NOUVEAUX ÉLÉMENTS

DU

CALCUL DES VARIATIONS,

PAR

A. MEYER.

LIÉGE ET LEIPZIG,

Charles GNUSÉ,

ÉDITEUR.

1856.

NOUVEAUX ÉLEMENTS

DU

CALCUL DES VARIATIONS.

AVANT-PROPOS.

J'ai maintenu là classification des variations en simples et composés, pures et mixtes, donnée par Mr Strauch. J'ai également emprunté au profond ouvrage de cet auteur, la formule pour la variation d'une intégrale double quand les limites de l'intégrale relative à y sont elles-mêmes susceptibles de déformation. Pour l'exposition elle-même des principes du calcul des variations, j'ai suivi une méthode particulière, qui a le triple avantage, de faire dépendre ce calcul de la formule de Taylor, d'affranchir de la considération des infiniment petits, et de la convergence des séries.

J'ai divisé ce traité en deux parties, en théorie et en applications, et me suis borné aux variations des Intégrales définies, parce que la plupart des problèmes utiles se rangent dans cette catégorie de fonctions.

Mon traité ne devant être qu'élémentaire, je me suis abstenu de calculer les variations du second ordre, comme nécessitant des développements en disproportion avec le cadre de cet ouvrage. Mon but est restreint, il consiste à mettre entre les mains des commençants un manuel simple et précis du calcul des variations, assez étendu pour qu'ils puissent comprendre les questions des cours de mécanique et de physique mathématique qui exigent le secours de ce calcul.

La règle que j'emploie pour résoudre les questions isopérimétriques revient au fond à celle d'Euler, mais on observera que j'y ai introduit une modification qui la met à l'abri des objections qu'on fait aux méthodes d'Euler et de Lagrange. Celle que propose M[r] Strauch est exacte; mais elle est un peu difficile à saisir, exige de grands détours de calcul, et convient peu, par ces raisons, à des commençants.

J'ai consulté, pour la composition de ces éléments, les ouvrages les plus marquants, et nommément ceux d'Euler, de Lagrange, de Poisson, de Dirksen, d'Ohm et de Strauch, cependant ma méthode d'exposer les principes de ce calcul diffère essentiellement de celles qu'ont suivies tous les auteurs qui sont venus à ma connaissance, ce qui justifie le titre que j'ai adopté, savoir : NOUVEAUX *Éléments du calcul des variations.*

NOUVEAUX ÉLÉMENTS

DU

CALCUL DES VARIATIONS.

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORIE DU CALCUL DES VARIATIONS.

§ 1.

DÉFINITIONS ET NOTATIONS.

1. Quand on attribue à x un accroissement quelconque dx, non fonction de x, $y=fx$ change simplement de valeur, et ne se déforme pas. On aura alors

$$y+\Delta y=f(x+dx)=y+dy+\frac{1}{1\cdot 2}d^2y+\text{etc.}+\mathrm{R}_n,$$

R_n désignant le reste de la série de Taylor.

Dans ce cas y change par *différentiation*. Δy est la *différence totale* entre $f(x+dx)$ et fx, et les différentielles dy, d^2y, etc., sont des *parties* de cette différence.

Soient les deux fonctions fx, $\mathrm{F}x$, en écrivant l'équation

$$f(x+\eta)=\mathrm{F}x,$$

on en déduira, pour η, une fonction de x telle que $\eta=\zeta x$, et l'on aura identiquement :

$$f(x+\zeta x)=\mathrm{F}x.$$

Par cette équation, l'ancienne fonction fx, change de propriétés, se *déforme*, et devient une nouvelle fonction $\mathrm{F}x$.

C'est ainsi qu'en posant

$$a(x+\eta)=\sin x,$$

donc

$$\eta = \frac{\sin x - ax}{a},$$

la fonction ax se changera en $\sin x$, par l'équation

$$a\left(x + \frac{\sin x - ax}{a}\right) = \sin x.$$

Si donc η désigne une fonction arbitraire de x, il est clair qu'une fonction primitive fx devient une nouvelle fonction quelconque Fx, en posant la relation

$$f(x+\eta) = Fx.$$

Fx se nomme alors la fonction *déformée*, et η l'élément déformateur. Soit de plus,

$$Dfx = Fx - fx,$$

Dfx se nommera la variation totale, et l'on aura, par la formule de Taylor :

$$Dy = \frac{dy}{dx}\eta + \frac{1}{1\cdot 2}\frac{d^2y}{dx^2}\eta^2 + \text{etc.}, + R_n.$$

Posons maintenant, pour abréger :

$$\delta y = \frac{dy}{dx}\eta, \quad \delta^2 y = \frac{d^2y}{dx^2}\eta^2, \text{ etc.},$$

on aura :

$$Dy = \delta y + \frac{1}{1\cdot 2}\delta^2 y + \text{etc.} + R_n.$$

Dans cette expression les parties δy, $\delta^2 y$, etc., de la variation totale Dy se nomment les variations du premier, du second, etc., ordre de la fonction primitive $y = fx$.

Comme η est une fonction arbitraire de la variable indépendante x dans le cas où la fonction Fx est quelconque, il est clair que les variations δy, $\delta^2 y$, etc., seront, dans ce cas, également des fonctions arbitraires de x.

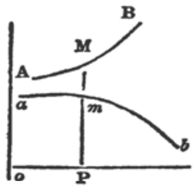
Les fonctions fx et Fx se rapportant à la même valeur de x, on devra considérer la variable indépendante x comme *constante* dans le passage de fx à Fx; l'ordonnée y seule change de valeur dans ce passage, et devient $y' = y + Dy = Fx$, l'abscisse x reste constante. Il suit de là, que les fonctions, c'est-à-dire les ordonnées, et non les variables indépendantes, ou les abscisses, sont susceptibles à se déformer, ou à changer par *variation*. Soit, par exemple,

$$y' = Fx$$

la nouvelle courbe AB, résultant de la déformation de la courbe primitive ab, ou

$$y = fx;$$

On aura, pour la même abscisse, les ordonnées



$$y' = \mathrm{PM}, \quad y = \mathrm{P}m,$$

et

$$\mathrm{D}y = m\mathrm{M} = \delta y + \frac{1}{1 \cdot 2}\,\delta^2 y + \text{etc.},\ + \mathrm{R}_n,$$

$$y' = y + \mathrm{D}y = f(x + \eta) = \mathrm{F}x = fx + \mathrm{D}fx.$$

2. Etendons les considérations précédentes aux fonctions de deux variables. Soit

$$z = f(x, y)$$

une fonction des variables indépendantes x et y, si η désigne une fonction arbitraire des variables x et y, et $\mathrm{F}(x, y)$ une fonction quelconque de ces mêmes variables, on pourra toujours concevoir l'équation

$$f(x + \eta, y + \eta) = \mathrm{F}(x, y),$$

par laquelle la fonction primitive z, devient, pour les mêmes valeurs de x et de y, la nouvelle fonction $z' = \mathrm{F}(x, y)$. Dans le passage de z à z' les variables indépendantes x et y restent constantes. En désignant par $\mathrm{D}z$ la variation totale, en sorte que l'on ait

$$\mathrm{D}z = \mathrm{F}(x, y) - f(x, y),$$

on aura, par le théorème de Taylor :

$$\mathrm{D}z = \left[\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\right]\eta + \frac{1}{1 \cdot 2}\left[\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right]\eta^2 + \text{etc.},\ + \mathrm{R}_n.$$

Donc, en posant, pour abréger,

$$\delta z = \left[\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\right]\eta, \quad \delta^2 z = \left[\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right]\eta^2, \text{ etc.},$$

on pourra écrire :

$$\mathrm{D}z = \delta z + \frac{1}{1 \cdot 2}\,\delta^2 z + \text{etc.},\ + \mathrm{R}_n,$$

et δz, $\delta^2 z$, etc., parties de Dz, seront les variations 1re, 2de, etc., de z, et par conséquent des fonctions arbitraires de x et de y, regardés comme constants. De plus, la fonction arbitraire η, composée des variables indépendantes, devra ici, comme dans le cas des fonctions d'une seule variable, être regardée comme constante.

La fonction déformée aura donc pour expression :

$$\begin{aligned} z+Dz &= f(x,y)+Df(x,y) \\ &= f(x+\eta,\, y+\eta) \\ &= F(x,y). \end{aligned}$$

Dans le cas des fonctions de trois variables indépendantes, telle que

$$u=f(x,\, y,\, z)\,,$$

la fonction déformée résultera d'une équation de la forme

$$f(y+\eta,\, y+\eta,\, z+\eta)=F(x,y,z)$$

dans laquelle η sera une fonction arbitraire des variables indépendantes x, y, z, et devra être regardée comme constante, attendu que dans le passage de u à $u'=F(x,y,z)$ les variables indépendantes x, y, z conservent leurs valeurs primitives.

La variation totale Du, sera encore de la forme

$$Du=\delta u+\frac{1}{1\cdot 2}\,\delta^2 u+\text{etc.},+R_n,$$

et l'on aura les expressions identiques

$$\begin{aligned} u+Du &= f(x,y,z)+Df(x,y,z) \\ &= f(x+\eta,\, y+\eta,\, z+\eta) \\ &= F(x,y,z). \end{aligned}$$

En général, quel que soit le nombre des variables indépendantes d'une fonction primitive u, on remarquera :

1° Que les variables indépendantes restent constantes pendant que la fonction primitive se déforme;

2° Que l'élément déformateur η est une fonction arbitraire des variables indépendantes, regardée comme constante;

3° La variation totale est toujours de la forme

$$Du=\delta u+\frac{1}{1\cdot 2}\,\delta^2 u+\text{etc.},+R_n,$$

4° Les variations δu, $\delta^2 u$, etc., sont des fonctions arbitraires, des variables indépendantes;

3° La fonction déformée, sera toujours représentée par

$$u + \mathrm{D}u.$$

3. Le calcul des variations a pour objet général les règles relatives à la déformation des fonctions. Ces règles varient selon les divers modes de déformation; il convient donc de définir d'abord ceux-ci, et de fixer les notations qui s'y rapportent.

Nous nommerons *éléments constants* les variables indépendantes, *éléments variables* les variables dépendantes. Nous considérerons deux sortes de fonctions, savoir : 1° des fonctions qui ne renferment que des variables indépendantes; 2° des fonctions composées à la fois de variables indépendantes et dépendantes.

Les déformations de la 1re espèce de fonctions s'obtiennent *immédiatement*, en donnant aux variables indépendantes l'accroissement arbitraire η. Soient, par exemple :

1° $y = fx$, on aura :

$$y + \mathrm{D}y = f(x + \eta) = fx + \mathrm{D}fx;$$

2° $z = f(x, y)$, on aura :

$$z + \mathrm{D}z = fx + \eta, y + \eta) = f(x, y) + \mathrm{D}f(x, y);$$

etc.

Les fonctions de la 2de espèce admettent deux sortes de déformations, savoir : une déformation simple, et une déformation composée.

Elle est simple lorsqu'elle s'opère médiatement par la déformation des variables dépendantes. Soit, par exemple :

$$z = f(x, y),$$

une fonction dans laquelle y est la variable dépendante, et par conséquent une fonction de x, telle que

$$y = \varphi x;$$

quand x devient $x + \eta$, y deviendra $y + \mathrm{D}y$. Cela posé, comme x est l'élément constant, z se changera en

$$z + \mathrm{D}z = f(x, y + \mathrm{D}y) = f(x, y) + \mathrm{D}f(x, y).$$

Cette déformation de z est simple, mais non *immédiate*, puisqu'elle s'opère par le *moyen* de la variation de y.

La déformation est composée lorsqu'elle est le produit d'une double variation, d'abord de celle qu'on obtiendrait immédiatement en considérant toutes ses variables comme éléments constants, puis en déformant, dans ce premier résultat, toutes les variables dépendantes, c'est-à-dire les éléments variables de la fonction. Soit, par exemple :

$$z = f(x,y),$$

la fonction proposée, dans laquelle x est la variable indépendante, ou l'élément constant, et y, fonction de x, la variable dépendante, ou l'élément variable. Pour obtenir la déformation composée de z, regardons d'abord x et y comme éléments constants, on obtiendra une déformation simple immédiate, qui sera représentée par

$$z + \mathrm{D}z = f(x + \eta) = f(x,y) + \mathrm{D}f(x,y).$$

Si, ensuite, on déforme de nouveau ce premier résultat, en y changeant y en $y + \mathrm{D}y$, on aura la déformée composée dont il s'agit, et que j'indiquerai, en accentuant le D, de cette manière :

$$\begin{aligned} z + \mathrm{D}'z &= f(x, y + \mathrm{D}y) + \mathrm{D}f(x, y + \mathrm{D}y) \\ &= f(x, y) + \mathrm{D}'f(x,y). \end{aligned}$$

Soit encore

$$u = f(x, y, z),$$

une fonction des variables indépendantes x, y et de la variable dépendante z, que je suppose être une fonction de x et de y. Cela posé, en regardant x, y, z comme éléments constants, on aura la déformée immédiate

$$u + \mathrm{D}u = f(x + \eta, y + \eta, z + \eta) = f(x, y, z) + \mathrm{D}f(x, y, z).$$

Mais la déformation simple de z étant $z + \mathrm{D}z$, si je veux obtenir la déformée composée de u, il faudra changer dans l'expression précédente z en $z + \mathrm{D}z$, et l'on aura ;

$$\begin{aligned} u_1 + \mathrm{D}'u &= f(x, y, z + \mathrm{D}z) + \mathrm{D}f(x, y, z + \mathrm{D}z) \\ &= f(x, y, z) + \mathrm{D}'f(x, y, z). \end{aligned}$$

Dans ces procédés, on le voit, les variables indépendantes restent des éléments constants, tandis que les variables dépendantes sont seules les éléments variables, ou soumises à des déformations.

Donnons encore, pour éclaircir ces notions, quelques autres exemples.

1° Soit la fonction

$$u = \int_a^\alpha \mathrm{V}\, dx,$$

dans laquelle on a posé, pour abréger,

$$f(x, y, z, p, q) = \mathrm{V},$$

et soit x la variable indépendante, ou l'élément constant, alors y, z, p, q sont les variables dépendantes, ou les fonctions de x, dont les déformations immédiates sont représentées par

$$\begin{array}{c} y + \mathrm{D}y, \\ z + \mathrm{D}z, \\ p + \mathrm{D}p, \\ q + \mathrm{D}q. \end{array}$$

Par le moyen de ces valeurs la fonction V, et par suite la fonction U, subiront des déformations simples, représentées par

$$\mathrm{V} + \mathrm{DV} = f(x, y + \mathrm{D}y, z + \mathrm{D}z, p + \mathrm{D}p, q + \mathrm{D}q,)$$

$$\mathrm{U} + \mathrm{DU} = \int_a^\alpha (\mathrm{V} + \mathrm{DV})\, dx.$$

2° Soient, en second lieu,

$$\mathrm{U} = \int_a^\alpha dx \int_{y_0}^{y^1} \mathrm{V} dy, \quad \mathrm{V} = f(x, y, z, p);$$

admettons que z et p soient des fonctions de x et de y, que y, ainsi que les limites y_0, y_1, soient des fonctions de x, cela posé, cherchons la variation composée de U.

En regardant d'abord x et y comme des éléments constants, on aura immédiatement

$$\mathrm{V} + \mathrm{DV} = f(x, y, z, p) + \mathrm{D}f(x, y, z, p);$$

mais quand y devient $y + \mathrm{D}y$, les expressions $z + \mathrm{D}z$, $p + \mathrm{D}p$ deviennent $z + \mathrm{D}'z$, $p + \mathrm{D}'p$, et par suite $\mathrm{V} + \mathrm{DV}$ se changera en

$$\mathrm{V} + \mathrm{D}'\mathrm{V} = f(x, y + \mathrm{D}y, z + \mathrm{D}'z, p + \mathrm{D}'p) + \\ \mathrm{D}f(x, y + \mathrm{D}y, z + \mathrm{D}'z, p + \mathrm{D}'p).$$

Par conséquent la déformation composée de U sera indiquée par

$$\mathrm{U} + \mathrm{D}'\mathrm{U} = \int_a^\alpha dx \int_{y_0}^{y_1} (\mathrm{V} + \mathrm{D}'\mathrm{V})\, dy.$$

Nous avons donc, en résumé :

1° Des déformations simples immédiates, quand la fonction n'est composée que de variables indépendantes ;

2° Des déformations simples médiates, quand la fonction renferme des variables dépendantes ; elles s'obtiennent en déformant celles-ci.

3° Des déformations composées, elles s'obtiennent en considérant toutes les variables de la fonction comme indépendantes, ce qui donnera une première déformation immédiate, puis en déformant dans celle-ci, toutes les variables dépendantes de la fonction proposée.

4. Les variables indépendantes, ou les éléments constants dans les fonctions de la seconde espèce, n'étant pas susceptibles de déformation, par cela seul que ces variables ne sont pas des fonctions, il n'en est pas de même relativement à la valeur de ces variables. En effet, rien n'empêchera que celles-ci ne changent par différentiation, en devenant, par exemple, $x+dx$, $y+dy$, etc. Nous nommerons ***déformations mixtes*** celles dans lesquelles les éléments constants changent par différentiation, en même temps que les éléments variables subissent des déformations.

Nous désignerons les déformations mixtes, en donnant à la lettre D un indice, savoir : nous marquerons par D_1 les déformations mixtes simples, et par D_1' les déformations mixtes composées.

1er *Exemple.*

Soit $y = fx$, x étant la variable indépendante, on aura :

$$y + Dy = f(x + \eta) = fx + Dfx,$$

et

$$z + D_1 y = f(x + dx + \eta) = f(x + dx) + Df(x + dx);$$

$y + D_1 y$ est la déformation mixte simple et immédiate de y.

2me *Exemple.*

Soit $z = f(x, y)$, x et y étant les variables indépendantes, on aura :

$$z + Dz = f(x + \eta,\ y + \eta) = f(x, y) + Df(x, y),$$

et

$$z + D_1 z = f(x + dx + \eta,\ y + dy + \eta) = f(x + dx,\ y + dy) + Df(x + dx, y + dy) = f(x, y) + D_1 f(x, y).$$

3me *Exemple.*

Soit $z = f(x,y)$; si x est l'élément constant, et y une fonction de x, on aura la déformation simple médiate, en écrivant

$$z+Dz=f(x,y+Dy)=f(x,y)Df(x,y).$$

Si l'élément constant change de valeur et devient $x+dx$ dans ce résultat, on aura la déformée mixte

$$z+D_1z=f(x+dx,\ y+Dy)=f(x+dx,y)+Df(x+dx,\ y).$$

Ce sera une déformée mixte simple mais non immédiate.

4^{me} *Exemple.*

La même fonction z a pour déformée composée l'expression

$$z+D'z=f(x,y+Dy)+Df(x,y+Dy).$$

Si l'élément constant x change de valeur dans cette expression, et devient $x+dx$, on aura une déformée mixte composée, savoir :

$$z+D_1'z=f(x+dx,\ z+Dy)+Df(x+dx,y+Dy).$$

5^{me} *Exemple.*

$$\text{Soit } U=\int_a^\alpha Vdx,\ V=f(x,y),\ x$$

l'élément constant, on aura :

$$V+DV=f(x,y)+Df(x,y),$$
$$V+D_1V=f(x+dx,y)+Df(x+dx,y),$$

donc

$$u+D_1u=\int_a^\alpha (V+D_1V)dx.$$

5. Les déformées des diverses espèces se développent suivant la formule de Taylor, et en fesant usage des notations, et définitions relatives aux variations des divers ordres, on pourra leur donner, comme nous verrons, les formes :

$$u+Du=u+\delta u+\frac{1}{1\cdot 2}\delta^2u+\text{etc.}+R_n,$$

$$u+D'u=u+\delta'u+\frac{1}{1\cdot 2}\delta'^2u+\text{etc.}+R'_n,$$

$$u+D_1u=u+\delta_1u+\frac{1}{1\cdot 2}\delta_1^2u+\text{etc.}+R_{1n},$$

$$u+D_1'u=u+\delta_1'u+\frac{1}{1\cdot 2}\delta_1'^2u+\text{etc.}+R_1'{}_n.$$

Si maintenant nous nommons fonction maximum toute fonction

u plus grande, et fonction minimum toute fonction u plus petite que toutes ses déformées, nous verrons plus tard que les fonctions primitives, telles que

$$y = \varphi x, \quad \text{ou} \quad z = \varphi(x,y), \text{ etc.}, \tag{α}$$

propres à rendre u une fonction maximum ou minimum, doivent se déduire de la résolution de l'une des équations

$$\delta u = o, \quad \delta_1 u = o, \quad \delta' u = o, \quad \delta_1' u = o. \tag{1}$$

Or, la plupart des problèmes de géométrie et de mécanique, qu'on traite par le calcul des variations, ont pour objet de trouver des fonctions primitives de la forme des équations (α), propres à rendre une fonction donnée u, qui est ordinairement une intégrale définie, une fonction maximum, ou minimum. Il suit de là, que l'objet spécial du calcul des variations, consistera, 1° dans la formation des variations δu, $\delta' u$, $\delta_1 u$, $\delta_1' u$, $\delta^2 u$, $\delta'^2 u$, etc., etc., 2° dans la résolution des équations (1).

Nous voyons par là, que la théorie du calcul des variations se partage naturellement en deux sections, dont la première s'occupe des règles pour former les variations des diverses espèces, et la seconde de celles qui se rapportent à la résolution des équations (1)

PREMIÈRE SECTION.

FORMATION DES VARIATIONS DES DIVERS ORDRES.

§ 2.

VARIATIONS DES FONCTIONS QUI NE CONTIENNENT QUE DES VARIABLES INDÉPENDANTES.

Les fonctions que nous considérons dans ce § sont ou explicites, ou implicites, occupons-nous d'abord des premières.

(a)

FONCTIONS EXPLICITES.

PREMIER PROBLÈME.

Etant donnée la fonction

$$y = fx,$$

dans laquelle x *est la variable indépendante, trouver les variations première, seconde, etc., de* y, *savoir :*

$$\delta y,\ \delta^2 y\text{, etc.}$$

Solution.

On a par définition :

$$y + \mathrm{D}y = f(x + \eta)$$
$$= y + \frac{dy}{dx}\eta + \frac{1}{1\cdot 2}\frac{d^2y}{dx^2}\eta^2 + \text{etc.} + \mathrm{R}_n;$$

soit, pour abréger,

$$\delta^n y = \frac{d^n y}{dx^n}\cdot\eta^n, \tag{2}$$

nous aurons

$$y + \mathrm{D}y = y + \delta y + \frac{1}{1\cdot 2}\delta^2 y + \text{etc.} + \mathrm{R}_n, \tag{3}$$

$$\delta y = \frac{dy}{dx}\eta,\quad \delta^2 y = \frac{d^2y}{dx^2}\eta^2\text{, etc.}$$

DEUXIÈME PROBLÈME.

Etant donnée la fonction

$$z = f(x, y),$$

dans laquelle x *et* y *sont les variables indépendantes, trouver les variations de* z, *savoir :*

$$\delta z,\ \delta^2 z,\ \text{etc.}$$

Solution.

On a par définition :

$$z + \mathrm{D}z = f(x + \eta,\ y + \eta)$$
$$= z + \left[\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\right]\cdot\eta +$$
$$\frac{1}{1\cdot 2}\left[\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right]\eta^2 + \text{etc.} + \mathrm{R}_n$$
$$= z + \delta z + \frac{1}{1\cdot 2}\delta^2 z + \text{etc.} + \mathrm{R}_n,$$

$$\left.\begin{aligned} \delta z &= \left[\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\right]\eta, \\ \delta^2 z &= \left[\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right]\eta^2, \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Rem. Soit $u=f(x,y,....)$, on aura pareillement

$$u+\mathrm{D}u=u+\delta u+\frac{1}{1\cdot 2}\delta^2 u+\text{etc.}+\mathrm{R}_n$$

$$\delta u=\left[\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)+\ldots\right]\eta,\quad \delta^2 u=\text{etc.}$$

Quel que soit le nombre des variables indépendantes x, y, etc.

(*b*)

FONCTIONS IMPLICITES.

Troisième Problème.

Etant donnée une fonction implicite

$$z=f(x,y)=0$$

de la variable indépendante x, *trouver les variations première, seconde, etc., de* y, *savoir :*

$$\delta y,\ \delta^2 y,\ \text{etc.}$$

Solution.

Comme y est une fonction de x, il est clair qu'en changeant x en $x+\eta$, y devient $y+\mathrm{D}y$, on a donc :

$$\begin{aligned}z+\mathrm{D}z&=f(x+\eta,y+\mathrm{D}y)\\&=z+\left(\frac{dz}{dx}\right)\eta+\left(\frac{dz}{dy}\right)\mathrm{D}y+\\&\quad\frac{1}{1\cdot 2}\left[\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\eta^2+2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)\eta\cdot\mathrm{D}y+\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\mathrm{D}y^2\right]\\&\quad+\text{etc.}+\mathrm{R}_n=0\end{aligned}$$

mais on a

$$\mathrm{D}y=\delta y+\frac{1}{1\cdot 2}\delta^2 y+\text{etc.},$$

donc

$$\begin{aligned}z+\mathrm{D}z=z&+\left(\frac{dz}{dx}\right)\eta+\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\delta y+\frac{1}{1\cdot 2}\delta^2 y+\text{etc.}\right)+\\&\frac{1}{1\cdot 2}\left[\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\eta+2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)\eta(\delta y+\text{etc.})+\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)(\delta y^2+\right.\\&\left.\text{etc.})\right]+\text{etc.}+\mathrm{R}_n\end{aligned}$$

$$= z + [(\frac{dz}{dx})\eta + (\frac{dz}{dy})\delta y] +$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}[(\frac{dz}{dy})\delta^2 y + (\frac{d^2z}{dx^2})\eta^2 + 2(\frac{d^2z}{dxdy})\eta\delta y +$$

$$\frac{d^2z}{dy^2})\delta y^2] + \text{etc.} + R_n = 0.$$

Cette équation se décompose en

$$\left.\begin{array}{c} z = 0, \\ (\frac{dz}{dx})\eta + (\frac{dz}{dy})\delta y = 0, \\ (\frac{dz}{dy})\delta^2 y + (\frac{d^2z}{dx^2})\eta^2 + 2(\frac{d^2z}{dxdy})\eta dy + (\frac{d^2z}{dy^2})\delta y^2 = 0, \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \quad (5)$$

ces équations fourniront les valeurs de

$$\delta y, \quad {}^2y, \quad \text{etc.}$$

§ 3.

VARIATIONS DES FONCTIONS QUI RENFERMENT DES VARIABLES INDÉPENDANTES ET DÉPENDANTES.

Les variables indépendantes étant les éléments constants, on obtient les fonctions déformées en déformant les variables dépendantes seules.

Mais nous aurons à examiner successivement les cas, où l'on ne donne qu'une seule fonction, puis ceux où l'on donne, en outre, plusieurs équations de condition entre les variables de la fonction proposée.

(*a*)

FONCTIONS ISOLÉES.

Les éléments variables de la fonction donnée sont ou des variables primitives, ou des dérivées, ou des intégrales définies.

(1)

Fonctions à variables primitives.

PREMIER PROBLÈME.

Etant donnée la fonction

$$u = f(x, y),$$

dans laquelle x *est l'élément constant, et* y *l'élément variable, fonction de* x, *trouver les variations première, seconde, etc., de* u, *savoir :*

$$\delta u,\ \delta^2 u,\ \text{etc.}$$

Solution.

On a par définition :

$$u + \mathrm{D}u = f(x, y + \mathrm{D}y)$$

$$= u + \left(\frac{du}{dy}\right)\mathrm{D}y + \frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\mathrm{D}y^2 + \text{etc.} + \mathrm{R}_n.$$

Mais on a :

$$\mathrm{D}y = \delta y + \frac{1}{1\cdot 2}\delta^2 y + \text{etc.};$$

on a donc :

$$u + \mathrm{D}u = u + \left(\frac{du}{dy}\right)\left(\delta y + \frac{1}{1\cdot 2}\delta^2 y + \text{etc.}\right) +$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)(\delta y^2 + \text{etc.}) + \text{etc.} + \mathrm{R}_n;$$

ou, en ordonnant :

$$u + \mathrm{D}u = u + \left(\frac{du}{dy}\right)\delta y + \frac{1}{1\cdot 2}\left[\left(\frac{du}{dy}\right)\delta^2 y + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\delta y^2\right] + \text{etc.} + \mathrm{R}_n.$$

Mais on a :

$$\delta y = \frac{dy}{dx}\eta, \quad \delta^2 y = \frac{d^2y}{dx^2}\eta^2, \text{ etc.}$$

donc

$$u + \mathrm{D}u = u + \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx}\cdot\eta +$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}\left[\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\frac{dy^2}{dx^2}\right]\eta^2 + \text{etc.} + \mathrm{R}_n.$$

Mais les variations première, seconde, etc., de u, sont les termes en η, η^2, etc., on a donc :

$$\left.\begin{aligned}\delta u &= \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx}\cdot\eta = \left(\frac{du}{dy}\right)\delta y,\\ \delta^2 u &= \left[\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\frac{dy^2}{dx^2}\right]\eta^2\\ &= \left(\frac{du}{dy}\right)\delta^2 y + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\delta y^2,\\ &\text{etc.}\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

et

$$u + Du = u + \delta u + \frac{1}{1\cdot 2}\delta^2 u + \text{etc.} + R_n.$$

Rem. En regardant x comme constant, et en différentiant

$$u = f(x, y),$$

on obtient

$$du = \left(\frac{du}{dy}\right)dy, \quad d^2u = \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)dy^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)d^2y, \text{ etc.}$$

En comparant ces différentielles aux formules (6), l'on voit, qu'on en déduira δu, $\delta^2 u$, etc., en changeant dy, d^2y, etc., en δy, $\delta^2 y$, etc.

Deuxième Problème.

Etant donnée la fonction

$$u = f(x, y, z),$$

dans laquelle x *est la variable indépendante, c'est-à-dire l'élément constant, trouver les variations*

$$\delta u, \ \delta^2 u, \ \text{etc.},$$

y *et* z *étant des fonctions de* x.

Solution.

On a par définition :

$$\begin{aligned}u + Du &= f(x, y + dy, z + Dz)\\ &= u + \left[\left(\frac{du}{dy}\right)Dy + \left(\frac{du}{dz}\right)Dz\right] +\end{aligned}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}\left[\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\mathrm{D}y^2 + 2\left(\frac{d^2u}{dydz}\right)\mathrm{D}y\cdot\mathrm{D}z + \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)\mathrm{D}z^2\right] + \text{etc.} + \mathrm{R}_n.$$

On a ensuite

$$\mathrm{D}y = \delta y + \frac{1}{1\cdot 2}\delta^2 y + \text{etc.},$$

$$\mathrm{D}z = \delta z + \frac{1}{1\cdot 2}\delta^2 z + \text{etc.},$$

donc

$$u + \mathrm{D}u = u + \left[\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\delta y + \frac{1}{1\cdot 2}\delta y^2 + \text{etc.}\right) + \left(\frac{du}{dz}\right)\left(\delta z + \frac{1}{1\cdot 2}\delta z^2 + \text{etc.}\right)\right] +$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}\left[\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)(\delta y^2 + \text{etc.}) + 2\left(\frac{d^2u}{dydz}\right)(\delta y + \text{etc.})(\delta z + \text{etc.}) + \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)(\delta z^2 + \text{etc.})\right] + \text{etc.} + \mathrm{R}_n.$$

En ordonnant on a :

$$u + \mathrm{D}u = u + \left[\left(\frac{du}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{du}{dz}\right)\delta z\right] +$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}\left[\left(\frac{du}{dy}\right)\delta^2 y + \left(\frac{du}{dz}\right)\delta^2 z + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\delta y^2 + 2\left(\frac{d^2u}{dydz}\right)\delta y\delta z + \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)\delta z^2\right] + \text{etc.} + \mathrm{R}_n.$$

Mais y et z étant des fonctions de x, on a :

$$\delta y = \frac{dy}{dz}\cdot\eta, \qquad \delta^2 y = \frac{d^2y}{dx^2}\eta^2, \text{ etc.}$$

$$\delta z = \frac{dz}{dx}\eta, \qquad \delta^2 z = \frac{d^2z}{dx^2}\eta^2, \text{ etc.}$$

donc

$$u + \mathrm{D}u = u + \left[\left(\frac{u}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{du}{dz}\right)\frac{dz}{dx}\right]\eta +$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}\left[\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{du}{dz}\right)\frac{d^2z}{dx^2}+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\frac{dy^2}{dx^2}+2\left(\frac{d^2u}{dydz}\right)\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dz}{dx}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\frac{dz^2}{dx^2}\right]\eta^2+\text{etc.}+\text{R}_n.$$

Les variations première, seconde, etc., de u, étant les termes en η, η^2, etc., on a :

$$\left.\begin{aligned}
\delta u &= \left[\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{du}{dz}\right)\frac{dz}{dx}\right]\eta \\
&= \left(\frac{du}{dy}\right)\delta y+\left(\frac{du}{dz}\right)\delta z, \\
\delta^2 u &= \left[\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{du}{dz}\right)\frac{d^2z}{dx^2}+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\frac{dy^2}{dx^2}\right. \\
&\qquad \left.+2\left(\frac{d^2u}{dydz}\right)\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dz}{dx}+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\frac{d^2z}{dx^2}\right]\eta^2, \\
&= \left(\frac{du}{dy}\right)\delta^2 y+\left(\frac{du}{dz}\right)\delta^2 z+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\delta y^2+2\left(\frac{d^2u}{dydz}\right)\delta y\delta z \\
&\qquad +\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)\delta z^2,
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

etc., etc.

On a donc

$$u+\text{D}u=u+\delta u+\frac{1}{1\cdot 2}\delta^2 u+\text{etc.}+\text{R}_n.$$

Rem. Si l'on différentie $u=f(x,y,x)$, en regardant x comme constant, y et z comme des fonctions de x, on a :

$$du=\left(\frac{du}{dy}\right)dy+\left(\frac{du}{dz}\right)dz,$$

$$d^2u=\left(\frac{du}{dy}\right)d^2y+\left(\frac{du}{dz}\right)d^2z+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)dy^2+2\left(\frac{d^2u}{dydz}\right)dydz$$
$$+\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)dz^2,$$

etc.

En comparant ces valeurs aux expressions (7), l'on voit que l'on déduira celles-ci des précédentes, en remplaçant les facteurs dy, dz, d^2y, d^2z, etc., par δy, δz, $\delta^2 y$, $\delta^2 z$, etc.

Troisième Problème.

Etant donnée la fonction

$$u = f(x, y, z),$$

dans laquelle x *et* y *sont les éléments constants, ou les variables indépendantes, trouver*

$$\delta u, \ \delta^2 u, \ \text{etc.}$$

z, *ou l'élément variable, étant une fonction de* x *et de* y.

Solution.

On a par définition :

$$u + \mathrm{D}u = f(x, y, z + \mathrm{D}z)$$

$$= u + \left(\frac{du}{dz}\right)\mathrm{D}z + \frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)\mathrm{D}z^2 + \text{etc.} + \mathrm{R}_n$$

$$= u + \left(\frac{du}{dz}\right)\left(\delta z + \frac{1}{1\cdot 2}\delta^2 z + \text{etc.}\right) +$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)\left(\delta z^2 + \text{etc.}\right) + \text{etc.} + \mathrm{R}_n$$

$$= u + \left(\frac{du}{dz}\right)\delta z + \frac{1}{1\cdot 2}\left[\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)\delta z^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)\delta^2 z\right] + \text{etc.} + \mathrm{R}_n.$$

Mais z étant une fonction de x et de y on a :

$$\delta z = \left[\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\right]\eta,$$

$$\delta^2 z = \left[\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right]\eta^2,$$

etc.,

donc

$$u + \mathrm{D}u = u + \left(\frac{du}{dz}\right)\left[\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\right]\eta +$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}\left\{\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)\left[\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right] + \left(\frac{du}{dz}\right)\left[\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right]\right\}\eta^2 + \text{etc.} + \mathrm{R}_n.$$

Comme les variations première et seconde, etc., de u sont les termes en η, η^2, etc., du développement de $u+\mathrm{D}u$, on a :

$$\left.\begin{aligned}
\delta u &= \left(\frac{du}{dz}\right)\left[\left(\frac{dz}{dx}\right)+\left(\frac{dz}{dy}\right)\right]\eta \\
&= \left(\frac{du}{dz}\right)\delta z, \\
\delta^2 u &= \left\{ \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)\left[\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+2\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]+\right. \\
&\qquad \left.\left(\frac{du}{dz}\right)\left[\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)+\left(\frac{dz^2}{dy^2}\right)\right]\right\}\eta^2 \\
&= \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)\delta z^2+\left(\frac{du}{dz}\right)\delta^2 z, \\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

On a donc

$$u+\mathrm{D}u=u+\delta u+\frac{1}{1\cdot 2}\delta^2 u+\text{etc.}+\mathrm{R}_n.$$

Rem. En différentiant $u=f(x, y, z)$, par rapport à z, on a :

$$du=\left(\frac{du}{dz}\right)dz, \quad d^2u=\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)dz^2+\left(\frac{du}{dz}\right)d^2z\text{, etc.,}$$

donc, on obtient les formules (8) en changeant dans celles-ci d en δ.

(2)

FONCTIONS RENFERMANT DES DÉRIVÉES.

Premier Problème.

Etant donnée la fonction

$$p=\frac{d^m y}{dx^m},$$

dans laquelle x *est l'élément constant, trouver*

$$\delta p,\ \delta^2 p,\ \text{etc.},$$

y *étant une fonction de* x.

Solution.

On a par définition :

$$p+\mathrm{D}p=\frac{d^m\,(y+\mathrm{D}y)}{dx^m}$$

$$=\frac{d^m\,(y+\delta y+\frac{1}{1\cdot 2}\,\delta^2 y+\text{etc.}+\mathrm{R}_n)}{dx^m}$$

$$=\frac{d^m y}{dx^m}+\frac{d^m\delta y}{dx^m}+\frac{1}{1\cdot 2}\,\frac{d^m\delta^2 y}{dx^m}+\text{etc.}+\mathrm{R}'_n,$$

mais on a :

$$\delta y=\frac{dy}{dx}\cdot\eta,\quad \delta^2 y=\frac{d^2 y}{dx^2}\cdot\eta^2,\ \text{etc.}$$

De plus, η étant une fonction arbitraire de l'élément constant x, on devra regarder les facteurs η, η^2, etc., comme constants, ce qui donnera

$$\frac{d^m\delta y}{dx^m}=\frac{d^m\left(\frac{dy}{dx}\cdot\eta\right)}{dx^m}=\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}\cdot\eta$$

$$\frac{d^m\delta^2 y}{dx^m}=\frac{d^m\left(\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\eta^2\right)}{dx^m}=\frac{d^{m+2}y}{dx^{m+2}}\,\eta^2.$$

etc.

On a donc :

$$p+\mathrm{D}p=\frac{d^m y}{dx^m}+\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}\cdot\eta+\frac{1}{1\cdot 2}\,\frac{d^{m+2}y}{dx^{m+2}}\,\eta^2+\text{etc.}+\mathrm{R}'_n.$$

Mais les variations première, seconde, etc., de p, étant les termes en η, η^2, etc. du développement de $p+\mathrm{D}p$, on a :

$$\delta p=\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}\,\eta=\frac{d^m\delta y}{dx^m},$$

$$\delta^2 p=\frac{d^{m+2}y}{dx^{m+2}}\,\eta^2=\frac{d^m\delta^2 y}{dx^m},$$

etc.

Si nous mettons, dans les premiers membres de ces équations, à la place de p sa valeur $\frac{d^m y}{dx^m}$, on a les relations

$$\left.\begin{aligned}\delta\,\frac{d^m y}{dx^m} &= \frac{d^m \delta y}{dx^m}\,,\\ \delta^2\,\frac{d^m y}{dx^m} &= \frac{d^m \delta^2 y}{dx^m}\,,\\ &\text{etc.}\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

Pour $m = 1, 2$, etc., on a :

$$\delta\,\frac{dy}{dx} = \frac{d\delta y}{dx}\,,\qquad \delta^2\,\frac{dy}{dx} = \frac{d\delta^2 y}{dx^2}\,,\ \text{etc.}$$

$$\delta\,\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2\delta y}{dx^2}\,,\qquad \delta^2\,\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2\delta^2 y}{dx^2}\,,\ \text{etc.}$$

1 *Rem.* Les formules (9) renferment le principe relatif à l'échange des caractéristiques d et δ, c'est un des principes les plus employés dans le calcul des variations.

2 *Rem.* Le développement ci-dessus de $p + \mathrm{D}p$, en y introduisant les variations δp, etc., pourra s'écrire aussi de cette manière :

$$p + \mathrm{D}p = p + \delta p + \frac{1}{1\cdot 2}\,\delta^2 p + \text{etc.} + \mathrm{R}'_n.$$

Deuxième Problème.

Etant donnée la fonction

$$u = f(x, y, p, q)\,,$$

dans laquelle x *est l'élément constant, et*

$$p = \frac{dy}{dx}\,,\qquad q = \frac{d^2 y}{dx^2}\,,$$

trouver

$$\delta u,\ \delta^2 u,\ \text{etc.}$$

en supposant que y, *donc aussi* p *et* q *soient des fonctions de* x, *et par conséquent les éléments variables.*

Solution.

On a par définition :

$$u + \mathrm{D}u = f(x,\ y + \mathrm{D}y,\ p + \mathrm{D}p,\ q + \mathrm{D}q)$$

$$= u + \left[\left(\frac{du}{dy}\right)\mathrm{D}y + \left(\frac{du}{dp}\right)\mathrm{D}p + \left(\frac{du}{dq}\right)\mathrm{D}q\right] +$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}[\quad] + \text{etc.} + \mathrm{R}_n$$

$$= u + \left[\left(\frac{du}{dy}\right)(\delta y + \text{etc.}) + \left(\frac{du}{dp}\right)(\delta p + \text{etc.}) + \left(\frac{du}{dq}\right)(\delta q + \text{etc.})\right] + \text{etc.} + \mathrm{R}_n$$

$$= u + \left[\left(\frac{du}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{du}{dp}\right)\delta p + \left(\frac{du}{dq}\right)\delta q\right] + \text{etc.} + \mathrm{R}_n$$

mais y, p, q étant des fonctions de x, on a :

$$\delta y = \frac{dy}{dx}\cdot\eta,\quad \delta p = \frac{dp}{dx}\cdot\eta,\quad \delta q = \frac{dq}{dx}\cdot\eta,$$

donc

$$u + \mathrm{D}u = u + \left[\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{du}{dp}\right)\frac{dp}{dx} + \left(\frac{du}{dq}\right)\frac{dq}{dx}\right]\eta + \text{etc.} + \mathrm{R}_n.$$

On a donc

$$\left.\begin{aligned}
\delta u &= \left[\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{du}{dp}\right)\frac{dp}{dx} + \left(\frac{du}{dq}\right)\frac{dq}{dx}\right]\eta \\
&= \left(\frac{du}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{du}{dp}\right)\delta p + \left(\frac{du}{dq}\right)\delta q \\
&= \left(\frac{du}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{du}{dp}\right)\delta\frac{dy}{dx} + \left(\frac{du}{dq}\right)\delta\frac{d^2y}{dx^2} \\
&= \left(\frac{du}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{du}{dp}\right)\frac{d\delta y}{dx} + \left(\frac{du}{dq}\right)\frac{d^2\delta y}{dx^2}
\end{aligned}\right\}\quad (10)$$

Rem. En différentiant $u = f(x, y, z, p, q)$, x étant constant, on a :

$$du = \left(\frac{du}{dy}\right)dy + \left(\frac{du}{dz}\right)dz + \left(\frac{du}{dp}\right)dp + \left(\frac{du}{dq}\right)dq,$$

donc en changeant d en δ, on convertit la différentielle en sa variation δu.

1[er] *Exemple*.

Soient $\mathrm{V} = \sqrt{1+p^2}$, $p = \dfrac{dy}{dx}$, on aura :

$$\delta V = \left(\frac{dV}{dp}\right)\delta p = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\,\delta\frac{dy}{dx} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\,\frac{d\delta y}{dx}.$$

2^{me} *Exemple.*

Soient $V = \sqrt{1+p^2+q^2}$, $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dz}{dx}$, on aura :

$$\delta V = \left(\frac{dV}{dp}\right)\delta p + \left(\frac{dV}{dq}\right)\delta q$$

$$= \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,\delta\frac{dy}{dx} + \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,\delta\frac{dz}{dx}$$

$$= \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\cdot\frac{d\delta z}{dx}$$

Troisième Problème.

Etant donnée la fonction

$$u = f(x, y, z, p, q),$$

dans laquelle x *et* y *sont les éléments constants, trouver* δu ; *on donne*

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right) \quad q = \left(\frac{dz}{dy}\right);$$

et z, p, q *sont regardés comme des fonctions de* x *et de* y.

Solution.

On a par définition :

$$u + Du = f(x, y, z + Dz, p + Dp, q + Dq)$$

$$= u + \left[\left(\frac{du}{dz}\right)Dz + \left(\frac{du}{dp}\right)Dp + \left(\frac{du}{dq}\right)Dq\right] + \text{etc.} + R_n$$

$$= u + \left[\left(\frac{du}{dz}\right)(\delta z + \text{etc.}) + \left(\frac{du}{dp}\right)(\delta p + \text{etc.}) + \left(\frac{du}{dq}\right)(\delta q + \text{etc.})\right] + \text{etc.} + R_n$$

$$= u + \left[\left(\frac{du}{dz}\right)\delta z + \left(\frac{du}{dp}\right)\delta p + \left(\frac{du}{dq}\right)\delta q\right] + \text{etc.} + R_n.$$

Mais z, p, q étant des fonctions de x et de y, on a

4

$$\delta z = [(\frac{dz}{dx}) + (\frac{dz}{dy})]\eta,$$

$$\delta p = [(\frac{dp}{dx}) + (\frac{dp}{dy})]\eta,$$

$$\delta q = [(\frac{dq}{dx}) + (\frac{dq}{dy})\eta];$$

donc :

$$u + \mathrm{D}u = u + [\{(\frac{du}{dz})(\frac{dz}{dx}) + (\frac{du}{dp})(\frac{dp}{dx}) + (\frac{du}{dq})(\frac{dq}{dx})\} +$$
$$\{(\frac{du}{dz})(\frac{dz}{dy}) + (\frac{du}{dp})(\frac{dp}{dy}) + (\frac{du}{dq})(\frac{dq}{dy})\}]\eta$$
$$+ \text{etc.} + \mathrm{R}_n;$$

mais les variations première, seconde, etc., de u sont les termes en η, η^2, etc., du développement de $u + \mathrm{D}u$, on a donc

$$\delta u = [\{(\frac{du}{dz})(\frac{dz}{dx}) + (\frac{du}{dp})(\frac{dp}{dx}) + (\frac{du}{dq})(\frac{dq}{dx})\} +$$
$$\{(\frac{du}{dz})(\frac{dz}{dy}) + (\frac{du}{dp})(\frac{dp}{dy}) + (\frac{du}{dq})(\frac{dq}{dy})\}]\eta$$
$$= (\frac{du}{dz})\delta z + (\frac{du}{dp})\delta p + (\frac{du}{dq})\delta q$$
$$= (\frac{du}{dz})\delta z + (\frac{du}{dp})\delta(\frac{dz}{dx}) + (\frac{du}{dq})\delta(\frac{dz}{dy})$$
$$= (\frac{du}{dz})\delta z + (\frac{du}{dp})(\frac{d\delta z}{dx}) + (\frac{du}{dq})(\frac{d\delta z}{dy}).$$

Rem. En différentiant $u = f(x, y, z, p, q)$, x et y étant regardés comme constants, on a :

$$du = (\frac{du}{dz})\,dz + (\frac{du}{dp})\,dp + (\frac{du}{dq})\,dq;$$

donc en changeant d en δ, on obtiendra δu.

Exemple.

Soient $\mathrm{V} = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$, $p = (\frac{dz}{dx})$, $q = (\frac{dz}{dy})$, on a :

$$\delta V = \left(\frac{dV}{dp}\right)\delta p + \left(\frac{dV}{dq}\right)\delta q$$

$$= \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \cdot \delta\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,\delta\left(\frac{dz}{dy}\right)\right.$$

$$= \frac{p}{V}\left(\frac{d\delta z}{dx}\right) + \frac{q}{V}\left(\frac{d\delta z}{dq}\right).$$

(3)

Fonctions qui renferment des Intégrales définies.

PREMIER PROBLÈME.

Etant donnée la fonction

$$u = \int_a^\alpha V dx,$$

dans laquelle x *est l'élément constant*, V *étant une fonction de x, y,* etc., *trouver*

$$\delta u,\ \delta^2 u,\ \text{etc.}\ ;$$

y, etc., *sont regardés comme des fonctions de* x.

Solution.

On a par définition :

$$u + Du = \int_a^\alpha (V + DV)\, dx.$$

Or, V est évidemment une fonction de x, telle que $V = fx$, on a donc

$$V + DV = f(x+\eta) = V + \frac{dV}{dx}\eta + \frac{1}{1\cdot 2}\frac{d^2V}{dx^2}\eta^2 + \text{etc.} + R_n,$$

et par suite

$$\delta V = \frac{dV}{dx}\eta, \qquad \delta^2 V = \frac{d^2V}{dx^2}\eta^2, \text{ etc.}$$

on a donc aussi :

$$u + Du = \int_a^\alpha \left[V + \frac{dV}{dx}\eta + \frac{1}{1\cdot 2}\frac{d^2V}{dx^2}\cdot\eta^2 + \text{etc.} + R_n \right] dx.$$

Mais η étant une fonction arbitraire de l'élément constant x, l'expression ci-dessus devient :

$$u+\mathrm{D}u=\int_a^\alpha \mathrm{V}dx+\eta\int_a^\alpha \frac{d\mathrm{V}}{dx}\cdot dx+\frac{1}{1\cdot 2}\eta^2\int_a^\alpha \frac{d^2\mathrm{V}}{dx^2}\,dx$$

$$+\text{ etc. }+\mathrm{R}'_n.$$

Or, les variations première, seconde, etc., de u, étant les termes en η, η^2, etc., du développement de $u+\mathrm{D}u$, il vient :

$$\left.\begin{aligned}\delta u&=\eta\int_a^\alpha \frac{d\mathrm{V}}{dx}\,dx=\int_a^\alpha \frac{d\mathrm{V}}{dx}\,\eta dx=\int_a^\alpha \delta\mathrm{V}dx\,,\\ \delta^2 u&=\eta^2\int_a^\alpha \frac{d^2\mathrm{V}}{dx^2}\,dx=\int_a^\alpha \frac{d^2\mathrm{V}}{dx^2}\,\eta^2 dx=\int_a^\alpha \delta^2\mathrm{V}dx\,,\\ &\text{etc.}\end{aligned}\right\}(11)$$

on a donc

$$u+\mathrm{D}u=u+\delta u+\frac{1}{1\cdot 2}\,\delta^2 u+\text{ etc. }+\mathrm{R}'_n.$$

1re *Rem.* Si dans les premiers membres des équations (11) on remplace u par l'intégrale définie, on obtient les relations suivantes :

$$\delta\int_a^\alpha \mathrm{V}dx=\int_a^\alpha \delta\mathrm{V}dx,$$

$$\delta^2\int_a^\alpha \mathrm{V}dx=\int_a^\alpha \delta^2\mathrm{V}dx\,,$$

etc.,

qui renferment la règle relative à l'échange des notations δ et $\int$; c'est une de celles qu'on emploie le plus souvent dans le calcul des variations.

2^e *Rem.* Si V était une fonction de x et de y, et d'autres variables dépendantes de celles-ci, on trouverait, en raisonnant comme ci-dessus :

$$\mathrm{V}+\mathrm{D}\mathrm{V}=\mathrm{V}+\delta\mathrm{V}+\text{etc.}$$

$$\delta V = [(\frac{dV}{dx}) + (\frac{dV}{dy}) \eta ,$$

etc.

Donc, si l'on donne

$$u = \int_a^\alpha \int_b^\beta V dxdy ,$$

on aura

$$u + Du = \int_a^\alpha \int_b^\beta (V + DV) dxdy$$

$$= u + \eta \int_a^\alpha \int_b^\beta [(\frac{dV}{dx}) + (\frac{dV}{dy})] dxdy + \text{etc.}$$

d'où :

$$\delta u = \eta \int_a^\alpha \int_b^\beta [(\frac{dV}{dx}) + (\frac{dV}{dy})] dxdy$$

$$= \int_a^\alpha \int_b^\beta [(\frac{dV}{dx}) + (\frac{dV}{dy})] \eta \cdot dxdy$$

$$= \int_a^\alpha \int_b^\beta \delta V \cdot dxdy .$$

Mettons pour u sa valeur, il vient

$$\delta \int_a^\alpha \int_b^\beta V dxdy = \int_a^\alpha \int_b^\beta \delta V \cdot dxdy ,$$

ce qui est le principe d'inversion ci-dessus, appliqué aux intégrales doubles.

3ᵉ *Rem.* Il est évident que les déductions ci-dessus s'étendent facilement aux intégrales multiples à limites constantes.

1er *Exemple.*

Soient $V = \sqrt{1+p^2+q^2}$, $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dz}{dx}$, et

$$u = \int_a^\alpha V dx,$$

on aura :

$$\delta u = \delta \int_a^\alpha V dx$$

$$= \int_a^\alpha \delta V dx$$

$$= \int_a^\alpha \left[\frac{p}{V} \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{q}{V} \cdot \frac{d\delta z}{dx} \right] dx.$$

2^{me} *Exemple.*

Soient $V = \sqrt{1+p^2+q^2}$, $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$, $q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$,

$$u = \int_a^\alpha \int_b^\beta V dx\, dy,$$

on aura :

$$\delta u = \delta \int_a^\alpha \int_b^\beta V dx\, dy$$

$$= \int_a^\alpha \int_b^\beta \delta V \cdot dx dy$$

$$= \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[\frac{p}{V} \left(\frac{d\delta z}{dx} \right) + \frac{q}{V} \left(\frac{d\delta z}{dy} \right) \right] dx dy.$$

DEUXIÈME PROBLÈME.

Etant donnée la fonction

$$u = f(x, y, p, q),$$

dans laquelle x *est l'élément constant, si l'on donne*

$$p = \int_a^\alpha V dx, \quad q = \int_a^\alpha W dx,$$

y, **V**, **W** *étant regardés comme des fonctions de* x, *on demande de trouver* δu.

Solution.

En raisonnant comme dans le problème précédent, on trouve aisément

$$u + Du = f(x, y + Dy, p + Dp, q + Dq),$$

et par suite

$$\delta u = \left(\frac{du}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{du}{dp}\right)\delta p + \left(\frac{du}{dq}\right)\delta q$$

$$= \left(\frac{du}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{du}{dp}\right)\delta \int_a^\alpha V dx + \left(\frac{du}{dq}\right)\delta \int_a^\alpha W dx$$

$$= \left(\frac{du}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{du}{dp}\right) \int_a^\alpha \delta V dx + \left(\frac{du}{dq}\right) \int_a^\alpha \delta W dx.$$

(*b*)

FONCTIONS SIMULTANÉES.

PROBLÈME.

Etant donnée la fonction

$$u = f(x, y, z), \qquad (1$$

dans laquelle les variables x, y, z *doivent satisfaire à l'équation de condition*

$$\varphi(x, y, z) = 0, \qquad (2$$

trouver δu ; x *est regardé comme l'élément constant*, y *et* z *sont des fonctions de* x.

Solution.

Première Méthode.

Les équations 1) et 2) donnent:

$$\delta u = \left(\frac{du}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{du}{dz}\right)\delta z ;$$

$$0 = \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)\delta z.$$

En éliminant δy, on trouve :

$$\delta u = \left[\left(\frac{du}{dz}\right)\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) - \left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)\right]\delta z : \left(\frac{d\varphi}{dy}\right).$$

Deuxième Méthode.

Il est souvent avantageux d'éliminer par la méthode des multiplicateurs. A cet effet, multiplions l'équation (2 par un facteur λ, regardé com me constant, alors les deux équations proposées pourront être remplacées par l'équation unique

$$u = u + \lambda \cdot \varphi(x, y, z),$$

et l'on en déduira :

$$\delta u = \left[\left(\frac{du}{dy}\right) + \lambda\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\right]\delta y + \left[\left(\frac{du}{dz}\right) + \lambda\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)\right]\delta z.$$

Pour éliminer maintenant δy, il suffira de supposer à l'indéterminée λ une valeur telle, que l'on ait :

$$\left(\frac{du}{dy}\right) + \lambda\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) = 0; \qquad \text{d'où :}$$

$$\lambda = -\left(\frac{du}{dy}\right) : \left(\frac{d\varphi}{dy}\right).$$

En substituant cette valeur dans l'équation restante

$$\delta u = \frac{du}{dz}) + \lambda\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)\delta z,$$

on trouvera le même résultat que ci-dessus.

Cette méthode, adoptée par Lagrange, et qui s'applique à un nombre quelconque d'équations simultanées, n'est au fond, que la méthode d'élimination de Bézout.

Exemple.

Soient $u = \sqrt{1+p^2+q^2}$, $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dz}{dx}$,

$\varphi(x, y, z) = 0$, on aura :

$$\delta u = \frac{p}{u} \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{q}{u} \cdot \frac{d\delta z}{dx} + \lambda\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\delta y + \lambda\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)\delta z.$$

Les deux premiers termes du second membre de cette formule peuvent se mettre sous une forme telle, que les différentielles $\frac{d\delta y}{dx}$, $\frac{d\delta z}{dx}$ disparaissent, et que les résultats ne laissent plus subsister que les variations δy, δz. En effet, on a :

$$\frac{d\left[\frac{p}{u} \cdot \delta y\right]}{dx} = \frac{p}{u} \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d\left(\frac{p}{u}\right)}{dx}\delta y;$$

$$\frac{d\left[\frac{q}{u} \cdot \delta z\right]}{dx} = \frac{q}{u} \cdot \frac{d\delta z}{dx} + \frac{d\left(\frac{q}{u}\right)}{dx}\delta z,$$

on tire de celles-ci :

$$\frac{p}{u} \cdot \frac{d\delta y}{dx} = \frac{d\left[\frac{p}{u} \cdot \delta y\right]}{dx} - \frac{d\left(\frac{p}{u}\right)}{dx}\delta y,$$

$$\frac{q}{u} \cdot \frac{d\delta z}{dx} = \frac{d\left[\frac{q}{u} \cdot \delta z\right]}{dx} - \frac{d\left(\frac{q}{u}\right)}{dx}\delta z.$$

En substituant ces résultats dans l'expression ci-dessus de δu, on trouve, en ordonnant :

$$\delta u = \frac{d\left[\frac{p}{u} \cdot \delta y + \frac{q}{u} \cdot \delta z\right]}{dx} + \left[\lambda\left(\frac{d\varphi}{du}\right) - \frac{d\left(\frac{p}{u}\right)}{dx}\right]\delta y$$

$$+ \left[\lambda\left(\frac{d\varphi}{dz}\right) - \frac{d\left(\frac{q}{u}\right)}{dx}\right]\delta z.$$

Eliminons δz ; pour cela posons

$$\lambda\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)-\frac{d\left(\frac{q}{u}\right)}{dx}=0\ ,$$

ou

$$\lambda=\frac{d\left(\frac{q}{u}\right)}{dx}:\left(\frac{d\varphi}{dz}\right);$$

il vient :

$$\delta u=\frac{d\left[\frac{p}{u}\delta y+\frac{q}{u}\cdot\delta z\right]}{dx}+\frac{\frac{d\left(\frac{q}{u}\right)}{dx}\cdot\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)-\frac{d\left(\frac{p}{u}\right)}{dx}\cdot\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)}{\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)}\cdot\delta y.$$

Le facteur δz, subsistant dans le premier terme de ce résultat, doit être éliminé directement par l'emploi de l'équation $\varphi(x,y,z)=0$, qui donne :

$$\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\delta y+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)\delta z=0,$$

d'où :

$$\delta z=-\left(\frac{d\varphi}{dy}\right):\left(\frac{d\varphi}{dz}\right).$$

On a donc finalement :

$$\delta u=\frac{d}{dx}\left\{\frac{\left[\frac{p}{u}\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)-\frac{q}{u}\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\right]\delta y}{\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)}\right\}+$$

$$\frac{\frac{d\left(\frac{q}{u}\right)}{dx}\cdot\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)-\frac{d\left(\frac{p}{u}\right)}{dx}\cdot\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)}{\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)}\cdot\delta y.$$

Rem. Si l'on fesait

$$\varphi(x,\ y,\ z)=x^2+y^2+z^2-r^2=0\ ,$$

on trouverait

$$\frac{p}{u}=\frac{\frac{dy}{dx}}{u}=\frac{dy}{udx}=\frac{dy}{ds}\,,\quad ds=udx;$$

$$\frac{q}{u}=\frac{\frac{dz}{dx}}{u}=\frac{dz}{udx}=\frac{dz}{ds}\,,$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)=u,\quad \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)=2y,$$

et l'expression ci-dessus se changerait en :

$$\delta u=\frac{d}{dx}\left\{\left[\frac{dy}{ds}-\frac{y}{z}\frac{dz}{ds}\right]\delta y\right\}-\left\{\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{dx}-\frac{y}{z}\cdot\frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{dx}\right\}\delta y.\ (\beta)$$

Soit maintenant

$$u'=\int_a^\alpha dx\sqrt{1+p^2+q^2},$$

on aura :

$$\delta u'=\int_a^\alpha \delta u\cdot dx.$$

En substituant ici la valeur de δu, que donne la formule (β), on aura, dans les conditions de cette formule:

$$\int_a^\alpha \delta u\cdot dx=\int_a^\alpha \delta\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot dx$$

$$=\left(\frac{dy}{ds}-\frac{y}{z}\cdot\frac{dz}{ds}\right)_\alpha \delta y_\alpha-\left(\frac{dy}{ds}-\frac{y}{z}\cdot\frac{dz}{ds}\right)_a \delta z_a+$$

$$\int_a^\alpha dx\left\{\frac{d\frac{dy}{ds}}{dx}-\frac{y}{z}\cdot\frac{d\frac{dz}{ds}}{dx}\right\}\delta y.$$

Les § précédents renferment les règles pour former les variations simples, nous allons donner celles qui se rapportent aux variations composées.

§ 4.

FORMATION DES VARIATIONS COMPOSÉES.

Nons examinerons consécutivement les cas des fonctions à variables primitives, de celles qui renferment des dérivées, et enfin les fonctions dans lesquelles entrent des intégrales définies.

(1)

FONCTIONS A VARIABLES PRIMITIVES.

Premier Problème.

Etant donnée la fonction

$$z = f(x, y),$$

dans laquelle x *est l'élément constant, et* y *une fonction de* x, *trouver les variations composées du premier, second, etc., ordre de* z *savoir :*

$$\delta' z, \ \delta'^2 z, \ \text{etc.}$$

Solution.

On a par définition :

$$z + D'z = f(x, y + Dy) + Df(x, y + Dy).$$

Mais, par les § précédents, on a généralement :

$$f + Df = f + \delta f + \frac{1}{1 \cdot 2}\delta^2 f + \text{etc.};$$

on a donc :

$$z + D'z = f(x, y + Dy) + \delta f(x, y + Dy) + \frac{1}{1 \cdot 2}\delta^2 f(x, y + Dy) + \text{etc.} + R_n.$$

Si nous développons la fonction $f(x, y + Dy)$ par la formule de Taylor, il vient :

$$z + D'z = z + \left(\frac{dz}{dy}\right) Dy + \frac{1}{1 \cdot 2}\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) Dy^2 + \text{etc.} + \delta\left[z + \left(\frac{dz}{dy}\right) Dy + \text{etc.}\right] + \frac{1}{1 \cdot 2}\delta^2\left[z + \text{etc.}\right] + \text{etc.} + R_n.$$

Mais on a aussi :

$$Dy = \delta y + \frac{1}{1\cdot 2}\delta^2 y + \text{etc.};$$

donc

$$z + D'z = z + \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\delta y + \frac{1}{1\cdot 2}\delta^2 y + \text{etc.}\right) + \frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)(\delta y + \text{etc.})^2 + \text{etc.}$$

$$+ \delta\left[z + \left(\frac{dz}{dy}\right)(\delta y + \text{etc.}) + \text{etc.}\right] + \frac{1}{1\cdot 2}\delta^2(z + \text{etc.}) + \text{etc.} + R_n$$

$$= z + \left[\delta z + \left(\frac{dz}{dy}\right)\delta y\right] +$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}\left[d^2 z + 2\delta\left(\frac{dz}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{dz}{dy}\right)\delta^2 y + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\delta y^2\right] + \text{etc.} + R_n.$$

Mais on a :

$$\delta z = \left(\frac{dz}{dx}\right)\eta,\ \partial y = \frac{dy}{dx}\cdot\eta,\ \delta\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{d\left(\frac{dz}{dy}\right)}{dx}\cdot\eta,$$

$$\delta^2 z = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\eta^2,\ \delta^2 y = \frac{d^2y}{dx^2}\eta^2,$$

etc.,

donc

$$z + D'z = z + \left[\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{dy}{dx}\right]\eta +$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}\left[\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + 2\,\frac{d\left(\frac{dz}{dy}\right)}{dx}\cdot\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\frac{dy^2}{dx^2}\right]\eta^2 + \text{etc.} + R_n.$$

Or, on a :

$$\frac{dz}{dx} = \left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{dz^2}{dx^2} = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{d^2z}{dydx}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\frac{dy^2}{dx^2},$$

etc.

Donc

$$z + D'z = z + \frac{dz}{dx} \cdot \eta + \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{d^2z}{dx^2} \eta^2 + \text{etc.} + R_n.$$

Mais les variations composées première, seconde, etc., sont les termes en η, η^2, etc., du développement de $z + D'z$, on a donc :

$$\delta' z = \frac{dz}{dx} \cdot \eta$$

$$= [(\frac{dz}{dx}) + (\frac{dz}{dy}) \frac{dy}{dx}] \eta$$

$$= \delta z + (\frac{dz}{dy}) \delta y ;$$

$$\delta'^2 z = \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \eta^2$$

$$= [(\frac{d^2z}{dx^2}) + 2 (\frac{d^2z}{dxdy}) \frac{dy}{dx} + (\frac{dz}{dy}) \frac{d^2y}{dx^2} + (\frac{d^2z}{dy^2}) (\frac{dy}{dx})^2] \eta^2$$

$$= \delta^2 z + 2 \frac{d\delta z}{dy} \delta y + (\frac{dz}{dy}) \delta^2 y + (\frac{d^2z}{dy^2}) \delta y^2$$

etc.

On a donc finalement aussi

$$z + D'z = z + \delta' z + \frac{1}{1 \cdot 2} \delta'^2 z + \text{etc.} + R'_n.$$

Deuxième Problème.

Etant donnée la fonction

$$u = f(x, y, z),$$

dans laquelle z *est une fonction de* x *et de* y, *et* y *une fonction de l'élément constant* x, *trouver la variation composée première de* u, *savoir* $\delta' u$.

On a d'abord, en regardant x et y comme constants, et en supposant $z = \varphi(x, y)$:

$$z + Dz = \varphi(x, y) + D\varphi(z, y).$$

Donc, quand y devient $y + Dy$, dans cette expression, z deviendra $z + D'z$, et par conséquent la déformation composée de u sera exprimée par

$$u+D'u=f(x,\,y+Dy,\,z+D'z)+Df(x,\,y+Dy,\,z+D'z).$$

Mais comme on a, par les § précédents,

$$f+Df=f+\delta f+\text{etc.},$$

on aura :

$$u+D'u=f(x,\,y+Dy,\,z+D'z)+\delta f(x,\,y+Dy,\,z+D'z)+\text{etc.}+R_n.$$

Développons la fonction $f(x,\,y+Dy,\,z+D'x)$ par la formule de Taylor, il vient :

$$u+D'u=u+\left(\frac{du}{dy}\right)Dy+\left(\frac{du}{dz}\right)D'z+\text{etc.}+\delta[u+\text{etc.}]$$
$$+\text{etc.}+R_n.$$

Mais on a :

$$Dy=\delta y+\frac{1}{1\cdot 2}\delta^2 y+\text{etc.}$$

$$D'z=\delta' z+\frac{1}{1\cdot 2}\delta'^2 z+\text{etc.};$$

donc

$$u+D'u=u+\left(\frac{du}{dy}\right)(\delta y+\text{etc.})+\left(\frac{du}{dz}\right)(\delta' z+\text{etc.})$$
$$+\delta u+\text{etc.}+R_n$$
$$=u+\left[\left(\frac{du}{dy}\right)\delta y+\left(\frac{du}{dz}\right)\delta' z+\delta u\right]+\text{etc.}+R_n;$$

d'où l'on conclut, comme dans le problème précédent :

$$\delta' u=\delta u+\left(\frac{du}{dy}\right)\delta y+\left(\frac{du}{dz}\right)\delta' z.$$

Si l'on veut exprimer $\delta' u$ en fonction de δu, δy, δz, il faudra substituer dans la formule précédente à la place de $\delta' z$ sa valeur que donne le problème précédent, et alors on a :

$$\delta' u=\delta u+\left(\frac{du}{dy}\right)\delta y+\left(\frac{du}{dz}\right)\left[\delta z+\left(\frac{dz}{dy}\right)\delta y\right]$$
$$=\delta u+\left(\frac{du}{dz}\right)\delta z+\left[\left(\frac{du}{dy}\right)+\left(\frac{du}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\right]\delta y.$$

Désignons la dérivée partielle de u par rapport à y et z, z étant fonction de y, par

$$\left[\frac{du}{dy}\right] = \left(\frac{du}{dy}\right) + \left(\frac{du}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

on aura finalement

$$\delta' u = \delta u + \left(\frac{du}{dz}\right)\delta z + \left[\frac{du}{dy}\right]\delta y. \qquad (12)$$

TROISIÈME PROBLÈME.

Etant données les deux fonctions

$$z = \varphi(x, y), \qquad c = \xi(x, y),$$

si l'on suppose $z = c$, *et que la déformée composée* $z + D'z$ *coïncide avec la déformée simple* $c + Dc$, *trouver* $\delta' z$ *en fonction de* δc, *et par suite* δz *en fonction de* δy.

Solution.

On a par hypothèse :

$$z + D'z = c + Dc, \quad z = c, \quad \text{donc}$$
$$D'z = Dc;$$

donc :

$$\delta' z + \frac{1}{1\cdot 2}\delta'^2 z + \text{etc.} = \delta c + \frac{1}{1\cdot 2}\delta^2 c + \text{etc.}$$

Mais on a :

$$\delta' z = \delta z + \left(\frac{dz}{dy}\right)\delta y \qquad (12')$$

$$= \left[\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{dy}{dx}\right]\eta,$$

$$\delta c = \frac{dc}{dx}\cdot\eta;$$

donc

$$\left[\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{dy}{dx}\right]\eta + \text{etc.} = \frac{dc}{dx}\eta + \text{etc.}$$

d'où :

$$\left[\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]\eta = \frac{dc}{dx}\cdot\eta,$$

ou

$$\delta' z = \delta c. \qquad (13)$$

On a ensuite :

$$\delta' z = \delta z + \left(\frac{dz}{dy}\right) \delta y, \quad \delta c = \frac{dc}{dx} \eta = \frac{dc}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \eta = \frac{dc}{dy} \delta y ;$$

donc

$$\delta z + \left(\frac{dz}{dy}\right) \delta y = \frac{dc}{dy} \delta y ,$$

d'où :

$$\delta z = \left[\left(\frac{dc}{dy}\right) - \left(\frac{dz}{dy}\right) \right] \delta y, \qquad (14)$$

(2)

Fonctions qui renferment des dérivées.

PREMIER PROBLÈME.

Etant donnée la fonction

$$p = \frac{d^m z}{dx^m},$$

dans laquelle z *est une fonction de* x *et de* y, *et* y *une fonction de l'élément constant* x, *trouver les variations composées première, seconde, etc., de* p, *savoir*

$$\delta' p, \ \delta'^2 p, \ \text{etc.}$$

Solution.

On a d'abord :

$$p + D' p = \frac{d^m (z + D' z)}{dx^m} ,$$

$$= \frac{d^m \left(z + \delta' z + \frac{1}{1 \cdot 2} \delta'^2 z + \text{etc.}\right)}{dx^m}$$

$$= \frac{d^m z}{dx^m} + \frac{d^m \delta' z}{dx^m} + \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{d^m \delta'^2 z}{dx^m} + \text{etc.}$$

Mais on a

$$\delta' z = \frac{dz}{dx} \cdot \eta, \qquad \delta'^2 z = \frac{d^2 z}{dx^2} \eta^2, \text{ etc.},$$

de plus η est une fonction arbitraire de l'élément constant x, et par conséquent constant, on a donc :

$$p + D' p = \frac{d^m z}{dx^m} + \frac{d^{m+1} z}{dx^{m+1}} \cdot \eta + \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{d^{m+2} z}{dx^{m+2}} \cdot \eta^2 + \text{etc.} ;$$

d'où :

$$\delta' p = \frac{d^{m+1}z}{dx^{m+1}} \cdot \eta = \frac{d^m \delta' z}{dx^m},$$

$$\delta'^2 p = \frac{d^{m+2}z}{dx^{m+2}} \; \eta' = \frac{d^m \delta'^2 z}{dx^m},$$

etc.

Rem. Mettons dans les premiers membres de ces derniers pour p sa valeur, il viendra :

$$\delta' \frac{d^m z}{dx^m} = \frac{d^m \delta' z}{dx^m},$$

$$\delta'^2 \frac{d^m z}{dx^m} = \frac{d^m \delta'^2 z}{dx^m},$$

etc.

L'on voit par ces résultats que le principe de l'échange des caractéristiques δ et d subsiste aussi entre δ' et d.

Deuxième Problème.

Etant donnée la fonction

$$V = f(x, y, z, p, q),$$

dans laquelle z, p, q *sont des fonctions de* x *et de* y, *et* y *une fonction de l'élément constant* x, *trouver* $\delta' V$, *sachant que l'on a*

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right), \qquad q = \left(\frac{dz}{dy}\right).$$

Solution.

On a par définition :

$$V + D'V = f(x, y + Dy, z + D'z, p + D'p, q + D'q) + Df(x, y + Dy, z + D'z, p + D'p, q + D'q).$$

Donc, à cause de la formule

$$f + Df = f + \delta f + \text{etc.},$$

on a :

$$V + D'V = V + \left(\frac{dV}{dy}\right) Dy + \left(\frac{dV}{dz}\right) D'z + \left(\frac{dV}{dp}\right) D'p + \left(\frac{dV}{dq}\right) D'q + \delta\,[V + \text{etc.}] + \text{etc.}$$

$$= V + \left[\left(\frac{dV}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{dV}{dz}\right)\delta' z + \left(\frac{dV}{dp}\right)\delta' p + \left(\frac{dV}{dq}\right)\delta' q + \delta V\right] + \text{etc.}$$

Donc enfin :

$$\delta' V = \left(\frac{dV}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{dV}{dz}\right)\delta' z + \left(\frac{dV}{dp}\right)\delta' p + \left(\frac{dV}{dq}\right)\delta' q + \delta V.$$

(3)

Fonctions qui renferment des Intégrales définies.

PREMIER PROBLÈME.

Etant donnée l'expression

$$u = \int_{y_0}^{y_1} V dy,$$

dans laquelle V *est une fonction de* x *et de* y, *et* y *une fonction de l'élément constant* x, *en supposant que* y_0 *et* y_1 *soient aussi des fonctions de* x, *qui se déforment en même temps que* y, *on demande de trouver les variations composées* $\delta' u$, $\delta'^2 u$, etc.

Solution.

On a d'abord :

$$u + D'u = \int_{y_0}^{y_1} (V + D'V)\, dy.$$

$$= \int_{y_0}^{y_1} V dy + \int_{y_0}^{y_1} \delta' V dy + \frac{1}{1\cdot 2}\int_{y_0}^{y_1} \delta'^2 V dy + \text{etc.} + R_n.$$

Mais on a :

$$\delta' V = \frac{dV}{dx}\cdot \eta, \quad \delta'^2 V = \frac{d^2V}{dx^2}\cdot \eta^2, \text{ etc.};$$

de plus, η étant fonction de l'élément constant x, doit être regardé comme constant, on a donc :

$$u + D'u = \int_{y_0}^{y_1} V dy + \eta \int_{y_0}^{y_1} \frac{dV}{dx}\, dy + \frac{1}{1\cdot 2}\eta^2 \int_{y_0}^{y_1} \frac{d^2V}{dx^2}\, dy + \text{etc.}$$

d'où :

$$\delta' u = \eta \int_{y_0}^{y_1} \frac{dV}{dx}\, dy = \int_{y_0}^{y_1} \delta' V dy\,,$$

$$\delta'^2 y = \eta^2 \int_{y_0}^{y_1} \frac{d^2V}{dx^2}\, dy = \int_{y_0}^{y_1} \delta'^2 V dy.$$

etc.

1re *Rem.* Remplaçons u par sa valeur, on a :

$$\delta' \int_{y_0}^{y_1} V dy = \int_{y_0}^{y_1} \delta' V dy,$$

$$\delta'^2 \int_{y_0}^{y_1} V dy = \int_{y_0}^{y_1} \delta'^2 V dy\,,$$

etc.

Donc, le principe pour l'échange des notations δ et $\int$ subsiste pour δ' et $\int$.

2e *Rem.* Si l'on veut exprimer $\delta' u$ en fonction de δV, on devra recourir à la relation

$$\delta' V = \delta V + \left(\frac{dV}{dy}\right) \delta y\,,$$

de laquelle on déduit :

$$\int \delta' V dy = \int \delta V dy + \int \left(\frac{dV}{dy}\right) dy, \delta y.$$

Comme δy est une fonction arbitraire de l'élément constant x, il est clair que cette quantité doit être regardée comme un facteur constant dans l'intégration par rapport à y, on a donc

$$\int \left(\frac{dV}{dy}\right) dy \cdot \delta y = \delta y \int \left(\frac{dV}{dy}\right) dy = \delta y \cdot V,$$

et par suite

$$\int \delta' V dy = V \cdot \delta y + \int \delta V \cdot dy.$$

On a donc enfin :

$$\delta' u = \int_{y_0}^{y_1} \delta' V dy = V_{y_1} dy^2 - V_{y_0} \delta y_0 + \int_{y_0}^{y_1} \delta V dy. \qquad (15)$$

Dans les § précédents se trouvent exposés les principes les plus essentiels pour la formation des variations *pures*, nous allons présentement passer aux variations *mixtes*.

§ 5.

FORMATION DES VARIATIONS MIXTES.

(1)

Fonctions composées de variables primitives.

PREMIER PROBLÈME.

Etant donnée la fonction

$$y = fx,$$

dans laquelle x *est la variable indépendante, trouver les variations mixtes premières, secondes, etc., de y, savoir*

$$\delta_1 y, \ \delta_1{}^2 y, \text{ etc.}$$

Solution.

Soient $\eta_1 = \eta + dx$, $\eta_1{}^2 = (\eta + dx)^2$, etc.; cela posé, nous nommerons variations mixtes du premier, second, etc., ordre, les termes en η_1, $\eta_1{}^2$, etc., du développement de la déformée mixte.

Or, on a :

$$y + D_1 y = f(x + dx) + Df(x + dx) = f(x + dx + \eta) = f(x + \eta_1).$$

Si donc on développe la fonction

$$f(x, \eta_1),$$

on obtient :

$$y + D_1 y = y + \frac{dy}{dx} \eta_1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{d^2 y}{dx^2} \eta_1{}^2 + \text{etc.} + R_n.$$

On a donc

$$\delta_1 y = \frac{dy}{dx} \eta_1$$
$$= \frac{dy}{dx} (\eta + dx) = \frac{dy}{dx} \eta + \frac{dy}{dx} dx$$

$$= \delta y + \frac{dy}{dx}\ dx\ ; \tag{16}$$

$$\delta_1{}^2 y = \frac{d^2y}{dx^2}\,\eta_1{}^2$$

$$= \frac{dy^2}{dx^2}(\eta + dx)^2 = \frac{d^2y}{dx^2}\,\eta^2 + 2\,\frac{d^2y}{dx^2}\ dx\cdot\eta + \frac{d^2y}{dx^2}\,dx^2$$

$$= \delta^2 y + 2\delta\,\frac{dy}{dx}\ dx + \frac{d^2y}{dx^2}\,dx^2. \tag{17}$$

etc.

Par là, la formule ci-dessus, peut s'écrire :

$$y + D_1 y = y + \delta_1 y + \frac{1}{1\cdot 2}\,\delta_1{}^2 y + \text{etc.} + R_n.$$

Deuxième Problème.

Etant données les fonctions

$$y = \varphi x,\ b = \xi x,$$

en supposant

$$y = b,$$

$$y + D_1 y = \xi\,(x + dx),$$

exprimer $\delta_1 y$, $\delta_1{}^2 y$, etc., *en fonction de* dx, dx^2, etc., *et* δy *en fonction de* dx.

Solution.

On a par hypothèse :

$$y + D_1 y = \xi\,(x + dx),$$

donc aussi :

$$y + \frac{dy}{dx}(\eta + dx) + \frac{1}{1\cdot 2}\,\frac{d^2y}{dx^2}(\eta + dx)^2 + \text{etc.} =$$

$$b + \frac{db}{dx}\,dx + \frac{1}{1\cdot 2}\,\frac{d^2b}{dx^2}\,dx^2 + \text{etc.}$$

ou :

$$y + \frac{dy}{dx}\left(\frac{\eta}{dx} + 1\right)dx + \frac{1}{1\cdot 2}\,\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{\eta}{dx} + 1\right)^2 dx^2 + \text{etc.} =$$

$$b + \frac{db}{dx}\ dx + \frac{1}{1\cdot 2}\,\frac{d^2b}{dx^2}\,dx^2 + \text{etc.}$$

Comme on a $y = b$, on aura, en divisant par dx, puis en fesant $dx = 0$:

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{\eta}{dx}+1\right)=\frac{db}{dx},$$

on aura de même

$$\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{\eta}{dx}+1\right)^2=\frac{d^2b}{dx^2},$$

etc.

On conclut de là :

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{dy}{dx}(\eta+dx)=\dfrac{db}{dx}dx, & \text{ou} & \delta_1 y=\dfrac{db}{dx}dx\,; \\ \dfrac{d^2y}{dx^2}(\eta+dx)^2=\dfrac{d^2b}{dx^2}dx^2, & \text{ou} & \delta_1^2 y=\dfrac{d^2b}{dx^2}dx^2, \text{ etc.} \end{array}\right\} \quad (18)$$

1er *Rem.* Comme on a :

$$\delta_1 y=\delta y+\frac{dy}{dx}dx,$$

la première des formules (18) donnera :

$$\delta y+\frac{dy}{dx}dx=\frac{db}{dx}dx,$$

d'où :

$$\delta y=\left(\frac{db}{dx}-\frac{dy}{dx}\right)dx. \qquad (19)$$

2^e *Rem.* En géométrie, $y=\varphi x$ est une ligne ab, et $b=\xi x$ une ligne cd; soient $OP=x$, $aP=y=b$; quand ab se déforme, et devient $a'b'$, alors y devient

$$PN=\varphi(x+\eta).$$

Si dans cette courbe $a'b'$, x devient $x+PQ=x+dx$, on obtient la déformée mixte

$$M'Q=\varphi(x+dx+\eta)=y+D_1y.$$

Mais si dans la courbe cd, ou $b=\xi x$, dans laquelle on a $b=aP=y$, on change x, ou OP, en $x+PQ=x+dx$, on obtient

$$M'Q=\xi(x+dx),$$

on a donc

$$y+D_1y=\xi(x+dx).$$

TROISIÈME PROBLÈME.

Etant donnée la fonction

$$u = f(x, y),$$

dans laquelle x *et* y *sont les variables indépendantes, trouver*

$$\delta_1 u, \ \delta_1{}^2 u, \ \text{etc.}$$

Solution.

On a :

$$u + D_1 u = f(x + dx, y + dy) + Df(x + dx, y + dy)$$

$$= f(x + dx, y + dy) + \delta f(x + dx, y + dy) + \text{etc.}$$

Développons la fonction $f(x + dx, y + dy)$, nous aurons :

$$u + D_1 u = u + \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy + \text{etc.} +$$

$$\delta\, [u + \text{etc.}\,] + \text{etc.}$$

Donc, en ordonnant, on a :

$$u + D_1 u = u + \left[\left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) \delta y + \delta u\right] + \text{etc.}$$

Mais on a :

$$\delta u = \left(\frac{du}{dx}\right) \eta + \left(\frac{du}{dy}\right) \eta, \text{ donc}$$

$$u + D_1 u = u + \left[\left(\frac{du}{dx}\right)(\eta + dx) + \left(\frac{du}{dy}\right)(\eta + dy)\right] + \text{etc.}$$

On a donc :

$$\delta_1 u = \left(\frac{du}{dx}\right)(\eta + dx) + \left(\frac{du}{dy}\right)(\eta + dy)$$

$$= \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dx}\right) dy + \delta u$$

$$= du + \delta u.$$

Si nous posons, pour abréger,

$$\eta + dx = \eta_1, \qquad \eta + dy = \eta_1{}',$$

nous aurons également :

$$u + D_1 u = f(x + \eta_1 \ , \ y + \eta_1')$$
$$= u + [(\frac{du}{dx})\eta_1 + (\frac{du}{dy})\eta_1'] +$$
$$\frac{1}{1\cdot 2}[(\frac{d^2u}{dx^2})\eta_1^2 + 2(\frac{d^2u}{dxdy})\eta_1\eta_1' +$$
$$(\frac{d^2u}{dy^2})\eta_1'^2] + \text{etc.}$$

Or, les variations mixtes du premier, du second, etc., ordre des fonctions de deux variables, sont respectivement les termes du premier, du second, etc., ordre en η_1 et η_1', on a donc :

$$\delta_1 u = (\frac{du}{bx})\eta_1 + (\frac{du}{dy})\eta_1',$$

$$\delta_1^2 u = (\frac{d^2u}{dx^2})\eta_1^2 + 2(\frac{d^2u}{dxdy})\eta_1\eta_1' + (\frac{d^2u}{dy^2})\eta_1'^2,$$
etc.

Donc :

$$u + D_1 u = u + \delta_1 u + \frac{1}{1\cdot 2}\delta_1^2 u + \text{etc.} + R_n.$$

Quatrième Problème.

Etant donnée la fonction

$$u = f(x, y),$$

dans laquelle y *est une fonction de l'élément constant x, trouver la variation mixte composée $\delta_1' u$.*

Solution.

Si dans la déformée composée

$$u + D'u = f(x, y + Dy) + Df(x, y + Dy),$$

on change x en $x + dx$, et par conséquent $y + Dy$ en $y + D_1 y$, on obtient la déformée composée mixte, savoir :

$$u + D_1' u = f(x + dx, y + D_1 y) + Df(x + dx, y + D_1 y)$$
$$= f(x + dx, y + D_1 y) + \delta f(x + dx, y + D_1 y) + \text{etc.}$$
$$= u + (\frac{du}{dx})dx + (\frac{du}{dy})D_1 y + \text{etc.} + \delta[u + \text{etc.}] + \text{etc.}$$

Mais on a

$$D_1 y = \delta_1 y + \frac{1}{1\cdot 2}\,\delta_1^2 y + \text{etc. };$$

donc

$$u + D_1'u = u + \left(\frac{du}{dx}\right)dx + \left(\frac{du}{dy}\right)[\delta_1 y + \text{ etc.}] + \text{etc.} + \delta[u + \text{etc.}] + \text{etc.}$$

En ordonnant on a :

$$u + D_1'u = [\left(\frac{du}{dx}\right)dx + \left(\frac{du}{dy}\right)\delta_1 y + \delta u] + \text{etc.}$$

Mais on a trouvé :

$$\delta_1 y = \delta y + \frac{dy}{dx}\,dx\,,$$

donc

$$u + D_1'u = u + [\,\delta u + \left(\frac{du}{dy}\right)\left\{\delta y + \frac{dy}{dx}\,dx\right\} + \left(\frac{du}{dx}\right)dx] + \text{etc.}$$

$$= u + [\delta u + \left(\frac{du}{dy}\right)\delta y + \left\{\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx}\right\}dx] + \text{etc.}$$

$$= u + [\delta u + \left(\frac{du}{dy}\right)\delta y + \frac{du}{dx}\,dx] + \text{etc.}$$

$$= u + [\delta' u + \frac{du}{dx}\,dx] + \text{etc.}$$

$$= u + [\frac{du}{dx}\,\eta + \frac{du}{dx}\,dx] + \text{etc.}$$

$$= u + \frac{du}{dx}(\eta + dx) + \text{etc.}$$

$$= u + \frac{du}{dx}\,\eta_1 + \text{etc.}$$

Donc

$$\delta_1' u = \frac{du}{dx}\,\eta_1$$

$$= \delta' u + \frac{du}{dx}\,dx$$

$$= \delta u + \left(\frac{du}{dy}\right)\delta y + du. \qquad (20)$$

Cinquième Problème.

Etant donnée la fonction

$$u = f(x, y, z),$$

dans laquelle z *est une fonction de* x *et de* y, *et* y *une fonction de l'élément constant* x, *trouver la variation* $\delta_1{}'u$.

Solution.

On a :

$$u + D_1{}'u = f(x + dx,\ y + D_1 y,\ z + D_1{}'z) + Df(x + dx,\ y + D_1 y, z + D_1{}'z).$$

En développant par la formule

$$f + Df = f + \delta f + \text{etc.},$$

on a :

$$u + D_1{}'u = u + \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) D_1 y + \left(\frac{du}{dz}\right) D_1{}'z + \text{etc.} + \delta\,[\,u + \text{etc.}\,] + \text{etc.},$$

$$= u + \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) [\,\delta_1 y + \text{etc.}\,] + \left(\frac{du}{dz}\right) [\,\delta_1{}'z + \text{etc.}\,] + \delta u + \text{etc.}$$

$$= u + \left[\left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) \delta_1 y + \left(\frac{du}{dz}\right) \delta_1{}'z + \delta u\right] + \text{etc.}$$

Mettons pour $\delta_1 y$ et $\delta_1{}'z$ leurs valeurs, nous aurons :

$$u + D_1{}'u = u + \left\{ \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) \left[\,\delta y + \frac{dy}{dx}\,dx\,\right] + \left(\frac{du}{dz}\right) \left[\,\delta z + \left(\frac{dz}{dy}\right) \delta y + \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy\,\right] + \delta u \right\} + \text{etc.}$$

En ordonnant par rapport à δy et δz, on a :

$$u + D_1{}'u = u + \left\{ \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy + \left(\frac{du}{dz}\right) \left[\left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \right.\right.$$

$$(\frac{dz}{dy})\,dy] + [(\frac{du}{dy}) + (\frac{du}{dz})(\frac{dz}{dy})]\,\delta y +$$

$$(\frac{du}{dz})\,\delta z + \delta u \} + \text{etc.}$$

Mais on a :

$$dz = (\frac{dz}{dx})\,dx + (\frac{dz}{dy})\,dy,$$

$$du = (\frac{du}{dx})\,dx + (\frac{du}{dy})\,dy + (\frac{du}{dz})\,dz\,,$$

$$[\frac{du}{dy}] = (\frac{du}{dy}) + (\frac{du}{dz})(\frac{dz}{dy}),$$

donc l'expression précédente devient :

$$u + D_1{}'u = u + \{ du + [\frac{du}{dy}]\,\delta y + (\frac{du}{dz})\,\delta z + \delta u \} + \text{etc.}$$

$$= u + [\delta' u + du] + \text{etc.}$$

$$= u + [\frac{du}{dx}\,\eta + \frac{du}{dx}\,dx] + \text{etc.}$$

$$= u + \frac{du}{dx}(\eta + dx) + \text{etc.}$$

$$= u + \frac{du}{dx}\,\eta_1 + \text{etc.}$$

Donc

$$\delta_1{}'u = \frac{du}{dx}\,\eta_1$$

$$= \delta' u + du$$

$$= du + \delta u + (\frac{du}{dz})\,\delta z + [\frac{du}{dy}]\,\delta y. \qquad (21)$$

On a donc aussi :

$$u + D_1{}'u = u + \delta_1{}'u + \frac{1}{1\cdot 2}\,\delta_1{}'^2 u + \text{etc.}$$

(3)

Fonctions qui renferment des intégrales définies.

Problème.

Etant donnée la fonction

$$u = \int_a^\alpha V dx,$$

x *étant l'élément constant, trouver* $\delta_1 u$.

Solution.

On a :

$$u + D_1 u = \int_a^\alpha (V + D_1 V)\, dx$$

$$= \int_a^\alpha V dx + \int_a^\alpha \delta_1 V dx + \frac{1}{1\cdot 2}\int_a^\alpha \delta_1{}^2 V dx + \text{etc.}$$

$$= \int_a^\alpha V dx + \eta_1 \int_a^\alpha \frac{dV}{dx}\, dx + \frac{1}{1\cdot 2}\,\eta_1{}^2 \int_a^\alpha \frac{d^2V}{dx^2}\, dx + \text{etc.}$$

Donc :

$$\delta_1 u = \eta_1 \int_a^\alpha \frac{dV}{dx}\, dx = \int_a^\alpha \delta_1 V dx,$$

$$\delta_1{}^2 u = \eta_1{}^2 \int_a^\alpha \frac{d^2V}{dx^2}\, dx = \int_a^\alpha \delta_1{}^2 V dx,$$

etc.

Donc :

$$\delta_1 \int_a^\alpha V dx = \int_a^\alpha \delta_1 V dx,$$

on a donc aussi :

$$p + D_1 p = p + \delta_1 p + \frac{1}{1\cdot 2}\,\delta_1^2 p + \text{etc.}$$

Rem. En substituant dans les formules ci-dessus pour p sa valeur, on a :

$$\delta_1 \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{d^m \delta_1 y}{dx^m},$$

$$\delta_1^2 \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{d^m \delta_1^2 y}{dx^m},$$

etc.

Deuxième Problème.

Etant donnée la fonction

$$V = f(x, y, p),$$

dans laquelle on a $p = \frac{dy}{dx}$, *trouver* $\delta_1 V$; y *est une fonction, ainsi que* p, *de l'élément constant* x.

Solution.

On a :

$$\delta_1 V = \delta V + dV$$
$$= \left(\frac{dV}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{dV}{dp}\right)\frac{d\delta y}{dx} + dV.$$

Rem. Soient encore

$$V = f(x, y, z, p, q),\ p = \frac{dy}{dx},\ q = \frac{dz}{dx},$$

on aura :

$$\delta_1 V = \delta V + dV$$
$$= dV + \left(\frac{dV}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{dV}{dz}\right)\delta z + \left(\frac{dV}{dp}\right)\frac{d\delta y}{dx} + \left(\frac{dV}{dq}\right)\frac{d\delta z}{dx}.$$

(3)

Fonctions qui renferment des intégrales définies.

PROBLÈME.

Etant donnée la fonction

$$u = \int_a^\alpha V dx,$$

x *étant l'élément constant, trouver* $\delta_1 u$.

Solution.

On a :

$$u + D_1 u = \int_a^\alpha (V + D_1 V)\, dx$$

$$= \int_a^\alpha V dx + \int_a^\alpha \delta_1 V dx + \frac{1}{1 \cdot 2} \int_a^\alpha \delta_1^2 V dx + \text{etc.}$$

$$= \int_a^\alpha V dx + \eta_1 \int_a^\alpha \frac{dV}{dx}\, dx + \frac{1}{1 \cdot 2}\, \eta_1^2 \int_a^\alpha \frac{d^2 V}{dx^2}\, dx + \text{etc.}$$

Donc :

$$\delta_1 u = \eta_1 \int_a^\alpha \frac{dV}{dx}\, dx = \int_a^\alpha \delta_1 V dx,$$

$$\delta_1^2 u = \eta_1^2 \int_a^\alpha \frac{d^2 V}{dx^2}\, dx = \int_a^\alpha \delta_1^2 V dx,$$

etc.

Donc :

$$\delta_1 \int_a^\alpha V dx = \int_a^\alpha \delta_1 V dx,$$

$$\delta_{\iota}^{2}\int_{a}^{\alpha} V dx = \int_{a}^{\alpha} \delta_{\iota}^{2} V dx,$$

etc.

1er *Exemple.*

Soient $u' = \int V dx$, $V = f(x, y, p)$, $p = \frac{dy}{dx}$; y et p sont des fonctions de l'élément constant x, on a :

$$\delta_{\iota}u' = \delta_{\iota}\int V dx = \int \delta_{\iota} V dx = \int [\partial V + dV]\, dx$$

$$= \int dV dx + \int \partial V dx$$

$$= V dx + \int \partial V dx.$$

Cela posé, fesons

$$u = \int_{a}^{\alpha} V dx,$$

on aura :

$$\delta_{\iota}u = V_{\alpha} d\alpha - V_{a} da + \int_{a}^{\alpha} \partial V dx,$$

$$\delta_{\iota}u = V_{\alpha} d\alpha - V_{a} da + \int_{a}^{\alpha} \left\{ \left(\frac{dV}{dy}\right) \partial y + \left(\frac{dV}{dp}\right) \frac{d\delta y}{dx} \right\} dx.$$

Soit $V = \sqrt{1 + p^2}$, on aura :

$$_{\iota}u = (\sqrt{1 + p^2})_{\alpha}\, d\alpha - (\sqrt{1 + p^2})_{a}\, da + \int_{a}^{\alpha} \frac{p}{V} \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot dx.$$

2me *Exemple.*

Soient $V = f(x, y, z, p, q)$, $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dz}{dx}$, x l'élément constant, on a :

$$\delta_{,}u = V_{\alpha}d\alpha - V_{a}da + \int_{a}^{\alpha} [(\frac{dV}{dy})\delta y + (\frac{dV}{dz})\delta z +$$
$$(\frac{dV}{dp})\frac{d\delta y}{dx}) + (\frac{dV}{dq})\frac{d\delta z}{dx}] dx.$$

Si l'on pose $V = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$, on a :

$$(\frac{dV}{dy}) = 0, \ (\frac{dV}{dz}) = 0, (\frac{dV}{dp}) = \frac{p}{V}, \ (\frac{dV}{dq}) = \frac{q}{V}.$$

DEUXIÈME SECTION.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS.

$$\delta u = 0, \ \delta_{,}u = 0, \ \delta' u = 0, \ \delta_{,}' u = 0. \qquad (a)$$

La résolution des équations $\delta u = 0$, $\delta_{,}u = 0$, etc., comprend trois parties, savoir : 1° la *transformation* des variations δu, etc., en d'autres sans lesquelles les *dérivées* des variations δy, δz, etc., aient disparu sous les intégrales définies dont se compose la fonction u. 2° la *décomposition* des équations $\delta u = 0$, etc., en plusieurs autres réellement distinctes ; 3° la *détermination* définitive de toutes les inconnues du problème.

§ 1.

TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS. (a)

Il suffira que nous donnions les règles pour la transformation de δu, quand u renferme des intégrales définies, car les variations composées et mixtes de u s'expriment en fonction de la variation simple δu. Donnons d'abord les formules qui servent à la transformation dont il s'agit. Ces formules sont de deux espèces, les unes se rapportent à la transformation des intégrales simples et multiples à limites constantes, elles reposent sur l'intégration par parties, les autres se rapportent à la transformation des intégrales multiples à limites variables, nous ne donnerons qu'une seule formule de cette espèce, savoir : celle qui se rapporte à la transformation d'une intégrale double à limites variables.

Les formules de la première espèce auxquelles nous aurons recours, sont les suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
&\int \psi \cdot d\xi = \psi\xi - \int \xi d\psi \\
&\int_a^\alpha \psi d\xi = \psi_\alpha \cdot \xi_\alpha - \psi_a \cdot \xi_a - \int_a^\alpha \xi d\psi \\
&\int_b^\beta d\theta \int_a^\alpha \psi d\xi = \int_b^\beta d\theta \, [\psi_\alpha \xi_\alpha - \psi_a \xi_a] - \int_b^\beta d\theta \int_a^\alpha \xi d\psi
\end{aligned}\right\} \text{(A)}$$

Quant à la formule de la seconde espèce, soient y_0, y_1 des fonctions de x, telles que

$$y_0 = \psi_0 x, \quad y_1 = \psi_1 x,$$

il est clair que la première des intégrations de l'éxpression

$$u = \int_a^\alpha dx \int_{y_0}^{y_1} \left(\frac{dV}{dx}\right) dy,$$

devra s'effectuer par rapport à y, car l'inversion dans l'ordre des intégrations n'est pas permise ici, cela étant, je dis que l'on a :

$$\int_a^\alpha dx \int_{\psi_0 x}^{\psi_1 x} \frac{dV}{dx}\, dy = \int_{\psi_0 \alpha}^{\psi_1 \alpha} V_{\alpha,y}\, dy - \int_{\psi_0 a}^{\psi_1 a} V_{a,y}\, dy -$$

$$\int_a^\alpha dx \left\{ \left[V \cdot \frac{dy}{dx} \right]_{x,\psi_1 x} - \left[V \cdot \frac{dy}{dx} \right]_{x,\psi_0 x} \right\} \quad \text{(B)}$$

Rem. Si $R_{x,y}$ représente une fonction de x et de y, les notations

$$R_{\alpha,y} \text{ ou } [R_{x,y}]_{x=\alpha}$$

représentent ce que devient cette fonction, quand on y change x en α. De même,

$$R_{x,\beta} \text{ ou } [R_{x,y}]_{y=\beta}$$

indiquent ce que devient la même fonction, lorsqu'on remplace y par β.

Démonstration de la formule (B).

Soit $u = \int V dy = f(x, y)$, on a :

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dy}\right) \frac{dy}{dx}.$$

Mais

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \int \left(\frac{dV}{dx}\right) dy, \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = V,$$

donc

$$\frac{d \int V dy}{dx} = \int \left(\frac{dV}{dx}\right) dy + V \cdot \frac{dy}{dx}.$$

On a donc aussi :

$$\frac{d \int_{\psi_0 x}^{\psi_1 x} V dy}{dx} = \int_{\psi_0 x}^{\psi_1 x} \left(\frac{dV}{dx}\right) dy + \left[V \cdot \frac{dy}{dx}\right]_{x, \psi_1 x} - \left[V \cdot \frac{dy}{dx}\right]_{x, \psi_0 x}$$

De cette équation on tire :

$$\int_{\psi_0 x}^{\psi_1 x} \left(\frac{dV}{dx}\right) dy = \frac{d \int_{\psi_0 x}^{\psi_1 x} V dy}{dx} - \left[V \cdot \frac{dy}{dx}\right]_{x, \psi_1 x} + \left[V \cdot \frac{dy}{dx}\right]_{x, \psi_0 x}.$$

On a donc aussi :

$$\int dx \int_{\psi_0 x}^{\psi_1 x} \left(\frac{dV}{dx}\right) dy = \int_{\psi_0 x}^{\psi_1 x} V dy - \int dx \left\{ \left[V \cdot \frac{dy}{dx}\right]_{x, \psi_1 x} - \left[V \frac{dy}{dx}\right]_{x, \psi_0 x} \right\},$$

et par conséquent

$$\int_a^\alpha dx \int_{\psi_0 x}^{\psi_1 x} \left(\frac{dV}{dx}\right) dy = \Big[\int_{\psi_0 x}^{\psi_1 x} Vdy\Big]_{\alpha,y} - \Big[\int_{\psi_0 x}^{\psi_1 x} Vdy\Big]_{a,y} -$$

$$\int_a^\alpha dx \left\{ \Big[V\cdot\frac{dy}{dx}\Big]_{x,\psi_1 x} - \Big[V\cdot\frac{dy}{dx}\Big]_{x,\psi_0 x} \right\}.$$

Mais dans l'intégration relative à y, la variable x doit être regardée comme constante, on peut donc, avant d'effectuer cette intégration, changer x en α et en a, alors l'expression précédente devient :

$$\int_a^\alpha dx \int_{\psi_0 x}^{\psi_1 x} \left(\frac{dV}{dx}\right) dy = \int_{\psi_0 \alpha}^{\psi_1 \alpha} V_{\alpha,y}\, dy - \int_{\psi_0 a}^{\psi_1 a} V_{a,y}\, dy -$$

$$\int_a^\alpha dx \left\{ \Big[V\cdot\frac{dy}{dx}\Big]_{x,\psi_1 x} - \Big[V\cdot\frac{dy}{dx}\Big]_{x,\psi_0 x} \right\}.$$

Nous allons maintenant nous occuper plus spécialement de la transformation des intégrales simples, et doubles à limites constantes et variables.

(1)

Transformation des intégrales simples.

Le but de cette transformation consiste à faire disparaître les dérivées des variations sous le signe d'intégration, de manière à ne laisser subsister sous ce signe que des variations primitives, telles que δy, δz, etc. Si, par exemple, il s'agissait de l'intégrale

$$\int_a^\alpha V\cdot\frac{d^m\delta y}{dx^m}\,dx,$$

contenant sous le signe d'intégration la dérivée m^e de δy, la transformation dont il s'agit, consistera à faire dépendre cette intégrale d'une autre de la forme

$$\int_{a}^{\alpha} \mathrm{W} \cdot \delta y \cdot dx,$$

ne renfermant plus que la variation primitive δy, et aucune dérivée de cette quantité. On y parviendra toujours par l'emploi des formules (A), comme nous allons le faire voir dans quelques cas spéciaux.

Premier Problème.

Transformer l'intégrale

$$\delta u = \int_{a}^{\alpha} \left(\frac{d\mathrm{V}}{dp}\right) \frac{d\delta y}{dx} \cdot dx$$

Solution. Soit

$$\delta u' = \int \left(\frac{d\mathrm{V}}{dp}\right) \frac{d\delta y}{dx}\, dx,$$

on aura, par la première des formules (A) :

$$\delta u' = \left(\frac{d\mathrm{V}}{dp}\right) \delta y - \int \frac{d\left(\frac{d\mathrm{V}}{dp}\right)}{dx} \delta y dx;$$

et par conséquent la seconde de ces mêmes formules nous donnera la transformée demandée, savoir :

$$\delta u = \left[\left(\frac{d\mathrm{V}}{dp}\right)\right]_{\alpha} \delta y_{\alpha} - \left[\left(\frac{d\mathrm{V}}{dp}\right)\right]_{a} \delta y_{a} - \int_{a}^{\alpha} \frac{d\left(\frac{d\mathrm{V}}{dp}\right)}{dx} \delta y\, dx.$$

Rem. Si l'on pose $\mathrm{V} = \sqrt{1+p^2}$, $p = \frac{dy}{dx}$, on a :

$$\delta u = \left(\frac{p}{\mathrm{V}}\right)_{\alpha} \delta y_{\alpha} - \left(\frac{p}{\mathrm{V}}\right)_{a} \delta y_{a} - \int_{a}^{\alpha} \frac{d\left(\frac{p}{\mathrm{V}}\right)}{dx} \delta y\, dx,$$

Deuxième Problème.

Transformer l'intégrale

$$\delta u = \int_a^\alpha V \frac{d^2\delta y}{dx^2} dx = \int_a^\alpha V \cdot d\left(\frac{d\delta y}{dx}\right).$$

Solution.

Soit $\delta u' = \int V \cdot d\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)$,

on aura par la première des formules (A), en l'employant deux fois :

$$\delta u' = V \frac{d\delta y}{dx} - \int \left(\frac{dV}{dx}\right) \cdot \frac{d\delta y}{dx} dx$$

$$= V \frac{d\delta y}{dx} - \frac{dV}{dx} \delta y + \int \frac{d\left(\frac{dV}{dx}\right)}{dx} \delta y\, dx.$$

Donc, en appliquant la seconde des formules (A), on trouve :

$$\delta u = \left[V \frac{d\delta y}{dx} - \left(\frac{dV}{dx}\right)\delta y\right]_\alpha - \left[V \frac{d\delta y}{dx} - \left(\frac{dV}{dx}\right)\delta y\right]_a +$$

$$\int_a^\alpha \frac{d\left(\frac{dV}{dx}\right)}{dx} \delta y dx$$

Troisième Problème.

Soient $V = f(x, y, z, p, q)$, $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dz}{dx}$,

transformer l'intégrale

$$\delta u = \int_a^\alpha \delta V dx\,;$$

x *étant l'élément constant.*

Solution.

Soit $\delta u' = \int \delta V dx$, on a :

$$\delta u' = \int \left[\left(\frac{dV}{dy} \right) \delta y + \left(\frac{dV}{dz} \right) \delta z + \left(\frac{dV}{dp} \right) \frac{d\delta y}{dx} + \left(\frac{dV}{dq} \right) \frac{d\delta z}{dx} \right] dx$$

$$= \int \left[\left(\frac{dV}{dy} \right) \delta y + \left(\frac{dV}{dz} \right) \delta z \right] dx + \int \left(\frac{dV}{dp} \right) \frac{d\delta y}{dx} dx + \int \left(\frac{dV}{dq} \right) \frac{d\delta z}{dx} dx.$$

Mais on a :

$$\int \left(\frac{dV}{dp} \right) \frac{d\delta y}{dx} dx = \left(\frac{dV}{dp} \right) \delta y - \int \frac{d\left(\frac{dV}{dp} \right)}{dx} \cdot \delta y dx ,$$

$$\int \left(\frac{dV}{dq} \right) \frac{d\delta z}{dx} dx = \left(\frac{dV}{dq} \right) \delta z - \int \frac{d\left(\frac{dV}{dq} \right)}{dx} \cdot \delta z dx ;$$

donc :

$$\delta u' = \left(\frac{dV}{dp} \right) \delta y + \left(\frac{dV}{dq} \right) \delta z - \int \left\{ \left[\left(\frac{dV}{dq} \right) + \frac{d\left(\frac{dV}{dp} \right)}{dx} \right] \delta y + \left[\left(\frac{dV}{dz} \right) + \frac{d\left(\frac{dV}{dq} \right)}{dx} \right] \delta z \right\} dx.$$

On a donc par la seconde des formules (A) :

$$\delta u = \left[\left(\frac{dV}{dp} \right) \delta y + \left(\frac{dV}{dq} \right) \delta z \right]_{\alpha} - \left[\left(\frac{dV}{dp} \right) \delta y + \left(\frac{dV}{dq} \right) \delta z \right]_{a} -$$

$$\int_{a}^{\alpha} \left\{ \left[\left(\frac{dV}{dy} \right) + \frac{d\left(\frac{dV}{dp} \right)}{dx} \right] \delta y + \left[\left(\frac{dV}{dz} \right) + \frac{d\left(\frac{dV}{dq} \right)}{dx} \right] \delta z \right\} dx.$$

Rem. Soit $V = \sqrt{1+p^2+q^2}$, donc $\left(\frac{dV}{dy}\right) = 0$,

$$\left(\frac{dV}{dz}\right) = 0,$$

la formule précédente devient :

$$\delta u = \left[\frac{p\delta y + q\delta z}{V}\right]_\alpha - \left[\frac{p\delta y + q\delta z}{V}\right]_a - \int_a^\alpha \left\{ \frac{d\left(\frac{p}{V}\right)}{dx}\delta y + \frac{d\left(\frac{q}{V}\right)}{dx}\delta z \right\} dx.$$

(2)

Intégrales doubles à limites constantes.

PROBLÈME.

Transformer l'intégrale

$$\delta u = \int_a^\alpha \int_b^\beta \delta V dx\, dy$$

dans laquelle on a

$$V = \varphi(x, y, z, p, q),\ p = \left(\frac{dz}{dx}\right),\quad q = \left(\frac{dz}{dy}\right),$$

x *et* y *étant les éléments constants.*

Solution.

Comme on a :

$$\delta V = \left(\frac{dV}{dz}\right)\delta z + \left(\frac{dV}{dp}\right)\left(\frac{d\delta z}{dx}\right) + \left(\frac{dV}{dq}\right)\left(\frac{d\delta z}{dy}\right)$$

il vient :

$$\delta u = \int_a^\alpha \int_b^\beta dxdy \left[\left(\frac{dV}{dz}\right)\delta z + \left(\frac{dV}{dp}\right)\left(\frac{d\delta z}{dx}\right) + \left(\frac{dV}{dq}\right)\left(\frac{d\delta z}{dy}\right)\right].$$

Comme les limites sont constantes, on pourra intervertir l'ordre des intégrations, et écrire :

$$\delta u = \int_a^\alpha \int_b^\beta \delta z \left(\frac{dV}{dz}\right) dx\,dy + \int_b^\beta dy \int_a^\alpha \left(\frac{dV}{dp}\right)\left(\frac{d\delta z}{dx}\right) dx + \int_a^\alpha dx \int_b^\beta \left(\frac{dV}{dq}\right)\left(\frac{d\delta z}{dy}\right) dy.$$

Mais on a, par les règles pour la transformation des intégrales simples, les expressions :

$$\int_a^\alpha \left(\frac{dV}{dp}\right)\left(\frac{d\delta z}{dx}\right) dx = \left[\left(\frac{dV}{dp}\right)\delta z\right]_{y,\alpha} - \left[\left(\frac{dV}{dp}\right)\delta z\right]_{y,a} - \int_a^\alpha \frac{d\left(\frac{dV}{dp}\right)}{dx}\delta z\, dx,$$

$$\int_b^\beta \left(\frac{dV}{dq}\right)\left(\frac{d\delta z}{dy}\right) dy = \left[\left(\frac{dV}{dq}\right)\delta z\right]_{x,\beta} - \left[\left(\frac{dV}{dq}\right)\delta z\right]_{x\,b} - \int_b^\beta \frac{d\left(\frac{dV}{dq}\right)}{dy}\delta z\, dy.$$

En substituant ces valeurs dans la formule ci-dessus, on trouve, en ordonnant :

$$\delta u = \int_a^\alpha \int_b^\beta \delta V\, dx\, dy$$

$$= \int_b^\beta dy \left\{ \left[\left(\frac{dV}{dp} \right) \cdot \delta z \right]_{y,\alpha} - \left[\left(\frac{dV}{dp} \right) \cdot \delta z \right]_{y,a} \right\} +$$

$$\int_a^\alpha dx \left\{ \left[\left(\frac{dV}{dq} \right) \cdot \delta z \right]_{x,\beta} - \left[\left(\frac{dV}{dq} \right) \cdot \delta z \right]_{x,b} \right\} +$$

$$\int_a^\alpha \int_b^\beta \left\{ \left(\frac{dV}{dz} \right) - \frac{d\left(\frac{dV}{dp} \right)}{dx} - \frac{d\left(\frac{dV}{dq} \right)}{dy} \right\} \delta z\, dy\, dx.$$

Rem. Si nous fesons dans cette formule

$$V = \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

on aura :

$$\left(\frac{dV}{dz} \right) = 0\,,\ \left(\frac{dV}{dp} \right) = \frac{p}{V} = P\,,\ \left(\frac{dV}{dq} \right) = \frac{q}{V} = Q\,,$$

donc :

$$\delta u = \int_b^\beta \left[P_{y,\alpha}\, \delta z_{y,\alpha} - P_{y,a}\, \delta z_{y,a} \right] dy + \int_a^\alpha \left[Q_{x,\beta}\, \delta z_{x,\beta} - \right.$$

$$\left. Q_{x,b}\, \delta z_{x,b} \right] dx - \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[\left(\frac{dP}{dx} \right) + \left(\frac{dQ}{dy} \right) \right] \delta z\, dx\, dy.$$

Soient encore $r = \left(\frac{d^2 z}{dx^2} \right)$, $s = \left(\frac{d^2 z}{dx dy} \right)$, $t = \left(\frac{d^2 z}{dy^2} \right)$,

on trouve sans peine

$$\left(\frac{dP}{dx} \right) + \left(\frac{dQ}{dy} \right) = r(1 + q^2) - 2pqs + t(1 + p^2).$$

§ 3.

Intégrales doubles à limites variables.

Problème.

Transformer la variation composée

$$\delta^1 u = \int_a^\alpha \int_{y_0}^{y_1} \delta' \mathrm{V}\, dx\, dy\ ,$$

quand on a

$$\mathrm{V} = \varphi(x,\ y,\ z, p, q)\ , p = \left(\frac{dz}{dx}\right)\ ,\ \ q = \left(\frac{dz}{dy}\right), z = \psi(x,y), y = \xi x\ ,$$

$$y_0 = \psi_0 x,\ \ y_1 = \psi_1 x.$$

Solution.

On a d'abord par la formule (15) :

$$\int_{y_0}^{y_1} \delta' \mathrm{V} dy = \mathrm{V}_{y_1} \delta y_1 - \mathrm{V}_{y_0} \delta y_0 + \int_{y_0}^{y_1} \delta \mathrm{V} dy\ ,$$

donc :

$$\delta^1 u = \int_a^\alpha \int_{y_0}^{y_1} \delta' \mathrm{V} dx dy$$

$$= \int_a^\alpha \int_{\psi_0 x}^{\psi_1 x} \delta' \mathrm{V} dy$$

$$= \int_a^\alpha dx \int_{\psi_0 x}^{\psi_1 x} \delta \mathrm{V} dy dx + \int_a^\alpha dx\, [\, \mathrm{V}_{x,\psi_1 x}\, \delta \psi_1 x - \mathrm{V}_{x,\psi_0 x}\, \delta \psi_0 x]$$

Mais on a :

$$\delta V = \left(\frac{dV}{dz}\right)\delta z + \left(\frac{dV}{dp}\right)\left(\frac{d\delta z}{dx}\right) + \left(\frac{dV}{dq}\right)\left(\frac{d\delta z}{dy}\right)$$

$$= \left(\frac{dV}{dz}\right)\delta z + P\left(\frac{d\delta z}{dx}\right) + Q\left(\frac{d\delta z}{dy}\right);$$

et

$$P\left(\frac{d\delta z}{dx}\right) = \frac{d(P\cdot\delta z)}{dx} - \left(\frac{dP}{dx}\right)\delta z\,,$$

$$Q\left(\frac{d\delta z}{dy}\right) = \frac{d(Q\cdot\delta z)}{dy} - \left(\frac{dQ}{dy}\right)\delta z\,,$$

donc

$$\delta V = \frac{d(P\cdot\delta z)}{dx} + \frac{d(Q\cdot\delta z)}{dy} + \left[\left(\frac{dV}{dz}\right) - \left(\frac{dP}{dx}\right) - \left(\frac{dQ}{dy}\right)\right]\delta z.$$

En substituant cette valeur dans l'expression ci-dessus, on obtient :

$$\delta' u = \int_a^\alpha dx\left[V_{x,\psi_1 x}\,\delta\psi_1 x - V_{x,\psi_0 x}\,\delta\psi_0 x\right] +$$

$$\int_a^\alpha \int_{\psi_0 x}^{\psi_1 x}\left[\left(\frac{dV}{dz}\right) - \left(\frac{dP}{dx}\right) - \left(\frac{dQ}{dy}\right)\right]\delta z\,dy\,dx +$$

$$\int_a^\alpha dx \int_{\psi_0 x}^{\psi_1 x} \frac{d(Q\cdot\delta z)}{dy}\,dy + \int_a^\alpha dx \int_{\psi_0 x}^{\psi_1 x} \frac{d(P\cdot\delta z)}{dx}\,dy. \qquad (\alpha$$

Mais on a :

$$\int \frac{d(Q\cdot\delta z)}{dy}\,dy = Q\cdot\delta z\,,$$

donc

$$\int_a^\alpha dx \int_{\psi_0 x}^{\psi_1 x} \frac{d(Q\cdot\delta z)}{dy}\,dy = \int_a^\alpha dx\left[(Q\cdot\delta z)_{x,\psi_1 x} - (Q\cdot\delta z)_{x,\psi_0 x}\right]. \quad (\beta$$

Dans le dernier terme de la formule (α, la première intégration devant s'effectuer par rapport à y, l'inversion dans l'ordre des intégrales est impossible, et par conséquent ce terme doit être transformé en employant la formule (B). A cet effet, fesons dans celle-ci

$$\mathrm{V} = \mathrm{P}\cdot\delta z,$$

nous aurons :

$$\int_a^\alpha dx \int_{\psi_0 x}^{\psi_1 x} \frac{d(\mathrm{P}\cdot\delta z)}{dx}\, dy = \int_{\psi_0 \alpha}^{\psi_1 x} (\mathrm{P}\cdot\delta z)_{\alpha,y}\, dy - \int_{\psi_0 a}^{\psi_1 \alpha} (\mathrm{P}\cdot\delta z)_{a,y}\, dy -$$

$$\int_a^\alpha dx \left\{ \left(\mathrm{P}\delta z\cdot\frac{dy}{dx}\right)_{x,\psi_1 x} - \left(\mathrm{P}\delta z\cdot\frac{dy}{dx}\right)_{x,\psi_0 x} \right\} \qquad (\gamma$$

Substituons les valeurs $(\beta$ et $(\gamma$ dans la formule $(\alpha$, nous aurons la transformée demandée, savoir :

$$\delta' u = \int_a^\alpha dx \left\{ \mathrm{V}_{x,\psi_1 x}\, \delta\psi_1 x - \mathrm{V}_{x,\psi_0 x}\, \delta\psi_0 x + \right.$$

$$\left. \left[\left(\mathrm{Q} - \mathrm{P}\frac{dy}{dx}\right)\delta z\right]_{x,\psi_1 x} - \left[\left(\mathrm{Q} - \mathrm{P}\frac{dy}{dx}\right)\delta z\right]_{x,\psi_0 x} \right\} +$$

$$\int_{\psi_0 \alpha}^{\psi_1 \alpha} (\mathrm{P}\cdot\delta z)_{\alpha,y}\, dy - \int_{\psi_0 a}^{\psi_1 a} (\mathrm{P}\cdot\delta z)_{a,y}\, dy +$$

$$\int_a^\alpha \int_{\psi_0 x}^{\psi_1 x} \left[\left(\frac{d\mathrm{V}}{dz}\right) - \left(\frac{d\mathrm{P}}{dx}\right) - \left(\frac{d\mathrm{Q}}{dy}\right)\right] \delta z\, dy\, dx. \qquad (22)$$

§ 7.

DÉCOMPOSITION DES ÉQUATIONS (*a*) EN PLUSIEURS AUTRES.

u étant une expression composée d'intégrales définies, quand on aura soumis les équations (*a*) aux transformations du § précédent, elles seront toutes de la forme

$$L+R=0,$$

la partie R reste affectée de l'intégrale primitive, et contient seulement des termes multipliés par les variations primitives δy, δz, etc. Comme les parties L et R sont irréductibles, attendu que l'intégration indiquée dans la partie R, ne peut pas s'effectuer à cause de l'indétermination des quantités δy, δz, etc., qui s'y trouvent, il est clair que l'équation ci-dessus se partagera en deux autres, savoir en

$$L=0, \tag{23}$$

$$R=0, \tag{24}$$

dont la première se nomme *l'équation aux limites*. Ces équations se partagent elles-mêmes en plusieurs autres, ainsi qu'on va le voir.

(*a*)

Décomposition de l'équation R=0.

Dans l'équation R=0, l'intégrale simple ou multiple affecte toujours un polynome de la forme

$$P\delta y+Q\delta z+\text{etc.}=0.$$

Donc, puisqu'à cause de l'indétermination des facteurs δy, δz, etc., les intégrations de chaque terme ne peuvent pas s'effectuer, il faut nécessairement que l'on ait séparément

$$\left.\begin{array}{l} P=0, \\ Q=0, \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \tag{25}$$

Ces équations se nomment les *équations principales*.

Avant de nous occuper de la décomposition de l'équation L=0, donnons des exemples, pour éclaircir ce qui précède; pour cela, examinons les cas d'intégrales simples et doubles.

(1)

Intégrales simples.

Premier Exemple.

Soient $u = \int_a^\alpha \mathrm{V} dx$, $\mathrm{V} = f(x, y, p, q)$, $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{d^2y}{dx^2}$,

l'équation

$$\delta u = 0,$$

sera de la forme :

$$[\mathrm{A} + \mathrm{B}\delta y + \mathrm{C} \frac{d\delta y}{dx}]_\alpha - [\mathrm{A} + \mathrm{B}\delta y + \mathrm{C} \frac{d\delta y}{dx}]_a - \int_a^\alpha \mathrm{P}\delta y dx = 0.$$

On a donc

$$\mathrm{L} = [\mathrm{A} + \mathrm{B}\delta y + \mathrm{C} \frac{d\delta y}{dx}]_\alpha - [\mathrm{A} + \mathrm{B}\delta y + \mathrm{C} \frac{d\delta y}{dx}]_a = 0,$$

$$\mathrm{R} = - \int_a^\alpha \mathrm{P}\delta y dx = 0.$$

Cette dernière conduit à l'équation principale

$$\mathrm{P} = 0.$$

Deuxième Exemple.

Soient $u = \int_a^\alpha \mathrm{V} dx$, $\mathrm{V} = f(x, y, z, p, q)$,

$$p = \frac{dy}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dx},$$

x étant l'élément constant, l'équation

$$\delta u = 0,$$

conduit à une transformée de la forme :

$$[A+B\delta y+C\delta z]_\alpha-[A+B\delta y+C\delta z]_a-\int_a^\alpha\{P\delta y+$$

$$Q\delta z\}\,dx=0\,;$$

on a donc

$$L=[A+B\delta y+C\delta z]_\alpha-[A+B\delta y+C\delta z]_a=0,$$

et

$$R=-\int_a^\alpha\{P\delta y+Q\delta z\}\,dx=0.$$

Cette dernière donne les équations principales

$$P=0,\quad Q=0.$$

TROISIÈME EXEMPLE.

Soient $u=\int_a^\alpha \sqrt{1+p^2}\,dx,\quad p=\dfrac{dy}{dx}$, on aura la transformée :

$$\delta u=\Big[\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\Big]_\alpha\delta y_\alpha-\Big[\frac{p}{\sqrt{1+p^2)}}\Big]_a\delta y_a-$$

$$\int_a^\alpha\frac{d\Big(\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2)}}\Big)}{dx}\,\delta y\,dx=0.$$

Elle conduit à

$$L=\Big[\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\Big]_\alpha dy_\alpha-\Big[\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\;_a\,\delta y_a=0,$$

$$R=-\int_a^\alpha\frac{d\Big(\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}\Big)}{dx}\,\delta y\,dx=0.$$

Celle-ci donne l'équation principale

$$\frac{d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)}{dx}=0.$$

QUATRIÈME EXEMPLE.

Soient $u=\int_a^\alpha \sqrt{1+p^2+q^2}\cdot dx,\quad p=\frac{dy}{dx},$

$q=\frac{dz}{dx}$, on aura la transformée :

$$\delta u=\left[\frac{p\delta y+q\delta z}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right]_\alpha-\left[\frac{p\delta y+q\delta z}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right]_a-$$

$$\int_a^\alpha dx\left\{\frac{d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)}{dx}\delta y+\frac{d\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)}{dx}\delta z\right\}=0.$$

On a donc :

$$L=\left[\frac{p\delta y+q\delta z}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right]_\alpha-\left[\frac{p\delta y+q\delta z}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right]_a=0,$$

$$R=-\int_a^\alpha dx\left\{\frac{d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)}{dx}\delta y+\right.$$

$$\left.\frac{d\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)}{dx}\delta z\right\}=0.$$

Celle-ci donne les équations principales

$$d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)=0,\qquad d\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)=0.$$

CINQUIÈME EXEMPLE.

L'équation transformée

$$\delta_1 u = V_\alpha\, d\alpha - V_a\, da + \left(\frac{dV}{dp}\right)_\alpha \delta y_\alpha - \left(\frac{dV}{dp}\right)_a \delta y_a +$$

$$\int_a^\alpha \left[\left(\frac{dV}{dy}\right) - \frac{d\left(\frac{dV}{dp}\right)}{dx}\right] \delta y\, dx = 0,$$

conduit à

$$L = V_\alpha\, dx - V_a\, da + \left(\frac{dV}{dp}\right)_\alpha \delta y_\alpha - \left(\frac{dV}{dp}\right)_a \delta y_a = 0,$$

$$R = \int_a^\alpha \left[\left(\frac{dV}{dy}\right) - \frac{d\left(\frac{dV}{dp}\right)}{dx}\right] \delta y\, dx = 0.$$

Celle-ci donne l'équation principale

$$\left(\frac{dV}{dy}\right) - \frac{d\left(\frac{dV}{dp}\right)}{dx} = 0.$$

(3)

Intégrales doubles.

Soient

$$u = \int_a^\alpha \int_b^\beta V\, dy\, dx, \quad V = f(x, y, z, p, q),$$

$p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$, $q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$, etc., la transformée sera de la forme

$$\delta u = \int_a^\alpha dx \left\{ (A + B\delta z)_{x,\beta} - (A + B\delta z)_{x,b} \right\} +$$

$$\int_b^\beta dy \left\{ (A_1 + B_1 \delta z)_{\alpha,y} - (A_1 + B_1 \delta z)_{a,y} \right\} +$$

$$\int_a^\alpha \int_b^\beta P \delta z \, dy \, dx = 0.$$

d'où :

$$L = \int_a^\alpha dx \left\{ (A + B\delta z)_{x,\beta} - (A + B\delta z)_{x,b} \right\} +$$

$$\int_b^\beta dy \left\{ (A_1 + B_1 \delta z)_{\alpha,y} - (A_1 + B_1 \delta z)_{a,y} \right\} = 0 ,$$

et

$$R = \int_a^\alpha \int_b^\beta P \delta z \, dy \, dx = 0.$$

Celle-ci donne l'équation principale

$$P = 0.$$

(*b*)

Décomposition de l'équation L = 0.

Donnons cette décomposition pour les cas des intégrales simples et doubles.

(1)

Intégrales simples.

Il y aura deux cas à considérer selon qu'il existe, ou qu'il n'existe pas de relations entre les quantités

$$\delta y, \ \delta z, \text{ etc. } \frac{d\delta y}{dx} \text{, etc.},$$

rapportées aux limites de l'intégrale.

Premier Cas.

Si dans l'expression

$$L = 0,$$

que nous supposons être de la forme

$$L = \left[A + B\delta y + C\,\frac{d\delta y}{dx} + \text{etc.}\right]_\alpha - \left[A + B\delta y + C\,\frac{d\delta y}{dx} + \text{etc.}\right]_a = 0,$$

il n'existe aucune relation entre les arbitraires

$$\delta y_\alpha\,,\quad \delta y_a\,,\quad \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha,\quad \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a,\quad \text{etc.}, \qquad (\alpha)$$

on aura séparément

$$A_\alpha = 0,\quad B_\alpha = 0,\quad C_\alpha = 0, \text{ etc.}$$

$$A_a = 0,\quad B_a = 0,\quad C_a = 0, \text{ etc.}$$

Car, à cause de l'indétermination et de l'indépendance des quantités (α), le polynome L ne peut pas devenir nul par une réduction algébrique entre termes semblables.

Rem. Quand la fonction ne peut pas se déformer aux limites de l'intégrale, alors on a évidemment

$$\delta y_\alpha = 0,\quad \delta y_a = 0,\quad \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha = 0, \text{ etc.}$$

car soit $y = A$, une constante, on aura évidemment

$$y + Dy = y + \delta y + \frac{1}{1\cdot 2}\,\delta^2 y + \text{etc.} = 0,$$

d'où :

$$\delta y = 0,\quad \delta^2 y = 0, \text{ etc.}$$

et l'équation aux limites n'aura plus lieu, comme s'évanouissant d'elle-même.

Deuxième Cas.

S'il existe entre les quantités

$$\delta y_{\alpha}\,,\quad \delta y_{a}\,,\quad \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_{\alpha}\,,\quad \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_{a}\,,\ \text{etc.}$$

des relations

$$\varphi = 0\,,\quad \varphi_{1} = 0\,,\ \text{etc.}$$

il faudra éliminer de $L = 0$ autant de ces quantités qu'il y a de relations données, puis on égalera à zéro séparément les coefficients de celles qui resteront indépendantes.

Eclaircissons tout ceci par un exemple.

Exemple.

Soit

$$L = V_{\alpha}\,d\alpha - V_{a}\,da + \left(\frac{dV}{dp}\right)_{\alpha}\delta y_{\alpha} - \left(\frac{dV}{dp}\right)_{a}\delta y_{a} = 0\,; \qquad (\gamma)$$

1° Si les limites correspondantes à $x=a$, $x=\alpha$, sont fixes, et données, on a

$$d\alpha = 0,\quad da = 0,\quad \delta y_{\alpha} = 0,\quad \delta y_{a} = 0\,, \qquad (\beta)$$

et l'équation $L=0$ s'évanouira d'elle-même.

2° Si les quantités (β) sont indépendantes, et si les limites correspondantes à $x=a$, $x=\alpha$, ne sont pas fixes, on aura séparément :

$$V_{\alpha} = 0\,,\quad V_{a} = 0,\quad \left(\frac{dV}{dp}\right)_{\alpha} = 0\,,\quad \left(\frac{dV}{dp}\right)_{a} = 0.$$

3° Supposons qu'entre les quantités

$$d\alpha,\quad da,\quad \delta y_{\alpha},\quad \delta y_{a},$$

on ait les relations

$$\delta y_{\alpha} + \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\alpha} d\alpha = \frac{d\chi\alpha}{d\alpha}\,d\alpha\,,$$

$$\delta y_{a} + \left(\frac{dy}{dx}\right)_{a} da = \frac{d\chi a}{da}\,da\,,$$

on en déduira

$$dy_\alpha = [\,\frac{d\chi\alpha}{d\alpha} - (\frac{dy}{dx})_\alpha\,]\,d\alpha\,,$$

$$\delta y_a = [\,\frac{d\chi a}{da} - (\frac{dy}{dx})_a\,]\,da\,,$$

et l'équation (γ) deviendra :

$$\mathrm{L} = \left\{ \mathrm{V}_\alpha + (\frac{d\mathrm{V}}{dp})_\alpha [\,\frac{d\chi\alpha}{d\alpha} - (\frac{dy}{dx})_\alpha\,] \right\} d\alpha -$$

$$\left\{ \mathrm{V}_a + (\frac{d\mathrm{V}}{dp})_a [\,\frac{d\xi a}{da} - (\frac{dy}{dx})_a\,] \right\} da = 0.$$

Cette équation, à cause de l'indépendance des accroissements arbitraires $d\alpha$ et da, se partage en deux autres, savoir :

$$\mathrm{V}_\alpha + (\frac{d\mathrm{V}}{dp})_\alpha [\,\frac{d\chi\alpha}{d\alpha} - (\frac{dy}{dx})_\alpha\,] = 0,$$

$$\mathrm{V}_a + (\frac{d\mathrm{V}}{dp})_a [\,\frac{d\xi a}{da} - (\frac{dy}{dx})_a\,] = 0.$$

(2)

Intégrales doubles.

S'il n'existe aucune condition relative aux limites a, α, β, b des intégrales, l'équation $\mathrm{L} = 0$, ne pourra être satisfaite qu'en posant égal à zéro séparément les coefficients des quantités

$$\delta z_{\alpha,y}\,,\quad \delta z_{a,y}\,,\quad \delta z_{x,\beta}\,,\quad \delta z_{x,b}\,,\quad \text{etc.}$$

S'il existe, au contraire, des relations entre ces quantités, on en éliminera de $\mathrm{L} = 0$ autant qu'il y a de ces relations, puis on égalera à zéro séparément les coefficients de celles de ces quantités qui restent indépendantes.

Premier Exemple.

Soit

$$L = [\int_b^\beta [P_{\alpha,y}\delta z_{\alpha,y} - P_{a,y}\delta z_{a,y}]\,dy +$$

$$\int_a^\alpha Q_{x,\beta}\delta z_{x,\beta} - Q_{x,b}\delta z_{x,b}]\,dx = 0,$$

et supposons que les variations $\delta z_{\alpha,y}$, etc., soient indépendantes, on devra poser séparément

$$P_{\alpha,y} = 0,\quad P_{a,y} = 0,\quad Q_{x,\beta} = 0,\quad Q_{x,b} = 0.$$

Deuxième Exemple.

Soit

$$L = \int_a^\alpha dx[V_{y_1}\delta y_1 - V_{y_0}\delta y_0 + R_{y_1}\delta z_{y_1} - R_{y_0}\delta z_{y_0}] = 0,$$

et supposons que l'on ait, en même temps, les relations

$$\delta z_{y_0} + (\frac{dz}{dy})_{y_0}\delta y_0 = (\frac{df_0}{dy})_{y_0}\delta y_0,$$

$$\delta z_{y_1} + (\frac{dz}{dy})_{y_1}\delta y_1 = (\frac{df_1}{dy})_{y_1}\delta y_1,$$

on déduira de celles-ci :

$$\delta z_{y_0} = [(\frac{df_0}{dy})_{y_0} - (\frac{dz}{dy})_{y_0}]\delta y_0,$$

$$\delta z_{y_1} = [(\frac{df_1}{dy})_{y_1} - (\frac{dz}{dy})_{y_1}]\delta y_1,$$

ce qui donnera :

$$L = \int_a^\alpha dx \left\{ \left(V_{y_1} + R_{y_1} \left[\left(\frac{df_1}{dy}\right)_{y_1} - \left(\frac{dz}{dy}\right)_{y_1} \right] \right) \delta y_1 - \right.$$

$$\left. \left(V_{y_0} + R_{y_0} \left[\left(\frac{df_0}{dy}\right)_{y_0} - \left(\frac{dz}{dy}\right)_{y_0} \right] \right) \delta y_0 \right\} = 0.$$

Comme δy_1 et δy_0 sont maintenant indépendants, cette équation se partagera en deux autres, savoir :

$$V_{y_1} + R_{y_1} \left[\left(\frac{df_1}{dy}\right)_{y_1} - \left(\frac{dz}{dy}\right)_{y_1} \right] = 0,$$

$$V_{y_0} + R_{y_0} \left[\left(\frac{df_0}{dy}\right)_{y_0} - \left(\frac{dz}{dy}\right)_{y_0} \right] = 0.$$

§ 8.

CONDITIONS DES FONCTIONS MAXIMA ET MINIMA.

u désignant une intégrale définie simple ou double, nous allons chercher les conditions pour que u soit plus grand ou plus petit que toutes ses déformées, que nous représenterons collectivement par $u \pm Du$.

(1)

Intégrales définies simples.

Nous aurons deux cas à examiner, selon que les limites de l'intégrale sont données ou demandées

Premier Cas.

Première Règle.

Pour trouver la fonction $y = \varphi x$, *propre à rendre l'expression*

$$u = \int_a^\alpha V dx \qquad (1)$$

un maximum ou un minimum, a *et* α *étant donnés, il faut résoudre l'une des équations*

$$\delta u = 0, \quad \text{ou} \quad \delta u = \frac{1}{0}.$$

Démonstration.

Soit $y = \varphi x$ la fonction cherchée.

En substituant cette valeur, ainsi que celles de ses dérivées, dans V, alors u prendra une valeur que je représenterai par u_φ, et cette fonction sera, par hypothèse, plus grande, ou plus petite, que toutes ses déformées comprises entre les mêmes limites.

Soit $u_\varphi = f(a)$, nous aurons, pour représenter toutes les déformées de u_φ, les expressions

$$u_\varphi + Du_\varphi = f(a + \eta) = u_\varphi + \frac{du_\varphi}{dx} \cdot \eta + \eta^2 \cdot K = F(a),$$

$$u_\varphi - Du_\varphi = f(a - \eta) = u_\varphi - \frac{du_\varphi}{dx} \cdot \eta + \eta^2 \cdot H = F_1(a).$$

Comme les fonctions $F(a)$ et $F_1(a)$ sont arbitraires, on pourra toujours les concevoir telles que les différences

$$Fa - fa, \quad F_1 a - fa,$$

soient aussi petites que l'on voudra, et que par conséquent l'arbitraire η soit aussi petit que l'on voudra. Cela posé, si nous résolvons l'équation

$$\frac{du_\varphi}{dx} - \eta K = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{du_\varphi}{dx} - \eta H = 0,$$

on en déduira pour η plusieurs valeurs, telles que α, β,... Soit α la plus petite de ces valeurs, il est clair que toutes les valeurs de η, comprises entre 0 et α, satisferont aux inégalités

$$\frac{du_\varphi}{dx} > \eta K, \quad \text{ou} \quad \frac{du_\varphi}{dx} > \eta H,$$

et par conséquent aux suivantes

$$\frac{du_\varphi}{dx}\eta > \eta^2 K, \quad \text{on} \quad \frac{du_\varphi}{dx}\eta > \eta^2 H.$$

1° Soit maintenant u_φ un maximum, on aura :

$$u_\varphi > u_\varphi + Du_\varphi,$$

$$u_\varphi > u_\varphi - Du_\varphi,$$

ou

$$u_\varphi > u_\varphi + \frac{du_\varphi}{dx}\eta + \eta^2 K,$$

$$u_\varphi > u_\varphi - (\frac{du_\varphi}{dx}\eta - \eta^2 H).$$

Si donc on prend pour η une valeur comprise entre 0 et α, les relations précédentes se reduiront à celles-ci :

$$u_\varphi > u_\varphi + \frac{du_\varphi}{dx}\eta,$$

$$u_\varphi > u_\varphi - \frac{du_\varphi}{dx}\eta;$$

or, celles-ci ne pourront subsister à moins que l'on n'ait :

$$\frac{du_\varphi}{dx}\eta = \delta u_\varphi = 0,$$

ou

$$\frac{du_\varphi}{dx}\eta = \delta u_\varphi = \frac{1}{0}.$$

2° Soit u_φ un minimum, on aura

$$u_\varphi < u_\varphi + Du_\varphi,$$

$$u_\varphi < u_\varphi - Du_\varphi,$$

ou

$$u_\varphi < u_\varphi + \frac{du_\varphi}{dx}\eta + \eta^2 K,$$

$$u_\varphi < u_\varphi - (\frac{du_\varphi}{dx}\eta - \eta^2 H).$$

Si l'on prend pour η l'une des valeurs comprises entre 0 et α, les inégalités précédentes se ramèneront à celles-ci :

$$u_\varphi < u_\varphi + \frac{du_\varphi}{dx}\eta,$$

$$u_\varphi < u_\varphi - \frac{du_\varphi}{dx}\eta,$$

qui ne pourront être satisfaites à moins que l'on n'ait:

$$\frac{du_\varphi}{dx}\,\eta = \delta u_\varphi = 0\,,$$

ou

$$\frac{du_\varphi}{dx}\,\eta = \delta u_\varphi = \frac{1}{0}\,.$$

Donc, pour trouver la fonction $y = \varphi x$, propre à rendre u une fonction maximum, ou minimum, il faut résoudre l'une des équations

$$\delta u = 0\,,\quad \delta u = \frac{1}{0}\,. \qquad (a$$

Deuxième Règle.

u_φ, pour $y = \varphi x$ déduit de (a, sera un maximum, quand on aura

$$\delta^2 u_\varphi < 0\,,$$

et un minimum, quand on aura

$$\delta^2 u_\varphi > 0.$$

Démonstration.

Comme on a $\delta u_\varphi = 0$, il vient

$$u_\varphi + \mathrm{D}u_\varphi = u_\varphi + \frac{1}{1\cdot 2}\,\frac{d^2u_\varphi}{dx^2}\,\eta^2 + \eta^3\mathrm{K}'\,,$$

$$u_\varphi - \mathrm{D}u_\varphi = u_\varphi + \frac{1}{1\cdot 2}\,\frac{d^2u_\varphi}{dx^2}\,\eta^2 - \eta^3\mathrm{H}'\,.$$

Donc, 1° dans l'hypothèse que u_φ est un maximum, on doit avoir :

$$u_\varphi > u_\varphi + \frac{1}{1\cdot 2}\,\frac{d^2u_\varphi}{dx^2}\,\eta^2 + \eta^3\mathrm{K}'\,,$$

$$u_\varphi > u_\varphi + \frac{1}{1\cdot 2}\,\frac{d^2u_\varphi}{dx^2}\,\eta^2 - \eta^3\mathrm{H}'\,.$$

Or, on démontre ici, comme précédemment, que l'on pourra prendre pour η une valeur assez petite pour que les formules précédentes se réduisent à celles-ci :

$$u_\varphi > u_\varphi + \frac{1}{1\cdot 2}\,\frac{d^2u_\varphi}{dx^2}\,\eta^2\,,$$

$$u_\varphi > u_\varphi + \frac{1}{1\cdot 2}\,\frac{d^2u_\varphi}{dx^2}\,\eta^2\,;$$

il faut donc que $\frac{d^2u_\varphi}{dx^2}\eta^2 - \delta^2 u_\varphi$ soit négatif.

2° Si $\frac{d^2u_\varphi}{dx^2}\eta^2 - \delta^2 u_\varphi$ était positif, on aurait, au contraire

$$u_\varphi < u_\varphi + \frac{1}{1\cdot 2}\frac{d^2u_\varphi}{dx^2}\eta^2 + \eta^3 K',$$

$$u_\varphi < u_\varphi + \frac{1}{1\cdot 2}\frac{d^2u_\varphi}{dx^2}\eta^2 - \eta^3 H',$$

et alors u_φ serait un minimum.

Deuxième Cas.

Troisième Règle.

Pour trouver la fonction $y = \varphi x$, *et les limites* $x = a$, $x = \alpha$ *propres à rendre* $u = \int_a^\alpha V dx$ *un maximum, ou un minimum entre les limites, il faut résoudre l'une des équations*

$$\delta_1 u = 0, \quad \text{ou} \quad \delta_1 u = \frac{1}{0}.$$

Démonstration.

Comme les limites $x = a$, $x = \alpha$ sont inconnues, il est clair qu'il faut faire varier l'élément constant x, aussi.

Donc si u_φ doit être un maximum, il faut qu'en posant $u_\varphi = fa$, l'on ait :

$$u_\varphi > u_\varphi + D_1 u_\varphi,$$

$$u_\varphi > u_\varphi - D_1 u_\varphi,$$

mais on a :

$$u_\varphi + D_1 u_\varphi = f(a + da + \eta) = u_\varphi + \frac{du_\varphi}{dx}\eta_1 + \eta^2_1 K,$$

$$u_\varphi - D_1 u_\varphi = f(a - da - \eta) = u_\varphi - \frac{du_\varphi}{dx}\eta_1 + \eta^2_1 H.$$

Donc, dans le cas du maximum, on a

$$u_\varphi > u_\varphi + \frac{du_\varphi}{dx}\eta_1 + \eta^2_1 \mathrm{K},$$

$$u_\varphi > u_\varphi - \left(\frac{du_\varphi}{dx^2}\eta_1 - \eta^2_1 \mathrm{H}\right).$$

Si, au contraire, u_φ est un maximum, on doit avoir

$$u_\varphi < u_\varphi + \frac{du_\varphi}{dx}\eta_1 + \eta^2_1 \mathrm{K},$$

$$u_\varphi < u_\varphi - \left(\frac{du_\varphi}{dx^2}\eta_1 - \eta^2_1 \mathrm{H}\right).$$

Or, on pourra prendre $\eta_1 = \eta + da$, assez petit pour que ces relations se réduisent aux suivantes :

$$u_\varphi > u_\varphi + \frac{du_\varphi}{dx}\eta_1,$$

$$u_\varphi > u_\varphi - \frac{du_\varphi}{dx}\eta_1,$$

pour le maximum, et à

$$u_\varphi < u_\varphi + \frac{du_\varphi}{dx}\eta_1,$$

$$u_\varphi < u_\varphi - \frac{du_\varphi}{dx}\eta_1,$$

pour le minimum.

Mais on voit que ces relations ne sont satisfaites qu'en posant

$$\frac{du_\varphi}{dx}\eta_1 = \delta_1 u_\varphi = 0,$$

ou

$$\frac{du_\varphi}{dx}\eta_1 = \delta_1 u_\varphi = \frac{1}{0}.$$

Donc, pour trouver la fonction $y = \varphi x$, et les limites $x = a$, $x = \alpha$, propres à rendre

$$u = \int_a^\alpha \mathrm{V}dx$$

un maximum, ou un minimum, il faut résoudre l'une des équations

$$\delta_1 u = 0\,,\quad \delta_1 u = \frac{1}{0}\,.$$

On prouvera, comme dans le cas précédent, que le maximum de la fonction u_φ est caractérisé par la relation

$$\delta_1{}^2 u_\varphi < 0\,,$$

et le minimum par la relation

$$\delta_1{}^2 u_\varphi > 0.$$

(2)

Intégrales définies doubles.

Nous examinerons successivement les cas où les limites de l'intégrale sont constantes, et variables.

(*a*)

Limites constantes.

On démontrera, comme dans le cas des intégrales simples, les règles suivantes :

Première Règle.

Pour trouver une fonction $z = \varphi(x, y)$, x, y *étant les éléments constants, propres à rendre l'intégrale*

$$u = \int_a^\alpha \int_b^\beta V dy\, dx$$

un maximum, ou un minimum entre les limites données

$$x = \begin{cases}\alpha \\ a\end{cases},\quad y = \begin{cases}\beta \\ b\end{cases},$$

il faut résoudre l'une des équations

$$\delta u = 0\,,\quad \delta u = \frac{1}{0}\,.$$

Deuxième Règle.

Pour trouver une fonction $z=\varphi(x, y)$, x *et* y *étant les variables indépendantes, et les limites*

$$x=\begin{cases}\alpha\\ a\end{cases},\qquad y=\begin{cases}\beta\\ b\end{cases}$$

propres à rendre l'intégrale ci-dessus un maximum, ou un minimum, il faut résoudre l'une des équations

$$\delta_1 u=0,\quad \text{ou}\quad \delta_1 u=\frac{1}{0}.$$

(*b*)

Limites variables.

Troisième Règle.

Pour trouver une fonction $z=\varphi(x, y)$, *et les limites variables*

$$y_0=\psi_0 x,\quad y_1=\psi_1 x$$

propres à rendre l'intégrale

$$u=\int_a^\alpha\int_{y_0}^{y_1} \mathrm{V}\,dy\,dx,$$

un maximum, ou un minimum entre les limites données, et constantes

$$x=\begin{cases}\alpha\\ a\end{cases},$$

il faut résoudre l'une des équations

$$\delta' u=0,\quad \text{ou}\quad \delta' u=\frac{1}{0}.$$

Démonstration.

Comme y est une fonction de x, il est clair qu'il faut comparer la fonction u_φ, à ses déformées composées, qui sont :

$$u_\varphi+\mathrm{D}'u_\varphi=u_\varphi+\left[\left(\frac{du_\varphi}{dx}\right)+\left(\frac{du_\varphi}{dy}\right)\frac{dy}{dx}\right]\eta+\eta^2\mathrm{K},$$

$$u_\varphi-\mathrm{D}'u_\varphi=u_\varphi-\left\{\left[\left(\frac{du_\varphi}{dx}\right)+\left(\frac{du_\varphi}{dy}\right)\frac{dy}{dx}\right]\eta-\eta^2\mathrm{H}\right\}.$$

Donc en prenant η suffisamment petit, on aura, dans le cas du maximum

$$u_\varphi > u_\varphi + [(\frac{du_\varphi}{dx}) + (\frac{du_\varphi}{dy})\frac{dy}{dx}]\eta,$$

$$u_\varphi > u_\varphi - [(\frac{du_\varphi}{dx}) + (\frac{du_\varphi}{dy})\frac{dy}{dx}]\eta;$$

et dans le cas du minimum :

$$u_\varphi < u_\varphi + [(\frac{du_\varphi}{dx}) + (\frac{du_\varphi}{dy})\frac{dy}{dx}]\eta,$$

$$u_\varphi < u_\varphi - [(\frac{du_\varphi}{dx}) + (\frac{du_\varphi}{dy})\frac{dy}{dx}]\eta.$$

Ces formules exigent que l'on ait :

$$[(\frac{du_\varphi}{dx}) + (\frac{du_\varphi}{dy})\frac{dy}{dx}]\eta = \delta' u = 0, \text{ ou } = \frac{1}{0}.$$

Le maximum sera caractérisé par

$$\delta^{2\prime} u_\varphi < 0,$$

et le minimum par

$$\delta^{2\prime} u_\varphi > 0.$$

Rem. Les mêmes choses étant posées que dans la règle précédente, si l'on demandait en outre les valeurs des limites constantes

$$x = \begin{cases} \alpha \\ a \end{cases},$$

il faudrait résoudre l'une des équations

$$\delta_1' u = 0, \quad \text{ou} \quad \delta_1' u = \frac{1}{0},$$

§ 9.

MAXIMA, ET MINIMA RELATIFS.

Quand une fonction quelconque

$$u = f(x, y, z, p, q, \ldots),$$

doit devenir un maximum ou un minimum, sous la condition que des équations

$$L=0\ ,\ L_1=0,\ \text{etc.}$$

soient satisfaites en même temps, nous nommerons cette valeur extrême un maximum, ou un minimum relatif.

Pour ramener les questions de cette espèce aux règles du § précédent, nous remplacerons le système des équations données par l'identité

$$u=u+\lambda L+\lambda_1 L_1+\text{etc.}\ , \qquad (\alpha$$

dans laquelle λ, λ_1, etc., représentent des fonctions indéterminées, regardées comme constantes. Alors la question consistera à chercher une fonction, telle que $z=\varphi(x, y)$, propre à rendre l'expression (α unmaximum, ou un minimum.

Cette fonction, qui satisfera alors en même temps aux équations $L=0$, $L_1=0$, etc., se trouvera par conséquent, en résolvant l'équation

$$\begin{aligned}\delta u=\delta f\,(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ldots)\\ +\delta(\lambda, L)+\delta(\lambda_1 L_1)+\text{etc.}=0.\end{aligned} \qquad (24)$$

Cette équation, en la transformant convenablement, fournira par sa décomposition plusieurs autres équations, qui, jointes aux relations données, conduiront aux valeurs de toutes les inconnues du problème, ainsi qu'à celles des constantes λ, λ_1, etc.

Rem. Ordinairement les fonctions

$$f,\ L,\ L_1\ ,\ \text{etc.}\ ,$$

sont des intégrales définies simples, ou multiples.

Dans le cas d'intégrales simples, elles sont ordinairement de la forme

$$u=\int_a^\alpha V dx\ ,$$

$$L=\int_a^\alpha W dx-K,$$

$$L_1 = \int_a^\alpha W_1 dx - K_1 \ ,$$

etc.,

où K, K_1, etc., désignent des constantes données, ou inconnues.

Quand les fonctions f, L, L_1, etc., se présentent sous la forme d'intégrales définies, le problème dont il s'agit, est nommé plus spécialement, problème des isopérimètres.

Le problème des isopérimètres, en tant qu'il se rapporte à des intégrales définies simples de la forme indiquée, dépend par conséquent de la résolution de l'équation

$$\partial u = \int_a^\alpha dx \,[\, \partial V + \partial(\lambda \cdot W) + \partial(\lambda_1 \cdot W_1) + \text{etc.}$$
$$- \partial(\lambda \cdot K) - \partial(\lambda_1 \cdot K_1) - \text{etc.} = 0 \,].$$

Mais λ, λ_1,... K, K_1,... étant constants, on a :

$$\partial(\lambda \cdot K) = 0 \ , \quad \partial(\lambda_1 \cdot K_1) = 0 \text{, etc.},$$

et par conséquent l'équation ci-dessus devient simplement

$$\partial u = \int_a^\alpha dx \,[\, \partial V + \partial(\lambda \cdot W) +$$
$$\partial(\lambda_1 \cdot W_1) + \text{etc.} \,] = 0. \qquad (23)$$

Pour spécialiser cette formule générale, posons

$$V = \psi(x, y, p), \ W = \xi(x, y, p), \ W_1 = \xi_1(x, y, p), \ \text{etc.}$$

$$p = \frac{dy}{dx} \ ,$$

et supposons que x soit l'élément constant, on aura :

$$\int_{\text{I}}^{\alpha} \delta V dx = [(\frac{dV}{dp})\delta y]_{\alpha} - [(\frac{dV}{dp})\cdot\delta y]_{a} +$$

$$\int_{a}^{\alpha} dx \left\{ (\frac{dV}{dx}) + \frac{d(\frac{dV}{dp})}{dx} \right\} \delta y ,$$

$$\int_{\text{I}}^{\alpha} \delta(\lambda \cdot W) dx = \lambda_{\text{I}} [(\frac{dW}{dp})\delta y]_{\alpha} - \lambda [(\frac{dW}{dp})\delta y]_{a} +$$

$$\int_{a}^{\alpha} dx\, \lambda \left\{ (\frac{dW}{dy}) + \frac{d(\frac{dW}{dp})}{dx} \right\} \delta y ,$$

$$\int_{\text{I}}^{\alpha} \delta(\lambda_{\text{I}} \cdot W_{\text{I}}) dx = \lambda_{\text{I}} [(\frac{dW_{\text{I}}}{dp})\delta y]_{\alpha} - \lambda_{\text{I}} [(\frac{dW_{\text{I}}}{dp})\delta y]_{a} +$$

$$\int_{a}^{\alpha} dx\, \lambda_{\text{I}} \left\{ (\frac{dW_{\text{I}}}{dy}) + \frac{d(\frac{dW_{\text{I}}}{dp})}{dx} \right\} \delta y$$

etc., etc.

Donc l'équation (25) devient :

$$\delta u = [(\frac{dV}{dp}) + \lambda(\frac{dW}{dp}) + \lambda_{\text{I}}(\frac{dW_{\text{I}}}{dp}) + \text{etc.}]_{\alpha}\, \delta y_{\alpha} -$$

$$[(\frac{dV}{dp}) + \lambda(\frac{dW}{dp}) + \lambda_{\text{I}}(\frac{dW_{\text{I}}}{dp}) + \text{etc.}]_{a}\, \delta y_{a} +$$

$$\int_{\text{I}}^{\alpha} \left\{ (\frac{dV}{dy}) - \frac{d(\frac{dV}{dp})}{dx} + \lambda [(\frac{dW}{dy}) - \frac{d(\frac{dW}{dp})}{dx}] + \right.$$

$$\lambda_1 \left[\left(\frac{dW_1}{dy} \right) - \frac{d\left(\frac{dW_1}{dp} \right)}{dx} \right] + \text{etc.} \Big\} \, dx \, \delta y = 0. \qquad (26)$$

Quand on ne donne qu'une seule équation, savoir $L=0$, il faudra faire dans la formule (26) :

$$\lambda_1 = 0 \,, \quad \lambda_2 = 0 \,, \text{ etc.},$$

et alors on aura simplement

$$\delta u = \int_a^\alpha dx \, \{ \delta V + \delta(\lambda . W) \}$$

$$= \left[\left(\frac{dV}{dp} \right) + \lambda \left(\frac{dW}{dp} \right) \right]_\alpha \delta y_\alpha - \left[\left(\frac{dV}{dp} \right) + \lambda \left(\frac{dW}{dp} \right) \right]_a \delta y_a +$$

$$\int_a^\alpha \Big\{ \left(\frac{dV}{dy} \right) - \frac{d\left(\frac{dV}{dp} \right)}{dx} +$$

$$\lambda \left[\left(\frac{dW}{dy} \right) - \frac{d\left(\frac{dW}{dp} \right)}{dx} \right] \Big\} \, dx \, \delta y = 0. \qquad (27)$$

Cette équation se partage en deux autres, qui sont :

$$\left(\frac{dV}{dy} \right) - \frac{d\left(\frac{dV}{dp} \right)}{dx} + \lambda \left[\left(\frac{dW}{dy} \right) - \frac{d\left(\frac{dW}{dp} \right)}{dx} \right] = 0 \,, \qquad (28)$$

$$\left[\left(\frac{dV}{dp} \right) + \lambda \left(\frac{dW}{dp} \right) \right]_\alpha \delta y_\alpha - \left[\left(\frac{dV}{dp} \right) + \lambda \left(\frac{dW}{dp} \right) \right]_a \delta y_a = 0. \, (29)$$

En intégrant la première, on trouvera la fonction $y = \varphi x$, qui doit satisfaire à l'équation $L=0$, en même temps qu'elle rend l'expression

$$u = \int_a^\alpha V dx$$

un maximum, ou un minimum.

L'équation (29), jointe à la relation

$$L = \int_a^\alpha W dx - K = 0,$$

servira, quand K est donné, à déterminer les constantes provenant de l'intégration, l'indéterminé λ, et les autres inconnues du problème.

DEUXIÈME PARTIE.

APPLICATIONS DU CALCUL DES VARIATIONS.

Premier Problème.

Chercher la ligne la plus courte entre deux points donnés dans un plan.

Soient A $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$, B $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases}$

les points donnés; en supposant les axes rectangulaires, la question à résoudre sera celle-ci :

Trouver une fonction $y = \varphi x$ propre à rendre l'expression

$$u = \int_a^\alpha dx \sqrt{1+p^2},$$

dans laquelle on a $p = \frac{dy}{dx}$, un minimum, x étant l'élément constant, et les limites $x = a$, $x = \alpha$ étant données.

Solution.

Il faut résoudre l'équation

$$\delta u = \int_a^\alpha dx\, \delta \sqrt{1+p^2}$$

$$= \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \delta y_\alpha - \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \delta y_a -$$

$$\int_a^\alpha \frac{d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)}{dx}\,\delta y\,dx = 0.$$

On en tire :

$$\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \delta y_\alpha - \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \delta y_a = 0\,, \qquad (1$$

$$d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0. \qquad (2$$

Les points A et B étant donnés, on a $\delta y_\alpha = 0$, $\delta y_a = 0$, donc l'équation s'évanouit.

L'équation (2 donne, par l'intégration :

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \mathrm{K}\,;$$

d'où :

$$p = \frac{\mathrm{K}}{\sqrt{1-\mathrm{K}^2}}\,.$$

Fesons, pour abréger, $\frac{\mathrm{K}}{\sqrt{1-\mathrm{K}^2}} = \mathrm{C}$, et remplaçons p par sa valeur $\frac{dy}{dx}$, nous aurons l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{C}\,,$$

qui conduit à la fonction cherchée :

$$y = \mathrm{C}x + \mathrm{C}'\,. \qquad (3)$$

Les constantes C, C′ se déterminent par les équations

$$b = \mathrm{C}a + \mathrm{C}'\,, \quad \beta = \mathrm{C}\alpha + \mathrm{C}'.$$

On a donc, enfin :

$$y = \varphi x = \frac{\beta - b}{\alpha - a}\, x + \frac{\alpha b - a\beta}{\alpha - a}.$$

Rem. Si les points A, B, ne sont donnés que par leurs abscisses $x = a$, $x = \alpha$, alors les variations δy_α, δy_a ne sont plus nulles, par conséquent l'équation (1 se décomposera en

$$\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha = 0, \qquad \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a = 0.$$

Ces équations sont satisfaites, en posant

$$p = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = 0.$$

Donc la droite est parallèle à l'axe des x, et l'on trouve par son équation

$$y = \text{const.}$$

Deuxième Problème.

Trouver la plus courte distance entre deux courbes

$$b = \zeta a, \quad \beta = \chi\alpha \tag{α}$$

données dans un plan.

Les axes étant supposés rectangulaires, et x étant pris pour l'élément constant, la question à résoudre sera celle-ci :

Chercher une fonction $y = \varphi x$, et des valeurs $x = a$, $x = \alpha$, propres à rendre l'expression

$$u = \int_a^\alpha dx \sqrt{1+p^2}$$

un minimum.

Solution.

Comme les limites a et α sont inconnues, il faut résoudre l'équation

$$\delta_1 u = \int_a^\alpha dx \cdot \delta_1 \sqrt{1+p^2}$$

$$= [\sqrt{1+p^2}]_\alpha d\alpha - [\sqrt{1+p^2}]_a da + [\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}]_\alpha \delta y_\alpha$$

$$-[\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}]_a \delta y_a - \int_a^\alpha \frac{d(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}})}{dx} dx\,\delta y = 0.$$

Cette équation se partage en deux autres, savoir :

$$[\sqrt{1+p^2}]_\alpha d\alpha - [\sqrt{1+p^2}]_a da + [\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}]_\alpha \delta y_\alpha -$$

$$[\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}]_a \delta y_a = 0, \qquad (1$$

et

$$d(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}) = 0. \qquad (2$$

L'équation (2 donne par l'intégration

$$y = Cx + C'. \qquad (3$$

Donc, parmi les droites que représente l'équation (3, il n'y aura que celle qui satisfera à l'équation (1, qui résoudra la question. Il faudra donc déterminer les constantes C et C' d'après cette condition. Pour cela, remarquons d'abord qu'on a les équations :

$$y_a = \varphi a = \xi a = b,$$

$$y_\alpha = \varphi\alpha = \chi\alpha = \beta;$$

dont on tire, par les formules (16), (18) et (19),

$$\delta y_a + \frac{d\varphi a}{da} da = \frac{db}{da} da,$$

$$\delta y_\alpha + \frac{d\varphi\alpha}{d\alpha} d\alpha = \frac{d\beta}{d\alpha} d\alpha.$$

Mais à cause de

$$y = \varphi x = Cx + C',$$

on a :

$$\frac{d\varphi a}{da} = C, \quad \frac{d\varphi \alpha}{d\alpha} = C;$$

donc

$$\delta y_a + Cda = \frac{db}{da} da, \quad \delta y_\alpha + Cd\alpha = \frac{d\beta}{d\alpha} d\alpha,$$

ou :

$$\delta y_a = \left(\frac{db}{da} - C \right) da, \quad \delta y_\alpha = \left(\frac{d\beta}{d\alpha} - C \right) d\alpha.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (1, elle devient :

$$\left[1 + C \frac{d\beta}{d\alpha} \right] d\alpha - \left[1 + C \frac{db}{da} \right] da = 0.$$

Comme da et $d\alpha$ sont des accroissements arbitraires, et indépendants, cette équation se partagera en deux autres, savoir :

$$1 + C \frac{d\beta}{d\alpha} = 0, \quad 1 + C \frac{db}{da} = 0.$$

En joignant à ces deux équations les suivantes :

$$b = Ca + C', \quad \beta = C\alpha + C',$$

$$b = \xi a, \qquad \beta = \chi \alpha,$$

on aura six équations pour déterminer les six inconnues

$$a, \ b, \ \alpha, \ \beta, \ C, \ C'.$$

TROISIÈME PROBLÈME.

On demande la ligne la plus courte entre deux points donnés de l'espace.

Supposons les axes rectangulaires, et soit x l'élément constant, la question à résoudre sera celle-ci :

Trouver deux fonctions

$$y = \varphi x, \quad z = \psi x,$$

propres à rendre l'expression

$$u = \int_a^\alpha \sqrt{1 + p^2 + q^2} \cdot dx$$

un minimum, entre les limites données $x = a$, $x = \alpha$.

Solution.

Comme on a $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dz}{dx}$, et que les limites sont données, il faudra résoudre l'équation

$$\delta u = \int_a^\alpha \delta \sqrt{1 + p^2 + q^2} \cdot dx$$

$$= \left[\frac{p\delta y + q\delta z}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \right]_\alpha - \left[\frac{p\delta y + q\delta z}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \right]_a -$$

$$\int_a^\alpha dx \left\{ \frac{d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)}{dx} \delta y + \frac{d\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)}{dx} \delta z \right\} = 0.$$

Cette équation se partage en deux autres, qui sont:

$$\left[\frac{p\delta y + q\delta z}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right]_\alpha - \left[\frac{p\delta y + q\delta z}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right]_a = 0, \qquad (1$$

$$\left.\begin{aligned} d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right) = 0, \\ d\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2$$

L'équation (1 s'évanouira ; car les points A et B étant fixes, on a :

$$\delta y_\alpha = 0, \ \delta z_\alpha = 0, \ \delta y_a = 0, \ \delta z_a = 0.$$

En intégrant les équations (2, on trouve :

$$\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = k, \quad \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = h.$$

On en tire :

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{k}{\sqrt{1 - k^2 - h^2}} = \mathrm{C},$$

$$q = \frac{dz}{dx} = \frac{h}{\sqrt{1 - k^2 - h^2}} = \mathrm{C}'.$$

En intégrant de nouveau, on trouve les équations de la droite :

$$y = \mathrm{C}x + \mathrm{C}_1,$$

$$z = \mathrm{C}'x + \mathrm{C}'_1.$$

Soient $\quad \mathrm{A}\begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = c \end{cases}, \quad \mathrm{B}\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \gamma \end{cases},$

les points donnés, on déterminera les constantes

$$\mathrm{C},\ \mathrm{C}_1,\ \mathrm{C}',\ \mathrm{C}'_1,$$

par les relations

$$b = \mathrm{C}a + \mathrm{C}_1, \qquad \beta = \mathrm{C}\alpha + \mathrm{C}_1$$

$$c = \mathrm{C}'a + \mathrm{C}'_1, \qquad \gamma = \mathrm{C}'\alpha + \mathrm{C}'_1,$$

et l'on aura :

$$y = \varphi x = \frac{\beta - b}{\alpha - a}\, x + \frac{\alpha b - a\beta}{\alpha - a},$$

$$z = \psi x = \frac{\gamma - c}{\alpha - a}\, x + \frac{\alpha c - a\gamma}{\alpha - a}.$$

Rem. Si l'on donnait seulement $x = a$, $x = \alpha$, c'est-à-dire les plans perpendiculaires à l'axe des x comprenant la plus courte distance, alors les variations δy_α, δz_α, δy_a, δz_a ne seraient plus nulles, et comme elles sont indépendantes entre elles, l'équation aux limites fournirait les suivantes :

$$\left[\frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right]_\alpha = 0, \quad \left[\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right]_\alpha = 0,$$

$$\left[\frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right]_a = 0, \quad \left[\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right]_a = 0.$$

Ces équations sont satisfaites en posant

$$q = 0, \quad p = 0,$$

d'où :

$$z = \text{const.}, \quad y = \text{const.}$$

La plus courte ligne cherchée est alors une parallèle à l'axe des x, comprise entre les plans $x = a$, $x = \alpha$.

Quatrième Problème.

On demande la ligne la plus courte entre les deux courbes de l'espace

$$1) \begin{cases} b = \xi a, \\ c = \xi_1 a, \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} \beta = \chi\alpha, \\ \gamma = \chi_1\alpha. \end{cases}$$

En supposant les axes rectangulaires, et que x soit l'élément constant, la question à résoudre sera celle-ci :

Trouver deux fonctions

$$y = \varphi x, \quad z = \psi x,$$

et deux valeurs

$$x = a, \quad x = \alpha,$$

propres à rendre l'expression

$$u = \int_a^\alpha dx \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

un minimum.

Solution.

Soit $V = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$; comme les limites $x = a$, $x = \alpha$ sont inconnues, il faudra résoudre l'équation

$$\delta_1 u = \int_a^\alpha \delta_1 V dx$$

$$= \int_a^\alpha \{ \delta V + dV \} dx$$

$$= \int_a^\alpha \delta V \cdot dx + V_\alpha d\alpha - V_a da$$

$$= \int_a^\alpha \left(\frac{dV}{dp}\right) \frac{y\delta y}{dx}\, dx + \int_a^\alpha \left(\frac{dV}{dq}\right) \frac{d\delta z}{dx}\, dx + V_\alpha d\alpha - V_a da$$

$$= V_\alpha\, d\alpha - V_a\, da + \left(\frac{dV}{dp}\right)_\alpha \delta y_\alpha - \left(\frac{dV}{dp}\right)_a \delta y_a +$$

$$\left(\frac{dV}{dq}\right)_\alpha \delta z_\alpha - \left(\frac{dV}{dq}\right)_a \delta z_a - \int_a^\alpha dx \left\{ \frac{d\left(\frac{dV}{dp}\right)}{dx} \delta y + \right.$$

$$\left. \frac{d\left(\frac{dV}{dq}\right)}{dx} \delta z \right\} = 0.$$

Cette équation se partage en celles-ci :

$$V_\alpha\, d\alpha - V_a\, da + \left(\frac{dV}{dp}\right)_\alpha \delta y_\alpha - \left(\frac{dV}{dp}\right)_a \delta y_a +$$

$$\left(\frac{dV}{dq}\right)_\alpha \delta z_\alpha - \left(\frac{dV}{dq}\right)_a \delta z_a = 0, \qquad (1$$

$$\left.\begin{aligned} d\left(\frac{dV}{dp}\right) &= 0, \\ d\left(\frac{dV}{dq}\right) &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2$$

En intégrant ces dernières, on obtient, comme dans le problème précédent, la droite

$$\left.\begin{aligned} y &= Cx + C_1, \\ z &= C'x + C'_1. \end{aligned}\right\} \qquad (3$$

Comme on a $p = \frac{dy}{dx} = C$, $q = \frac{dz}{dx} = C'$, l'équation (1, qui doit être satisfaite par les valeurs (3, devient

$$[1+C^2+C'^2]\,d\alpha-[1+C^2+C'^2]\,da+$$
$$C\delta y_\alpha+C'\delta z_\alpha-C\delta y_a-C'\delta z_a=0. \qquad (4$$

Mais les arbitraires

$$d\alpha,\ da,\ \delta y_\alpha,\ \delta z_\alpha,\ \delta y_a,\ \delta z_a$$

ne sont pas indépendantes, à cause des relations

$$\left.\begin{array}{ll} y_a=\varphi a=\xi a=b, & y_\alpha=\varphi\alpha=\chi\alpha=\beta, \\ z_a=\psi a=\xi_1 a=c, & z_\alpha=\psi\alpha=\chi_1\alpha=\gamma. \end{array}\right\}. \qquad (5$$

Or, on déduit de celles-ci, par l'emploi des formules (17), (18) et (19), ces autres relations :

$$\delta y_a+\frac{dy_a}{da}\,da=\frac{db}{da}\,da,\quad \delta y_\alpha+\frac{dy_\alpha}{d\alpha}\,d\alpha=\frac{d\beta}{d\alpha}\,d\alpha,$$

$$\delta z_a+\frac{dz_a}{da}\,da=\frac{dc}{da}\,da,\quad \delta z_\alpha+\frac{dz_\alpha}{d\alpha}\,d\alpha=\frac{d\gamma}{d\alpha}\,d\alpha.$$

On a d'ailleurs, par les équations (3 :

$$\frac{dy_a}{da}=C,\ \frac{dz_a}{da}=C',\ \frac{dy_\alpha}{d\alpha}=C,\ \frac{dz_\alpha}{d\alpha}=C',$$

donc :

$$\delta y_a=\left(\frac{db}{da}-C\right)da,\ \delta y_\alpha=\left(\frac{d\beta}{d\alpha}-C\right)d\alpha,$$

$$\delta z_a=\left(\frac{dc}{da}-C'\right)da,\ \delta z_\alpha=\left(\frac{d\gamma}{d\alpha}-C'\right)d\alpha.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (4, elle devient :

$$\left[1+C\frac{d\beta}{d\alpha}+C'\frac{d\gamma}{d\alpha}\right]d\alpha-$$

$$\left[1+C\frac{db}{da}+C'\frac{dc}{da}\right]da=0.$$

Comme $d\alpha$ et da sont deux accroissements arbitraires et indépendants entre eux, cette dernière équation se décompose en celles-ci :

$$1 + C\,\frac{d\beta}{d\alpha} + C'\,\frac{d\gamma}{d\alpha} = 0\,,$$

$$1 + C\,\frac{db}{da} + C'\,\frac{dc}{da} = 0.$$

Si nous joignons à ces deux équations les suivantes

$$b = \xi a\,, \quad \beta = \chi x\,,$$

$$c = \xi_1 a, \quad \gamma = \chi_1 \alpha\,,$$

$$b = Ca + C_1\,, \quad \beta = C\alpha + C_1\,,$$

$$c = C'a + C'_1\,, \quad \gamma = C'\alpha + C'_1\,,$$

on pourra déterminer les 10 inconnues

$$a,\ b,\ C$$

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma$$

$$C,\ C_1\,,\ C'\,,\ C'_1\,.$$

Cinquième Problème.

Trouver la ligne la plus courte entre deux surfaces données

$$a = \xi\,(b, c)\,, \quad \alpha = \chi\,(\beta, \gamma).$$

En supposant les axes rectangulaires, et que x soit l'élément constant, la question à résoudre sera celle-ci :

Trouver deux fonctions

$$y = \varphi x,\ z = \psi x\,,$$

et deux valeurs

$$x = a\,,\ x = \alpha$$

propres à rendre l'expression

$$u = \int_a^\alpha dx\,\sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

un minimum.

Solution.

En raisonnant comme dans le problème précédent, on trouve on trouve

$$\left.\begin{array}{l} y = \varphi x = Cx + C_1 , \\ z = \psi x = C'x + C'_1 , \end{array}\right\} \qquad (\alpha)$$

pour les équations de la ligne cherchée, et

$$[1 + C^2 + C'^2]\, d\alpha - [1 + C^2 + C'^2]\, da + C\delta y_\alpha + C'\delta z_\alpha - C\delta y_a - C'\delta z_a = 0,$$

pour l'équation aux limites.

Mais aux points où la droite (α rencontre les deux surfaces données, on a :

$$y_a = b = Ca + C_1 , \quad y_\alpha = \beta = C\alpha + C_1 ,$$

$$z_a = c = C'a + C'_1 , \quad z_\alpha = \gamma = C'\alpha + C'_1 .$$

On a donc, par les formules (17), (18) et (19) :

$$\delta y_a = \left(\frac{db}{da} - C\right) da = db - Cda ,$$

$$\delta z_a = \left(\frac{dc}{da} - C'\right) da = dc - C'da ,$$

$$\delta y_\alpha = \left(\frac{d\beta}{d\alpha} - C\right) d\alpha = d\beta - Cd\alpha ,$$

$$\delta z_\alpha = \left(\frac{d\gamma}{d\alpha} - C'\right) d\alpha = d\gamma - C'd\alpha .$$

On a de plus

$$da = \left(\frac{da}{db}\right) db + \left(\frac{da}{dc}\right) dc ,$$

$$d\alpha = \left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right) d\beta + \left(\frac{d\alpha}{d\gamma}\right) d\gamma .$$

En substituant ces valeurs dans l'équation aux limites, elle devient :

$$\left[C + \left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)\right] d\beta + \left[C' + \left(\frac{d\alpha}{d\gamma}\right)\right] d\gamma -$$

$$\left[C + \left(\frac{da}{db}\right)\right] db - \left[C' + \left(\frac{da}{dc}\right)\right] dc = 0.$$

Or, les accroissements arbitraires

$$db,\ dc,\ d\beta,\ d\gamma$$

étant indépendants, l'équation précédente se décompose en celles-ci:

$$C + \left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right) = 0\,, \qquad C' + \left(\frac{d\alpha}{d\gamma}\right) = 0\,,$$

$$C + \left(\frac{da}{db}\right) = 0\,, \qquad C' + \left(\frac{da}{dc}\right) = 0.$$

En joignant à ces équations les suivantes :

$$a = \xi\,(b, c)\,, \qquad \alpha = \chi\,(\beta, \gamma)$$
$$b = Ca + C_1\,, \qquad \beta = C\alpha + C_1\,,$$
$$c = C'a + C'_1\,, \qquad \gamma = C'\alpha + C'_1\,,$$

On aura le nombre voulu d'équations pour déterminer les dix inconnues

$$a,\ b,\ c,\qquad \alpha,\ \beta,\ \gamma,\qquad C,\ C_1\,,\ C',\ C'_1\,.$$

Sixième Problème.

Chercher la surface minimum comprise entre deux plans

$$x = a\,, \quad x = \alpha$$

perpendiculaires à l'axe des x, *et deux surfaces données*

$$c = f\,(x, y)\,, \quad \gamma = f_1\,(x, y).$$

En supposant les axes rectangulaires, si de plus x et y sont les éléments constants, la question à résoudre sera celle-ci :

Trouver une fonction

$$z = \varphi\,(x, y)$$

de deux variables, et deux fonctions

$$y_0 = \psi_0 x\,, \quad y_1 = \psi_1 x$$

d'une seule variable, propres à rendre l'expression

$$u = \int_a^\alpha dx \int_{y_0}^{y_1} dy \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

un minimum entre les limites données

$$x = a,\ x = \alpha.$$

Solution.

Soit pour abréger

$$V = \sqrt{1 + p^2 + q^2};$$

dans cette expression on a $p = (\frac{dz}{dx}),\ q = (\frac{dz}{dy})$.

Comme les limites inconnues de l'intégrale double sont variables, on aura, d'après la relation (22), à résoudre l'équation

$$\delta' u = \int_a^\alpha dx\,[\,V_{x,\psi_1 x}\,\delta\psi_1 x - V_{x,\psi_0 x}\,\delta\psi_0 x +$$

$$(Q - P\frac{dy}{dx})_{x,\psi_1 x}\,\delta z_{x,\psi_1 x} - (Q - P\frac{dy}{dx})_{x,\psi_0 x}\,\delta z_{x,\psi_0 x}\,] +$$

$$\int_{\psi_0\alpha}^{\psi_1\alpha} P_{\alpha,y}\,\delta z_{\alpha,y}\,dy - \int_{\psi_0 a}^{\psi_1 a} P_{a,y}\,\delta z_{a,y}\,dy -$$

$$\int_a^\alpha \int_{\psi_0 x}^{\psi_1 x} [\,(\frac{dP}{dx}) + (\frac{dQ}{dy})\,]\,\delta z\,dy\,dx = 0. \qquad (\alpha)$$

Cette équation se décompose en

$$P_{\alpha,y} = 0,\quad P_{a,y} = 0, \qquad (\beta)$$

$$\int_a^\alpha dx\,[\,V_{x,\psi_1 x}\,\delta\psi_1 x - V_{x,\psi_0 x}\,\delta\psi_0 x +$$

$$(Q - P\frac{dy}{dx})_{x,\psi_1 x}\,\delta z_{x,\psi_1 x} - (Q - P\frac{dy}{dx})_{x,\psi_0 x}\,\delta z_{x,\psi_0 x}\,] = 0, \qquad (\gamma)$$

et

$$(\frac{dP}{dx}) + (\frac{dQ}{dy}) = r(1 + q^2) - 2pqs + t(1 + p^2) = 0.$$

En intégrant celle-ci, qui est aux différences partielles du second ordre, on trouve la fonction cherchée

$$z = \varphi\,(x,\ y)\ ,$$

renfermant deux fonctions arbitraires, que je représenterai par ω_1, ω_2. Pour les déterminer, ainsi que les fonctions inconnues

$$y_0 = \psi_0 x,\quad y_1 = \psi_1 x\ ,$$

il faut recourir à l'équation (γ), et la décomposer en plusieurs autres. A cet effet, observons que la surface minimum cherchée $z = \varphi\,(x, y)$, rencontre les surfaces données

$$c = f\,(x,\ y)\ ,\quad \gamma = f_1\,(\,x\,,\,y)$$

en des points pour lesquels on a :

$$\left.\begin{aligned} z_{x,\psi_0 x} &= \varphi\,(\,x,\ \psi_0 x) = f\,(\,x,\ \psi_0 x\,)\,, \\ z_{x,\psi_1 x} &= \varphi\,(\,x,\ \psi_1\,x\,) = f\,(\,x,\ \psi_1 x\,) \end{aligned}\right\} \qquad (\delta)$$

On a donc, par les formules (12'), (13) et (14),

$$\delta' z_{x,\psi_0 x} = \delta f(\,x, \psi_0 x\,)\,,$$

$$\text{ou}\quad \delta z_{x,\psi_0 x} + \left(\frac{dz}{dy}\right)_{x,\psi_0 x} \delta\psi_0 x = \left(\frac{df}{dy}\right)_{x,\psi_0 x} \delta\psi_0 x\,,$$

$$\delta' z_{x,\psi_1 x} = \delta f_1\,(\,x, \psi_1 x\,)\,,$$

$$\text{ou}\quad \delta z_{x,\psi_1 x} + \left(\frac{dz}{dy}\right)_{x,\psi_1 x} \delta\psi_1 x = \left(\frac{df_1}{dy}\right)_{x,\psi_1 x} \delta\psi_1 x.$$

Soient pour abréger :

$$\left(\frac{df}{dy}\right) = q'\,,\quad \left(\frac{df_1}{dy}\right) = q''\,,$$

$$\left(\frac{df}{dx}\right) = p'\,,\quad \left(\frac{df_1}{dx}\right) = p''\,,$$

les équations ci-dessus donneront :

$$\delta z_{x,\psi_0 x} = (\,q' - q\,)_{x,\psi_0 x} \cdot \delta\psi_0 x\,,$$

$$\delta z_{x,\psi_1 x} = (q'' - q\,)_{x,\psi_1 x} \cdot \delta\psi_1 x.$$

Comme on a de plus

$$\left(\frac{dV}{dy}\right) = Ps + Qt = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,s + \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,t,$$

$$P = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad Q = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

l'équation (γ) deviendra :

$$\int_a^\alpha dx \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)_{x,\psi_1 x} \cdot \left[(1+p^2+qq'')_{x,\psi_1 x} - \right.\right.$$

$$(pq''-pq)_{x,\psi_1 x} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x,\psi_1 x} \Big] \delta\psi_1 x - \left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)_{x,\psi_1 x} \cdot$$

$$\left.\left[(1+p^2+qq')_{x,\psi_0 x} - (pq'-pq)_{x,\psi_0 x} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x,\psi_0 x}\right] \delta\psi_0 x \right\} = 0.$$

Comme les fonctions arbitraires $\delta\psi_1 x$, $\delta\psi_0 x$ sont indépendantes, cette équation se partagera en deux autres, savoir :

$$(1+p^2+qq'')_{x,\psi_1 x} - (pq''-pq)_{x,\psi_1 x} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x,\psi_1 x} = 0, \qquad (1'$$

$$(1+p^2+qq')_{x,\psi_0 x} - (pq'-pq)_{x,\psi_0 x} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x,\psi_0 x} = 0. \qquad (2'$$

Eliminons de celles-ci les deux facteurs

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x,\psi_1 x}, \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x,\psi_0 x}.$$

A cet effet, on a les équations

$$z_{x,\psi_0 x} = f(x,\psi_0 x), \quad z_{x,\psi_1 x} = f_1(x,\psi_1 x),$$

qui donnent, par la différentiation :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_{x,\psi_0 x} + \left(\frac{dz}{dy}\right)_{x,\psi_0 x} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x,\psi_0 x} = \left(\frac{df}{dx}\right)_{x,\psi_0 x} +$$

$$\left(\frac{df}{dy}\right)_{x,\psi_0 x} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x,\psi_0 x},$$

$$(\frac{dz}{dx})_{x,\psi_1 x} + (\frac{dz}{dy})_{x,\psi_1 x} \cdot (\frac{dy}{dx})_{x,\psi_1 x} = (\frac{df}{dx})_{x,\psi_1 x} +$$
$$(\frac{df}{dy})_{x,\psi_1 x} \cdot (\frac{dy}{dx})_{x,\psi x}.$$

On tire de celles-ci :

$$(\frac{dy}{dx})_{x,\psi_0 x} = \frac{(p-p')_{x,\psi_0 x}}{(q'-q)_{x,\psi_0 x}}, \quad (\frac{dy}{dx})_{x,\psi_1 x} = \frac{(p-p'')_{x,\psi_1 x}}{(q''-q)_{x,\psi_1 x}}.$$

En substituant ces valeurs dans les équations (1' et (2' , celles-ci deviennent :

$$(1+qq''+pp'')_{x,\psi_1 x} = 0,$$
$$(1+qq'+pp')_{x,\psi_0 x} = 0,$$

ou

$$\left.\begin{aligned} 1+(\frac{dz}{dy})_{x,\psi_1 x}\cdot(\frac{d\gamma}{dy})_{x,\psi_1 x}+(\frac{dz}{dx})_{x,\psi_1 x}\cdot(\frac{d\gamma}{dx})_{x,\psi_1 x} = 0,\\ 1+(\frac{dz}{dy})_{x,\psi_0 x}\cdot(\frac{dc}{dy})_{x,\psi_0 x}+(\frac{dz}{dx})_{x,\psi_0 x}\cdot(\frac{dc}{dx})_{x,\psi_0 x} = 0.\end{aligned}\right\} \quad (\varepsilon)$$

Comme on a

$$P = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad Q = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

il est clair que les équations (β), pourront être remplacées par les suivantes :

$$p_{a,y} = (\frac{dz}{dx})_{a,y} = 0, \quad p_{a;y} = (\frac{dz}{dx})_{a,y} = 0. \qquad (\beta')$$

Ces équations, jointes aux équations (δ) , serviront à déterminer les fonctions arbitraires ω_1 , ω_2 , et par conséquent la surface minimum

$$z = \varphi(x, y)$$

sera complètement déterminée.

En substituant ensuite cette valeur de z dans les équations (ε), celles-ci feront connaitre les fonctions inconnues

$$\psi_0 x, \ \psi_1 x.$$

SEPTIÈME PROBLÈME.

Chercher la courbe qui, en tournant autour de l'axe des x, *engendre une surface de révolution la plus petite possible entre les plans* $x = a$, $x = \alpha$.

Solution.

On a ici l'équation

$$u = \int_a^\alpha 2\pi y \sqrt{1+p^2}\, dx = \text{minimum}.$$

Comme les limites a et α sont données, on trouve la courbe cherchée

$$y = \varphi x,$$

en résolvant l'équation

$$\delta u = 2\pi \int_a^\alpha \delta (y \sqrt{1+p^2})\, dx = 0.$$

Or, on a :

$$\delta (y \cdot \sqrt{1+p^2}) = \sqrt{1+p^2} \cdot \delta y + y \delta \sqrt{1+p^2}$$

$$= \sqrt{1+p^2} \cdot \delta y + \frac{py}{\sqrt{1+p^2}} \frac{d\delta y}{dx}.$$

On a donc :

$$\delta u = \left[\frac{py}{\sqrt{1+p^2}} \right]_\alpha \delta y_\alpha - \left[\frac{py}{\sqrt{1+p^2}} \right]_a \delta y_a +$$

$$\int_a^\alpha \left\{ \sqrt{1+p^2} - \frac{d\left(\frac{py}{\sqrt{1+p^2}} \right)}{dx} \right\} \delta y\, dx = 0.$$

Cette équation fournit par conséquent celles-ci :

$$\left[\frac{py}{\sqrt{1+p^2}} \right]_\alpha \delta y_\alpha - \left[\frac{py}{\sqrt{1+p^2}} \right]_a \delta y_a = 0, \qquad (1$$

$$\sqrt{1+p^2} - \frac{d\left(\frac{py}{\sqrt{1+p^2}}\right)}{dx} = 0. \qquad (2$$

En effectuant la différentiation indiquée, cette dernière devient :

$$\sqrt{1+p^2}\cdot dx - \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\,dy - \frac{y(1+p^2)\,dp}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}} +$$

$$\frac{yp^3dp}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}} = 0\,,$$

et se réduit à

$$(1+p^2)\,\frac{dx}{y} = p\,\frac{dy}{y} + \frac{dp}{1+p^2}\,.$$

Comme on a $dy = pdx$, on trouve

$$\frac{dx}{y} = \frac{dp}{1+p^2}\,.$$

Pour intégrer cette équation, multiplions-la par $\frac{dy}{dx} = p$,

nous aurons

$$\frac{dy}{y} = \frac{pdp}{1+p^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\,pdp}{1+p^2}\,,$$

d'où :

$$\log y = \log\sqrt{1+p^2} + \log c\,,$$

$$\frac{y}{c} = \sqrt{1+p^2}\,.$$

On tire de celle-ci :

$$p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y^2-c^2}{c^2}}\,, \quad \text{d'où :}$$

$$\frac{dx}{c} = \frac{dy}{\sqrt{y^2-c^2}}\,, \quad \text{et} \quad \frac{x}{c} = \int\frac{dy}{\sqrt{y^2-c^2}}\,.$$

ou

$$\frac{x}{c} - \int \frac{[y + \sqrt{y^2 - c^2}]\, dy}{(y + \sqrt{y^2 - c^2})\sqrt{y^2 - c^2}} =$$

$$\int \frac{dy + \frac{1}{2}(y^2 - c^2)^{-\frac{1}{2}} 2y\, dy}{y + \sqrt{y^2 - c^2}}$$

$$= \int \frac{d(y + \sqrt{y^2 - c^2})}{y + \sqrt{y^2 - c^2}} = \log(y + \sqrt{y^2 - c^2}) - \log c'. \quad (3$$

$$\frac{x}{c} = \log \frac{y + \sqrt{y^2 - c^2}}{c'}.$$

ou

$$e^{\frac{x}{c}} = \frac{y + \sqrt{y^2 - c^2}}{c'};$$

d'où :

$$y = \frac{1}{2c'}\left(c'^2 e^{\frac{x}{c}} + c^2 e^{-\frac{x}{c}}\right). \qquad (\alpha)$$

(α) est la fonction cherchée

$$y = \varphi x,$$

c'est l'équation d'une chainette. Comme on a $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{c^2}$, l'on voit que $\frac{d^2y}{dx^2}$ et y ont le même signe ; donc la chainette (α) tourne sa convexité vers l'axe des x.

La relation (α) change l'équation aux limites en

$$\left[c'^2 e^{\frac{\alpha}{c}} - c^2 e^{-\frac{\alpha}{c}}\right] \delta y_\alpha - \left[c'^2 e^{\frac{a}{c}} - c^2 e^{-\frac{a}{c}}\right] \delta y_a = 0. \qquad (\beta)$$

1° Si la courbe cherchée doit être comprise entre deux points donnés

$$A \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}, \quad B \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases},$$

on aura

$$\delta y_\alpha = 0, \quad \delta y_a = 0,$$

et l'équation aux limites s'évanouira. Les constantes c et c' se déterminent alors par les équations

$$\left.\begin{aligned} b &= \frac{1}{2c'}\left(c'^2 e^{\frac{a}{c}} + c^2 e^{-\frac{a}{c}}\right) \\ \beta &= \frac{1}{2c'}\left(c'^2 e^{\frac{\alpha}{c}} + c^2 e^{-\frac{\alpha}{c}}\right) \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

2° Si l'on donne seulement le point A, on a

$$\delta y = 0,$$

et

$$c'^2 e^{\frac{\alpha}{c}} - c^2 e^{-\frac{\alpha}{c}} = 0, \text{ d'où}$$

$$c' = c e^{-\frac{\alpha}{c}}.$$

En substituant cette valeur dans les équations (7), on trouve les deux inconnues c et β. Comme on a alors $\beta = c$, l'on voit que le point B est aussi bas que possible.

3° Si A et B ne sont pas donnés, on a :

$$c'^2 e^{\frac{\alpha}{c}} - c^2 e^{-\frac{a}{c}} = 0,$$

$$c'^2 e^{\frac{a}{c}} - c^2 e^{-\frac{a}{c}} = 0.$$

De ces équations on déduirait les résultats contradictoires

$$c' = c e^{-\frac{\alpha}{c}}, \quad c' = c \cdot e^{-\frac{a}{c}}.$$

Donc le troisième cas ne donne rien.

Rem. On peut simplifier l'équation (α), en prenant pour axe des y la plus grande ordonnée, qui est

$$y = c;$$

car pour $y < c$ le radical $\sqrt{y^2 - c^2}$ est imaginaire.

On a alors $y = c$, quand $x = 0$; donc

$$0 = \log c + c', \quad \text{ou} \quad c' = -\log c,$$

et

$$\frac{x}{c} = \log \frac{y + \sqrt{y^2 - c^2}}{c}, \quad -\frac{x}{c} = -\log \frac{y + \sqrt{y^2 - c^2}}{c}$$
$$= \log \frac{y - \sqrt{y^2 - c^2}}{c}.$$

En passant aux nombres, il vient :

$$e^{\frac{x}{c}} = \frac{y + \sqrt{y^2 - c^2}}{c}, \quad e^{-\frac{x}{c}} = \frac{y - \sqrt{y^2 - c^2}}{c};$$

donc

$$y = \frac{1}{2} c \left\{ e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} \right\}.$$

Si l'on change d'axes, on a :

$$x = \frac{1}{2} c \left\{ e^{\frac{y}{c}} + e^{-\frac{y}{c}} \right\}.$$

Huitième Problème.

On demande la courbe qu'un point matériel pesant doit suivre pour aller dans le temps le plus court, sans vitesse initiale, du point donné A, *au point* B, *aussi donné.*

Solution.

Soient $\quad A \begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = c \end{cases}, \quad B \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \gamma \end{cases},$

les coordonnées rectangulaires des points donnés, t, le temps de la descente, nous aurons l'équation

$$t = \text{minimum}.$$

Cherchons l'expression de t.

Pour cela, on a, par les principes de la mécanique,

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad \varphi = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{vdv}{ds}. \tag{1}$$

Soit maintenant F la force normale qui retient le point sur la courbe, soit g la gravité dirigée parallèlement à l'axe des y, soient μ, ν, ϖ les angles que la force F fait avec les axes des x, y, z, on aura, par les équations (1) :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{F}\cos\mu\,,\quad \frac{d^2y}{dt^2} = g + \mathrm{F}\cos\nu\,,\quad \frac{d^2z}{dt^2} = \mathrm{F}\cos\varpi.$$

Multiplions ces équations par dx, dy, dz et ajoutons, nous aurons :

$$\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{dt^2} = gdy + \mathrm{F}\left\{\cos\mu dx + \cos\nu dy + \cos\varpi dz\right\}. \qquad (2)$$

Mais, puisque le plan de la force F est un plan normal, on a pour son équation

$$\cos\mu dx + \cos\nu dy + \cos\varpi dz = 0\,;$$

donc l'équation ci-dessus se réduit à :

$$\frac{dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z}{dt^2} = gdy. \qquad (3)$$

Mais on a

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\,;$$

donc, en différentiant :

$$vdv = \frac{dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z}{dt^2}.$$

L'équation (3) devient donc :

$$vdv = gdy.$$

En intégrant, on a :

$$v^2 = 2gy + c.$$

Comme le point mobile est sans vitesse initiale, on a

$$2gb + c = 0\,,\quad c - 2gb\,;$$

donc

$$v^2 = 2g(y - b)\,,$$

$$v = \sqrt{2g(y-b)}. \qquad (4)$$

Mais on a :

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{dy \sqrt{1 + p^2 + q^2}}{\sqrt{2g\,(y - b)}} \ ;$$

d'où :

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{\beta}^{b} \frac{dy \sqrt{1 + p^2 + q^2}}{\sqrt{y - b}} = \text{minimum.}$$

Faisons pour abréger

$$w = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,,\ u = \sqrt{y - b},$$

on aura à résoudre l'équation

$$\delta t = [\,\frac{p}{wu}\,]_b\, \delta x_b + [\,\frac{q}{wu}\,]_b\, \delta z_b - [\,\frac{p}{wu}\,]_\beta\, \delta x_\beta -$$

$$[\,\frac{q}{wu}\,]_\beta\, \delta z_\beta - \int_{\beta}^{b} \Big\{ \delta x \cdot \frac{d\,(\,\frac{p}{wu}\,)}{dy} +$$

$$\delta z \cdot \frac{d\,(\,\frac{q}{wu}\,)}{dy} \Big\}\, dy = 0.$$

Cette équation se décompose en :

$$[\,\frac{p}{wu}\,]_b\, \delta x_b + [\,\frac{q}{wu}\,]_b\, \delta z_q - [\,\frac{p}{wu}\,]_\beta\, \delta x_\beta -$$

$$[\,\frac{q}{wu}\,]_\beta\, \delta z_\beta = 0\,, \qquad (1$$

et

$$\frac{d\,(\,\frac{p}{wu}\,)}{dy} = 0\,, \quad \frac{d\,(\,\frac{q}{wu}\,)}{dy} = 0. \qquad (2$$

En intégrant les équations (2 , on trouve

$$\frac{p}{w \cdot u} = \mathrm{A}\,, \qquad \frac{q}{w \cdot u} = \mathrm{B}\,, \qquad (2'$$

et

$$\frac{p}{q} = \frac{A}{B}, \quad \text{ou} \quad Bp - Aq = 0,$$

ou

$$B\frac{dx}{dy} - A\frac{dx}{dy} = 0; \quad \text{d'où} \quad Bx - Az = c.$$

C'est l'équation d'un plan perpendiculaire au plan des xz; la courbe cherchée se trouve par conséquent dans ce plan.

Prenons pour le plan de la courbe le plan des xy, on aura :

$$q = \left(\frac{dz}{dy}\right) = 0, \text{ donc } w = \sqrt{1+p^2} = \sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}}.$$

Donc :

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}.\sqrt{y-b}} = A, \quad p^2 = \frac{A^2(y-b)}{1-A^2(y-b)},$$

$$p = \frac{dx}{dy} = \frac{A(y-b)}{\sqrt{(y-b)-A^2(y-b)^2}},$$

$$dx = \frac{(y-b)\,dy}{\sqrt{c(y-b)-(y-b)^2}}, \quad A = \frac{1}{\sqrt{c}}. \tag{4}$$

Cette équation appartient à une cycloïde dont la base est horizontale, et passe par le point de départ A du mobile.

Le cercle générateur a pour diamètre c.

Intégrons l'équation (4).

On a :

$$x - k = \int \frac{(y-b)\,dy}{\sqrt{c(y-b)+(y-b)^2}}.$$

Soit $y - b = u$, on a :

$$x - k = \int \frac{udu}{\sqrt{cu-u^2}} =$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{cdu}{\sqrt{cu-u^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{(c-2u)\,du}{\sqrt{cu-u^2}}$$

$$= \frac{1}{2}c\int \frac{dv}{\sqrt{2v-v^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{dw}{\sqrt{w}}$$

$$\frac{2u}{c} = v, \quad cu - u^2 = w.$$

Effectuons les intégrations, il vient :

$$x - k = \frac{1}{2} \text{ c arc sin } v \cdot v - \sqrt{w}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ c arc sin } \nu \cdot \frac{2u}{c} - \sqrt{cu - u^2}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ c arc cos } \left(1 - \frac{2u}{c}\right) - \sqrt{cu - u^2}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ c arc cos } \frac{c - 2(y - b)}{c} - \sqrt{c(y - b) - (y - b)^2}.$$

Pour $y = b$, le second membre de cette équation s'évanouit, d'où $x = k$. k est la valeur a de x qui répond à $y = b$. Soit α la valeur de x qui répond à $y = \beta$, on a :

$$\alpha - a = \frac{1}{2} \text{ c arc cos } \frac{c - 2(\beta - b)}{c} - \sqrt{c(\beta - b) - (\beta - b)^2};$$

cette équation sert à déterminer la constante c.

Neuvième Problème.

Une courbe C *tourne autour de l'axe des* x *et engendre une surface* S ; *en supposant que celle-ci se meuve le long de l'axe des* x *dans un milieu fluide résistant, on demande de chercher la courbe* C *pour que la surface* S *éprouve la moindre résistance possible.*

Solution.

La résistance éprouvée par la surface S a pour expression

$$u = \int_a^\alpha \frac{2\pi \cdot yp^3}{1 + p^2}\, dx;$$

on a donc :

$$\delta u = 2\pi \left[\frac{yp^3(3+p^2)}{(1+p^2)^2} \right]_\alpha \delta y_\alpha - 2\pi \left[\frac{yp^3(3+p^2)}{(1+p^2)^2} \right]_a \delta y_a +$$

$$2\pi \int_a^\alpha \left\{ \frac{p^3}{1+p^2} - \frac{d\left(\frac{yp^3(3+p^2)}{(1+p^2)^2} \right)}{dx} \right\} \delta y \, dx = 0.$$

De là, on déduit l'équation principale :

$$\frac{p^3}{1+p^2} - \frac{d\left[\frac{yp^3(3+p^2)}{(1+p^2)^2} \right]}{dx} = 0.$$

En effectuant la différentiation indiquée, l'équation précédente se réduit à

$$-\frac{dy}{y} = \frac{3dp}{p} - \frac{4pdp}{1+p^2},$$

dont l'intégrale est

$$\log \frac{1}{y} = \log p^3 - \log (1+p^2)^2 + c,$$

ou

$$(1)\; y = \text{A} \cdot \frac{(1+p^2)^2}{p^3}\;; \quad dy = d\left[\text{A} \cdot \frac{(1+p^2)^2}{p^3} \right].$$

Mais on a :

$$dx = \frac{1}{p} \cdot dy,$$

donc :

$$dx = \frac{1}{p}\, d\left[\text{A} \cdot \frac{(1+p^2)^2}{p^3} \right],$$

et

$$x = c + \text{A}\left[\frac{3}{4p^4} + \frac{1}{p^2} + 1 + \log p \right]. \qquad (2)$$

Les relations (1) et (2) conduisent, par l'élimination de p, à l'équation cherchée.

Dixième Problème.

De toutes les courbes comprises entre les ordonnées

$$x = a\,, \quad x = \alpha\,,$$

chercher celle dont le centre de gravité de l'arc est le plus bas, ou le plus élevé.

Solution.

Soit u la distance du centre de gravité de l'arc à l'axe des y, prise pour axe des abscisses, on aura

$$u = \frac{\int_a^\alpha x ds}{s} = \frac{\int_a^\alpha x \sqrt{1+p^2}\cdot dx}{\int_a^\alpha \sqrt{1+p^2}\, dx} = \left\{ \begin{array}{c} \text{maximum} \\ \text{ou} \\ \text{minimum.} \end{array} \right.$$

donc

$$\delta u = \delta \frac{\int_a^\alpha x \sqrt{1+p^2}\, dx}{\int_a^\alpha \sqrt{1+p^2}\, dx}$$

$$= \frac{\int_a^\alpha \sqrt{1+p^2}dx \cdot \delta \int_a^\alpha x\sqrt{1+p^2}dx - \int_a^\alpha x \sqrt{1+p^2}dx \cdot \delta \int_a^x \sqrt{1+p^2}dx}{\left[\int_a^\alpha \sqrt{1+p^2}\, dx\right]^2}$$

$$= \frac{1}{s^2} \left\{ \int_a^\alpha \frac{px}{\sqrt{1+p^2}} \left(\frac{d\delta y}{dx} \right) dx \cdot \int_a^\alpha \sqrt{1+p^2}\, dx - \right.$$

$$\left. \int_a^x x\sqrt{1+p^2}\, dx \cdot \int_a^\alpha \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \left(\frac{d\delta y}{dx} \right) dx \right\} = 0.$$

Posons

$$\int_a^\alpha x \sqrt{1+p^2}\, dx = c \cdot \int_a^\alpha \sqrt{1+p^2}\, dx = c \cdot s,$$

ce qui est permis, puisque les deux intégrales sont des constantes, ainsi que leur rapport. On a donc

$$\delta u = \frac{1}{s^2} \left\{ s \cdot \int_a^\alpha \frac{px}{\sqrt{1+p^2}} \left(\frac{d\delta y}{dx} \right) dx - \right.$$

$$\left. c \cdot s \cdot \int_a^\alpha \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \left(\frac{d\delta y}{dx} \right) dx \right\}$$

$$= \frac{1}{s} \int_a^\alpha \frac{(x-c)\, p}{\sqrt{1+p^2}} \left(\frac{d\delta y}{dx} \right) dx$$

$$= \frac{1}{s} \left[\frac{(x-c)\, p}{\sqrt{1+p^2}} \right]_\alpha \delta y_\alpha - \frac{1}{s} \left[\frac{(x-c)\, p}{\sqrt{1+p^2}} \right]_a \delta y_a -$$

$$\frac{1}{s} \int_a^\alpha \frac{d\left(\frac{(x-c)\, p}{\sqrt{1+p^2}} \right)}{dx} \delta y\, dx = 0.$$

De là on conclut :

$$d\, \frac{(x-c)\, p}{\sqrt{1+p^2}} = 0\ ;$$

d'où

$$\frac{(x-c)\, p}{\sqrt{1+p^2}} = k,\ p = \frac{dy}{dx} = \frac{k}{\sqrt{(x-c)^2 - k^2}},$$

$$y = k \log \frac{x - c + \sqrt{(x-c)^2 - k^2}}{k}.$$

C'est l'équation de la chainette.

MAXIMA ET MINIMA RELATIFS.

Onzième Problème.

Chercher la ligne la plus courte entre deux points donnés sur une sphère donnée.

Il faut trouver deux fonctions

$$y = \varphi x, \quad z = \psi x,$$

propres à rendre l'intégrale

$$u = \int_a^\alpha dx \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

un minimum entre les limites données

$$x = a, \quad x = \alpha,$$

en même temps que ces fonctions doivent satisfaire à la relation

$$L = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0.$$

Solution.

En posant

$$u = \int_a^\alpha dx \sqrt{1 + p^2 + q^2} + \lambda L,$$

on trouve :

$$\delta u = \Big[\frac{dy}{ds} - \frac{y}{z} \cdot \frac{dz}{ds} \Big]_\alpha \delta y_\alpha - \Big[\frac{dy}{ds} - \frac{y}{z} \cdot \frac{dz}{ds} \Big]_a \delta y_a +$$

$$\int_a^\alpha \left\{ \frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{dx} - \frac{y}{z} \cdot \frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{dx} \right\} \delta y \, \delta x = 0.$$

L'équation aux limites s'évanouit à cause de $\delta y_\alpha = 0$. $\delta y_a = 0$.
L'équation principale est

$$yd\,\frac{dz}{dx} - zd\,\frac{dy}{ds} = 0.$$

D'où :

$$\int y \cdot d\,\frac{dz}{ds} - \int z \cdot d\,\frac{dy}{ds} = c\,,$$

ou

$$ydz - zdy = cds.$$

On a de même

$$zdx - xdz = c'ds\,,$$

$$xdy - ydx = c''ds.$$

En multipliant ces équations, la première par x, la seconde par y, la troisième par z, on trouve, en ajoutant :

$$cx + c'y + c''z = 0\,,$$

plan d'un grand cercle de la sphère.

Les constantes $\frac{c}{c''}$, $\frac{c'}{c''}$ se déterminent par les équations

$$\frac{c}{c''}\,a + \frac{c'}{c''}\,b + c = 0\,,$$

$$\frac{c}{c''}\,\alpha + \frac{c'}{c''}\,\beta + \gamma = 0\,,$$

α, β, γ, a, b, c sont les coordonnées des points donnés. Les fonctions inconnues

$$y = \varphi x,\ z = \psi x$$

sont représentées par les équations simultanées

$$cx + c'y + c''z = 0\,,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0.$$

La distance cherchée est l'arc de grand cercle passant par les points donnés.

Douzième Problème.

Chercher la plus courte des lignes planes de même surface, comprises entre les points donnés

$$A \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}, \quad B \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta. \end{cases}$$

Il faut ici chercher une fonction

$$y = \varphi x$$

propre à rendre l'expression

$$u = \int_a^\alpha dx \sqrt{1 + p^2}$$

un minimum, et à satisfaire, en même temps à l'équation

$$L = \int_a^\alpha y dx - k = 0,$$

dans laquelle k est une constante donnée.

On posera par conséquent :

$$u = \int_a^\alpha dx \left[\sqrt{1 + p^2} + \lambda y \right] - \lambda k = \text{minimum};$$

d'où :

$$\delta u = \left[\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \right]_\alpha \delta y_\alpha - \left[\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \right]_a \delta y_a +$$

$$\int_a^\alpha \left\{ \lambda - \frac{d\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \right)}{dx} \right\} \delta y dx = 0.$$

L'équation aux limites s'évanouit, à cause de $\delta y_\alpha = 0$, $\delta y_a = 0$. L'équation principale fournit :

$$\frac{d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)}{dx} = \lambda.$$

En intégrant, on trouve successivement :

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \lambda x + c\,,$$

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{\lambda x + c}{\sqrt{1-(\lambda x+c)^2}}\,,$$

$$(y - c_1)^2 + \left(x + \frac{c}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}. \qquad (\alpha$$

Les constantes c_1, c se déterminent, en fonction de λ, par les équations

$$(b - c_1)^2 + \left(a + \frac{c}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}\,,$$

$$(\beta - c_1)^2 + \left(\alpha + \frac{c}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}\,.$$

Soient

$$c_1 = \psi_1(\lambda), \quad c = \psi(\lambda)\,,$$

l'équation $(\alpha$ donnera

$$y = \varphi(x, \lambda)\,,$$

et l'équation $L = 0$, devient

$$\int_a^\alpha \varphi(x, \lambda)\, dx = k.$$

En effectuant l'intégration, on trouve une relation de la forme

$$\xi(a, \alpha, \lambda) = k\,,$$

de laquelle on déduit λ, quand k est donné.

TREIZIÈME PROBLÈME.

Chercher la ligne plane d'une aire constante k *la plus courte, comprise entre les courbes*

$$b = \xi a, \quad \beta = \chi\alpha.$$

Les limites $x = a$, $x = \alpha$ sont inconnues ; la question est donc celle-ci :

Trouver une fonction

$$y = \varphi x$$

satisfaisant à l'équation

$$L = \int_a^\alpha y dx - k = 0,$$

et des valeurs $x = a$, $x = \alpha$, propres à rendre l'intégrale

$$u = \int_a^\alpha dx \sqrt{1 + p^2}$$

un minimum.

Solution.

Il faudra poser

$$u = \int_a^\alpha dx \left[\sqrt{1 + p^2} + \lambda y \right] - \lambda k = \text{minimum},$$

d'où :

$$\delta_1 u = 0.$$

En développant cette relation, on obtient la même équation principale que dans le problème précédent. L'équation aux limites sera :

$$\left[\left(\frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} \right)_\alpha \left(1 + p_\alpha \frac{d\beta}{d\alpha} \right) + \lambda y_\alpha \right] d\alpha -$$

$$\left[\left(\frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} \right)_a \left(1 + p_a \frac{db}{da} \right) + \lambda y_a \right] da = 0.$$

$d\alpha$ et da étant indépendantes, cette équation fournira les suivantes :

$$\frac{1}{(\sqrt{1+p^2})_a}\left(1+p_a\frac{db}{da}\right)+\lambda y_a=0,$$

$$\frac{1}{(\sqrt{1+p^2})_\alpha}\left(1+p_\alpha\frac{d\beta}{d\alpha}\right)+\lambda y_\alpha=0.$$

En joignant à ces équations celles-ci :

$$(b-c_1)^2+\left(a+\frac{c}{\lambda}\right)^2=\frac{1}{\lambda^2},$$

$$(\beta-c_1)^2+\left(\alpha+\frac{c}{\chi}\right)^2=\frac{1}{\lambda^2},$$

$$b=\xi a, \quad \beta=\chi\alpha,$$

on pourra déterminer a, b, α, β, c_1, c en fonction de λ. Si de plus k est donné, l'équation $L=0$ fera connaître λ.

Quatorzième Problème.

De toutes les courbes de même longueur, comprises entre les points

$$A\begin{cases}x=a\\ y=b\end{cases}, \quad B\begin{cases}x=\alpha\\ y=\beta\end{cases},$$

chercher celle dont l'aire est un minimum.

Solution.

On a ici :

$$L=\int_a^\alpha dx\sqrt{1+p^2}-k=0,$$

$$u=\int_a^\alpha y\,dx.$$

On fera donc

$$u = \int_a^\alpha dx \left\{ \lambda y + \sqrt{1 + p^2} \right\} - \lambda k = \text{maximum.}$$

On trouve :

$$\delta u = \left[\frac{\lambda p}{\sqrt{1 + p^2}} \right]_\alpha \delta y_\alpha - \left[\frac{\lambda p}{\sqrt{1 + p^2}} \right]_a \delta y_a +$$

$$\int_a^\alpha \left\{ 1 - \lambda \frac{d \left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \right)}{dx} \right\} \delta y \, dx = 0.$$

On en déduit :

$$1 - \frac{d \left(\frac{\lambda p}{\sqrt{1 + p^2}} \right)}{dx} = 0 ,$$

$$x + c = \frac{\lambda p}{\sqrt{1 + p^2}} ,$$

$$p = \frac{x + c}{\sqrt{\lambda^2 - (x + c)^2}} = \frac{dy}{dx} ,$$

$$y = c' - \sqrt{\lambda^2 - (x + c)^2} ,$$

$$(y - c')^2 + (x + c)^2 = \lambda^2.$$

Pour déterminer c, c', λ, on a les équations

$$(b - c')^2 + (a + c)^2 = \lambda^2 ,$$

$$(\beta - c')^2 + (\alpha + c)^2 = \lambda^2 ,$$

$$k = \int_a^\alpha \sqrt{1 + p^2 \cdot dx}$$

$$= \int_a^\alpha \frac{\lambda dx}{\sqrt{\lambda^2 - (x + c')^2}}$$

$$= \int_a^\alpha \frac{dx}{\sqrt{1 - (\frac{x + c'}{\lambda})^2}}$$

$$= \lambda \left\{ \text{arc sin } \frac{\alpha + c'}{\lambda} - \text{arc sin } \frac{a + c'}{\lambda} \right\}.$$

Quinzième Problème.

De toutes les courbes de même longueur, comprises entre les points

$$A \left\{ \begin{array}{l} x = a \\ y = b \end{array} \right. , \; B \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \beta \end{array} \right. ,$$

chercher celle qui, en tournant autour de l'axe des x, *engendre la plus petite, ou la plus grande surface.*

Solution.

On a

$$L = \int_a^\alpha \sqrt{1 + p^2}\, dx - k = 0 ,$$

$$u = 2\pi \int_a^\alpha y \sqrt{1 + p^2}\, dx ,$$

donc

$$u = \int_a^\alpha [\, 2\pi y \sqrt{1 + p^2} + y \sqrt{1 + p^2}\,]\, dx - \lambda k = \left\{ \begin{array}{l} \text{maxim.} \\ \text{minim.} \end{array} \right.$$

donc

$$\delta u = \int_a^\alpha dx \left\{ 2\pi\delta(y\sqrt{1+p^2}) + \delta(\lambda\sqrt{1+p^2})\right\} = 0.$$

En développant on trouve :

$$\delta u = 2\pi \left[\left(\frac{yp}{\sqrt{1+p^2}} \right)_\alpha + \left(\frac{\lambda p}{\sqrt{1+p^2}} \right)_\alpha \right] \delta y_\alpha -$$

$$2\pi \left[\left(\frac{yp}{\sqrt{1+p^2}} \right)_a + \left(\frac{\lambda p}{\sqrt{1+p^2}} \right)_a \right] \delta y_a +$$

$$\int_a^\alpha \left\{ \sqrt{1+p^2} - \frac{d\left(\frac{yp}{\sqrt{1+p^2}}\right)}{dx} - \frac{d\left(\frac{\lambda p}{\sqrt{1+p^2}}\right)}{dx} \right\} \delta y dx = 0.$$

On a donc l'équation principale

$$\sqrt{1+p^2} - \frac{d\left[\frac{yp+\lambda p}{\sqrt{1+p^2}}\right]}{dx} = 0.$$

En effectuant la différentiation indiquée, on a :

$$dx(1+p^2)^2 - (1+p^2)pdy - (1+p^2)ydp - (1+p^2)\lambda dp + yp^2dp + \lambda p^2 dp = 0.$$

A cause de

$$dy = pdx,$$

Cette équation se réduit à

$$dx(1+p^2)^2 - p^2(1+p^2)dx = (y+\lambda)p,$$

d'où :

$$dx = \frac{(y+\lambda)dp}{1+p^2}.$$

donc

$$pdx = dy = \frac{y+\lambda}{1+p^2} pdp,$$

$$\frac{dy}{y+\lambda} = \frac{pdp}{1+p^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2pdp}{1+p^2},$$

$$\frac{(y+\lambda)^2}{c'^2} = 1+p^2$$

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(y+\lambda)^2 - c'^2}}{c},$$

$$dx = \frac{c'dy}{\sqrt{(y+\lambda)^2 - c'^2}},$$

c'est l'équation différentielle de la chainette.