EXAMEN CRITIQUE

DE

LA NOTICE DE M. LIAGRE

SUR

LA PROBABILITÉ DE LA CAUSE D'UNE ERREUR CONSTANTE

DANS UNE SÉRIE D'OBSERVATIONS,

INSÉRÉE DANS LE T. XXII DU BULLETIN DE L'ACADÉMIE DE BELGIQUE,

PAR

A. MEYER.

LIÉGE,
H. DESSAIN, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,
PLACE ST.-LAMBERT.

1857.

AVANT-PROPOS.

1.

Il peut être quelquefois avantageux d'empêcher la publication d'un écrit, qui paraît gênant ; mais il est du moins peu honorable de diffamer ensuite, sous main, le travail qu'on a prudemment écarté; et n'est-il pas alors du devoir de l'auteur de se prémunir, par la publicité, contre des bruits préjudiciables répandus par la malveillance.

Aussi, lorsque l'année dernière, l'Académie a jugé, dans sa sagesse, qu'il ne lui convenait pas d'insérer mon examen critique, dans ses recueils, l'idée ne me serait jamais venue de le publier moi-même, si je n'avais entendu dire de tous côtés, que mes appréciations du mémoire de M. Liagre n'étaient qu'un pur verbiage sans valeur.

Mon honneur compromis exige que j'en appelle au jugement du public compétent.

2.

J'ignore, et veux ignorer les raisons intimes qui ont guidé l'Académie dans sa décision, toutefois je dois repousser le motif apparent qu'elle a fait valoir à l'appui de son refus.

Je demanderais donc à MM. Lamarle, Timmermans et Schaar, nommés commissaires pour rendre compte de ma critique, si effectivement ils ont cru voir, comme ils l'avançaient, une erreur matérielle dans mon travail, consistant en ce que j'emploie le mot d'*erreur constante* partout où M. Liagre se sert de celui d'*erreur régulière ?* mais si je n'ai pas de motifs de suspecter leur bonne foi, cette objection, que je dois regarder comme sincère, prouve-t-elle alors en faveur de leurs lumières? Tout le monde sait, et je le leur ai fait observer, que les deux termes s'emploient indifféremment pour désigner une même chose, savoir des erreurs non-fortuites ! (*)

Puisque, nonobstant cette remarque, qui n'admet pas de réplique, mon écrit a été rélégué dans les cartons de l'Académie, serait-ce le fond même de mon travail auquel il faudrait attribuer la cause de cette disgrâce? que sais-je; dans tous les cas, il convient de mettre en relief les points principaux sur lesquels porte ma critique.

1°.

M. Liagre s'est trompé s'il a cru aborder une matière neuve. Il faut croire que les rapporteurs de son travail, les mêmes auxquels l'examen de ma critique a été livré, ont, sans doute par distraction, oublié d'observer que Laplace avait résolu depuis longtemps la question que se proposait de traiter M. Liagre, comme il est facile de s'en convaincre en consultant la théorie analytique des probabilités, pages 353, 361, 383, 551, 552 de l'édition de 1847.

2°.

Le moyen de solution, ou le point de départ des recherches de M. Liagre est mal choisi; et en effet il n'accuse pas autre chose qu'une certaine distribution des *erreurs accidentelles*.

Car si O_i désigne les n observations effectives, μ_1, l'erreur régulière, ε_i, les n erreurs accidentelles, et si O représente la vraie valeur de la chose observée, on aura, pour chaque observation, une équation de la forme :

$$O_i = \mu_1 + O + \varepsilon_i,$$

(*) En effet voici comment Gauss définit ces erreurs :

« Il existe au contraire d'autres causes qui, dans toutes les observations de même nature, produisent une erreur identique ou dépendant de circonstances essentiellement liées au résultat de l'observation. Nous appellerons les erreurs de cette catégorie des erreurs *constantes* ou régulières.

(Voy. les mémoires sur la méthode des moindres carrés par Gauss, traduits par J. Bertrand, page 2.)

ε_i pouvant être positif, ou négatif.

Donc, en retranchant chaque observation de celle qui la précède immédiatement dans la série des n observations

$$\begin{array}{l} O_1 = \mu_1 + 0 + \varepsilon_1 \\ O_2 = \mu_1 + 0 + \varepsilon_2 \\ :: \; :: \; :: \; :: \\ O_n = \mu_1 + 0 + \varepsilon_n, \end{array}$$

le résultat, ou la suite

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2,\ \varepsilon_3 - \varepsilon_2, \ldots\ \varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}\ , \quad (1)$$

se rapportera uniquement, on le voit, à la succession, ou à la distribution des erreurs accidentelles.

3°.

La formule principale de M. Liagre est fautive. En effet, il regarde comme certaine la possibilité d'une succession de signes, telle que celle de la suite (1), tandis que cette possibilité n'est que probable et sa probabilité doit être, avant tout, déterminée à postériori, par l'observation, conformément au théorème inverse de Bernoulli.

4°.

La formule de M. Liagre rectifiée n'est d'aucun usage pratique, si elle n'est pas illusoire, et impossible à réaliser numériquement. En effet, en quoi la science ou la pratique auraient-elles intérêt à connaître la probabilité que la distribution des erreurs accidentelles, considérée comme phénomène extraordinaire, est due à une cause, en supposant toutefois qu'une distribution d'erreurs accidentelles puisse avoir une cause et qu'il n'y ait pas contradiction dans ces termes? D'ailleurs, comment traduire la formule en nombre? Il faudrait d'abord déterminer, par un très-grand nombre d'observations, la probabilité dont il a été question ci-dessus, ce qui serait presque toujours impraticable.

Voilà les points principaux de ma critique, qui n'est pas dirigée contre M. Liagre, mais contre sa doctrine. J'estime autant que qui que ce soit le zèle et le mérite de ce savant.

Cet écrit diffère probablement un peu quant à la rédaction, de celui que j'ai envoyé à l'Académie; car j'ai dû le recomposer sur quelques notes incomplètes, ma demande, où je réclamais le manuscrit original, ayant été écartée.

Aussi, pour être consciencieux, dois-je déclarer que je ne regarde pas cette notice comme la reproduction fidèle de la pièce que j'ai communiquée, sous le même titre, à l'Académie; quoique je puisse assurer que le fond de mes arguments, à quelques légers changements près, n'a pas subi d'altération.

EXAMEN CRITIQUE

DE

LA NOTICE DE M. LIAGRE

SUR

LA PROBABILITÉ DE LA CAUSE D'UNE ERREUR CONSTANTE

DANS UNE SERIE D'OBSERVATIONS.

Je me propose de faire voir dans cet écrit que la formule principale, donnée par M. Liagre dans son mémoire sur la probabilité d'une erreur constante dans une série d'observations, inséré dans le n° 7, T. XXII du bulletin de l'Académie, ne me parait pas résoudre le problème que l'auteur s'est proposé ; qu'elle semble, de plus, exiger une rectification pour être conforme aux règles du calcul des probabilités, et qu'alors même il ne parait pas qu'elle puisse être d'aucune utilité pratique.

Eu égard à l'importance du sujet, j'ai lieu d'espérer qu'on fera bon accueil à ce travail. Il serait, en effet, à craindre que des observateurs, pleins d'une juste confiance dans l'autorité qu'inspire le nom de l'auteur, n'appliquassent, sans examen préalable, les procédés de M. Liagre, et ne soient ainsi conduits à faire des recherches inutiles.

La question, au reste, n'est pas neuve, comme le pensait M. Liagre; elle a été traitée par Laplace, et je donnerai, d'après les idées de ce géomètre, dans la première partie de ce travail, la vraie solution du problème ; la 2e partie sera plus spécialement consacrée à la critique, et à la rectification de la formule de M. Liagre.

1re Partie.

L'auteur du mémoire que j'examine comprend dans son travail la recherche de la probabilité de deux sortes de causes, savoir de celles qui se rapportent à des faits physiques et de causes d'erreurs constantes, dus aux instruments qui servent à l'observation. A la première classe appartiennent les causes de certains phénomènes dont l'étendue est presque toujours comprise dans les limites des perturbations, produites par les causes accidentelles, ou les erreurs des observations. Tels sont, par exemple, les variations diurnes des hauteurs barométriques, les petites inégalités des mouvements célestes, les marées atmosphériques, etc. A cette classe appartiennent les exemples des pages 37 et 47 du mémoire de M. Liagre, tandis que ceux des pages 17 et 18 doivent être rangés dans l'autre catégorie de causes.

Nous aurons donc à nous occuper, quant à la première catégorie, des probabilités de l'existence de ces causes, et de leur étendue, quant à l'autre classe, nous indiquerons le moyen de constater l'existence des erreurs constantes dans une série d'observations ; nous dirons comment on peut déterminer les valeurs les plus plausibles de ces erreurs, et la probabilité des limites des erreurs dont ces déterminations restent encore affectées.

Mais avant tout calcul il est nécessaire d'examiner si le nombre des observations est suffisamment grand ; en effet, ce n'est qu'à cette condition qu'est due l'approximation des formules, dont on se sert dans ces calculs. De plus, quand les observations sont fort nombreuses, les effets dus aux causes perturbatrices accidentelles se détruisent, et n'ont aucune influence sur le résultat moyen des observations, qui alors ne laisse subsister que le phénomène dont il s'agit de constater l'existence et l'étendue.

La formule de M. Liagre est indépendante de cette condition indispensable du grand nombre des observations, ce qui, à notre avis, laisse déjà présumer un défaut. Abordons maintenant la question.

Si $\varphi(\varepsilon)$ exprime la probabilité d'une erreur ε, et si a est la limite des erreurs de chaque observation, alors la constante

$$\mu_1 = \int_{-a}^{a} \varepsilon \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

représente la valeur inconnue de l'erreur moyenne vraie. De plus, quand les erreurs sont toutes accidentelles, la fonction $\varphi(\varepsilon)$ est évidemment paire, et l'on a :

$$\varphi(-\varepsilon) = \varphi(\varepsilon),$$

et par suite :

$$\mu_1 = 0.$$

Donc, *quand μ_1 n'est pas nul, les observations seront nécessairement affectées d'une erreur constante, ou régulière.*

Soit O_i la i^e des n observations faites pour découvrir la valeur d'une chose inconnu ξ on aura, par la méthode des moindres carrés, pour la valeur la plus plausible de ξ, l'expression

$$q = \frac{\mathrm{S}o_i}{n},$$

en fesant pour abréger

$$\mathrm{S}O_i = O_1 + O_2 + \ldots + O_n.$$

L'erreur calculée de la i^e observation sera donc

$$\varepsilon_i' = q - O_i,$$

et l'on a, d'après un théorème de Laplace, une probabilité

$$\mathrm{P} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt$$

que l'écart $\xi - q$ est compris entre les limites

$$\pm \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \sqrt{2 \frac{\mathrm{S}\,\varepsilon_i'^2}{n}}.$$

Appliquons ces formules.

(a)

Causes physiques des phénomènes de peu d'étendue.

Supposons que le phénomène, dont il s'agit, ne soit dû qu'à des causes perturbatrices accidentelles, et aux erreurs fortuites des observations, alors μ_1 sera nul, et l'on aura, par le théorème cité de Laplace, une probabilité

$$\mathrm{P} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\gamma}^{\infty} e^{-t^2} dt$$

$$= 1 - \frac{e^{-\gamma^2}}{\gamma \sqrt{\pi}}$$

que $\mathrm{S}o_i = nq$ est compris dans les limites $\pm \gamma \sqrt{n} \sqrt{\frac{2\,\mathrm{S}\,\varepsilon_i'^2}{n}}$, ou que, abstraction faite du signe,

$$\mathrm{S}o_i < \gamma \sqrt{n} \sqrt{\frac{2\,\mathrm{S}\varepsilon_i'^2}{n}}.$$

Si donc on pose

$$\gamma \sqrt{n} \sqrt{\frac{2\,\mathrm{S}\varepsilon_i'^2}{n}} = n\,q,$$

on aura :

$$\gamma = \frac{q\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{2\mathrm{S}\varepsilon_i'^2}{n}}}.$$

Comme il ne s'agit pas ici d'une évaluation exacte de P, on pourra écrire avec Laplace :

$$\frac{\mathrm{S}\varepsilon_i'^2}{n} = \frac{a^2}{3};$$

on a alors

$$\gamma = \frac{q\sqrt{6n}}{2a},$$

et au moins :

$$\mathrm{P} = 1 - \frac{e^{-\frac{3nq^2}{2a^2}}}{\frac{q}{2}\sqrt{\frac{3}{2}n\pi}}.$$

Donc si le terme

$$\frac{1}{\frac{q}{2}e^{\frac{3nq^2}{2a^2}}\sqrt{\frac{3}{2}n\pi}}$$

est très-petit, on est presque certain que, dans l'hypothèse de $\mu_1 = 0$, ou de l'existence de causes purement fortuites, on devra trouver

$$\mathrm{S}o_i < n\,q.$$

Mais puisqu'au contraire l'observation donne

$$\mathrm{S}o_i = n\,q,$$

il est très-vraisemblable que l'on n'a pas $\mu_1 = 0$, et que le phénomène n'est pas le résultat de causes purement accidentelles.

Quant à l'étendue du phénomène, ou à la valeur de ξ, on a la probabilité

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt,$$

que ξ est compris entre

$$\frac{So_i}{n} \pm \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{2 S \varepsilon_i'^2}{n}}.$$

Les formules précédentes, conformes aux règles établies par Laplace dans le Ve chapitre du 2d liv. de son ouvrage sur les probabilités, constituent la vraie théorie de la probabilité des causes des phénomènes naturels de peu d'étendue.

La considération des alternances de signes, telle que la conçoit M. Liagre, n'est d'aucun usage ici. Au reste, on s'assure aisément qu'il doit en être ainsi. Car si des n observations

$$o_1, \quad o_2, .. \; o_n,$$

donnant lieu à une alternance de l'ordre l, on retranche l'erreur constante, les restes

$$o'_1, \; o'_2, \; o'_n,$$

ne seront plus affectés que des erreurs accidentelles, et conduiront évidemment à la même alternance de l'ordre l. Cette alternance n'est donc pas dûe à l'erreur régulière, et ne saurait conduire à la connaissance de celle-ci ; elle dépend uniquement de la succession, ou de la distribution, fortuite, ou non, des erreurs accidentelles.

(b)

Erreurs constantes dûes aux instruments.

Lorsque les erreurs ne sont pas purement fortuites, les erreurs positives et négatives ne se produiront pas avec une même facilité, il subsiste alors une cause constante qui favorise plutôt les erreurs d'un signe que celles du signe contraire. « On s'en assure, d'après Laplace, en fesant la somme des restes positifs et celle des restes négatifs des équations de condition, lorsqu'on y aura substitué les valeurs des éléments déterminés par la méthode la plus avantageuse. » Dans ce cas, pour obtenir μ_1, il faut, toujours d'après Laplace, ajouter aux équations de condition l'élément inconnu μ_1, en lui donnant pour coëfficient l'unité. » On trouve alors la valeur de μ_1, comme celle des autres inconnues, en résolvant les équations de condition par la méthode la plus avantageuse. On obtient alors aussi, par les formules de Laplace, exposées dans le IV^e chapitre de son ouvrage sur les probabilités, les limites qui renferment les erreurs dont cette détermination de μ_1, est encore susceptible, et la probabilité de ces limites.

Il paraît cependant que cette méthode de déterminer μ_1 laisse encore à désirer, et à cet effet, je me permettrai de citer le passage suivant d'une lettre qu'a bien voulu m'écrire, à ce sujet, M. Bienaymé :

« La détermination de μ_1, indiquée par Laplace, ne saurait toujours s'effectuer directement. Il faut que les équations permettent d'ajouter cette quantité comme inconnue. Alors c'est une inconnue qui a partout l'unité pour coëfficient, (au moins dans les cas ordinaires.) Vous voyez que si une autre inconnue a aussi l'unité pour coëfficient, l'erreur moyenne μ_1 s'y ajoute nécessairement, et ne se trouve plus dans les autres inconnues, mais aussi ne se détermine plus par les équations. Quand elle peut résulter des équations, c'est ce que j'appelle un effet de cercle répétiteur. Car μ_1 est l'erreur capitale, et l'erreur que la méthode des moindres carrés doit atténuer, est nécessairement très-petite. Trés-souvent les coëfficients des diverses inconnues sont tels que μ_1 ne peut être aperçu. Delà toutes les valeurs discordantes qui se lisent dans plus d'un recueil pour la même quantité. Il faut donc, quand on a formé une collection d'observations, les examiner, et bien s'assurer de ce qu'elles peuvent donner. C'est ce qu'on ne fait pas d'ordinaire. Parce que Gauss et Laplace ont regardé les instruments comme annulant μ_1, on s'imagine que cette erreur disparait toujours. Il n'en est rien. Si donc les observations ne peuvent la donner, il faut absolument instituer des observations spéciales pour se vérifier. Si non, l'application de la méthode des moindres carrés est un luxe inutile, et trompeur. » Aussi M. Bienaymé maintient μ_1 dans ses formules sur la nouvelle théorie des erreurs, car les observations peuvent avoir précisément pour but de déterminer cette quantité.

II^e Partie.

Il est établi, par ce qui précède, que l'existence des causes d'erreurs constantes dépend de celle de μ_1, et ne saurait être accusée par les alternances de signes de la théorie de M. Liagre, qui ne sont l'effet que d'une certaine distribution des erreurs accidentelles. Mais on pourrait se demander quelle est la vraisemblance de l'hypothèse, qu'une alternance de l'ordre l, considérée comme un événement symétrique, n'est pas fortuite? en d'autres termes, quelle est la probabilité que la distribution des erreurs accidentelles, correspondante à cette alternance, n'est pas l'effet du hasard? Résolvons cette question, sans examiner si une telle alternance peut être assimilée à un événement symétrique, ou extraordinaire, et si une distribution d'erreurs accidentelle peut avoir une cause.

A cet effet, on a d'abord la probabilité

$$\frac{A_l}{\Sigma}$$

qu'une alternance de l'ordre l dans n observations est fortuite. Car, dans ce cas, les alternances des divers ordres ont la même facilité.

Supposons qu'on ait fait un très-grand nombre m de groupes de n observations, dans lequel l'alternance de l'ordre l se soit présentée m' fois. Cela posé, si $\frac{p}{l}$ exprime la facilité inconnue de l'arrivée d'une alternance de l'ordre l, on aura, par le théorème inverse de Bernoulli,

$$\frac{p}{l} = \frac{m'}{m},$$

et l'on pourra indiquer les limites de cette valeur approchée, ainsi que la probabilité de celles-ci. Soit P la probabilité que la distribution des erreurs accidentelles, accusée par une alternance de l'ordre l, n'est pas l'effet du hasard, on aura, par la règle de Bayes sur la probabilité des causes :

$$P = \frac{\frac{1}{2}\frac{p}{l}}{\frac{1}{2}\frac{p}{l} + \frac{1}{2}\frac{A_l}{\Sigma}} = \frac{\frac{p}{l}}{\frac{p}{l} + \frac{A_l}{\Sigma}}, \quad (a)$$

en regardant, bien entendu comme également probables, les hypothèses de la fortuité et de la non-fortuité de l'événement, dont il s'agit.

Ce calcul est tout-à-fait conforme à la règle de Laplace, (Sav. étr. t. VII. 1776), pour déterminer la probabilité de la cause d'un événement symétrique ou extraordinaire. Car « soit $\frac{1}{m}$, dit Laplace, la probabilité de son existence dans le cas où l'événement serait dû au hasard, $\frac{1}{n}$ sa probabilité dans le cas où il serait dû à une cause, la probabilité de l'existence de cette cause sera exprimée par »

$$\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}.$$

C'est donc la formule (a) qu'aurait trouvée M. Liagre, s'il avait bien appliqué les règles du calcul des probabilités. Recherchons les causes des erreurs commises par M. Liagre dans son calcul.

1° Il pose

$$\frac{p}{l} = 1,$$

ce qui est fautif, puisque la possibilité $\frac{A_l}{\Sigma}$ d'une alternance de l'ordre l n'est pas certaine.

2° M. Liagre compare deux espèces d'événements, savoir l'alternance particulière de l'ordre l, dont la possibilité est $\frac{A_l}{\Sigma}$, et la moyenne des alternances restantes, dont la probabilité est exprimée par

$$\frac{\Sigma - A_l}{(n-2)\,\Sigma}.$$

Nous observerons que l'emploi de cette moyenne n'est justifié par aucune règle du calcul des probabilités.

L'auteur aurait dû comparer l'événement dont la probabilité est $\frac{A_l}{\Sigma}$, et l'une quelconque des autres sortes d'alternances, dont la probabilité est

$$1 - \frac{A_l}{\Sigma}.$$

Alors, il aurait trouvé la valeur suivante

$$\frac{\frac{A_l}{\Sigma}}{\frac{A_l}{\Sigma} + 1 - \frac{A_l}{\Sigma}} = \frac{A_l}{\Sigma},$$

pour la probabilité *relative*, dont il fait usage sans aucune nécessité.

L'on voit donc, que si l'on rectifie les calculs de M. Liagre, en y apportant les deux corrections que je viens d'indiquer, sa formule principale coïncidera avec la formule (a), donnée ci-dessus. Mais il est manifeste 1° que cette formule rectifiée est sans intérêt, 2° que le calcul de $\frac{p}{l}$ rend son évaluation presque toujours impraticable.