MÉMOIRE

SUR

L'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE

AUX

DIFFÉRENCES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE

D'UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES;

PAR

A. MEYER,

CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE, PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE, ETC.

(Présenté à la séance du 6 décembre 1851.)

Pfaff, géomètre allemand, a donné le premier, en 1814 (*), dans les mémoires de l'Académie de Berlin, une solution complète du problème qui forme l'objet de ce mémoire; il considère cette question comme un cas particulier de l'intégration de toute équation linéaire ordinaire entre $2n$ variables, au moyen d'un système de n équations. La méthode qui sera exposée dans ce mémoire, reposant d'ailleurs sur un tout autre principe, est plus simple et non moins générale que celle de Pfaff.

Dans le tome II du *Journal de Crelle* (**), Jacobi, en s'appuyant sur la méthode de Lagrange, pour l'intégration des équations aux différences partielles entre trois variables, est parvenu à une méthode qui se recommande par la simplicité, mais elle ne donne point l'intégrale générale de la proposée; elle conduit à une intégrale particulière, renfermant autant de constantes arbitraires que de variables indépendantes, mais point de fonctions arbitraires. La méthode que j'ai suivie, toute aussi simple que celle de Jacobi, a sur elle l'avantage de conduire à l'intégrale générale de l'équation différentielle donnée.

M. Cauchy (***), en profitant d'un travail d'Ampère, arrive, à l'aide de l'introduction de nouvelles variables indépendantes, et d'une combinaison assez compliquée d'équations différentielles, à un système d'équations ordinaires, dont l'intégration conduit à la solution complète de la question. Je parviens au même système d'équations directement par l'usage des conditions d'intégrabilité, et me sers de nouvelles variables indépendantes, non pour obtenir ces équations, mais pour éliminer les constantes introduites par leur intégration. Je pense que la méthode exposée dans ce mémoire, non moins générale que celle de M. Cauchy, est plus directe que celle de cet auteur; elle doit, au reste, lui être préférée sous le rapport de la simplicité et de l'uniformité des calculs qu'elle exige.

(*) Pfaff, *Math. Abhand. der berliner Academ. der Wissenschaften*. Berlin, 1814, p. 76.
(**) Jacobi, *Journal de Crelle*, II, 4, p. 324.
(***) Cauchy, *Exercices d'analyse*, t. II, p. 241.

MÉMOIRE

SUR

L'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE

AUX

DIFFÉRENCES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE

D'UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES.

Je partagerai ce mémoire en deux parties : la première aura pour objet la solution générale du problème, et dans la deuxième on appliquera les préceptes trouvés à l'intégration des équations de trois et de quatre variables.

PREMIÈRE PARTIE.

Nous représenterons les variables indépendantes par les lettres x_1, x_2, ... x_{n-1}, la variable principale par x_n, et les dérivées partielles, en général, par

$$p_k = \frac{dx_n}{dx_k},$$

en donnant à k successivement les valeurs $1, 2, \ldots n-1$.

Cela posé, le problème général pourra s'énoncer de cette manière :

Étant donnée l'équation du 1^er^ *ordre*

$$u = F(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x_n, \quad p_1, p_2, \ldots p_{n-1}) = o. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Trouver la relation primitive de la forme

$$F(x_1, x_2, \dots x_{n-1}, x_n) = o. \qquad (2)$$

Solution. — En supposant que (2) exprime l'intégrale de (1), on pourra mettre la différentielle de (2) sous la forme

$$dx_n = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_{n-2} dx_{n-2} + p_{n-1} dx_{n-1} \qquad (3)$$

qui sera une différentielle exacte, et par suite les conditions d'intégrabilité de cette équation subsisteront; cherchons ces conditions. On a :

$$dx_n = \left(\frac{dx_n}{dx_1}\right) dx_1 + \left(\frac{dx_n}{dx_2}\right) dx_2 + \dots + \left(\frac{dx_n}{dx_{n-2}}\right) dx_{n-2} + \left(\frac{dx_n}{dx_{n-1}}\right) dx_{n-1}. \qquad (4)$$

La comparaison des formules (3) et (4) fournit :

$$p_1 = \left(\frac{dx_n}{dx_1}\right),\ p_2 = \left(\frac{dx_n}{dx_2}\right),\ p_3 = \left(\frac{dx_n}{dx_3}\right),\ \dots\ p_{n-2} = \left(\frac{dx_n}{dx_{n-2}}\right),\ p_{n-1} = \left(\frac{dx_n}{dx_{n-1}}\right). \qquad (5)$$

De ces relations on tire, par la différentiation, les couples de valeurs

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dp_1}{dx_2} = \dfrac{d^2x_n}{dx_1 dx_2} \\ \dfrac{dp_2}{dx_1} = \dfrac{d^2x_n}{dx_2 dx_1} \end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l} \dfrac{dp_1}{dx_3} = \dfrac{d^2x_n}{dx_1 dx_3} \\ \dfrac{dp_3}{dx_1} = \dfrac{d^2x_n}{dx_3 dx_1} \end{array}\right\}, \text{ etc.},$$

qui conduisent aux relations :

$$\left.\begin{array}{llll} \dfrac{dp_1}{dx_2} = \dfrac{dp_2}{dx_1}, & \dfrac{dp_2}{dx_3} = \dfrac{dp_3}{dx_2}, & \text{etc. } \dfrac{dp_{n-2}}{dx_{n-1}} = \dfrac{dp_{n-1}}{dx_{n-2}} & \\ \dfrac{dp_1}{dx_3} = \dfrac{dp_3}{dx_1}, & \dfrac{dp_2}{dx_4} = \dfrac{dp_4}{dx_2}, & \text{etc.} & \\ \quad\text{etc.}, & \text{etc.}, \quad \text{etc.}, & \text{etc.} & \\ \dfrac{dp_1}{dx_{n-2}} = \dfrac{dp_{n-2}}{dx_1}, & \dfrac{dp_2}{dx_{n-2}} = \dfrac{dp_{n-2}}{dx_2}, & \text{etc.} & \\ \dfrac{dp_1}{dx_{n-1}} = \dfrac{dp_{n-1}}{dx_1}, & \dfrac{dp_2}{dx_{n-1}} = \dfrac{dp_{n-1}}{dx_2}, & \text{etc.} & \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Mais à cause de l'équation (1), les dérivées $p_1, p_2, \dots p_{n-1}$ pourront être considérées comme des fonctions de x_1, x_2, x_{n-1} x_n, et par suite on a les différentielles totales

$$\left.\begin{aligned}
dp_1 &= \left(\frac{dp_1}{dx_1}\right) dx_1 + \left(\frac{dp_1}{dx_2}\right) dx_2 + \ldots + \left(\frac{dp_1}{dx_{n-1}}\right) dx_{n-1} + \left(\frac{dp_1}{dx_n}\right) dx_n \\
dp_2 &= \left(\frac{dp_2}{dx_1}\right) dx_1 + \left(\frac{dp_2}{dx_2}\right) dx_2 + \ldots + \left(\frac{dp_2}{dx_{n-1}}\right) dx_{n-1} + \left(\frac{dp_2}{dx_n}\right) dx_n \\
&\text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.} \\
dp_{n-1} &= \left(\frac{dp_{n-1}}{dx_1}\right) dx_1 + \left(\frac{dp_{n-1}}{dx_2}\right) dx_2 + \ldots + \left(\frac{dp_{n-1}}{dx_{n-1}}\right) dx_{n-1} + \left(\frac{dp_{n-1}}{dx_n}\right) dx_n.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (7)$$

d'où l'on conclut les différentielles partielles :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dp_1}{dx_2} &= \left(\frac{dp_1}{dx_2}\right) + p_2 \left(\frac{dp_1}{dx_n}\right), & \frac{dp_2}{dx_1} &= \left(\frac{dp_2}{dx_1}\right) + p_1 \left(\frac{dp_2}{dx_n}\right), \\
\frac{dp_1}{dx_3} &= \left(\frac{dp_1}{dx_3}\right) + p_3 \left(\frac{dp_1}{dx_n}\right), & \frac{dp_3}{dx_1} &= \left(\frac{dp_3}{dx_1}\right) + p_1 \left(\frac{dp_3}{dx_n}\right), \\
&\text{etc.} & &\text{etc.} \\
\frac{dp_1}{dx_{n-2}} &= \left(\frac{dp_1}{dx_{n-2}}\right) + p_{n-2} \left(\frac{dp_1}{dx_n}\right), & \frac{dp_{n-2}}{dx_1} &= \left(\frac{dp_{n-2}}{dx_1}\right) + p_1 \left(\frac{dp_{n-2}}{dx_n}\right), \\
\frac{dp_1}{dx_{n-1}} &= \left(\frac{dp_1}{dx_{n-1}}\right) + p_{n-1} \left(\frac{dp_1}{dx_n}\right), & \frac{dp_{n-1}}{dx_1} &= \left(\frac{dp_{n-1}}{dx_1}\right) + p_1 \left(\frac{dp_{n-1}}{dx_n}\right), \\
\frac{dp_2}{dx_3} &= \left(\frac{dp_2}{dx_3}\right) + p_3 \left(\frac{dp_2}{dx_n}\right), & \frac{dp_3}{dx_2} &= \left(\frac{dp_3}{dx_2}\right) + p_2 \left(\frac{dp_3}{dx_n}\right), \\
\frac{dp_2}{dx_4} &= \left(\frac{dp_2}{dx_4}\right) + p_4 \left(\frac{dp_2}{dx_n}\right), & \frac{dp_4}{dx_2} &= \left(\frac{dp_4}{dx_2}\right) + p_2 \left(\frac{dp_4}{dx_n}\right), \\
&\text{etc.} & &\text{etc.} \\
\frac{dp_2}{dx_{n-2}} &= \left(\frac{dp_2}{dx_{n-2}}\right) + p_{n-2} \left(\frac{dp_2}{dx_n}\right), & \frac{dp_{n-2}}{dx_2} &= \left(\frac{dp_{n-2}}{dx_2}\right) + p_2 \left(\frac{dp_{n-2}}{dx_n}\right), \\
\frac{dp_2}{dx_{n-1}} &= \left(\frac{dp_2}{dx_{n-1}}\right) + p_{n-1} \left(\frac{dp_2}{dx_n}\right), & \frac{dp_{n-1}}{dx_2} &= \left(\frac{dp_{n-1}}{dx_2}\right) + p_2 \left(\frac{dp_{n-1}}{dx_n}\right), \\
&\text{etc.} & &\text{etc.} \\
\frac{dp_{n-2}}{dx_{n-1}} &= \left(\frac{dp_{n-2}}{dx_{n-1}}\right) + p_{n-1} \left(\frac{dp_{n-2}}{dx_n}\right), & \frac{dp_{n-1}}{dx_{n-2}} &= \left(\frac{dp_{n-1}}{dx_{n-2}}\right) + p_{n-2} \left(\frac{dp_{n-1}}{dx_n}\right).
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (8)$$

Des relations (6) et (8) on déduit immédiatement les conditions d'intégrabilité cherchées, savoir :

$$\left.\begin{array}{ll}
\left(\frac{dp_1}{dx_2}\right) - \left(\frac{dp_2}{dx_1}\right) + p_2 \left(\frac{dp_1}{dx_n}\right) - p_1 \left(\frac{dp_2}{dx_n}\right) = o, & \\
\left(\frac{dp_1}{dx_3}\right) - \left(\frac{dp_3}{dx_1}\right) + p_3 \left(\frac{dp_1}{dx_n}\right) - p_1 \left(\frac{dp_3}{dx_n}\right) = o, & \\
\qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.} & \\
\left(\frac{dp_1}{dx_{n-2}}\right) - \left(\frac{dp_{n-2}}{dx_1}\right) + p_{n-2} \left(\frac{dp_1}{dx_n}\right) - p_1 \left(\frac{dp_{n-2}}{dx_n}\right) = o, & \\
\left(\frac{dp_1}{dx_{n-1}}\right) - \left(\frac{dp_{n-1}}{dx_1}\right) + p_{n-1} \left(\frac{dp_1}{dx_n}\right) - p_1 \left(\frac{dp_{n-1}}{dx_n}\right) = o & \ldots \ (\alpha) \\
\left(\frac{dp_2}{dx_3}\right) - \left(\frac{dp_3}{dx_2}\right) + p_3 \left(\frac{dp_2}{dx_n}\right) - p_2 \left(\frac{dp_3}{dx_n}\right) = o, & \\
\left(\frac{dp_2}{dx_4}\right) - \left(\frac{dp_4}{dx_2}\right) + p_4 \left(\frac{dp_2}{dx_n}\right) - p_2 \left(\frac{dp_4}{dx_n}\right) = o, & \\
\qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.} & \\
\left(\frac{dp_2}{dx_{n-2}}\right) - \left(\frac{dp_{n-2}}{dx_2}\right) + p_{n-2} \left(\frac{dp_2}{dx_n}\right) - p_2 \left(\frac{dp_{n-2}}{dx_n}\right) = o, & \\
\left(\frac{dp_2}{dx_{n-1}}\right) - \left(\frac{dp_{n-1}}{dx_2}\right) + p_{n-1} \left(\frac{dp_2}{dx_n}\right) - p_2 \left(\frac{dp_{n-1}}{dx_n}\right) = o & \ldots \ (\beta) \\
\qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.} & \\
\left(\frac{dp_{n-2}}{dx_{n-1}}\right) - \left(\frac{dp_{n-1}}{dx_{n-2}}\right) + p_{n-1} \left(\frac{dp_{n-2}}{dx_n}\right) - p_{n-2} \left(\frac{dp_{n-1}}{dx_n}\right) = o & \ldots \ (\gamma)
\end{array}\right\} \ldots \ (9)$$

Il faut maintenant éliminer des équations (3) d'abord p_{n-1}, à l'aide de l'équation (1); nous supposerons cette élimination faite; il faut, en outre, éliminer des mêmes équations les dérivées de p_{n-1} par rapport à x_1, x_2, ... x_{n-2}, x_n, savoir les quantités

$$\left(\frac{dp_{n-1}}{dx_1}\right), \ \left(\frac{dp_{n-1}}{dx_2}\right), \ \ldots. \ \left(\frac{dp_{n-1}}{dx_{n-2}}\right), \ \left(\frac{dp_{n-1}}{dx_n}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

A cet effet, en regardant p_1, p_2, ... p_{n-1} comme des fonctions de x_1, x_2, ... x_n, l'équation totale

$$du = \left(\frac{dF}{dx_1}\right) dx_1 + \left(\frac{dF}{dx_2}\right) dx_2 + \ldots + \left(\frac{dF}{dx_n}\right) dx_n + \left(\frac{dF}{dp_1}\right) dp_1 + \ldots + \left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right) dp_{n-1} = o \quad (11)$$

divisée successivement par dx_1, dx_2 ... dx_{n-1}, dx_n, et résolue successivement par rapport aux inconnues (10), conduit aux dérivées partielles :

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right)\left(\frac{dp_{n-1}}{dx_1}\right)=-\left[\left(\frac{dF}{dx_1}\right)+\left(\frac{dF}{dp_1}\right)\left(\frac{dp_1}{dx_1}\right)+\left(\frac{dF}{dp_2}\right)\left(\frac{dp_2}{dx_1}\right)+\dots\right.\\
\qquad\qquad\left.+\left(\frac{dF}{dp_{n-2}}\right)\left(\frac{dp_{n-2}}{dx_1}\right)\right],\\
\left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right)\left(\frac{dp_{n-1}}{dx_2}\right)=-\left[\left(\frac{dF}{dx_2}\right)+\left(\frac{dF}{dp_1}\right)\left(\frac{dp_1}{dx_2}\right)+\left(\frac{dF}{dp_2}\right)\left(\frac{dp_2}{dx_2}\right)+\dots\right.\\
\qquad\qquad\left.+\left(\frac{dF}{dp_{n-2}}\right)\left(\frac{dp_{n-2}}{dx_2}\right)\right],\\
\text{etc.}\qquad\qquad\text{etc.}\\
\left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right)\left(\frac{dp_{n-1}}{dx_{n-1}}\right)=-\left[\left(\frac{dF}{dx_{n-1}}\right)+\left(\frac{dF}{dp_1}\right)\left(\frac{dp_1}{dx_{n-1}}\right)+\left(\frac{dF}{dp_2}\right)\left(\frac{dp_2}{dx_{n-1}}\right)+\dots\right.\\
\qquad\qquad\left.+\left(\frac{dF}{dp_{n-2}}\right)\left(\frac{dp_{n-2}}{dx_{n-1}}\right)\right],\\
\left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right)\left(\frac{dp_{n-1}}{dx_n}\right)=-\left[\left(\frac{dF}{dx_n}\right)+\left(\frac{dF}{dp_1}\right)\left(\frac{dp_1}{dx_n}\right)+\left(\frac{dF}{dp_2}\right)\left(\frac{dp_2}{dx_n}\right)+\dots\right.\\
\qquad\qquad\left.+\left(\frac{dF}{dp_{n-2}}\right)\left(\frac{dp_{n-2}}{dx_n}\right)\right].
\end{array}\right\}\quad\dots\quad(12)$$

Or, si nous remplaçons dans les relations (α), (β), (γ), qui seules, parmi les équations (9), contiennent les inconnues (10), ces inconnues, par leurs valeurs tirées des relations (12), on obtient, à la place des équations (α), (β), (γ), les suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\frac{dF}{dx_1}\right)+p_1\left(\frac{dF}{dx_n}\right)+\left(\frac{dF}{dp_1}\right)\left(\frac{dp_1}{dx_1}\right)+\left(\frac{dF}{dp_2}\right)\left[\left(\frac{dp_2}{dx_1}\right)+p_1\left(\frac{dp_2}{dx_n}\right)\right]+\dots\\
\quad+\left(\frac{dF}{dp_{n-2}}\right)\left[\left(\frac{dp_{n-2}}{dx_1}\right)+p_1\left(\frac{dp_{n-2}}{dx_n}\right)\right]+\left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right)\left(\frac{dp_1}{dp_{n-1}}\right)\\
\qquad+p_{n-1}\left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right)\left(\frac{dp_1}{dx_n}\right)+p_1\left(\frac{dF}{dp_1}\right)\left(\frac{dp_1}{dx_n}\right)=o,
\end{array}\right\}\quad\dots\quad(\alpha')$$

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\frac{dF}{dx_2}\right)+p_2\left(\frac{dF}{dx_n}\right)+\left(\frac{dF}{dp_1}\right)\left[\left(\frac{dp_1}{dx_2}\right)+p_2\left(\frac{dp_1}{dx_n}\right)\right]+\dots\\
\quad+\left(\frac{dF}{dp_{n-2}}\right)\left[\left(\frac{dp_{n-2}}{dx_2}\right)+p_2\left(\frac{dp_{n-2}}{dx_n}\right)\right]+\left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right)\left(\frac{dp_2}{dx_{n-1}}\right)\\
\qquad+p_{n-1}\left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right)\left(\frac{dp_2}{dx_n}\right)+p_2\left(\frac{dF}{dp_2}\right)\left(\frac{dp_2}{dx_n}\right)=o,
\end{array}\right\}\quad\dots\quad(\beta')$$

etc. etc.

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{dF}{dx_{n-1}}\right)+p_{n-1}\left(\frac{dF}{dx_n}\right)+\left(\frac{dF}{dp_1}\right)\left[\left(\frac{dp_1}{dx_{n-1}}\right)+p_{n-1}\left(\frac{dp_1}{dx_n}\right)\right]+\ldots\\&\quad+\left(\frac{dF}{dp_{n-2}}\right)\left[\left(\frac{dp_{n-2}}{dx_{n-1}}\right)+p_{n-1}\left(\frac{dp_{n-2}}{dx_n}\right)\right]+\left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right)\left(\frac{dp_{n-1}}{dx_{n-1}}\right)\\&\qquad+p_{n-1}\left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right)\left(\frac{dp_{n-1}}{dx_n}\right)=o.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(\gamma')$$

Mais on a, par les équations (9),

$$\begin{aligned}\left(\frac{dp_1}{dx_2}\right)+p_2\left(\frac{dp_1}{dx_n}\right)&=\left(\frac{dp_2}{dx_1}\right)+p_1\left(\frac{dp_2}{dx_n}\right),\\\left(\frac{dp_1}{dx_3}\right)+p_3\left(\frac{dp_1}{dx_n}\right)&=\left(\frac{dp_3}{dx_1}\right)+p_1\left(\frac{dp_3}{dx_n}\right),\\\text{etc.}\qquad&\qquad\text{etc.}\\\left(\frac{dp_1}{dx_{n-1}}\right)+p_{n-1}\left(\frac{dp_1}{dx_n}\right)&=\left(\frac{dp_{n-1}}{dx_1}\right)+p_1\left(\frac{dp_{n-1}}{dx_n}\right),\\\left(\frac{dp_2}{dx_3}\right)+p_3\left(\frac{dp_2}{dx_n}\right)&=\left(\frac{dp_3}{dx_2}\right)+p_2\left(\frac{dp_3}{dx_n}\right),\\\text{Etc.}\qquad&\qquad\text{Etc.}\\\left(\frac{dp_2}{dx_{n-1}}\right)+p_{n-1}\left(\frac{dp_2}{dx_n}\right)&=\left(\frac{dp_{n-1}}{dx_2}\right)+p_2\left(\frac{dp_{n-1}}{dx_n}\right).\\\text{etc.}\qquad&\qquad\text{etc.}\end{aligned}$$

A l'aide de ces équations, les relations (α'), (β'), (γ'), prennent la forme :

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{dF}{dx_1}\right)+p_1\left(\frac{dF}{dx_n}\right)+\left(\frac{dF}{dp_1}\right)\left(\frac{dp_1}{dx_1}\right)+\left(\frac{dF}{dp_2}\right)\left(\frac{dp_1}{dx_2}\right)+\ldots\\&\quad+\left(\frac{dF}{dp_{n-2}}\right)\left(\frac{dp_1}{dx_{n-2}}\right)+\left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right)\left(\frac{dp_1}{dx_{n-1}}\right)+\left[p_1\left(\frac{dF}{dp_1}\right)+p_2\left(\frac{dF}{dp_2}\right)+\ldots\right.\\&\qquad\left.+p_{n-2}\left(\frac{dF}{dp_{n-2}}\right)+p_{n-1}\left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right)\right]\left(\frac{dp_1}{dx_n}\right)=o,\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(\mathrm{I})$$

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{dF}{dx_2}\right)+p_2\left(\frac{dF}{dx_n}\right)+\left(\frac{dF}{dp_1}\right)\left(\frac{dp_2}{dx_1}\right)+\left(\frac{dF}{dp_2}\right)\left(\frac{dp_2}{dx_2}\right)+\ldots\\&\quad+\left(\frac{dF}{dp_{n-2}}\right)\left(\frac{dp_2}{dx_{n-2}}\right)+\left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right)\left(\frac{dp_2}{dx_{n-1}}\right)+\left[p_1\left(\frac{dF}{dp_1}\right)+p_2\left(\frac{dF}{dp_2}\right)+\ldots\right.\\&\qquad\left.+p_{n-2}\left(\frac{dF}{dp_{n-2}}\right)+p_{n-1}\left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right)\right]\left(\frac{dp_{n-2}}{dx_n}\right)=o,\\&\qquad\qquad\text{etc.}\qquad\qquad\text{etc.}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(\mathrm{II})$$

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dF}{dx_{n-1}}\right) + p_{n-1}\left(\frac{dF}{dx_n}\right) &+ \left(\frac{dF}{dp_1}\right)\left(\frac{dp_{n-1}}{dx_1}\right) + \left(\frac{dF}{dp_2}\right)\left(\frac{dp_{n-1}}{dx_2}\right) + \dots\\ &+ \left(\frac{dF}{dp_{n-2}}\right)\left(\frac{dp_{n-2}}{dx_{n-2}}\right) + \left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right)\left(\frac{dp_{n-2}}{dx_{n-1}}\right)\\ + \left[p_1\left(\frac{dF}{dp_1}\right) + p_2\left(\frac{dF}{dp_2}\right) + \dots + p_{n-2}\left(\frac{dF}{dp_{n-2}}\right) + p_{n-1}\left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right)\right]&\left(\frac{dp_{n-2}}{dx_n}\right) = o.\end{aligned}\right\}\dots\quad \text{(III)}$$

Mais si l'on tire de ces équations les valeurs des dérivées

$$\left(\frac{dp_1}{dx_{n-1}}\right),\quad \left(\frac{dp_2}{dx_{n-1}}\right),\quad \dots\quad \left(\frac{dp_{n-2}}{dx_{n-1}}\right),$$

pour les substituer dans les $n-2$ premières des équations (7), on obtiendra les relations :

$$\begin{aligned}\left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right)dp_1 + dx_{n-1}\left[\left(\frac{dF}{dx_1}\right) + p_1\left(\frac{dF}{dx_n}\right)\right] = \left(\frac{dp_1}{dx_1}\right)&\left[\left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right)dx_1 - dx_{n-1}\left(\frac{dF}{dp_1}\right)\right]\\ + \left(\frac{dp_1}{dx_2}\right)&\left[\left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right)dx_2 - dx_{n-1}\left(\frac{dF}{dp_2}\right)\right] + \dots\\ + \left(\frac{dp_1}{dx_n}\right)\left[\left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right)dx_n - dx_{n-1}\right.&\left.\left\{p_1\left(\frac{dF}{dp_1}\right) + p_2\left(\frac{dF}{dp_2}\right) + \dots + p_{n-1}\left(\frac{dF}{dx_{n-1}}\right)\right\}\right].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right)dp_2 + dx_{n-1}\left[\left(\frac{dF}{dx_2}\right) + p_2\left(\frac{dF}{dx_n}\right)\right] = \left(\frac{dp_2}{dx_1}\right)&\left[\left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right)dx_1 - dx_{n-1}\left(\frac{dF}{dp_1}\right)\right]\\ + \left(\frac{dp_2}{dx_2}\right)&\left[\left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right)dx_2 - dx_{n-1}\left(\frac{dF}{dp_2}\right)\right] + \dots\\ + \left(\frac{dp_2}{dx_n}\right)\left[\left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right)dx_n - dx_{n-1}\right.&\left.\left\{p_1\left(\frac{dF}{dp_1}\right) + p_2\left(\frac{dF}{dp_2}\right) + \dots + p_{n-1}\left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right)\right\}\right].\end{aligned}$$

etc. etc.

$$\begin{aligned}\left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right)dp_{n-2} + dx_{n-1}\left[\left(\frac{dF}{dx_{n-2}}\right) + p_{n-2}\left(\frac{dF}{dx_n}\right)\right] = \left(\frac{dp_{n-2}}{dx_1}\right)&\left[\left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right)dx_1 - dx_{n-1}\left(\frac{dF}{dp_1}\right)\right]\\ + \left(\frac{dp_{n-2}}{dx_2}\right)&\left[\left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right)dx_2 - dx_{n-1}\left(\frac{dF}{dp_2}\right)\right] + \dots\\ + \left(\frac{dp_{n-2}}{dx_n}\right)\left[\left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right)dx_n - dx_{n-1}\right.&\left.\left\{p_1\left(\frac{dF}{dp_1}\right) + p_2\left(\frac{dF}{dp_2}\right) + \dots + p_{n-1}\left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right)\right\}\right].\end{aligned}$$

Or, on satisfait à ces équations de la manière la plus générale, en posant :

$$\left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right) dp_1 + dx_{n-1}\left[\left(\frac{dF}{dx_1}\right) + p_1\left(\frac{dF}{dx_n}\right)\right] = o, \quad \left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right) dp_2 + dx_{n-1}\left[\left(\frac{dF}{dx_2}\right) + p_2\left(\frac{dF}{dx_n}\right)\right] = o, \text{ etc.}$$

$$\left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right) dp_{n-2} + dx_{n-1}\left[\left(\frac{dF}{dx_{n-2}}\right) + p_{n-2}\left(\frac{dF}{dx_n}\right)\right] = o, \quad \left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right) dx_1 - dx_{n-1}\left(\frac{dF}{dp_1}\right) = o,$$

$$\left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right) dx_2 - dx_{n-1}\left(\frac{dF}{dp_2}\right) = o, \text{ etc.}$$

$$\left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right) dx_n - dx_{n-1}\left[p_1\left(\frac{dF}{dp_1}\right) + p_2\left(\frac{dF}{dp_2}\right) + \dots + p_{n-1}\left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right)\right] = o.$$

De ces équations on tire la relation continue :

$$\text{(A)} \quad \frac{dx_1}{\left(\frac{dF}{dp_1}\right)} = \frac{dx_2}{\left(\frac{dF}{dp_2}\right)} = \text{etc.} = \frac{dx_n}{p_1\left(\frac{dF}{dp_1}\right) + p_2\left(\frac{dF}{dp_2}\right) + \dots + p_{n-1}\left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right)}$$
$$= -\frac{dp_1}{\left(\frac{dF}{dx_1}\right) + p_1\left(\frac{dF}{dx_n}\right)} = -\frac{dp_2}{\left(\frac{dF}{dx_2}\right) + p_2\left(\frac{dF}{dx_n}\right)} = \text{etc.} = -\frac{dp_{n-2}}{\left(\frac{dF}{dx_{n-2}}\right) + p_{n-2}\left(\frac{dF}{dx_n}\right)}.$$

Observons que les coefficients des équations linéaires (I), (II), (III) sont tous égaux, on aurait donc pu conclure de ces équations immédiatement les relations (A), au moyen d'un théorème que Jacobi indique dans le *Journal de Crelle*, t. II, p. 321.

Les équations (A) ne contenant plus la dérivée p_{n-1}, puisque cette quantité est censée éliminée par le moyen de l'équation (1), elles ne renfermeront plus que les variables

$$\text{et les dérivées} \quad \left.\begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, \\ p_1, p_2, \dots, p_{n-2}; \end{matrix}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (13)$$

Le nombre de ces équations est évidemment $n + n - 2 - 1 = 2n - 3$.

Nous avons déjà observé que le but de nos calculs consistait à déterminer x_n en fonction des variables indépendantes; mais, comme le remarque M. Cauchy, pour déterminer complétement l'inconnue x_n, il ne suffit pas qu'elle satisfasse à l'équation (1); il sera encore nécessaire que cette fonction soit assujettie à une autre condition, par exemple, de recevoir la valeur particulière $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_{n-2})$, quand on donne à x_{n-1} une valeur constante a. Par conséquent, les dérivées $p_1, p_2, \ldots p_{n-2}$ recevront, dans la même hypothèse, les valeurs particulières

$$\frac{d\varphi}{dx_1}, \frac{d\varphi}{dx_2}, \ldots \frac{d\varphi}{dx_{n-2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Cela posé, intégrons les équations (A); il en résultera $2n-3$ équations primitives que nous représentons de cette manière,

$$Xc_1 = o, \quad Xc_2 = o, \quad \text{etc.} \quad Xc_{2n-3} = o. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

$c_1, c_2, \ldots c_{2n-3}$ sont les constantes introduites par les intégrations.

Pour déterminer ces constantes, supposons, pour un moment, que $x_1, x_2, \ldots x_{n-2}$ soient des fonctions de x_{n-1}, et des nouvelles variables indépendantes $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-2}$, en sorte que l'on ait

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \ \ = \psi_1 \ \ (x_{n-1}, \ \xi_1, \ \xi_2, \ \ldots \ \xi_{n-2}), \\ x_2 \ \ = \psi_2 \ \ (x_{n-1}, \ \xi_1, \ \xi_2, \ \ldots \ \xi_{n-2}), \\ \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \\ x_{n-2} = \psi_{n-2}(x_{n-1}, \ \xi_1, \ \xi_2, \ \ldots \ \xi_{n-2}). \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Les fonctions $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{n-2}$ devront être choisies de manière que les équations (A) soient satisfaites par les valeurs (16). Mais alors les intégrations des équations (A), dans lesquelles on aura mis les valeurs (16), reproduiront les fonctions $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{n-2}$, avec $n-2$ constantes. Or, pour déterminer ces constantes, nous supposerons que les quantités

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots \quad x_{n-2}$$

deviennent respectivement

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots \quad \xi_{n-2},$$

pour $x_{n-1} = a$. Mais alors, dans la même hypothèse, les expressions de $x_n, p_1, p_2, \ldots p_{n-2}$, que nous avons représentées par

$$\varphi(x_1, \ x_2, \ \ldots \ x_{n-2}), \quad \frac{d\varphi}{dx_1}, \quad \frac{d\varphi}{dx_2}, \quad \ldots \quad \frac{d\varphi}{dx_{n-2}},$$

deviendront :

$$\varphi(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots\ \xi_{n-2}),\quad \frac{d\varphi_1}{d\xi},\ \frac{d\varphi}{d\xi_2},\ \ldots\ \frac{d\varphi}{d\xi_{n-2}},$$

et nous pourrons, pour abréger, désigner ces valeurs respectivement par

$$\bar{\omega},\ \bar{\omega}_1,\ \bar{\omega}_2,\ \ldots\ \bar{\omega}_{n-2}.$$

Il suit de là que les $2n-3$ constantes des équations (15) seront déterminées par la considération que si x_{n-1} devient a, les variables

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_{n-2},\ x_n\ \ p_1,\ p_2,\ \ldots\ p_{n-2},$$

deviennent respectivement

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots\ \xi_{n-2},\ \bar{\omega},\ \bar{\omega}_1,\ \bar{\omega}_2,\ \ldots\ \bar{\omega}_{n-2}.$$

De plus, la valeur de p_{n-1}, que nous représentons par $\bar{\omega}_{n-1}$, et qui répond à $x_{n-1}=a$, se déduira de l'équation (1).

Donc, en supposant les constantes éliminées, les équations (15) pourront être représentées par

$$X_1=o,\ X_2=o,\ \ldots\ X_{2n-3}=o. \qquad (17)$$

Ces $2n-3$ équations renfermeront les quantités

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_{n-1},\ x_n,\ p_1,\ p_2,\ \ldots\ p_{n-2},\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots\ \xi_{n-2},\ a.$$

Si nous éliminons de ces équations les $n-2$ dérivées $p_1, p_2, \ldots p_{n-2}$, elles se réduiront à $2n-3-n+2=n-1$ équations entre les quantités

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_{n-1},\ x_n,\ \ \xi_1,\ \xi_2,\ \text{etc.},\ \xi_{n-2},\ a.$$

Le système de ces $n-1$ équations simultanées représentera la relation cherchée, ou l'intégrale de la proposée (1). En effet, si la fonction φ était donnée, on pourrait éliminer les $n-2$ variables $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-2}$, et l'on trouverait $n-1-n+2=1$ équation entre

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_{n-1},\ x_n,\ \ a.$$

Corollaire.

Le nombre des équations (A) devient plus simple, et l'élimination des dérivées p_1, p_2, ... p_{n-1} s'effectuera immédiatement, si, en désignant par

$$X_1, X_2, \dots X_n$$

des fonctions des variables x_1, x_2, etc., x_n, l'équation proposée est linéaire, et par conséquent de la forme :

$$u = X_1 p_1 + X_2 p_2 + \dots + X_{n-2} p_{n-2} + X_{n-1} p_{n-1} + X_n = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Alors on trouve pour la différentielle totale de u, l'expression :

$$\begin{array}{l} du = \left[p_1 \left(\frac{dX_1}{dx_1}\right) + \dots + p_{n-1} \left(\frac{dX_{n-1}}{dx_1}\right) + \left(\frac{dX_n}{dx_1}\right)\right] dx_1 + \\ \left[p_1 \left(\frac{dX_1}{dx_2}\right) + \dots + p_{n-1} \left(\frac{dX_{n-1}}{dx_2}\right) + \left(\frac{dX_n}{dx_2}\right)\right] dx_2 + \\ \qquad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.} \\ \left[p_1 \left(\frac{dX_1}{dx_n}\right) + \dots + p_{n-1} \left(\frac{dX_{n-1}}{dx_n}\right) + \left(\frac{dX_n}{dx_n}\right)\right] dx_n + \\ X_{n-1}\, dp_{n-1} + X_{n-2}\, dp_{n-2} + \dots + X_1\, dp_1 = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19) \end{array}$$

De la comparaison des formules (11) et (19), on déduit :

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{dF}{dx_1}\right) = p_1 \left(\frac{dX_1}{dx_1}\right) + \dots + p_{n-1} \left(\frac{dX_{n-1}}{dx_1}\right) + \left(\frac{dX_n}{dx_1}\right) \\ \left(\frac{dF}{dx_2}\right) = p_1 \left(\frac{dX_1}{dx_2}\right) + \dots + p_{n-1} \left(\frac{dX_{n-1}}{dx_2}\right) + \left(\frac{dX_n}{dx_2}\right) \\ \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.} \\ \left(\frac{dF}{dx_n}\right) = p_1 \left(\frac{dX_1}{dx_n}\right) + \dots + p_{n-1} \left(\frac{dX_{n-1}}{dx_n}\right) + \left(\frac{dX_n}{dx_n}\right) \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

$$\left(\frac{dF}{dp_1}\right) = X_1, \quad \left(\frac{dF}{dp_2}\right) = X_2, \quad \dots \quad \left(\frac{dF}{dp_{n-1}}\right) = X_{n-1}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Cela posé, en considérant que l'équation (18) fournit

$$p_1 X_1 + p_2 X_2 + \dots + p_{n-1} X_{n-1} = - X_n,$$

le système des équations (A) se change en :

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\text{etc.}=-\frac{dx_n}{X_n}=-\frac{dp_1}{\left(\frac{dF}{dx_1}\right)+p_1\left(\frac{dF}{dx_n}\right)}=\text{etc.}=-\frac{dp_{n-1}}{\left(\frac{dF}{dx_{n-2}}\right)+p_{n-1}\left(\frac{dF}{dx_n}\right)}.$$

Mais 1°, la proposée étant linéaire, aucun des coefficients X_1, X_2 ... X_n, ne contiendra une ou plusieurs des dérivées p_1, p_2, p_{n-1}; de plus, 2°, à cause des formules (20), l'on voit que les égalités

$$\frac{dp_1}{\left(\frac{dF}{dx_1}\right)+p_1\left(\frac{dF}{dx_n}\right)}=\text{etc.}=\frac{dp_{n-1}}{\left(\frac{dF}{dx_{n-1}}\right)+p_{n-1}\left(\frac{dF}{dx_n}\right)}$$

contiendront seules les dérivées partielles p_1, p_2, etc., p_{n-1}; donc, en supprimant ces égalités, au nombre de $n-2$, on aura éliminé ces mêmes dérivées, et les égalités restantes

$$\text{(B)} \quad \frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\text{etc.}=-\frac{dx_n}{X_n}.$$

au nombre de $2n-3-n+2=n-1$, ne renfermeront plus que les variables x_1, x_2, ... x_n et leurs différentielles.

Soient

$$Xc_1=o,\quad Xc_2=o,\quad \ldots\quad Xc_{n-1}=o,$$

les intégrales des équations (B); on en éliminera les constantes c_1, c_2 ... c_{n-1}, en admettant que si x_{n-1} devient a, les variables x_1, x_2 ... x_{n-2}, x_n deviennent respectivement ξ_1, ξ_2 ... ξ_{n-1}, $\omega=\varphi(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_{n-2})$.

Soient

$$X_1=o,\quad X_2=o,\quad \ldots\quad X_{n-1}=o,$$

les intégrales précédentes, provenant de l'élimination des constantes, ces $n-1$ équations subsisteront simultanément entre les variables

$$x_1,\ x_2\ \ldots\ x_{n-1},\ x_n,\ \xi_1,\ \xi_2\ \ldots\ \xi_{n-2},$$

et la constante a; elles représenteront l'intégrale de l'équation proposée

(18). En effet, si l'on pouvait en éliminer les $n-2$ variables $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_{n-2}$, on trouverait $n-1-n+2=1$ équation entre $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}, x_n$, et a. Mais cette élimination ne pourra s'effectuer, en général, que lorsqu'on connaîtra la fonction φ.

Remarque.

Il est important d'observer que si l'équation est linéaire, et par suite de la forme (18), on pourra éviter l'emploi des variables auxiliaires $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_{n-2}$, et par conséquent, leur élimination finale, en opérant ainsi qu'il suit.

Soit

$$F = o \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

l'équation primitive; F sera une fonction inconnue de $x_1, x_2 \ldots x_n$.

De l'équation (22) on tire les équations aux différences partielles :

$$\left(\frac{dF}{dx_1}\right) + p_1 \left(\frac{dF}{dx_n}\right) = o.$$

$$\left(\frac{dF}{dx_2}\right) + p_2 \left(\frac{dF}{dx_n}\right) = o.$$

etc. etc.

$$\left(\frac{dF}{dx_{n-1}}\right) + p_{n-1} \left(\frac{dF}{dx_n}\right) = o;$$

et à l'aide de ces équations, la proposée (18), c'est-à-dire

$$p_1 X_1 + p_2 X_2 + \ldots + p_{n-1} X_{n-1} + X_n = o,$$

se change en celle-ci :

$$\left(\frac{dF}{dx_1}\right) X_1 + \left(\frac{dF}{dx_2}\right) X_2 + \ldots + \left(\frac{dF}{dx_{n-1}}\right) X_{n-1} - \left(\frac{dF}{dx_n}\right) X_n = o. \quad \ldots \quad (23)$$

Cela posé, pour déterminer la fonction F, cherchons la propriété qui caractérise la nature générale de cette fonction. A cet effet, si l'on élimine de sa différentielle totale

$$dF = \left(\frac{dF}{dx_1}\right) dx_1 + \left(\frac{dF}{dx_2}\right) dx_2 + \ldots\ldots + \left(\frac{dF}{dx_{n-1}}\right) dx_{n-1} + \left(\frac{dF}{dx_n}\right) dx_n.$$

le coefficient $\left(\frac{dF}{dx_n}\right)$, à l'aide de l'équation (23), on trouvera sans peine :

$$X_n\,dF = \left(\frac{dF}{dx_1}\right)[X_n\,dx_1 + X_1\,dx_n] + \left(\frac{dF}{dx_2}\right)[X_n\,dx_2 + X_2\,dx_n] + \dots$$
$$+ \left(\frac{dF}{dx_{n-1}}\right)[X_n\,dx_{n-1} + X_{n-1}\,dx_n].$$

Mais à cause des équations (B), on a :

$$\text{(C)}. \quad X_n\,dx_1 + X_1\,dx_n = o, \quad X_n\,dx_2 + X_2\,dx_n = o, \quad \dots \quad X_n\,dx_{n-1} + X_{n-1}\,dx_n = o;$$

on a donc $$dF = o. \qquad (24)$$

Il suit de là que la fonction F doit se réduire à une valeur constante pour des valeurs de x_1, $x_2 \dots x_n$ tirées des équations (B), ou, ce qui revient au même, des équations (C). Or, désignons, comme toujours, les intégrales, déduites de ces équations, par

$$Xc_1 = o, \quad Xc_2 = o, \quad \dots \quad Xc_{n-1} = o.$$

et résolvons ces dernières équations par rapport aux constantes $c_1, c_2 \dots c_{n-1}$; on aura des relations de la forme

$$c_1 = \Psi_1, \quad c_2 = \Psi_2 \quad \dots \quad c_{n-1} = \Psi_{n-1} \qquad (25)$$

dans lesquelles Ψ_1, $\Psi_2 \dots \Psi_{n-1}$ désignent des fonctions déterminées des quantités x_1, $x_2 \dots x_n$.

Si donc on prend pour F une fonction arbitraire Ω des constantes (25), la condition (24) sera évidemment satisfaite, et l'on a, en conséquence,

$$F = \Omega\,(\Psi_1, \Psi_2 \dots \Psi_{n-1}).$$

Par conséquent, l'équation primitive (22) sera :

$$\text{(D)} \quad F = \Omega\,(\Psi_1, \Psi_2, \dots \Psi_{n-1}) = o.$$

A la place de l'équation (D), on peut écrire aussi

$$\Psi_1 = \Omega_1\,(\Psi_2 \dots \Psi_{n-1}), \quad \text{ou} \quad \Psi_2 = \Omega_2\,(\Psi_1, \Psi_3 \dots \Psi_{n-1}), \text{ etc.}$$

DEUXIÈME PARTIE.

Application des procédés généraux à l'intégration des équations aux différences partielles du premier ordre à trois et à quatre variables.

DEUXIÈME PROBLÈME.

Étant donnée l'équation

$$u = F(x, y, z, p, q) = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

dans laquelle x *et* y *sont les variables indépendantes, trouver l'équation primitive de la forme*

$$\mathrm{F}(x, y, z) = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

On a posé

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right), \quad q = \left(\frac{dz}{dq}\right).$$

Solution. — En différentiant (27), on obtient la différentielle exacte

$$dz = pdx + qdy, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

et la condition d'intégrabilité subsistera; cherchons cette condition. On a :

$$p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy}, \quad \text{donc } \frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Mais p et q, à cause de (26), étant des fonctions de x, y, z, on a :

$$\frac{dp}{dy} = \left(\frac{dp}{dy}\right) + q\left(\frac{dp}{dz}\right), \quad \frac{dq}{dx} = \left(\frac{dq}{dx}\right) + p\left(\frac{dq}{dz}\right);$$

par suite (29) deviendra

$$\left(\frac{dp}{dy}\right) - \left(\frac{dq}{dx}\right) + q\left(\frac{dp}{dz}\right) - p\left(\frac{dq}{dz}\right) = o; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

c'est la condition cherchée.

Nous donnerons à cette formule une autre forme en éliminant q, $\frac{dq}{dx}$, $\frac{dq}{dz}$. A cet effet on a, par (26),

$$q = F_1(x, y, z, p), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

$$\frac{dq}{dx} = -\frac{\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dp}\right)\frac{dp}{dx}}{\left(\frac{dF}{dq}\right)}, \quad \frac{dq}{dz} = -\frac{\left(\frac{dF}{dz}\right) + \left(\frac{dF}{dp}\right)\frac{dp}{dz}}{\left(\frac{dF}{dq}\right)};$$

par là (30) devient :

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) + p\left(\frac{dF}{dz}\right) + \left(\frac{dF}{dp}\right)\frac{dp}{dx} + \left(\frac{dF}{dq}\right)\left(\frac{dp}{dy}\right) + \left[p\left(\frac{dF}{dp}\right) + q\left(\frac{dF}{dq}\right)\right]\left(\frac{dp}{dz}\right) = o;$$

si l'on en tire la valeur de $\left(\frac{dp}{dz}\right)$, pour la substituer dans

$$dp = \left(\frac{dp}{dx}\right) dx + \left(\frac{dp}{dy}\right) dy + \left(\frac{dp}{dz}\right) dz,$$

cette dernière formule pourra se mettre sous la forme

$$\left(\frac{dF}{dq}\right) dp + dy\left[\left(\frac{dF}{dx}\right) + p\left(\frac{dF}{dz}\right)\right] = \left(\frac{dp}{dx}\right)\left[\left(\frac{dF}{dy}\right) dx - dy\left(\frac{dF}{dp}\right)\right] + \left(\frac{dp}{dz}\right)$$
$$\left[\left(\frac{dF}{dq}\right) dz - dy\left\{p\left(\frac{dF}{dp}\right) + q\left(\frac{dF}{dy}\right)\right\}\right].$$

On satisfera à cette équation, en posant :

$$\left(\frac{dF}{dq}\right) dp + dy\left[\left(\frac{dF}{dx}\right) + p\left(\frac{dF}{dz}\right)\right] = o,\quad \left(\frac{dF}{dq}\right) dx - dy\left(\frac{dF}{dp}\right) = o,$$
$$\left(\frac{dF}{dq}\right) dz - dy\left[p\left(\frac{dF}{dp}\right) + q\left(\frac{dF}{dy}\right)\right] = o,$$

d'où :

$$\text{(A)}.\ \ldots\ \frac{dx}{\left(\frac{dF}{dp}\right)} = \frac{dy}{\left(\frac{dF}{dq}\right)} = \frac{dz}{p\left(\frac{dF}{dp}\right) + q\left(\frac{dF}{dq}\right)} = -\frac{dp}{\left(\frac{dF}{dx}\right) + p\left(\frac{dF}{dz}\right)}.$$

Soient

$$Xc_1 = o,\quad Xc_2 = o,\quad Xc_3 = o, \quad \ldots \quad (31)$$

les intégrales déduites des équations (A). On suppose que, pour $y = a$, on ait

$$x = \xi,\quad z = \pi = \varphi(\xi),\quad p = \left(\frac{dz}{dx}\right) = \pi_1 = \varphi'(\xi),\quad q = \rho,$$

cette dernière valeur se tire de la proposée (26); on éliminera les constantes contenues dans (31), ce qui fournira les trois équations

$$X_1 = o,\quad X_2 = o,\quad X_3 = o,$$

entre x, y, z, ξ, a et p. En éliminant p, on aura deux équations entre x, y, z, ξ, a; et en éliminant ξ, on aura une équation unique entre x, y, z, a, qui sera la relation primitive cherchée.

Corollaire.

Si l'équation (26) est linéaire, elle sera de la forme

$$pX_1 + qX_2 + X_3 = o, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (32)$$

et les équations (A) se simplifieront. Car on a :

$$\left(\frac{dF}{dp}\right) = X_1, \quad \left(\frac{dF}{dq}\right) = X_2, \quad pX_1 + qX_2 = - X_3,$$

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) = p\left(\frac{dX_1}{dx}\right) + q\left(\frac{dX_2}{dx}\right) + \left(\frac{dX_3}{dx}\right), \quad \left(\frac{dF}{dz}\right) = p\left(\frac{dX_1}{dz}\right) + q\left(\frac{dX_2}{dz}\right) + \left(\frac{dX_3}{dz}\right);$$

les relations (A) deviennent

$$\text{(B)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \frac{dx}{X_1} = \frac{dy}{X_2} = - \frac{dz}{X_3}.$$

On a omis le dernier membre

$$\frac{- dp}{\left(\frac{dF}{dx}\right) + p\left(\frac{dF}{dz}\right)},$$

parce qu'il contient seul les dérivées p et q; en omettant ce membre, l'élimination de ces deux grandeurs est effectuée, attendu que les quantités X_1, X_2, X_3 ne contiennent ni p ni q, et cela parce que la proposée (32) est linéaire. Soient

$$Xc_1 = o, \quad Xc_2 = o, \quad Xc_3 = o,$$

les intégrales de (B), et

$$X'_1 = o, \quad X'_2 = o, \quad X'_3 = o,$$

ces mêmes intégrales, quand on aura éliminé les trois constantes. Ces trois équations, en éliminant p et ξ, se réduiront à une seule équation entre x, y, z, a, qui sera l'équation primitive.

Remarque.

En faisant attention que la proposée (32) est linéaire, on pourra éviter l'emploi de la variable auxiliaire ξ, et par suite l'élimination finale de cette quantité. Car soit

$$F\ x,\ y,\ z) = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

l'équation primitive, il sera facile de trouver la propriété qui caractérise la fonction inconnue F. En effet, on a :

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) + p\left(\frac{dF}{dz}\right) = o, \quad \left(\frac{dF}{dy}\right) + q\left(\frac{dF}{dz}\right) = o;$$

par là on trouve, à la place de (32) :

$$\frac{\left(\frac{dF}{dx}\right)X_1 + \left(\frac{dF}{dy}\right)X_2}{X_3} = \left(\frac{dF}{dz}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

La différentielle totale de la fonction inconnue F étant

$$dF = \left(\frac{dF}{dx}\right)dx + \left(\frac{dF}{dy}\right)dy + \left(\frac{dF}{dz}\right)dz,$$

on trouve, en éliminant $\left(\frac{dF}{dz}\right)$ à l'aide de (34) :

$$X_3\,dF = \left(\frac{dF}{dx}\right)[X_3\,dx + X_1\,dz] + \left(\frac{dF}{dy}\right)[X_3\,dy + X_2\,dz].$$

Mais, à cause des équations (B), on a :

$$X_3dx + X_1dz = o, \quad X_3dy + X_2dz = o; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

on a donc

$$dF = o. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Cette propriété caractérise la nature de la fonction F, et pour la déterminer, résolvons les équations

$$Xc_1 = o, \quad Xc_2 = o,$$

fournies par les équations (B), ou les équations (35), par rapport aux constantes c_1, c_2. On trouvera des expressions de cette forme

$$c_1 = \Psi_1, \quad c_2 = \Psi_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

dans lesquelles Ψ_1, Ψ_2, désignent des fonctions déterminées de x, y et z.

Cela posé, il est clair que la fonction F sera une fonction arbitraire Ω des constantes $c_1 = \Psi_1$, $c_2 = \Psi_2$, car en posant

$$F = \Omega\ (c_1,\ c_2) = \Omega\ (\Psi'_1,\ \Psi_2),$$

la relation (36) sera satisfaite. On a donc, pour la relation primitive cherchée :

$$F = \Omega\,(\Psi_1,\, \Psi_2) = o,$$

qu'on peut aussi mettre sous l'une de ces formes :

$$(D) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi_1 = \Omega_1\,(\Psi_2), \\ \Psi_2 = \Omega_2\,(\Psi_1). \end{array} \right.$$

TROISIÈME PROBLÈME.

Étant donnée l'équation

$$u = F(x,\, y,\, v,\, z,\, p,\, q,\, r) = o. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

x, y, v *désignant les variables indépendantes*, p, q, r *les coefficients différentiels de* z, *par rapport à* x, y, v, *trouver l'équation primitive de la forme*

$$F(x,\, y,\, v,\, z) = o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

Solution. — En supposant que (39) soit l'équation primitive, sa différentielle sera

$$dz = pdx + qdy + rdv; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

comme elle est supposée exacte, ses conditions d'intégrabilité subsisteront; cherchons les conditions. On a :

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right), \quad q = \left(\frac{dz}{dy}\right), \quad r = \left(\frac{dz}{dv}\right),$$

d'où :

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}, \quad \frac{dp}{dy} = \frac{dr}{dx}, \quad \frac{dq}{dv} = \frac{dr}{dy}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

mais à l'aide des équations aux différences partielles :

$$\frac{dp}{dy} = \left(\frac{dp}{dy}\right) + q\left(\frac{dp}{dz}\right), \quad \frac{dp}{dv} = \left(\frac{dp}{dv}\right) + r\left(\frac{dp}{dz}\right),$$

$$\frac{dq}{dx} = \left(\frac{dq}{dx}\right) + p\left(\frac{dq}{dz}\right), \text{ etc.}$$

les relations (4) deviennent :

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{dp}{dy}\right) - \left(\frac{dq}{dx}\right) + q\left(\frac{dp}{dz}\right) - p\left(\frac{dq}{dz}\right) = o, \\ \left(\frac{dr}{dy}\right) - \left(\frac{dq}{dv}\right) + q\left(\frac{dr}{dz}\right) - r\left(\frac{dq}{dz}\right) = o, \\ \left(\frac{dr}{dx}\right) - \left(\frac{dp}{dv}\right) + p\left(\frac{dr}{dz}\right) - r\left(\frac{dp}{dz}\right) = o. \end{array}\right\} \ldots \quad (45)$$

ce sont les conditions cherchées. Éliminons

$$r,\ \left(\frac{dr}{dx}\right),\ \left(\frac{dr}{dy}\right),\ \left(\frac{dr}{dz}\right).$$

A cet effet, on tire de l'équation (38) :

$$r = f(x,\ y,\ z,\ v,\ p,\ q),$$

$$\left(\frac{dr}{dx}\right) = -\frac{\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dq}\right)\left(\frac{dq}{dx}\right)}{\left(\frac{dF}{dr}\right)},$$

$$\left(\frac{dr}{dy}\right) = -\frac{\left(\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{dF}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dy}\right) + \left(\frac{dF}{dq}\right)\left(\frac{dq}{dy}\right)}{\left(\frac{dF}{dr}\right)},\quad \left(\frac{dr}{dz}\right) = -\frac{\left(\frac{dF}{dz}\right) + \left(\frac{dF}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dz}\right) + \left(\frac{dF}{dq}\right)\left(\frac{dq}{dz}\right)}{\left(\frac{dF}{dr}\right)};$$

les équations (43) deviennent :

$$\left(\frac{dp}{dy}\right) + q\left(\frac{dp}{dz}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right) + p\left(\frac{dq}{dz}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{dF}{dy}\right) + q\left(\frac{dF}{dz}\right) + \left(\frac{dF}{dp}\right)\left[\left(\frac{dp}{dy}\right) + q\left(\frac{dp}{dz}\right)\right] + \left(\frac{dF}{dq}\right)\frac{dq}{dy} + \left(\frac{dF}{dr}\right)\left(\frac{dq}{dv}\right)\\
&\qquad + \left[q\left(\frac{dF}{dq}\right) + r\left(\frac{dF}{dr}\right)\right]\left(\frac{dq}{dz}\right) = o,\\
&\left(\frac{dF}{dx}\right) + p\left(\frac{dF}{dz}\right) + \left(\frac{dF}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dq}\right)\left[\left(\frac{dq}{dx}\right) + p\left(\frac{dq}{dz}\right)\right] + \left(\frac{dF}{dr}\right)\frac{dp}{dv}\\
&\qquad + \left[p\left(\frac{dF}{dp}\right) + r\left(\frac{dF}{dr}\right)\right]\left(\frac{dp}{dz}\right) = o.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (45)$$

En ayant égard à la première de ces formules, les deux autres deviennent :

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{dF}{dy}\right) + q\left(\frac{dF}{dz}\right) + \left(\frac{dF}{dp}\right)\left(\frac{dq}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dq}\right)\left(\frac{dq}{dy}\right) + \left(\frac{dF}{dr}\right)\left(\frac{dq}{dv}\right)\\
&\qquad + \left[p\left(\frac{dF}{dp}\right) + q\left(\frac{dF}{dq}\right) + r\left(\frac{dF}{dr}\right)\right]\left(\frac{dq}{dz}\right) = o,\\
&\left(\frac{dF}{dx}\right) + p\left(\frac{dF}{dz}\right) + \left(\frac{dF}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dq}\right)\left(\frac{dp}{dy}\right) + \left(\frac{dF}{dr}\right)\left(\frac{dp}{dv}\right)\\
&\qquad + \left[p\left(\frac{dF}{dp}\right) + q\left(\frac{dF}{dq}\right) + r\left(\frac{dF}{dr}\right)\right]\left(\frac{dp}{dz}\right) = o.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (46)$$

Si de ces formules on tire les valeurs de $\left(\frac{dp}{dv}\right)$, $\left(\frac{dq}{dv}\right)$ pour les substituer dans les deux premières des équations (42), on trouvera sans peine :

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{dF}{dr}\right) dp + dv\left[\left(\frac{dF}{dx}\right) + p\left(\frac{dF}{dz}\right)\right] = \left(\frac{dq}{dx}\right)\left[\left(\frac{dF}{dr}\right) dx - \left(\frac{dF}{dp}\right) dv\right] \\
&\qquad + \left(\frac{dp}{dy}\right)\left[\left(\frac{dF}{dr}\right) dy - \left(\frac{dF}{dq}\right) dv\right] + \left(\frac{dp}{dz}\right) \\
&\qquad\qquad \left[\left(\frac{dF}{dr}\right) dz - dv\left\{p\left(\frac{dF}{dp}\right) + q\left(\frac{dF}{dq}\right) + r\left(\frac{dF}{dr}\right)\right\}\right] \\
&\left(\frac{dF}{dr}\right) dq + dv\left[\left(\frac{dF}{dy}\right) + q\left(\frac{dF}{dz}\right)\right] = \left(\frac{dq}{dx}\right)\left[\left(\frac{dF}{dr}\right) dx - \left(\frac{dF}{dp}\right) dv\right] \\
&\qquad + \left(\frac{dq}{dy}\right)\left[\left(\frac{dF}{dr}\right) dy - \left(\frac{dF}{dq}\right) dv\right] + \left(\frac{dq}{dz}\right) \\
&\qquad\qquad \left[\left(\frac{dF}{dr}\right) dz + dv\left\{p\left(\frac{dF}{dp}\right) + q\left(\frac{dF}{dq}\right) + r\left(\frac{dF}{dr}\right)\right\}\right]
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (47)$$

On satisfait à ces équations de la manière la plus générale en posant :

$$\left(\frac{dF}{dr}\right) dp + dv\left[\left(\frac{dF}{dx}\right) + p\left(\frac{dF}{dz}\right)\right] = o,\quad \left(\frac{dF}{dr}\right) dq + dv\left[\left(\frac{dF}{dq}\right) + q\left(\frac{dF}{dz}\right)\right] = o,$$

$$\left(\frac{dF}{dr}\right) dx - \left(\frac{dF}{dp}\right) dv = o,\quad \left(\frac{dF}{dr}\right) dy - \left(\frac{dF}{dq}\right) dv = o,\quad \left(\frac{dF}{dr}\right) dz - dv\left[p\left(\frac{dF}{dp}\right) + q\left(\frac{dF}{dq}\right) + r\left(\frac{dF}{dr}\right)\right] = o,$$

de là on déduit la relation continue :

$$\text{(A)}\ \ldots\ \left\{\begin{aligned}
&\frac{dv}{\left(\frac{dF}{dr}\right)} = \frac{dx}{\left(\frac{dF}{dp}\right)} = \frac{dy}{\left(\frac{dF}{dq}\right)} = \frac{dz}{p\left(\frac{dF}{dp}\right) + q\left(\frac{dF}{dq}\right) + r\left(\frac{dF}{dr}\right)} = \frac{-dp}{\left(\frac{dF}{dx}\right) + p\left(\frac{dF}{dz}\right)} \\
&\qquad = \frac{-dq}{\left(\frac{dF}{dy}\right) + q\left(\frac{dF}{dz}\right)}.
\end{aligned}\right.$$

En intégrant celle-ci, et en éliminant les constantes, on trouve les cinq relations

$$X_1 = o,\quad X_2 = o,\quad X_3 = o,\quad X_4 = o,\quad X_5 = o,$$

entre les quantités

$$x,\ y,\ v,\ z,\ \ p,\ q,\ \ \xi_1,\ \xi_2,\ \ a.$$

Si l'on élimine p et q, on trouvera trois relations de la forme

$$\Sigma_1 = o,\quad \Sigma_2 = o,\quad \Sigma_3 = o.$$

entre

$$x,\ y,\ v,\ z,\ \ \xi_1,\ \xi_2,\ \ a;$$

et en éliminant ξ_1, ξ_2, on aura la relation cherchée

$$F(x, y, v, z) = o.$$

Corollaire.

Si la proposée est linéaire, et par conséquent de la forme

$$pX_1 + qX_2 + rX_3 + X_4 = o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

X_1, X_2, X_3, X_4 ne contenant ni p, ni q, ni r, la relation (A) deviendra :

$$\frac{dx}{X_1} = \frac{dy}{X_2} = \frac{dv}{X_3} = -\frac{dz}{X_4} = \frac{-dp}{\left(\frac{dF}{dx}\right) + p\left(\frac{dF}{dz}\right)} = \frac{-dq}{\left(\frac{dF}{dy}\right) + q\left(\frac{dF}{dz}\right)}.$$

Or, on éliminera p et q en omettant la dernière égalité, ce qui réduit les équations (A) aux suivantes

$$\text{(B)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{dx}{X_1} = \frac{dy}{X_2} = \frac{dv}{X_3} = -\frac{dz}{X_4}.$$

On achèvera l'opération comme dans le problème précédent.

Remarque.

Soient

$$c_1 = \Psi_1, \quad c_2 = \Psi_2, \quad c_3 = \Psi_3,$$

les intégrales déduites de (B), et Ω une fonction arbitraire, Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 étant des fonctions déterminées de x, y, v, z, on prouvera, comme dans le problème précédent, que

$$F = \Omega(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) = o,$$

ou

$$\Psi_1 = \Omega_1, \quad (\Psi_2 \ \Psi_3),$$

ou

$$\Psi_2 = \Omega_2, \quad (\Psi_1 \ \Psi_3),$$

ou

$$\Psi_3 = \Omega_3, \quad (\Psi_1 \ \Psi_2),$$

exprimeront l'équation primitive cherchée.

FIN.