(.r-3)\,\{[+]^{3}_{p}[.2](21)\} \\
+ \quad & (+)^{2}(.r-3)\,\{[+]^{3}_{p}[\ 2](3)\} + (+)^{2}(.r-3)\,\{[+]^{3}_{p}[.2](12)\} \\
+ \quad & \text{etc.} \qquad\qquad + \text{etc.} \\
+ (+)^{3}(.r) + \quad & (+)^{3}(.r-1)\,\{[+]^{4}_{p}[.1](1)\} + (+)^{3}(.r-2)\,\{[+]^{4}_{p}[\ 2](11)\} \\
+ \quad & (+)^{3}(.r-2)\,\{[+]^{4}_{p}[.1](2)\} + (+)^{3}(.r-3)\,\{[+]^{4}_{p}[.2](21)\} \\
+ \quad & (+)^{3}(.r-3)\,\{[+]^{4}_{p}[.1](3)\} + (+)^{3}(.r-3)\,\{[+]^{4}_{p}[.2](12)\} \\
+ \quad & \text{etc.} \qquad\qquad + \text{etc.} \\
+ \ \text{etc.} & \\
+ (+)^{p}(.r). &
\end{aligned}
$$

du cas le plus général:

$$+ (+)^{1}(.r-3)\ \{[+]_{p}^{2}[.3](111)\} + (+)^{1}(.r-4)\ \{[+]_{p}^{2}[.4](1111)\} + \text{etc.}$$

$$+ (+)^{1}(.r-4)\ \{[+]_{p}^{2}[.3](211)\} + (+)^{1}(.r-5)\ \{[+]_{p}^{2}[.4](2111)\} + \text{etc.}$$

$$+ (+)^{1}(.r-4)\ \{[+]_{p}^{2}[.3](121)\} + (+)^{1}(.r-5)\ \{[+]_{p}^{2}[.4](1211)\} + \text{etc.}$$

$$+ (+)^{1}(.r-4)\ \{[+]_{p}^{2}[.3](112)\} + (+)^{1}(.r-5)\ \{[+]_{p}^{2}[.4](1121)\} + \text{etc.}$$

$$+ (+)^{1}(.r-5)\ \{[+]_{p}^{2}[.3](311)\} + (+)^{1}(.r-5)\ \{[+]_{p}^{2}[.4](1112)\} + \text{etc.}$$

$$+ (+)^{1}(.r-5)\ \{[+]_{p}^{2}[.3](131)\} + (+)^{1}(.r-6)\ \{[+]_{p}^{2}[.4](3111)\} + \text{etc.}$$

$$+ (+)^{1}(.r-5)\ \{[+]_{p}^{2}[.3](113)\} + (+)(.r-6)\ \{[+]_{p}^{2}[.4](1311)\} + \text{etc.}$$

$$+ (+)^{1}(.r-5)\ \{[+]_{p}^{2}[.3](221)\} + (+)(.r-6)\ \{[+]_{p}^{2}[.4](1131)\} + \text{etc.}$$

$$+ (+)^{1}(.r-5)\ \{[+]_{p}^{2}[.3](212)\} + (+)(.r-6)\ \{[+]_{p}^{2}[.4](1113)\} + \text{etc.}$$

$$+ (+)^{1}(.r-5)\ \{[+]_{p}^{2}[.3](122)\} + (+)(.r-6)\ \{[+]_{p}^{2}[.4](2211)\} + \text{etc.}$$

$+$ etc. etc.

$$+ (+)^{2}(.r-3)\ \{[+]_{p}^{3}[.3](111)\} + (+)^{2}(.r-4)\ \{[+]_{p}^{3}[.4](1111)\} + \text{etc.}$$

$$+ (+)^{2}(.r-4)\ \{[+]_{p}^{3}[.3](211)\} + (+)^{2}(.r-5)\ \{[+]_{p}^{3}[.4](2111)\} + \text{etc.}$$

$$+ (+)^{2}(.r-4)\ \{[+]_{p}^{3}[.3](121)\} + (+)^{2}(.r-5)\ \{[+]_{p}^{3}[.4](1211)\} + \text{etc.}$$

$+$ etc. $+$ etc.

$$+ (+)^{3}(.r-3)\ \{[+]_{p}^{4}[.3](111)\} + (+)^{3}(.r-4)\ \{[+]_{p}^{4}[.4](1111)\} + \text{etc.}$$

$$+ (+)^{3}(.r-4)\ \{[+]_{p}^{4}[.3](211)\} + (+)^{3}(.r-5)\ \{[+]_{p}^{4}[.4](2111)\} + \text{etc.}$$

$$+ (+)^{3}(.r-4)\ \{[+]_{p}^{4}[.3](121)\} + (+)^{3}(.r-5)\ \{[+]_{p}^{4}[.4](1211)\} + \text{etc.}$$

$+$ etc. $+$ etc.

*Observations.* 1°. La formule précédente se particularise aisément. En effet si le nombre de groupes est limité et au nombre de $n$, il faudra omettre d'abord tous les termes qui ont pour facteur $(+)^{n+h}(.r-m)$ $h$ et $m$ étant des nombres entiers quelconques; puis faire dans les grandes parenthèses des termes restants la limite $p=n$. En suivant ce précepte ou aura pour le développement général par rapport à deux groupes :

$$(+)(.r)=(+)^1(.r)(+)^1(.r-1)(+)^2(.1)+(+)^1(.r-2)(+)^2(.2)+(+)^1(.r-3)(+)^2(.3)+\ldots+(+)^2(.r)$$

d'où, en fesant $r$ successivement $=1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned}
(+)(.1) &= (+)^1(.1)+(+)^2(.1)\\
(+)(.2) &= (+)^1(.2)+(+)^2(.1)(+)^1(.1)+(+)^2(.2)\\
(+)(.3) &= (+)^1(.3)+(+)^2(.1)(+)^1(.2)+(+)^2(.2)(+)^1(.1)+(+)^2(.3)\\
(+)(.4) &= (+)^1(.4)+(+)^2(.1)(+)^1(.3)+(+)^2(.2)(+)^1(.1)+(+)^2(.3)(+)^1(.1)+(+)^2(.4)\\
&\text{etc.} \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

En resolvant les équations précédentes par rapport à $(+)^2(.m)$, $m$ étant un entier, et $\{(+)^s(.v)\}^k$ désignant la $k^{\text{ième}}$ puissance de la somme des produits combinés $v$ à $v$ du $s^{\text{ième}}$ groupe, on trouvera sans peine la valeur générale

$$(+)^2(.r)=(+)(.r)-(+)(.r-1)(+)^1(.1)+(+)(.r-2)\{(+)^1(.1)\}^2-(+)(.r-3)\{(+)^1(.1)\}^3+\ldots\pm\{(+)^1(.1)\}^r$$

ou en tire pour $r=1, 2, 3, \ldots$ les valeurs particulières

$$\begin{aligned}
(+)^2(.1) &= (+)(.1)-(+)^1(.1)\\
(+)^2(.2) &= (+)(.2)-(+)^1(.1)(+)(.1)+\{(+)^1(.1)\}^2\\
(+)^2(.3) &= (+)(.3)-(+)^1(.1)(+)(.2)+\{(+)^1(.1)\}^2(+)(.1)-\{(+)^1(.1)\}^3\\
(+)^2(.4) &= (+)(.4)-(+)^1(.1)(+)(.3)+\{(+)^1(.1)\}^2(+)(.2)-\{(+)^1(.1)\}^3(+)(.1)+\{(+)^1(.1)\}^4\\
\text{etc.} &= \text{etc.}
\end{aligned}$$

Soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ ... $\omega$ ... une suite d'éléments, dont la somme des produits combinés différents $m$ à $m$ est représentée par $(+)(.m)$; il est clair qu'en désignant par $a$ l'un quelconque des éléments précédents, et en supposant que chacun des ces éléments constitue à lui seul tour à tour le 1$^{\text{er}}$ groupe, on pourra faire servir les formules précédentes à la détermination des sommes des produits combinés dans lesquels $a$ manque ou dans lesquels $a$ se trouve.

Si à cet effet, nous désignons par $(+)(.\overset{\underset{-}{a}}{r})$ la somme des produits $r$ à $r$ dans lesquels $a$ manque, et par $(+)(.\overset{a}{r})$ celle des produits dans lesquels $a$ se trouve, on aura sans peine la formule

$$(+)(.\overset{\underset{-}{a}}{r})=(+)(.r)-(+)(.r-1)\,a+(+)(.r-2)\,a^2-(+)(.r-3)\,a^3+\text{etc.}\pm a^r.$$

De là on tire les formules particulières

$$(+)\,(.\overset{\underline{a}}{1}) = (+)\,(.1) - a$$

$$(+)\,(.\overset{\underline{a}}{2}) = (+)\,(.2) - a\,(+)\,(.1) + a^2$$

$$(+)\,(.\overset{\underline{a}}{3}) = (+)\,(.2) - a\,(+)\,(.2) + a^2\,(+)\,(.1) - a^3$$

etc. etc.

Mais aussi on a évidemment

$$(+)\,(.\overset{\underline{a}}{r}) = (+)\,(.r) - (+)\,(.\overset{a}{r})$$

formule de laquelle on tire, pour $r = 1, 2, 3$, etc. successivement

$$(+)\,(.\overset{\underline{a}}{1}) = (+)\,(.1) - (+)\,(.\overset{a}{1})$$

$$(+)\,(.\overset{\underline{a}}{2}) = (+)\,(.2) - (+)\,(.\overset{a}{2})$$

$$(+)\,(.\overset{\underline{a}}{3}) = (+)\,(.3) - (+)\,(.\overset{a}{3})$$

etc. etc.

Ces dernières formules combinées avec les précédentes conduisent à la valeur générale

$$(+)\,(.\overset{a}{r}) = a\,(+)\,(.r-1) - a^2\,(+)\,(.r-2) + a^3\,(+)\,(.r-3) - \text{etc.} \pm a^r$$

de laquelle on tire pour $r = 1, 2, 3$, etc. les suivantes

$$(+)\,(.\overset{a}{1}) = a$$

$$(+)\,(.\overset{a}{2}) = a\,(+)\,(.1) - a^2$$

$$(+)\,(.\overset{a}{3}) = a\,(+)\,(.2) - a^2\,(+)\,(.1) + a^3$$

etc. = etc.

En fesant maintenant $a$ tour à tour égal aux éléments $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. ... $\omega$ on aura les groupes de formules qui suivent :

$$\left.\begin{array}{l}
(+)\overset{\alpha}{(.1)} = \alpha \\
(+)\overset{\alpha}{(.2)} = \alpha\,(+)\,(.1) - \alpha^2 \\
(+)\overset{\alpha}{(.3)} = \alpha\,(+)\,(.2) - \alpha^2\,(+)\,(.1) + \alpha^3 \\
\qquad\quad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \\
(+)\overset{\alpha}{(.r)} = \alpha\,(+)\,(.r-1) - \alpha^2\,(+)\,(.r-2) + \alpha^3\,(+)\,(.r-3) - \text{etc.} \pm \alpha^r \\
\\
(+)\overset{\beta}{(.1)} = \beta \\
(+)\overset{\beta}{(.2)} = \beta\,(+)\,(.1) - \beta^2 \\
(+)\overset{\beta}{(.3)} = \beta\,(+)\,(.2) - \beta^2\,(+)\,(.1) + \beta^3 \\
\qquad\quad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \\
(+)\overset{\beta}{(.r)} = \beta\,(+)\,(.r-1) - \beta^2\,(+)\,(.r-2) + \beta^3\,(.r-3) - \text{etc.} \pm \beta^r \\
\\
(+)\overset{\gamma}{(.1)} = \gamma \\
(+)\overset{\gamma}{(.2)} = \gamma\,(+)\,(.1) - \gamma^2 \\
(+)\overset{\gamma}{(.3)} = \gamma\,(+)\,(.2) - \gamma^2\,(+)\,(.1) + \gamma^3 \\
\qquad\quad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \\
(+)\overset{\gamma}{(.r)} = \gamma\,(+)\,(.r-1) - \gamma^2\,(+)\,(r-2) + \gamma^3\,(+)\,(.r-3) - \text{etc.} \pm \gamma^r \\
\quad \text{Et ainsi de suite; enfin} \\
(+)\overset{\omega}{(.1)} = \omega \\
(+)\overset{\omega}{(.1)} = \omega\,(+)\,(.1) - \omega^2 \\
(+)\overset{\omega}{(.3)} = \omega\,(+)\,(.2) - \omega^2\,(+)\,(.1) + \omega^3 \\
\qquad\quad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \\
(+)\overset{\omega}{(.r)} = \omega\,(+)\,(.r-1) - \omega^2\,(+)\,(.r-2) + \omega^3\,(+)\,(.r-3) - \text{etc.} \pm \omega^r
\end{array}\right\}\ \text{A.}$$

Or en examinant ces résultats, ou trouve aisément les égalités suivantes

$$\left.\begin{array}{l}
(+)(.\overset{\alpha}{1}) + (+)(.\overset{\beta}{1}) + (+)(.\overset{\gamma}{1}) + \ldots + (+)(.\overset{\omega}{1}) = (+)(.1) \\
(+)(.\overset{\alpha}{2}) + (+)(.\overset{\beta}{2}) + (+)(.\overset{\gamma}{2}) + \ldots + (+)(.\overset{\omega}{2}) = 2(+)(.2) \\
(+)(.\overset{\alpha}{3}) + (+)(.\overset{\beta}{3}) + (+)(.\overset{\gamma}{3}) + \ldots + (+)(.\overset{\omega}{3}) = 3(+)(.3) \\
\quad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \\
\quad \text{Et en général} \\
(+)(.\overset{\alpha}{r}) + (+)(.\overset{\beta}{r}) + (+)(.\overset{\gamma}{r}) + \ldots + (+)(.\overset{\omega}{r}) = r(+)(.r)
\end{array}\right\} \text{B.}$$

Soit en général

$$\alpha^n + \beta^n + \gamma^n + \ldots + \omega^n = [+]^n$$

on aura, en ajoutant les groupes de formules A, et reduisant la somme au moyen des formules B.

$$\left.\begin{array}{l}
[+]^1 = (+)(.1) \\
[+]^2 = (+)(.1)[+]^1 - 2(+)(.2) \\
[+]^3 = (+)(.1)[+]^2 - (+)(.2)[+]^1 + 3(+)(.3) \\
[+]^4 = (+)(.1)[+]^3 - (+)(.2)[+]^2 + (+)(.3)[+]^1 - 4(+)(.4) \\
\quad \text{etc.} \qquad \text{etc.}
\end{array}\right\} \text{D.}$$

$$[+]^r = (+)(.1)[+]^{r-1} - (+)(.2)[+]^{r-2} + (+)(.3)[+]^{r-3} - \text{etc.} \pm r(+)(.r).$$

Cette dernière, pour $r = 1, 2, 3$, etc. donne, comme l'on voit les formules de Newton pour les fonctions symétriques des Racines.

Si l'on fait $\{+\} = [+]^1 + [+]^2 + \ldots + [+]^r$, on trouve

$$\{+\}_{1,r} = (+)(.1)\left\{1 + \{+\}_{1,r-1}\right\} - (+)(.2)\left\{2 + \{+\}_{1,r-2}\right\} + (+)(.3)\left\{3 + \{+\}_{1,r-3}\right\} - \text{etc.} \pm r(+)(.r).$$

En prenant les différences consécutives des formules D, jusqu'à l'ordre $n$ inclusivement, on parvient au développement suivant

$$\Delta^n [x]^r = (+)(.1)\Delta^n[+]^{r-1} - (+)(.2)\Delta^n[x]^{r-2} + \text{etc.} \pm (+)(.r-\overline{n+1})\Delta^n[+]^{n+1} \mp$$

$$(+)(.r-n)\left\{[+]^n - n[+]^{n-1} + \ldots \pm n[+]^1 \mp 1.\overline{r-n}\right\} \pm$$

$$(+)(.r-n+1)\left\{[+]^{n-1} - n[+]^{n-2} + \ldots \pm \frac{n^{2|-1}}{2}[+]^1 \mp n.\overline{r-n+1}\right\} \mp$$

$$(+)(.r-n+2)\left\{[+]^{n-2} - n[+]^{n-3} + \ldots \pm \frac{n^{3|-1}}{3!}[+]^1 \mp \frac{n^{2|-1}}{2!}.\overline{r-n+2}\right\} \pm \text{etc.}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\pm (+)(.r-1)\left\{[+]^1 - n\,\overline{r-1}\right\} \mp (+)(.r)r.$$

# § 3.

*Sur une propriété remarquable des progressions arithmétiques.*

| | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1er. | $x$ | $+ 1$ | | | | | |
| 2e. | $x$ | $1x + 1$ | $+ 1$ | | | | |
| 3e. | $x$ | $2x + 1$ | $1x + 2$ | $+ 1$ | | | |
| 4e. | $x$ | $3x + 1$ | $3x + 3$ | $1x + 3$ | $+ 1$ | | |
| 5e. | $x$ | $4x + 1$ | $6x + 4$ | $4x + 6$ | $1x + 4$ | $+ 1$ | |
| 6e. | $x$ | $5x + 1$ | $10x + 5$ | $10x + 10$ | $5x + 10$ | $1x + 5$ | etc. |
| 7e. | $x$ | $6x + 1$ | $15x + 6$ | $20x + 15$ | $15x + 20$ | $6x + 15$ | |
| etc. | » | » » | » » | » » | » » | » » | |
| | » | » » | » » | » » | » » | » » | |
| | » | » » | » » | » » | » » | » » | |

La $p^e$ ligne horizontale a pour expression

$$(1) \ldots x,\ [(p-1)x+1],\ \left[\frac{(p-1)^{2/-1}}{2!}x+p-1\right],\ \left[\frac{(p-1)^{3/-1}}{3!}x+\frac{(p-1)^{2/-1}}{2!}\right] \ldots$$

$$\ldots \left[(p-1)x+\frac{(p-1)^{2/-1}}{2!}\right].\ [x+(p-1)],\ 1$$

La $p^e$ ligne verticale, a pour expression

$$(2) \ldots 1,\ [x+p-1],\ \left[px+\frac{p^{3/-1}}{3!}\right],\ \left[\frac{(p+1)^{4/-1}}{4!}x+\frac{(p+1)^{3/-1}}{3!}\right],\ \left[\frac{(p+2)^{4/-1}}{4!}x+\frac{(p+2)^{3/-1}}{3!}\right], \text{etc.}$$

Cela posé, si l'on prend dans la série (2) dans l'ordre décroissant $p + 1$ termes, c'est-à-dire autant qu'il y en a dans la série (1), de manière à ce que ces $p+1$ termes soient séparés par $m-1$ termes qu'on n'écrit pas, alors en multipliant ces deux séries terme à terme, c'est-à-dire, le 1er avec le 1er, le 2me avec le 2me, et ainsi de suite, on verra qu'en prenant les produits obtenus alternativement avec le signe $+$ et $-$, le résultat sera toujours

$$m^{p-1}\, x\,(x-1).$$

Si $m$ est égal à l'unité on a simplement $x\,(x-1)$.

### 1er Exemple :

La 5me ligne horizontale est

$$x,\ 4x+1,\ 6x+4,\ 4x+6,\ 1x+4,\ 1.$$

Les 6 premiers termes de la 5me colonne verticale, écrits dans l'ordre décroissant, sont

$$70x+56,\ 35x+35,\ 15x+20,\ 5x+10,\ x+4,\ 1$$

multipliant terme à terme et alternant le signe des produits, l'on a :

$$x\,(70x+56)-(4x+1)(35x\,35)+(6x+4)(15x+20)-(4x+6)(5x+10)+(x+4)(x+4)-1$$

ce polynome réduit donne $x^2 - x$ ou $x\,(x-1)$.

### 2me Exemple :

La 4me ligne horizontale est

$$x,\ \ 3x+1,\ \ 3x+3,\ \ x+3,\ 1\,. \qquad (A)$$

La 4me colonne verticale est

$$1,\ x+3,\ 4x+6,\ 10x+10,\ 20x+15,\ 35x+21,\ 56x+28,\ 84x+36,\ 120x+45,\ 165x+55,\ 220x+66,\ 286x+78,\ 364x+91\,.$$

Prenez dans cette série, les cinq premiers termes dans l'ordre décroissant, mais de manière à en laisser deux qu'on n'écrit pas ; on aura

$$364x+91,\quad 165x+55,\quad 56x+24,\quad 10x+10,\quad 1\,. \qquad (B)$$

Multipliez terme à terme la suite ($A$), par la suite ($B$), en faisant alterner les signes, on a :

$$x\,(364x+91)-(165x+55)(3x+1)+(56x+28)(3x+3)-(10x+10)(x+3)+1\,.$$

En effectuant les multiplications et réduisant on trouve $3^3\,x(x-1)$, résultat en accord avec la formule générale. *Voyez* un cas particulier de cette règle, indiqué par Cauchy, dans son *Anal. Algébriq.* p. 537.)

# § 4.

*Développement symbolique du monome* $1^n$, r *et* n *étant des nombres entiers et positifs.*

Pour élever un nombre à une puissance entière et positive, on peut entre autres méthodes suivre celle-ci : décomposez le nombre donné en une somme d'unités marquée par sa valeur, puis effectuez sur cette somme les multiplications successives, voulues par le degré de la puissance.

Exemple :

Chercher le cube de 3, j'ai $3 = 1 + 1 + 1$, par conséquent, $3^3 = (1+1+1)\ (1+1+1)\ (1+1+1)$; ou en effectuant

$$\begin{array}{lllllllllllll}
1 & + & 1 & + & 1 & & & & & & & & \\
1 & + & 1 & + & 1 & & & & & & & & \\
\hline
1 & + & 1 & + & 1 & & & & & & & & \\
 & & 1 & + & 1 & + & 1 & & & & & & \\
 & & & & 1 & + & 1 & + & 1 & & & & \\
\hline
1 & + & 2 & + & 3 & + & 2 & + & 1 & & & & \\
1 & + & 1 & + & 1 & & & & & & & & \\
\hline
1 & + & 2 & + & 3 & + & 2 & + & 1 & & & & \\
 & & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 2 & + & 1 & & \\
 & & & & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
\end{array}$$

on a

$$3^3 = 1 + 3 + 6 + 7 + 6 + 3 + 1 = 27$$

En réfléchissant sur la disposition des chiffres qui ont donné le résultat final 27, et en étendant ces réflexions sur la formation de la puissance d'un nombre quelconque, on se convaincra aisément, qu'on pourra obtenir par de simples additions, tèlle puissance que l'on veut d'un nombre donné. De plus, si l'on veut obtenir les puissances consécutives (. 1^re^, 2^e^, 3^e^, ... ) d'un même nombre $n$, on abrégera beaucoup le travail si l'on construit une table telle que chacun des termes soit égal à celui qui se trouve à sa gauche ajouté aux $n - 1$ termes qui se trouvent immediatement audessus de celui-ci dans la même colonne verticale. En effet une telle table étant construite, il suffira, pour avoir les puissances demandées, d'additionner séparément les nombres qui se trouvent dans chaque colonne verticale de la table. Nous allons éclaircir ceci par des exemples.

### 1er. EXEMPLE.

*Former une table pour les puissances* 1re, 2e, 3e. etc. *de* 2.

Il faut que chaque nombre de cette table soit égal à celui qui se trouve à sa gauche plus celui qui se trouve audessus de ce dernier; cela posé, et en remarquant que toutes les tables pour la formation des puissances doivent commencer par l'unité, l'on aura, pour former les 6 premières puissances de 2, la table suivante :

*Table pour les* 6 *premières puissances de* 2. N°. 1.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| | 0 | 0 | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 |
| | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 10 | 20 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 15 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| Sommes . . . . . | 1 | 2 | $2^2$ | $2^3$ | $2^4$ | $2^5$ | $2^6$ |

L'on voit, en effet, que cette table est construite d'après la condition posée plus haut, car le nombre 20, par exemple, = 10 + 10 ; le nombre 5 de la 5e ligne = 1 + 4 ; le zéro qui commence la 2e ligne = le zéro qui est supposé être à sa gauche plus le zéro qui est supposé être audessus de ce dernier.

### 2e EXEMPLE.

*Former une table pour les puissances* 1re, 2e, 3e, etc. *de* 3.

Il faut que chaque nombre de cette table soit égal à celui qui se trouve à sa gauche, plus les deux nombres qui sont immédiatement placés audessus de celui-ci dans la même colonne verticale. L'on a donc :

*Table pour les* 6 *premières puissances de* 3. N°. 2.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1er. Per. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| | 0 | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 |
| 2e. Per. | 0 | 0 | 2 | 7 | 16 | 30 | 50 |
| | 0 | 0 | 1 | 6 | 19 | 45 | 90 |
| 3e. Per. | 0 | 0 | 0 | 3 | 16 | 51 | 126 |
| | 0 | 0 | 0 | 1 | 10 | 45 | 141 |
| 4e. Per. | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 50 | 126 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 15 | 90 |
| 5e. Per. | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 50 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 21 |
| 6e. Per. | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| Sommes . . . . | 1 | 3 | $3^2$ | $3^3$ | $3^4$ | $3^5$ | $3^6$ |

L'on voit, en effet, que cette table est construite d'après la condition posée plus haut; car le nombre 141, par exemple, $= 45 + (51 + 45)$; le nombre 3, premier terme de la 6e ligne horizontale en descendant, $= 0 + (1 + 2)$.

### 3e. EXEMPLE.

*Former une table pour les puissances 1re, 2e, 3e, etc. de 4.*

Il faut que chaque nombre de cette table soit égal à celui qui se trouve à sa gauche plus la somme des 3 nombres placés audessus de celui-ci. D'après cette condition l'on construira aisément la table que voici :

*Table pour les 6 premières puissances de 4.* No. 3.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| | 0 | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 |
| | 0 | 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 |
| | 0 | 0 | 3 | 12 | 31 | 65 | 120 |
| | 0 | 0 | 2 | 12 | 40 | 131 | 236 |
| | 0 | 0 | 1 | 10 | 44 | 135 | 366 |
| | 0 | 0 | 0 | 6 | 40 | 155 | 486 |
| | 0 | 0 | 0 | 3 | 31 | 155 | 576 |
| | 0 | 0 | 0 | 1 | 20 | 135 | 580 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 | 131 | 576 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 65 | 486 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 35 | 366 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 15 | 236 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 120 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 56 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 21 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| Sommes . . . | 1 | 4 | $4^2$ | $4^3$ | $4^4$ | $4^5$ | $4^6$ |

L'on voit, en effet, que cette table est construite d'après la position posée plus haut; car le nombre 44, par exemple, $= 10 + (12 + 12 + 10)$; le nombre 3, 5e ligne en descendant $= 0 + (1 + 1 + 1)$.

*Remarques générales.* Nous nommerons, *période*, l'ensemble des lignes horizontales des tables précédentes et des tables analogues, qui commencent sur la même ligne verticale; les périodes sont indiquées par des accolades dans les tables que nous avons données pour les puissances de 3 et de 4, nous nommerons, *base* de la table, le nombre dont on veut, par le moyen de ces tables, construire les diverses puissances. Si maintenant on remonte au principe duquel nous avons déduit la construction de ces tables, c'est-à-dire, p. 18, à la multiplication successive d'une somme d'unité équivalente au nombre dont on veut avoir une puissance désignée, on trouvera sans peine la confirmation des résultats suivants.

1°. Le nombre des périodes d'une table est égal au degré de la plus haute puissance de sa base. Ainsi chacune des tables précédentes est composée de 6 périodes. Donc en général, si $r$ est la base d'une table, en concevant qu'elle soit étendue jusqu'à la colonne verticale dont la somme des termes est égal à $a r^n$, le dégré $n$ sera égal au nombre des périodes de cette table.

2°. Le nombre de lignes horizontales de chaque période est toujours d'une unité moindre que la valeur marquée par la base. Ainsi pour la base $r$, le nombre $r - 1$, marque celui des lignes horizontales de chaque période.

3°. Il est facile, de conclure, de ce qui précède, le nombre de termes de chaque colonne verticale; ce nombre, en effet, est évidemment égal à $1 +$ le nombre de périodes correspondant à cette colonne, multiplié par la base diminuée d'une unité. Par conséquent le nombre de termes de la colonne verticale dont la somme doit donner $r^n$, sera égal à $1 + n(r - 1)$.

4°. L'on observe que les nombres qui composent chaque colonne verticale sont symétriquement placés par rapport au terme maximum, ou terme du milieu; ce nombre du milieu sera unique, ou se répétera deux fois selon que le nombre, représenté par la formule $1 + n(r - 1)$ sera impair ou pair. Mais si $n$ est pair, quel que soit $r$, pair ou impair, ce nombre sera toujours impair; en second lieu, si $n$ est impair, le nombre $1 + n(r - 1)$ sera impair si $r$ est impair, et pair dans le cas ou $r$ est aussi pair. Par conséquent pour le cas de $n$ pair, le rang du terme du milieu de la colonne verticale dont la somme donne $r^n$, s'obtient, en ajoutant l'unité au nombre entier contenu dans la formule $\frac{1 + n(r - 1)}{2}$; il en est de même pour les cas de $n$ et de $r$ impairs à la fois. Cependant si $n$ était impair en même temps que $r$ serait pair, le nombre $\frac{1 + n(r - 1)}{2}$ marquerait le rang de l'un des deux termes égaux du milieu de la colonne correspondante à $r^n$.

5°. Il est aussi facile de déterminer, en fonction du plus haut exposant de la base, le rang qu'occupent, dans leurs lignes horizontales respectives, les termes de chaque colonne verticale et d'en déduire la composition de la puissance de la base correspondante à cette colonne.

En effet, lorsque nous prenons pour exemple la colonne verticale, dont la somme $= 3^6$, N°. 2, l'on voit, sans peine, qu'on a :

$3^6 = 1 + 6^e$ terme, de la $1^{re}$ ligne de la $1^{re}$ période $+ 5^e$ terme de la $1^{re}$ ligne $2^e$ période $+$
$+ 6^e$ « « $2^e$ « « « $+ 5^e$ « $2^e$ « « «

$+ 4^e$ terme, de la $1^{re}$ ligne $3^e$ période $+ 3^e$ terme de la $1^{re}$ ligne $4^e$ période $+$
$+ 4^e$ terme, « $2^e$ « « $+ 3^e$ terme $2^e$ « « «

$+ 2^e$ terme, de la $1^{re}$ ligne, $5^e$ période $+ 1^{er}$ terme, de la $1^{re}$ ligne $6^e$ période.
$+ 2^e$ « « $2^e$ « « $+ 1^{er}$ terme, $2^e$ ligne «

L'on voit aussi par ce qui précède (4°), qu'il suffit de déterminer la composition d'une puissance quelconque de la base jusqu'au terme du milieu, attendu que, ce terme atteint, les nombres qui le suivent se reproduisent symétriquement par rapport à ceux qui le devancent.

Il nous sera donc facile de donner généralement la composition de la puissance d'un nombre quelconque. Car si $r$ est ce nombre, et $n$ la puissance à laquelle on désire l'élever, on aura, pour cette puissance, le développement suivant, exprimé en langage ordinaire :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $r^n = 1 + n^e$ | terme de la | $1^{re}$ | ligne | $1^{re}$ période. |
| $+ n^e$ | « | $2^e$ | « | « |
| $+ n^e$ | « | $3^e$ | « | « |
| $+$ | . . . | . | . | . |
| $+ n^e + n^e$ | | $r - 1^e$ | « | « |
| $+ n - 1^e$ | terme de la | $1^{re}$ | ligne | $2^e$ période. |
| $+ n - 1^e$ | « | $2^e$ | « | « |
| $+ n - 1^e$ | « | $3^e$ | « | « |
| $+$ | . . . | . | . | . |
| $+ n - 1^e$ | « | $r - 1^e$ | « | « |
| $+ n - 2^e$ | terme de la | $1^{re}$ | ligne | $3^e$ période. |
| $+ n - 2^e$ | « | $2^e$ | « | « |
| $+$ | . . . | . | . | . |
| $+ n - 2^e$ | « | $r - 1^e$ | « | « |

$+$ etc. jusqu'au terme du milieu après lequel les termes antérieurs se reproduisent.

Voyons comment on détermine le nombre de termes de la ligne horizontale qui contient le terme du milieu. Il est d'abord évident que, pour la puissance $r^n$, le nombre des termes de la colonne verticale, qui donne $r^n$, est $n\,(r-1)$, en faisant abstraction du $1^{er}$ terme de cette colonne qui n'entre dans aucune période. Dans ce cas $\frac{n\,(r-1)}{2}$ sera le nombre de termes de la demi colonne; et comme $r-1$ est le nombre de termes de chaque période, il s'ensuit que

$$\frac{n\,(r-1)}{2} : r-1\,, \text{ ou } \frac{n}{2}$$

sera le rang de la période dans laquelle tombe le terme du milieu, lorsque $n$ est pair; mais si $n$ est impair ce rang sera donné par le nombre entier $\frac{n+1}{2}$. Cela posé, comme les lignes horizontales de la $1^{re}$ période ont $n$ termes, celles de la $2^{de}$ $n-1$ termes; celles de la $3^e$ $n-2$ termes, et ainsi de suite, il s'ensuit que les lignes horizontales (lorsque $n$ est pair) de la $\frac{n}{2^e}$ période auront $n - \frac{n}{2} + 1$ ou $\frac{n+2}{2}$ termes, et si $n$ est impair, les lignes horizontales de la $\frac{n+1^e}{2}$ période auront $n - \frac{n+1}{2} + 1$ ou $\frac{n+1}{2}$ termes.

Il nous reste à traduire le développement précédent en signes symboliques, et de donner les formules pour calculer les valeurs représentées par ces signes. Pour cela nous conviendrons des notations suivantes.

1°. Les chiffres romains I, II, ... représentent le rang des périodes; mais lorsque ce rang doit être indiqué d'une manière générale, (telle est par exemple le $n^e$ rang) nous emploierons la lettre majuscule N.

2°. Nous placerons audessus du chiffre indicateur du rang de la période, le nombre qui marque le rang où se trouvent dans leurs lignes horizontales respectives les nombres de la colonne verticale dont la somme $= r^n$. Ainsi la notation $\overset{n-1}{\mathrm{II}}$, veut dire $n-1^e$ terme d'une ligne de la $2^e$ periode.

3°. Nous donnerons aux chiffres romains des indices, afin d'indiquer le rang de la ligne horizontale où se trouve le terme que l'on considère. Ainsi $\overset{n-2}{\mathrm{III}}_3$, représente le $n-2^e$ terme de la $3^e$ ligne horizontale de la $3^e$ période.

Cela posé soit d'abord $n$ pair; dans ce cas $\frac{n+2}{2}$ sera le nombre de termes de la ligne horizontale où se trouve le terme du milieu, qui est unique; et comme $\frac{n}{2}$ est entier il est clair que cette ligne horizontale sera la $r-1^e$ dans sa période.

On a donc

$$r^n = \left\{ \begin{array}{l} 1+\overset{n}{\mathrm{I}}_1+\overset{n}{\mathrm{I}}_2+\overset{n}{\mathrm{I}}_3+\ldots+\overset{n}{\mathrm{I}}_{r-1}+\overset{n-1}{\mathrm{II}}_1+\overset{n-1}{\mathrm{II}}_2+\ldots+\overset{n-1}{\mathrm{II}}_{r-1}+\overset{n-2}{\mathrm{III}}_1+\overset{n-2}{\mathrm{III}}_2+\ldots+\overset{n-2}{\mathrm{III}}_{r-1}+\ldots+\overset{\frac{n+1}{2}}{\mathrm{N}}_{\frac{r-1}{2}}+\ldots+\overset{n-2}{\mathrm{III}}_{r-1}+\ldots \\ +\overset{n-2}{\mathrm{III}}_2+\overset{n-2}{\mathrm{III}}_1+\overset{n-1}{\mathrm{II}}_{r-1}+\ \ldots\ +\overset{n-1}{\mathrm{II}}_2+\overset{n-1}{\mathrm{II}}_1+\overset{n}{\mathrm{I}}_{r-1}+\ \ldots\ +\overset{n}{\mathrm{I}}_3+\overset{n}{\mathrm{I}}_2+\overset{n}{\mathrm{I}}_1+1\quad \ldots\ldots \end{array} \right\}$$

$$= 2\left(1+\overset{n}{\mathrm{I}}_1+\overset{n}{\mathrm{I}}_2+\ldots+\overset{n}{\mathrm{I}}_{r-1}+\overset{n-1}{\mathrm{II}}_1+\overset{n-1}{\mathrm{II}}_2+\ \ldots\ +\overset{n-1}{\mathrm{II}}_{r-1}+\ \ldots\right)+\tfrac{1}{2}\overset{\frac{n+1}{2}}{\mathrm{N}}_{r-1} \qquad (a)$$

Si $n$ est impair nous avons vu que $\frac{n+1}{2}$ représentait le rang de la période où la ligne horizontale du terme du milieu se trouvait, et que $\frac{n+1}{2}$ représentait aussi le nombre de termes de cette ligne. Pour trouver le rang de cette ligne horizontale dans sa période, on n'a qu'à extraire les entiers contenus dans la fraction $\frac{n}{2}$, soit $p$ ces entiers ; le reste sera une $\frac{1}{2}$ ; ce qui veut dire que le terme du milieu se trouve sur la ligne horizontale située au milieu de la $p+1^e$ période. Mais comme pour $r^n$, chaque période se compose de $r-1$ lignes horizontales, il est évident que le rang de la ligne horizontale en question, est, en général, donné par l'expression $\frac{r-1}{2}$. Or si le nombre $r-1$ des termes de la période est pair (ce qui arrive pour $r$ impair), le terme unique du milieu se trouve sur la $\frac{r-1}{2}^e$ ligne de sa période. Mais si le nombre $r-1$ des termes de la période est impair (ce qui arrive pour le cas de $r$ pair), cas pour lequel il y a deux termes au milieu, le 1er de ces termes se trouve sur la ligne horizontale qui a pour numéro de rang le plus grand entier contenu dans $\frac{r-1}{2}$ et le 2d se trouve sur la ligne qui suit la précédente, c'est-à-dire, sur celle qui a pour N° de rang, le plus grand entier coutenu dans $\frac{r-1}{2}$, augmenté de l'unité. Soit donc $p$ le plus grand entier contenu dans $\frac{r-1}{2}$, on aura, en résumant :

1°. Pour le cas de $n$ impair et $r$ impair : un terme unique au milieu de la colonne verticale qui donne $r^n$ ; ce terme se trouve dans la période marquée par $\frac{1}{2}(\mathrm{N}+1)$ ; il sera le $\frac{n+1}{2}^e$ terme de la ligne horizontale sur laquelle il se trouve ; cette ligne horizontale aura pour rang un nombre marqué par $\frac{r-1}{2}$. Par conséquent le symbole de ce terme milieu sera

$$\tfrac{1}{2}\,\overset{\frac{n+1}{2}}{(\mathrm{N}+1)}_{\frac{r-1}{2}} .$$

2°. Pour le cas de $n$ impair et de $r$ pair ; deux termes égaux au milieu de la colonne verticale qui donne $r^n$ ; ces termes se trouvent dans la période marquée par $\mathrm{N}+1$ ; ces termes sont les $\frac{n+1}{2}^{es}$ de leurs lignes horizontales respectives ; la 1re de ces lignes horizontales occupe un rang marqué par $p$, la 2de un rang marqué par $p+1$.

Par conséquent les symboles de ces termes sont respectivement

$$\tfrac{1}{2}\,\overset{\frac{n+1}{2}}{(\mathrm{N}+1)}_{p}\ ,\quad \tfrac{1}{2}\,\overset{\frac{n+1}{2}}{(\mathrm{N}+1)}_{p+1} .$$

Mais comme les termes représentés par ces symboles sont égaux, il suffit de s'en tenir au 1[er] de ces symboles pour représenter l'un et l'autre terme.

Il nous sera maintenant facile de donner la formule symbolique du développement de $r^n$, pour les deux cas suivants, savoir :

1[er] cas $n$ et $r$ impairs, on a :

$$r^n = 2\left(1 + \overset{n}{\mathrm{I}}_1 + \overset{n}{\mathrm{I}}_2 + \ldots + \overset{n}{\mathrm{I}}_{r-1} + \overset{n-1}{\mathrm{II}}_1 + \overset{n-1}{\mathrm{II}}_2 + \ldots + \overset{n-1}{\mathrm{II}}_{r-1} + \ldots\right) + \tfrac{1}{2}\,\overset{\frac{n+1}{2}}{(\mathrm{N}+1)}_{\frac{r-1}{2}} \quad \ldots \quad (b)$$

2[e] cas $n$ impair et $r$ pair, on a :

$$r^n = 2\left\{1 + \overset{n}{\mathrm{I}}_1 + \overset{n}{\mathrm{I}}_2 + \ldots + \overset{n}{\mathrm{I}}_{r-1} + \overset{n-1}{\mathrm{II}}_1 + \overset{n-1}{\mathrm{II}}_2 + \ldots + \overset{n-1}{\mathrm{II}}_{r-1} + \ldots + \tfrac{1}{2}\,\overset{\frac{n+1}{2}}{(\mathrm{N}+1)}_p\right\} \ldots \quad (c)$$

Les formules $(a)$, $(b)$, $(c)$, sont les expressions symboliques que nous nous étions proposé de déduire. Mais il nous reste encore à développer les formules pour le calcul des valeurs représentées par les signes qui entrent dans ces expressions. Pour cela construisons, par le moyen des signes symboliques précédents, une table dont la base est $r$, et que nous supposons étendue jusqu'à la colonne verticale dont la somme donne $r^n$, $n$ étant pair. Je dis $n$ étant pair, il suffit, en effet, de faire le calcul dans cette hypothèse, pour que après avoir changé ce qui doit être changé, on puisse le faire pour les deux autres cas auxquels se rapportent les formules $(b)$ et $(c)$. L'on voit, en effet, que les 3 formules $(a)$, $(b)$, $(c)$, ne diffèrent que par l'expression de leur terme du milieu.

# TABLE SYMBOLIQUE

*Pour la formation des Puissances* 1ᵉ, 2ᵉ, nᵉ (n. .. étant pair) *du nombre* r.

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \cdots\cdots & 1 \\
0 & \overset{1}{\mathrm{I}}_1 & \overset{2}{\mathrm{I}}_1 & \overset{3}{\mathrm{I}}_1 & \overset{4}{\mathrm{I}}_1 & & \cdots\cdots & \overset{n}{\mathrm{I}}_1 \\
0 & \overset{1}{\mathrm{I}}_2 & \overset{2}{\mathrm{I}}_2 & \overset{3}{\mathrm{I}}_2 & \overset{4}{\mathrm{I}}_2 & & \cdots\cdots & \overset{n}{\mathrm{I}}_2 \\
0 & \overset{1}{\mathrm{I}}_3 & \overset{2}{\mathrm{I}}_3 & \overset{3}{\mathrm{I}}_3 & \overset{4}{\mathrm{I}}_3 & & \cdots\cdots & \overset{n}{\mathrm{I}}_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \cdots\cdots & \vdots \\
0 & \overset{1}{\mathrm{I}}_{r-1} & \overset{2}{\mathrm{I}}_{r-1} & \overset{3}{\mathrm{I}}_{r-1} & \overset{4}{\mathrm{I}}_{r-1} & & \cdots\cdots & \overset{n}{\mathrm{I}}_{r-1} \\
 & 0 & \overset{1}{\mathrm{II}}_1 & \overset{2}{\mathrm{II}}_1 & \overset{3}{\mathrm{II}}_1 & & \cdots\cdots & \overset{n-1}{\mathrm{II}}_1 \\
 & 0 & \overset{1}{\mathrm{II}}_2 & \overset{2}{\mathrm{II}}_2 & \overset{3}{\mathrm{II}}_2 & & \cdots\cdots & \overset{n-1}{\mathrm{II}}_2 \\
 & 0 & \overset{1}{\mathrm{II}}_3 & \overset{2}{\mathrm{II}}_3 & \overset{3}{\mathrm{II}}_3 & & \cdots\cdots & \overset{n-1}{\mathrm{II}}_3 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \cdots\cdots & \vdots \\
 & 0 & \overset{1}{\mathrm{II}}_{r-1} & \overset{2}{\mathrm{II}}_{r-1} & \overset{3}{\mathrm{II}}_{r-1} & & \cdots\cdots & \overset{n-1}{\mathrm{II}}_{r-1} \\
 & & 0 & \overset{1}{\mathrm{III}}_1 & \overset{2}{\mathrm{III}}_1 & & \cdots\cdots & \overset{n-2}{\mathrm{III}}_1 \\
 & & 0 & \overset{1}{\mathrm{III}}_2 & \overset{2}{\mathrm{III}}_2 & & \cdots\cdots & \overset{n-2}{\mathrm{III}}_2 \\
 & & 0 & \overset{1}{\mathrm{III}}_3 & \overset{2}{\mathrm{III}}_3 & & \cdots\cdots & \overset{n-2}{\mathrm{III}}_3 \\
 & & \vdots & \vdots & \vdots & & \cdots\cdots & \vdots \\
 & & 0 & \overset{1}{\mathrm{III}}_{r-1} & \overset{2}{\mathrm{III}}_{r-1} & & \cdots\cdots & \overset{n-2}{\mathrm{III}}_{r-1} \\
 & & & \vdots & \vdots & & \cdots\cdots & \vdots \\
 & & & & \frac{1}{2}\overset{1}{\mathrm{N}}_1 & \frac{1}{2}\overset{2}{\mathrm{N}}_1 & \cdots & \overset{\frac{n+2}{2}}{\mathrm{N}}_1 \\
 & & & & \frac{1}{2}\overset{1}{\mathrm{N}}_2 & \frac{1}{2}\overset{2}{\mathrm{N}}_2 & \cdots & \overset{\frac{n+2}{2}}{\mathrm{N}}_2 \\
 & & & & \frac{1}{2}\overset{1}{\mathrm{N}}_3 & \frac{1}{2}\overset{2}{\mathrm{N}}_3 & \cdots & \overset{\frac{n+2}{2}}{\mathrm{N}}_3 \\
 & & & & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
 & & & & \frac{1}{2}\overset{1}{\mathrm{N}}_{r-1} & \frac{1}{2}\overset{2}{\mathrm{N}}_{r-1} & \cdots & \frac{1}{2}\overset{\frac{n+2}{2}}{\mathrm{N}}_{r-1} \\
 & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\hline
\text{Sommes} \ldots 1, & r^1, & r^2, & r^3, & r^4 & & \cdots\cdots & r^n.
\end{array}
$$

En partant de la règle décrite pour former les tables des puissances, l'on voit que les lignes horizontales de la 1re période de la table générale précédente, sont successivement les nombres naturels, triangulaires, pyramidaux 1ers, etc. , jusqu'aux nombres figurés de l'ordre $r-1$. En effet l'on a successivement :

$$\overset{1}{\mathrm{I}}_1 = 0+1 \quad ; \quad \overset{2}{\mathrm{I}}_1 = \overset{1}{\mathrm{I}}_1 + 1 = 2 ; \quad \overset{3}{\mathrm{I}}_1 = \overset{2}{\mathrm{I}}_1 + 1 = 3 ; \text{ etc.} ; \quad \overset{n}{\mathrm{I}}_1 = \overset{n-1}{\mathrm{I}}_1 + 1 = n. \tag{1}$$

$$\overset{1}{\mathrm{I}}_2 = 0+0+1 \quad ; \quad \overset{2}{\mathrm{I}}_2 = \overset{1}{\mathrm{I}}_2 + \overset{1}{\mathrm{I}}_1 + 1 = 3 ; \quad \overset{3}{\mathrm{I}}_2 = \overset{2}{\mathrm{I}}_2 + \overset{2}{\mathrm{I}}_1 + 1 = 6 ; \text{ etc.} ; \quad \overset{n}{\mathrm{I}}_2 = \overset{n-1}{\mathrm{I}}_2 + \overset{n-1}{\mathrm{I}}_1 + 1 = \frac{n^{2/1}}{2\,!} \tag{2}$$

$$\overset{1}{\mathrm{I}}_3 = 0+0+0+1 \quad ; \quad \overset{2}{\mathrm{I}}_3 = \overset{1}{\mathrm{I}}_3 + \overset{1}{\mathrm{I}}_2 + \overset{1}{\mathrm{I}}_1 + 1 = 4 ; \quad \overset{3}{\mathrm{I}}_3 = \overset{2}{\mathrm{I}}_3 + \overset{2}{\mathrm{I}}_2 + \overset{2}{\mathrm{I}}_1 + 1 = 10 ; \text{ etc.} ; \quad \overset{n}{\mathrm{I}}_3 + \overset{n-1}{\mathrm{I}}_3 + \overset{n-1}{\mathrm{I}}_2 + \overset{n-1}{\mathrm{I}}_1 + 1 = \frac{n^{3/1}}{3!} \tag{3}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\overset{1}{\mathrm{I}}_{r-1} = 0+0+..+1 \; ; \quad \overset{2}{\mathrm{I}}_{r-1} = \overset{1}{\mathrm{I}}_{r-1} + \overset{1}{\mathrm{I}}_{r-2} + .. + 1 = r ; \quad \overset{3}{\mathrm{I}}_{r-1} = \overset{2}{\mathrm{I}}_{r-1} = \overset{2}{\mathrm{I}}_{r-2} + . + 1 = \frac{r^{2/1}}{2\,!} ; \text{ etc} ; \quad \overset{n}{\mathrm{I}}_{r-1} = \frac{r^{n-1/1}}{n-1!} \tag{4}$$

$$= \frac{n^{r-1/1}}{r-1!}$$

La deuxième période donne successivement les rélations

$$\left.\begin{array}{l}
\overset{1}{\mathrm{II}}_1 = 0 + (+)\, \overset{1}{\mathrm{I}}_{1,\,r-1} \\
\overset{2}{\mathrm{II}}_1 = \overset{1}{\mathrm{II}}_1 + (+)\, \overset{2}{\mathrm{I}}_{1,\,r-1} \\
\overset{3}{\mathrm{II}}_1 = \overset{2}{\mathrm{II}}_1 + (+)\, \overset{3}{\mathrm{I}}_{1,\,r-1} \\
\quad . \quad . \quad . \quad . \\
\quad . \quad . \quad . \quad . \\
\overset{n-1}{\mathrm{II}}_1 = \overset{n-2}{\mathrm{II}}_1 + (+)\, \overset{r-2}{\mathrm{I}}_{1,\,r-1}
\end{array}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\overset{1}{\mathrm{II}}_2 = 0 + 0 + \overset{1}{\mathrm{I}}_2 + \overset{1}{\mathrm{I}}_3 + . + \overset{1}{\mathrm{I}}_{r-1} = 0 + 0 + (+)\, \overset{1}{\mathrm{I}}_{1,\,r-1} - \overset{1}{\mathrm{I}}_1 \\
\overset{2}{\mathrm{II}}_2 = \overset{1}{\mathrm{II}}_2 + \overset{1}{\mathrm{II}}_1 + \overset{2}{\mathrm{I}}_2 + \overset{2}{\mathrm{I}}_3 + .. + \overset{2}{\mathrm{I}}_{r-1} = (+)\, \overset{1}{\mathrm{II}}_{1,2} + (+)\, \overset{2}{\mathrm{I}}_{1,\,r-1} - \overset{2}{\mathrm{I}}_1 \\
\overset{3}{\mathrm{II}}_2 = \overset{2}{\mathrm{II}}_2 + \overset{2}{\mathrm{II}}_1 + \overset{3}{\mathrm{I}}_2 + \overset{3}{\mathrm{I}}_3 + .. + \overset{3}{\mathrm{I}}_{r-1} = (+)\, \overset{2}{\mathrm{II}}_{1,2} + (+)\, \overset{3}{\mathrm{I}}_{1,\,r-1} - \overset{3}{\mathrm{I}}_1 \\
. \\
. \\
\overset{n-1}{\mathrm{II}}_2 = \overset{n-2}{\mathrm{II}}_2 + \overset{n-2}{\mathrm{II}}_1 + \overset{n-1}{\mathrm{I}}_2 + \overset{n-1}{\mathrm{I}}_3 + \; .. \; + \overset{n-1}{\mathrm{I}}_{r-1} = (+)\, \overset{n-2}{\mathrm{II}}_{1,2} + (+)\, \overset{n-1}{\mathrm{I}}_{1,\,r-1} - \overset{n-1}{\mathrm{I}}_1
\end{array}\right\} \tag{6}$$

On trouve de même pour la 3e ligne horizontale de la deuxième période les expressions

$$\left.\begin{aligned}
\overset{1}{\mathrm{II}}_3 &= 0 + 0 + 0 + (+)\,\overset{1}{\mathrm{I}}_{1,r-1} - (+)\,\overset{1}{\mathrm{I}}_{1,2}\\
\overset{2}{\mathrm{II}}_3 &= (+)\,\overset{1}{\mathrm{II}}_{1,3} + (+)\,\overset{2}{\mathrm{I}}_{1,r-1} - (+)\,\overset{2}{\mathrm{I}}_{1,2}\\
\overset{3}{\mathrm{II}}_3 &= (+)\,\overset{2}{\mathrm{II}}_{1,3} + (+)\,\overset{3}{\mathrm{I}}_{1,r-1} - (+)\,\overset{3}{\mathrm{I}}_{1,2}\\
&\cdots\\
\overset{n-1}{\mathrm{II}}_3 &= (+)\,\overset{n-2}{\mathrm{II}}_{1,3} + (+)\,\overset{n-1}{\mathrm{I}}_{1,r-1} - (+)\,\overset{n-1}{\mathrm{I}}_{1,2}
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

Et en général, pour le calcul successif des termes de la $r - 1^e$ ou de la dernière ligne de cette période l'on a :

$$\left.\begin{aligned}
\overset{1}{\mathrm{II}}_{r-1} &= 0 + 0 + \dots + \overset{1}{\mathrm{I}}_{r-1} = (+)\,\overset{1}{\mathrm{I}}_{1,r-1} - (+)\,\overset{1}{\mathrm{I}}_{1,r-2}\\
\overset{2}{\mathrm{II}}_{r-1} &= (+)\,\overset{1}{\mathrm{II}}_{1,r-1} + (+)\,\overset{2}{\mathrm{I}}_{1,r-1} - (+)\,\overset{2}{\mathrm{I}}_{1,r-2}\\
&\cdots\\
&\cdots\\
\overset{n-1}{\mathrm{II}}_{r-1} &= (+)\,\overset{n-2}{\mathrm{II}}_{1,r-1} + (+)\,\overset{n-1}{\mathrm{I}}_{1,r-1} - (+)\,\overset{n-1}{\mathrm{I}}_{1,r-2}
\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

On trouve, avec la même facilité, les expressions pour le calcul des termes de toutes les autres périodes; pour cela il suffit d'appliquer toujours le principe « Qu'un terme quelconque de la table est égal à celui qui est à sa gauche, plus les $r - 1$ termes qui sont placés verticalement au-dessus de celui-ci. » On a donc:

$$\left.\begin{aligned}
\overset{n-2}{\mathrm{III}}_1 &= \overset{n-3}{\mathrm{III}}_1 + (+)\,\overset{n-2}{\mathrm{II}}_{1,r-1}\,.\\
\overset{n-2}{\mathrm{III}}_2 &= (+)\,\overset{n-3}{\mathrm{III}}_{1,2} + (+)\,\overset{n-2}{\mathrm{II}}_{1,r-1} - \overset{n-2}{\mathrm{II}}_1\\
\overset{n-2}{\mathrm{III}}_3 &= (+)\,\overset{n-3}{\mathrm{III}}_{1,3} + (+)\,\overset{n-2}{\mathrm{II}}_{1,r-1} - (+)\,\overset{n-2}{\mathrm{II}}_{1,2}\\
&\cdots\\
&\cdots\\
\overset{n-2}{\mathrm{III}} &= (+)\,\overset{n-3}{\mathrm{III}} \quad + (+)\,\overset{n-2}{\mathrm{II}} \quad (+)\,\overset{n-2}{\mathrm{II}}
\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

$$
\left.
\begin{array}{l}
\overset{n-3}{\mathrm{IV}}_1 = \overset{n-4}{\mathrm{IV}}_1 + \overset{n-3}{\mathrm{III}}_{1,r-1} \\
\overset{n-3}{\mathrm{IV}}_2 = (+)\,\overset{n-4}{\mathrm{IV}}_{1,2} + (+)\,\overset{n-3}{\mathrm{III}}_{1,r-1} - \overset{n-3}{\mathrm{III}}_1 \\
\overset{n-3}{\mathrm{IV}}_3 = (+)\,\overset{n-4}{\mathrm{IV}}_{1,3} + \overset{n-3}{\mathrm{III}}_{1,r-1} - (+)\,\overset{n-3}{\mathrm{III}}_{1,2} \\
\quad . \qquad . \qquad . \qquad . \\
\overset{n-3}{\mathrm{IV}}_{r-1} = (+)\,\overset{n-4}{\mathrm{IV}}_{1,r-1} + (+)\,\overset{n-3}{\mathrm{III}}_{1,r-1} - (+)\,\overset{n-3}{\mathrm{III}}_{1,r-2} \\
\quad \text{etc.} \qquad \text{etc.}
\end{array}
\right\} \quad (10)
$$

Si donc on désigne par $\frac{N-1}{2}$ les termes de la période qui précède celle qui a pour indice général $\frac{1}{2}$ N, on aura pour le calcul des termes de cette dernière les formules suivantes :

$$
\left.
\begin{array}{l}
\frac{1}{2}\overset{\frac{n+2}{2}}{N}_1 = (+)\,\frac{1}{2}\overset{\frac{n}{2}}{N}_1 + (+)\,\overset{\frac{n+2}{2}}{\frac{N-1}{2}}_{1,r-1} \\[2ex]
\frac{1}{2}\overset{\frac{n+2}{2}}{N}_2 = (+)\,\frac{1}{2}\overset{\frac{n}{2}}{N}_{1,2} + (+)\,\overset{\frac{n+2}{2}}{\frac{N-1}{2}}_{1,r-1} - \overset{\frac{n+2}{2}}{\frac{N-1}{2}} \\[2ex]
\frac{1}{2}\overset{\frac{n+2}{2}}{N}_3 = (+)\,\frac{1}{2}\overset{\frac{n}{2}}{N}_{1,3} + (+)\,\overset{\frac{n+2}{2}}{\frac{N-1}{2}}_{1,r-1} - (+)\,\overset{\frac{n+2}{2}}{\frac{N-1}{2}}_{1,2} \\[2ex]
\quad . \qquad . \qquad . \qquad . \\[2ex]
\frac{1}{2}\overset{\frac{n+2}{2}}{N}_{r-1} = (+)\,\frac{1}{2}\overset{\frac{n}{2}}{N}_{1,r-1} + (+)\,\overset{\frac{n+2}{2}}{\frac{N-1}{2}}_{1,r-1} - (+)\,\overset{\frac{n+2}{2}}{\frac{N-1}{2}}_{1,r-2}
\end{array}
\right\} \quad (11)
$$

L'on voit aisément que par le moyen de substitutions consécutives, les 2[ds] membres des formules (5), (6), ... (11), peuvent être exprimés en fonction des termes de la 1[re] période, c'est-à-dire en fonction de nombres figurés. Nous remarquerons encore que les formules (1), (2), etc., jusqu'aux formules (11) suffisent pour montrer comment on parvient à faire le calcul effectif des termes du développement symbolique de $r^n$; et tel était le but que nous nous proposions d'atteindre dans la dernière partie de ce §.

# § 5.

## *Sur une Transformation particulière des Fractions rationnelles.*

1er CAS. *On suppose que les facteurs binomes dans lesquels se décompose le dénominateur, soient tous différents entre eux.*

Soit donc la fraction rationnelle

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}{a'_0 + a'_1 x + a'_2 x^2 + \ldots + a'_{n-1} x^{n+1}},$$

en supposant que les $n+1$ racines du dénominateur, égalées à zéro, soient $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n$, on pourra écrire à la place de la fraction précédente celle-ci :

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}{(x-\rho_0)(x-\rho_1)(x-\rho_2) \ldots\ldots (x-\rho_n)}$$

ou bien, en changeant les signes de chacun des facteurs du dénominateur

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}{\pm (\rho_0-x)(\rho_1-x)(\rho_2-x) \ldots\ldots (\rho_n-x)}$$

Le signe $+$ du dénominateur ayant lieu si $n$ est impair, et le signe $-$, si $n$ est pair.

Mais on sait qu'on a (*voyez les traités d'Algèbre*) :

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}{(\rho_0-x)(\rho_1-x)(\rho_2-x) \ldots\ldots (\rho_n-x)} = \frac{A_0}{\rho_0 - x} + \frac{A_1}{\rho_1 - x} + \frac{A_2}{\rho_2 - x} + \ldots + \frac{A_n}{\rho_n - x}.$$

Or, si l'on développe chacun des termes du 2d membre, par voie de division, en série, en ordonnant, par rapport aux puissances croissantes de $x$ les termes de tous ces développements, on aura évidemment :

$$\frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x_n}{(\rho_0-x)(\rho_1-x) \ldots \rho_n-x)} = \frac{A_0}{\rho_0-x} + \frac{A_1}{\rho_1-x} + \ldots + \frac{A_n}{\rho_n-x} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n + \ldots \quad ; (a)$$

les coëfficients $\alpha_0$, $\alpha_1$, ... étant des constantes indéterminées.

Mais en effectuant les développements dont nous venons de parler, on trouve successivement :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{A_0}{\rho_0 - x} &= \frac{A_0}{\rho_0}\left\{1 + \frac{x}{\rho_0} + \frac{x^2}{\rho_0^2} + \ldots + \frac{x^n}{\rho_0^n} + \ldots\right\} \\
\frac{A_1}{\rho_1 - x} &= \frac{A_1}{\rho_1}\left\{1 + \frac{x}{\rho_1} + \frac{x^2}{\rho_1^2} + \ldots + \frac{x^n}{\rho_1^n} + \ldots\right\} \\
\frac{A_2}{\rho_2 - x} &= \frac{A_2}{\rho_2}\left\{1 + \frac{x}{\rho_2} + \frac{x^2}{\rho_2^2} + \ldots + \frac{x^n}{\rho_2^n} + \ldots\right\} \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\frac{A_n}{\rho_n - x} &= \frac{A_n}{\rho_n}\left\{1 + \frac{x}{\rho_n} + \frac{x^2}{\rho_n^2} + \ldots + \frac{x^n}{\rho_n^n} + \ldots\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (b)$$

ou bien, en fesant dans ces formules, afin d'abréger les expressions,

$$\frac{A_0}{\rho_0} = \lambda_0\,; \quad \frac{A_1}{\rho_1} = \lambda_1\,; \quad \frac{A_2}{\rho_2} = \lambda_2\,; \quad \ldots \frac{A_n}{\rho_n} = \lambda_n\,;$$

on trouve, en ajoutant les formules ($b$) terme à terme :

$$\frac{A_0}{\rho_0 - x} + \frac{A_1}{\rho_1 - x} + \ldots + \frac{A_n}{\rho_n - x} = (\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n) + \left(\frac{\lambda_0}{\rho_0} + \frac{\lambda_1}{\rho_1} + \ldots + \frac{\lambda_n}{\rho_n}\right)x + \left(\frac{\lambda_0}{\rho_0^2} + \frac{\lambda_1}{\rho_1^2} + \ldots + \frac{\lambda_n}{\rho_n^2}\right)x^2 + \ldots.$$

Mais en comparant cette dernière formule avec celle indiquée par ($a$) on voit que l'identité suivante est vraie, savoir :

$$(\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n) + \left(\frac{\lambda_0}{\rho_0} + \frac{\lambda_1}{\rho_1} + \ldots + \frac{\lambda_n}{\rho_n}\right)x + \left(\frac{\lambda_0}{\rho_0^2} + \frac{\lambda_1}{\rho_1^2} + \ldots + \frac{\lambda_n}{\rho_n^2}\right)x^2 + \ldots + \left(\frac{\lambda_0}{\rho_0^n} + \frac{\lambda_1}{\rho_1^n} + \ldots + \frac{\lambda_n}{\rho_2^n}\right)x^n + \ldots =$$
$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n + \ldots$$

De cette dernière équation on tire

$$\alpha_0 = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$$
$$\alpha_1 = \frac{\lambda_0}{\rho_0} + \frac{\lambda_1}{\rho_1} + \frac{\lambda_2}{\rho_2} + \ldots + \frac{\lambda_n}{\rho_n}$$
$$\alpha_2 = \frac{\lambda_0}{\rho_0^2} + \frac{\lambda_1}{\rho_1^2} + \frac{\lambda_2}{\rho_2^2} + \ldots + \frac{\lambda_n}{\rho_n^2}$$
$$\cdots\cdots$$
$${}_n\alpha = \frac{\lambda_0}{\rho_0^n} + \frac{\lambda_1}{\rho_1^n} + \frac{\lambda_2}{\rho_2^n} + \ldots + \frac{\lambda_n}{\rho_n^n}.$$

Ou bien, si, afin de nous défaire pour un moment des dénominateurs précédents, l'on fait, en général, $\frac{1}{\rho^p} = r^p$, on pourra écrire les formules précédentes ainsi :

$$\alpha_0 = \lambda_0 \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$$
$$\alpha_1 = \lambda_0 r_0 + \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \ldots + \lambda_n r_n$$
$$\alpha_2 = \lambda_0 r_0^2 + \lambda_1 r_1^2 + \lambda_2 r_2^2 + \ldots + \lambda_n r_n^2$$
$$\cdots\cdots$$
$$\alpha_n = \lambda_0 r_0^n + \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n + \ldots + \lambda_n r_n^n$$

On en tire, par l'élimination,

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_0 &= \frac{\alpha_n - \{(+)(.1)r_{0,\underline{0},n}\}\alpha_{n-1} + \{(+)(.2)r_{\underline{0},n}\}\alpha_{n-2} - \text{etc.} \pm \{(+)(.n)r_{\underline{0},n}\}\alpha_0}{(r_0-r_1)(r_0-r_2)\ \ldots\ (r_0-r_n)} = r_0 A_0 \\
\lambda_1 &= \frac{\alpha_n - \{(+)(.1)r_{0,\underline{1},n}\}\alpha_{n-1} + \{(+)(.2)r_{0,\underline{1},n}\}\alpha_{n-2} - \text{etc.} \pm \{(+)(.n)r_{0,\underline{1},n}\}\alpha_0}{(r_1-r_0)(r_1-r_2)\ \ldots\ (r_1-r_n)} = r_1 A_1 \\
\lambda_2 &= \frac{\alpha_n - \{(+)(.1)r_{0,\underline{2},n}\}\alpha_{n-1} + \{(+)(.2)r_{0,\underline{2},n}\}\alpha_{n-3} - \text{etc.} \pm \{(+)(.n)r_{0,\underline{2},n}\}\alpha_0}{(r_2-r_0)(r_2-r_1)\ \ldots\ (r_2-r_n)} = r_2 A_2 \\
&\quad\cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\
&\quad\cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\
\lambda_n &= \frac{\alpha_n - \{(+)(.1)r_{0,\underline{n}}\}\alpha_{n-1} + \{(+)(.2)r_{0,\underline{n}}\}\alpha_{n-2} - \text{etc.} \pm \{(+)(.n)r_{0,\underline{n}}\}\alpha_0}{(r_n-r_0)(r_n-r_1)\ \ldots\ (r_n-r_{n-1})} = r_n A_n
\end{aligned}\right\}\qquad (c)$$

Nous ferons remarquer que dans les formules précédentes, nous désignons, en général, par la notation $(+)\,(.p)\ r_{0,\underline{k},n}$, la somme des combinaisons par produits $p$ à $p$ des lettres $r_0$, $r_1$, $r_2$, ... $r_k$, ... $r_n$, dans lesquelles le terme $r_k$ manque.

Mais on sait, par les théories qui servent à la décomposition des fractions rationnelles, en fractions monomes, qu'on a, en général;

$$A_n = -\frac{a_0 + a_1\rho_n^1 + a_2\rho_n^2 + \ \ldots\ a_n\rho_n^n}{(\rho_n-\rho_0)(\rho_n-\rho_1)(\rho_n-\rho_2)\ \ldots\ (\rho_n-\rho_{n-1})} = \pm\, r_0 r_1 r_2 \ \ldots\ r_{n-1}\,.\,\frac{a^n + a_{n-1}r_n + a_{n-2}r_n + \ \ldots\ + a_0 r_n^n}{(r_n-r_0)(r_n-r_1)(r_n-r_2)\ \ldots\ (r^n-r_{n-1})}\,.$$

où il faut remarquer que le 2[d] membre, lorsqu'il est affecté du signe *moins*, est cependant positif, si le nombre des racines $\rho_0$, $\rho_1$, ... $\rho_n$ est impair.

Par conséquent, en ayant égard, à cette dernière équation, et sachant, comme il est indiqué par cette équation, que parmi les termes soustractifs des ses facteurs binomes du dénominateur, on ne saurait avoir l'indice de la lettre majuscule A du 1[er] membre, il est evident qu'on aura successivement :

$$\left.\begin{aligned}
r_0 A_0 &= \pm\, r_0 r_1 \ \ldots\ r_n\ \frac{a_u + a_{n-1}r_0 + a_{n-2}r_0^2 + \ \ldots\ + a_0 r_0}{(r_0-r_1)(r_0-r_2)(r_0-r_3)\ \ldots\ (r_0-r_n)} \\
r_1 A_1 &= \pm\, r_0 r_1 \ \ldots\ r_n\ \frac{a_n + a_{n-1}r_1 + a_{n-2}r_1^2 + \ \ldots\ + a_0 r_n^1}{(r_1-r_0)(r_1-r_2)(r_1-r_3)\ \ldots\ (r_1-r_n)} \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
r_n A_n &= \pm\, r_0 r_1 \ \ldots\ r_n\ \frac{a_n + a_{n-1}r_n + a_{n-2}r_n^2 + \ \ldots\ + a_0 r^n}{(r_n-r_0)(_n r-r_1)\ \ldots\ (r_n-r_{n-1})}{}_n
\end{aligned}\right\}\qquad (d)$$

En comparant les égalités $(d)$ avec les égalités $(c)$ on aura les formules

$$\left.\begin{array}{l}
a_n+a_{n-1}r_0+\dots+a_0r_0^n=\pm\dfrac{1}{r_0r_1\dots r_n}\left\{\alpha_n-[(+)(.1)r_{\underline{0},n}]\alpha_{n-1}+\dots\pm[(+)(.n)r_{\underline{0},n}]\alpha_0\right\}=\pi_0\\
a_n+a_{n-1}r_1+\dots+a_0r_1^n=\pm\dfrac{1}{r_0r_1\dots r_n}\left\{\alpha_n-[(+)(.1)r_{0,\underline{1},n}]\alpha_{n-1}+\dots\pm[(+)(.n)r_{0,\underline{1},n}]\alpha_0\right\}=\pi_1\\
a_n+a_{n-1}r_2+\dots+a_0r_2^n=\pm\dfrac{1}{r_0r_1\dots r_n}\left\{\alpha_n-[(+)(.1)r_{0,\underline{2},n}]\alpha_{n-1}+\dots\pm[(+)(.n)r_{0,\underline{2},n}]\alpha_0\right\}=\pi_2\\
\cdot\quad\cdot\qquad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\qquad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\qquad\cdot\quad\cdot\\
a_n+a_{n-1}r_n+\dots+a_0r_n^n=\pm\dfrac{1}{r_0r_1\dots r_n}\left\{\alpha_n-[(+)(.1)r_{0,\underline{n}}]\alpha_{n-1}+\dots\pm[(+)(.n)r_{0,\underline{n}}]\alpha_0\right\}=\pi_n
\end{array}\right\}\ (e)$$

Les équations précédentes, que nous avons marquées par la lettre $(e)$ donnent, par le moyen de soustractions successives, les valeurs de $a_0$. $a_1$, $a_2$ ... en fonction de $\pi$, et des différences de différents ordres de cette quantité. Car si l'on convient que

$$1^\circ.\quad\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\pi_1-\pi_0}{r_1-r_0}=\theta\pi_0\\[2ex]
\dfrac{\pi_2-\pi_1}{r_2-r_1}=\theta\pi_1\\[2ex]
\dfrac{\pi_3-\pi_2}{r_3-r_2}=\theta\pi_2\\[2ex]
\text{etc.}\qquad\text{etc.}\\[2ex]
\dfrac{\pi_n-\pi_{n-1}}{r_n-r_{n-1}}=\theta\pi_{n-1}
\end{array}\right\}\quad(\alpha)$$

$$2^\circ.\quad\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\theta\pi_1-\theta\pi_0}{r_2-r_0}=\theta^2\pi_0\\[2ex]
\dfrac{\theta\pi_2-\theta\pi_1}{r_3-r_1}=\theta^2\pi_1\\[2ex]
\text{etc.}\qquad\text{etc.}\\[2ex]
\dfrac{\theta\pi_{n-1}-\theta\pi_{n-2}}{r_n-r_{n-2}}=\theta^2\pi_{n-2}
\end{array}\right\}\quad(\beta)$$

$$3^\circ.\quad\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\theta^2\pi_1-\theta^2\pi_0}{r_3-r_0}=\theta^3\pi_0\\[2ex]
\text{etc.}\qquad\text{etc.}
\end{array}\right\}\quad(\gamma)$$

on trouvera, après avoir effectué sur les formules ($e$), les opérations successives indiquées par les formules, ($\alpha$), ($\beta$), ($\gamma$), etc., l'équation finale

$$a_0 = \theta^n \pi_0 \ .$$

Mais en substituant cette valeur dans celle qui donne $\theta^{n-1} \pi_0$, valeur qui ne renferme que les deux quantités $a_1$ et $a_0$, on trouve :

$$a_1 = \theta^{n-1} \pi_0 - \theta^n \pi_0 \ \{(+)(.1) r_{0,n-1}\}$$

En continuant de la même sorte, c'est-à-dire, en substituant les valeurs de $a_0$, $a_1$, dans la formule qui donne $\theta^{n-2} \pi_0$, formule aux trois quantités $a_2$, $a_1$, $a^0$, on aura :

$$a_2 = \theta^{n-2} \pi_0 - \theta^{n-1} \pi_0 \ \{(+)(.2) r_{0,n-2}\} + \theta^n \pi_0 \ \{(+)(2) r_{0,n-1}\}$$

Enfin, il est évident, qu'en effectuant des substitutions analogues à celles que nous venons de faire, on remontera à la 1re des formules ($e$), qui, de son côté, donnera l'expression générale

$$a_n = \pi_0 - \theta \pi_0 r + \theta^2 \pi_0 r_0 r_1 - \theta^3 \pi_0 r_0 r_1 r_2 + \ldots \pm \theta^n \pi_0 r_0 r_1 \ldots r_{n-1} \ .$$

On a donc, en résumé:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \theta^n \pi_0 \\
a_1 &= \theta^{n-1} \pi_0 - \theta^n \pi_0 \ \{(+)(.1) r_{0,n-1}\} \\
a_2 &= \theta^{n-2} \pi_0 - \theta^{n-1} \pi_0 \ \{(+)(.1) r_{0,n-1}\} + \theta^n \pi_0 \ \{(+)(.2) r_{0,n-1}\} \\
a_3 &= \theta^{n-3} \pi_0 - \theta^{n-2} \pi_0 \ \{(+)(.1) r_{0,n-3}\} + \theta^{n-1} \pi_0 \ \{(+)(2) r_{0,n-2}\} - \theta^n \pi_0 \ \{(+)(.3) r_{0,n-1}\} \\
&\ldots \\
a_n &= \pi_0 - \theta^1 \pi_0 + \theta^2 \pi_0 r_0 r_1 - \theta^3 \pi_0 r_0 r_1 r_2 + \text{etc.} \ \ldots
\end{aligned}$$

Cependant puisque nous avons posé $r^p = \frac{1}{\rho^p}$, nous pourrons exprimer en $\rho$ les formules que nous venons d'écrire ; alors on a :

$$\begin{aligned}
a_0 &= \theta^n \pi_0 \\
a_1 &= \theta^{n-1} \pi_0 - \frac{\theta^n \pi_0}{\rho_0 \rho_1 \cdot \rho_{n-1}} \{(+)(.n-1) \rho_{0,n-1}\} \\
a_2 &= \theta^{n-2} \pi_0 - \frac{\theta^{n-1} \pi_0}{\rho_0 \rho_1 \cdot\cdot \rho_{n-2}} \{(+)(.n-2) \rho_{0,n-2}\} + \frac{\theta^n \pi_0}{\rho_0 \rho_1 \cdot\cdot \rho_{n-1}} \{(+)(.n-2) \rho_{0,n-1}\} \\
a_3 &= \theta^{n-3} \pi_0 - \frac{\theta^{n-2} \pi_0}{\rho_0 \rho_1 \cdot\cdot \rho_{n-3}} \{(+)(.n-3) \rho_{0,n-3}\} + \frac{\theta^{n-1} \pi_0}{\rho_0 \rho_1 \cdot\cdot \rho_{n-2}} \{(+)(.n-3) \rho_{0,n-2}\} - \frac{\theta^n \pi_0}{\rho_0 \rho_1 \cdot\cdot \rho_{n-1}} \{(+)(.n-3) \rho_{0,n-1}\} \\
&\ldots \\
&\ldots \\
a_n &= \pi_0 - \frac{\theta \pi_0}{\rho_0} + \frac{\theta^2 \pi_0}{\rho_0 \rho_1} - \frac{\theta^3 \pi_0}{\rho_0 \rho_1 \rho_2} + \ldots \pm \frac{\theta^n \pi_0}{\rho_0 \rho_1 \cdot\cdot \rho_{n-1}} \ .
\end{aligned}$$

Si, à la place de $a_0$, $a_1$, etc., nous substituons dans le polynome $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, les valeurs données par les équations qui précèdent, on obtient, après avoir ordonné par rapport aux N$^{os}$ croissants de $\theta\pi_0$, la formule :

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n =$$
$$\frac{\rho_0\rho_1\cdot\cdot\rho_{n-1}\pi_0 x^n - \rho_1\rho_2\cdot\cdot\rho_{n-1}\theta\pi_0 x^{n-1}(x-\rho_0) + \rho_2\rho_3\cdot\cdot\rho_{n-1}\theta^2\pi_0 x^{n-2}(x-\rho_0)(x-\rho_1) \ldots \pm \theta^n\pi_0(x-\rho_0)(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_{n-1})}{\rho_0\rho_1\rho_2 \cdots \rho_{n-1}}$$

Par conséquent, en divisant les deux membres par

$$\pm(\rho_0 - x)(\rho_1 - x)(\rho_1 - x) \ldots (\rho_n - x)$$

on aura la transformation que nous voulions chercher.

1$^{re}$ *Remarque.* Cette transformation, qui ne saurait servir pour l'évaluation du 1$^{er}$ membre, attendu que les expressions $\pi_0$, $\theta\pi_0$, etc., sont elles-mêmes des fonctions des coëfficients $a_0$, $a_1$, ...; a cependant, par la régularité de ses termes, une importance spéculative, qui considérée comme un fait analytique, n'est pas à dédaigner, je pense, aux yeux du mathématicien.

2$^{me}$ *Remarque.* Il est bon d'observer qu'en opérant sur les équations ($e$), comme il est marqué par les équations ($\alpha$), ($\beta$), ..., on trouve :

$$\pi_0 = \pm\rho_0 \quad \{\alpha_n\,[(+)(.n)\rho_{1,n}] - \alpha_{n-1}[(+)(.n-1)\rho_{1,n}] + \alpha_{n-1}[(+)(.n-2)\rho_{1,n}] - \text{etc.} \pm \alpha_{n-m}\,[(+)(.n-m)\rho_{1,n}] \mp .. \pm \alpha_0\}$$
$$\theta\pi_0 = \pm\rho_0\rho_1 \quad \{\alpha_{n-1}[(+)(.n-1)\rho_{2,n}] - \alpha_{n-1}[(+)(.n-2)\rho_{2,n}] + \alpha_{n-3}[(+)(.n-3)\rho_{2,n}] - \text{etc.} \pm \alpha_{n-m-1}[(+)(.n-m-1)\rho_{2,n}] \mp .. \pm \alpha_0\}$$
$$\theta^2\pi_0 = \pm\rho_0\rho_1\rho_2 \quad \{\alpha_{n-2}[(+)(.n-2)\rho_{3,n}] - \alpha_{n-3}[(+)(.n-3)\rho_{3,n}] + \alpha_{n-4}[(+)(.n-4)\rho_{3,n}] - \text{etc.} \pm \alpha_{n-m-2}[(+)(.n-m-2)\rho_{3,n}] \pm .. \pm \alpha_0\}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\theta^n\pi_0 = \pm\rho_0\rho_1 \cdots \rho_n\alpha_0$$

2$^e$. CAS. *On suppose que les facteurs binomes dans lesquels se décompose le dénominateur soient tous égaux entre eux.*

Soit donc la fraction rationnelle $\dfrac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + .. + a_{n-1} x^{n-1}}{a_0 + a_1 x + a_3 x^2 + .. + a_n x^n}$; en supposant que les $n$ racines du dénominateur, égalées à zéro, soient toutes égales à $\rho_0$, on pourra écrire, à la place de la fraction précédente, celle-ci :

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + .. + a_{n-1} x^{n-1}}{(x-\rho_0)^n} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + .. + a_{n-1} x^{n-1}}{\pm\rho_0^n\left(1 - \frac{x}{\rho_0}\right)^n};$$

le signe + du dénominateur du 2$^d$ membre ayant lieu si $n$ est pair, et le signe —, si $n$ est impair.

Mais on sait qu'on a, (voyez les *Traites d'Algèbre*):

$$\frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}}{\pm\rho_0^n\left(1 - \frac{x}{\rho_0}\right)^n} = \frac{A_0}{\mp\rho_0^n\left(1 - \frac{x}{\rho_0}\right)^n} + \frac{A_1}{\mp\rho_0^{n-1}\left(1 - \frac{x}{\rho_0}\right)^{n-1}} + \frac{A_2}{\pm\rho_0^{n-1}\left(1 - \frac{x}{\rho_0}\right)^{n-2}} + \text{etc.} + \frac{A_{n-1}}{-\rho_0\left(1 - \frac{x}{\rho_0}\right)}$$

Or si l'on developpe, par voie de division, chacun des termes du 2$^d$ membre en série, en ordonnant, par rapport aux puissances croissantes de $x$, les termes de tous ces développements, on aura évidement:

$$\frac{a_0+a_1x+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}}{\pm\rho_0^n\left(1-\frac{x}{\rho_0}\right)^n}=\frac{A_0}{\pm\rho_0^n\left(1-\frac{x}{\rho_0}\right)^n}+\frac{A_1}{\mp\rho_0^{n-1}\left(1-\frac{x}{\rho_0}\right)^{n-1}}+\ldots+\frac{A_{n-1}}{-\rho_0\left(1-\frac{x}{\rho_0}\right)}=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\ldots+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\ldots \quad (f)$$

les coefficients $\alpha_0$, $\alpha_1$, .. $\alpha_{n-1}$, ... étant des constantes indéterminées.

Mais en effectuant les développements dont nous venons de parler, on trouve successivement:

$$\frac{A_0}{\pm\rho_0^n\left(1-\frac{x}{\rho_0}\right)^n}=\frac{A_0}{\pm\rho_0^n}\left\{1+\frac{n}{\rho_0}x+\frac{n^{2/1}}{2!\,\rho_0^2}x^2+\frac{n^{3/1}}{3!\,\rho_0^3}x^3+\ldots+\frac{n^{n-1/1}}{n-1\,\rho_0^{n-1}}x^{n-1}+\ldots\right\}$$

$$\frac{A_1}{\mp\rho_0^{n-1}\left(1-\frac{x}{\rho_0}\right)^{n-1}}=\frac{A_1}{\mp\rho_0^{n-1}}\left\{1+\frac{n-1}{\rho_0}x+\frac{n-1^{2/1}}{2!\,\rho_0^2}x^2+\frac{n-1^{3/1}}{3!\,\rho_0^3}x^3+\ldots+\frac{n-1^{n-1/1}}{n-1!\,\rho_0^{n-1}}x^{n-1}+\ldots\right\}$$

$$\frac{A_2}{\pm\rho_0^{n-2}\left(1-\frac{x}{\rho_0}\right)^{n-2}}=\frac{A_2}{\pm\rho_0^{n-2}}\left\{1+\frac{n-2}{\rho_0}x+\frac{n-2^{2/1}}{2!\,\rho_0^2}x^2+\frac{n-2^{3/1}}{3!\,\rho_0^3}x^3+\ldots+\frac{n-2^{n-1/1}}{n-1!\,\rho_0^{n-1}}x^{n-1}+\ldots\right\}$$

$$\frac{A_{n-1}}{-\rho_0\left(1-\frac{x}{\rho_0}\right)}=\frac{A_{n-1}}{-\rho_0}\left\{1+\frac{x}{\rho_0}+\frac{x^2}{\rho_2}+\frac{x^3}{\rho_3}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{\rho_0^{n-1}}+\ldots\right\}$$

Or en ajoutant les formules précédentes, terme à terme, l'on trouve:

$$\frac{A_0}{\pm\rho_0^n\left(1-\frac{x}{\rho_0}\right)^n}+\frac{A_1}{\mp\rho_0^{n-1}\left(1-\frac{x}{\rho_0}\right)^{n-1}}+\ldots+\frac{A_{n-1}}{-\rho_0\left(1-\frac{x}{\rho_0}\right)}=\left(\frac{A_0}{\rho_0^n}\mp\frac{A_1}{\rho_0^{n-1}}\pm\frac{A_2}{\rho_0^{n-2}}\mp\ldots-\frac{A^{n-1}}{\rho_0}\ldots\right)+ \quad (g)$$

$$\left(\pm n\frac{A_0}{\rho_0^{n+1}}\mp\frac{(n-1)A_1}{\rho_0^n}\pm\frac{(n-2)A_2}{\rho_0^{n-1}}\mp\ldots-\frac{A_{n-1}}{\rho_0^2}\ldots\right)x+$$

$$\left(\pm\frac{n^{2/1}A_0}{2!\,\rho_0^{n+2}}\mp\frac{n-1^{2/1}A_1}{2!\,\rho_0^{n+1}}\pm\frac{n-2^{2/1}A_2}{2!\,\rho_0^n}\mp\ldots-\frac{A_{n-1}}{\rho_0^3}\ldots\right)x^2+$$

. . . . . . . . . . . . . .

$$\left(\pm\frac{n^{n-1/1}A_0}{(n-1)!\,\rho_0^{2n-1}}\mp\frac{(n-1)^{n-1/1}A_1}{(n-1)!\,\rho_0^{2n-2}}\pm\frac{(n-2)^{n-1/1}A_2}{(n-1)!\,\rho^{2n-3}}\mp\ldots-\frac{A_{n-1}}{\rho_0^n}\right)x^{n-1}$$

Mais en comparant le 2^d membre de la formule ($g$), au 2^d membre de la formule ($f$), on aura, en chassant les dénominateurs

$$
\left.\begin{array}{llllll}
\alpha_0\ \rho_0^n = \pm & A_0 \mp & A_1\rho_0 \pm & A_2\rho_0^2 \mp \ldots - A_{n-1}\rho_0^{n-1} = \pi_0 \\
\alpha_1\ \rho^{n+1} = \pm\, n & A_0 \mp (n-1) & A_1\rho_0 \pm (n-2) & A_2\rho_0^2 \mp \ldots - A_{n-1}\rho_0^{n-1} = \pi_1 \\
\alpha_2\ \rho_0^{n+2} = \pm\, \dfrac{n^{2/1}}{2!} & A_0 \mp \dfrac{(n-1)^{2/1}}{2!} & A_1\rho_0 \pm \dfrac{(n-2)^{2/1}}{2!} & A_2\rho_0^2 \mp \ldots - A_{u-1}\rho_0^{n-1} = \pi_2 \\
\alpha_3\ \rho_0^{n+3} = \pm\, \dfrac{n^{3/1}}{3!} & A_0 \mp \dfrac{(n-1)^{3/1}}{3!} & A_1\rho_0 \pm \dfrac{(n-2)^{3/1}}{3!} & A_2\rho_0^2 \mp \ldots - A^{n-1}\rho_0^{n-1} = \pi_3 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\alpha_{n-1}\ \rho_0^{2n-1} = \pm\, \dfrac{n^{n-1/1}}{n-1!} & A_0 \mp \dfrac{(n-1)^{n-1/1}}{n-1!} & A_1\rho_0 \pm \dfrac{(n-2)^{n-1/1}}{n-1!} & A_2\rho_0^2 \mp \ldots - A_{n-1}\rho_0^{n-1} = \pi_{n-1}
\end{array}\right\} \quad (h).
$$

Si ensuite l'on pose

$$
\left.\begin{array}{l}
\pi_1 - \pi_0 = \Delta\pi_0 \\
\pi_2 - \pi_1 = \Delta\pi_1 \\
\pi_3 - \pi_2 = \Delta\pi_2 \\
\ldots \\
\Delta\pi_1 - \Delta\pi_0 = \Delta^2\pi_0 \\
\Delta\pi_2 - \Delta\pi_1 = \Delta^2\pi_1 \\
\Delta\pi_3 - \Delta\pi_2 = \Delta^2\pi_2 \\
\ldots \\
\Delta^2\pi_1 - \Delta^2\pi_0 = \Delta^3\pi_0 \\
\Delta^2\pi_2 - \Delta^2\pi_1 = \Delta^3\pi_1 \\
\Delta^2\pi_3 - \Delta^2\pi_2 = \Delta^2\pi_2 \\
\ldots \\
\text{etc.}
\end{array}\right\} \quad (k)
$$

on aura, en effectuant sur les formules ($h$) les différentiations consécutives indiquées par les équations ($k$) les valeurs suivantes:

$$
\left.\begin{array}{ll}
A_0 = & \pm\Delta^{n-1}\pi_0 \\
A_1\rho_0 = & \mp\Delta^{n-2}\pi_0 \pm (n-1)\Delta^{n-1}\pi_0 \\
\ldots & \ldots \\
A_{n-4}\rho_0^{n-4} = & \mp\Delta^3\pi_0 \pm 4\Delta^4\pi_0 \mp \ldots \pm \dfrac{(n-1)^{3/-1}}{3!}\Delta^{n-1}\pi_0 \\
A_{n-3}\rho_0^{n-3} = & \pm\Delta^2\pi_0 \mp 3\Delta^3\pi_0 \pm 6\Delta^4\pi_0 \mp \ldots \pm \dfrac{(n-1)^{2/-1}}{2!}\Delta^{n-1}\pi_0 \\
A_{n-2}\rho_0^{n-2} = & \mp\Delta\pi_0 \pm 2\Delta^2\pi_0 \mp 3\Delta^3\pi_0 \pm 4\Delta^4\pi_0 \mp \ldots \pm (n-1)\Delta^{n-1}\pi_0 \\
A_{n-1}\rho_0^{n-1} = & \pm\pi_0 \mp \Delta\pi_0 \pm \Delta^2\pi_0 \mp \Delta^3\pi_0 \pm \Delta^4\pi_0 \mp \ldots \pm \Delta^{n-1}\pi_0
\end{array}\right\} \quad (l)
$$

Mais on sait, par la décomposition des fractions rationnelles. (voy. les ***Traités d'Algèbre***) que l'on a :

$$A_0 = a_0 + a_1\rho_0 + a_2\rho_0^2 + a_3\rho_0^3 + \ldots + (n-1)\,a_{n-1}\rho_0^{n-2}$$

$$A_1 = a_1 + 2a_2\rho_0 + 3a_3\rho_0^2 + 4a_4\rho_0^3 + \ldots + (n-1)\,a_{n-1}\rho_0^{n-2}$$

$$A_2 = a_2 + 3a_3\rho_0 + 6a_4\rho_0^2 + \ldots + \frac{(n-1)^{2/-1}}{2\,!}\,a_{n-1}\rho_0^{n-3}$$

$$A_3 = a_3 + 4a_4\rho_0 + \ldots + \frac{(n-1)^{3/-1}}{3\,!}\,a_{n-1}\rho_0^{n-4}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$A_{n-1} = a_{n-1}\,.$$

Or si l'on compare ces dernières valeurs aux équations ($l$), et si l'on résout les équations résultantes par rapport à $a_0, a_1 \ldots a_{n-1}$, l'on aura :

$$a_{n-1}\rho_0^{n-1} = \pm\,\Delta^{n-1}\pi_0 \mp \Delta^{n-2}\pi_0 \pm \Delta^{n-3}\pi_0 \mp \Delta^{n-4}\pi \pm \ldots \mp \pi_0$$

$$a_{n-2}\rho_0^{n-2} = \pm\,\Delta^{n-2}\pi_0 \mp 2\,\Delta^{n-3}\pi_0 \pm 3\,\Delta^{n-4}\pi_0 \mp \ldots \pm (n-1)\,\pi_0$$

$$a_{n-3}\rho^{n-3} = \pm\,\Delta^{n-3}\pi_0 \mp 3\,\Delta^{n-4}\pi_0 \pm \ldots \mp \frac{(n-1)^{2/-1}}{2\,!}\,\pi_0$$

$$a_{n-4}\rho^{n-4} = \pm\,\Delta^{n-4}\pi_0 \mp \ldots \pm \frac{(n-1)^{3/-1}}{3\,!}\,\pi_0$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$a_1\rho_0 = \pm\,\Delta\pi_0 \mp (n-1)\,\pi_0$$

$$a_0 = \pm\,\pi_0\,.$$

Enfin, si l'on substitue ces dernières valeurs à la place de $a_0, a_1 \ldots a_{n-1}$, dans le numérateur de la fraction rationnelle proposée, on aura :

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} = \pm\,\frac{\Delta^{n-1}\pi_0x^{n-1} - \Delta^{n-2}\pi_0x^{n-2}(x-\rho_0) + \Delta^{n-3}\pi_0x^{n-3}(x-\rho_0)^2 - \ldots \pm \pi_0(x-\rho_0)^{n-1}}{\rho^{n-1}}$$

Par conséquent si l'on divise les deux membres par le dénominateur $(x-\rho_0^n)$, de la fraction rationnelle proposée, on aura la transformation à laquelle nous voulions arriver. Je remarque, avant de finir ce paragraphe, que je ne donne cette transformation que comme un fait analytique, et que je n'y attache aucune autre importance.

# § 6.

### *Une notice sur un cas particulier de la divisibilité des polynomes.*

Puisque l'on a généralement,

$$1 + p + \frac{p^{2/1}}{2!} + \frac{p^{3/1}}{3!} + \ldots + \frac{p^{n-1/1}}{n-1} = \frac{p^{n/1}}{n!},$$

je dis que tout polynome de la forme

$$x^n + p x^{n-1}\rho + \frac{p^{2/1}}{2!}x^{n-2}\rho^2 + \frac{p^{3/1}}{3!}x^{n-3}\rho^3 + \ldots + \frac{p^{n-1/1}}{n-1!}x\rho^{n-1} - \frac{p^{n/1}}{n!}\rho^n \qquad (m)$$

est exactement divisible par $x - \rho$.

En effet si dans le polynome précédent l'on fait $x = \rho$, l'on a:

$$\rho^n\left(1 + p + \frac{p^{2/1}}{2!} + \frac{p^{3/1}}{3!} + \ldots + \frac{p^{n-1/1}}{n-1!} - \frac{p^{n/1}}{n!}\right) = 0$$

Ainsi puisque le polynome $(m)$ s'évanouit pour $x = \rho$, il est evident que $x - \rho$ en est facteur.

Il suit de là qu'en fesant $p = 1$, $p = 2$, $p = 3$, etc., les polynomes suivants sont divisibles $x - \rho$ savoir

$$\left.\begin{array}{l}
x^n + x^{n-1}\rho + x^{n-2}\rho^1 + \ldots + x\rho^{n-1} - n\rho^n \\
x^n + 2x^{n-1}\rho + 3x^{n-2}\rho^2 + \ldots + nx\rho^{n-1} - \frac{n^{2/1}}{2!}\rho^n \\
x^n + 3x^{n-1}\rho + 6x^{n-2}\rho^2 + \ldots + \frac{n^{2/1}}{2!}x\rho^{n-1} - \frac{n^{3/1}}{3!}\rho^n \\
x^n + 4x^{n-1}\rho + 10x^{n-2}\rho^2 + \ldots + \frac{n^{3/1}}{3!}x\rho^{n-1} - \frac{n^{4/1}}{4!}\rho^n \\
\quad \text{etc., etc.}
\end{array}\right\} \qquad (n)$$

et l'on s'assurera aisément que les quotients de ces polynomes par $x-\rho$ sont respectivement

$$\left.\begin{array}{l}
x^{n-1}+2\,x^{n-2}\,\rho+3x^{n-3}\,\rho^2+\ldots+n\,\rho^{n-1}\\[4pt]
x^{n-1}+3\,x^{n-2}\,\rho+6x^{n-3}\,\rho^2+\ldots+\dfrac{n^{2/1}}{2!}\,\rho^{n-1}\\[4pt]
x^{n-1}+4\,x^{n-2}\,\rho+10x^{n-3}\,\rho^2+\ldots+\dfrac{n^{3/1}}{3!}\,\rho^{n-1}\\[4pt]
x^{n-1}+5\,x^{n-2}\,\rho+15x^{n-3}\,\rho^2+\ldots+\dfrac{n^{4/1}}{4!}\,\rho^{n-1}\\[4pt]
\quad\text{etc., etc.}
\end{array}\right\}\ (p)$$

Par conséquent l'on a généralement pour le quotient du polynome $(m)$ par $x-\rho$, l'expression

$$x^{n-1}+(p+1)\,x^{n-2}\rho+\frac{(p+1)^{2/1}}{2\,!}\,x^{n-3}\,\rho^2+\ldots+\frac{p^{n/1}}{n!}\,\rho^{n-1}$$

Il est à remarquer que la divisibilité du polynome $x^n-\rho^n$ par $x-\rho$, entre dans le cas général de divisibilité du polynome $(m)$. En effet, le polynome qui doit précéder immédiatement le 1er des polynomes $(n)$, afin de compléter la série des nombres figurés représentés par les termes soustractifs de ces polynomes, est évidemment

$$x^n+0.\,x^{n-1}\,\rho+0.\,x^{n-2}\,\rho^2+\ldots+0.\,x\,\rho^{n-1}-1.\,\rho^n.$$

et l'on voit de plus que le quotient de ce polynome par

$$x-\rho,\quad \text{ou}\quad x^{n-1}+x^{n-2}\,\rho+x^{n-3}\,\rho^2+\ldots+\rho^{n-2},$$

est le polynome qui manque à la tête des polynomes $(p)$ pour que leurs coëfficients comptés dans le sens vertical, soient des séries complétes de nombres figurés.

Nous allons finir cet article par un exemple.

Si $n=4$, les polynomes $(n)$ deviennent

$$\begin{array}{l}
x^4+x^3\rho+x^2\rho^2+x\rho^3-4\,\rho^4\\
x^4+2\,x^3\rho+3\,x^2\rho^2+4x\rho^3-10\,\rho^4\\
x^4+3\,x^3\rho+6\,x^2\rho^2+10x\rho^3-20\,\rho^4\\
x^4+4\,x^3\rho+10\,x^2\rho^2+20x\rho^3-35\,\rho^4\\
\text{etc., etc.}
\end{array}$$

et l'on pourra se convaincre par la division effective, que les quotients de ces polynomes par $x-\rho$, sont respectivement

$$\begin{array}{l}
x^3+2\,x^2\rho+3\,x\,\rho^2+4\,\rho^3\\
x^3+3\,x^2\rho+6\,x\,\rho^2+10\,\rho^3\\
x^3+4\,x^2\rho+10\,x\,\rho^2+20\,\rho^3\\
x^3+5\,x^2\rho+15\,x\,\rho^2+35\,\rho^3\\
\text{etc., etc.}
\end{array}$$

# § 7.

*Sur le développement de* $\Delta^n x^m$, n *et* m *étant entiers et positifs.*

I^er *Développement*, de la formule

$$\Delta^n f(x) = f(x+n\,\Delta x) - nf(x+\overline{n-1}\,\Delta x) + \frac{n^{2/-1}}{2!} f(x+\overline{n-2}\,\Delta x) - \dots \pm f(x) \dots \quad (q)$$

Si, dans cette formule pour $f(x)$ l'on met $x^m$, on aura, après avoir développé et ordonné par rapport aux exposants croissants de $\Delta x$, et supprimé le terme qui a pour multiplicateur $1 - \frac{n}{1} + \frac{n^{2/-1}}{2!} - \dots \pm 1$, attendu que ce polynome est nul, on aura dis-je le développement suivant :

$$\left.\begin{aligned}
\Delta^n x^m = {} & m\, x^{m-1}\,\Delta x \left\{ n - \frac{n}{1}(n-1) + \frac{n^{2/-1}}{2!}(n-2) - \frac{n^{3/-1}}{3!}(n-3) + \dots \pm \frac{n^{p/-1}}{p!}(n-p) \mp \right\} + \\
& \frac{m^{2/-1}}{2!} x^{m-2}\,\Delta x^2 \left\{ n^2 - \frac{n}{1}(n-1)^2 + \frac{n^{2/-1}}{2!}(n-2)^2 - \frac{n^{3/-1}}{3!}(n-3)^2 + \dots \pm \frac{n^{p/-1}}{p!}(n-p)^2 \mp \right\} + \\
& \frac{m^{3/-1}}{3!} x^{m-3}\,\Delta x^3 \left\{ n^3 - \frac{n}{1}(n-1)^3 + \frac{n^{2/-1}}{2!}(n-2)^3 - \frac{n^{3/-1}}{3!}(n-3)^3 + \dots \pm \frac{n^{p/-1}}{p!}(n-p)^3 \mp \right\} + \\
& \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
& \frac{m^{\mu/-1}}{\mu!} x^{m-\mu}\,\Delta x^\mu \left\{ n^\mu - \frac{n}{1}(n-1)^\mu + \frac{n^{2/-1}}{2!}(n-2)^\mu - \frac{n^{3/-1}}{3!}(n-3)^\mu + \dots \pm \frac{n^{p/-1}}{p!}(n-p)^\mu \mp \right\} + \\
& \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}\right\} (r)$$

Cependant puisque $n$ et $m$ sont entiers et positifs, il faut, (*Voyez les traités du calcul des différences finies*), que le développement de $\Delta^n x^m$ commence par son $n^e$ terme, et l'on a

$$\Delta^n x^m = \left.\begin{array}{l} \dfrac{m^{n|-1}}{n!}\, x^{m-n}\,\Delta\, x^n \left\{ n^n - \dfrac{n}{1}(n-1)^n + \dfrac{n^{2|-1}}{2!}(n-2)^n - \dfrac{n^{3|-1}}{3!}(n-3)^n + \dots \pm \dfrac{n^{p|-1}}{p!}(n-p)^n \right\} + \\ \dfrac{m^{n+1|-1}}{n+1!}\, x^{m-n-1}\,\Delta\, x^{n+1} \left\{ n^{n+1} - \dfrac{n}{1}(n-1)^{n+1} + \dfrac{n^{2|-1}}{2!}(n-2)^{n+1} - \dfrac{n^{3|-1}}{3!}(n-3)^{n+1} + \dots \pm \dfrac{n^{p|-1}}{p!}(n-p)^{n+1} \right\} + \\ \quad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{array}\right\} \quad (s)$$

Par conséquent il faut que les $n-1$ termes qui, dans le développement $(r)$, précèdent le $n^e$ terme, soient nuls.

Mais ces $n-1$ termes ont, en général, respectivement pour facteurs, les polynomes

$$n - \frac{n}{1}(n-1) + \frac{n^{2|-1}}{2!}(n-2) - \frac{n^{3|-1}}{3!}(n-3) + \dots \pm \frac{n^{p-1|-1}}{p-1!}(n-p+1) \mp \frac{n^{p|-1}}{p!}(n-p)$$

$$n^2 - \frac{n}{1}(n-1)^2 + \frac{n^{2|-1}}{2!}(n-2)^2 - \frac{n^{3|-1}}{3!}(n-3)^2 + \dots \pm \frac{n^{p-1|-1}}{p-1!}(n-\xi+1)^2 \mp \frac{n^{p|-1}}{p!}(n-p)^2$$

. . . . . . . . . . . . . . .

$$n^{n-1} - \frac{n}{1}(n-1)^{n-1} + \frac{n^{2|-1}}{2!}(n-2)^{n-1} - \frac{n^{3|-1}}{3!}(n-3)^{n-1} + \dots \pm \frac{n^{p-1|-1}}{p-1!}(n-p+1)^{n-1} \mp \frac{n^{p|-1}}{p!}(n-p)^{n-1}.$$

Il faut donc que ces polynomes soient nuls pour $p=n$. Mais déjà, chacun des derniers termes de ces polynomes est nul de lui-même, dans cette hypothèse; par conséquent l'on devra avoir, pour $p=n$, les relations

$$\left.\begin{array}{l} n - \dfrac{n}{1}(n-1) + \dfrac{n^{2|-1}}{2!}(n-2) - \dfrac{n^{3|-1}}{3!}(n-3) + \dots \pm \dfrac{n^{p-1|-1}}{p-1!}(n-p+1) = 0 \\ n^2 - \dfrac{n}{1}(n-1)^2 + \dfrac{n^{2|-1}}{2!}(n-2)^2 - \dfrac{n^{3|-1}}{3!}(n-3)^2 + \dots \pm \dfrac{n^{p-1|-1}}{p-1!}(n-p+1)^2 = 0 \\ n^3 - \dfrac{n}{1}(n-1)^3 + \dfrac{n^{2|-1}}{2!}(n-2)^3 - \dfrac{n^{3|-1}}{3!}(n-3)^2 + \dots \pm \dfrac{n^{p-1|-1}}{p-1!}(n-p+1)^3 = 0 \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ n^{n-1} - \dfrac{n}{1}(n-1)^{n-1} + \dfrac{n^{2|-1}}{2!}(n-2)^{n-1} - \dfrac{n^{3|-1}}{3!}(n-3)^{n-1} + \dots \pm \dfrac{n^{p-1|-1}}{p-1!}(n-p+1)^{n-1} = 0. \end{array}\right\} \quad (u)$$

Il suit de là qu'en fesant $n$ sucessivement, égal à 2, 3, 4, …., on devra avoir les relations particulières

$$n-\frac{n}{1}(n-1)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \text{pour } n=2$$

$$\left.\begin{array}{l} n-\frac{n}{1}(n-1)+\frac{n^{2|-1}}{2\,!}(n-2)=0 \\ n^2-\frac{n}{1}(n-1)^2+\frac{n^{2|-1}}{2\,!}(n-2)^2=0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \qquad \text{pour } n=3$$

$$\left.\begin{array}{l} n-\frac{n}{1}(n-1)+\frac{n^{2|-1}}{2\,!}(n-2)-\frac{n^{3|-1}}{3\,!}(n-3)=0 \\ n^2-\frac{n}{1}(n-1)^2+\frac{n^{2|-1}}{2\,!}(n-2)^2-\frac{n^{3|-1}}{3\,!}(n-3)^2=0 \\ n^3-\frac{n}{1}(n-1)^3+\frac{n^{2|-1}}{2\,!}(n-2)^3-\frac{n^{3|-1}}{3\,!}(n-3)^3=0 \\ \text{etc.,} \qquad \text{etc.} \end{array}\right\} \qquad \text{pour } n=4$$

relations qui, en effet, se vérifient.

Ensuite l'on sait, (*Voy. les traités au calcul des **différences finies***) que le 1[er] terme du développement, formule ($s$), de $\Delta^n x^m$, doit se réduire à la forme $m^{n|-1}\, x^{m-n}\, \Delta x^n$. Mais le 1[er] terme de ce développement étant,

$$\frac{m^{n|-1}}{n\,!}\, x^{m-n}\, \Delta x^n \left\{ n^n-\frac{n}{1}(n-1)^n+\frac{n^{2|-1}}{2\,!}(n-2)^n-\frac{n^{3|-1}}{3\,!}(n-3)^n+\ldots\pm\frac{n^{p-1|-1}}{p-1}\mp\frac{n^{p|-1}}{p\,!}(n-p)^n \right\}$$

il s'ensuit que le polynome

$$n^n-\frac{n}{1}(n-1)^n+\frac{n^{2|-1}}{2\,!}\ldots\pm\frac{n^{p-1|-1}}{p-1}(n-p+1)^n\mp\frac{n^{p|-1}}{p\,!}(n-p)^n$$

doit être égal $1.2.3\ldots n=n\,!$, pour $n=p$.

Mais comme dans cette hypothèse le dernier terme est nul de lui-même, à cause du facteur $n-p$, il faut que l'on ait, pour $p=n$, la valeur.

$$(u') \qquad n^n-\frac{n}{1}(n-1)^n+\frac{n^{2|-1}}{2\,!}(n-2)^n-\frac{n^{3|-1}}{3\,!}(n-3)^n+\ldots+\frac{n^{p-1|-1}}{p-1\,!}(n-p+1)^n=n\,!$$

Effectivement pour $n=2$, $n=3$, $n=4$, etc., l'on a successivement :

$$n^2 - \frac{n}{1}(n-1)^2 = 1 . 2$$

$$n^3 - \frac{n}{1}(n-1)^3 + \frac{n^{2/-1}}{2\,!}(n-2)^3 = 1 . 2 . 3$$

$$n^4 - \frac{n}{1}(n-1)^4 + \frac{n^{2/-1}}{2\,!}(n-2)^4 - \frac{n^{3/-1}}{3\,!}(n-3)^4 = 1 . 2 . 3 . 4 .$$

etc., etc.

En introduisant dans la formule ($s$) la valeur ($u$), divisant les deux membres par $\Delta x^n$, et représentant, après cette division, par $N \Delta x$, tous les autres termes du développement, on aura :

$$\frac{\Delta^n x^m}{\Delta x^n} = m^{n/-1} x^{m-n} + N \Delta x \,. \qquad (s')$$

2e *Développement* de $\Delta^n x^m$, déduit de la formule

$$\Delta^n f(x) = \Delta^{n-1} f(x + \Delta x) - \Delta^{n-1} f(x). \qquad (t)$$

Pour donner à ce développement une forme qui rend la loi des coëfficients sensible, nous avons fixé notre choix sur les notations suivantes.

### 1re Série de Notations.

Nous ferons successivement

$$\begin{array}{llllll}
.1_0 = m\,; & .1_1 = m-1\,; & .1_2 = m-2\,; & \text{etc.,} & \text{en général} \\
.2_0 = \dfrac{m^{2/-1}}{2!}\,; & .2_1 = \dfrac{\overline{m-1}^{\,2/-1}}{2\,!}\,; & .2_2 = \dfrac{\overline{m-2}^{\,2/-1}}{2\,!}\,; & \text{etc.,} & .p_\omega = \dfrac{\overline{m-\omega}^{\,p/-1}}{p\,!} \\
.3_0 = \dfrac{m^{3/-1}}{3!}\,; & .3_1 = \dfrac{\overline{m-1}^{\,3/-1}}{3\,!}\,; & .3_2 = \dfrac{\overline{m-2}^{\,3/-1}}{3\,!}\,; & \text{etc.} & \\
.4_0 = \dfrac{m^{4/-1}}{4!}\,; & .4_1 = \dfrac{\overline{m-1}^{\,4/-1}}{4\,!}\,; & .4_2 = \dfrac{\overline{m-2}^{\,4/-1}}{4\,!}\,; & \text{etc.} & \\
. \quad . & . \quad . & . \quad .\,; & \text{etc.} & \\
.p_0 = \dfrac{m^{p/-1}}{p\,!}\,; & .p_1 = \dfrac{\overline{m-1}^{\,p/-1}}{p\,!}\,; & .p_2 = \dfrac{\overline{m-2}^{\,p/-1}}{p\,!}\,; & \text{etc.} &
\end{array}$$

## 2e Série de Notations.

Nous ferons successivement

$$
\begin{array}{llll}
.\mathrm{I}_0 = .1_0 \times .1_1 \;; & .\mathrm{I}_1 = .\mathrm{I}_0 \times .1_2 \;. & .\mathrm{I}_2 = .\mathrm{I}_1 \times .1_3 \;; & \text{en général}, \\
.\mathrm{II}_0 = .2_0 \times .1_2 \;; & .\mathrm{II}_1 = .\mathrm{II}_0 \times .1_3 \;; & .\mathrm{II}_2 = .\mathrm{II}_1 \times .1_4 & \\
\quad + .1_0 \times .2_1 \;; & \quad + .\mathrm{I}_0 \times .2_2 \;; & \quad + .\mathrm{I}_1 \times .2_3 \;; & .\mathrm{P}_\omega = .\mathrm{P}_{\omega-1} \times .1_{p+\omega} \\
.\mathrm{III}_0 = .3_0 \times .1_3 \;; & .\mathrm{III}_1 = \mathrm{III}_0 \times .1_4 \;; & .\mathrm{III}_2 = .\mathrm{III}_1 \times 1_5 \;; & \quad + .\mathrm{P}_{\omega-1}-1 \times .2_{p+\omega-1} \\
\quad + .2_0 \times .2_2 \;; & \quad + .\mathrm{II}_0 \times .2_3 \;; & \quad + .\mathrm{II}_1 \times 2_4 \;; & \quad + \ldots\ldots \\
\quad + .1_0 \times .3_1 \;; & \quad + .\mathrm{I}_0 \times .3_2 \;; & \quad + .\mathrm{I}_1 \times 3_3 \;; & \quad + \mathrm{I}_{\omega-1} \times .p_{\omega+1} \;; \\
\quad\vdots & \quad\vdots & & 
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
.\mathrm{P}_0 = p_0 \times .1_p & .\mathrm{P}_1 = .\mathrm{P}_0 \times .1_{p+1} & \\
\quad + .p_0 - 1 \times 2_{p-1} & \quad + .\mathrm{P}_0 - 1 \times .2_p & \\
\quad + .p_0 - 2 \times 3_{p-2} & \quad + .\mathrm{P}_0 - 2 \times .3_{p-1} & \text{etc.}\;; \\
\quad\vdots & \quad\vdots & \\
\quad + .2_0 \times p_2 - 1 & \quad + \mathrm{I}_0 \times .\mathrm{P}_2 \;; & \\
\quad + .1_0 \times p_1 \;; & &
\end{array}
$$

et ainsi de suite.

Cela posé, si de notre valeur $x^m$, on déduit successivement, d'après la formule ($t$), les différences $1^{re}$, $2^e$, $3^e$, ... $n^e$, on aura, en introduisant dans les résultats consécutives les notations précédentes, respectivement les valeurs que nous allons écrire

$$
\begin{aligned}
\Delta x^m &= .1_0\, x^{\cdot|1}\, \Delta x + .2_0\, x^{\cdot|2}\, \Delta x^2 + .3_0\, x^{\cdot 3}\, \Delta x^3 + \ldots + .\cdot_0\, x^{\cdot|p}\, \Delta x^p + \text{etc.} \\
\Delta^2 x^m &= .\mathrm{I}_0\, x^{\cdot|2}\, \Delta x^2 + .\mathrm{II}_0\, x^{\cdot|3}\, \Delta x^3 + .\mathrm{III}_0\, x^{\cdot|4}\, \Delta x^4 + \ldots + .\mathrm{P}_0\, x^{\cdot|p+1}\, \Delta x^{p+1} + \text{etc.} \\
\Delta^3 x^m &= .\mathrm{I}_1\, x^{\cdot|3}\, \Delta x^3 + .\mathrm{II}_1\, x^{\cdot|4}\, \Delta x^4 + .\mathrm{III}_1\, x^{\cdot|5}\, \Delta x^5 + \ldots + .\mathrm{P}_1\, x^{\cdot|p+2}\, \Delta x^{p+2} + \text{etc.} \\
&\ldots\ldots\ldots \\
\Delta^n x &= .\mathrm{I}_{n-2}\, x^{\cdot|n}\, \Delta x^n + .\mathrm{II}_{n-2}\, x^{\cdot n+1}\, \Delta x^{n+1} + .\mathrm{III}_{n-2}\, x^{\cdot|n+2}\, \Delta x^{n+2} + \ldots + \mathrm{P}_{n-2}\, x^{\cdot|p+n-1}\, \Delta x^{p+n-1} + \text{etc.} \quad (u)
\end{aligned}
$$

La dernière de ces valeurs est celle à la quelle nous voulions arriver

# § 8.

*Sur le développement de* $\Delta^n e^x$, n *étant un nombre entier et positif, et* e *la base des logarithmes nepériens.*

1$^{\text{er}}$ *Développement* déduit de la formule $(q)$ § 7.

Si dans cette formule pour $f(x)$ l'on met $e^x$, ou aura, après avoir développé et ordonné par rapport aux exposants croissants de $\Delta x$, et supprimé le terme qui a pour multiplicateur le polynome $1 - \frac{n}{1} + \frac{n^{2/-1}}{2\,!} - \ldots \pm 1$, attendu qu'il est nul, on aura dis-je le développement suivant

$$
\begin{aligned}
\Delta^n e^x = e^x \Delta x & \left\{ n - \frac{n}{1}(n-1) + \frac{n^{2/-1}}{2!}(n-2) - \frac{n^{3/-1}}{3!}(n-3) + \ldots \pm \frac{n^{p/-1}}{p!}(n-p) \right\} \\
+ \frac{e^x \Delta x^2}{2\,!} & \left\{ n^2 - \frac{n}{1}(n-1)^2 + \frac{n^{2/-1}}{2!}(n-2)^2 - \frac{n^{3/-1}}{3!}(n-3)^2 + \ldots \pm \frac{n^{p/-1}}{p!}(n-p)^2 \right\} \\
+ \frac{e^x \Delta x^3}{3\,!} & \left\{ n^3 - \frac{n}{1}(n-1)^3 + \frac{n^{2/-1}}{2!}(n-2)^3 - \frac{n^{3/-1}}{3!}(n-3)^3 + \ldots \pm \frac{n^{p/-1}}{p!}(n-p)^3 \right\} \\
+ \quad & \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
+ \frac{e^x \Delta x^\mu}{\mu\,!} & \left\{ n^\mu - \frac{n}{1}(n-1)^\mu + \frac{n^{2/-1}}{2!}(n-2)^\mu - \frac{n^{3/-1}}{3!}(n-3)^\mu + \ldots \pm \frac{n^{p/-1}}{p!}(n-p)^\mu \right\} \\
+ \text{ etc.}, \quad & \text{etc.}
\end{aligned}
$$

**12**

Mais à cause des formules ($u$) les $n-1$ premiers termes de ce développement disparaissent, et à cause de la formule ($u'$) le multiplicateur $n^n - \frac{n}{1}(n-1)^n + \frac{n^{2|-1}}{2!}(n-2)^n$ — etc. du $n^e$ terme, qui est de la forme

$$\frac{e^x \Delta x^n}{n!}\left\{ n^n - \frac{n}{1}(n-1)^n + \frac{n^{2|-1}}{2!}(n-2)^n - \text{etc.} \right\}$$

se réduit à $n!$ par conséquent ce $n^e$ terme lui-même se réduit à $e^x \Delta x^n$.

Il suit de ces observations que le développement demandé sera

$$\begin{aligned}
\Delta^n e^x = e^x \Delta x^n &+ \frac{e^x \Delta x^{n+1}}{n+1!}\left\{ n^{n+1} - \frac{n}{1}(n-1)^{n+1} + \frac{n^{2|-1}}{2!}(n-2)^{n+1} - \frac{n^{3|-1}}{3!}(n-3)^{n+1} + \dots \right\} \\
&+ \frac{e^x \Delta x^{n+2}}{n+2!}\left\{ n^{n+2} - \frac{n}{1}(n-1)^{n+2} + \frac{n^{2|-1}}{2!}(n-2)^{n+2} - \frac{n^{3|-1}}{3!}(n-3)^{n+2} + \dots \right\} \\
&+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
&+ \frac{e^x \Delta x^{n+k}}{n+k!}\left\{ n^{n+k} - \frac{n}{1}(n-1)^{n+k} + \frac{n^{2|-1}}{2!}(n-2)^{n+k} - \frac{n^{3|-1}}{3!}(n-3)^{n+k} + \dots \right\} \\
&+ \text{etc.} \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Si ensuite nous divisons tous les termes par $\Delta x^n$, et que nous représentons, après cette division, tous les termes qui suivent le 1$^{er}$, par $M \Delta x$, ce qui est permis attendu que tous ces termes ont $\Delta x$ pour facteur, on aura la formule

$$(s'') \qquad \frac{\Delta^n e^x}{\Delta x^n} = e^x + M \Delta x.$$

Nous remarquons aussi qu'en faisant $n=1$, $n=2$, $n=3$, etc. la formule précédente qui donne le développement de $\Delta^n x$, se change successivement en celles-ci :

$$\Delta e^x = e^x \Delta x \left\{ 1 + \frac{\Delta x}{2!} + \frac{\Delta x^2}{3!} + \dots \right\}$$

$$\Delta^2 e^x = e^x \Delta x^2 \left\{ 1 + \frac{\Delta x}{3!}\left(n^3 - \frac{n}{1}.\overline{n-1}^3\right) + \frac{\Delta x^2}{4!}\left(n^4 - \frac{n}{1}\overline{n-1}^4\right) + \dots \right\}$$

$$\Delta^3 e^x = e^x \Delta x^3 \left\{ 1 + \frac{\Delta x}{4!}\left(n^4 - n.\overline{n-1}^4 + \frac{n^{2|-2}}{2!}.\overline{n-2}^4\right) + \frac{\Delta x^5}{5!}\left(n^5 - n\,\overline{n-1}^5 + \frac{n^{2|-1}}{2!}.\overline{n-2}^5\right) + \dots \right\}.$$

etc.

formules dans lesquelles il faut encore, à partir de la 2$^e$, remplacer la lettre $n$, qui se trouve dans les parenthèses, successivement par les nombres 2, 3, etc.

2^me *Développement.* **Déduit de la formule ($t$), § 7.**

En prenant successivement, d'après la formule ($t$), les différences 1^ères, 2^èmes, 3^ièmes, etc. de $e^x$, on aura respectivement

$$\Delta\, e^x = e^x \Delta x \left\{ 1 + \frac{\Delta x}{2!} + \frac{\Delta x^2}{3!} + \frac{\Delta x^3}{4!} + \quad \ldots \right\}$$

$$\Delta^2 e^x = e^x \Delta x^2 \left\{ 1 + \frac{\Delta x}{2!} + \frac{\Delta x^2}{3!} + \frac{\Delta x^3}{4!} + \quad \ldots \right\}^2$$

$$\Delta^3 e^x = e^x \Delta x^3 \left\{ 1 + \frac{\Delta x}{2!} + \frac{\Delta x^2}{3!} + \frac{\Delta x^3}{4!} + \quad \ldots \right\}^3$$

etc. etc.

Par conséquent, l'on a, en général

$$\Delta^n e^x = e^x \Delta x^n \left\{ 1 + \frac{\Delta x}{2!} + \frac{\Delta x^2}{3!} + \frac{\Delta x^3}{4!} + \quad \ldots \right\}^n \qquad (v').$$

# § 9.

*Sur le développement de la fonction* $\Delta^n a^x$, *n étant un nombre entier et positif, et a une base logarithmique quelconque différente de la base nepérienne* e.

1[er] *Développement*, deduit de la formule $(q)$, § 7.

Si dans cette formule à la place de $f(x)$ l'on met $a^x$, qu'on développe après cette substitution et qu'on ordonne le résultat par rapport aux puissances croissantes de $\Delta x$, on aura, après avoir supprimé le terme qui a pour multiplicateur le polynome $1 - \frac{n}{1} + \frac{n^{2/-1}}{2\,!} - \ldots \pm 1$, le développement que je vais écrire

$$
\begin{aligned}
\Delta^n a^x = \; & la \times a^x \Delta x \left\{ n - \frac{n}{1}(n-1) + \frac{n^{2/-1}}{2\,!}(n-2) - \frac{n^{3/-1}}{3\,!}(n-3) + \ldots \right\} \\
+ \; & l^2 a \times a^x \frac{\Delta x^2}{2\,!} \left\{ n^2 - \frac{n}{1}(n-1)^2 + \frac{n^{2/-1}}{2\,!}(n-2)^2 - \frac{n^{3/-1}}{3\,!}(n-3)^2 + \ldots \right\} \\
+ \; & l^3 a \times a^x \frac{\Delta x^3}{3\,!} \left\{ n^3 - \frac{n}{1}(n-1)^3 + \frac{n^{2/-1}}{2\,!}(n-2)^3 - \frac{n^{3/-1}}{3\,!}(n-3)^3 + \ldots \right\} \\
+ \; & \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
+ \; & l^\mu a \times a^x \frac{\Delta x^\mu}{\mu\,!} \left\{ n^\mu - \frac{n}{1}(n-1)^\mu + \frac{n^{2/-1}}{2\,!}(n-2)^\mu - \frac{n^{3/-1}}{3\,!}(n-3)^\mu + \ldots \right\} \\
+ \; & \text{etc.} \qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Mais, à cause des formules $(u)$, les $n-1$ premiers termes de ce développement disparaissent, et à cause de la formule $(u')$, le multiplicateur $n^n - \frac{n}{1}(n-1)^n + \frac{n^{2/-1}}{2!}(n-2)^n -$ etc. du $n^e$ terme, qui est de la forme

$$l^n a \times \frac{a^x \Delta x^n}{n!}\left\{n^n - \frac{n}{1}(n-1)^n + \frac{n^{2/-1}}{2!}(n-2)^n - \frac{n^{3/-1}}{3!}(n-3)^n + \dots\right\},$$

se réduit à $n!$ ; par conséquent ce $n^e$ terme lui-même se réduit à $l^n a \times a^x x\Delta^n$.

Il suit de ces observations que le développement demandé sera finalement celui-ci :

$$\begin{aligned}
\Delta^n a^x = l^n a \times a^x \Delta x^n &+ l^{n+1} a \times a^x \frac{\Delta x^{n+1}}{n+1!}\left\{n^{n+1} - \frac{n}{1}(n-1)^{n+1} + \frac{n^{2/-1}}{2!}(n-2)^{n+1} - \frac{n^{3/-1}}{3!}(n-3)^{n+1} + \dots\right\} \\
&+ l^{n+2} a \times a^x \frac{\Delta x_{n+2}}{n+2!}\left\{n^{n+2} - \frac{n}{1}(n-1)^{n+2} + \frac{n^{2/-1}}{2!}(n-2)^{n+2} - \frac{n^{3/-1}}{3!}(n-3)^{n+2} + \dots\right\} \\
&+ \dots \\
&+ l^{n+k} a \times a^x \frac{\Delta x^{n+k}}{n+k!}\left\{n^{n+k} - \frac{n}{1}(n-1)^{n+k} + \frac{n^{2/-1}}{2!}(n-2)^{n+k} - \frac{n^{3/-1}}{3!}(n-3)^{n+k} + \dots\right\} \\
&+ \text{etc.} \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Si ensuite nous divisons tous les termes de ce développement par $\Delta x^n$, et que nous représentons, après cette division, tous les termes qui suivent le 1$^{er}$, par $Q\Delta x$, ce qui est permis, attendu que tous ces termes ont $\Delta x$ pour facteur, on aura la formule

$$(s''') \qquad \frac{\Delta^n a^x}{\Delta x^n} = l^n a \times a^x + Q\Delta x .$$

Nous devons observer que dans les formules développées dans ce §, la notation $la$ représente, comme ordinairement, le logarithme nepérien de la base $a$.

Remarquons encore que si dans la formule qui donne le développement effectif de $\Delta^n a^x$, l'on fait $n$ successivement égal à 1, 2, 3, . . . , on aura les formules particulières :

$$\Delta a^x = la \times a^x \Delta x \left\{1 + la \times \frac{\Delta x}{2!} + l^2 a \times \frac{\Delta x^2}{3!} + l^3 a \times \frac{\Delta x^3}{4!} + \dots\right\}$$

$$\Delta^2 a^x = l^2 a \times a^x \Delta x^2 \left\{1 + la \times \frac{\Delta x}{3!}\left(n^3 - n\,\overline{n-1}^{\,3}\right) + l^2 a \times \frac{\Delta x^2}{4!}\left(n^4 - n\,\overline{n-1}^{\,4}\right) + \dots\right\}$$

$$\Delta^3 a^x = l^3 a \times a^x \Delta x^3 \left\{1 + la \times \frac{\Delta x}{4!}\left(n^4 - n\,\overline{n-1}^{\,4} + \frac{n^{2/-1}}{2!}\,\overline{n-2}^{\,4}\right) + l^2 a\,\frac{\Delta x^2}{5!}\left(n^5 - n\,\overline{n-1}^{\,5} + \frac{n^{2/-1}}{2!}\,\overline{n-2}^{\,5}\right) + \dots\right\}$$

etc. etc.

formules dans lesquelles il faut encore, à partir de la 2$^e$, remplacer la lettre $n$, qui se trouve dans les parenthèses, successivement par les nombres 2, 3, etc.

2° *Développement.* Déduit de la formule $(t)$, § 7.

En prenant, d'après cette formule, successivement les différences 1ère, 2e, 3e, etc., et mettant à la place de $a^{\Delta x}$, son développement en série, on aura respectivement

$$\Delta a^x = la \times a^x \Delta x \left\{ 1 + la \times \frac{\Delta x}{2\,!} + l^2 a \times \frac{\Delta x^2}{3\,!} + l^3 a \times \frac{\Delta x^3}{4\,!} + \cdots \right\}$$

$$\Delta^2 a^x = l^2 a \times a^x \Delta x^2 \left\{ 1 + la \times \frac{\Delta x}{2\,!} + l^2 a \times \frac{\Delta x^2}{3\,!} + l^3 a \times \frac{\Delta x^3}{4\,!} + \cdots \right\}^2$$

$$\Delta^3 a^x = l^3 a \times a^x \Delta x^3 \left\{ 1 + la \times \frac{\Delta x}{2\,!} + l^2 a \times \frac{\Delta x^2}{3\,!} + l^3 a \times \frac{\Delta x^3}{4\,!} + \cdots \right\}^3$$

etc. etc.

en général

$$\Delta^n a^x = l^n a \times a^x \Delta x^n \left\{ 1 + la \times \frac{\Delta x}{2\,!} + l^2 a \times \frac{\Delta x^2}{3\,!} + l^3 a \times \frac{\Delta x^3}{4\,!} + \cdots \right\}^n.$$

Cette dernière formule est celle que nous voulions donner.

# § 10.

*Sur le développement de la fonction* $\Delta^n \, l\,x$, *représentant des logarithmes nepériens.*

*Développement*, déduit de la formule $(q)$, § 7.

Si dans cette formule à la place de $f(x)$ l'on met $lx$, qu'on développe après cette substitution et qu'on ordonne le résultat par rapport aux puissances croissantes de $\Delta x$, on aura, après avoir supprimé le terme qui a pour multiplicateur $1 - \frac{n}{1} + \frac{n^{2|-1}}{2!} - \ldots \pm 1$, le développement que je vais écrire :

$$\begin{aligned}
\Delta^n lx = \; & \frac{\Delta x}{x}\left\{ n - \frac{n}{1}(n-1) + \frac{n^{2|-1}}{2!}(n-2) - \frac{n^{3|-1}}{3}(n-3) + \ldots \right\} \\
& - \frac{\Delta x^2}{2x^2}\left\{ n^2 - \frac{n}{1}(n-1)^2 + \frac{n^{2|-1}}{2!}(n-2)^2 - \frac{n^{3|-1}}{3!}(n-3)^2 + \ldots \right\} \\
& + \frac{\Delta x^3}{3x^3}\left\{ n^3 - \frac{n}{1}(n-1)^3 + \frac{n^{2|-1}}{2!}(n-2)^3 - \frac{n^{3|-1}}{3!}(n-3)^3 + \ldots \right\} \\
& \qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \\
& \pm \frac{\Delta x^\mu}{\mu x}\left\{ n^\mu - \frac{n}{1}(n-1)^\mu + \frac{n^{2|-1}}{2!}(n-2)^\mu - \frac{n^{3|-1}}{3!}(n-3)^\mu + \ldots \right. \\
& \mp \;\ldots
\end{aligned}$$

Mais, à cause des formules $(v)$, les $n-1$ 1$^{ers}$ termes de ce développement disparaissent, et à cause de la formule $(u^1)$, le multiplicateur

$$n^n - \frac{n}{1}(n-1)^n + \frac{n^{2|-1}}{2!}(n-2)^n - \frac{n^{3|-1}}{3!}(n-3)^n + \ldots \Big\}$$

du $n^e$ terme se réduit à $n!$ par conséquent ce $n^e$ terme lui-même se réduit à $\frac{n!\,\Delta x^n}{n\,x^n}$.

Il est donc évident que le développement demandé est finalement celui-ci :

$$\left.\begin{array}{l}
\Delta^n lx = \pm \dfrac{n!\ \Delta x^n}{n\, x^n} \mp \dfrac{\Delta x^{n+1}}{(n+1)x^{n+1}} \left\{ n^{n+1} - \dfrac{n}{1}(n-1)^{n+1} + \dfrac{n^{2|-1}}{2!}(n-2)^{n+1} - \dfrac{n^{3|-1}}{3!}(n-3)^{n+1} + \ldots \right\} \\
\qquad \pm \dfrac{\Delta x^{n+2}}{(n+2)\, x^{n+2}} \left\{ n^{n+2} - \dfrac{n}{1}(n-1)^{n+2} + \dfrac{n^{2|-1}}{2!}(n-2)^{n+2} - \dfrac{n^{3|-1}}{3!}(n-3)^{n+2} + \ldots \right\} \\
\qquad \mp \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
\qquad \pm \dfrac{\Delta x^{n+k}}{(n+k)\, x^{n+k}} \left\{ n^{n+k} - \dfrac{n}{1}(n-1)^{n+k} + \dfrac{n^{2|-1}}{2!}(n-2)^{n+k} - \dfrac{n^{3|-1}}{3!}(n-3)^{n+k} + \ldots \right\} \\
\qquad \mp \ \text{etc., etc.}
\end{array}\right\} (w)$$

Si ensuite nous divisons tous les termes de ce développement par $\Delta x^n$, et que nous représentons, après cette division, tous les termes qui suivent le 1[er], par $R\Delta x$, ce qui est permis, attendu que tous ces termes ont $\Delta x$ pour facteur, on aura la formule

$$\frac{\Delta^n lx}{\Delta x^n} = \pm \frac{n!}{n\, x^n} + R\Delta x\,; \qquad (s^{IV})$$

formule dans laquelle il faut prendre le signe moins, si $n$ est pair

Cependant puisque $n! = 1.\,2.\,3.\,\ldots\ldots n$, on peut écrire la formule $(s^{IV})$ aussi de la manière suivante

$$\frac{\Delta^n lx}{\Delta x^n} = \frac{(n-1)!}{x^n} + R\Delta x.$$

Nous remarquerons aussi qu'en faisant $n$ successivement égal à 1, 2, 3, etc., la formule générale $(w)$ se changera en les formules particulières que nous allons donner :

$$\Delta lx = + \frac{\Delta x}{x} \left\{ 1 - \frac{\Delta x}{2x} + \frac{\Delta x^2}{3x^2} - \frac{\Delta x^3}{\Delta x^3} + \ldots \right\}$$

$$\Delta^2 lx = - \frac{1.2\,\Delta x^2}{2x^2} \left\{ 1 - \frac{\Delta x}{2x}\left(n^3 - \frac{n}{1}\overline{n-1}^3\right) + \frac{\Delta x^2}{4x^2}\left(n^4 - \frac{n}{1}\overline{n-1}^4\right) - \ldots \right\}$$

$$\Delta^3 lx = + \frac{1.2.3\,\Delta x^3}{3x^3} \left\{ 1 - \frac{\Delta x}{4x}\left(n^4 - \frac{n}{1}\overline{n-1}^4 + \frac{n^{2|-1}}{2!}\overline{n-2}^4\right) + \frac{\Delta x^2}{5x^2}\left(n^5 - \frac{n}{1}\overline{n-1}^5 + \frac{n^{2|-1}}{2!}\overline{n-2}^5\right) \ldots \right\}$$

etc., . . . . . . . . . .

formules dans lesquelles il faut encore, à partir de la 2[me], remplacer la lettre $n$, qui se trouve dans les parenthèses, successivement par les nombres 2, 3, etc.

# § 11.

*Sur le développement de la fonction* $\Delta^n \mathrm{L}x$, L *représentant des logarithmes à base quelconque* A.

*Développement* déduit de la formule (*q*), § 7.

Si dans cette formule à la place de $f(x)$ l'on met $\mathrm{L}x$, qu'on développe après cette substitution et qu'on ordonne le résultat par rapport aux puissances croissantes de $\Delta x$, on aura, après avoir supprimé le terme qui a pour multiplicateur $1 - \frac{n}{1} + \frac{n^{2|-1}}{2!} - \ldots \pm 1$, le développement que je vais écrire :

$$\begin{aligned}
\Delta^n \mathrm{L}x = {} & \frac{1}{l\mathrm{A}} \cdot \frac{\Delta x}{x} \left\{ n - \frac{n}{1}(n-1) + \frac{n^{2|-1}}{2!}(n-2) - \frac{n^{3|-1}}{3!}(n-3) + \cdots \right\} \\
& - \frac{1}{l\mathrm{A}} \cdot \frac{\Delta x^2}{2x^2} \left\{ n^2 - \frac{n}{1}(n-1)^2 + \frac{n^{2|-1}}{2!}(n-2)^2 - \frac{n^{3|-1}}{3!}(n-3)^2 + \cdots \right\} \\
& + \frac{1}{l\mathrm{A}} \cdot \frac{\Delta x^3}{3x^3} \left\{ n^3 - \frac{n}{1}(n-1)^3 + \frac{n^{2|-1}}{2!}(n-2)^3 - \frac{n^{3|-1}}{3!}(n-3)^3 + \cdots \right\} \\
& - \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
& \pm \frac{1}{l\mathrm{A}} \cdot \frac{\Delta x^\mu}{\mu x^\mu} \left\{ n^\mu - \frac{n}{1}(n-1)^\mu + \frac{n^{2|-1}}{2!}(n-2)^\mu - \frac{n^{3|-1}}{3!}(n-3)^\mu + \cdots \right\} \\
& \mp \quad \text{etc., etc.}
\end{aligned}$$

Mais, à cause des formules ($u$), les $n-1$ 1ers termes de ce développement disparaissent, et à cause de la formule ($u^1$), le multiplicateur $n^n - \frac{n}{1}(n-1)^n + \frac{n^{2|-1}}{2!}(n-2)^n - \ldots$ du $n^e$ terme se réduit à $n!$ ; par conséquent ce $n^e$ terme lui-même se réduit à

$$\frac{n!\ \Delta x^n}{lA \times nx^n} = \frac{(n-1)!\ \Delta x^n}{lA \times x^n}.$$

Il est donc évident que le développement demandé est finalement celui-ci :

$$\left.\begin{aligned}
\Delta^n Lx = \pm \frac{n!\ \Delta x^n}{lA \times n x^n} & \mp \frac{\Delta x^{n+1}}{lA \times (n+1)\, x^{n+1}} \left\{ n^{n+1} - \frac{n}{1}(n-1)^{n+1} + \frac{n^{2|-1}}{2!}(n-2)^{n+1} - \ldots \right\} \\
& \pm \frac{\Delta x^{n+2}}{lA \times (n+2)\, x^{n+2}} \left\{ n^{n+2} - \frac{n}{1}(n-1)^{n+2} + \frac{n^{2|-1}}{2!}(n-2)^{n+2} - \ldots \right\} \\
& \mp \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
& \pm \frac{\Delta x^{n+k}}{lA \times (n+k)\, x^{n+k}} \left\{ n^{n+k} - \frac{n}{1}(n-1)^{n+k} + \frac{n^{2|-1}}{2!}(n-2)^{n+k} - \ldots \right\} \\
& \mp \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .
\end{aligned}\right\} \quad (x)$$

On en tire pour $n=1, 2, 3\ldots$, successivement les formules

$$\begin{aligned}
\Delta\, Lx &= \frac{\Delta x}{lA \times x} \left\{ 1 - \frac{\Delta x}{2x} + \frac{\Delta x^2}{3x^2} - \ldots \right\} \\
\Delta^2 Lx &= \frac{1.2\ \Delta x^2}{lA \times 2\, x^2} \left\{ 1 - \frac{\Delta x}{3x}\left(n^3 - \frac{n}{1}\,\overline{n-1}^{\,3}\right) + \ldots \right\} \\
\Delta^3 Lx &= \frac{1.2.3\ \Delta x^3}{lA \times 3\, x^3} \left\{ 1 - \frac{\Delta x}{4x}\left(n^4 - \frac{n}{1}\,\overline{n-1}^{\,4}\right) + \ldots \right\} \\
\text{etc.} & \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .
\end{aligned}$$

formules dans lesquelles il faut, à partir de la 2me, remplacer la lettre $n$, qui se trouve dans les parenthèses, respectivement par les nombres 2, 3, etc.

Nous observerons encore qu'en divisant la formule ($x$) par $\Delta x^n$, et représentant par $T\Delta x$ tous les termes qui suivent le 1er après cette division, ce qui est permis, attendu que $\Delta x$ est facteur de tous ces termes, on aura

$$\frac{\Delta^n Lx}{\Delta x^n} = \frac{(n-1)!}{lA \times x^n} + T\Delta x \qquad (x').$$

# § 12.

*Sur le développement de la fonction* $\Delta^n \mathrm{C}x$, *la notation* $\mathrm{C}x$ *représentant le sinus de l'arc variabe* x.

Nous désignerons aussi par $\text{Ɔ}x$ le cosinus, et par $\mathrm{S}x$ la tangente de l'arc $x$.

1$^{er}$ ***Développement.*** La formule ($q$), § 7, donne

$$\Delta^n \mathrm{C}x = \mathrm{C}(x+n\Delta x) - n\mathrm{C}(x+\overline{n-1}\,\Delta x) + \frac{n^{2/-1}}{2\,!}\mathrm{C}(x+\overline{n-2}\,\Delta x) \quad - \quad \text{etc.}$$

En développant chaque terme du 2$^{d}$ membre de cette formule, substituant pour les sinus et cosinus des arcs multiples, les séries qui expriment leurs valeurs en fonction des puissances de ces mêmes lignes, puis séparant les termes qui ont pour multiplicateur commun $\mathrm{C}x$, de ceux qui sont multipliés par $\text{Ɔ}x$, on aura :

$$\Delta^n \mathrm{C}x = \mathrm{C}x \left\{ \begin{array}{l} \text{Ɔ}^n\Delta x - n\text{Ɔ}^{n-1}\Delta x + \dfrac{n^{2/-1}}{2\,!}\text{Ɔ}^{n-2}\Delta x - \dfrac{n^{3/-1}}{3\,!}\text{Ɔ}^{n-3}\Delta x - + \ldots \\ - \dfrac{n^{2/-1}}{2\,!}\mathrm{C}^2\Delta x\left[\text{Ɔ}^{n-2}\Delta x - \overline{n-2}\,\text{Ɔ}^{n-3}\Delta x + \dfrac{\overline{n-2}^{\,2/-1}}{2\,!}\text{Ɔ}^{n-4}\Delta x - \ldots\ldots\right] \\ + \dfrac{n^{4/-1}}{4\,!}\mathrm{C}^4\Delta x\left[\text{Ɔ}^{n-4}\Delta x - \overline{n-4}\,\text{Ɔ}^{n-5}\Delta x + \dfrac{\overline{n-4}^{\,2/-1}}{2\,!}\text{Ɔ}^{n-6}\Delta x - \ldots\ldots\right] \end{array} \right\}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+\ \text{Ɔ}x \left\{ \begin{array}{l} n\text{Ɔ}^{n-1}\Delta x\,\mathrm{C}\Delta x - \dfrac{n^{2/-1}}{2\,!}\text{Ɔ}^{n-2}\Delta x\,\mathrm{C}\Delta x + \dfrac{n^{3/-1}}{2\,!}\text{Ɔ}^{n-3}\Delta x\,\mathrm{C}\Delta x - \text{etc.} \ \ldots\ldots \\ - \dfrac{n^{3/-1}}{3\,!}\mathrm{C}^3\Delta x\left[\text{Ɔ}^{n-3}\Delta x - \overline{n-3}\,\text{Ɔ}^{n-4}\Delta x + \dfrac{\overline{n-3}^{\,2/-1}}{2\,!}\text{Ɔ}^{n-5}\Delta x - \text{etc.} \ \ldots\ldots\right] \\ + \dfrac{n^{5/-1}}{5\,!}\mathrm{C}^5\Delta x\left[\text{Ɔ}^{n-5}\Delta x - \overline{n-5}\,\text{Ɔ}^{n-6}\Delta x + \dfrac{\overline{n-5}^{\,2/-1}}{2\,!}\text{Ɔ}^{n-7}\Delta x - \text{etc.} \ \ldots\ldots\right] \end{array} \right\}$$

$$+ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

on trouvera, aisément par des procédés analogues, le développement de la quantité $\Delta^n \text{Ɔ}x$.

$2^{me}$ *Développement.*

Nous allons donner la description de quelques notations dont nous avons cru devoir nous servir tant pour abréger nos formules, que pour en rendre plus sensible la loi de déduction.

fesons :

1° $\frac{1}{2\,!} = {}^{0}1$, $\frac{1}{3\,!} = {}^{0}2$, $\frac{1}{4\,!} = {}^{0}3$, etc. .., en général, $\frac{1}{p+1\,!} = {}^{0}p$.

2° ${}^{0}1 + {}^{0}1 = {}^{0}\mathrm{I}$, ${}^{0}\mathrm{I} + {}^{0}1 = {}^{1}\mathrm{I}$, ${}^{1}\mathrm{I} + {}^{0}1 = {}^{2}\mathrm{I}$, etc. .., en général, ${}^{\omega}\mathrm{I} + {}^{0}1 = {}^{\omega+1}\mathrm{I}$.

3° ${}^{0}2 + {}^{0}1 \times {}^{0}1 + {}^{0}2 = {}^{0}\mathrm{II}$, ${}^{0}\mathrm{II} + {}^{0}1 \times {}^{0}\mathrm{I} + {}^{0}2 = {}^{1}\mathrm{II}$, etc. .., en général, ${}^{\omega}\mathrm{II} + {}^{0}1 \times {}^{\omega}\mathrm{I} + {}^{\omega}2 = {}^{\omega+1}\mathrm{II}$.

4° ${}^{0}3 + {}^{0}1 \times {}^{0}2 + {}^{0}2 \times {}^{0}1 + {}^{0}3 = {}^{0}\mathrm{III}$, ${}^{0}\mathrm{III} + {}^{0}1 \times {}^{0}\mathrm{II} + {}^{0}2 \times {}^{0}\mathrm{I} + {}^{0}3 = {}^{1}\mathrm{III}$, etc. .. en général, ${}^{\omega}\mathrm{III} + {}^{0}1 \times {}^{\omega}\mathrm{II} + {}^{0}2 \times {}^{\omega}\mathrm{I} + {}^{0}3 = {}^{\omega+1}\mathrm{III}$

5° ${}^{0}4 + {}^{0}1 \times {}^{0}3 + {}^{0}2 \times {}^{0}2 + {}^{0}3 \times {}^{0}1 + {}^{0}4 = {}^{0}\mathrm{IV}$, ${}^{0}\mathrm{IV} + {}^{0}1 \times {}^{0}\mathrm{III} + {}^{0}2 \times {}^{0}\mathrm{II} + {}^{0}3 \times {}^{0}\mathrm{I} + {}^{0}4 = {}^{1}\mathrm{IV}$, etc. .....

6°, en général, soient P un chiffre romain, et $\omega$ un indice entier et positif quelconque, nous poserons

$${}^{\omega}\mathrm{P} + {}^{0}1 \times {}^{\omega}(\mathrm{P}-\mathrm{I}) + {}^{0}2 \times {}^{\omega}(\mathrm{P}-\mathrm{II}) + {}^{0}3 \times {}^{\omega}(\mathrm{P}-\mathrm{III}) + \ldots + {}^{0}p = {}^{\omega+1}\mathrm{P}.$$

Cela posé, si dans les formules

$$\mathrm{C}(x+\Delta x) = \mathrm{C}x.\text{Ɔ}\Delta x + \text{Ɔ}x.\mathrm{C}\Delta x$$
$$\text{Ɔ}(x+\Delta x) = \text{Ɔ}x.\text{Ɔ}\Delta x - \mathrm{C}x.\mathrm{C}\Delta x$$

on substitue à la place de $\mathrm{C}\Delta x$, $\text{Ɔ}\Delta x$, leurs expressions en série, et que l'on ordonne par rapport aux exposants croissants de $\Delta x$, on trouve aisément :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Delta \mathrm{C}x}{\Delta x} &= \text{Ɔ}x - {}^{0}1\,\Delta x \times \mathrm{C}x - {}^{0}2\,\Delta x^2 \times \text{Ɔ}x + {}^{0}3\,\Delta x^3 \times \mathrm{C}x + {}^{0}4\,\Delta x^4\,\text{Ɔ}x - \text{etc.} \ldots \\ \frac{\Delta \text{Ɔ}x}{\Delta x} &= -\,\mathrm{C}x - {}^{0}1\,\Delta x \times \text{Ɔ}x + {}^{0}2\,\Delta x^2 \times \mathrm{C}x + {}^{0}3\,\Delta x^3 \times \text{Ɔ}x - {}^{0}4\,\Delta x^4\,\mathrm{C}x - \text{etc.} \ldots\end{aligned}\right\} \quad (1').$$

Mais si l'on différencie de nouveau les expressions qui donnent les valeurs développées de $\Delta\mathrm{C}x$, $\Delta\text{Ɔ}x$, dans la supposition de $\Delta x$ constant, on aura d'abord :

$$\Delta^2\mathrm{C}x = +\ \Delta x \times \Delta\text{Ɔ}x - {}^{0}1\,\Delta x^2 \times \Delta\mathrm{C}x - {}^{0}2\,\Delta x^3 \times \Delta\text{Ɔ}x + \ldots\ldots$$
$$\Delta^2\text{Ɔ}x = -\ \Delta x \times \Delta\mathrm{C}x - {}^{0}1\,\Delta x^2 \times \Delta\text{Ɔ}x + {}^{0}2\,\Delta x^3 \times \Delta\mathrm{C}x + \ldots\ldots$$

ou bien, en divisant par $\Delta x^2$

$$\frac{\Delta^2\mathrm{C}x}{\Delta x^2} = \frac{\Delta\text{Ɔ}x}{\Delta x} - {}^{0}1\,\Delta x\,\frac{\Delta\mathrm{C}x}{\Delta x} - {}^{0}2\,\Delta x^2\,\frac{\Delta\text{Ɔ}x}{\Delta x} + \ldots$$
$$\frac{\Delta^2\text{Ɔ}x}{\Delta x^2} = -\frac{\Delta\mathrm{C}x}{\Delta x} - {}^{0}1\,\Delta x\,\frac{\Delta\text{Ɔ}x}{\Delta x} + {}^{0}2\,\Delta x^2\,\frac{\Delta\mathrm{C}x}{\Delta x} + \ldots$$

Mais si dans ces dernières formules on remplace les rapports $\frac{\Delta\, \mathrm{C}x}{\Delta x}$, $\frac{\Delta\, \text{Ↄ}x}{\Delta x}$, par leurs valeurs développées (1'), et qu'on ordonne ensuite par rapport aux exposants croissants de $\Delta x$, on aura :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Delta^2 \mathrm{C}x}{\Delta x^2} &= -\mathrm{C}x - {}^{0}\mathrm{I}\,\Delta x \times \text{Ↄ}x + {}^{0}\mathrm{II}\,\Delta x^2 \times \mathrm{C}x + {}^{0}\mathrm{III}\,\Delta x^3 \times \text{Ↄ}x - {}^{0}\mathrm{IV}\,\Delta x^4 \times \mathrm{C}x - \text{etc.}\\ \frac{\Delta^2 \text{Ↄ}x}{\Delta x^2} &= -\text{Ↄ}x + {}^{0}\mathrm{I}\,\Delta x \times \mathrm{C}x + {}^{0}\mathrm{II}\,\Delta x^2 \times \text{Ↄ}x - {}^{0}\mathrm{III}\,\Delta x^3 \times \mathrm{C}x - {}^{0}\mathrm{IV}\,\Delta x^4 \times \text{Ↄ}x + \text{etc.}\end{aligned}\right\} \quad (2')$$

En différentiant de nouveau les expressions $\Delta^2 \mathrm{C}x$, $\Delta^2 \text{Ↄ}x$, divisant les deux membres par $\Delta x^3$, puis remplaçant les rapports $\frac{\Delta^2\, \mathrm{C}x}{\Delta x^2}$, $\frac{\Delta^2\, \text{Ↄ}x}{\Delta x^2}$, par leurs valeurs développées (2'), on trouvera, après avoir ordonné par rapport aux exposants croissants de $\Delta x$.

$$\frac{\Delta^3 \mathrm{C}x}{\Delta x^3} = -\text{Ↄ}x + {}^{1}\mathrm{I}\,\Delta x \times \mathrm{C}x + {}^{1}\mathrm{II}\,\Delta x^2 \times \text{Ↄ}x - {}^{1}\mathrm{III}\,\Delta x^3 \times \mathrm{C}x - {}^{1}\mathrm{IV}\,\Delta x^4 \times \text{Ↄ}x + \text{etc.}$$

$$\frac{\Delta^3 \text{Ↄ}x}{\Delta x^3} = +\mathrm{C}x + {}^{1}\mathrm{I}\,\Delta x \times \text{Ↄ}x - {}^{1}\mathrm{II}\,\Delta x^2 \times \mathrm{C}x - {}^{1}\mathrm{III}\,\Delta x^3 \times \text{Ↄ}x + {}^{1}\mathrm{IV}\,\Delta x^4 \times \mathrm{C}x + \text{etc.}$$

Les méthodes précédentes appliquées à la détermination des différences 4èmes conduisent aux expressions :

$$\frac{\Delta^4 \mathrm{C}x}{\Delta x^4} = +\mathrm{C}x + {}^{2}\mathrm{I}\,\Delta x \times \text{Ↄ}x - {}^{2}\mathrm{II}\,\Delta x^2 \times \mathrm{C}x - {}^{2}\mathrm{III}\,\Delta x^3 \times \text{Ↄ}x + {}^{2}\mathrm{IV}\,\Delta x^4 \times \mathrm{C}x + \text{etc.}$$

$$\frac{\Delta^4 \text{Ↄ}x}{\Delta x^4} = +\text{Ↄ}x - {}^{2}\mathrm{I}\,\Delta x \times \mathrm{C}x - {}^{2}\mathrm{II}\,\Delta x^2 \times \text{Ↄ}x + {}^{2}\mathrm{III}\,\Delta x^3 \times \mathrm{C}x + {}^{2}\mathrm{IV}\,\Delta x^4 \times \text{Ↄ}x - \text{etc.}$$

Les calculs précédents, poussés au-delà des différences 4ièmes, feront voir qu'on a, en général,

$$\begin{aligned}\frac{\Delta^{4m+1} \mathrm{C}x}{\Delta x^{4m+1}} = &+\text{Ↄ}x - {}^{4m-1}\mathrm{I}\,\Delta x \times \mathrm{C}x - {}^{4m-1}\mathrm{II}\,\Delta x^2 \times \text{Ↄ}x + \ldots - {}^{4m-1}(\mathrm{IV\,P}+\mathrm{I})\,\Delta x^{4p+1} \times \mathrm{C}x - {}^{4m-1}(\mathrm{IV\,P}+\mathrm{II})\,\Delta x^{4p+2} \times \text{Ↄ}x +\\ &+ (\mathrm{IV\,P}+\mathrm{III})\,\Delta x^{4p+3} \times \mathrm{C}x + {}^{4m-1}(\mathrm{IV\,P}+\mathrm{IV})\,\Delta x^{4p+4} \times \text{Ↄ}x - \text{etc.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta^{4m+2} \mathrm{C}x}{\Delta x^{4m+2}} = &-\mathrm{C}x - {}^{4m}\mathrm{I}\,\Delta x \times \text{Ↄ}x + {}^{4m}\mathrm{II}\,\Delta x^2 \times \mathrm{C}x + \ldots - {}^{4m}(\mathrm{IV\,P}+\mathrm{I})\,\Delta x^{4p+1} \times \text{Ↄ}x + {}^{4m}(\mathrm{IV\,P}+\mathrm{II})\,\Delta x^{4p+2} \times \mathrm{C}x\\ &+ {}^{4m}(\mathrm{IV\,P}+\mathrm{III})\,\Delta x^{4p+3} \times \mathrm{C}x - {}^{4m}(\mathrm{IV\,P}+\mathrm{IV})\,\Delta x^{4p+4} \times \mathrm{C}x - \ldots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta^{4m+3} \mathrm{C}x}{\Delta x^{4m+3}} = &-\text{Ↄ}x + {}^{4m+1}\mathrm{I}\,\Delta x \times \mathrm{C}x + {}^{4m+1}\mathrm{II}\,\Delta x^2 \times \text{Ↄ}x - \text{etc.} + {}^{4m+1}(\mathrm{IV\,P}+\mathrm{I})\,\Delta x^{4p+1} \times \mathrm{C}x + {}^{4m+1}(\mathrm{IV\,P}+\mathrm{II})\,\Delta x^{4p+2} \times \text{Ↄ}x -\\ &- {}^{4m+1}(\mathrm{IV\,P}+\mathrm{III})\,\Delta x^{4p+3} \times \mathrm{C}x - {}^{4m+1}(\mathrm{IV\,P}+\mathrm{IV})\,\Delta x^{4p+4} \times \mathrm{C}x + \ldots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta^{4m+4} \mathrm{C}x}{\Delta x^{4m+4}} = &+\mathrm{C}x + {}^{4m+2}\mathrm{I}\,\Delta x \times x\text{Ↄ} - {}^{4m+2}\mathrm{II}\,\Delta x^2 \times \mathrm{C}x - \text{etc.} + {}^{4m+2}(\mathrm{IV\,P}+\mathrm{I})\,\Delta x^{4p+1} \times \text{Ↄ}x^{4m+2} - (\mathrm{IV\,P}+\mathrm{II})\,\Delta x^{4p+2} \times \mathrm{C}x -\\ &- {}^{4m+2}(\mathrm{IV\,P}+\mathrm{III})\,\Delta x^{4p+3} \times \text{Ↄ}x^{4m+2} + (\mathrm{IV\,P}+\mathrm{IV})\,\Delta x^{4p+4} \times \mathrm{C}x + \ldots\end{aligned}$$

En représentant par les lettres T, U, V, W, les coëfficients de $\Delta x$, dans les formules précédentes, on pourra les écrire ainsi :

$$\frac{\Delta^{4m+1}Cx}{\Delta x^{4m+1}} = +\text{Ɔ}x + \mathrm{T}\,\Delta x \qquad (\alpha)$$

$$\frac{\Delta^{4m+2}Cx}{\Delta x^{4m+2}} = -Cx + \mathrm{U}\,\Delta x \qquad (\beta)$$

$$\frac{\Delta^{4m+3}Cx}{\Delta x^{4m+3}} = -\text{Ɔ}x + \mathrm{V}\,\Delta x \qquad (\gamma)$$

$$\frac{\Delta^{4m+4}Cx}{\Delta x^{4m+4}} = +Cx + \mathrm{W}\,\Delta x \qquad (\delta)$$

Il faut savoir, que dans les formules précédentes, la lettre $m$, représente consécutivement 0, 1, 2, 3, ...

En suivant des procédés entièrement anologues aux précédents, on trouvera sans peine les formules suivantes pour les cosinus :

$$\frac{\Delta^{4m+1}\text{Ɔ}x}{\Delta x^{4m+1}} = -Cx - {}^{4m-1}\mathrm{I}\,\Delta x \times \text{Ɔ}x + {}^{4m-1}\mathrm{II}\,\Delta x^2 \times Cx + \text{etc.} - {}^{4m-1}(\mathrm{IV\,P+I})\,\Delta x^{4p+1} \times \text{Ɔ}x + {}^{4m-1}(\mathrm{IV\,P+II})\,\Delta x^{4p+2} \times Cx$$
$$+ {}^{4m-1}(\mathrm{IV\,P+III})\,\Delta x^{4p+3} \times \text{Ɔ}x - {}^{4m-1}(\mathrm{IV\,P+IV})\,\Delta x^{4p+4} \times Cx - \text{etc.}$$

$$\frac{\Delta^{4m+2}\text{Ɔ}x}{\Delta x^{4m+2}} = -\text{Ɔ}x + {}^{4m}\mathrm{I}\,\Delta x \times Cx + {}^{4m}\mathrm{II}\,\Delta x^2 \times \text{Ɔ}x - \text{etc.} + {}^{4m}(\mathrm{IV\,P+I})\,\Delta x^{4p+1} \times Cx + {}^{4m}(\mathrm{IV\,P+II})\,\Delta x^{4p+1} \times \text{Ɔ}x$$
$$- {}^{4m}(\mathrm{IV\,P+I})\,\Delta x^{4p+3} \times Cx - {}^{4m}(\mathrm{IV\,P+IV})\,\Delta x^{4p+4} \times \text{Ɔ}x + \text{etc.}$$

$$\frac{\Delta^{4m+3}\text{Ɔ}x}{\Delta x^{4m+3}} = +Cx + {}^{4m+1}\mathrm{I}\,\Delta x \times \text{Ɔ}x - {}^{4m+1}\mathrm{II}\,\Delta x^2 \times Cx - \text{etc.} + {}^{4m+1}(\mathrm{IV\,P+I})\,\Delta x^{4p+1} \times \text{Ɔ}x - {}^{4m+1}(\mathrm{IV\,P+II})\,\Delta x^{4p+2} \times Cx$$
$$- {}^{4m+1}(\mathrm{IV\,P+III})\,\Delta x^{4p+3} \times \text{Ɔ}x + {}^{4m+1}(\mathrm{IV\,P+IV})\,\Delta x^{4p+4} \times Cx + \text{etc.}$$

$$\frac{\Delta^{4m+4}\text{Ɔ}x}{\Delta x^{4m+4}} = +\text{Ɔ}x - {}^{4m+2}\mathrm{I}\,\Delta x \times Cx - {}^{4m+2}\mathrm{II}\,\Delta x^2 \times \text{Ɔ}x + \text{etc.} - {}^{4m+2}(\mathrm{IV\,P+I})\,\Delta x^{4p+1} \times Cx - {}^{4m+2}(\mathrm{IV\,P+II})\,\Delta x^{4p+2} \times \text{Ɔ}x$$
$$+ {}^{4m+2}(\mathrm{IV\,P+III})\,\Delta x^{4p+3} \times Cx + {}^{4m+2}(\mathrm{IV\,P+IV})\,\Delta x^{4p+4} \times Cx - \text{etc.}$$

Ces formules, de même que celles pour les sinus, peuvent être données abréviativement, ainsi :

$$\frac{\Delta^{4m+1}\text{Ɔ}x}{\Delta x^{4m+1}} = -Cx + \mathrm{T}^1\,\Delta x \qquad (\alpha^1)$$

$$\frac{\Delta^{4m+2}\text{Ɔ}x}{\Delta x^{4m+2}} = -\text{Ɔ}x + \mathrm{U}^1\,\Delta x \qquad (\beta^1)$$

$$\frac{\Delta^{4m+3}\text{Ɔ}x}{\Delta x^{4m+3}} = +Cx + \mathrm{V}^1\,\Delta x \qquad (\gamma^1)$$

$$\frac{\Delta^{4m+4}\text{Ɔ}x}{\Delta x^{4m+4}} = +\text{Ɔ}x + \mathrm{W}^1\,\Delta x \qquad (\delta^1)$$

# § 13.

*Sur une transformation de la formule*

$$u^x = u_0 + x\Delta u_0 + \frac{x^{2/-1}}{2!}\Delta^2 u_0 + \frac{x^{3/-1}}{3!}\Delta u_0 + \text{etc.} \qquad (y)$$

Nous avons posé, pour cette transformation, les notations suivantes :

1° Comme, d'après Kramp, $m! = 1.2.3\ldots m$; nous désignerons par $(+)(.p)\,m$¡ la somme des combinaisons-produits $p$ à $p$ des nombres naturels $1$;, $2$;, $3$;, ... $m$.; c'est-à-dire, nous renverserons le signe d'interrogation de Kramp.

2° Le binome à indice que voici : $(r-1)_m$ représentera, par analogie avec le binome exponentiel, le développement suivant :

$$(r-1)_m = r_m - m r_{m-1} + \frac{m^{2/-1}}{2!} r_{m-2} - \text{etc.} \pm r_0 .$$

Maintenant, pour opérer la transformation annoncée, nous suivrons la marche suivante

1° Développez les produits $x$, $x^{2/-1}$, $x^{3/-1}$, etc., du 2[d] membre de l'équation ($y$), et ordonnez le résultat par rapport aux exposants croissants de $x$

2° Élimenez les différences de $u_0$ par le moyen de la formule

$$\Delta^r u_0 = u_r - u_{r-1} + \frac{r^{2/-1}}{2!} u_{r-2} - \frac{r^{3/-r}}{3!} u_{r-3} + \text{etc...}$$

3° Observez que, pour $x = n$, le $n+1$[e] terme du développement de ($y$) est $\frac{x^{n/-1}}{n!}\Delta^n u_0$ .

Cela fait, on a la transformée

$$u_x = u_0 + \left\{ \frac{1}{n}(u-1)_n - \frac{1}{n-1}(u-1)_{n-1} + \frac{1}{n-2}(u-1)_{n-2} - \text{etc.} \ldots + (u-1)_1 \right\} x -$$

$$- \left\{ \frac{(+)(.n-2)(n-1)_{\mathrm{i}}}{n!}(u-1)_n - \frac{(+)(.n-3)(n-2)_{\mathrm{i}}}{(n-1)!}(u-1)_{n-1} + \text{etc.} \pm \frac{(+)(.1)\,2_{\mathrm{i}}}{3!}(u-1)_3 \mp \right.$$

$$\left. \mp \frac{1}{2!} \times (u-1)_2 \right\} x^2$$

$$+ \left\{ \frac{(+)(.n-3)(n-1)_{\mathrm{i}}}{n!}(u-1)_n - \frac{(+)(.n-4)(n-2)_{\mathrm{i}}}{(n-1)!}(u-1)_{n-1} + \text{etc.} \pm \frac{(+)(.1)\,3_{\mathrm{i}}\,(u-1)_4}{4!} \right.$$

$$\left. \mp \frac{1}{3!}(u-1) \right\} x^3$$

$$- \quad \text{etc.}$$

$$\pm \left\{ \frac{(+)(.n-r)(n-1)_{\mathrm{i}}}{n!}(u-1)_n - \frac{(+)(.n-r-1)(n-2)_{\mathrm{i}}}{(n-1)!}(u-1)_{n-1} + \frac{(+)(.n-r-2)(n-3)_{\mathrm{i}}}{(n-2)!}(u-1)_{n-2} \right.$$

$$\left. \pm \frac{1}{r!}(u-1)_r \right\} x^r$$

$$\mp \text{ etc.} \quad \pm \frac{1}{n!} (u-1)_n \, x^n .$$

Nous remarquons que, pour le calcul effectif des valeurs $(+)(.p)\,m_{\mathrm{i}}$, on pourra consulter les formules de Lagrange (*Académie de Berlin*, 1771), représentées en général, par

$$r \times (+)(.r)(m-1)_{\mathrm{i}} = \frac{m-r+1^{\,2/-r}}{2!} \times (+)(.r-1)(m-1)_{\mathrm{i}} + \frac{m-r+2^{\,3/-r}}{3!}(+)(.r-2)(m-1)_{\mathrm{i}} + \ldots$$

$$+ \frac{m^{r+1/-r}}{(r+1)!} .$$

# § 14.

*Autres développements de formules aux différences finies, représentées symboliquement.*

*A*. Développement de la formule

$$f(x+n\,\Delta x)=f(x)+n\,\Delta f(x)+\frac{n^{2/-1}}{2!}\,\Delta^2 f(x)+\text{etc.} \qquad (z)$$

par rapport aux exposants croissants de $\delta$, dans la supposition de $n\,\Delta x=\delta$.

On doit savoir qu'en désignant par $(+)\,(.p)\,\omega\,!$, la somme des combinaisons $p$ à $p$ des éléments $1,\ 2.\ 3\ldots\omega$, notation fixée dans le § précédent, ou pourra écrire le développement $(1+y)^n$, quelque soit $n$, ainsi qu'il suit :

$$(1+y)^n = 1 + \left\{\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} y \\ -\frac{y^2}{2} \\ +\frac{y^3}{3} \\ -\frac{y^4}{4} \\ +\ldots \\ \pm\frac{y^r}{r} \\ \mp\ldots \end{array}\right\} n
\left.\begin{array}{l} + \frac{y^2}{2} \\ -\frac{(+)(.1)\,2!}{2!}\,\frac{y^3}{3} \\ +\frac{(+)(.2)\,3!}{3!}\,\frac{y^4}{4} \\ -\ \ldots \\ \mp\frac{(+)(.r-2)\,(r-1)!}{(r-1)!}\,\frac{y^r}{r} \\ \pm\ \ldots \end{array}\right\} n^2
\left.\begin{array}{l} +\frac{1}{2!}\,\frac{y^3}{3} \\ -\frac{(+)(.1)\,3!}{3!}\,\frac{y^4}{4} \\ +\ \ldots \\ \pm\frac{(+)(.r-3)\,(r-1)!}{(r-1)!}\,\frac{y^r}{r} \\ \mp\ \ldots \end{array}\right\} n^3 \\[2em]
\left.\begin{array}{l} +\frac{1}{3!}\,\frac{y^4}{4} \\ -\frac{(+)(.1)\,4!}{4!}\,\frac{y^5}{5} \\ \pm\ \ldots \\ +\frac{(+)(.r-4)\,(r-1)!}{(r-1)!}\,\frac{y^r}{r} \\ \pm\ \ldots \end{array}\right\} n^4
\left.\begin{array}{l} +\frac{1}{4!}\,\frac{y^5}{5} \\ -\ \text{etc.}\ \ldots \\ \pm(+)(.r-5)(r-1)!\,\frac{y^r}{r} \\ \mp\ \ldots \end{array}\right\} n^5
\left.\begin{array}{l} +\ \text{etc.}\ \ldots \\ \mp\ \text{etc.}\ \ldots\frac{1}{(r-1)!}\,\frac{y^r}{r}\Big\}\,n^r \\ \pm\ \ldots \end{array}\right.
\end{array}\right\} \qquad (z')$$

Cela posé, si l'on remplace dans la formule ($z$), la lettre $n$ par sa valeur $\frac{\delta}{\Delta x}$, on aura d'abord.

$$f(x+\delta) = f(x) + \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\delta + \frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2} \times \frac{\delta^{2/-\Delta x}}{2!} + \frac{\Delta^3 f(x)}{\Delta x^3} \times \frac{\delta^{3/-\Delta x}}{3!} + \ldots\ldots$$

Puis en développant les factorielles $\delta^{2/-\Delta x}$, $\delta^{3/-\Delta x}$, etc., et ordonnant le résultat par rapport aux exposants croissants de $\delta$, on aura :

$$f(x+\delta) = f(x) + \left\{\begin{array}{l}
\left(\begin{array}{l}
\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \\
- \Delta x \frac{\Delta^2 f(x)}{2\,\Delta x^2} \\
+ \Delta x^2 \frac{\Delta^3 f(x)}{3\,\Delta x^3} \\
- \Delta x^3 \frac{\Delta^4 f(x)}{4\,\Delta x^4} \\
+ \;.\;.\;. \\
\pm \Delta x^r \frac{\Delta^{r+1} f(x)}{(r+1)\,\Delta x^{r+1}} \\
\mp \;.\;.\;.
\end{array}\right)\delta
+ \left(\begin{array}{l}
+ \frac{\Delta^2 f(x)}{2\,\Delta x^2} \\
- \frac{(+)(.1)\,2!}{2!} \frac{\Delta^3 f(x)}{3\,\Delta x^3} \times \Delta x \\
+ \frac{(+)(.2)\,3!}{3!} \frac{\Delta^4 f(x)}{4\,\Delta x^4} \times \Delta x^2 \\
- \;.\;.\;.\;. \\
\mp \frac{(+)(r-1)\,r!}{r!} \frac{\Delta^{r+1} f(x)}{(r+1)\Delta x^{r+1}} \times \Delta x^{r-1} \\
\pm \;.\;.\;.\;.
\end{array}\right)\delta^2
+ \left\{\begin{array}{l}
+ \frac{1}{2!} \frac{\Delta^3 f(x)}{3\,\Delta x^3} \\
- \frac{(+)(.1)\,3!}{3!} \frac{\Delta^4 f(x)}{4\,\Delta x^4} \times \Delta x \\
+ \;.\;.\;.\;. \\
\pm \frac{(+)(.r-2)\,r!}{r!} \frac{\Delta^{r+1} f(x)}{(r+1)\Delta x^{r+1}} \times \Delta x^{r-2} \\
\mp \;.\;.\;.\;.
\end{array}\right\}\delta^3 \\
+ \left\{\begin{array}{l}
+ \frac{1}{3!} \frac{\Delta^4 f(x)}{4\,\Delta x^4} \\
- \;.\;.\;.\;. \\
\mp \frac{(+)(.r-3)\,r!}{r!} \frac{\Delta^{r+1} f(x)}{(r+1)\Delta x^{r+1}} \times \Delta x^{r-3} \\
\pm \;.\;.\;.\;.
\end{array}\right\}\delta^4
\begin{array}{l}
+ \;.\;.\;.\;. \\
\pm \;.\;.\; \pm \left\{\frac{1}{r!\,(r+1)\,\Delta x^{r+1}} \Delta^{r+1} f(x)\right\}\delta^{r+1} \\
\mp \;.\;.\;. \qquad \mp \;.\;.\;.
\end{array}
\end{array}\right\} \quad (z^{11})$$

En comparant ce développement, pour $\Delta x = 1$, à celui ($z^1$) on pourra écrire la rélation symbolique

$$f(x+\delta) = (1 + \Delta f(x))^\delta ;$$

pourvu qu'on remplace, après avoir développé le 2[d] membre, le 1[er] terme, ou l'unité, par $f(x)$, et que l'on change les exposants de $\Delta f(x)$, en indices de différentiations.

Mais on peut donner une règle mnémonique assez simple pour avoir le développement de $f(x+\delta)$, quelque soit $\Delta x$.

En effet, 1°, développez par rapport aux puissances ascendantes de $\delta$, le binome $\left(1 + \frac{\Delta}{\Delta x}\right)^\delta$ ;

2°. Multipliez tous les termes de ce développement par $f(x)$ ;

3°. Multipliez les termes de chaque série verticale du développement respectivement, par $1$, $\Delta x$, $\Delta x^2$, $\Delta x^3$, etc. ; savoir le 1er terme de chaque série verticale par $1$ ; le 2e par $\Delta x$ ; le 3e par $\Delta x^2$ ; et ainsi de suite.

Or si l'on représente ces opérations consécutives par la formule

$$f(x)\left(1+\frac{\Delta}{\Delta x}\right)^{\delta}(1,\ \Delta x,\ \Delta x^2,\ \ldots)$$

on aura symboliquement

$$f(x+\delta)=f(x)\left(1+\frac{\Delta}{\Delta x}\right)^{\delta}(1,\ \Delta x,\ \Delta x^2,\ \ldots)\,.$$

*B.* Développement de la formule

$$\Delta^n f(x)=f(x+n\,\Delta x)-\frac{n}{1}f(x+\overline{n-1}\,\Delta x)+\ldots\pm f(x)\,,$$

par rapport aux exposants croissants de $\delta$, dans la supposition de $\delta=n\,\Delta x$.

On a donc, en substituant $\delta$,

$$\Delta^n f(x)=f(x+\delta)-\frac{n}{1}f(x+\delta-\Delta x)+\frac{n^{2|-1}}{2!}f(x+\delta-2\,\Delta x)-\text{etc.}\ldots\pm f(x).$$

par conséquent, en introduisant dans cette formule la notation dont nous sommes convenu à la fin du numéro litt. *A*, elle deviendra

$$\left.\begin{aligned}\Delta^n f(x)=&f(x)\left(1+\frac{\Delta}{\Delta x}\right)^{\delta}(1,\ \Delta x,\ \Delta x^2,\ldots)-\frac{n}{1}f(x)\left(1+\frac{\Delta}{\Delta x}\right)^{\delta-\Delta x}(1,\ \Delta x,\ \Delta x^2\ \ldots)\ +\\ &\frac{n^{2|-1}}{2!}f(x)\left(1+\frac{\Delta}{\Delta x}\right)^{\delta-2\Delta x}(1,\ \Delta x,\ \Delta x^2,\ldots)-\text{etc.}\quad\pm f(x).\\ =&f(x)\left(1+\frac{\Delta}{\Delta x}\right)^{\delta}(1,\ \Delta x,\ \Delta x^2\ldots)\left\{1-n\left(1+\frac{\Delta}{\Delta x}\right)^{-\Delta x}+\frac{n^{2|-1}}{2!}\left(1+\frac{\Delta}{\Delta x}\right)^{-2\Delta x}-\ldots\right\}\pm f(x).\end{aligned}\right\}(z^{11})$$

Mais si dans le développement réel, on remplace les puissances

$$(\delta-\Delta x)^1,\ (\delta-\Delta x)^2,\ \text{etc.}\ ;\quad(\delta-2\,\Delta x)^1,\ (\delta-2\,\Delta x)^2,\ \text{etc.}\ ;\quad(\delta-3\,\Delta x)^1,\ (\delta-3\,\Delta x)^2,\ \text{etc.},$$

par leurs valeurs développées, et qu'on ordonne le résultat, par rapport à $\delta$, c'est-à-dire, chaque groupe de termes qui se rapportent au même coëfficient, séparément, pris dans la suite

$$1,\ n,\ \frac{n^{2|-1}}{2\,!},\ \frac{n^{3|-1}}{3\,!},\quad \ldots\ldots;$$

on aura un développement ultérieur dont nous allons indiquer la loi par son terme général, que nous supposons être le $(p+1)^e$ de la formule $(2^{\prime\prime\prime})$.

# TABLE.

On a

$$\Delta^n f(x) = f(x)\left(1+\frac{\Delta}{\Delta x}\right)^{\delta}(1, \Delta x, \Delta x^2, \ldots) - \text{etc.}$$

$$\pm \frac{n^{p/-1}}{p!}\left\{\begin{array}{l}
\left(\begin{array}{l}
f(x) \\
-p\,\Delta x \;\; \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} \\
\left.\begin{array}{l} +p \\ +p^2 \end{array}\right\} \Delta x^2 \dfrac{\Delta^2 f(x)}{2\Delta x^2} \\
\left.\begin{array}{l} -p \\ -\dfrac{(+)(.1)\,2!}{2!} \times p^2 \\ +\dfrac{1}{2!} \times p^3 \end{array}\right\} \Delta x^3 \dfrac{\Delta^3 f(x)}{3\Delta x^3} \\
\left.\begin{array}{l} +p \\ +\dfrac{(+)(.2)\,3!}{3!} \times p^2 \\ +\dfrac{(+)(.1)\,3!}{3!} \times p^3 \\ +\dfrac{1}{3!} \times p^4 \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \Delta x^4 \dfrac{\Delta^4 f(2)}{4\Delta x^4} \\
\left.\begin{array}{l} \pm p \\ \pm\dfrac{(+)(\epsilon-2)(\epsilon-1)!}{(\epsilon-1)!} \times p^2 \\ \pm\dfrac{(+)(.\epsilon-3)(\epsilon-1)!}{(\epsilon-1)!} \times p^3 \\ \pm \text{ etc.} \\ \pm\dfrac{(+)(.1)(\epsilon-1)!}{(\epsilon-1)!} \times p^{\epsilon-1} \\ \pm \dfrac{1}{(\epsilon-1)!} \times p^{\epsilon} \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \Delta x^{\epsilon} \dfrac{\Delta^{\epsilon} f(x)}{\epsilon\,\Delta x^{\epsilon}}
\end{array}\right)\delta^0 \\[2ex]
+\left(\begin{array}{l}
+ \;\; \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} \\
\left.\begin{array}{l} - \\ - \;\; \dfrac{1}{2p} \end{array}\right\} \Delta x \dfrac{\Delta^2 f(x)}{2\Delta x^2} \\
\left.\begin{array}{l} +1 \\ +2\dfrac{(+)(1)\,2!}{2!} \times p \\ +3 \dfrac{1}{2!} \times p^2 \end{array}\right\} \Delta x^2 \dfrac{\Delta^3 f(x)}{3\Delta x^3} \\
\left.\begin{array}{l} -1 \\ -2\dfrac{(+)(.2)\,3!}{3!} \times p \\ -3\dfrac{(+)(.1)\,3!}{3!} \times p^2 \\ -4\dfrac{1}{3!} \times p^3 \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \Delta x^3 \dfrac{\Delta^4 f(x)}{4\Delta x^4} \\
\left.\begin{array}{l} \mp 1 \\ \mp 2\dfrac{(+)(.\epsilon-2)!}{(\epsilon-1)!} \times p \\ \mp 3\dfrac{(+)(.\epsilon-3)(\epsilon-1)!}{(\epsilon-1)!} \times p^2 \\ \mp \text{ etc.} \\ \pm(\epsilon-1)\dfrac{(+)(.1)(\epsilon-1)!}{(\epsilon-1)!} \times p^{\epsilon-2} \\ \mp \epsilon \dfrac{1}{(\epsilon-1)!} \times p^{\epsilon-1} \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \Delta x^{\epsilon-1} \dfrac{\Delta^{\epsilon} f(x)}{\epsilon\,\Delta x^{\epsilon}}
\end{array}\right)\delta^1 \\[2ex]
+\left(\begin{array}{l}
+ \;\; \dfrac{\Delta^2 f(x)}{2\Delta x^2} \\
\left.\begin{array}{l} -1.\dfrac{(+)(.1)\,2!}{2!} \\ -3.\dfrac{1}{2!} \times p \end{array}\right\} \Delta x \dfrac{\Delta^3 f(x)}{5\Delta x^3} \\
\left.\begin{array}{l} +1.\dfrac{(+)(.2)\,3!}{3!} \\ +3.\dfrac{(+)(.1)\,3!}{3!} \times p \\ +6.\dfrac{1}{3!} \times p^2 \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \Delta x^2 \dfrac{\Delta^4 f(x)}{4\Delta x^4} \\
\left.\begin{array}{l} \pm 1\dfrac{(+)(\epsilon-2)(\epsilon-1)!}{(\epsilon-1)!} \\ \pm 3\dfrac{(+)(\epsilon-3)(\epsilon-1)!}{(\epsilon-1)!} \times p \\ \pm \text{ etc.} \\ \dfrac{(\epsilon-1)^{\epsilon/-1}}{2!}\dfrac{(+)(.1)(\epsilon-1)!}{(\epsilon-1)!} p^{\epsilon-3} \\ \dfrac{\epsilon^{2/-1}}{2!}\dfrac{1}{(\epsilon-1)!} \times p^{\epsilon-2} \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \Delta x^{\epsilon-2} \dfrac{\Delta^{\epsilon} f(x)}{\epsilon\,\Delta x^{\epsilon}}
\end{array}\right)\delta^2 \\[2ex]
+ \text{ etc.} \\[2ex]
\left(\begin{array}{l}
\ldots \pm \dfrac{1}{(\omega-1)!} \cdot \dfrac{\Delta^{\omega} f(x)}{\omega\,\Delta x^{\omega}} \\
\left.\begin{array}{l} \pm 1 \dfrac{(+)(.1)\,\omega!}{\omega!} \\ \mp(\omega+1) \times \dfrac{1}{\omega!} p \end{array}\right\} \Delta x \dfrac{\Delta^{\omega+1} f(x)}{(\omega+1)\,\Delta x^{\omega+1}} \\
\left.\begin{array}{l} \pm 1.\dfrac{(+)(.2)(\omega+1)!}{(\omega+1)!} \\ \pm(\omega+1)\dfrac{(+)(.1)(\omega+1)!}{(\omega+1)!} \times p \\ \dfrac{3^{\omega/+1}}{\omega!} \cdot \dfrac{1}{(\omega+1)!} \times p^2 \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \Delta x^2 \dfrac{\Delta^{\omega+2} f(x)}{(\omega+2)\,\Delta x^{\omega+2}} \\
\left.\begin{array}{l} \pm 1.\dfrac{(+)(r-1)(\omega+r-2)!}{(\omega+r-2)!} \\ \pm(\omega+1)\dfrac{(+)(.r-2)(\omega+r-2)!}{(\omega+r-2)!} \times p \\ \pm\dfrac{3^{\omega/+1}}{\omega!} \times \dfrac{(+)(.r-3)(\omega+r-2)!}{(\omega+r-2)!} \times p^2 \\ \pm\dfrac{4^{\omega/+1}}{\omega!} \times \dfrac{(+)(.r-4)(\omega+r-2)!}{(\omega+r-2)!} \times p^3 \\ \pm \text{ etc.} \\ \pm\dfrac{r-1^{\omega/+1}}{\omega!} \times \dfrac{(+)(.1)(\omega+r-2)!}{(\omega+r-2)!} \times p^{r-2} \\ \pm\dfrac{r^{\omega/+1}}{\omega!} \cdot \dfrac{1}{\omega+r-2\,!} \times p^{r-1} \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \Delta x^{r-1} \dfrac{\Delta^{\omega+r-1} f(x)}{(\omega+r-1)\,\Delta x^{\omega+r-1}}
\end{array}\right)\delta^{\omega} \\[2ex]
+ \text{ etc.}
\end{array}\right.$$

*N. B.* Le coëfficient de $\delta^{\omega}$, qui se compose d'une infinité de groupes de termes n'est calculé que jusqu'au $r^e$ groupe.