MÉMOIRE

SUR

L'APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS

AUX

OPÉRATIONS DU NIVELLEMENT TOPOGRAPHIQUE;

PAR

M. A. MEYER,

DOCTEUR EN SCIENCES, PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE BRUXELLES, EMPLOYÉ AU DÉPÔT DE LA GUERRE.

(Présenté à la séance du 6 février 1847.)

MÉMOIRE

SUR

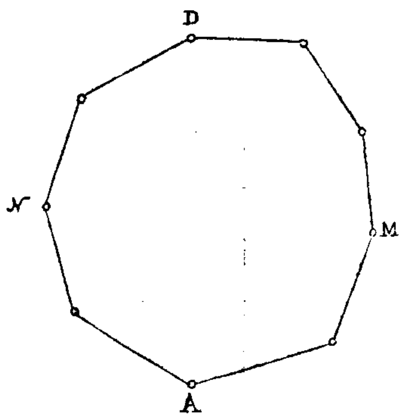
L'APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS

AUX

OPÉRATIONS DU NIVELLEMENT TOPOGRAPHIQUE.

§ 1er.

Objet de ce Mémoire.



La question qui forme l'objet de ce travail est la suivante :

« En partant d'un point D dont la cote est donnée, on se propose de » déterminer, par un nivellement topographique, la cote d'un point A.

» A cet effet, on chemine d'abord de D vers le point A en passant par le
» point M, puis de D vers A en passant par le point N. Les cotes obtenues
» pour le point A, en conséquence de ces deux acheminements distincts,
» diffèrent entre elles d'une petite quantité. Il s'agit de déterminer :

» 1° La cote la plus probable du point A;

» 2° Les cotes les plus probables des points intermédiaires de chacun
» des acheminements suivis. »

Les praticiens suivent encore aujourd'hui, dans ces déterminations, deux méthodes diverses que nous jugeons également insuffisantes. Les uns déterminent, par des opérations préliminaires, quel est l'ordre des chiffres décimaux sur l'exactitude desquels il n'est plus permis de compter. Ils répartissent alors sur les cotes intermédiaires la différence entre les deux cotes du point A, en changeant convenablement et arbitrairement les chiffres décimaux incertains des cotes intermédiaires.

Cette pratique, très-expéditive il est vrai, manque néanmoins de rigueur; elle n'est basée sur aucune exigence scientifique, et ne donne ni la cote la plus probable du point A, ni celles des points intermédiaires. Elle a pour but empirique de changer arbitrairement les cotes intermédiaires, de manière à rendre identiques les deux cotes du point A.

D'autres observateurs, enfin, prennent la moyenne arithmétique des deux cotes de A pour la cote définitive de ce point, et distribuent la différence aux cotes intermédiaires, proportionnellement aux distances qui séparent les points intermédiaires. Le procédé n'est exact que dans un cas très-particulier, qui se présente rarement, et dont nous parlerons bientôt.

Enfin, en 1837, M. Hagen, architecte à Berlin, a publié un traité élémentaire sur le calcul des probabilités, dans le but spécial de montrer quel est l'usage de la théorie des moindres carrés dans quelques opérations de géométrie et de mécanique pratiques. Il consacre, à la page 151 de cet ouvrage, un chapitre entier de plus de cent pages aux applications des probabilités aux procédés du nivellement. Le but principal de ce travail consiste dans un résumé d'un grand nombre d'observations variées, faites avec l'intention d'en déduire l'erreur moyenne de son niveau. La question dont il s'agit dans ce mémoire, n'est pas même mentionnée dans l'ouvrage de M. Hagen; nous pouvons, en conséquence, la présenter comme neuve; de plus, son utilité et son but pratique sont incontestables; elle est donc, sous tous les rapports, digne de fixer l'attention des savants illustres dont se compose la classe des sciences de l'Académie de Bruxelles.

Nous avons partagé ce mémoire en deux sections :

Dans la 1re section, nous donnerons les solutions des problèmes qui se rapportent à la première partie, n° 1°, de la question, page 4.

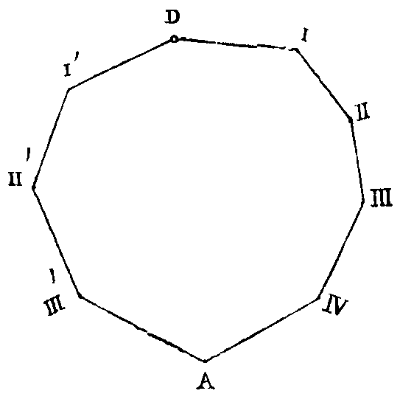
Dans la 2e, enfin, nous résoudrons tous les problèmes relatifs au n° 2° de cette question.

Nous avons ajouté à ces deux sections une 3e, contenant le rappel des formules connues du calcul des probabilités sur lesquelles nous avons appuyé la solution de nos problèmes.

PREMIÈRE SECTION.

§ 2.

Solution des problèmes qui se rapportent à la première partie, n° 1, de la question, page 4.



Nous supposons :

1° Que les différences de niveau de tous les points intermédiaires I, II, etc., I', II', etc., ont été déterminées avec le même soin et le même instrument;

2° Que les distances DI, I II, etc., DI′, I′ II′, etc., soient toutes différentes;

3° Qu'il y ait plus de points intermédiaires sur l'un des deux acheminements que sur l'autre.

Nous désignerons par d la cote donnée du point D; par Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, respectivement les différences de niveau aux points I, II, III, IV. Par là on a :

$$\begin{array}{llrl}
\text{Cote du point} & & \text{D} & = d \\
\text{»} & \text{»} & \text{I} & = d + \Delta_1 = d_1 \\
\text{»} & \text{»} & \text{II} & = d + \Delta_1 + \Delta_2 = d_2 \\
\text{»} & \text{»} & \text{III} & = d + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = d_3 \\
\text{»} & \text{»} & \text{IV} & = d + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 = d_4.
\end{array}$$

Nommons δ la cote du point A due à l'acheminement D I II III IV A; Δ_5, la différence de niveau en ce point, on aura :

$$\delta = d + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5.$$

En désignant par des accents les lettres des valeurs analogues de l'acheminement D I′ II′ III′ A, on aura :

$$\begin{array}{llrl}
\text{Cote du point} & & \text{D} & = d \\
\text{»} & \text{»} & \text{I}' & = d + \Delta_1' = d_1' \\
\text{»} & \text{»} & \text{II}' & = d + \Delta_1' + \Delta_2' = d_2' \\
\text{»} & \text{»} & \text{III}' & = d + \Delta_1' + \Delta_2' + \Delta_3' = d_3' \\
\text{»} & \text{»} & \text{A} & = d + \Delta_1' + \Delta_2' + \Delta_3' + \Delta_4' = \delta'.
\end{array}$$

Il est inutile d'ajouter que les Δ doivent être pris avec leur signe. L'on voit aussi que les d et les deux δ sont des fonctions linéaires des observations simples marquées par les Δ. Cette remarque est importante; elle nous indique que les déterminations ultérieures de ces quantités doivent se faire selon les principes du n° 15 de la 3e section.

Nous désignerons par m_1, m_2, m_3, m_4 les erreurs moyennes, par p_1, p_2, p_3, p_4 les poids des observations qui se rapportent respectivement aux points I, II, III, IV; par m l'erreur moyenne et par p le poids correspondant du point A, compté sur le premier acheminement.

Nous indiquerons les quantités semblables des points du deuxième acheminement par les mêmes lettres accentuées.

Nous marquerons, enfin, par M la valeur la plus probable de la cote en A; par μ l'erreur moyenne et par P le poids de cette valeur. La matière de cette section sera traitée sous la forme de plusieurs problèmes, rangés dans l'ordre même suivant lequel devront s'effectuer les applications numériques.

§ 4.

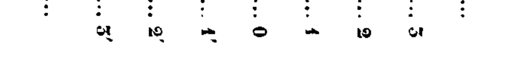
PREMIER PROBLÈME.

Déterminer les valeurs des erreurs moyennes aux points intermédiaires I, II, etc.; I', II', etc.

Les valeurs dont il s'agit doivent être prises dans une table dont l'argument sera la distance. Ces tables seraient de trois colonnes : la première comprendra les distances, la deuxième les erreurs moyennes correspondantes et la troisième les poids. La construction d'une telle table exigerait le concours de deux sortes d'opérations : opérations sur le terrain et opérations de calcul.

Opérations sur le terrain.

Sur un terrain assez uni, on choisira une station 0 convenable, à partir de laquelle on mesurera à la chaîne et avec précision les distances égales $01 = 01'$, $02 = 02'$, etc., puis on plantera des piquets aux points 1, 2, ... 1', 2', ...



Ces points devront être choisis de manière que la plus petite distance $01 = 01'$ soit moindre, et la plus grande supérieure aux distances qui se rencontrent dans la pratique.

On lira ensuite dix fois les indications du niveau, 1° pour chacune des distances 01, 01′, 02, 02′, etc.; 2° pour les distances 11′, 22′, 33′, etc.

Comme les circonstances atmosphériques ont une influence marquée sur les lectures, que d'ailleurs ces opérations demandent un intervalle de plusieurs jours, on ne ferait pas les dix observations pour chaque distance le même jour, mais on les répartirait en plusieurs jours.

Opérations de calcul.

Si dans la formule (12) de la 3e section on fait $p=p'=$ etc. $=1$, elle devient

$$(a). \qquad m=\sqrt{\frac{\Delta^2+\Delta'^2+\ldots}{n-1}}.$$

C'est au moyen de cette formule qu'on forme les valeurs des erreurs moyennes insérées dans la 2e colonne de notre table. Voici son usage :

1° On prendra la moyenne des dix observations de différence de niveau, correspondantes à chacune des distances insérées dans la première colonne;

2° On retranchera de cette moyenne chacune des dix observations qui l'ont fournie, ce qui donnera dix erreurs, marquées par Δ, Δ', Δ'', etc.;

3° On formera la somme des carrés de ces dix erreurs, et on divisera la somme par 9;

4° On extraira la racine carrée du quotient, ce qui donne l'erreur moyenne cherchée. Pour obtenir le poids correspondant à chaque erreur moyenne, on se servira de la formule (13), 3e section,

$$p=\frac{1}{m^2}.$$

Si on construit deux de ces tables, l'une pour les distances 01, 02, etc., l'autre pour les distances 11′, 22′, etc., on pourrait se servir de la première pour le nivellement par l'extrémité, et de la deuxième pour le nivellement par le milieu.

Enfin, en ajoutant à ces tables une colonne de différences premières, on aurait tous les éléments nécessaires pour trouver, soit directement ou par interpolation, l'erreur moyenne et le poids correspondant à une distance donnée.

§ 5.

DEUXIÈME PROBLÈME.

Déterminer pour les cotes δ et δ' les erreurs moyennes m *et* m', *ainsi que les poids correspondants* p *et* p'.

Comme δ et δ' sont des fonctions linéaires, le calcul des valeurs demandées devra se faire d'après les formules (16) et (18) étendues au cas de plus de deux variables.

La formule (16) (3e section) peut se mettre sous la forme

$$P = \frac{pp'}{p+p'} = \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}}, \quad \text{d'où } \frac{1}{P} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}.$$

Donc la formule (16), étendue au cas de plus de deux variables, sera de la forme

$$(16') \dots\dots\dots \frac{1}{P} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{p''} + \text{etc.}$$

De même la formule (18), dans le cas où la fonction X se compose de plus de deux variables, deviendrait

$$(18') \dots \quad \mu = \sqrt{(m^2 + m'^2 + m''^2)}\ \sqrt{(m^2 + m'^2 + m''^2 + \dots)}.$$

Cela posé, comme les erreurs moyennes et les poids correspondants aux points I, II, III, IV, pris dans la table dont nous avons parlé dans le premier problème, sont respectivement m_1, m_2, m_3, m_4, m_5; p_1, p_2, p_3,

p_4, p_5, on aura, pour déterminer le poids p de δ, la formule

$$(a) \ldots\ldots\ldots \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_5},$$

déduite de (16′)

Ensuite, pour déterminer l'erreur moyenne m de δ, on a, d'après (18′),

$$(b) \ldots\ldots\ldots \quad m = \sqrt{(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + m_5^2)}.$$

On voit aisément que le poids p' et l'erreur moyenne m' de la fonction δ' sont donnés par les formules

$$(a') \ldots\ldots\ldots \quad \frac{1}{p'} = \frac{1}{p_1'} + \frac{1}{p_2'} + \frac{1}{p_3'} + \frac{1}{p_4'}$$

$$(b') \ldots\ldots\ldots \quad m' = \sqrt{(m_1'^2 + m_2'^2 + m_3'^2 + m_4^2)}.$$

Remarquons que si les distances du premier acheminement étaient égales, et que la même particularité se présentât dans les distances de l'autre direction, on aurait

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_5, \quad p_1 = p_2 = \ldots = p_5$$
$$m_1' = m_2' = \ldots = m_4, \quad p_1' = p_2' = \ldots = p_4'.$$

Ces nouvelles valeurs changeraient les relations (a), (b), (a'), (b') en celles-ci :

$$m = m_1 \sqrt{5}, \quad \frac{1}{p} = \frac{5}{p_1}$$
$$m' = m_1' \sqrt{4}, \quad \frac{1}{p'} = \frac{4}{p_1'},$$

Si, de plus, les distances de l'un et de l'autre acheminement étaient égales entre elles, on aurait

$$m = m_1 \sqrt{5}, \quad \frac{1}{p} = \frac{5}{p_1}$$
$$m' = m_1 \sqrt{4}, \quad \frac{1}{p'} = \frac{4}{p_1}.$$

§ 6.

TROISIÈME PROBLÈME.

Étant donnés δ et δ', leurs poids p *et* p′, *et leurs erreurs moyennes* m, m′; *on demande la cote la plus probable du point A, ou M; de plus l'erreur moyenne μ, et le poids P de M.*

Déterminer M.

Soient Δ et Δ' respectivement les petites erreurs qu'il faudrait ajouter à δ et δ' pour avoir M, on aurait

$$\Delta = \mathrm{M} - \delta, \quad \Delta' = \mathrm{M} - \delta'.$$

La formule (11) devient, dans ce cas :

$$(11). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{U} = \frac{hh'}{\sqrt{\pi^2}} e^{-\frac{\rho^2}{\omega^2}(p\Delta^2 + p'\Delta'^2)},$$

Elle exprime la probabilité de l'existence simultanée des erreurs Δ et Δ'.

Cette probabilité deviendra la plus grande possible, si l'on pose

$$\frac{\rho^2}{\omega^2}(p\Delta^2 + p'\Delta'^2) = \text{minimum}.$$

On tire de là, en différentiant :

$$p\Delta + p'\Delta' = o, \quad \text{ou} \quad p(\mathrm{M} - \delta) + p'(\mathrm{M} - \delta') = o.$$

De cette dernière on tire,

$$\mathrm{M} = \frac{p\delta + p'\delta'}{p + p'} = \frac{m'^2\delta + m^2\delta'}{m'^2 + m^2};$$

C'est la valeur cherchée.

Si les deux acheminements se composaient d'un même nombre de points équidistants, on aurait $p = p'$, $m = m'$, et par suite, la formule précédente se réduirait à

$$M = \frac{\delta + \delta'}{2}.$$

Déterminer μ.

On a par la formule (18)

$$\mu = \sqrt{(m^2 + m'^2)};$$

En effet, M est une fonction linéaire des deux valeurs δ et δ'.

La valeur μ exprime, du reste, que la vraie valeur de la cote du point A ne peut pas dépasser les limites

$$M - \mu, \quad \text{et} \quad M + \mu.$$

De même m exprime que dans une nouvelle détermination de δ il n'y aurait pas à craindre de trouver, à force d'erreurs inévitables, une valeur de δ plus petite que $\delta - m$, ou plus grande que $\delta + m$.

Il en est de même pour m', par rapport à δ'.

Déterminer P.

Comme M est une fonction linéaire de δ et de δ', on a par la formule (16)

$$P = \frac{pp'}{p + p'} = \frac{1}{m^2 + m'^2}.$$

DEUXIÈME SECTION.

Solution des problèmes qui se rapportent à la deuxième partie, n° 2°, de la question page 1.

§ 7.

PREMIER PROBLÈME.

Déterminer les valeurs les plus probables des cotes des points I, II, III, IV, A.

Pour résoudre ce problème, on devra supposer que la cote du point D est exacte.

Désignons par

$$(1),\quad (2),\quad (3),\quad (4),\quad (5),$$

les petites corrections inconnues à apporter aux différences de niveau

$$\Delta_1,\quad \Delta_2,\quad \Delta_3,\quad \Delta_4,\quad \Delta_5;$$

on aura, pour les cotes exactes des points désignés, les expressions suivantes :

Cote exacte du point $\mathrm{I} = d + \Delta_1 + (1) = (d_1)$,

» » $\mathrm{II} = d + \Delta_1 + \Delta_2 + (1) + (2) = (d_2)$,

» » $\mathrm{III} = d + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + (1) + (2) + (3) = (d_3)$,

» » $\mathrm{IV} = d + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + (1) + (2) + (3) + (4) = (d_4)$,

» » $\mathrm{V} = d + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5 + (1) + (2) + (3) + (4) + (5) = (d_5)$,

ou bien, en combinant avec ces valeurs celles du § 3, on aura simplement

$$(c)\ \ldots\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} (d_1) = d_1 + (1) \\ (d_2) = d_2 + (1) + (2) \\ (d_3) = d_3 + (1) + (2) + (3) \\ (d_4) = d_4 + (1) + (2) + (3) + (4) \\ (d_5) = \delta + (1) + (2) + (3) + (4) + (5). \end{array}\right.$$

la question est ramenée par là à la détermination des inconnus

$$(1),\quad (2),\quad (3),\quad (4),\quad (5).$$

Pour déterminer ces valeurs, on a déjà l'équation

$$\mathrm{M} = \delta + (1) + (2) + (3) + (4) + (5),$$

de laquelle on tire successivement

$$\mathrm{M} - \delta = \Delta = (1) + (2) + (3) + (4) + (5)$$

$$(\alpha)\ \ldots\ldots\ldots\ o = \Delta = (1) + (2) + (3) + (4) + (5),$$

Δ devant être pris avec son signe.

On a fait $\Delta = \delta - M$.

On a de plus, conformément à la doctrine des moindres carrés,

$$(\beta) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad (1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + (4)^2 + (5)^2 = \text{minimum}.$$

En différentiant les équations (α) et (β), on a respectivement :

$$(1) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad o = d(1) + d(2) + d(3) + d(4) + d(5)$$

$$(2) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad o = (1)d(1) + (2)d(2) + (3)d(3) + (4)d(4) + (5)d(5).$$

Multiplions (1) par l'indéterminée I, il vient :

$$(3) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad o = \mathrm{I}d(1) + \mathrm{I}d(2) + \mathrm{I}d(3) + \mathrm{I}d(4) + \mathrm{I}d(5);$$

identifions (2) et (3), on obtient :

$$(\gamma) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad (1) = \mathrm{I},\quad (2) = \mathrm{I},\quad (3) = \mathrm{I},\quad (4) = \mathrm{I},\quad (5) = \mathrm{I}.$$

Mais les poids des observations Δ_1, Δ_2, Δ_3, etc., étant respectivement p_1, p_2, p_3, etc., on a, à la place de l'équation (β),

$$p_1(1)^2 + p_2(2)^2 + p_3(3)^2 + p_4(4)^2 + p_5(5)^2 = \text{minimum},$$

ce qui fera changer les équations (8) en celles-ci :

$$(\delta) \;.\;.\;.\quad (1) = \frac{\mathrm{I}}{p_1},\quad (2) = \frac{\mathrm{I}}{p_2},\quad (3) = \frac{\mathrm{I}}{p_3},\quad (4) = \frac{\mathrm{I}}{p_4},\quad (5) = \frac{\mathrm{I}}{(p_5)}.$$

En substituant ces valeurs dans (α), il vient :

$$o = \Delta + \mathrm{I}\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_5}\right) = \Delta + \mathrm{I}\left(\frac{1}{p}\right).$$

On fait ici pour abréger

$$\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots. + \frac{1}{p_5};$$

on a donc

$$\mathrm{I} = -\frac{\Delta}{\left(\frac{1}{p}\right)}.$$

En substituant cette valeur dans les équations (δ), on obtient :

$$(1) = -\frac{\Delta}{p_1\left(\frac{1}{p}\right)},\ (2) = -\frac{\Delta}{p_2\left(\frac{1}{p}\right)},\ (3) = -\frac{\Delta}{p_3\left(\frac{1}{p}\right)},$$

$$(4) = -\frac{\Delta}{p_4\left(\frac{1}{p}\right)},\ (5) = -\frac{\Delta}{p_5\left(\frac{1}{p}\right)}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les formules (c), on obtient pour les cotes les plus probables cherchées

$$(d_1) = d_1 - \frac{\Delta}{p_1\left(\frac{1}{p}\right)}$$

$$(d_2) = d_2 - \frac{\Delta}{\left(\frac{1}{p}\right)}\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}\right)$$

$$(d_3) = d_3 - \frac{\Delta}{\left(\frac{1}{p}\right)}\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}\right)$$

$$(d_4) = d_4 - \frac{\Delta}{\left(\frac{1}{p}\right)}\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4}\right)$$

$$(d_5) = \delta - \frac{\Delta}{\left(\frac{1}{p}\right)}\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_5}\right) = \delta - \Delta = \mathrm{M}.$$

L'on voit aisément ce que deviendraient ces formules, 1° si on supposait les points I, II, etc., équidistants, 2° si à la place des poids p_1, p_2, etc., on introduisait les erreurs moyennes m_1, m_2, etc.

§ 8.

DEUXIÈME PROBLÈME.

Déterminer les cotes les plus probables des points I', II', etc., dues au second acheminement.

En suivant la marche qui a présidé à la solution du premier problème, il est facile de voir qu'on arrivera aux valeurs demandées par les formules :

$$(d_1') = d_1' - \frac{\Delta'}{\left(\frac{1}{p'}\right) p'_1}$$

$$(d_2') = d_2' - \frac{\Delta'}{\left(\frac{1}{p'}\right)} \left(\frac{1}{p_1'} + \frac{1}{p_2'}\right)$$

$$(d_3') = d_3' - \frac{\Delta'}{\left(\frac{1}{p'}\right)} \left(\frac{1}{p_1'} + \frac{1}{p_2'} + \frac{1}{p_3'}\right)$$

$$(d_4') = \delta' - \frac{\Delta'}{\left(\frac{1}{p'}\right)} \left(\frac{1}{p_1'} + \frac{1}{p_2'} + \frac{1}{p_3'} + \frac{1}{p_4'}\right) = \delta' - \Delta' = \mathrm{M}.$$

Si l'on faisait tous les p égaux entre eux et à l'unité, ce qui revient à supposer les points équidistants, si, de plus, on supposait les points des deux acheminements égaux en nombre des deux côtés, les formules finales des deux problèmes se simplifieraient considérablement, et il est aisé de voir ce qu'elles deviendraient alors.

NOTES

CONTENANT LE RAPPEL DES FORMULES DU CALCUL DES PROBABILITÉS NÉCESSAIRES A LA SOLUTION DE LA QUESTION DE LA PAGE I.

1.

Les formules dont il s'agit ont été démontrées d'abord par Gauss, dans le tome I de son ouvrage *De motu corporum cœlestium*. Elles ont été exposées depuis d'une manière simple et claire par Encke, dans l'*Annuaire astronomique de Berlin*, année 1834. Nous renvoyons spécialement à cet ouvrage les personnes curieuses de suivre les démonstrations des résultats que nous allons donner (*).

2.

Soit Δ l'erreur d'une observation, $\varphi\Delta$ la probabilité correspondante, on a (Encke, p. 268) :

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \varphi\Delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2}.$$

La constante h est, d'après Gauss, la mesure de la précision de l'observation; elle augmente, en effet, proportionnellement à cette précision (p. 272).

3.

Soient

$$\varphi\Delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2}, \quad \varphi\Delta' = \frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h'^2 \Delta'^2}, \text{ etc.,}$$

Soit U la probabilité que les erreurs Δ, Δ', etc., subissent ensemble, on aura (p. 256) :

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad U = \frac{hh'}{\sqrt{\pi^n}} e^{-(h^2\Delta^2 + h'^2\Delta'^2 + \ldots)},$$

(*) Voir aussi sur la même matière :
LAPLACE, *Thé. analy. des proba.*, liv. II, ch. 4, 5, 8, 9. Suppl. 1, 2, 3.
POISSON, *Mém. sur la proba. des résult. moy. des observ.*
Connais. des temps, 1827 et 1832.
FOURIER, *Mém. sur les résultats moyens*, tom. IV, des *Recherches statisti. sur la ville de Paris*; 1829.

Le nombre des erreurs Δ, Δ',... est égal à n.

4.

La probabilité qu'une erreur Δ tombe entre les limites a et b est exprimée par

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_a^b e^{-h^2\Delta^2}\,d\Delta\;;$$

pour

$$t = h\Delta,$$

La même expression devient

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t=ah}^{t=bh} e^{-t^2}\,dt\;;$$

et si l'on prend cette intégrale entre $-ah$ et $+ah$, elle sera (p. 269) :

$$(3) \qquad \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{t=o}^{t=ah} e^{-t^2}\,dt.$$

Soit ρ la valeur de t, pour laquelle

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_o^\rho e^{-t^2}\,dt = \tfrac{1}{2},$$

on trouve, par l'interpolation,

$$\rho = 0{,}476936.$$

5.

Comme on a $t = h\Delta$, si nous désignons par r la valeur de Δ, pour laquelle $t = \rho$, on aura (p. 270) :

$$(4) \qquad \rho = hr, \quad \text{d'où} \quad h = \frac{\rho}{r}.$$

La quantité r se nomme *l'erreur probable*. C'est celle qui a autant de petites erreurs qui lui sont inférieures, que de grandes erreurs qui dépassent sa valeur.

Si l'on connaît r pour une espèce d'observation, on pourra parier 1 contre 1, qu'en faisant une observation de cette espèce, le résultat sera moindre que r.

6.

De ce que $h = \frac{\rho}{r}$, on a aussi $h' = \frac{\rho}{r'}$, d'où :

$$(5) \quad \ldots\ldots\ldots \quad r : r' :: h' : h.$$

7.

Soient

$$\varphi\Delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-h^2\Delta^2} d\Delta, \quad \varphi\Delta' = \frac{h'}{\sqrt{\pi}} \int_{a'}^{b'} e^{-h'^2\Delta'^2} d\Delta'.$$

Si l'on suppose $a = a'$, $b = b'$, il y aura entre a et b autant d'erreurs Δ, qu'il y en a de Δ' entre a' et b'; on aura alors $h^2\Delta^2 = h'^2\Delta'^2$, donc (p. 272)

$$(6) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \Delta : \Delta' :: h' : h.$$

8.

Pour déterminer la valeur la plus probable d'une quantité x, on fait p observations n, n', n'', etc.; on a alors

$$\Delta = x - n, \quad \Delta' = x - n', \quad \Delta'' = x - n'', \text{ etc.},$$

A ces erreurs répondront les probabilités

$$\varphi\Delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2}, \quad \varphi\Delta' = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta'^2}, \quad \varphi\Delta'' = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta''^2}, \text{ etc.}$$

La probabilité pour que ces erreurs aient lieu ensemble sera

$$\frac{h^h}{\sqrt{\pi^p}} e^{-h^2(\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \ldots)}.$$

Cette probabilité sera la plus grande possible pour

$$\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 = \text{minimum};$$

d'où l'on tire (p. 276)

$$\Delta + \Delta' + \Delta'' + \ldots = o$$

$$(7) \quad \ldots\ldots\ldots \quad x = \frac{n + n' + n'' + \ldots}{p}.$$

9.

La probabilité pour que la valeur de x, donnée par (7), soit fautive de Δ est exprimée par (pages 277, 278)

$$(8) \ldots\ldots \quad \varphi\Delta = \frac{H}{\sqrt{\pi}}\, e^{-hp^2\Delta^2}, \quad H = h\sqrt{p}.$$

10.

On nomme *poids* d'une valeur le nombre des observations également exactes d'une même espèce, requis pour que leur moyenne arithmétique ait la même précision que la valeur donnée. La précision de chaque observation simple est prise pour unité.

D'après cela, le poids de x est p; ce nombre exprime que x a p fois plus de précision qu'une observation simple.

11.

$H = h\sqrt{p}$ est la mesure de la précision de x donné par (7). On tire de (8)

$$p = \frac{H^2}{h^2}, \quad \text{ou} \quad p = H^2,$$

en prenant h pour unité de précision.

Pour une autre détermination de x, dépendant de p' observations, on aurait

$$p' = \frac{H'^2}{h^2} \quad \text{ou} \quad p' = H'^2.$$

On a donc

$$(9) \ldots\ldots \quad p : p' :: H^2 : H'^2.$$

Les poids sont comme les carrés des précisions.

Si l'on désigne par k et k' les erreurs probables de deux moyennes arithmétiques de la forme $x = \frac{n+n'+n''+\ldots}{p}$, on aura par la formule (5)

$$R : R' :: H' : H.$$

Donc, à cause de (9),

$$(10) \ldots\ldots \quad p : p' :: R'^2 : R^2.$$

Les poids sont en raison réciproque des carrés des erreurs probables.

12.

On peut introduire les poids dans la formule (2), car on a

$$h^2 = \frac{\rho^2}{r^2}, \quad h'^2 = \frac{\rho^2}{r'^2}, \text{ etc.}$$

Soit ω l'erreur probable d'une observation dont le poids est 1, on aura, par la formule (10),

$$1 : p :: r^2 : \omega^2, \quad 1 : p' :: r'^2 : \omega^2, \text{ etc.};$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{r^2} = \frac{p}{\omega^2}, \quad \frac{1}{r'^2} = \frac{p'}{\omega^2}, \text{ etc.};$$

donc

$$h^2 = \frac{\rho^2}{\omega^2}\, p, \quad h'^2 = \frac{\rho^2}{\omega^2}\, p', \text{ etc.}$$

On a donc, à la place de la formule (2), la suivante :

$$(11) \ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{U} = \frac{hh'\ldots}{\sqrt{\pi^n}}\, e^{-\frac{\rho^2}{\omega^2}(p\Delta^2 + p'\Delta'^2 + \ldots.)}.$$

13.

Soit m l'écart moyen d'une observation de sa valeur vraie V, on trouve (page 284)

$$(12) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad m = \sqrt{\frac{p\Delta^2 + p'\Delta'^2 + \ldots.}{n - 1}},$$

n est le nombre des observations faites pour obtenir la valeur la plus probable de V.

De (12) on tire

$$(n - 1)m^2 = p\Delta^2 + p'\Delta'^2 + \ldots.$$

par là (11) devient

$$\mathrm{U} = \frac{hh'\ldots}{\sqrt{\pi^n}}\, e^{-\frac{\rho^2}{\omega^2}(n-1)m^2}.$$

Il suit de là que $n - 1$ observations d'une même précision, ayant toutes pour erreur m, donnent la même probabilité que n observations, ayant des erreurs inégales Δ, Δ', etc., et des précisions diverses.

La quantité m se nomme *l'erreur moyenne*.

14.

Des formules (6) et (9) on tire

$$p : p' :: \Delta'^2 : \Delta^2,$$

donc pour $\Delta = m$, $\Delta' = m'$, on a

$$(12) \quad \ldots\ldots \quad p : p' :: m'^2 : m^2.$$

Les poids sont réciproques aux carrés des erreurs moyennes. On a donc

$$(13) \quad \ldots\ldots \quad p = \frac{1}{m^2}.$$

15.

Soit X une fonction linéaire de la forme

$$X = x + x'.$$

Soient a et a' respectivement les valeurs les plus probables de x et de x'; soient p et p' les poids, r et r' les erreurs probables de a et de a', la probabilité de X sera exprimée par (page 301)

$$(14) \quad \ldots\ldots \quad \frac{h}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{pp'}{p+p'}}\, e^{-h^2 \frac{pp'}{p+p'}(X-a-a')^2}.$$

Cette probabilité devient un maximum pour

$$(15) \quad \ldots\ldots \quad X = a + a'.$$

C'est la valeur la plus probable de X.

Le poids P de cette valeur sera exprimé par

$$(16) \quad \ldots\ldots \quad P = \frac{pp'}{p+p'}.$$

Soit k l'erreur probable de la valeur de X donnée par (15), si ω exprime l'erreur probable d'une observation qui a l'unité pour poids, on aura

$$1 : P :: R^2 : \omega^2;$$

d'où

$$(17). \quad \ldots \quad R = \frac{\omega}{\sqrt{P}}\,\omega = \sqrt{\frac{p+p'}{pp'}} = \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{p} + \frac{\omega^2}{p'}\right)} = \sqrt{r^2 + r'^2}.$$

Soit μ l'erreur moyenne de X donnée par (15) et soient m et m' les erreurs moyennes des valeurs a et a', on aura par (13)

$$P = \frac{1}{\mu^2}, \quad p = \frac{1}{m^2}, \quad p' = \frac{1}{m'^2}.$$

$$pp' = \frac{1}{mm'^2}, \quad p + p = \frac{m^2 + m'^2}{m^2 m'^2}.$$

Donc

$$P = \frac{pp'}{p+p'} = \frac{1}{m^2 + m'^2} = \frac{1}{\mu^2};$$

d'où

(18) . . . . $\mu = \sqrt{(m^2 + m'^2)}.$

FIN.