Mémoire sur les fonctions arbitraires exprimées par des intégrales doubles, et de séries de quantités périodiques.

(Par Mr. *A. Meyer*, prof. de math. à Liège.)

(„Extrait du journal de math. de Mr. *Crelle*" tom. 43. cah. 1.)

Mémoire sur les fonctions arbitraires exprimées par des intégrales doubles, et de séries de quantités périodiques.

(Par Mr. *A. Meyer*, prof. de math. à Liège.)

(„Extrait du journal de math. de Mr. *Crelle*" tom. 43. cah. 1.)

L'objet de ce mémoire consiste à faire dépendre d'une proposition unique la théorie des fonctions arbitraires de *Fourier*, rapportées à une seule variable. Je partagerai ce travail en deux parties. Dans la première je traiterai des fonctions arbitraires exprimées par des intégrales doubles; dans la seconde j'exposerai le développement des fonctions arbitraires en série, suivant les formules de *Lagrange* et de *Fourier*.

1ière PARTIE.

Des fonctions arbitraires exprimées par des intégrales doubles.

Théorême fondamental.

Si $f(t)$ est une fonction finie et continue pour toutes les valeurs de t, depuis $t = a$, jusqu'à $t = b$, en supposant $b > a > 0$, on aura:

$$\int_a^b f(t)\,e^{-kt\sqrt{-1}} = 0\,, \quad \text{pour } k = \infty.$$

Démons. on a, en effet

$$(a)\quad \int_a^b f(t)e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt = e^{-ka\sqrt{-1}}\,da\,[f(a) + f(a+da)\,e^{-kda\sqrt{-1}} + \dots$$
$$+ f(a + (n-1)\,da)\,e^{-k(n-1)da\sqrt{-1}}]\,.$$

Comme par hypothèse aucun des facteurs $f(a)$, $f(a+da)$, etc. n'est infini, ou discontinu, on a, à cause de $e^{-ka\sqrt{(-1)}}$,

$$(1.)\quad \int_a^b f(t)e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt = 0\,, \qquad \text{pour } k = \infty$$

Cas particuliers.

1. Si $f(t)$ devient discontinu entre a et b, pour $t = \alpha$, alors, en supposant $b > \alpha > a > 0$, on écrira:

$$\int_a^b f(t)\,e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt = \int_a^{\alpha - d\alpha} f(t)\,e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt + \int_{\alpha + d\alpha}^b f(t)\,e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt\,;$$

et comme $f(t)$ reste fini et continu, entre a et $\alpha - d\alpha$, entre $\alpha + d\alpha$ et b, on aura

$$\int_a^{\alpha - d\alpha} f(t)e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt = 0\,, \quad \int_{\alpha + d\alpha}^b f(t)e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt = 0 \quad \text{pour } k = \infty\,,$$

et par suite $\int_a^b f(t)e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt = 0$, pour $k = \infty$.

2. Si $f(t)$ devient infini pour $t = a$, on pourra écrire la formule (a) de cette manière:

$$\int_a^b f(t)\,e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt = e^{-ka\sqrt{-1}}[da \times f(a)] + e^{-ka\sqrt{-1}}[da \times f(a + da)e^{-kda\sqrt{-1}} + \text{etc.}];$$

d'où l'on voit que si, pour $da = 0$, on a

$$(2.) \qquad da \times f(a + da) = 0,$$

on aura encore $\int_a^b f(t)e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt = 0$, pour $k = \infty$.

3. Si $f(t)$ devenoit infini pour $t = b$, comme on a

$$a + n\,da = b\,,$$

et par suite $f(a + (n-1)da) = f(b - da)$, la formule ($a$) pourra s'écrire:

$$\int_a^b f(t)e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt = e^{-ka\sqrt{-1}}da[f(a) + f(a + da)e^{-kda\sqrt{-1}} + \ldots..] + e^{-ka\sqrt{-1}}da[(fb - da)],$$

donc si, en remplaçant da par zéro, on a

$$(3.) \qquad da \times f(b - da) = 0\,,$$

on aura encore: $\int_a^b f(t)e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt = 0$, pour $k = \infty$.

4. Si $f(t)$ devient infini pour $t = \alpha$, en supposant $b > \alpha > a > 0$, on pourra écrire

$$\int_a^b f(t)\,e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt = \int_a^{\alpha} f(t)e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt + \int_{\alpha}^b f(t)\,e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt\,;$$

or on a, à cause de la formule (2),

$$\int_a^b f(t)\,e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt = 0\,, \quad \text{pour } k = \infty\,,$$

si l'on a: $\qquad da \times f(\alpha + da) = 0\,;$

et à cause de la formule (3), on aura aussi

$$\int_a^a f(t)\, e^{-kt\sqrt{-1}} dt = 0 \quad \text{pour } k = \infty ,$$

pourvu que l'on ait:

$$da \times f(a - da) = 0 .$$

Il suit de là, que l'on aura $\int_a^b f(t)\, e^{-kt\sqrt{-1}} dt = 0$, pourvu qu'en remplaçant da par zéro l'on ait en même temps:

$$(4.) \quad \begin{cases} da\, f(a + da) = 0 \\ da\, f(a - da) = 0 \end{cases}$$

5. Si l'on suppose $a = 0$, la form. (a) devient:

$$\int_0^b f(t) e^{-kt\sqrt{-1}} dt = da f(0) + e^{-kda\sqrt{-1}} [da f(da) + da\, f(2\,da) e^{-kda\sqrt{-1}} + \ldots\ldots] .$$
$$= da \times f(0) + (e^{-k\sqrt{-1}})^{da} [da \times f(da) + da f(2\,da)\, e^{-kda\sqrt{-1}} + \text{etc}] ;$$

donc 1° si $f(da)$, lorsqu'on remplace da par zéro, n'est pas infini, on aura, pour $k = \infty$,

$$(5.) \quad \int_0^b f(t) e^{-kt\sqrt{-1}}\, dt = da \times f(0) = 0 .$$

2°. Si $f(da)$, lorsqu'on remplace da par zéro, devient infini, on aura encore

$$\int_0^b f(t) e^{-kt\sqrt{-1}}\, dt = 0 \quad \text{pour } k = \infty ,$$

pourvu que l'on ait

$$(6.) \qquad da \times f(da) = 0 ,$$

en remplaçant da par zéro.

Problême fondamental.

c étant une quantité réelle et positive, chercher la valeur de l'intégrale

$$\int_0^c \frac{F(t)}{t}\, e^{-kt\sqrt{-1}}\, dt , \quad \text{pour } k = \infty .$$

Solut. Si dans la formule

$$\int_0^c f(t) e^{-kt\sqrt{-1}} dt = 0 , \qquad \text{pour } k = \infty ,$$

on fait

$$f(t) = \frac{F(t) - F(0)}{t} ,$$

on aura:

$$f(0) = \frac{0}{0} \qquad \text{pour } t = 0 ,$$

ou $f(da) = \frac{0}{0}$, en remplaçant da par zéro. Donc 1°, si la véritable valeur de cette expression indéterminée est zéro, ou une quantité finie, on aura, par la formule (5),

$$\int_0^c f(t)\, e^{-kt\sqrt{-1}} dt = \int_0^c \frac{F(t)-F(0)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}} dt = 0\,, \quad k = \infty \quad .$$

2°. Si la vraie valeur de $\frac{0}{0}$ est au contraire l'infinie, on aura par la formule (6),

$$\int_0^c f(t)\; e^{-kt\sqrt{-1}}\, dt = \int_0^c \frac{F(t)-F(0)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}}\, dt = 0 \quad \text{pour } k = \infty\,,$$

pourvu que l'on ait $da \times f(da) = 0$, pour $da = 0$.

Or on a ici:

$$da \times f(da) = da \;.\; \frac{F(da)-F(0)}{da} = F(da) - F(0) \quad ;$$

or en remplaçant da par zéro, on a $F(da) - F(0) = F(0) - F(0) = 0$, donc la condition (6) est remplie, et par suite on a toujours:

$$(7.) \quad \int_0^c \frac{F(t)-F(0)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}} dt = 0 \quad \text{pour } k = \infty\,.$$

De la formule (7) on tire:

$$(8.) \quad \int_0^c \frac{F(t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}} dt \;=\; F(0) \int_0^c \frac{e^{-kt\sqrt{-1}}\, dt}{t} \quad .$$

Si l'on pose $kt = z$ dans le second membre de (8), il vient

$$(9.) \quad \int_0^c \frac{F(t)}{t} e^{-kt\sqrt{(-1)}}\, dt = F(0) \int_0^{kc} \frac{e^{-z\sqrt{-1}}\, dz}{z} \;=\; F(0) \int_0^\infty \frac{e^{-z\sqrt{-1}}\, dz}{z}\,,$$

à cause de $k = \infty$.

De (9) on tire

$$\int_0^c \frac{F(t)}{t} \cos kt\; dt = F(0) \int_0^\infty \frac{\cos z\, dz}{z}\,, \quad \int_0^c \frac{F(t)}{t} \sin kt\; dt = F(0) \int_0^\infty \frac{\sin z\, dz}{z}\,.$$

Donc, en multipliant la deuxième de ces égalités par $\sqrt{-1}$, on aura, en ajoutant:

$$\int_0^c \frac{F(t)}{t} \cos kt\, dt + \int_0^\infty \frac{F(t)}{t} \sqrt{-1} \sin kt\, dt = F(0) \left[\int_0^\infty \frac{\cos z\, dz}{z} + \int_0^\infty \sqrt{-1}\, \frac{\sin z\, dz}{z} \right]\,,$$

d'où:

$$(10.) \quad \int_0^c \frac{F(t)}{t} e^{k\sqrt{-1}}\, dt \;=\; F(0) \int_0^\infty \frac{e^{z\sqrt{-1}}\, dz}{z}$$

1^re^ *Problème. a et b étant des quantités réelles, chercher la valeur de l'intégrale*

$$\int_a^b \frac{\varphi(x+t)}{t}\, e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt\,, \qquad \text{pour} \quad k = \infty.$$

1°. *Soit* $b > a > 0$;

dans cette supposition on a:

$$\int_a^b \frac{\varphi(x+t)}{t}\, e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt = \int_0^b \frac{\varphi(x+t)}{t}\, e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt - \int_0^\infty \frac{\varphi(x+t)}{t}\, e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt\,.$$

donc, pour $k = \infty$, la formule (9) donnera

$$(11.) \quad \int_a^b \frac{\varphi(x+t)}{t}\, e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt = \varphi(x)\int_0^\infty \frac{e^{-z\sqrt{-1}}\,dz}{z} - \varphi(x)\int_0^\infty \frac{e^{-z\sqrt{-1}}\,dz}{z} = 0\,.$$

2°. *Soit* $a > 0$, $b > 0$

on a alors:

$$\int_{-a}^{-b} \frac{\varphi(x+t)}{t}\, e^{-kt\sqrt{-1}}dt = \int_a^b \frac{\varphi(x-t)}{t}\, e^{kt\sqrt{-1}}dt = \int_0^b \frac{\varphi(x-t)}{t}\, e^{kt\sqrt{-1}}\,dt$$
$$-\int_0^a \frac{\varphi(x-t)}{t}\, e^{kt\sqrt{-1}}\,dt\,.$$

donc, pour $k = \infty$, on aura, par la formule (10.),

$$(12.) \quad \int_{-a}^{-b} \frac{\varphi(x+t)}{t}\, e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt = \varphi(x)\int_0^\infty \frac{e^{z\sqrt{-1}}\,dz}{z} - \varphi(x)\int_0^\infty \frac{e^{z\sqrt{-1}}dz}{dz} = 0.$$

3°. $a < 0$, $b > 0$.

Dans ce cas on a:

$$\begin{aligned}\int_{-a}^b \frac{\varphi(x+t)}{t}\, e^{-kt\sqrt{-1}}dt &= \int_0^b \frac{\varphi(x+t)}{t}\, e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt + \int_{-a}^0 \frac{\varphi(x+t)}{t}\, e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt \\ &= \int_0^b \frac{\varphi(x+t)}{t}\, e^{-kt\sqrt{-1}}dt - \int_0^{-a} \frac{\varphi(x+t)}{t}\, e^{-kt\sqrt{-1}}dt \\ &= \int_0^b \frac{\varphi(x+t)}{t}\, e^{-kt\sqrt{-1}}dt - \int_0^a \frac{\varphi(x-t)}{t}\, e^{kt\sqrt{-1}}\,dt\,.\end{aligned}$$

donc pour $k = \infty$, on aura, à cause des formules (9 et 10):

$$\begin{aligned}\int_{-a}^b \frac{\varphi(x+t)}{t}\, e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt &= \varphi(x)\left[\int_0^\infty \frac{e^{-z\sqrt{-1}}\,dz}{z} - \int_0^\infty \frac{e^{z\sqrt{-1}}\,dz}{z}\right] \\ &= \varphi(x)\left[\int_0^\infty \frac{\cos z\,dz}{z} - \sqrt{(-1)}\int_0^\infty \frac{\sin z\,dz}{z} - \int_0^\infty \frac{\cos z\,dz}{z}\right. \\ &\qquad \left. - \sqrt{(-1)}\int_0^\infty \frac{\sin z\,dz}{z}\right]\end{aligned}$$

$$= \varphi(x) \times -\sqrt{-1}.2\int_0^\infty \frac{\sin z\,dz}{z}$$

$$(13.) \qquad = -\sqrt{-1} \times \pi\varphi(x).$$

4°. $\quad a > 0 \;,\; b < 0.$

On a alors:

$$\int_a^{-b} \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt = \int_{-a}^{b} \frac{\varphi(x-t)}{t} e^{kt\sqrt{-1}}\,dt$$

$$= \int_0^b \frac{\varphi(x-t)}{t} e^{kt\sqrt{-1}}\,dt - \int_0^{-a} \frac{\varphi(x-t)}{t} e^{kt\sqrt{-1}}\,dt$$

$$= \int_0^b \frac{\varphi(x-t)}{t} e^{kt\sqrt{-1}}\,dt - \int_0^{a} \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt.$$

donc, pour $k = \infty$, et à cause des formules (9 et 10), on a:

$$\int_a^{-b} \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt = \varphi(x)\Big[\int_0^\infty \frac{\cos z\,dz}{z} + \sqrt{-1}\int_0^\infty \frac{\sin z\,dz}{z} - \int_0^\infty \frac{\cos z\,dz}{z}$$

$$+ \sqrt{-1}\int_0^\infty \frac{\sin z\,dz}{z}\Big]$$

$$(14.) \qquad = \sqrt{-1} \times \pi\varphi(x).$$

2^{me} *Problème. Chercher la valeur de l'intégrale*

$$\int_0^\infty du \int_a^b \varphi(x+t) e^{-ut\sqrt{-1}}\,dt.$$

Solut. En différentiant $e^{-kt\sqrt{-1}}$ par rapport à k, on a

$$d(e^{-\,t\sqrt{-1}}) = -\sqrt{-1}\,t\,e^{-kt\sqrt{-1}}dk,$$

d'où:

$$\frac{e^{-kt\sqrt{-1}}}{t} = -\sqrt{-1}\int e^{-kt\sqrt{-1}}dk.$$

Pour $k = 0$, le premièr membre se réduit à $\frac{1}{t}$; on a donc

$$(15.) \qquad \frac{e^{-kt\sqrt{-1}} - 1}{t} = -\sqrt{-1}\int_0^k e^{-kt\sqrt{-1}}\,dk = -\sqrt{-1}\int_0^k e^{-ut\sqrt{-1}}\,du.$$

Si on multiplie les deux membres par $\varphi(x+t)\,dt$, et qu'on intégre entre les limites a et b, on a:

$$\int_a^b \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt - \int_a^b \frac{\varphi(x+t)\,dt}{t} = -\sqrt{-1}\int_a^b \varphi(x+t)\,dt \int_0^k e^{-ut\sqrt{-1}}\,du$$

$$= -\sqrt{-1}\int_0^k du \int_a^b \varphi(x+t) e^{-ut\sqrt{-1}}\,dt.$$

Pour $k = \infty$, il vient:

$$(16.)\quad \left[\int_a^b \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}}\, dt - \int_a^b \frac{\varphi(x-t)dt}{t}\right]_{k=\infty}$$
$$= -\sqrt{-1}\int_0^\infty du \int_a^b \varphi(x+t)\, e^{-ut\sqrt{-1}}\, dt.$$

Or si a et b sont positif, on aura par (11),

$$\int_a^b \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}}\, dt = 0 \quad , \quad \text{pour } k = \infty \quad ;$$

et si $a < 0 \quad , \quad b > 0,$ on aura par la formule (13):

$$\int_a^b \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}}\, dt = -\sqrt{-1} \times \pi\varphi(x);$$

on a donc, à la place de (16), les deux formules

$$(17.)\quad \int_0^\infty du \int_a^b \varphi(x+t)\, e^{-ut\sqrt{-1}}\, dt = -\sqrt{-1}\int_a^b \frac{\varphi(x+t)}{t} dt \quad \text{et}$$

$$(18.)\quad \int_0^\infty du \int_0^b \varphi(x+t)\, e^{-ut\sqrt{-1}}\, dt = \pi\varphi(x) - \sqrt{-1}\int_{-a}^b \frac{\varphi(x+t)}{t} dt.$$

3e *Problème. Chercher la valeur des intégrales*

$$\int_0^x du \int_a^\beta \varphi(t)\, e^{u(x-t)\sqrt{-1}}\, dt \quad , \quad \int_0^\infty du \int_a^\beta \varphi(t)\, e^{u(x+t)\sqrt{-1}}\, dt.$$

On suppose $\beta > \alpha > 0.$

Solut. 1°. Si, après avoir fait dans (18) $t = t' - x$, on supprime l'accent de t, on trouve:

$$(19.)\quad \pi\varphi(x) + \sqrt{-1}\int_{x-a}^{b+x} \frac{\varphi(t)dt}{x-t} = \int_0^\infty du \int_{x-a}^{b+x} \varphi(t) e^{+u(x-t)\sqrt{-1}}\, dt \quad , \quad \text{où l'on a:}$$

$b + x > x > x - a$. Posons $\beta = b + x \quad , \quad \alpha = x - a \quad ,$ on a:

$$(A).\quad \pi\varphi(x) + \sqrt{-1}\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(t)dt}{x-t} = \int_0^\infty du \int_\alpha^\beta \varphi(t)\, e^{u(x-t)\sqrt{-1}}\, dt \quad , \quad \beta > x > \alpha > 0.$$

2°. Si, après avoir fait dans (17) $t = t' - x$, on supprime l'accent de t, on trouve:

$$(20.)\quad \sqrt{-1}\int_{a+x}^{b+x} \frac{\varphi(t)dt}{x-t} = \int_0^\infty du \int_{a+x}^{b+x} \varphi(t)\, e^{u(x-t)\sqrt{-1}}\, dt \quad ; \quad x < a+x < b+x,$$

et si nous posons ici $a+x=\alpha$, $b+x=\beta$, on pourra écrire

$$(21.)\qquad \sqrt{-1}\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(t)dt}{x-t}=\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\,e^{u(x-t)\sqrt{-1}}dt\ ,\ x<\alpha<\beta\,.$$

Comme on a évidemment $-x<\alpha<\beta$, on peut changer dans **(21)**, x en $-x$, ce qui donne:

$$-\sqrt{-1}\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(t)dt}{x+t}=\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\,e^{-u(x+t)\sqrt{-1}}dt\quad,\qquad -x<\alpha<\beta\,.$$

De celle-ci on tire:

$$-\sqrt{-1}\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(t)dt}{x+t}=\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\cos u(x+t)\,dt$$

$$-\sqrt{-1}\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\sin u\,(x+t)\,dt\ ,$$

ou:

$$0=\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\cos u\,(x+t)\,dt\ ,$$

$$\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(t)dt}{x+t}=\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\sin u\,(x+t)\,dt\ ;$$

donc, en multipliant la seconde par $\sqrt{-1}$, on a, en ajoutant:

$$(B.)\qquad \sqrt{-1}\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(t)dt}{x+t}=\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\,e^{u(x+t)\sqrt{-1}}\,dt\ ,\ -x<\alpha<b\ ,$$

la condition $-x<\alpha<\beta$ étant toujours remplie quand x, α, β sont positifs. Il s'ensuit que les formules (A et B) subsistent simultanément, si x, α, β sont positifs et que l'on a $\beta>x>\alpha$.

Cas particuliers des formules (A et B).

1. Les formules (A et B) subsisteront encore pour $\alpha=0$ et $\beta=\infty$, car dans ce cas les conditions précédentes sont remplies.

2. Soit $x=a=\begin{Bmatrix}x-a\\x+a\end{Bmatrix}$, d'où $a=0$. Dans ce cas la formule **(16)** devient:

$$\left[\int_0^b \frac{\varphi(x+t)}{t}e^{-kt\sqrt{-1}}dt-\int_0^b\frac{\varphi(x+t)}{t}dt\right]_{=\infty}=-\sqrt{-1}\int_0^\infty du\int \varphi(x+t)e^{-kt\sqrt{-1}}dt,$$

d'où, à cause de **(9)**,

$$\varphi(x)\int_0^\infty \frac{e^{-z\sqrt{-1}}dz}{z}-\int_0^b\frac{\varphi(x+t)dt}{t}=-\sqrt{-1}\int_0^\infty du\int^b \varphi(x+t)\,e^{-ut\sqrt{-1}}dt\ ,$$

ou,

$$\Pi\times\tfrac{1}{2}\varphi(x)+\sqrt{-1}\left[\varphi(x)\int_0^\infty\frac{\cos z\,dz}{z}-\int_0^b\frac{\varphi(x+t)}{t}dt\right]=\int_0^\infty du\int_0^b\varphi(x+t)e^{-ut\sqrt{-1}}dt.$$

Pour $t = t' - x$, on a:

$$\Pi \times \tfrac{1}{2}\varphi(x) + \sqrt{-1}\left[\varphi(x)\int_0^\infty \frac{\cos z\,dz}{z} + \int_x^{b+x} \frac{\varphi(t)\,dt}{x-t}\right] = \int_0^\infty du \int_x^{b+x} \varphi(t)\, e^{u(x-t)\sqrt{-1}}\, dt\,.$$

Mais comme on a par hypothèse $x = \alpha$, si de plus on fait $\beta = b + \alpha$, il vient:

$$(22.)\qquad \Pi \times \tfrac{1}{2}\varphi(\alpha) + \sqrt{-1}\left[\varphi(\alpha)\int_0^\infty \frac{\cos z\,dz}{z} + \int_0^\beta \frac{\varphi(t)\,dt}{\alpha - t}\right]$$
$$= \int_0^\infty du \int_\alpha^\beta \varphi(t)\, e^{u(\alpha-t)\sqrt{-1}}\, dt\,.$$

3. Soit $x = \beta = x + b$, donc $b = 0$. Dans ce cas la formule (16) devient:

$$\left[\int_a^0 \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}}\, dt - \int_a^0 \frac{\varphi(x+t)dt}{t}\right]_{k=\infty} = -\sqrt{-1}\int_0^\infty du \int_a^0 \varphi(x+t) e^{-ut\sqrt{-1}}\, dt\,,$$

ou:

$$-\varphi(x)\int_0^\infty \frac{e^{-z\sqrt{-1}}\,dz}{z} + \int_0^a \frac{\varphi(x+t)\,dt}{t} = \sqrt{-1}\int_0^\infty du \int_a^0 \varphi(x+t) e^{-ut\sqrt{-1}}\, dt\,,$$

ou,

$$\Pi \times \tfrac{1}{2}\varphi(x) + \sqrt{-1}\left[\varphi(x)\int_0^\infty \frac{\cos z\,dz}{z} - \int_0^a \frac{\varphi(x+t)}{t}\,dt\right] = \int_0^\infty du \int_0^a \varphi(x+t) e^{-ut\sqrt{-1}}\, dt\,,$$

Pour $t = t' - x$, cette dernière formule devient:

$$\Pi \times \tfrac{1}{2}\varphi(x) + \sqrt{-1}\left[\varphi(x)\int_0^\infty \frac{\cos z\,dz}{z} + \int_x^{a+x} \frac{\varphi(t)\,dt}{x-t}\right] = \int_0^\infty du \int_x^{a+x} \varphi(t) e^{u(x-t)\sqrt{-1}}\, dt\,.$$

Comme on a, par hypothèse, $x = \beta$, si on fait de plus $a + \beta = \gamma$, il vient:

$$(23.)\qquad \Pi \times \tfrac{1}{2}\varphi(\beta) + \sqrt{-1}\left[\varphi(\beta)\int_0^\infty \frac{\cos z\,dz}{z} + \int_\beta^\gamma \frac{\varphi(t)\,dt}{\beta - t}\right]$$
$$= \int_0^\infty du \int_\beta^\gamma \varphi(t)\, e^{u(\beta-t)\sqrt{-1}}\, dt\,.$$

4. Supposons que la fonction $\varphi(x)$ soit discontinue au point $x = c$. Dans ce cas l'équation (A) donne

$$\Pi\varphi(c - dc) + \sqrt{-1}\int_a^\beta \frac{\varphi(t)dt}{c - dc - t} = \int_0^\infty du \int_a^\beta \varphi(t)\, e^{u(c-t)\sqrt{-1}}\, dt\,.\, e^{-udc\sqrt{-1}}\,,$$

$$\Pi\varphi(c + dc) + \sqrt{-1}\int_a^\beta \frac{\varphi(t)dt}{c + dc - t} = \int_0^\infty du \int_a^\beta \varphi(t)\, e^{u(c-t)\sqrt{-1}} dt\,.\, e^{udc\sqrt{-1}}\,;$$

donc, en remplaçant dc par zéro, on aura en ajoutant:

$$(23\text{ bis})\quad \Pi\frac{\varphi(c-0)+\varphi(c+0)}{2}+\sqrt{-1}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\varphi(t)dt}{c-t}=\int_0^{\infty}du\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(t)e^{(uc-t)\sqrt{-1}}dt\ .$$

Dans ce cas $\frac{1}{2}(\varphi(c-0)+\varphi(c+0))$, est la moyenne arithmétique des deux valeurs de la fonction $\varphi(x)$, correspondantes à l'abscisse $x=c$.

4. *Problème. Chercher la valeur des intégrales*

$$\int_0^{\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)e^{u(x-t)\sqrt{-1}}dt\quad,\quad\int_{-\infty}^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)e^{u(x-t)\sqrt{-1}}dt\ .$$

Solut. Si dans la formule (19) on fait $a=b=\infty$, on a:

$$(24.)\quad \Pi\varphi(x)+\sqrt{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)dt}{x-t}=\int_0^{\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)e^{u(x-t)\sqrt{-1}}dt\ ,\ \infty>x>-\infty\ .$$

La formule (24) se partage en deux:

$$(25.)\quad \Pi\varphi(x)=\int_0^{\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\cos u(x-t)\,dt\ ,$$

$$\infty>x>-\infty$$

$$(26.)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)dt}{x-t}=\int_0^{\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\sin u(x-t)\,dt\ .$$

Comme on a:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cos u(x-t)\,du=2\int_0^{\infty}\cos u(x-t)\,du\ ,\ \int_{-\infty}^{+\infty}\sin u(x-t)\,du=0\ ,$$

les équations (25) et (26) deviennent:

$$(27.)\quad 2\Pi\varphi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,dt\,.\,2\int_0^{\infty}\cos u(x-t)\,du=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}\cos u(x-t)du$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\cos u(x-t)\,dt\ ;$$

$$(28.)\quad 0=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)dt\left[\int_0^{\infty}\sin u(x-t)du-\int_0^{\infty}\sin u(x-t)\,du\right]$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,dt\left[\int_0^{\infty}\sin u(x-t)du+\int_{-\infty}^{0}\sin u(x-t)\,du\right]$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}\sin u(x-t)\,du=\int_{-\infty}^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\sin u(x-t)\,dt\ .$$

Si on multiplie celle-ci par $\sqrt{-1}$, et qu'on l'ajoute à (27), on trouve

$$(29.)\quad 2\Pi\varphi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)e^{u(x-t)\sqrt{-1}}dt\quad,\quad\infty>x>-\infty\ .$$

5e *Problème. Chercher les valeurs des intégrales*

$$\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\cos ux\cos ut\,dt\quad,\quad \int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\sin ux\sin ut\,dt\,.\quad \beta>\alpha>0.$$

Solut. Les formules (A et B) donnent:

$$(C.)\left\{\begin{aligned}\pi\varphi(x)+\sqrt{-1}\int_\alpha^\beta\frac{\varphi(t)dt}{x-t}&=\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta\varphi(t)\cos u(x-t)dt+\sqrt{-1}\int_\alpha^\infty du\int_\alpha^\beta\varphi(t)\sin u(x-t)dt,\\ \sqrt{-1}\int_\alpha^\beta\frac{\varphi(t)dt}{x+t}&=\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta\varphi(t)\cos u(x+t)dt+\sqrt{-1}\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta\varphi(t)\sin u(x+t)dt,\end{aligned}\right.$$

$$\beta>x>\alpha>0\,.$$

La comparaison des termes réels conduit aux égalités:

$$\pi\varphi(x)=\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta\varphi(t)\cos ux\cos ut\,dt+\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta\varphi(t)\sin ux\sin ut\,dt\,,$$

$$0=\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta\varphi(t)\cos ux\cos ut\,dt-\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta\varphi(t)\sin ux\sin ut\,dt\;;$$

et on tire de celle-ci par addition et soustraction:

$$(30).\left\{\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\pi\varphi(x)&=\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta\varphi(t)\cos ux\cos ut\,dt\quad,\quad\beta>x>\alpha>0\,,\\ \tfrac{1}{2}\pi\varphi(x)&=\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta\varphi(t)\sin ux\sin ut\,dt\quad,\quad\beta>x>\alpha>0\,.\end{aligned}\right.$$

Cas particuliers.

1. Comme les formules (A et B) subsistent pour $\alpha=0$, $\beta=\infty$, il en sera de même des formules (30).

2. La première des formules (30) subsiste encore pour $x=0$; il n'en est pas de même pour la seconde.

   La première subsistera pour des valeurs négatives de x si l'on a accidentellement $\varphi(-x)=\varphi(x)$, et la seconde si l'on a $\varphi(-x)=-\varphi(x)$.

3. Pour $x=\alpha$, et $x=\beta$, l'on voit par les formules (22 et 23) qu'il suffira de changer dans (30) $\varphi(x)$ respectivement en $\frac{1}{2}\varphi(\alpha)$ et $\frac{1}{2}\varphi(\beta)$.

4. La formule (23 bis) montre aussi que les formules (30) subsistent encore pour le cas où $\varphi(x)$ seroit discontinu au point $x=c$, pourvu que pour ce point on remplaçe $\varphi(x)$ par la moyenne arithmétique $\frac{1}{2}(\varphi(c-0)+\varphi(c+0))$.

6e *Problême. Chercher les valeurs des intégrales*

$$\int_0^\infty du\int_0^\infty \varphi(t)\cos ux\cos ut\,dt\;,\;\int_0^\infty du\int_0^\infty \varphi(t)\sin ux\sin ut\,dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} du\int_0^\infty \varphi(t)\cos xu\cos ut\,dt\;,\;\int_{-\infty}^{+\infty} du\int_0^\infty \varphi(t)\sin xu\sin ut\,dt$$

Solut. Si dans les formules (30) on fait $\alpha = 0$, $\beta = \infty$, on a:

$$(31.)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\pi\varphi(x) = \int_0^\infty du\int_0^\infty \varphi(t)\cos ux\cos ut\,dt \quad , \quad \infty > x \geqq 0 \\ \frac{1}{2}\pi\varphi(x) = \int_0^\infty du\int_0^\infty \varphi(t)\sin ux\sin ut\,dt \quad , \quad \infty > x > 0\,. \end{cases}$$

De plus, à cause de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos ux\cos ut\,du = 2\int_0^\infty \cos ux\cos ut\,du\;,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin ux\sin ut\,du = 2\int_{-\infty}^\infty \sin ux\sin ut\,du\;,$$

les formules précédentes donneront:

$$(32.)\quad \begin{cases} \pi\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos xu\,du\int_0^\infty \varphi(t)\cos ut\,dt \quad , \quad x \geqq 0\,, \\ \pi\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin xu\,du\int_0^\infty \varphi(t)\sin ut\,dt \quad , \quad x > 0\,. \end{cases}$$

Ce sont là les formules de Fourier.

7e *Problême. Trouver la valeur des intégrales*

$$\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\sin ux\cos ut\,dt \quad \text{et} \quad \int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\cos ux\sin ut\,dt.$$

Solut. En comparant les termes affectés du facteur $\sqrt{-1}$, les formules (c) du cinquième problême donnent:

$$\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(t)dt}{x-t} = \int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\sin ux\cos ut\,dt - \int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\cos ux\sin ut\,dt\,,$$

$$\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(t)dt}{x+t} = \int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\sin ux\cos ut\,dt + \int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\cos ux\sin ut\,dt\,;$$

d'où l'on tire par addition et soustraction:

$$(33.)\quad \begin{cases} \int_\alpha^\beta \frac{x\varphi(t)\,dt}{x^2-t^2} = \int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\sin ux\cos ut\,dt \quad , \quad \beta > x > \alpha > 0, \\ -\int_\alpha^\beta \frac{t\varphi(t)\,dt}{x^2-t^2} = \int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\cos ux\sin ut\,dt \quad , \quad \beta > x > \alpha > 0. \end{cases}$$

La première subsiste encore pour $x = 0$.

Application.

Pour montrer l'usage des formules (A et B) combinées, dont la seconde, comme je crois, se présente pour la première fois, dans ce mémoire, je ferai $\varphi(x)=e^{-ax}$, $x=b$, $\alpha=0$, $\beta=\infty$. On aura d'abord par la transcendante connue

$$(34.)\quad \int_0^m \frac{dz}{lz} = li(m)\,;$$

1⁰ pour $m=e^{ab}$, et $z=e^{a(b-t)}$, les valeurs $dz=-e^{a(b-t)}\,adt$, $lz=a(b-t)$. De plus les limites $z=\begin{cases}m\\0\end{cases}$, répondront aux limites $t=\begin{cases}0\\\infty\end{cases}$, et par conséquent on aura par (34):

$$(35.)\quad \int_0^\infty \frac{dt}{b-t}e^{-at} = e^{-ab}\,li(e^{ab})\,.$$

2⁰ Pour $m=e^{-ab}$, $z=e^{-a(b+t)}$, on a:

$$(36.)\quad \int_0^\infty \frac{dt}{b+t}e^{-at} = -\,e^{ab}\,li(e^{-ab}).$$

Cela posé, les formules (A et B) donnent:

$$(37.)\quad \pi\,.\,e^{-ab}+\sqrt{-1}\int_0^\infty \frac{dt}{b-t}\,e^{-at} = \int_0^\infty du\int_0^\infty e^{-u(t-b)\sqrt{-1}}\,e^{-at}dt$$

$$(38.)\quad \sqrt{-1}\int_0^\infty \frac{dt}{b+t}\,e^{-at} = \int_0^\infty du\int_0^\infty e^{u(b+t)\sqrt{-1}}\,e^{-at}dt,$$

ou, à cause des formules (35 et 36):

$$\begin{aligned}
\pi e^{-ab}+\sqrt{-1}\,e^{-ab}\,li(e^{ab}) &= \int_0^\infty du\int_0^\infty e^{-u(t-b)\sqrt{-1}}e^{-at}dt\\
&= \int_0^\infty e^{bu\sqrt{-1}}du\int_0^\infty e^{-(a+u\sqrt{-1})t}dt\\
&= \int_0^\infty \frac{e^{bu\sqrt{-1}}du}{a+u\sqrt{-1}} = \int_0^\infty \frac{(a-u\sqrt{-1})e^{bu\sqrt{-1}}du}{a^2+u^2}\\
(39.)\qquad &= \int_0^\infty \frac{ae^{bu\sqrt{-1}}du}{a^2+u^2} - \sqrt{-1}\int_0^\infty \frac{u\,e^{bu\sqrt{-1}}du}{a^2+u^2}\\
(40.)\qquad &= \int_0^\infty \frac{a\cos bu}{a^2+u^2}du+\sqrt{-1}\int_0^\infty \frac{a\sin bu}{a^2+u^2}du-\sqrt{-1}\int_0^\infty \frac{u\cos bu}{a^2+u^2}du\\
&\qquad +\int_0^\infty \frac{u\sin bu}{a^2+u^2}du\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\sqrt{-1}e^{ab}li(e^{-ab}) &= \int_0^\infty du\int_0^\infty e^{u(b+t)\sqrt{-1}}e^{-at}dt\\
&= \int_0^\infty e^{ub\sqrt{-1}}du\int_0^\infty e^{-(a-u\sqrt{-1})t}dt
\end{aligned}$$

$$=\int_0^\infty \frac{e^{ub\sqrt{-1}}du}{a-u\sqrt{-1}}=\int_0^\infty \frac{(a+u\sqrt{-1})e^{bu\sqrt{-1}}du}{a^2+u^2}$$

$$(41.)\quad =\int_0^\infty \frac{a e^{bu\sqrt{-1}}du}{a^2+u^2}+\sqrt{-1}\int_0^\infty \frac{u e^{bu\sqrt{-1}}du}{a^2+u^2}$$

$$(42.)\ =\int_0^\infty \frac{a\cos bu}{a^2+u^2}du+\sqrt{-1}\int_0^\infty \frac{a\sin b\,u\,du}{a^2+u^2}+\sqrt{-1}\int_0^\infty \frac{u\cos bu\,du}{a^2+u^2}-\int_0^\infty \frac{u\sin bu\,du}{a^2+u^2}\ .$$

Les formules (40) et (42), par la comparaison des termes réels et imaginaires, se décomposent chacune en deux équations, et donnent:

$$\pi e^{-ab}=\int_0^\infty \frac{a\cos bu\,du}{a^2+u^2}+\int_0^\infty \frac{u\sin bu\,du}{a^2+u^2}\ ,\quad e^{-ab}li(e^{ab})=\int_0^\infty \frac{a\sin bu}{a^2+u^2}du-\int_0^\infty \frac{u\cos bu\,du}{a^2+u^2}\ ,$$

$$0=\int_0^\infty \frac{a\cos bu\,du}{a^2+u^2}-\int_0^\infty \frac{u\sin bu\,du}{a^2+u^2}\ ,\quad e^{ab}li(e^{-ab})=-\int_0^\infty \frac{a\sin bu\,du}{a^2+u^2}-\int_0^\infty \frac{u\cos bu\,du}{a^2+u^2}\ .$$

On en tire, par addition et soustraction, les formules connues:

$$\int_0^\infty \frac{a\cos bu\,du}{a^2+u^2}=\tfrac{1}{2}\pi e^{-ab}\ ,\quad \int_0^\infty \frac{u\sin bu\,du}{a^2+u^2}=\tfrac{1}{2}\pi e^{-ab}\ .$$

$$\int_0^\infty \frac{a\sin bu\,du}{a^2+u^2}=+\tfrac{1}{2}\left[e^{-ab}li(e^{ab})-e^{ab}li(e^{-ab})\right]\ ,$$

$$\int_0^\infty \frac{u\cos bu\,du}{a^2+u^2}=-\tfrac{1}{2}\left[e^{-ab}li(e^{ab})+e^{ab}li(e^{-ab})\right]\ .$$

SECONDE PARTIE.

Développement d'une fonction arbitraire suivant les cosinus et les sinus des multiples de la variable.

La marche de nos déductions étant la même que celle que Mr. *Lejeune-Dirichlet* à suivi, je tacherai de resumer en peu de mots cette importante doctrine.

1er *Problème. Trouver la valeur de*

$$\int_0^c \frac{F(t)\sin kt}{t}dt\ ,$$

pour $k=\infty$.

Solut. La formule (9) de la première partie donne

$$\int_0^c \frac{F(t)\cos kt}{t}dt-\sqrt{-1}\int_0^c \frac{F(t)\sin kt}{t}dt=F(0)\int_0^x \frac{\cos z\,dz}{z}-\sqrt{-1}\,F(0)\int_0^\infty \frac{\sin z\,dz}{z}\ .$$

En comparant les termes affectés de $\sqrt{-1}$, on trouve:

$$(43.)\quad \int_0^c \frac{F(t)\sin kt}{t} dt = \tfrac{1}{2}\pi F(0)\ ,$$

pour $k = \infty$.

2^{me}. *Problème. Trouver la valeur de l'intégrale*

$$\int_0^c f(t)\frac{\sin kt}{t} dt$$

pour $k = \infty$, *et pour les deux cas* $c < \pi$, $c = \pi$.

Solut. 1°. Soit $c < \pi$.

Si dans la formule (43), dans laquelle $F(t)$ est fini de $t = 0$ à $t = c$, on pose

$$(44.)\quad F(t) = \frac{t}{\sin t} f(t)\ ,$$

le facteur $\frac{t}{\sin t}$ restera fini de $t = 0$, à $t = c$, à cause de $c < \pi$: donc si $f(t)$ reste fini dans le même intervalle, on aura à la place de (43) la formule suivante:

$$(45.)\quad \int_0^c \frac{f(t)\sin kt}{\sin t} dt = \tfrac{1}{2}\pi F(0)\ .$$

Mais on a, en vertu de (44),

$$F(da) = \frac{da}{\sin da} f(da) = \frac{da}{da} f(da) = f(da)\ ;$$

donc aussi

$$F(0) = f(0)\ ;$$

parsuite (45) devient:

$$(46.)\quad \int_0^c \frac{f(t)\sin kt}{\sin t} dt = \tfrac{1}{2}\pi f(0),$$

pour $k = \infty$.

2°. Soit $c = \pi$, on a:

$$\int_0^\pi \frac{\sin kt}{\sin t} f(t)\, dt = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin kt}{\sin t} f(t)\, dt + \int_{\frac{1}{2}\pi}^\pi \frac{\sin kt}{\sin t} f(t)\, dt\ .$$

Fesons dans la dernière intégrale $t = \pi - t'$, on aura:

$$\int_0^\pi \frac{\sin kt}{\sin t} f(t)\, dt = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin kt}{\sin t} f(t)\, dt + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin kt'}{\sin t'} f(\pi - t')\, dt'\ ;$$

donc pour $k = \infty$, et à cause de (46), il vient:

$$(47.)\quad \int_0^\pi \frac{\sin kt}{\sin t} f(t)\, dt = \tfrac{1}{2}\pi f(0) + \tfrac{1}{2}\pi f(\pi)\ .$$

3^{me}. *Problème. Trouver, sous forme d'intégrales définies, les valeurs de*

$$\int_0^\pi f(t)[\tfrac{1}{2}+\cos x\cos t+\cos 2x\cos 2t+\ldots\ldots+\cos nx\cos nt]\,dt\,,$$

$$\int_0^\pi f(t)[\sin x\sin t+\sin 2x\sin 2t+\ldots\ldots+\sin nx\sin nt]\,dt\,.$$

Solut. On a:

$$\cos nx\cos nt = \tfrac{1}{2}\cos n(x+t)+\tfrac{1}{2}\cos n(x-t),$$
$$\sin nx\sin nt = \tfrac{1}{2}\cos n(x+t)+\tfrac{1}{2}\cos n(x-t),$$

donc en fesant ici $n=1,\ 2,\ \ldots\ldots\ n,$ on trouve, en ajoutant:

$$\tfrac{1}{2}\cos+\cos x\cos t+\cos 2x\cos 2t+\ldots\ldots+\cos nx\cos nt =$$
$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}[\cos(x+t)+\cos 2(x+t)+\ldots\ldots+\cos n(x+t)]$$
$$+\tfrac{1}{2}[\cos(x-t)+\cos 2(x-t)+\ldots\ldots+\cos n(x-t)];$$

$$\sin x\sin t+\sin 2x\sin 2t\ \ldots\ldots\ +\sin nx\sin nt$$
$$=\tfrac{1}{2}[\cos(x-t)+\cos 2(x-t)+\ldots\ldots+\cos n(x-t)]$$
$$-\tfrac{1}{2}[\cos(x+t)+\cos 2(x+t)+\ldots\ldots+\cos n(x+t)].$$

En appliquant la formule

$$\cos u+\cos 2u+\ldots\ldots+\cos nu = -\tfrac{1}{2}+\frac{\sin(2n+1)\tfrac{1}{2}u}{2\sin\tfrac{1}{2}u},$$

et en multipliant par $f(t)dt$, on trouve, en intégrant entre 0 et π:

(48.) $$\int_0^\pi f(t)\,dt\,[\tfrac{1}{2}+\cos x\cos t+\ldots\ldots+\cos nx\cos nt]=\int_0^\pi f(t)\,dt\,\frac{\sin(2n+1)\tfrac{1}{2}(x+t)}{4\sin\tfrac{1}{2}(x+t)}$$
$$+\int_0^\pi f(t)\,dt\,\frac{\sin(2n+1)\tfrac{1}{2}(x-t)}{4\sin\tfrac{1}{2}(x-t)},$$

(49.) $$\int_0^\pi f(t)dt[\sin x\sin t+\sin 2x\sin 2t+\ldots\ldots+\sin nx\sin nt]=\int_0^\pi f(t)\,dt\,\frac{\sin(2n+1)\tfrac{1}{2}(x-t)}{4\sin\tfrac{1}{2}(x-t)}$$
$$-\int_0^\pi f(t)\,dt\,\frac{\sin(2n+1)\tfrac{1}{2}(x+t)}{4\sin\tfrac{1}{2}(x+t)}.$$

4^{me}. *Problème. Chercher la somme des suites*

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,dt+\frac{4}{\pi}\cos x\int_0^\pi f(t)\,dt\cos t+\frac{4}{\pi}\cos 2x\int_0^\pi f(t)\cos 2t\,dt+\text{etc.},$$
$$\frac{4}{\pi}\sin x\int_0^\pi f(t)\sin t\,dt+\frac{4}{\pi}\sin 2x\int f(t)\sin 2t\,dt+\text{etc.}$$

Solut. Posons $2n+1=k$, $\tfrac{1}{2}(t-x)=u$. Aux limites $t=\left\{\begin{matrix}\pi\\0\end{matrix}\right.$, répondront les limites $u = \begin{cases}\frac{1}{2}(\pi-x)\\ -\frac{1}{2}x\end{cases}$, et si on fait $\frac{1}{2}(t+x) = u$, les limites de u seront $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{2}(\pi+x)$ correspondantes aux limites 0 et π de t. On a donc:

$$\int_0^\pi \frac{f(t)\,dt\sin(2n+1)\frac{1}{2}(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t-x)} = \int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \frac{\sin k u\,du}{\sin u} f(2u+x)$$
$$= \int_{-\frac{1}{2}x}^{0} f(2u+x)\frac{\sin k\,u\,du}{\sin u} + \int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)} f(2u+x)\frac{\sin k u\,du}{\sin u}$$
$$u = t \qquad\qquad u = -t$$

(50.) $$= \int_0^{\frac{1}{2}x} f(x-2t)\frac{\sin k t\,dt}{\sin t} + \int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)} f(x+2t)\frac{\sin k t\,dt}{\sin t}\ .$$

On trouvera de même:

$$\int_0^\pi \frac{f(t)\,dt\sin(2n+1)\frac{1}{2}(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t+x)} = \int_{\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi+x)} \frac{\sin k u\,du}{\sin u} f(2u-x)$$
$$= -\int_0^{\frac{1}{2}x} f(2u-x)\frac{\sin k u\,du}{\sin u} + \int_0^{\frac{1}{2}(\pi+x)} f(2u-x)\frac{\sin k u\,du}{\sin u}$$

(51.) $$= -\int_0^{\frac{1}{2}x} f(2t-x)\frac{\sin k t\,dt}{\sin t} + \int_0^{\frac{1}{2}(\pi+x)} f(2t-x)\frac{\sin k t\,dt}{\sin t}\ .$$

En substituant ces valeurs dans (48 et 49), on aura, pour n infini, et parsuite pour $k = \infty$:

$$\int_0^\pi f(t)dt + 2\cos x\int_0^\pi f(t)\cos t\,dt + 2\cos 2x\int_0^\pi f(t)\cos 2t\,dt + etc. = \int_0^{\frac{1}{2}x} f(x-2t)\frac{\sin k t\,dt}{\sin t}$$
$$+ \int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)} f(x+2t)\frac{\sin k t\,dt}{\sin t} - \int_0^{\frac{1}{2}x} f(-x+2t)\frac{\sin k t\,dt}{\sin t} + \int_0^{\frac{1}{2}(\pi+x)} f(-x+2t)\frac{\sin k t\,dt}{\sin t}\ .$$

$$2\sin x\int_0^\pi f(t)dt\sin t + 2\sin 2x\int_0^\pi f t dt\sin 2t + etc. = \int_0^{\frac{1}{2}x} f(x-2t)\frac{\sin k t\,dt}{\sin t}$$
$$+ \int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)} f(x+2t)\frac{\sin k t\,dt}{\sin t} + \int_0^{\frac{1}{2}x} f(-x+2t)\frac{\sin k t\,dt}{\sin t} - \int_0^{\frac{1}{2}(\pi+x)} f(-x+2t)\frac{\sin k t\,dt}{\sin t}\ .$$

Il ne s'agit plus que de trouver les valeurs des divers termes du second membre de ces équations, où k est infini. A cet effet, en fesant usage de la formule (46), on trouve aisément $f(x)$ pour ces valeurs, en supposant toutesfois $f(x)$ continu entre 0 et π, et $\pi > x > 0$. On a donc

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,dt + \cos x\,.\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,dt\cos t + \text{etc.} \quad , \quad \pi > x > 0\,,$$
$$f(x) = \sin x\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,dt\sin t + \sin 2x\,.\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,dt\sin 2t + \text{etc.}\ \pi > x > 0\,.$$

Quoique les devéloppements qu' exigent les dernières formules, avec tous les détails qui s'y rapportent, soient bien connus, nous ne pouvions nous dispenser de les réproduire ici, afin de faire voir comment toute cette doctrine se rattache au principe unique

$$\int_a^b f(t)\,e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt = 0 \quad , \quad k = \infty\,,$$

et peut en être tirée avec facilité.

Les quelques lignes qui précédent suffisent pour faire voir comment, en suivant la marche des calculs de M^r^. *Lejeune Dirichlet*, on peut trouver d'une manière très facile les formules de *Lagrange* et de *Fourier*. Mais il convient de rattacher cette méthode à des recherches plus générales, savoir à la sommation de la série

$$\frac{1}{2c}\int_{-c}^{+c} ft\,dt + \frac{1}{c}\int_{-c}^{+c} e^{\frac{\pi}{c}(t-x)\sqrt{-1}} ft\,dt + \frac{1}{c}\int_{-c}^{+c} e^{\frac{2\pi}{c}(t-x)\sqrt{-1}} ft\,dt + etc.\,,$$

qui contient, comme cas très particuliers, les séries de *Lagrange* et de *Fourier*. A cet effet nous poserons d'abord les deux Lemmes qui suivent.

1^er^. *Lemme. Soit c un nombre positif, inférieur à π, et $k = \infty$, je dis que l'on aura:*

$$\int_0^c f(t)\,dt\,\frac{\cos kt}{\sin t} = 0\,.$$

Car de la formule fondamentale

$$\int_0^c f(t)\,dt\,e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt = 0 \quad , \quad \text{pour } k = \infty\,,$$

on tire

$$\int_0^c f(t)\,dt \cos kt = 0 \quad , \quad \text{pour } k = \infty\,.$$

Cela posé, soit

$$f(t) = \frac{\varphi(t)}{\sin t}\,;$$

$f(t)$ sera fini et continu entre 0 et c si la fonction $\varphi(t)$ jouit de la même propriété, et que l'on a de plus $t < \pi$; donc, en supposant $c < \pi$, on aura évidemment

$$(1'.) \quad \int_0^c \varphi(t)\,dt\,\frac{\cos kt}{\sin t} = 0 \quad , \quad \text{pour } k = \infty\,.$$

2me *Lemme.* n *étant un nombre entier et positif, je dis que l'on a*:

$$(2'.)\ \tfrac{1}{2}+e^{(x-t)\sqrt{-1}}+etc.+e^{n(x-t)\sqrt{-1}}=\tfrac{1}{2}\frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}(x-t)}{\sin\frac{1}{2}(x-t)}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\left[\cot\tfrac{1}{2}(x-t)-\frac{\cos(2n+1)\frac{1}{2}(x-t)}{\sin\frac{1}{2}(x-t)}\right]$$

car on a:

$$\tfrac{1}{2}+e^{(x-t)\sqrt{-1}}+e^{2(x-t)\sqrt{-1}}+\cdots\cdots+e^{n(x-t)\sqrt{-1}}=\tfrac{1}{2}+\cos(x-t)+\cos2(x-t)+\cdots\cdots+\cos n(x-t)$$

$$+\sqrt{-1}\,[\sin(x-t)+\sin2(x-t)+\cdots\cdots+\sin n(x-t)]$$

$$=\frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}(x-t)}{2\sin\frac{1}{2}(x-t)}+\sqrt{-1}\,\frac{\sin n\frac{1}{2}(x-t)\sin(n+1)\frac{1}{2}(x-t)}{\sin\frac{1}{2}(x-t)}$$

$$=\frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}(x-t)}{2\sin\frac{1}{2}(x-t)}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\left[\cot\tfrac{1}{2}(x-t)-\frac{\cos(2n+1)\frac{1}{2}(x-t)}{\sin\frac{1}{2}(x-t)}\right].$$

Pour arriver maintenant à la sommation dont il s'agit, nous resoudrons les quatre problêmes suivants, qui renferment toute la théorie des séries périodiques de la nature de celles dont il s'agit ici.

1. *Problême. Chercher les sommes des suites*

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\pi f(t)\,dt+\int_0^\pi e^{(t-x)\sqrt{-1}}f(t)\,dt+\int_0^\pi e^{2(t-x)\sqrt{-1}}f(t)\,dt+etc.\,,$$

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\pi f(t)\,dt+\int_0^\pi e^{(t+x)\sqrt{-1}}f(t)\,dt+\int_0^\pi e^{2(t+x)\sqrt{-1}}f(t)\,dt+etc.$$

Solut. Multiplions les deux membres de (2') par $f(t)\,dt$, puis intégrons entre les limites 0 et π, il vient:

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\pi f(t)\,dt+\int_0^\pi e^{(x-t)\sqrt{-1}}f(t)dt+\cdots\cdots+\int_0^\pi e^{n(x-t)\sqrt{-1}}f(t)dt=\tfrac{1}{2}\int_0^\pi\frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}(x-t)}{\sin\frac{1}{2}(x-t)}f(t)dt$$

$$+\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\left[\int_0^\pi\cot\tfrac{1}{2}(x-t)f(t)\,dt-\int_0^\pi\frac{\cos(2n+1)\frac{1}{2}(x-t)}{\sin\frac{1}{2}(x-t)}f(t)\,dt\right]$$

$$=\tfrac{1}{2}\int_0^\pi\frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}f(t)\,dt$$

$$(3'.)\qquad+\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\left[\int_0^\pi\frac{\cos(2n+1)\frac{1}{2}(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}f(t)\,dt-\int_0^\pi\cot\tfrac{1}{2}(t-x)f(t)dt\right].$$

Soit $2n+1=k$, $\frac{1}{2}(t-x)=u$; il est clair qu'aux limites 0 et π de t répondront les limites $-\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{2}(\pi-x)$ de u, et la formule précédente devient:

$$(4'.)\quad \tfrac{1}{2}\int_0^\pi t\, f(t)\,d + \int_0^\pi e^{(x-t)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + \cdots\cdots + \int_0^\pi e^{n(x-t)\sqrt{-1}} f(t)\,dt$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \frac{\sin ku}{\sin u} f(2u+x)\,du + \sqrt{-1}\Big[\int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \frac{\cos ku}{\sin u} f(2u+x)\,du - \int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \cot(u)\,du f(2u+x)\Big].$$

Si l'on suppose n infini, et parsuite $k = \infty$, le premièr membre de la formule précédente sera une serie d'une infinité de termes, qui aura pour somme la valeur du second membre correspondant à $k = \infty$. Pour déterminer cette valeur, écrivons d'abord:

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\pi f(t)dt + \int_0^\pi e^{(x-t)\sqrt{-1}} f(t)dt + \int_0^\pi e^{2(x-t)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + etc. = \int_{-\frac{1}{2}x}^{0} \frac{\sin ku}{\sin u} f(2u+x)\,du$$

$$+ \int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \frac{\sin ku}{\sin u} f(2u+x)du + \sqrt{-1}\Big[\int_{-\frac{1}{2}x}^{0} \frac{\cos ku}{\sin u} f(2u+x)du + \int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \frac{\cos ku}{\sin u} f(2u+x)du$$

$$- \int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \cot(u) f(2u+x)du\Big] = \int_0^{\frac{1}{2}x} \frac{\sin kt}{\sin t} f(x-2t)\,dt$$

$$+ \int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \frac{\sin kt}{\sin t} f(2t+x)dt + \sqrt{-1}\Big[\int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \frac{\cos kt}{\sin t} f(2t+x)dt - \int_0^{\frac{1}{2}x} \frac{\cos kt}{\sin t} t(x-2f)dt$$

$$- \int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \cot(t) f(2t+x)\,dt\Big].$$

Soit $\pi > x > 0$, on aura aussi $\frac{1}{2}x < \pi$, $\frac{1}{2}(\pi - x) < \pi$; donc, à cause de $k = \infty$, et en ayant égard à la formule (1'):

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\pi f(t)\,dt + \int_0^\pi e^{(x-t)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + \int_0^\pi e^{2(x-t)\sqrt{-1}} f(t)dt + etc. = \pi.\tfrac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0))$$

$$- \sqrt{-1}\Big[\int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \cot(t) f(2t+x)\,dt\Big].$$

Si la fonction $f(x)$ est continue pour toutes les valeurs de x comprises dans l'intervalle de 0 à π, on aura $f(x+0) = f(x-0) = f(x)$, et par suite la formule précédente devient:

$$(\mathrm{I.})\quad \tfrac{1}{2}\int_0^\pi f(t)\,dt + \int_0^\pi e^{(t-x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + \int_0^\pi e^{2(t-x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + etc. = \pi f(x)$$

$$+ \sqrt{-1}\Big[\int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \cot(t)\,dt f(2t+x)\Big]$$

En opérant d'une manière toute semblable, on trouve:

$$\text{(II.)}\quad \tfrac{1}{2}\int_0^\pi f(t)dt + \int_0^\pi e^{(t-x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + \int_0^\pi e^{2(t+x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + etc.$$
$$= \sqrt{-1}\Big[\int_{\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi+x)} \cot(t)\,dt\, f(2t-x)\Big].$$

Ces formules subsistent pour les valeurs de x qui satisfont à la condition $\pi > x > 0$.

Si $x = 0$, leurs premiers membres seront égaux; donc en ajoutant et en divisant par 2, on obtient:

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\pi f t\,dt + \int_0^\pi e^{t\sqrt{-1}} f(t)\,dt + \int_0^\pi e^{2t\sqrt{-1}} f(t)\,dt + etc.$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi f(0) + \sqrt{-1}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cot(t)\,dt\,f(2t).$$

Si $x = \pi$, leurs premiers membres seront encore égaux; donc en ajoutant et en divisant par 2, il vient:

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\pi f(t)\,dt - \int_0^\pi e^{t\sqrt{-1}} f(t)\,dt + \int_0^\pi e^{2t\sqrt{-1}} f(t)\,dt - etc. = \tfrac{1}{2}\pi f(\pi)$$
$$+ \sqrt{-1}\Big\{\int_0^\pi \cot(t)\,dt\,f(2t-\pi) - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cot(t)\,dt\,[f(2t-\pi) + f(\pi-2t)]\Big\}.$$

Corollaire I. Si nous développons les premiers membres des formules (I et II.), on a:

$$\text{(I'.)}\ \tfrac{1}{2}\int_0^\pi f(t)dt + \int_0^\pi \cos(t-x) f(t)dt + \int_0^\pi \cos 2(t-x) f(t)dt + etc. + \sqrt{-1}\Big[\int_0^\pi \sin(t-x)\,f t\,dt$$
$$+ \int_0^\pi \sin 2(t-x) f(t)d + etc.\Big] = \pi f(x) + \sqrt{-1}\Big[\int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \cot(t)dt\,f(2t+x)\Big];$$

$$\text{(II'.)}\ \tfrac{1}{2}\int_0^\pi f(t)\,dt + \int_0^\pi \cos(t+x) f(t)\,dt + \int_0^\pi \cos 2(t+x) f(t)\,dt + etc.$$
$$+\sqrt{-1}\Big[\int_0^\pi \sin(t+x) f(t)dt + \int_0^\pi \sin 2(t+x) f(t)dt + etc.\Big] = \sqrt{-1}\Big[\int_{\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \cot(t)dt\,f(2t-x)\Big],$$

Ces formules se décomposent chacune en deux autres, et donnent:

$$1.\quad \pi f(x) = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi f(t)dt + \int_0^\pi \cos(t-x) f(t)dt + \int_0^\pi \cos 2(t-x)\, f(t)dt + etc.,$$

$$2.\quad \int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \cot(t)\,dt\,f(2t+x) = \int_0^\pi \sin(t-x)\, f(t)dt + \int_0^\pi \sin 2(t-x) f(t)\,dt + etc.,$$

$$3.\quad 0 = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi f(t)\,dt + \int_0^\pi \cos(t+x) f(t)\,dt + \int_0^\pi \cos 2(t+x) f(t)\,dt + etc.,$$

$$(4.)\ \int_{\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi+x)} \cot(t)\,dt\,f(2t-x) = \int_0^\pi \sin(t+x) f(t)\,dt + \int_0^\pi \sin 2(t+x) f(t)\,dt + etc.$$

Rémarquons en passant que les formules (2 et 4) sont donneés ici pour la première fois.

Corollaire 2. Les équations (1 et 3) peuvent s'écrire:

$$\pi f(x) = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi f(t)\,dt + \int_0^\pi \cos x \cos t f(t)\,dt + \int_0^\pi \cos 2x \cos 2t f(t)\,dt + etc.$$
$$+ \int_0^\pi \sin x \sin t f(t)\,dt + \int_0^\pi \sin 2x \sin 2t f(t)\,dt + etc.\,,$$

$$0 = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi f(t)\,dt + \int_0^\pi \cos x \cos t f(t)\,dt + \int_0^\pi \cos 2x \cos 2t f(t)\,dt + etc.$$
$$-\left[\int_0^\pi \sin x \sin t f(t)\,dt + \int_0^\pi \sin 2x \sin 2t f(t)\,dt + etc.\right]$$

De ces équations on tire par addition et soustraction:

$$\pi f(x) = \int_0^\pi f(t)\,dt + 2\int_0^\pi \cos x \cos t f(t)\,dt + 2\int_0^\pi \cos 2x \cos 2t f(t)\,dt + etc.\ ,$$
$$\pi f(x) = 2\int_0^\pi \sin x \sin t f(t)\,dt + 2\int_0^\pi \sin 2x \sin 2t f(t)\,dt + etc.\ :$$

formules qui subsistent pour $\pi > x > 0$; mais la première a encore lieu pour $x = 0$, $x = \pi$.

Les équations (2 et 4) donnent de même:

$$\int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \cot(t) f(2t+x)\,dt = \int_0^\pi \sin t \cos x + \int_0^\pi \sin 2t \cos 2x f(t)\,dt + etc.:$$
$$-\left[\int_0^\pi \sin x \cos t f(t)\,dt + \int_0^\pi \sin 2x \cos 2t f(t)\,dt + etc.\right]$$

$$\int_{\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi+x)} \cot(t) f(2t-x)\,dt = \int_0^\pi \sin t \cos x f(t)\,dt + \int_0^\pi \sin 2t \cos 2x f(t)\,dt + etc.$$
$$+ \int_0^\pi \sin x \cos t f(t)\,dt + \int_0^\pi \sin 2x \cos 2t f(t)\,dt + etc.$$

On en tire par addition et soustraction:

$$\int_{\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi+x)} \cot(t) f(2t-x)\,dt + \int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \cot(t) f(2t+x)\,dt = 2\int_0^\pi \sin t \cos x f(t)\,dt$$
$$+ 2\int_0^\pi \sin 2t \cos 2x f(t)\,dt + etc.$$

$$\int_{\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi+x)} \cot(t) f(2t-x)\,dt - \int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \cot(t) f(2t+x)\,dt = 2\int_0^\pi \sin x \cos t\, f(t)\,dt$$

$$+2\int_0^\pi \sin 2x \cos 2t\, f(t)\,dt + etc.$$

Problème 2. *c étant un nombre positif: trouver les sommes des séries*

$$\tfrac{1}{2}\int_0^c f(t)\,dt + \int_0^c e^{(t-x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + \int_0^c e^{2(t-x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + etc.$$

$$\tfrac{1}{2}\int_0^c f(t)\,dt + \int_0^c e^{(t+x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + \int_0^c e^{2(t+x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + etc.$$

Solution. Dans les formules (I et II) on a supposé $\pi > x > 0$; donc, si l'on fait $x = \frac{\pi x'}{c}$, la condition précédente se changera en celle-ci : $c > x' > 0$. Remplaçons donc x et t, respectivent par $\frac{\pi x}{c}$, $\frac{\pi t}{c}$, et écrivons, à la place de $f\left(\frac{x\pi}{c}\right)$, $f\left(\frac{\pi t}{c}\right)$, simplement $f(x)$, $f(t)$, les formules (I et II) se changeront en les suivantes :

(III.) $$f(x) + \frac{1}{c}\sqrt{-1}\left[\int_{-\frac{\pi x}{2c}}^{\frac{\pi}{2c}(c-x)} f(2t+x)\cot\left(\frac{\pi t}{c}\right)dt\right] = \frac{1}{2c}\int_0^c f(t)\,dt + \frac{1}{c}\int_0^c e^{\frac{\pi}{c}(t-x)\sqrt{-1}} f(t)$$

$$+\frac{1}{c}\int_0^c e^{\frac{2\pi}{c}(t-x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + etc.$$

(IV.) $$\frac{1}{c}\sqrt{-1}\left[\int_{\frac{\pi x}{2c}}^{\frac{\pi}{2c}(c+x)} f(2t-x)\cot\left(\frac{\pi t}{c}\right)dt\right] = \frac{1}{2c}\int_0^c f(t)\,dt + \frac{1}{c}\int_0^c e^{\frac{\pi}{c}(t+x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt$$

$$+\frac{1}{c}\int_0^c e^{\frac{2\pi}{c}(t+x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + etc.$$

Ces formules subsistent pour $c > x > 0$.

Pour $x = 0$, les premiers membres seront égaux, et l'on obtient en ajoutant :

$$\tfrac{1}{2}f(0) + \frac{1}{c}\sqrt{-1}\left[\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(2t)\cot\left(\frac{\pi t}{c}\right)dt\right] = \frac{1}{2c}\int_0^c f(t)\,dt + \frac{1}{c}\int_0^c e^{\frac{\pi t}{c}\sqrt{-1}} f(t)\,dt$$

$$+\frac{1}{c}\int_0^c e^{\frac{2\pi t}{c}\sqrt{-1}} f(t)\,dt + etc.$$

Pour $x = c$, les premiers membres seront encore égaux, et l'on trouve, en ajoutant:

$$\tfrac{1}{2}f(c) + \frac{1}{2c}\sqrt{-1}\Big[\int_0^{\pi}\cot\Big(\frac{\pi t}{c}\Big)f(2t-c)\,dt - \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cot\Big(\frac{\pi t}{c}\Big)dt\,\{f(2t-c)+f(c-2t)\}\Big]$$
$$= \frac{1}{2c}\int_0^c f(t)\,dt - \frac{1}{c}\int_0 e^{\frac{\pi t}{c}\sqrt{-1}}f(t)\,dt + \frac{1}{c}\int_0^c e^{\frac{2\pi t}{c}\sqrt{-1}}f(t)\,dt - etc.$$

Corollaire 1. En développant les formules (III et IV), chacune se partagera en deux autres, et l'on aura:

$$(5.)\quad f(x) = \frac{1}{2c}\int_0^c f(t)\,dt + \frac{1}{c}\int_0^c\cos\frac{\pi(t-x)}{c}f(t)\,dt + \frac{1}{c}\int_0^c\cos\frac{2\pi(t-x)}{c}f(t)dt + etc.$$

$$(6.)\quad \int_{-\frac{\pi x}{2c}}^{\frac{\pi}{2c}(c-x)} f(2t+x)\cot\Big(\frac{\pi t}{c}\Big)dt = \int_0^c\sin\frac{\pi(t-x)}{c}f(t)\,dt + \int_0^c\sin\frac{2\pi(t-x)}{c}f(t)dt + etc.$$

$$(7.)\quad 0 = \frac{1}{2c}\int_0^c f(t)dt + \frac{1}{c}\int_0^c\cos\frac{\pi(t+x)}{c}f(t)\,dt + \frac{1}{c}\int_0^c\cos\frac{2\pi(t+x)}{c}f(t)\,dt + etc.$$

$$(8.)\quad \int_{\frac{\pi x}{2c}}^{\frac{\pi}{2c}(c+x)} f(2t-x)\cot\Big(\frac{\pi t}{c}\Big)dt = \int_0^c\sin\frac{\pi(t+x)}{c}f(t)\,dt + \int_0^c\sin\frac{2\pi(t+x)}{c}f(t)dt + etc.$$

Corollaire 2. En combinant les formules précédentes par addition et soustraction, on en tire:

$$f(x) = \frac{1}{c}\int_0^c f(t)\,dt + \frac{2}{c}\int_0^c\cos x\cos t f(t)\,dt + \frac{2}{c}\int_0^c\cos 2x\cos 2t f(t)\,dt + etc.\ ,$$

$$f(x) = \frac{2}{c}\int_0^c\sin x\cos t f(t)\,dt + \frac{2}{c}\int_0^c\sin 2x\cos 2t f(t)\,dt + etc.,$$

$$\int_{\frac{\pi x}{2c}}^{\frac{\pi}{2c}(c+x)} f(2t-x)\cot\Big(\frac{\pi t}{t}\Big)dt + \int_{-\frac{\pi x}{2c}}^{\frac{\pi x}{2c}(c-x)} f(2t+x)\cot\Big(\frac{\pi t}{c}\Big)dt = 2\int_0^c\sin t\cos x f(t)\,dt$$
$$+2\int_0^c\sin 2t\cos 2x f(t)\,dt + etc.,$$

$$\int_{\frac{\pi x}{c}}^{\frac{\pi}{2c}(c+1)} f(2t-x)\cot\Big(\frac{\pi t}{t}\Big)dt - \int_{-\frac{\pi x}{12c}}^{\frac{\pi}{2c}(c-x)} f(2t+x)\cot\Big(\frac{\pi t}{c}\Big)dt = 2\int_0^c\sin x\cos t f(t)\,dt$$
$$\int_0^c\sin 2x\cos 2t f(t)\,dt + etc.$$

Problème 3. *Trouver les sommes des suites infinies:*

$$\tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,dt + \int_{-\pi}^{+\pi} e^{(t-x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + \int_{-\pi}^{+\pi} e^{2(t-x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + \text{etc.}$$

$$\tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,dt + \int_{-\pi}^{+\pi} e^{(t+x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + \int_{-\pi}^{+\pi} e^{2(t+x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + \text{etc.}$$

Solution. On a, par le second lemme:

$$\tfrac{1}{2} + e^{(t-x)\sqrt{-1}} + e^{2(t-x)\sqrt{-1}} + \ldots + e^{n(t-x)\sqrt{-1}} = \frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t-x)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\left[\cot\tfrac{1}{2}(t-x) - \frac{\cos(2n+1)\frac{1}{2}(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}\right]$$

En multipliant par $f(t)\,dt$, et en intégrant entre les limites $-\pi$, $+\pi$, on a:

$$\tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,dt + \int_{-\pi}^{+\pi} e^{(t-x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + \int_{-\pi}^{+\pi} e^{2(t-x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + \ldots + \int_{-\pi}^{+\pi} e^{n(t-x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt$$

$$= \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t-x)} f(t)\,dt + \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\left[\int_{-\pi}^{+\pi} \cot\tfrac{1}{2}(t-x) f(t)\,dt - \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos(2n+1)\frac{1}{2}(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)} f(t)\,dt\right]$$

En supposant n infini, le premièr membre se composera d'une infinité de termes qui auront pour somme la valeur que prendra le second membre dans l'hypothèse de $2n+1$, k, infini. Pour déterminer cette valeur, écrivons d'abord:

$$\tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,dt + \int_{-\pi}^{+\pi} e^{(t-x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + \int_{-\pi}^{+\pi} e^{2(t-x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + \text{etc.} = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{0} \frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)} f(t)\,dt$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)} f(t)\,dt + \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\left[\int_{-\pi}^{+\pi} \cot\tfrac{1}{2}(t-x) f(t)\,dt - \int_{-\pi}^{0} \frac{\cos(2n+1)\frac{1}{2}(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)} f(t)\,dt\right.$$

$$\left. - \int_{0}^{\pi} \frac{\cos(2n+1)\frac{1}{2}(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)} f(t)\,dt\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}(t+x)}{\sin\frac{1}{2}(t+x)} f(-t)\,dt + \tfrac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)} f(t)\,dt + \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\left[\int_{-\pi}^{+\pi} \cot\tfrac{1}{2}(t-x) f(t)\,dt\right.$$

$$\left. + \int_{0}^{\pi} \frac{\cos(2n+1)\frac{1}{2}(t+x)}{\sin\frac{1}{2}(t+x)} f(-t)\,dt - \int_{0}^{\pi} \frac{\cos(2n+1)\frac{1}{2}(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)} f(t)\,dt\right]$$

Fesons ici $2n+1=k$, puis $\frac{1}{2}(t-x)=u$, et aussi $\frac{1}{2}(t+x)=u$, alors le second membre de la formule précédente deviendra:

$$= \int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi+x)} \frac{\sin ku}{\sin u} f(x-2u)\,du + \int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \frac{\sin ku}{\sin u} f(2u+x)\,du + \sqrt{-1}\left[\int_{-\frac{1}{2}x(\pi-x)}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \cot(u) f(2u+x)\,du\right.$$

$$\left. + \int_{\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \frac{\cos ku}{\sin u} f(x-2u)\,du - \int_{\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \frac{\cos ku}{\sin u} f(2u+x)\,du\right]$$

$$= -\int_{0}^{\frac{1}{2}x(\pi-x)} \frac{\sin ku}{\sin u} f(x-2u)\,du + \int_{0}^{\frac{1}{2}(\pi+x)} \frac{\sin ku}{\sin u} f(x-2u)\,du + \int_{-\frac{1}{2}x}^{0} \frac{\sin ku}{\sin u} f(2u+x)\,du + \ldots\ldots$$

$$+\int_0^{\frac12(\pi-x)}\frac{\sin ku}{\sin u}f(2u+x)du+\sqrt{-1}\Big[\int_{-\frac12(\pi-x)}^{+\frac12(\pi-x)}\cot(u)f(2u+x)du-\int_0^{\frac12 x}\frac{\cos ku}{\sin u}f(x-2u)du$$

$$+\int_0^{\frac12(\pi+x)}\frac{\cos ku}{\sin u}f(x-2u)du-\int_{-\frac12 x}^{0}\frac{\cos ku}{\sin u}f(2u+x)du-\int_0^{\frac12(\pi-x)}\frac{\cos ku}{\sin u}f(2u+x)du\Big]$$

$$=-\int_0^{\frac12 x}\frac{\sin ku}{\sin u}f(x-2u)du+\int_0^{\frac12(\pi+x)}\frac{\sin ku}{\sin u}f(x-2u)du+\int_0^{\frac12 x}\frac{\sin ku}{\sin u}f(x-2u)du$$

$$+\int_0^{\frac12(\pi-x)}\frac{\sin ku}{\sin u}f(2u+x)du+\sqrt{-1}\Big[\int_{-\frac12(\pi+x)}^{\frac12(\pi-x)}\cot(u)f(2u+x)du-\int_0^{\frac12 x}\frac{\cos ku}{\sin u}f(x-2u)du$$

$$+\int_0^{\frac12(\pi+x)}\frac{\cos ku}{\sin u}f(x-2u)du+\int_0^{\frac12 x}\frac{\cos ku}{\sin u}f(x-2u)du-\int_0^{\frac12(\pi-x)}\frac{\cos ku}{\sin u}f(2u+x)du\Big]$$

$$=\int_0^{\frac12(\pi+x)}\frac{\sin kt}{\sin t}f(x-2t)dt+\int_0^{\frac12(\pi-x)}\frac{\sin kt}{\sin t}f(2t+x)dt+\sqrt{-1}\Big[\int_{-\frac12(\pi+x)}^{+\frac12(\pi-x)}\cot(t)f(2t+x)dt$$

$$+\int_0^{\frac12(\pi+x)}\frac{\cos kt}{\sin t}f(x-2t)dt-\int_0^{\frac12(\pi-x)}\frac{\cos kt}{\sin t}f(2t+x)dt\Big]$$

Si x est compris entre π et $-\pi$, la valeur absolue de x sera plus petite que π; on a donc aussi $\frac12 x<\pi$, $\frac12(\pi+x)<\pi$, $\frac12(\pi-x)<\pi$. Donc à cause de $k=\infty$, et en ayant égard à la formule (1′) du premièr lemme, la valeur précédente devient:

$$=\pi\left[\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\right]+\sqrt{-1}\left[\int_{-\frac12(\pi+x)}^{\frac12(\pi-x)}\cot(t)f(2t+x)dt\right]$$

Si $f(x)$ reste continue entre les limites de l'intégration, on a $f(x-0)=f(x+0)=f(x)$, et par suite l'équation précédente devient:

$$\text{(V.)}\quad \pi f(x)+\sqrt{-1}\Big[\int_{-\frac12(\pi+x)}^{+\frac12(\pi-x)}\cot(t)f(2t+x)dt\Big]=\tfrac12\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)dt+\int_{-\pi}^{+\pi}e^{(t-x)\sqrt{-1}}f(t)dt$$

$$+\int_{-\pi}^{+\pi}e^{2(t-x)\sqrt{-1}}f(t)dt+etc.$$

On trouvera par des calculs semblables:

$$\text{(VI.)}\quad \pi f(-x)+\sqrt{-1}\Big[\int_{-\frac12(\pi-x)}^{+\frac12(\pi+x)}\cot(t)f(2t-x)dt\Big]=\tfrac12\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)dt$$

$$+\int_{-\pi}^{+\pi}e^{(t+x)\sqrt{-1}}f(t)dt+\int_{-\pi}^{+\pi}e^{2(t+x)\sqrt{-1}}f(t)dt+etc.$$

Corollaire. Des formules (V et VI) on tire aisément les suivantes:

$$(9.)\quad \pi f(x) = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,dt + \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(t-x) f(t)\,dt + \int_{-\pi}^{+\pi} \cos 2(t-x) f(t)\,dt + etc.,$$

$$(10.)\quad \int_{-\frac{1}{2}(\pi+x)}^{+\frac{1}{2}(\pi-x)} \cot(t) f(2t+x)\,dt = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(t-x) f(t)\,dt + \int_{-\pi}^{+\pi} \sin 2(t-x) f(t)\,dt + etc.,$$

$$(11.)\quad \pi f(-x) = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,dt + \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(t+x) f(t)\,dt + \int_{-\pi}^{+\pi} \cos 2(t+x) f(t)\,dt + etc.,$$

$$(12.)\quad \int_{-\frac{1}{2}(\pi-x)}^{+\frac{1}{2}(\pi+x)} \cot(t) f(2t-x)\,dt = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(t+x) f(t)\,dt + \int_{-\pi}^{+\pi} \sin 2(t+x) f(t)\,dt + etc.$$

Problème 4. Trouver la somme des suites:

$$\frac{1}{2c}\int_{-c}^{+c} f(t)\,dt + \frac{1}{c}\int_{-c}^{+c} e^{\frac{\pi}{c}(t-x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + \frac{1}{c}\int_{-c}^{+c} e^{\frac{2\pi}{c}(t-x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + etc.,$$

$$\frac{1}{2c}\int_{-c}^{+c} f(t)\,dt + \frac{1}{c}\int_{-c}^{+c} e^{\frac{\pi}{c}(t+x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + \frac{1}{c}\int_{-c}^{+c} e^{\frac{2\pi}{c}(t+x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + etc.,$$

Solution. En supposant $\pi > x > -\pi$, on aura, pour $x = \frac{\pi x'}{c}$, $c > x' > -c$. Donc en remplaçant dans les formules (V et IV), x et t respectivement par $\frac{\pi x}{c}$, $\frac{\pi t}{t}$, tout en écrivant $f(x)$, $f(t)$ pour $f\left(\frac{\pi t}{c}\right)$, $f\left(\frac{\pi t}{c}\right)$, les formules (V et VI) donneront:

$$(\text{VII.})\quad f(x) + \frac{1}{c}\sqrt{-1}\left[\int_{\frac{\pi}{2c}(c-x)}^{+\frac{\pi}{2c}(c-x)} \cot\left(\frac{\pi t}{c}\right) dt\, f(2t+x)\right] = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{+c} f(t)\,dt$$
$$+ \frac{1}{c}\int_{-c}^{+c} e^{\frac{\pi}{c}(t-x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + etc.,$$

$$(\text{VIII.})\quad f(-x) + \frac{1}{c}\sqrt{-1}\left[\int_{-\frac{\pi}{2c}(c-x)}^{+\frac{\pi}{2c}(c+x)} \cot\left(\frac{\pi t}{c}\right) f(2t-x)\,dt\right] = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{+c} f(t)\,dt$$
$$+ \frac{1}{c}\int_{-c}^{+c} e^{\frac{\pi}{c}(t+x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + etc.$$

Les formules subsistent pour $c > x > -c$. Pour $x = c$, les deux seconds membres sont égaux, et l'on aura, en ajoutant, et en divisant par 2:

$$\tfrac{1}{2}(f(c)+f(-c)) + \frac{1}{c}\sqrt{-1}\left\{\int_0^{+\pi} \cot\left(\frac{\pi t}{c}\right) dt\, \tfrac{1}{2}[f(2t-c) - f(c-2t)]\right\} = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{+c} f(t)\,dt$$
$$- \frac{1}{c}\int_{1}^{+c} e^{\frac{\pi t}{c}\sqrt{-1}} f(t)\,dt + \frac{1}{c}\int_{-c}^{+c} e^{\frac{2\pi t}{c}\sqrt{-1}} f(t)\,dt - etc.$$

Corollaire. Des formules (VII et VIII) on tire aisément:

$$f(x) = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{+c} f(t)\,dt + \frac{1}{c}\int_{-c}^{+c} \cos\frac{\pi(t-x)}{c} f(t)\,dt + \frac{1}{c}\int_{-c}^{+c} \cos\frac{2\pi(t-x)}{s} f(t)\,dt + etc.$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2c}(c+x)}^{+\frac{\pi}{2c}(c-x)} \cot\left(\frac{\pi t}{t}\right) f(2t+x)\,dt = \int_{-c}^{+c} \sin\frac{\pi(t-x)}{c} f(t)\,dt + \int_{-c}^{+c} \sin\frac{2\pi(t-x)}{c} f(t)\,dt + etc.$$

$$f(-x) = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{+c} f(t)\,dt + \frac{1}{c}\int_{-c}^{+c} \cos\frac{\pi(t+x)}{c} f(t)\,dt + \frac{1}{c}\int_{-c}^{+c} \cos\frac{2\pi(t-x)}{c} f(t)\,dt + etc.$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2c}(c-x)}^{+\frac{\pi}{2c}(c+x)} \cot\left(\frac{\pi t}{c}\right) f(2t-x)\,dt = \int_{-c}^{+c} \sin\frac{\pi(t+x)}{c} f(t)\,dt + \int_{-c}^{+c} \sin\frac{2\pi(t+x)}{c} f(t)\,dt + etc.$$

Lièges, Avril 1850.