DÉMONSTRATION

DE DEUX

PROPOSITIONS NOUVELLES

SUR

LE CALCUL DES PROBABILITÉS,

PRÉCÉDÉE

de la réfutation des objections formulées contre elles au sein de l'Académie de Belgique,

PAR

A. MEYER.

LIÉGE,
H. DESSAIN, IMPRIMEUR - LIBRAIRE,
PLACE St-LAMBERT.

1856.

AVANT-PROPOS.

Ces quelques feuilles de calcul étaient d'abord destinées à paraître dans les recueils de l'Académie de Belgique, au jugement de laquelle je les avais soumises.

Des difficultés imprévues ayant surgi au sujet de ces pièces, et blessé par des irrégularités peu naturelles, j'ai cru devoir les retirer.

J'aurais volontiers laissé dans l'oubli toute cette affaire, si l'on n'avait répandu dans le public les appréciations erronées, portées sur ces écrits au sein de l'Académie. Ces bruits fâcheux pouvant m'être très-préjudiciables en présence du crédit que trouvent en général les assertions des académiciens, j'ai cru ne pouvoir m'abstenir de reprendre le débat; mon silence aurait donné à penser que j'avouais avoir tort. J'espère qu'on me saura gré de ce que je reste sur la défensive.

1.

L'Académie a prétendu que mon *Examen critique,* dirigé contre une théorie erronée d'un de ses membres, imprimée dans ses bulletins, contenait une *erreur matérielle*, consistant en ce que je me servais dans cet écrit du mot d'*erreur constante*, partout où ledit membre employait le terme d'*erreur régulière.* Ceci est inexact: les deux termes sont indifféremment employés par les auteurs pour désigner la même chose, savoir des erreurs non-fortuites. En effet, voici la définition de ces erreurs donnée par Gauss :

« Il existe, au contraire, d'autres causes qui, dans toutes les observations de même nature, » produisent une erreur identique, ou dépendant de circonstances essentiellement liées au ré- » sultat de l'observation. Nous appellerons les erreurs de cette catégorie des erreurs *constantes* » ou *régulières.* » (Voyez les mémoires sur la méthode des moindres carrés de Gauss, traduits par J. Bertrand, p. 2.)

Je conçois que l'Académie pouvait avoir des raisons intimes pour refuser l'insertion de mon travail dans son bulletin; mais était-il convenable de motiver ce refus sur une faute matérielle qui n'existait pas?

2.

Un des membres de l'Académie a obstinément soutenu que le mot *donné* dans le passage

« x, 1 — x *étant les probabilités simples et données*, etc. »

de l'énoncé du deuxième théorème ci-après, constituait une erreur matérielle, en ce que les valeurs x, $1-x$ ne devaient point entrer dans les formules à démontrer.

L'état de ma santé ne m'ayant pas permis de me rendre au sein de l'Académie, pendant qu'on y débattait mes intérêts, j'ai envoyé par écrit au dit membre la réfutation que voici de son assertion :

Puisque les nombres des répétitions m et n des événements A et B sont donnés, il suit du théorème inverse de Bernoulli que l'on a $x=\frac{m}{\mu}$, $1-x=\frac{n}{\mu}$; en sorte que x, et $1-x$ sont également donnés par conclusion. Rien ne s'oppose alors à ce qu'on introduise x, $1-x$ à la place des rapports $\frac{m}{\mu}$, $\frac{n}{\mu}$, dans le radical $\sqrt{\frac{2mn\rho(\mu+\rho)}{\mu^3}}$ des formules à démontrer.

L'emploi du mot *donné* ne constituait donc pas une erreur matérielle ; néanmoins, j'ai consenti à le supprimer. A la rigueur, il pouvait passer pour surabondant. Ma concession a été inutile ; le grand tapage auquel cette affaire a donné lieu n'aurait cependant abouti qu'à une légère correction de style. Etait-ce aveuglement, était-ce obstination de la part de l'honorable membre? qui sait ? Il a persisté dans son opposition, en dépit des raisons que je viens de rappeler, et ce qu'on trouvera tout au moins irrégulier, c'est que mon théorème n'a point vu le jour dans le bulletin, bien que l'insertion en eût été votée.

3.

Le même membre était aussi chargé de faire un rapport sur le théor. 1 ci-après. Après bien des mois d'attente et de singuliers incidents, il a énoncé pour tout jugement, l'affirmation suivante, dont les motifs sont restés dans sa plume :

> « *Le théorème* I *est identique au théorème* II, *c'est la même chose.* » (Voir la pièce justificative.)

Voici ce que j'ai écrit au dit rapporteur pour refuter cette assertion erronée.

Les deux théorèmes diffèrent essentiellement.

1° Dans le premier théorème, les possibilités simples $\frac{m}{\mu}$, $\frac{n}{\mu}$ à la première épreuve sont certaines, exactes, et données immédiatement.

Dans le second théorème, ces mêmes possibilités ne sont que probables, approchées, et données par conclusion. Leurs probabilités, et leurs valeurs doivent être calculées par la règle qu'implique le théorème inverse de Bernoulli.

2° Dans le premier théorème, les probabilités simples

$$\frac{m}{\mu},\ \frac{m-1}{\mu-1},\ldots\ \frac{n}{\mu},\ \frac{n-1}{\mu-1},\ldots$$

varient d'une épreuve à la consécutive, tandis que dans le second théorème, les probabilités simples $x = \frac{m}{\mu}$, $1-x = \frac{n}{\mu}$ restent constantes pendant toute la durée des épreuves.

3° La démonstration du premier théorème procède du développement du binome des factorielles, tandis que dans l'autre, on part du binome des puissances.

4° Dans la démonstration du second théorème, on emploie une formule approximative de Laplace, tandis que dans l'autre, on se sert uniquement de celle de Stirling; de plus, celle du premier théorème ne renferme pas d'intégrale définie.

5° Dans le second théorème, il s'agit de la probabilité d'un événement futur, conclue d'un événement déjà observé, ce qui n'a pas lieu dans l'autre théorème.

6° Le radical des formules finales du premier théorème contient le facteur $\mu - \rho$, tandis que le radical de l'autre contient le facteur $\mu+\rho$.

7° Dans le premier théorème, k est le plus grand entier contenu dans $\frac{(\rho+1)(m+1)}{\mu+2}$, dans le second, k exprime le plus grand entier contenu dans $\frac{(\rho+1)m}{\mu}$.

8° L'identité des deux démonstrations, à partir d'un point seulement, (du calcul de Q,) et n'occupant que peu de lignes, n'est qu'apparente, et purement accidentelle. Cette apparence d'identité est due à ce que j'emploie les mêmes lettres $\vartheta(l)$, et g pour désigner des valeurs différentes. Ainsi, dans le second théorème, on a $g = \frac{\mu^3}{2mn\rho(\mu+\rho)}$, et dans le premier $g = \frac{\mu^3}{2mn\rho(\mu-\rho)}$.

Voici, au reste, ce que m'écrit Monsieur Bienaymé, membre de l'Institut de France, auquel j'avais soumis mes théorèmes :

. . . .

« Malgré cette identité dans les deux démonstrations, à partir d'un point seulement, (du
» calcul de Q,) ces deux théorèmes sont entièrement différents. Voyez, Monsieur, si cette ré-
» ponse vous suffit. Je voudrais de tout mon cœur qu'on ne tourmentât pas un savant aussi zélé
» que vous l'êtes; et je suis prêt à reprendre la plume pour tout ce qui vous sera utile. »

. . . .

Paris, le 29 juillet 1856.

Nonobstant cette appréciation de la plus haute autorité contemporaine en ces matières, appréciation que j'ai lue à l'Académie, le dit membre s'est écrié, qu'il maintenait son opinion, quoiqu'en ait dit Mr Bienaymé. Ici du moins, mon honorable opposant a manqué de parole; car il avait écrit à l'Académie dans une séance antérieure, à laquelle il n'assistait pas, qu'il était prêt à consentir à l'impression de mes théorèmes, s'il se trouvait un géomètre quelconque qui soutiendrait la non-identité de mes propositions: Il y a donc dans tout ceci un aveuglement inconcevable, ou une obstination bien rare.

J'ignore si mon adversaire, en lisant ces lignes, conviendra de son tort, mais je suis certain qu'il ne me réfutera pas.

Je borne à ces lignes ma défense. Je n'ai ni incriminé, ni jugé les intentions; je laisserai à la conscience de mes contradicteurs le soin de régler cela. Toutefois j'émets le vœu que des vexations pareilles à celles que j'ai endurées pendant près d'une année, ne se répètent pas souvent; la science, et jusqu'au crédit même de l'Académie en pourraient subir une atteinte.

PIÈCE JUSTIFICATIVE.

(Extrait d'une lettre que mon contradicteur de l'Académie m'a écrite en réponse à la demande que je lui avais adressée de me communiquer les objections qu'il avait faites contre mes deux théorèmes dans le sein de l'Académie.)

. . . .

. . . .

« Quant à votre seconde notice, (le théor. I,) j'ai dit à l'Académie, que par une analyse » identique, vous y êtes arrivé au même résultat que dans votre note sur le second théorème. »

. . . .

. . . .

12 juillet 1856.

N° I.

THÉORÈME DE BERNOULLI

ÉTENDU

AU BINOME DES FACTORIELLES.

M[r] Bienaymé a communiqué à la Société Philomatique de Paris, dans sa séance du 25 avril 1840, une notice sur un nouveau principe, relatif à la constance des causes, conclue des effets observés, sans démontrer les formules auxquelles il a été conduit. Parmi ces formules, il y en a une qui renferme le théorème de Bernoulli relatif au binome des puissances, étendu au binome des factorielles; c'est la démonstration de cette formule, renfermant un nouveau théorème, plus général que celui de Bernoulli, que nous allons exposer.

Ayant eu occasion de communiquer ma démonstration à M[r] Bienaymé, je me permettrai de citer un passage de sa lettre qui la concerne :

. . . .
. . . .

« Le N° I se rapporte à mon mémoire de 1840, dans l'extrait duquel je n'ai pas démontré le développement de la factorielle d'un binome. Votre démonstration n'est pas fort éloignée d'une des miennes, et m'a paru très-bonne. »

. . . .
. . . .

Paris, 29 juillet 1856.

Théorème I.

Une urne contient un très-grand nombre $\mu = m + n$ *de boules, dont* m *sont blanches, et* n *noires, si l'on en extrait un grand nombre* $\rho = \nu + \nu'$, *sans remettre dans l'urne la boule que l'on en tire à chaque coup, je dis qu'il y aura, aux quantités près de l'ordre* $\frac{1}{\rho}$, *une probabilité*

$$Q = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{\frac{2\pi mn\rho(\mu - \rho)}{\mu^3}}}$$

que le nombre inconnu ν *de boules blanches qui sortiront de l'urne en* ρ *épreuves, est compris entre*

$$k \pm \gamma \sqrt{\frac{2mn\rho(\mu - \rho)}{\mu^3}},$$

k *désignant le plus grand nombre entier contenu dans*

$$\frac{(\rho + 1)(m + 1)}{\mu + 2}.$$

Démonstration.

Si nous nommons $T_{\nu'}$ le terme général du binome

$$\frac{(m + n)^{\rho|-1}}{\mu^{\rho|-1}} = S \frac{\rho!}{\nu!\ \nu'!} \frac{m^{\nu|-1}}{\mu^{\rho|-1}} n^{\nu'|-1} = 1,$$

nous aurons :

$$T_{\nu'} = \frac{\rho!}{\nu!\ \nu'!} \frac{m^{\nu|-1}\ n^{\nu'|-1}}{\mu^{\rho|-1}};$$

c'est la probabilité d'extraire en $\rho = \nu + \nu'$ tirages ν boules blanches, ν' noires d'une urne contenant $\mu = m + n$ boules, dont m blanches, et n noires, lorsqu'on ne remet pas dans l'urne la boule sortie à chaque coup.

Cela posé, les l^e termes avant, et après le terme $T_{\nu'}$ auront pour expression respectivement

$$T_{\nu' - l} = \frac{\rho!}{\nu + l!\ \nu' - l!} \cdot \frac{m^{\nu + l|-1}\ n^{\nu' - l|-1}}{\mu^{\rho|-1}},$$

$$T_{\nu' + l} = \frac{\rho!}{\nu - l!\ \nu' + l!} \cdot \frac{m^{\nu - l|-1}\ n^{\nu' + l|-1}}{\mu^{\rho|-1}}.$$

Donc la somme

$$P = T_{\nu'-l} + T_{\nu'-l+1} + \dots + T_{\nu'-1} + T_{\nu'} + T_{\nu'+1} + \dots + T_{\nu'+l-1} + T_{\nu'+l}$$

exprime la probabilité qu'en ρ tirages on extraira au plus $\nu + l$, et au moins $\nu - l$ boules blanches.

Soient $\nu = k$, $\nu' = \rho - k = h$ les valeurs de ν et de ν' propres à rendre $T_{\nu'}$ un maximum; soit $M_{\nu'}$ ce maximum, et désignons par $M_{\nu'-l}$ le l^e terme avant, par $M_{\nu'+l}$ le l^e terme après $M_{\nu'}$ nous aurons à chercher la valeur de la somme :

$$Q = M_{\nu'-l} + M_{\nu'-l+1} + \dots + M_{\nu'-1} + M_{\nu'} + M_{\nu'+1} + \dots + M_{\nu'+l-1} + M_{\nu'+l}, \qquad (\mathrm{I})$$

exprimant la probabilité qu'en ρ tirages le nombre des boules blanches qui sortiront de l'urne sera compris entre $k \pm l$.

I.

Détermination de

$$k,\ h,\ M_{\nu'},\ M_{\nu'+l} + M_{\nu'-l}.$$

On a

$$T_{\nu'} = \frac{\rho!}{\nu!\ \nu'!} \cdot \frac{m^{\nu|-1}\, n^{\nu'|-1}}{\mu^{\rho|-1}},$$

$$T_{\nu'-1} = \frac{\rho!}{\nu+1!\ \nu'-1!} \cdot \frac{m^{\nu+1|-1}\, n^{\nu'-1|-1}}{\mu^{\rho|-1}} = T_{\nu'} \cdot \frac{\nu'}{\nu+1} \cdot \frac{m-\nu}{m-\nu'+1},$$

$$T_{\nu'+1} = \frac{\rho!}{\nu-1!\ \nu'+1!} \cdot \frac{m^{\nu-1|-1}\, n^{\nu'+1|-1}}{\mu^{\rho|-1}} = T_{\nu'} \cdot \frac{\nu}{\nu'+1} \cdot \frac{n-\nu'}{m-\nu+1}.$$

Donc, les valeurs de ν et de ν' propres à rendre $T_{\nu'}$ un maximum se déduiront des inégalités

$$T_{\nu'} > T_{\nu'} \cdot \frac{\nu'}{\nu+1} \cdot \frac{m-\nu}{n-\nu'+1},$$

$$T_{\nu'} > T_{\nu'} \cdot \frac{\nu}{\nu'+1} \cdot \frac{n-\nu'}{m-\nu+1},$$

ou des suivantes :

$$1 > \frac{\nu'}{\nu+1} \cdot \frac{m-\nu}{n-\nu'+1}, \qquad (1$$

$$1 > \frac{\nu}{\nu'+1} \cdot \frac{n-\nu'}{m-\nu+1}. \qquad (2$$

A cet effet, éliminons :

1° ν et m, à l'aide des relations

$$\nu = \rho - \nu', \quad m = \mu - n\,;$$

les inégalités (1 et (2 donneront respectivement :

$$\nu' > \frac{(\rho+1)(n+1)}{\mu+2} - 1, \quad \nu' < \frac{(\rho+1)(n+1)}{\mu+2}.$$

Donc, en prenant $0 < \delta < 1$, on pourra écrire :

$$\nu' = \frac{(\rho+1)(n+1)}{\mu+2} + \delta. \tag{3}$$

Soit h le plus grand entier contenu dans $\frac{(\rho+1)(n+1)}{\mu+2}$, on aura $\nu' = h$.

2° Eliminons des relations (1 et (2 les quantités ν' et n, à l'aide des valeurs $\nu' = \rho - \nu$, $n = \mu - m$, les inégalités (1 et (2 fourniront les suivantes :

$$\nu > \frac{(\rho+1)(m+1)}{\mu+2} - 1, \quad \nu < \frac{(\rho+1)(m+1)}{\mu+2}.$$

Soit $0 < \delta' < 1$, on pourra écrire :

$$\nu = \frac{(\rho+1)(m+1)}{\mu+2} + \delta'. \tag{4}$$

Nommons k le plus grand entier contenu dans

$$\frac{(\rho+1)(m+1)}{\mu+2},$$

nous aurons

$$\nu = k.$$

Il est aisé de reconnaitre que les relations (3 et (4 fourniront les suivantes :

$$\frac{n}{\mu+2} = \frac{\nu'}{\rho+1} - \frac{1}{\mu+2} - \frac{\delta}{\rho+1},$$

$$\frac{m}{\mu+2} = \frac{\nu}{\rho+1} - \frac{1}{\mu+2} - \frac{\delta'}{\rho+1},$$

qui pourront s'écrire aussi de cette manière :

$$\frac{n}{\mu} - \frac{2n}{\mu(\mu+2)} = \frac{\nu'}{\rho} - \frac{\nu'}{\rho(\rho+1)} - \frac{1}{\mu+2} - \frac{\delta}{\rho+1}, \tag{5}$$

$$\frac{m}{\mu} - \frac{2m}{\mu(\mu+2)} = \frac{\nu}{\rho} - \frac{\nu}{\rho(\rho+1)} - \frac{1}{\mu+2} - \frac{\delta'}{\rho+1}. \tag{6}$$

Or, en regardant les nombres

$$m,\ n,\ \nu,\ \nu',\ \mu,\ \rho,\ l^{\prime}$$

comme étant du même ordre ρ, les équations (5 et (6, en y négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{\rho}$, se réduiront à celles-ci :

$$\frac{n}{\mu} = \frac{\nu'}{\rho}, \quad \frac{m}{\mu} = \frac{\nu}{\rho}.$$

A l'aide de ces relations on composera aisément les suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{n-\nu'}{\mu-\rho} = \dfrac{\nu'}{\rho}, \quad \dfrac{m-\nu}{\mu-\rho} = \dfrac{\nu}{\rho}, \quad \dfrac{n}{\mu}\cdot\dfrac{\mu-\rho}{n-\nu'} = 1, \quad \dfrac{m}{\mu}\cdot\dfrac{\mu-\rho}{m-\nu} = 1, \\[2ex]
\dfrac{\nu\nu'}{\rho^2} = \dfrac{mn}{\mu^2}, \quad (m-\nu)(n-\nu') = \dfrac{mn}{\mu^2}(\mu-\rho)^2, \\[2ex]
\dfrac{\rho}{\nu}\cdot\dfrac{m-\nu}{\mu-\rho} = 1, \quad \dfrac{\rho}{\nu'}\cdot\dfrac{n-\nu'}{\mu-\rho} = 1,
\end{array}\right\} \text{(A)}$$

qui nous serviront pour les réductions ultérieures.

Cherchons maintenant une valeur approchée de $T_{\nu'}$.

A cet effet, on a :

$$T_{\nu'} = \frac{\rho!}{\nu!\,\nu'!}\cdot\frac{m^{\nu|-1}\,n^{\nu'|-1}}{\mu^{\rho|-1}} = \frac{\rho!}{\nu!\;\nu'!}\cdot\frac{m!}{m-\nu!}\cdot\frac{n!}{n-\nu'!}\cdot\frac{\mu-\rho!}{\mu!}.$$

Si donc, nous réduisons chaque factorielle par la formule

$$x! = x^x\,e^{-x}\sqrt{2\pi x},$$

nous trouverons sans peine :

$$T_{\nu'} = \left(\frac{\rho}{\nu}\cdot\frac{m-\nu}{\mu-\rho}\right)^{\nu}\left(\frac{\rho}{\nu'}\cdot\frac{n-\nu'}{\mu-\rho}\right)^{\nu'}\left(\frac{m}{\mu}\cdot\frac{\mu-\rho}{m-\nu}\right)^{m}\left(\frac{n}{\mu}\cdot\frac{\mu-\rho}{n-\nu'}\right)^{n}\sqrt{\frac{\rho mn(\mu-\rho)}{2\pi\mu\nu\nu'(m-\nu)(n-\nu')}}. \quad (7$$

Mais quand ν et ν' deviennent k et h, alors $T_{\nu'}$ se change en $M_{\nu'}$, et par conséquent, en ayant égard aux formules de réduction (A), l'expression (7 se changera en celle-ci :

$$M_{\nu'} = \sqrt{\frac{mn\rho(\mu-\rho)}{2\pi\mu\nu\nu'(m-\nu)(n-\nu')}} = \sqrt{\frac{\mu^3}{2\pi\rho\, mn(\mu-\rho)}}. \quad (8$$

L'expression (7 peut donc s'écrire de cette manière :

$$T_{\nu'} = \left(\frac{\rho}{\nu}\cdot\frac{m-\nu}{\mu-\rho}\right)^{\nu}\left(\frac{\rho}{\nu'}\cdot\frac{n-\nu'}{\mu-\rho}\right)^{\nu'}\left(\frac{m}{\mu}\cdot\frac{\mu-\rho}{m-\nu}\right)^{m}\left(\frac{n}{\mu}\cdot\frac{\mu-\rho}{n-\nu'}\right)^{n} M_{\nu'}. \quad (9$$

De cette équation, on déduit aisément les suivantes :

$$T_{\nu'-l} = \left(\frac{\rho}{\nu+l}\cdot\frac{m-\nu-l}{\mu-\rho}\right)^{\nu+l}\left(\frac{\rho}{\nu'-l}\cdot\frac{n-\nu'+l}{\mu-\rho}\right)^{\nu'-l}\left(\frac{m}{\mu}\cdot\frac{\mu-\rho}{m-\nu-l}\right)^{m}\left(\frac{n}{\mu}\cdot\frac{\mu-\rho}{n-\nu'+l}\right)^{n} M_{\nu'}$$

$$= \left(\frac{\rho}{\nu} \cdot \frac{m-\nu}{\mu-\rho} \cdot \frac{1}{1+\frac{l}{\nu}} \cdots \frac{1-\frac{l}{m-\nu}}{1}\right)^{\nu+l} \left(\frac{\rho}{\nu'} \cdot \frac{n-\nu'}{\mu-\rho} \cdot \frac{1}{1-\frac{l}{\nu'}} \cdot \frac{1+\frac{l}{n-\nu'}}{1}\right)^{\nu'-l} \times$$

$$\left(\frac{m}{n} \cdot \frac{\mu-\rho}{m-\nu} \cdot \frac{1\,1}{1-\frac{l}{mm-\nu}}\right)^m \left(\frac{n}{\mu} \cdot \frac{\mu-\rho}{n-\nu'} \cdot \frac{1}{1+\frac{l}{n-\nu'}}\right)^n M_{\nu'}\,, \tag{10}$$

$$T_{\nu'+l} = \left(\frac{\rho}{\nu} \cdot \frac{m-\nu}{\mu-\rho} \cdot \frac{1}{1-\frac{l\,l}{\nu\,\nu}} \cdot \frac{1+\frac{l}{m-\nu}}{1}\right)^{\nu-l} \left(\frac{\rho}{\nu'} \cdot \frac{n-\nu'}{\mu-\rho} \cdot \frac{1}{1+\frac{l}{\nu'}} \cdot \frac{1-\frac{l}{n-\nu'}}{1}\right)^{\nu'+l} \times$$

$$\left(\frac{m}{\mu} \cdot \frac{\mu-\rho}{m-\nu} \cdot \frac{1}{1+\frac{l}{m-\nu}}\right)^m \left(\frac{n}{\mu} \cdot \frac{\mu-\rho}{n-\nu'} \cdot \frac{1}{1-\frac{l}{n-\nu'}}\right)^n M_{\nu'}\,. \tag{11}$$

Or, quand ν, ν' deviennent k, h, alors $T_{\nu'-l}$, $T_{\nu'+l}$ se changent en $M_{\nu'-l}$, $M_{\nu'+l}$; donc, en ayant égard aux formules de réduction (A), les expressions (10 et (11 fourniront :

$$M_{\nu'-l} = \left(\frac{1-\frac{l}{m-\nu}}{1+\frac{l}{\nu'}}\right)^{\nu+l} \left(\frac{1+\frac{l}{n-\nu'}}{1-\frac{l}{\nu'}}\right)^{\nu'-l} \left(\frac{1}{1-\frac{l}{m-\nu}}\right)^m \left(\frac{1}{1+\frac{l}{n-\nu'}}\right)^n M_{\nu'}\,, \tag{12}$$

$$M_{\nu'+l} = \left(\frac{1+\frac{l}{m-\nu}}{1-\frac{l}{\nu'}}\right)^{\nu-l} \left(\frac{1-\frac{l}{n-\nu'}}{1+\frac{l}{\nu'}}\right)^{\nu'+l} \left(\frac{1}{1+\frac{l}{m-\nu}}\right)^m \left(\frac{1}{1-\frac{l}{n-\nu}}\right)^n M_{\nu'}\,. \tag{13}$$

Mais on a :

$$\left(1-\frac{l}{m-\nu}\right)^{\nu+l} = e^{(\nu+l)\log\left(-\frac{l}{m-\nu}\right)}$$

$$= e^{-\frac{\nu l}{m-\nu}\frac{l^2}{m-\nu}-\frac{\nu l^2}{2(m-\nu)^2}-\frac{l^3}{2(m-\nu)^2}-\frac{\nu l^3}{3(m-\nu)^3}-\frac{l^4}{3(m-\nu)^3}-\text{etc.}}$$

$$\left(1+\frac{l}{\nu}\right)^{-\nu-l} = e^{(-\nu-l)\log+\frac{l}{\nu})}$$

$$= e^{-l-\frac{l^2}{\nu}-+\frac{l_3}{2\nu^2}-\frac{l^3}{3\nu^2}-\frac{l^4}{3\nu^3}+\text{etc.}}$$

$$(1+\frac{l}{n-\nu'})^{\nu'-l} = e^{(\nu'-l)\log(1+\frac{l}{n-\nu'})}$$

$$= e^{\frac{\nu' l}{n-\nu'} - \frac{l^2}{n-\nu'} - \frac{\nu' l^2}{2(n-\nu')^2} + \frac{l^3}{2(n-\nu')^2} + \frac{\nu' l^3}{3(n-\nu')^3} - \frac{l^4}{3(n-\nu')^3} - \text{etc.}}$$

$$(1-\frac{l}{\nu'})^{-\nu'+l} = e^{(-\nu'+l)\log(1-\frac{l}{\nu'})}$$

$$= e^{l - \frac{l^2}{\nu'} + \frac{l^2}{2\nu'} - \frac{l^3}{2\nu'^2} + \frac{l^3}{3\nu'^2} - \frac{l^4}{3\nu'^3} + \text{etc.}}$$

$$(1-\frac{l}{m-\nu})^{-m} = e^{-m\log(1-\frac{l}{m-\nu})}$$

$$= e^{\frac{ml}{m-\nu} + \frac{ml^2}{2(m-\nu)^2} + \frac{ml^3}{3(m-\nu)^3} + \text{etc.}}$$

$$(1+\frac{l}{n-\nu'})^{-n} = e^{-n\log(1+\frac{l}{n-\nu'})}$$

$$= e^{-\frac{nl}{n-\nu'} + \frac{nl^2}{2(n-\nu')^2} - \frac{nl^3}{3(n-\nu')^3} + \text{etc.}}$$

A l'aide de ces valeurs, et en posant

$$\varphi(l) = \frac{ml-\nu l-l^2}{m-\nu} + \frac{ml^2-\nu l^2-l^3}{2(m-\nu)^2} + \frac{ml^3-\nu l^3-l^4}{3(m-\nu)^3} + \frac{\nu' l-nl-l^2}{n-\nu'} +$$

$$\frac{nl^2-\nu' l^2+l^3}{2(n-\nu')^2} + \frac{\nu' l^3-nl^3-l^4}{3(n-\nu')^3} - \frac{l^2}{\nu} - \frac{l^2}{\nu'} + \frac{l^2}{2\nu} + \frac{l^2}{2\nu'} + \frac{l^3}{2\nu^2} - \frac{l^3}{2\nu'^2} - \frac{l^3}{3\nu^2} +$$

$$\frac{l^3}{3\nu'^2} - \frac{l^4}{3\nu^3} - \frac{l^4}{3\nu'^3} + \text{etc.},$$

les expressions (12 et (13 deviennent :

$$M_{\nu'-l} = M_{\nu'}\, e^{\varphi(l)}$$

$$= M_{\nu'} \left\{ 1+\varphi(l) + \text{etc.} \right\}, \tag{14}$$

$$M_{\nu'+l} = M_{\nu'} \left\{ 1+\varphi(-l) + \text{etc.} \right\}. \tag{15}$$

En ajoutant les expressions (14 et (15, et en négligeant les termes qui ne sont pas au-dessous de l'ordre $\frac{1}{\rho}$, on aura successivement :

$$M_{\nu'-l} + M_{\nu'+l} = M_{\nu'} \left\{ 2 - \frac{2l^2}{m-\nu} + \frac{2ml^2 - 2\nu l^2}{2(m-\nu)^2} - \frac{2l^4}{3(m-\nu)^3} - \frac{2l^2}{n-\nu'} + \right.$$

$$\frac{2nl^2 - 2\nu' l^2}{2(n-\nu')^2} - \frac{l^4}{3(n-\nu')^3} - \frac{2l^2}{\nu} - \frac{2l^2}{\nu'} + \frac{2l^2}{2\nu} + \frac{2l^2}{2\nu'} -$$

$$\left. \frac{2l^4}{2\nu^3} - \frac{2l^4}{2\nu'^3} + \text{etc.} \right\}$$

$$= 2M_{\nu'} \left\{ 1 - \frac{l^2}{m-\nu} + \frac{l^2}{2(m-\nu)} - \frac{l^2}{n-\nu'} + \frac{l^2}{2(n-\nu')} - \frac{l^2}{\nu} - \frac{l^2}{\nu'} + \right.$$

$$\left. \frac{l^2}{2\nu} + \frac{l^2}{2\nu'} \right\}$$

$$= 2M_{\nu'} \left\{ 1 - \frac{l^2}{2(m-\nu)} - \frac{l^2}{2(n-\nu')} - \frac{l^2}{2\nu} - \frac{l^2}{2\nu'} \right\}$$

$$= 2M_{\nu'} \left\{ 1 - l^2 \left[\frac{1}{2(m-\nu)} + \frac{1}{2(n-\nu')} + \frac{1}{2\nu} + \frac{1}{2\nu'} \right] \right\}$$

$$= 2M_{\nu'} \left\{ 1 - l^2 \left[\frac{\mu-\rho}{2(m-\nu)(n-\nu')} + \frac{\rho}{2\nu\nu'} \right] \right\}$$

$$= 2M_{\nu'} \left\{ 1 - l^2 \left[\frac{\frac{\mu-\rho}{2mn(\mu-\rho)^2}}{\mu^2} + \frac{\mu^2}{2mn\rho} \right] \right\}$$

$$= 2M_{\nu'} \left\{ 1 - l^2 \left[\frac{\mu^2}{2mn(\mu-\rho)} + \frac{\mu^2}{2mn\rho} \right] \right\}$$

$$= 2M_{\nu'} \left\{ 1 - l^2 \left[\frac{\mu^2\rho + \mu^2(\mu-\rho)}{2mn\rho(\mu-\rho)} \right] \right\}$$

$$= 2M_{\nu'} \left\{ 1 - \frac{l^2\mu^3}{2mn\rho(\mu-\rho)} \right\}$$

$$= 2M_{\nu'} e^{-\frac{l^2\mu^3}{2mn\rho(\mu-\rho)}}. \qquad (16$$

II.

Détermination de Q.

Nous pouvons écrire la formule (I) de cette manière :

$$Q = M_{\nu'+l} + M_{\nu'-l} + \mathop{S}_{0}^{l-1} \left[M_{\nu'+l} + M_{\nu'-l} \right] - M_{\nu'} . \qquad (17$$

Mais, à cause de la relation

$$\overset{p}{\underset{0}{S}}\, y = \sum_{0}^{p+1} y,$$

il vient :

$$Q = M_{\nu'-l} + M_{\nu'+l} + \sum_{0}^{l} [\, M_{\nu'-l} + M_{\nu'+l}\,] - M_{\nu'} \,. \tag{18}$$

Soit

$$g = \frac{\mu^3}{2mn\rho\,(\,\mu - \rho\,)}\,,$$

on aura :

$$M_{\nu'} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{g}\,, \quad M_{\nu'-l} + M_{\nu'+l} = \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}}\, e^{-lg^2} = \psi(l)\,,$$

$$\psi(0) = \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}}\,,$$

$$Q = \psi(l) + \sum_{0}^{l} \psi(l) - \frac{1}{2}\,\psi(0). \tag{19}$$

Mais on a, par la formule sommatoire de Maclaurin :

$$\sum \psi(l) = \int \psi(l)\,dl - \frac{1}{2}\,\psi(l) + \frac{B_1}{1\cdot 2}\,\psi'(l) - \frac{B_3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,\psi'''(l) + \text{etc.} + C\,; \tag{b}$$

on a de plus :

$$\psi(l) = \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}}\, e^{-l^2 g}$$

$$\psi'(l) = -2lg\,\psi(l)$$

$$\psi''(l) = \{\, -2g + 4l^2 g\,\}\,\psi(l)$$

$$\psi'''(l) = 8lg\,(1 - l^2)\,\psi(l)\,,$$

etc. etc.

donc, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{\rho}$, la formule (*b*) nous donnera :

$$\sum_{0}^{l} \psi(l) = \int_{0}^{l} \psi(l)\,dl - \frac{1}{2}[\,\psi(l) - \psi(0)\,].$$

Par là l'équation (19) devient

$$Q = \psi(l) + \int_{0}^{l} \psi(l)\,dl - \frac{1}{2}\,\psi(l) + \frac{1}{2}\,\psi(0) - \frac{1}{2}\,\psi(0)$$

$$= \frac{1}{2}\psi(l) + \int_0^l \psi(l)\,dl. \tag{20}$$

Soit $\gamma = l\sqrt{g}$,
on aura :

$$l = \frac{\gamma}{\sqrt{g}}, \quad dl = \frac{d\gamma}{\sqrt{g}}, \quad \psi(l) = \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}} e^{-\gamma^2};$$

donc (20) devient :

$$Q = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-\gamma^2} d\gamma + \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}} e^{-\gamma^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{\frac{2\pi mn\rho(\mu-\rho)}{\mu^3}}};$$

c'est la probabilité qu'en ρ épreuves le nombre ν de boules blanches qui sortiront de l'urne quand on n'y remet plus les boules sorties, est compris entre

$$k \pm l = k \pm \gamma \sqrt{\frac{2mn\rho(\mu-\rho)}{\mu^3}},$$

aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{\rho}$. L'on sait d'ailleurs que k est le plus grand entier contenu dans

$$\frac{(\rho+1)(m+1)}{\mu+2}.$$

Rem. L'on voit aisément qu'en remettant dans l'urne la boule qu'on en tire à chaque coup, le binome des factorielles devient le binome des puissances, et le théorème démontré ci-dessus deviendra le théorème ordinaire de Bernoulli.

N° II.

THÉORÈME DE BERNOULLI

ÉTENDU

AUX ÉVÉNEMENTS FUTURS.

Théorème II.

x, $1-x$ *étant les probabilités simples données de deux événements contraires* A *et* B, *en supposant que dans un très-grand nombre* μ *d'épreuves*, A *soit arrivé* m *fois*, B, n *fois*, *si* k *représente le plus grand nombre entier contenu dans* $\frac{m(\rho+1)}{\mu}$, *je dis que le nombre inconnu* ν *de fois que* A *arrivera dans un très-grand nombre* ρ *de nouvelles épreuves sera compris entre les limites*

$$k \pm \gamma \sqrt{\frac{2mn\rho(\mu+\rho)}{\mu^3}}$$

avec une probabilité

$$Q = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2}\, dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{\frac{2\pi mn\rho(\mu+\rho)}{\mu^3}}},$$

aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{\mu}$.

Démonstration.

Soit y la probabilité que A et B arriveront respectivement m et n fois en μ épreuves ; soit de même z la probabilité que A et B arriveront ν et ν' fois en ρ épreuves, on aura :

$$y = \frac{\mu!}{m!\,n!}\,x^m\,(1-x)^n, \qquad z = \frac{\rho!}{\nu!\,\nu'!}\,x^\nu\,(1-x)^{\nu'},$$

$$\mu = m+n, \qquad \rho = \nu+\nu'.$$

Donc, en nommant T_ν la probabilité que A et B arriveront ν et ν' fois en ρ épreuves, quand ils sont déjà arrivés m et n fois en μ épreuves, on aura, par la règle connue sur les probabilités des événements futurs :

$$T_\nu = \frac{\int_0^1 yz\,dx}{\int_0^1 y\,dx},$$

ou

$$T_\nu = \frac{\frac{\mu!}{m!\,n!}\cdot\frac{\rho!}{\nu!\,\nu'!}\int_0^1 x^{m+\nu}(1-x)^{n+\nu'}\,dx}{\frac{\mu!}{m!\,n!}\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx}$$

$$= \frac{\rho!}{\nu!\,\nu'!}\,\frac{\int_0^1 x^{m+\nu}(1-x)^{n+\nu'}\,dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx}.$$

Mais, à cause des formules :

$$\Gamma\lambda = 1\cdot 2 \ldots \lambda - 1 = \lambda - 1!$$

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{\Gamma p\cdot\Gamma q}{\Gamma(p+q)} = \frac{p-1!\,q-1!}{p+q-1!},$$

on peut écrire l'expression ci-dessus de cette manière :

$$T_\nu = \frac{\rho!}{\nu!\,\nu'!}\cdot\frac{\Gamma(m+\nu+1)\,\Gamma(n+\nu'+1)}{\Gamma(m+n+\nu+\nu'+1)} = \frac{\rho!}{\nu!\,\nu'!}\cdot\frac{(m+\nu)!\,(n+\nu')!}{(m+n+\nu+\nu')!}.$$

On a donc aussi :

$$T_{\nu-1} = \frac{\rho!}{\nu-1!\,\nu'+1!}\cdot\frac{(m+\nu-1)!\,(n+\nu'+1)!}{(m+n+\nu+\nu')!} = T_\nu\cdot\frac{\nu}{\nu'+1}\cdot\frac{(n+\nu'+1)}{(m+\nu)},$$

$$T_{\nu+1} = \frac{\rho!}{\nu+1!\,\nu'-1!} \cdot \frac{(m+\nu+1)!\,(n+\nu'-1)!}{(m+n+\nu+\nu'+1)!} = T_\nu \cdot \frac{\nu'}{\nu+1} \cdot \frac{(m+\nu+1)}{(n+\nu')}$$

Cherchons les valeurs de ν et de ν' pour lesquelles T_ν est un maximum ; soient k et h ces valeurs. Pour les trouver, il faudra satisfaire aux inégalités :

$$T_\nu > T_{\nu-1},$$

$$T_\nu > T_{\nu+1},$$

ou, aux suivantes :

$$1 > \frac{\nu}{\nu'+1} \cdot \frac{n+\nu'+1}{m+\nu}, \tag{1}$$

$$1 > \frac{\nu'}{\nu+1} \cdot \frac{m+\nu+1}{n+\nu'}. \tag{2}$$

1° Eliminons ν' et n de chacune de ces relations, nous aurons :

$$1 > \frac{\nu}{\rho-\nu+1} \cdot \frac{\mu+\rho-m-\nu+1}{m+\nu}, \tag{α}$$

$$1 > \frac{\rho-\nu}{\nu+1} \cdot \frac{m+\nu+1}{\mu+\rho-m-\nu}. \tag{β}$$

L'inégalité (α) conduit à :

$$\nu < \frac{m(\rho+1)}{\mu},$$

et celle (β), à :

$$\nu > \frac{m(\rho+1)}{\mu} - 1.$$

On peut donc poser

$$\nu = \frac{m(\rho+1)}{\mu} - \delta,\ 0 < \delta < 1, \tag{a}$$

et par conséquent k sera le plus grand nombre entier contenu dans $\dfrac{m(\rho+1)}{\mu}$.

2° Eliminons ν et n; les relations (1) et (2) donneront :

$$1 > \frac{\rho-\nu'}{\nu'+1} \cdot \frac{\mu-m+\nu'+1}{m+\rho-\nu}, \tag{α'}$$

$$1 > \frac{\nu'}{\rho-\nu'+1} \cdot \frac{m+\rho-\nu'+1}{\mu-m+\nu'}. \tag{β'}$$

(α') fournira :

$$\nu' > \rho - \frac{m(\rho+1)}{\mu},$$

(β') donnera :

$$\nu' < \rho - \frac{m(\rho+1)}{\mu} + 1 ;$$

on a donc

$$\nu' = \rho - \frac{m(\rho+1)}{\mu} + \delta' ; \quad 0 < \delta' < 1 , \qquad (b)$$

et l'on voit par là que h est le plus grand nombre entier contenu dans $\rho - \frac{m(\rho+1)}{\mu}$, c'est-à-dire que l'on a :

$$h = \rho - k.$$

Il est facile maintenant d'exprimer ν et ν' en fonction de m et de n, dans le cas de $\nu = k$, et $\nu' = h$.

En effet, on a 1° par l'équation (a) :

$$\frac{\nu}{\rho+1} = \frac{m}{\mu} - \frac{\delta}{\rho+1}, \quad \text{ou} \quad \frac{\nu}{\rho} - \frac{\nu}{\rho(\rho+1)} = \frac{m}{\mu} - \frac{\delta}{\rho+1} ; \qquad (a')$$

et l'on a 2° par l'équation (b) :

$$\frac{\nu'}{\rho+1} = \frac{\rho}{\rho+1} - \frac{m}{\mu} + \frac{\delta'}{\rho+1}, \quad \text{ou} \quad \frac{\nu'}{\rho} - \frac{\nu'}{\rho(\rho+1)} = 1 - \frac{m}{\mu} - \frac{1-\delta'}{\rho+1}. \qquad (b')$$

Supposons maintenant que les quantités

$$\mu,\ m,\ n,\ \nu,\ \nu',\ \rho,\ l^2$$

soient du même ordre μ, alors, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{\mu}$, les équations (a') et (b') se réduiront à :

$$\frac{\nu}{\rho} = \frac{m}{\mu}, \quad \frac{\nu'}{\rho} = 1 - \frac{m}{\mu} = \frac{n}{\mu}. \qquad (3)$$

De ces équations on déduit sans peine les suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\rho}{\nu}\cdot\dfrac{m+\nu}{\mu+\rho} = 1, \quad \dfrac{\mu}{m}\cdot\dfrac{m+\nu}{\mu+\rho} = 1, \quad \dfrac{\rho}{\nu'}\cdot\dfrac{n+\nu'}{\mu+\rho} = 1, \quad \dfrac{\mu}{n}\cdot\dfrac{n+\nu'}{\mu+\rho} = 1, \\[2ex]
\dfrac{(m+\nu)(n+\nu')}{\nu\nu' mn} = \dfrac{(\mu+\rho)^2}{\rho^2 mn}, \quad \dfrac{\nu+\nu'}{\nu\nu'} = \dfrac{\mu^2}{\rho mn}, \quad \nu\nu' = \dfrac{\rho^2 mn}{\mu^2}, \\[2ex]
\dfrac{m+n+\nu+\nu'}{(m+\nu)(n+\nu')} = \dfrac{\mu^2}{mn(\mu+\rho)},
\end{array}\right\} \quad (A)$$

qui ont toutes lieu dans le cas où T_ν est un maximum, c'est-à-dire, quand $\nu = k$, $\nu' = h$.

Evaluons maintenant la probabilité T_ν par approximation.

A cet effet, nous ferons usage de la formule

$$\int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx = \frac{p^p \, q^q \sqrt{2\pi pq}}{(p+q)^{p+q+\frac{3}{2}}},$$

donnée par Laplace, dans le cas où p et q sont de très-grands nombres. On a par là :

$$\int_0^1 x^{m+\nu} (1-x)^{n+\nu'} \, dx = \frac{(m+\nu)^{m+\nu} (n+\nu')^{n+\nu'} \sqrt{2\pi(m+\nu)(n+\nu')}}{(m+n+\nu+\nu')^{m+n+\nu+\nu'+\frac{3}{2}}},$$

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx = \frac{m^m \, n^n \sqrt{2\pi mn}}{(m+n)^{m+n+\frac{3}{2}}};$$

et par suite:

$$T_\nu = \frac{\rho!}{\nu!\,\nu'!} \frac{(m+\nu)^{m+\nu}(n+\nu')^{n+\nu'} \sqrt{2\pi(m+\nu)(n+\nu')}}{(\mu+\rho)^{m+n+\nu+\nu'+\frac{3}{2}}} \times \frac{(m+n)^{m+n+\frac{3}{2}}}{m^n \, n^n \sqrt{2\pi mn}};$$

ou :

$$T_\nu = \frac{\rho^\rho e^{-\rho} \sqrt{2\pi\rho}}{\nu^\nu e^{-\nu} \sqrt{2\pi\nu} \cdot \nu'^{\nu'} e^{-\nu'} \sqrt{2\pi\nu'}} \times \frac{(m+\nu)^{m+\nu} (n+\nu')^{n+\nu'} \sqrt{2\pi(m+\nu)(n+\nu')}}{(\mu+\rho)^{m+n+\nu+\nu'+\frac{3}{2}}} \times$$

$$\frac{(m+n)^{m+n+\frac{3}{2}}}{m^m \, n^n \sqrt{2\pi mn}}$$

$$= \left[\frac{\rho}{\nu} \cdot \frac{m+\nu}{\mu+\rho}\right]^\nu \times \left[\frac{\rho}{\nu'} \cdot \frac{n+\nu'}{\mu+\rho}\right]^{\nu'} \times \left[\frac{m+\nu}{\mu+\rho} \cdot \frac{\mu}{m}\right]^m \times \left[\frac{n+\nu'}{\mu+\rho} \cdot \frac{\mu}{n}\right]^n \times$$

$$\sqrt{\frac{\mu^3 \rho (m+\nu)(n+\nu')}{2\pi\nu\nu'(\mu+\rho)^3 mn}}.$$

Si nous nommons M_ν ce que devient T_ν dans le cas du maximum, ou de $\nu = k$, $\nu' = h$, alors, en vertu des équations (A), l'expression précédente de T_ν se changera en :

$$M_\nu = \sqrt{\frac{\mu^3}{2\pi\rho mn(\mu+\rho)}}, \qquad (5)$$

et par suite :

$$T_\nu = \left[\frac{\rho}{\nu}\cdot\frac{m+\nu}{\mu+\rho}\right]^{\nu+\frac{1}{2}} \times \left[\frac{\rho}{\nu'}\cdot\frac{n+\nu'}{\mu+\rho}\right]^{\nu'+\frac{1}{2}} \times \left(\frac{\mu}{m}\cdot\frac{m+\nu}{\mu+\rho}\right]^{m} \times \left[\frac{\mu}{n}\cdot\frac{n+\nu'}{\mu+\rho}\right]^{n}\cdot M_\nu.$$

Changeons ν en $\nu-l$, et par conséquent ν' en $\nu'+l$, nous aurons pareillement :

$$T_{\nu-l} = \left[\frac{\rho}{\nu+l}\cdot\frac{m+\nu-l}{\mu+\rho}\right]^{\nu-l+\frac{1}{2}} \times \left[\frac{\rho}{\nu'+l}\cdot\frac{n+\nu'+l}{\mu+\rho}\right]^{\nu'+l+\frac{1}{2}} \times$$

$$\left[\frac{m+\nu-l}{\mu+\rho}\cdot\frac{\mu}{m}\right]^{m}\left[\frac{n+\nu'+l}{\mu+\rho}\cdot\frac{\mu}{n}\right]^{n}\cdot M_\nu$$

$$= M_\nu \left[\frac{\rho}{\nu}\cdot\frac{m+\nu}{\mu+\rho}\cdot\frac{1-\frac{l}{m+\nu}}{1-\frac{l}{\nu}}\right]^{\nu-l+\frac{1}{2}} \times \left[\frac{\rho}{\nu'}\cdot\frac{n+\nu'}{\mu+\rho}\cdot\frac{1+\frac{l}{n+\nu'}}{1+\frac{l}{\nu'}}\right]^{\nu'+l+\frac{1}{2}} \times$$

$$\left[\frac{\mu}{m}\cdot\frac{m+\nu}{\mu+\rho}\cdot\left(1-\frac{l}{m+\nu}\right)\right]^{m}\left[\frac{\mu}{n}\cdot\frac{n+\nu'}{\mu+\rho}\left(1-\frac{l}{n+\nu'}\right)\right]^{n}.$$

Soit $M_{\nu-l}$ ce qui devient $T_{\nu-l}$ dans le cas de $\nu=k$, $\nu'=h$, on aura :

$$M_{\nu-l} = \left[\frac{1-\frac{l}{m+\nu}}{1-\frac{l}{\nu}}\right]^{\nu-l+\frac{1}{2}}\left[\frac{1+\frac{l}{n+\nu'}}{1+\frac{l}{\nu'}}\right]^{\nu'+l+\frac{1}{2}}\left[1-\frac{l}{m+\nu}\right]^{m}\left[1+\frac{l}{n+\nu'}\right]^{n} M_\nu\ .$$

On a donc aussi :

$$M_{\nu+l} = \left[\frac{1+\frac{l}{m+\nu}}{1+\frac{l}{\nu}}\right]^{\nu+l+\frac{1}{2}}\left[\frac{1-\frac{l}{n+\nu'}}{1-\frac{l}{\nu'}}\right]^{\nu'-l+\frac{1}{2}}\left[1+\frac{l}{m+\nu}\right]^{m}\left[1-\frac{l}{n+\nu'}\right]^{n} M_\nu\ .$$

Développons ces produits. A cet effet, on a :

$$\left[1-\frac{l}{m+\nu}\right]^{\nu-l+\frac{1}{2}} = e^{(\nu-l+\frac{1}{2})\log(1-\frac{l}{m+\nu})}$$

$$= e^{-\frac{l\nu+l^2-\frac{1}{2}l}{m+\nu}-\frac{\nu l^2-l^3+\frac{1}{2}l^3}{2(m+\nu)^2}-\frac{\nu l^3-l^4+\frac{1}{2}l^3}{3(m+\nu)^3}-\cdots}$$

$$\left[1-\frac{l}{\nu}\right]^{\nu-l+\frac{1}{2}}=e^{(\nu-l+\frac{1}{2})\log(1-\frac{l}{\nu})}$$

$$=e^{-\frac{l\nu-l^2+\frac{1}{2}l}{\nu}-\frac{\nu l^2-l^3+\frac{1}{2}l^2}{2\nu^2}-\frac{\nu l^3-l^4+\frac{1}{2}l^3}{3\nu^3}-\cdots}$$

$$\left[1+\frac{l}{n+\nu'}\right]^{\nu'+l+\frac{1}{2}}=e^{(\nu'+l+\frac{1}{2})\log(1+\frac{l}{n+\nu'})}$$

$$=e^{\frac{\nu'l+l^2+\frac{1}{2}l}{n+\nu'}-\frac{\nu'l^2+l^3+\frac{1}{2}l^2}{2(n+\nu')^2}+\frac{\nu'l^3+l^4+\frac{1}{2}l^3}{3(n+\nu')^3}-\cdots}$$

$$\left[1+\frac{l}{\nu'}\right]^{\nu'+l+\frac{1}{2}}=e^{(\nu'+l+\frac{1}{2})\log(1+\frac{l}{\nu'})}$$

$$=e^{\frac{\nu'l+l^2+\frac{1}{2}l}{\nu'}-\frac{\nu'l^2+l^3+\frac{1}{2}l^2}{2\nu'^2}+\frac{\nu'l^3+l^4+\frac{1}{2}l^3}{3\nu'^3}-\cdots}$$

$$\left[1-\frac{l}{m+\nu}\right]^{m}=e^{m\log(1-\frac{l}{m+\nu})}$$

$$=e^{-\frac{ml}{m+\nu}-\frac{ml^2}{2(m+\nu)^2}-\frac{ml^3}{3(m+\nu)^3}-\cdots}$$

$$\left[1+\frac{l}{n+\nu'}\right]^{n}=e^{n\log(1+\frac{l}{n+\nu'})}$$

$$=e^{\frac{nl}{n+\nu'}-\frac{nl^2}{2(n+\nu')^2}+\frac{nl^3}{3(n+\nu')^3}-\text{etc.}}$$

Soit donc

$$\varphi l=\frac{\frac{3}{2}l-l^2}{2(m+\nu)}+\frac{\frac{3}{2}l^2-l^3}{6(m+\nu)^2}+\frac{\frac{1}{2}l^3-l^4}{3(m+\nu)^3}-\frac{l^3+l}{2(n+\nu')}+\frac{\frac{3}{2}l^2-l^3}{6(n+\nu')^2}$$

$$-\frac{l^4+\frac{1}{2}l^3}{3(n+\nu)^3}-\frac{l-l^2}{2\nu}-\frac{\frac{3}{2}l^2-l^3}{6\nu^2}-\frac{\frac{1}{2}l^3-l^4}{3\nu^3}+\frac{l^2+l}{2\nu'}-$$

$$\frac{l^3+\frac{3}{2}l^2}{6\nu'^2}+\frac{l^4-\frac{1}{2}l^3}{3\nu'^3}-\text{etc.},$$

on aura :

$$M_{\nu-l} = M_\nu \, e^{-\varphi l} = M_\nu \, [1 - \varphi l + \ldots].$$

Changeons l en $-l$, il vient :

$$M_{\nu+l} = M_\nu \, [1 - \varphi(-l) + \ldots],$$

et par conséquent :

$$M_{\nu-l} + M_{\nu+l} = M_\nu \, [2 - (\varphi l + \varphi(-l)) +].$$

Or, on trouve, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{\mu}$:

$$\varphi l + \varphi(-l) = 2 \left\{ \frac{l^2}{2(m+\nu)} + \frac{l^2}{2(n+\nu')} - \frac{l^2}{2\nu} - \frac{l^2}{2\nu'} \right\}$$

$$= \frac{2l^2}{2} \left\{ \frac{m+\nu+n+\nu'}{(m+\nu)(n+\nu')} - \frac{\nu+\nu'}{\nu\nu'} \right\}$$

$$= \frac{2l^2}{2} \left\{ \frac{\mu^2}{mn(\mu+\rho)} - \frac{\mu^2}{\rho mn} \right\}$$

$$= \frac{2l^2}{2} \cdot \frac{\mu^3}{mn\rho(\mu+\rho)}.$$

On a donc :

$$M_{\nu-l} + M_{\nu+l} = 2M_\nu \left\{ 1 - \frac{l^2\mu^3}{2mn\rho(\mu+\rho)} \right\}$$

$$= 2M_\nu \, e^{-\frac{l^2\mu^3}{2mn\rho(\mu+\rho)}} = \psi(l).$$

Si l'on fait $l = 0$, on a $M_\nu = \frac{1}{2}\psi(0)$.

Soit

$$g = \frac{\mu^3}{2mn\rho(\mu+\rho)},$$

on aura :

$$M_\nu = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}},$$

$$\psi(l) = \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}} \, e^{-l^2 g}.$$

Soit maintenant Q la probabilité que la valeur de ν est comprise entre $k \pm l$, on aura évidemment :

$$Q = M_{\nu-l} + M_{\nu-l+1} + \dots + M_{\nu-1} + M_{\nu} + M_{\nu+1} + \dots + M_{\nu+l-1} + M_{\nu+l}$$

$$= M_{\nu-l} + M_{\nu+l} + \mathop{S}_{0}^{l-1} [\, M_{\nu-l} + M_{\nu+l}\,] - M_{\nu}$$

$$= \psi(l) + \sum_{0}^{l} \psi(l) - \frac{1}{2}\psi(0).$$

Mais à cause de

$$\sum_{0}^{l} \psi l = \int_{0}^{l} \psi l\, dl - \frac{1}{2}(\psi l - \psi 0),$$

il vient :

$$Q = \psi l + \int_{0}^{l} \psi l\, dl - \frac{1}{2}\psi l + \frac{1}{2}\psi 0 - \frac{1}{2}\psi 0$$

$$= \int_{0}^{l} \psi l\, dl + \frac{1}{2}\psi l$$

$$= \int_{0}^{l} \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}} e^{-l^2 g}\, dl + \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}} e^{-l^2 g}.$$

Posons

$$l\sqrt{g} = \gamma, \quad dl = \frac{d\gamma}{g},$$

nous aurons :

$$Q = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\gamma} e^{-\gamma^2} \frac{d\gamma}{\sqrt{g}} \cdot \sqrt{g} + \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}} e^{-\gamma^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\gamma} e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{\dfrac{2\pi mn\rho(\mu+\rho)}{\mu^3}}}.$$

C'est la probabilité que le nombre inconnu ν des répétitions futures de A est compris entre

$$k \pm l,$$

ou, entre

$$k \pm \frac{\gamma}{\sqrt{g}} = k \pm \gamma \sqrt{\frac{2mn\rho(\mu+\rho)}{\mu^3}} \; .$$

Rem. D'après une remarque que m'a communiqué M. Bienaymé, le théorème ci-dessus, démontré par une analyse qui m'est propre, peut se déduire d'une formule plus générale de Laplace, donnée page 425 de son traité des probabilités (édition 1820). Il suffit de faire $\mu = 0$, $\nu = 1$ dans cette formule pour obtenir $\frac{n}{m} s \pm kt$, où $k^2 = 2s \frac{n(m-n)}{m^2} \cdot \frac{m+s}{m}$. L'analyse de Laplace repose sur une formule générale qu'il donne page 395 de l'ouvrage cité.

Note. J'avais d'abord jugé convenable de ne pas citer de noms propres; mais après l'impression de cette publication, alors qu'il était trop tard d'en changer la rédaction, j'ai réfléchi qu'il n'était pas juste d'exposer aux soupçons du lecteur les membres de l'Académie qui sont restés étrangers à ces débats.

Je dirai donc que le paragraphe I de l'avant-propos a trait au rapport de MM. Schaar, Lamarle et Timmermans sur mon travail intitulé : *Examen critique*, *etc.* Ce que je dis dans les paragraphes suivants concerne uniquement M. Schaar.