NOUVEAUX ÉLÉMENTS

DE

GONIOMÉTRIE,

PAR

A. MEYER.

LIÉGE,
H. DESSAIN, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,
PLACE S^{t}.-LAMBERT, N° 9-28.

1854.

AVANT-PROPOS.

J'ai divisé cet ouvrage en deux parties; la première se rapporte aux propriétés de l'intégrale $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, et la 2[de] s'occupe de l'intégrale $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

J'ignore si d'autres, avant moi, ont ramené la théorie des fonctions circulaires et hyperboliques à ces deux transcendantes, que je regarde comme la vraie base de cette doctrine. Quoi qu'il en soit, les méthodes par lesquelles je procède sont le fruit de mes propres recherches, et je crois même avoir ajouté quelque chose à nos connaissances sur ces matières. Mais c'est au lecteur à juger de la valeur de mes prétentions, et à voir s'il me reviendra quelque mérite d'un travail entrepris dans l'intention de faire connaître une branche importante de l'analyse sous une nouvelle face.

Je dois ici quelques mots d'explication au sujet des notations employées dans ce Traité.

Si, en me plaçant au point de vue analytique, j'avais pu supposer l'identité entre les fonctions dont il s'agit, et les lignes goniométriques, j'aurais pu admettre les signes ordinaires de la Trigonométrie; il n'en est pas ainsi : cette identité doit être le résultat de l'application de notre théorie à la Géométrie, et j'étais forcé de choisir une notation nouvelle. Ce choix étant arbitraire, je me suis décidé, pour des motifs qu'on reconnaîtra bientôt, à faire usage, dans la 1[re] Partie, des lettres C, S, J, et de ces lettres retournées Ɔ, Ƨ, Ɩ, comme signes de fonctions. Dans la 2[de] Partie, je me sers des mêmes lettres surmontées d'un point, savoir de $\dot{\text{C}}$, $\dot{\text{S}}$, $\dot{\text{J}}$, $\dot{\text{Ɔ}}$, $\dot{\text{Ƨ}}$, $\dot{\text{Ɩ}}$.

Observons que ces lettres ne sont pas choisies au hasard; elles ont une forme qui rappelle à l'instant les propriétés fondamentales des fonctions qu'elles doivent désigner. Pour le faire comprendre, et afin de faciliter la lecture de cet ouvrage, j'ajouterai ici, par anticipation, la correspondance entre la nouvelle et l'ancienne notation, la voici :

$$\text{C}a = \sin a,\ \text{Ɔ}a = \cos a,\ \text{S}a = \frac{\text{C}a}{\text{Ɔ}a} = \operatorname{tg} a,\ \text{Ƨ}a = \frac{\text{Ɔ}a}{\text{C}a} = \cot a,$$

$$\text{J}a = \frac{1}{\text{Ɔ}a} = \text{séc}\, a,\ \text{Ɩ}a = \frac{1}{\text{C}a} = \text{cosé}\, a.$$

$$x = \text{C}a,\ y = \text{Ɔ}a,\ u = \text{S}a,\ v = \text{Ƨ}a,\ t = \text{J}a,\ r = \text{Ɩ}a.$$

$$a = \frac{1}{\text{C}} x = \text{arc sin}.x,\ a = \frac{1}{\text{Ɔ}} y = \text{arc cos}.y,\ a = \frac{1}{\text{S}} u = \text{arc tg}.u,$$

$$a = \frac{1}{\text{Ƨ}} v = \text{arc cot}.v,\ a = \frac{1}{\text{J}} t = \text{arc séc}.t,\ a = \frac{1}{\text{Ɩ}} r = \text{arc cosé}.r.$$

Les lignes hyperboliques de mêmes noms que les lignes circulaires correspondantes, étant indiquées par des initiales majuscules, on aura ensuite :

$$\dot{\text{C}}a = \text{Sin}\, a,\ \dot{\text{Ɔ}}a = \text{Cos}\, a,\ \dot{\text{S}}a = \text{Tg}\, a,\ \dot{\text{Ƨ}}a = \text{Cot}\, a,$$
$$\dot{\text{J}}a = \text{Séc}\, a,\ \dot{\text{Ɩ}}a = \text{Cosé}\, a.$$

De plus, soient :

$$x = \dot{\text{C}}a,\ y = \dot{\text{Ɔ}}a,\ u = \dot{\text{S}}a,\ v = \dot{\text{Ƨ}}a,\ t = \dot{\text{J}}a,\ r = \dot{\text{Ɩ}}a.$$

On a inversément :

$$a = \frac{1}{\dot{\text{C}}} x = \text{arc Sin}.x,\ a = \frac{1}{\dot{\text{Ɔ}}} y = \text{arc Cos}.y,$$

$$a = \frac{1}{\dot{\text{S}}} u = \text{arc Tg}.u,\ a = \frac{1}{\dot{\text{Ƨ}}} v = \text{arc Cot}.v,$$

$$a = \frac{1}{\dot{\text{J}}} t = \text{arc Séc}.t,\ a = \frac{1}{\dot{\text{Ɩ}}} r = \text{arc Cosé}.r.$$

Il nous reste à prévenir le lecteur, qu'en traitant des équations transcendantes $Sa = 0$, $Sa = S\alpha$, etc., nous n'entendons pas donner une résolution complète de ces équations; en laissant de côté la recherche de leurs racines imaginaires, nous ne faisons connaître que leurs racines réelles conclues de la périodicité des fonctions S, Ƨ, etc.

Il suit de là que la décomposition en facteurs des expressions Sa, $Sa - S\alpha$, etc. n'est que partielle non plus : on a fait abstraction des facteurs provenant des racines imaginaires impliquées par les équations correspondantes $Sa = 0$, $Sa = S\alpha$, etc.

Ajoutons encore que des réserves semblables doivent être faites au sujet des équations analogues de la seconde partie de cet ouvrage.

ERRATA.

Page.	Ligne.	AU LIEU DE	LISEZ
17	15	$0 \ldots -1,\ 1 \ldots 0$	$0 \ldots -1,\ -1 \ldots 0$.
22	16	$\mathrm{C}[-(4\frac{\pi}{2}+\alpha)]=-\text{Ɔ}\alpha$ . . .	$\mathrm{C}[-(4\overline{n+1}\,\frac{\pi}{2}+\alpha)]=-\text{Ɔ}\alpha$.
24	14	$4\overline{n+2}\,\frac{\pi}{2}=\int_{-1}^{-1}$.	$4\overline{n+2}\,\frac{\pi}{2}=\int_{1}^{-1}$
29	6	$\text{Ɔ}\alpha=$	$\text{Ɔ}a=$.
30	5	$\mathrm{C}a=-\text{Ɔ}a$	$\mathrm{C}a=-\text{Ɔ}\alpha$.
38	15	$\mathrm{C}[a\pm b]$	$\text{Ɔ}[a\pm b]$.
41	10	$\int_0^y\frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}}$	$\int_1^y\frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}}$.
54	2	$t=-\mathrm{J}a$	$t=\mathrm{J}a$.
61	9	$\dot{\text{Ɔ}}x=1$	$\dot{\text{Ɔ}}a=1$.
69	8	$\dot{\mathrm{C}}(\frac{\pi}{4}\sqrt{-1})+\dot{\mathrm{C}}(\frac{\pi}{4}\sqrt{-1})$. .	$\dot{\text{Ɔ}}(\frac{\pi}{4}\sqrt{-1})+\dot{\mathrm{C}}(\frac{\pi}{4}\sqrt{-1})$.
70	7	$\sqrt{m^2n^2}$	$\sqrt{m^2-n^2}$.
75	25	$u=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$	$u=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
79	2	$\dot{\text{Ƨ}}(a\pm b)$	$\dot{\mathrm{S}}(a\pm b)$.

NOUVEAUX
ÉLÉMENTS DE GONÉOMÉTRIE.

PREMIÈRE PARTIE.

PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE $a=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

OU DES FONCTIONS CIRCULAIRES.

§ 1.

Définitions et notations.

Dans $a=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, je pose $x=\mathrm{C}a$, C étant un signe de fonction; je désignerai l'inverse de l'équation $x=\mathrm{C}a$, par $a=\frac{1}{\mathrm{C}}x$; a se nomme l'amplitude de x.

Soit $y=\sqrt{1-x^2}$, l'intégrale ci-dessus deviendra

$a=\int_1^y \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}}$; l'inverse y de cette intégrale sera marquée par $y=\text{Ɔ}a$, Ɔ étant un signe de fonction.

L'inverse de $y=\text{Ɔ}a$, sera désignée par $a=\frac{1}{\text{Ɔ}}y=\frac{1}{\text{Ɔ}}\sqrt{1-x^2}$; a sera l'amplitude de y.

Il faut observer que dans les équations $x = \mathrm{C}a$, $y = a\mathrm{Ɔ}$, x et y sont les valeurs des limites supérieures des intégrales ci-dessus. Si, par exemple, on

avait : $$a = \int_0^{x'} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2\prime}}}, \quad a = \int_1^{y'} \frac{-dy}{\sqrt{1-y^{2\prime}}},$$

il faudrait écrire inversement :

$$x' = \mathrm{C}a, \quad y' = \mathrm{Ɔ}a.$$

§ 2.

Propriétés élémentaires des fonctions C *et* $\mathrm{Ɔ}$.

1. La relation $y = \sqrt{1-x^2}$ donne $\mathrm{C}^2a + \mathrm{Ɔ}^2a = 1$.

2. x et y ne peuvent pas dépasser 1; x croissant, a croît, y décroît. Pour $x = 0$, on a :

$$a = \int_0^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \text{ donc } \mathrm{C}(0) = 0.$$

Soit $\frac{\pi}{2}$, la valeur de a, pour $x = 1$, on a :

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x = \mathrm{C}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Pour $x = 1$, on a $y = \sqrt{1-x^2} = 0$, donc

$$a = \int_1^0 \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\pi}{2}, \text{ donc } \mathrm{Ɔ}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Quand $x = 0$, on a $y = \sqrt{1-x^2} = 1$, donc

$$a = \int_1^1 \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0; \text{ d'où } \mathrm{Ɔ}(0) = 1.$$

3. Soit $-a = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, on a, par défin., $x = \mathrm{C}(-a)$; (1

changeons x en $-x$, on a :

$$a = \int_0^{-x} \frac{d(-x)}{\sqrt{1-(-x)^2}}, \text{ donc } -x = \mathrm{C}a, \text{ ou } x = -\mathrm{C}a. \qquad (2$$

Des valeurs (1 et (2 on conclut $\mathrm{C}(-a) = -\mathrm{C}a$.

On a $y = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-(-x)^2}$, d'où : $\text{Ↄ}(-a) = \text{Ↄ}a$.

4. Soit $a + b = \frac{\pi}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

donc, en posant $a = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, par conséquent $x = \mathrm{C}a$, on aura

$$b = \int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_1^x \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ d'où } x = \text{Ↄ}b;$$

on a donc : $\mathrm{C}a = \text{Ↄ}b = \text{Ↄ}(\frac{\pi}{2} - a)$, et aussi $\text{Ↄ}a = \mathrm{C}(\frac{\pi}{2} - a)$.

Soit $a = \frac{\pi}{4}$, on a $\mathrm{C}(\frac{\pi}{4}) = \text{Ↄ}(\frac{\pi}{4})$; donc $2\mathrm{C}^2(\frac{\pi}{4}) = 1$,

$$\mathrm{C}(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

5. On a :

$$a = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^x dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = x + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{3} x^3 + \frac{1.3}{2 \cdot 4} \cdot \tfrac{1}{5} x^5 + \text{etc.}$$

$$= \mathrm{C}a + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{3} \mathrm{C}^3 a + \frac{1.3}{2 \cdot 4} \cdot \tfrac{1}{5} \mathrm{C}^5 a + \text{etc.}$$

Pour $x=1$, on a $\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{5}+\ldots=1\cdot5707963\ldots$,

$$\pi=3\cdot1415926\ldots$$

6. Dans l'intégrale $a=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, a est la valeur de la somme que l'on obtient, si dans le terme général $dx\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ de cette somme, on pose : $x=0$, dx, $2dx$, ... $\overline{n-1}\,dx$; $\overline{n-1}\,dx=x$.

Donc a augmentera avec x, pour la double raison que le facteur $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ augmente avec x, et que le nombre des termes de la somme, dont a est la valeur, croit avec x.

Dans l'intégrale $a=\int_0^x\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$, il faut, pour une raison tout-à-fait semblable, faire décroître x, pour que a augmente.

On démontrera, par les mêmes moyens, que dans l'intégrale $a=\int_1^y\frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}}$, a augmente quand y diminue, tandis que a augmentera avec y dans l'intégrale $a=\int_1^y\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$.

7. 1 étant la valeur maximum de x, l'on voit que x augmente de 0 à 1, diminue de 1 à 0′ et de 0′ à —1, puis augmente de nouveau de —1 à 0″. Pour plus de clarté, j'ai marqué par des accents les valeurs minima consécutives. Donc

1° $a=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, est l'amplitude correspondante aux valeurs de x situées entre 0 et 1, et —1 et 0″.

2° $a=\int_0^x \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$, est l'amplitude correspondante aux valeurs de x situées entre 1 et 0′, puis entre 0′ et —1.

8. $y=\sqrt{1-x^2}$ diminue de 1 à 0, et de 0 à —1, augmente de —1 à 0′ et de 0′ à 1′. Pour plus de clarté, j'ai marqué par des accents les valeurs minima et maxima consécutives. Donc

1° $a=\int_1^y \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}}$, est l'amplitude correspondante aux valeurs de y situées entre 1 et 0, et entre 0 et —1.

2° $a=\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$, est l'amplitude correspondante aux valeurs de y situées entre —1 et 0′, 0′ et 1′.

9. Soit x' une valeur de x situé entre 0 et 1; soit x'' une valeur de x entre 1 et 0′; x''' entre 0′ et —1′; x^{IV} entre —1 et 0″; on aura la succcession suivante des valeurs possibles de x : $x=0$, x', 1, x'', 0′, x''', —1, x^{IV}, 0″. Cela posé, on pourra décomposer, ainsi qu'il suit, les expressions des amplitudes dont les limites supérieures sont respectivement $x' \ldots x^{\text{IV}}$.

$$a=\int_0^{x'} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_1^{x'} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$a=\int_0^{x''} \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^1 \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_1^{x''} \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$=\int_0^{0'} \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_{0'}^{x''} \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$a = \int_0^{x'''} \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{0'} \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0'}^{x''} \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$= \int_0^{-1} \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{-1}^{x''} \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$a = \int_0^{x^{\text{IV}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{-1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{-1}^{x^{\text{IV}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

10. Soit y' une valeur de y située entre 1 et 0 ; soient y'' une valeur de y située entre 0 et -1; y''' entre -1 et $0'$; y^{IV} entre $0'$ et $1'$; on aura la succession suivante des valeurs possibles de y, savoir :

$$y = 1,\ y',\ 0,\ y'',\ -1,\ y''',\ 0',\ y^{\text{IV}},\ 1'.$$

Cela posé on pourra décomposer, ainsi qu'il suit, les expressions des amplitudes dont les limites supérieures sont respectivement $y' \ldots y^{\text{IV}}$.

$$a = \int_1^{y'} \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int_1^{0} \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}} + \int_0^{y'} \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

$$a = \int_1^{y''} \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int_1^{0} \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}} + \int_0^{y''} \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

$$= \int_1^{-1} \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}} + \int_{-1}^{y''} \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

$$a = \int_1^{y'''} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int_1^{-1} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \int_{-1}^{y'''} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

$$=\int_{0}^{0'}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}+\int_{0'}^{y'''}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

$$a=\int_{1}^{y^{\mathrm{IV}}}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\int_{0}^{0'}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}+\int_{0'}^{y^{\mathrm{IV}}}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

§ 3.

Dérivées et calcul des fonctions Ɔ *et* C.

1. Des équations $a=\int_{0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $x=\mathrm{C}a$, on tire, en différentiant :

$$da=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ dx=\frac{d\mathrm{C}a}{da}da, \text{ donc en multipliant :}$$

$$1=\frac{d\mathrm{C}a}{da}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{d\mathrm{C}a}{da}\cdot\frac{1}{\text{Ɔ}a};\ \text{donc}\ \frac{d\mathrm{C}a}{da}=\text{Ɔ}a.\quad(\alpha$$

2. En différentiant $a=\int_{1}^{y}\frac{-dx}{\sqrt{1-y^2}}$, $y=\text{Ɔ}a$, on a

$$da=\frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}},\ dy=\frac{d\text{Ɔ}a}{da}da.$$

Multiplions, il vient : $1=\frac{d\text{Ɔ}a}{da}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{d\text{Ɔ}a}{d\iota}\cdot\frac{1}{-\mathrm{C}a}$;

$$\text{d'où : }\ \frac{d\text{Ɔ}a}{da}=-\mathrm{C}a.\qquad(\beta$$

3. Les équations (α) et (β) donnent par des différentiations consécutives :

$$\frac{d^2\mathrm{C}a}{da^2}=\frac{d\text{Ɔ}a}{da}=-\mathrm{C}a,\qquad \frac{d^2\text{Ɔ}a}{da^2}=-\frac{d\mathrm{C}a}{da}=-\text{Ɔ}a,$$

$$\frac{d^3 Ca}{da^3} = -\frac{dCa}{da} = -\text{Ɔ}a\,, \qquad \frac{d^3 \text{Ɔ}a}{da^3} = -\frac{d\text{Ɔ}a}{da} = Ca\,,$$

$$\frac{d^4 Ca}{da^4} = -\frac{d\text{Ɔ}a}{da} = Ca\,, \qquad \frac{d^4 \text{Ɔ}a}{da^4} = \frac{dCa}{da} = \text{Ɔ}a\,,$$

$$\frac{d^5 Ca}{da^5} = \frac{dCa}{da} = \text{Ɔ}a\,, \qquad \frac{d^5 \text{Ɔ}a}{da^5} = \frac{d\text{Ɔ}a}{da} = -Ca.$$

etc. etc.

Ces valeurs sont périodiques, et l'on a :

$$\frac{d^{4k} Ca}{da^{4k}} = Ca\,,\ \frac{d^{4k+1} Ca}{da^{4k+1}} = \text{Ɔ}a\,,\ \frac{d^{4k+2} Ca}{da^{4k+2}} = -Ca\,,\ \frac{d^{4k+3} Ca}{da^{4k+3}} = -\text{Ɔ}a$$

$$\frac{d^{4k} \text{Ɔ}a}{da^{4k}} = \text{Ɔ}a\,,\ \frac{d^{4k+1} \text{Ɔ}a}{da^{4k+1}} = -Ca\,,\ \frac{d^{4k+2} \text{Ɔ}a}{da^{4k+2}} = -\text{Ɔ}a\,,\ \frac{d^{4k+3} \text{Ɔ}a}{da^{4k+3}} = Ca.$$

4. Pour $a = 0$, ces expresssions deviennent :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^{4k} C(0)}{da^{4k}} = 0,\ \frac{d^{4k+1} C(0)}{da^{4k+1}} = 1,\ \frac{d^{4k+2} C(0)}{da^{4k+2}} = 0\,,\ \frac{d_{4k+3} C(0)}{da^{4k+3}} = -1 \\ &\frac{d^{4k} \text{Ɔ}(0)}{da^{4k}} = 1,\ \frac{d^{4k+1} \text{Ɔ}(0)}{da^{4k+1}} = 0,\ \frac{d^{4k+2} \text{Ɔ}(0)}{da^{4k+2}} = -1,\ \frac{d^{4k+3} \text{Ɔ}(0)}{da^{4k+3}} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

5. On a :

$$Ca = C(0) + \frac{dC(0)}{da}\cdot a + \frac{d^2 C(0)}{da^2}\cdot\frac{a^2}{1.2} + \frac{d^3 C(0)}{da^3}\cdot\frac{a^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc.}$$

$$= a - \frac{a^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc.}$$

$$\text{Ɔ}a = \text{Ɔ}(0) + \frac{d\text{Ɔ}(0)}{da}\cdot a + \frac{d^2\text{Ɔ}(0)}{da^2}\cdot\frac{a^2}{1\cdot 2} + \frac{d^3\text{Ɔ}(0)}{da^3}\cdot\frac{a^3}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$+ \frac{d^4\text{Ɔ}(0)}{da^4}\cdot\frac{a^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.}$$

$$= 1 - \frac{a^2}{1\cdot 2} + \frac{a^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \text{etc.}$$

§ 4.

Valeurs de a correspondantes aux valeurs extrêmes :

$x = 0,\ 1,\ 0',\ -1,\ 0'',\ 1',\ 0''',\ -1,\ 0^{\text{IV}},\ 1'',\ 0^{\text{V}},\ -1'',\ 0^{\text{VI}}$, etc.

1. Soient $a=\frac{\pi}{2}-\alpha$, $b=\frac{\pi}{2}+\alpha$, $x=\mathrm{C}a$, $x'=\mathrm{C}b$; on aura la succession 0, x, 1, x', $0'$, et il vient :

$$a=\frac{\pi}{2}-\alpha=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_1^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$x=\mathrm{C}a=\mathrm{C}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

Comme $\frac{\pi}{2}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, on a $-\alpha=\int_1^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, donc

$$+\alpha=\int_1^x\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad x=\text{Ↄ}\alpha. \tag{1'}$$

On a ensuite :

$$b=\frac{\pi}{2}+\alpha=\int_0^{x'}\frac{-dx'}{\sqrt{1-x'^2}}=\int_0^1\frac{-dx'}{\sqrt{1-x'^2}}+\int_1^{x'}\frac{-dx'}{\sqrt{1-x'^2}},$$

$$x'=\mathrm{C}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right);$$

de cette équation on tire : $\alpha=\int_1^{x'}\frac{-dx'}{\sqrt{1-x'^2}}$, donc $x'=\text{Ↄ}\alpha$. (2′)

Des équations (1′), (2′), on conclut $x=x'$, donc

$$\mathrm{C}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\mathrm{C}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\text{Ↄ}\alpha.$$

2. Les limites de y, correspondantes aux limites 0, 1, $0'$ de x sont 1, 0, -1. Soient $y=\text{Ↄ}a$, $y'=\text{Ↄ}b$, on aura la succession 1, y, 0, y', -1 ; donc on a :

$$a=\frac{\pi}{2}-\alpha=\int_1^y\frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}}=\int_1^0\frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}}+\int_0^y\frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

$$y=\text{Ↄ}a=\text{Ↄ}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

Mais $\frac{\pi}{2} = \int_1^0 \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}}$, donc $\alpha = \int_0^y \frac{+dy}{\sqrt{1-y^2}}$; d'où $y = C\alpha$. 1

On a aussi :

$$b = \frac{\pi}{2} + \alpha = \int_1^{y'} \frac{-dy'}{\sqrt{1-y'^2}} = \int_1^0 \frac{-dy'}{\sqrt{1-y'^2}} + \int_0^{y'} \frac{-dy'}{\sqrt{1-y'^2}},$$

$$y' = \text{ɔ}b = \text{ɔ}\left[\frac{\pi}{2} + \alpha\right].$$

Donc $\alpha = \int_0^{y'} \frac{-dy'}{\sqrt{1-y'^2}}$, donc $-\alpha = \int_0^{y'} \frac{dy'}{\sqrt{1-y'^2}}$;

donc $y' = C(-\alpha) = -C\alpha$, (2')

De (1' et (2' on conclut : $y = -y'$; donc

$$\text{ɔ}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\text{ɔ}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -C\alpha.$$

3. Supposons qu'aux périodes de valeurs extrêmes

$x = 0, 1, 0', -1, 0''$

$0'', 1', 0''', -1, 0^{\text{IV}}$

$0^{\text{IV}}, 1'', 0^{\text{V}}, -1'', 0^{\text{VI}}$, etc.,

que nous distinguons entre elles par divers accents, répondent les amplitudes

$a = a_0, a_1, a_{0'}, a_{-1}, a_{0''},$

$a_{0''}, a_{1'}, a_{0'''}, a_{-1'}, a_{0^{\text{IV}}},$

$a_{0^{\text{IV}}}, a_{1''}, a_{0^{\text{V}}}, a_{-1''}, a_{0^{\text{VI}}}$, etc.

On pourra calculer ces dernières, ainsi qu'il suit. On a

$$a_0 = \int_0^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0; \text{ donc } x = C[0] = 0.$$

$$a_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}; \text{ donc } x = C\left[\frac{\pi}{2}\right] = 1.$$

$$a_{0}' = \int_{0}^{0'} \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{0}^{1} \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{1}^{0'} \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} + \int_{0'}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{2};\ \text{donc}\ x = C[\frac{2\pi}{2}] = C[\pi] = 0.$$

$$a_{-1} = \int_{0}^{-1} \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{0}^{0'} \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0'}^{-1} \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\pi}{2} + \int_{0'}^{1} \frac{-d(-x)}{\sqrt{1-(-x)^2}}$$

$$= \frac{2\pi}{2} + \int_{0'}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2};$$

$$\text{donc}\ x = C[\frac{3\pi}{2}] = -1.$$

$$a_{0''} = \int_{0}^{0''} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{0}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{-1}^{0''} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{3\pi}{2} + \int_{1}^{0''} \frac{d(-x)}{\sqrt{1-(-x)^2}}$$

$$= \frac{3\pi}{2} + \int_{0''}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{2};$$

$$\text{donc}\ x = C[\frac{4\pi}{2}] = C[2\pi] = 0.$$

$$a_{1'} = \int_{0}^{1'} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{0}^{0''} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0''}^{1'} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{4\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2};\ \text{donc}\ x = C[\frac{5\pi}{2}] = 1.$$

etc. etc.

Donc, pour des valeurs indéfiniment croissantes de a, les valeurs extrêmes de C, se reproduisent périodiquement. Chaque période se compose de quatre intervalles égaux, savoir : 0 ... 1, 1 ... 0, 0 ... —1, 1 ... 0, que nous nommerons quadrants.

De la périodicité des fonctions C, par rapport à leurs valeurs extrêmes dans les quatre quadrants, et eu égard à $C(-a)=-Ca$, on conclut :

$$\left.\begin{array}{l} C(4n.\frac{\pi}{2})=0,\ C(\overline{4n+1}\frac{\pi}{2})=1,\ C(\overline{4n+2}.\frac{\pi}{2})=0, \\ \qquad C(\overline{4n+3}.\frac{\pi}{2})=-1\,; \\ C[-(4n.\frac{\pi}{2})]=0,\ C[-\overline{4n+1}\frac{\pi}{2}]=-1,\ C[-\overline{4n+2}.\frac{\pi}{2}]=0, \\ \qquad C[-\overline{4n+3}.\frac{\pi}{2}]=1. \end{array}\right\} (a)$$

6. Comme aux valeurs maxima et minima de x, répondent respectivement les valeurs minima et maxima de y, il est clair que l'on aura :

$$\left.\begin{array}{l} \supset[4n.\frac{\pi}{2}]=1,\ \supset[\overline{4n+1}.\frac{\pi}{2}]=0, \supset[\overline{4n+2}.\frac{\pi}{2}]=-1, \\ \qquad \supset[\overline{4n+3}.\frac{\pi}{2}]=0\,; \\ \supset[-4n.\frac{\pi}{2}]=1,\ \supset[-\overline{4n+1}.\frac{\pi}{2}]=0, \\ \qquad \supset[-\overline{4n+2}.\frac{\pi}{2}=-1,\ \supset[-\overline{4n+3}.\frac{\pi}{2}]=0. \end{array}\right\} (b)$$

Les périodes des valeurs extrêmes de y, correspondantes à celles de x, sont ici $y=1, 0, -1, 0', 1', 0'', -1', 0''', 1''$, etc.

§ 5.

Résolution des équations $Ca=0$, $Ca=1$, $Ca=-1$;
$\supset a=0$, $\supset a=1$, $\supset a=-1$.

1. *Résoudre* $Ca=0$.

Les valeurs (a) donnent $\quad a=\pm 4n.\frac{\pi}{2}=\pm 2n\pi,$

$$=\pm\overline{4n+2}.\frac{\pi}{2}=\pm(2n+1)\pi\,;$$

donc $\quad a=\pm k\pi$, $k=0, 1, 2, \ldots$

2. *Résoudre* $Ca=1$.

Les valeurs (a) donnent $\quad a=\overline{4n+1}.\frac{\pi}{2}=(2n+\frac{1}{2})\pi,$

$$=-\overline{4n+3}.\frac{\pi}{2}=-(2n+1+\frac{1}{2})\pi,$$

donc $\qquad a=(-1)^k(k+\tfrac{1}{2})\pi, \quad k=0,1,2,\ldots$

3. *Résoudre* $\mathrm{C}a=-1$.

Les valeurs (a) donnent : $\quad a=-\overline{4n+1}\cdot\frac{\pi}{2}=-(2n+\tfrac{1}{2})\pi,$

$$=\overline{4n+3}\cdot\frac{\pi}{2}=(2n+1+\tfrac{1}{2})\pi;$$

donc $\quad a=-(-1)^k(k+\tfrac{1}{2})\pi, \quad k=0,1,2,\ldots$

4. *Résoudre* $\text{Ɔ}a=0$.

Les valeurs (b) donnent : $\quad a=\pm(\overline{4n+1}\cdot\frac{\pi}{2})=\pm(2n+\tfrac{1}{2})\pi,$

$$=\pm(\overline{4n+3}\cdot\frac{\pi}{2})=\pm(2n+1+\tfrac{1}{2})\pi;$$

donc $\quad a=\pm(k+\tfrac{1}{2})\pi, \quad k=0,1,2,\ldots$

5. *Résoudre* $\text{Ɔ}a=1$.

Les valeurs (b) donnent : $\quad a=\pm 4n\cdot\frac{\pi}{2};$

donc $\quad a=\pm 2k\pi, \quad k=0,1,2,\ldots$

6. *Résoudre* $\text{Ɔ}a=-1$.

Les valeurs (b) donnent : $\quad a=\pm\overline{4n+2}\cdot\frac{\pi}{2};$

donc $\quad a=\pm(2k+1)\pi, \quad k=0,1,2,\ldots$

§ 6.

Décomposition des quantités $\mathrm{C}a$, $\text{Ɔ}a$, $\mathrm{C}a+1$, $\mathrm{C}a-1$, $\text{Ɔ}a+1$, $\text{Ɔ}a-1$ *en une infinité de facteurs.*

Notation. Je poserai, pour abréger,

$$\prod_a^b \psi(k)=\psi(a)\cdot\psi(a+1)\cdot\psi(a+2)\ldots\psi(b).$$

1. *Décomposition de* $\mathrm{C}a$.

$$\mathrm{C}a=0, \text{ donne } a=\pm k\pi, \quad k=0,1,2,\ldots$$

$$a^2=k^2\pi^2,$$

$$1-\frac{a^2}{k^2\pi^2}=0, \quad k=1,2,3,\ldots$$

$$a=0 \text{ pour } k=0;$$

donc $$\mathrm{C}a = a\prod_{1k}^{\infty}\left(1-\frac{a^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Soit $a=\dfrac{\pi}{2}$, on a

$$1=\frac{\pi}{2}\prod_{1k}^{\infty}\left(\frac{2^2k^2-1}{2^2k^2}\right), \text{ d'où } \frac{\pi}{2}=\prod_{1k}^{\infty}\left(\frac{2^2k^2}{2^2k^2-1}\right)=\tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{16}{15}\cdot\tfrac{36}{35}\cdot\,\ldots$$

C'est le rapport de Wallis.

2. *Décomposition de* $\text{ɔ}a$.

$\text{ɔ}a=0$, donne $a=\pm\left(\dfrac{2k+1}{2}\right)\pi$, d'où

$$1-\frac{2^2a^2}{\overline{2k+1}^2\pi^2}=0,\quad k=0,1,2,\ldots$$

donc $$\text{ɔ}a=\prod_{0k}^{\infty}\left[1-\frac{2^2a^2}{\overline{2k+1}^2\pi}\right].$$

3. *Décomposition de* $\mathrm{C}a+1$.

$\mathrm{C}a+1=0$ donne $a=-(-1)^k\left(\dfrac{2k+1}{2}\right)\pi$, $k=0,1,2,\ldots$

donc $$\mathrm{C}a+1=\prod_{0k}^{\infty}\left(1+\frac{2a}{(-1)^k\overline{2k+1}\pi}\right).$$

4. *Décomposition de* $\mathrm{C}a-1$.

$\mathrm{C}a-1=0$ donne $a=(-1)^k\left(\dfrac{2k+1}{2}\right)\pi$, $k=0,1,2,\ldots$

donc $$\mathrm{C}a-1=\prod_{0k}^{\infty}\left(1-\frac{2a}{(-1)^k(2k+1)\pi}\right).$$

5. *Décomposition de* $\text{ɔ}a+1$.

$$\text{ɔ}a+1=0 \quad\text{donne } a=\pm(2k+1)\pi,\quad k=0,1,2,\ldots$$
$$a^2=(2k+1)^2\pi^2;$$

donc $$\text{ɔ}a+1=\prod_{0k}^{\infty}\left(1-\frac{a^2}{\overline{2k+1}^2\pi^2}\right).$$

6. *Décomposition de* $\text{ɔ}a-1$.

$\text{ɔ}a-1=0$ donne $a=\pm 2k\pi$, $k=0,1,2,\ldots$

$a^2=4k^2\pi^2$, $1-\dfrac{a^2}{2^2k^2\pi^2}=0$, $k=1,2,\ldots$, $a=0$, pour $k=0$,

donc $$\text{ɔ}a-1=a\prod_{1k}^{\infty}\left(1-\frac{a^2}{2^2k^2\pi^2}\right).$$

§ 7.

Relations entre Ca et Cb, Ↄa et Ↄb *quand* $a+b=\pi$.

1. On a :

$$a+b=\pi=\int_{0}^{0'}\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_{0}^{x}\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_{x}^{0'}\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Posons $a=\int_{0}^{x}\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $x=\mathrm{C}(a)$, on aura :

$$b=\int_{x}^{0'}\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_{0'}^{x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ x=\mathrm{C}b;\ \text{donc}$$

$$\mathrm{C}a=\mathrm{C}b=\mathrm{C}(\pi-a).$$

2. On a :

$$a+b=\pi=\int_{1}^{-1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\int_{1}^{y}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}+\int_{y}^{-1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Donc, si $a=\int_{1}^{y}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$, $y=\text{Ↄ}a$, on a :

$$b=\int_{y}^{-1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\int_{-1}^{y}\frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}}=\int_{1}^{-y}\frac{-d(-y)}{\sqrt{1-(-y)^2}},$$

$$-y=\text{Ↄ}b,\ y=-\text{Ↄ}b;\quad \text{donc}\quad \text{Ↄ}a=-\text{Ↄ}b=-\text{Ↄ}(\pi-a).$$

§ 8.

Valeurs des fonctions C *et* Ↄ, *correspondantes aux amplitudes*

$$a=\pm(\overline{4n+1}\,\frac{\pi}{2}\pm\alpha),\ \pm(\overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2}\pm\alpha),\ \text{etc.}$$

Nous supposerons $\alpha < \frac{\pi}{2}$.

1. *Valeurs de* $\mathrm{C}[\pm(\overline{4n+1}\frac{\pi}{2} \pm \alpha]$, $\text{ɔ}[\pm(\overline{4n+1}\frac{\pi}{2} \pm \alpha)]$.

Soient $x = \mathrm{C}[\overline{4n+1}\frac{\pi}{2} - \alpha]$, $x' = \mathrm{C}[\overline{4n+1}\frac{\pi}{2} + \alpha]$,

on aura la succession $0, x, 1, x', 0'$;

Soient $y = \text{ɔ}[\overline{4n+1}\frac{\pi}{2} - \alpha]$, $y' = \text{ɔ}[\overline{4n+1}\frac{\pi}{2} + \alpha]$,

on aura la succession $1, y, 0, y', -1$.

Cela posé, on a :

$$1^\circ \quad a = \overline{4n+1}\frac{\pi}{2} - \alpha = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_1^x \frac{+\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$x = \mathrm{C}[\overline{4n+1}\frac{\pi}{2} - \alpha]; \text{ mais } 4n+1\frac{\pi}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ donc}$$

$$-\alpha = \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \alpha = \int_1^x \frac{-\,dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x = \text{ɔ}\alpha;$$

donc $\mathrm{C}[\overline{4n+1}\frac{\pi}{2} - \alpha] = \text{ɔ}\alpha$, et $\mathrm{C}[-(\overline{4n+1}\frac{\pi}{2} - \alpha)] = -\text{ɔ}\alpha$.

$$a = \overline{4n+1}\frac{\pi}{2} + \alpha = \int_0^{x'} \frac{-\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 \frac{-\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_1^{x'} \frac{-\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$x' = \mathrm{C}[\overline{4n+1}\frac{\pi}{2} + \alpha].$$

$$\text{Mais} \quad \overline{4n+1}\frac{\pi}{2} = \int_0^1 \frac{-\,dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{donc}$$

$$\alpha = \int_1^{x'} \frac{-\,dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x' = \text{ɔ}\alpha; \text{ donc } \mathrm{C}[\overline{4n+1}\frac{\pi}{2} + \alpha] = \text{ɔ}\alpha,$$

$$\text{et } \mathrm{C}[-(4\frac{\pi}{2} + \alpha)] = -\text{ɔ}\alpha.$$

On a de plus $x = x'$,

ou $\mathrm{C}[\overline{4n+1}\frac{\pi}{2}+\alpha] = \mathrm{C}[\overline{4n+1}\frac{\pi}{2}-\alpha] = \text{Ɔ}\alpha.$

$$2^{\circ}\quad a = \overline{4n+1}\frac{\pi}{2}-\alpha = \int_1^y \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int_1^0 \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}} + \int_0^y \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

$y = \text{Ɔ}[\overline{4n+1}\frac{\pi}{2}-\alpha]$; mais $\overline{4n+1}\frac{\pi}{2} = \int_1^0 \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}}$, donc

$$-\alpha = \int_0^y \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}},\quad \alpha = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},\quad y = \mathrm{C}\alpha;\ \text{donc}$$

$$\text{Ɔ}[\overline{4n+1}\frac{\pi}{2}-\alpha] = \mathrm{C}\alpha,\quad \text{et}\quad \text{Ɔ}[-(\overline{4n+1}\frac{\pi}{2}-\alpha)] = \mathrm{C}\alpha.$$

$$a = \overline{4n+1}\frac{\pi}{2}+\alpha = \int_1^{y'} \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int_1^0 \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}} + \int_0^{y'} \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

$y' = \text{Ɔ}[\overline{4n+1}\frac{\pi}{2}+\alpha]$. Donc

$$\alpha = \int_0^{y'} \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}},\quad -\alpha = \int_0^{y'} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},\quad y' = \mathrm{C}[-\alpha] = -\mathrm{C}\alpha;\ \text{donc}$$

$$\text{Ɔ}[\overline{4n+1}\frac{\pi}{2}+\alpha] = -\mathrm{C}\alpha,\quad \text{et}\quad \text{Ɔ}[-(\overline{4n+1}\frac{\pi}{2}+\alpha)] = -\mathrm{C}\alpha.$$

On a de plus $y' = -y$;

donc $\text{Ɔ}(\overline{4n+1}\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\text{Ɔ}(\overline{4n+1}\frac{\pi}{2}-\alpha) = -\mathrm{C}\alpha.$

2. *Valeurs de* $\mathrm{C}[\pm(\overline{n+2}\frac{\pi}{2}\pm\alpha)]$, $\text{Ɔ}[\pm(\overline{4n+2}\frac{\pi}{2}\pm\alpha)]$.

Soient $x = \mathrm{C}[\overline{4n+2}\frac{\pi}{2}-\alpha]$, $x' = \mathrm{C}[4n+2\frac{\pi}{2}+\alpha]$,

on aura la succession $0,\ 1,\ x,\ 0',\ x',\ -1.$

Soient $y = \text{Ɔ}[\overline{4n+2}\frac{\pi}{2}-\alpha]$, $y' = \text{Ɔ}[\overline{4n+2}\frac{\pi}{2}+\alpha]$,

on aura la succession $1,\ 0,\ y,\ -1,\ y',\ 0'.$

On a donc

$$1° \quad a = \overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2} - \alpha = \int_0^x \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{0'} \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0'}^x \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$x = \mathrm{C}[\overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2} - \alpha]$. Mais $\overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2} = \int_0^{0'} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, donc

$-\alpha = \int_{0'}^x \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\alpha = \int_{0'}^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $x = \mathrm{C}\alpha$, donc

$\mathrm{C}[\overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2} - \alpha] = \mathrm{C}\alpha$, et $\mathrm{C}[-(\overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2} - \alpha)] = -\mathrm{C}\alpha$.

$$a = \overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2} + \alpha = \int_0^{x'} \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{0'} \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0'}^{x'} \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$x' = \mathrm{C}[\overline{4n+2} + \alpha]$. Mais $\int_0^{0'} \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2}$, donc

$\alpha = \int_{0'}^{x'} \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $-\alpha = \int_{0'}^{x'} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $x' = \mathrm{C}[-\alpha] = -\mathrm{C}\alpha$; donc

$\mathrm{C}[\overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2} + \alpha] = -\mathrm{C}\alpha$, et $\mathrm{C}[-(\overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2} + \alpha)] = \mathrm{C}\alpha$.

On a de plus $\quad x' = -x, \quad$ donc

$\mathrm{C}[\overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2} + \alpha] = -\mathrm{C}[\overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2} - \alpha] = -\mathrm{C}\alpha$.

2° On a :

$$a = \overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2} - \alpha = \int_1^y \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int_1^{-1} \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}} + \int_{-1}^y \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

$y = \mathfrak{D}[\overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2} - \alpha]$. Mais $\overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2} = \int_{-1}^{-1} \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}}$, donc

$$-\alpha = \int_{-1}^y \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int_1^{-y} \frac{-d(-y)}{\sqrt{1-(-y)^2}}, \quad -y = \mathfrak{D}(-\alpha) = \mathfrak{D}\alpha, y = -\mathfrak{D}\alpha.$$

Donc $\text{Ɔ}[\overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2}-\alpha]=-\text{Ɔ}\alpha$, et $\text{Ɔ}[-(\overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2}-\alpha)]=-\text{Ɔ}\alpha$.

On a ensuite :

$$a=\overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2}+\alpha=\int_{1}^{y'}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\int_{1}^{-1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}+\int_{-1}^{y'}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

$y'=\text{Ɔ}[\overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2}+\alpha]$. Mais $\overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2}=\int_{1}^{-1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$, donc

$$\alpha=\int_{-1}^{y'}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\int_{1}^{-y'}\frac{d(-y)}{\sqrt{1-y^2}},\quad -\alpha=\int_{1}^{-y'}\frac{-d(-y)}{\sqrt{1-(-y)^2}},$$

$-y'=\text{Ɔ}[-\alpha]=\text{Ɔ}\alpha$, $y'=-\text{Ɔ}\alpha$. Donc

$\text{Ɔ}[\overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2}+\alpha]=-\text{Ɔ}\alpha$, et $\text{Ɔ}[-(\overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2}+\alpha)]=-\text{Ɔ}\alpha$.

De plus, on a $y'=y$, donc

$\text{Ɔ}[\overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2}+\alpha]=\text{Ɔ}[\overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2}-\alpha]=-\text{Ɔ}\alpha$.

3. *Valeurs de* $C[\pm\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}\pm\alpha)]$, $\text{Ɔ}[\pm(\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}\pm\alpha)]$.

Soient $x=C[\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}-\alpha]$, $x'=C[\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}+\alpha]$,

on aura la succession $0, 1, 0', x, -1, x', 0''$;

Soient $y=\text{Ɔ}[\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}-\alpha]$, $y'=\text{Ɔ}[\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}+\alpha]$,

on aura la succession $1, 0, -1, y, 0', y', 1$.

Donc on a :

1° $a=\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}-\alpha=\int_{0}^{x}\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_{0}^{-1}\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_{-1}^{x}\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

$x=C[\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}-\alpha]$. Mais $\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}=\int_{0}^{-1}\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$, donc

$$-\alpha=\int_{-1}^{x}\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_{1}^{-x}\frac{-d(-x)}{\sqrt{1-(-x)^2}},\quad -x=\text{Ɔ}[-\alpha]=\text{Ɔ}\alpha,\ x=-\text{Ɔ}\alpha;$$

donc $\mathrm{C}[\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}-\alpha]=-\text{Ɔ}\alpha$, et $\mathrm{C}[-(\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}-\alpha)]=\text{Ɔ}\alpha$.

On a ensuite :

$$a=\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}+\alpha=\int_{0}^{x'}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_{0}^{-1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_{-1}^{x'}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$x'=\mathrm{C}[\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}+\alpha]$. Mais $\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}=\int_{0}^{-1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, donc

$$\alpha=\int_{-1}^{x'}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_{1}^{-x'}\frac{d(-x)}{\sqrt{1-(-x)^2}},\quad -\alpha=\int_{1}^{-x'}\frac{-d(-x)}{\sqrt{1-(-x)^2}},$$

$-x'=\text{Ɔ}[-\alpha]=\text{Ɔ}\alpha$, $x'=-\text{Ɔ}\alpha$; donc

$$\mathrm{C}[\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}+\alpha]=-\text{Ɔ}\alpha,\ \text{et}\ \mathrm{C}[-(\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}+\alpha)]=\text{Ɔ}\alpha.$$

De plus on a $x'=x$, donc

$$\mathrm{C}[\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}+\alpha]=\mathrm{C}[\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}-\alpha]=-\text{Ɔ}\alpha.$$

2° On a :

$$a=\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}-\alpha=\int_{1}^{y}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\int_{1}^{0'}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}+\int_{0'}^{y}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

$y=\text{Ɔ}[\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}-\alpha]$. Mais $\int_{1}^{0'}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}$, donc

$-\alpha=\int_{0'}^{y}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$, $y=\mathrm{C}[-\alpha]=-\mathrm{C}\alpha$. Donc

$$\text{Ɔ}[\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}-\alpha]=-\mathrm{C}\alpha,\ \text{et}\ \text{Ɔ}[-(\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}-\alpha)]=-\mathrm{C}\alpha.$$

On a ensuite :

$$a=\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}+\alpha=\int_{1}^{y'}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\int_{1}^{0'}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}+\int_{0'}^{y'}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

$y'=\text{Ↄ}[\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}+\alpha]$. Mais $\int_{1}^{0'}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}$, donc

$\alpha=\int_{0'}^{y'}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$, $y'=\text{C}\alpha$. Donc $\text{Ↄ}[\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}+\alpha]=\text{C}\alpha$,

et $\text{Ↄ}[-(\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}+\alpha)]=\text{C}\alpha$. On a de plus $y'=-y$, donc

$$\text{Ↄ}[\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}+\alpha]=-\text{Ↄ}[\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}-\alpha]=\text{C}\alpha.$$

4. *Valeurs de* $\text{Ↄ}[\pm(4n\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha)]$, $\text{Ↄ}[\pm(4n\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha)]$.

Soient $x=\text{C}[4n\cdot\frac{\pi}{2}-\alpha]$, $x'=\text{C}[4n\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha]$,

on aura la succession $0, 1, 0', -1, x, 0'', x', 1$;

Soient $y=\text{Ↄ}[4n\cdot\frac{\pi}{2}-\alpha]$, $y'=\text{Ↄ}[4n\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha]$,

on aura la succession $1, 0, -1, 0', y, 1', y', 0''$.

Cela posé on a :

$$1^\circ\quad a=4n\cdot\frac{\pi}{2}-\alpha=\int_{0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_{0}^{0''}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_{0''}^{x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$x=\text{C}[4n\cdot\frac{\pi}{2}-\alpha]$. Mais $4n\cdot\frac{\pi}{2}=\int_{0}^{0''}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, donc

$-\alpha=\int_{0''}^{x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; $x=\text{C}[-\alpha]=-\text{C}\alpha$. Donc

$$\text{C}[4n\cdot\frac{\pi}{2}-\alpha]=-\text{C}\alpha,\ \text{et}\ \text{C}[-(4n\cdot\frac{\pi}{2}-\alpha)]=\text{C}\alpha.$$

On a ensuite :

$$a=4n\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha=\int_{0}^{x'}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_{0}^{0''}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_{0''}^{x'}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$x' = C[4n\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha]$. Mais $4n\cdot\frac{\pi}{2} = \int_0^{0''}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, donc

$\alpha = \int_{0''}^{x'}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $x' = C\alpha$; donc

$$C[4n\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha] = C\alpha, \quad \text{et} \quad C[-(4n\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha)] = -C\alpha.$$

On a de plus, $x' = -x$, donc

$$C[4n\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha] = -C[4n\cdot\frac{\pi}{2}-\alpha] = C\alpha.$$

2° On a :

$$a = 4n\cdot\frac{\pi}{2}-\alpha = \int_1^{y}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int_1^{1'}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \int_{1'}^{y}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

$y = \mathfrak{I}[4n\cdot\frac{\pi}{2}-\alpha]$. Mais $4n\cdot\frac{\pi}{2} = \int_1^{1'}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$, donc

$-\alpha = \int_{1'}^{y}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$, $\alpha = \int_{1'}^{y}\frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}}$, $y = \mathfrak{I}\alpha$. Donc

$$\mathfrak{I}[4n\cdot\frac{\pi}{2}-\alpha] = \mathfrak{I}\alpha, \quad \text{et} \quad \mathfrak{I}[-(4n\cdot\frac{\pi}{2}-\alpha)] = \mathfrak{I}\alpha.$$

On a ensuite :

$$a = 4n\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha = \int_1^{y'}\frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int_1^{1'}\frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}} + \int_{1'}^{y'}\frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

$y' = \mathfrak{I}[4n\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha]$. Mais $\int_1^{1'}\frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}} = 4n\cdot\frac{\pi}{2}$, donc

$\alpha = \int_{1'}^{y'}\frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}}$, $y' = \mathfrak{I}\alpha$. Donc

$$\mathfrak{I}[4n\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha] = \mathfrak{I}\alpha, \quad \text{et} \quad \mathfrak{I}[-(4n\cdot\frac{\pi}{2}-\alpha)] = \mathfrak{I}\alpha.$$

On a de plus $y' = y$, donc

$$\mathfrak{I}[4n\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha] = \mathfrak{I}[4n\cdot\frac{\pi}{2}-\alpha] = \mathfrak{I}\alpha.$$

Remarque. Les résultats fournis par ce §, règlent le calcul et le signe des fonctions C et Ͻ, pour des amplitudes qui surpassent $\frac{\pi}{2}$.

§ 9.

Résolution des équations

$$\mathrm{C}a = \mathrm{C}\alpha,\ -\mathrm{C}\alpha,\ Ͻ\alpha,\ -Ͻ\alpha;\quad Ͻ\alpha = \mathrm{C}\alpha,\ -\mathrm{C}\alpha,\ Ͻ\alpha,\ -Ͻ\alpha.$$

1. *Résoudre l'équation* $\mathrm{C}a = \mathrm{C}\alpha$.

Les valeurs du § précédent donnent :

$$a = +\left(\overline{4n+2}\cdot\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \left(+\overline{2n+1}\,\pi - \alpha\right),$$

$$= -\left(\overline{4n+2}\cdot\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \left(-\overline{2n+1}\,\pi - \alpha\right),$$

$$= \left(+4n.\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = (+2n\cdot\pi + \alpha),$$

$$= -\left(4n\cdot\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = (-2n.\pi + \alpha);$$

on a donc $\quad a = \pm k\pi + (-1)^k\alpha,\ k = 0, 1, 2, \ldots$

2. *Résoudre l'équation* $\mathrm{C}a = -\mathrm{C}\alpha$.

Les valeurs du § précédent donnent :

$$a = -\left(\overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \left[-\overline{2n+1}\cdot\pi + \alpha\right],$$

$$= +\left(\overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \left[+\overline{2n+1}\,\pi + \alpha\right],$$

$$= +\left(4n\cdot\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = [+2n\pi - \alpha],$$

$$= -\left(4n\cdot\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = [-2n\pi - \alpha];$$

on a donc $\quad a = \pm k\pi - (-1)^k\alpha,\ k = 0, 1, 2, \ldots$

3. *Résoudre l'équation* $\mathrm{C}a = Ͻ\alpha$.

Les valeurs du § précédent donnent :

$$a = \left(\overline{4n+1}\cdot\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \left(\overline{2n+\tfrac{1}{2}}\cdot\pi - \alpha\right),$$

$$=(\overline{4n+1}\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha)=(\overline{2n+\tfrac{1}{2}}\cdot\pi+\alpha),$$

$$=-(\overline{4n+3}\cdot\frac{\pi}{2}-\alpha)=(-\overline{2n+1+\tfrac{1}{2}}\cdot\pi+\alpha),$$

$$=-(\overline{4n+3}\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha)=(-\overline{2n+1+\tfrac{1}{2}}\cdot\pi-\alpha);$$

donc $\quad a=(-1)^k\cdot[k+\tfrac{1}{2}]\pi\pm\alpha,\ k=0,\,1,\,2,\,\ldots$

4. *Résoudre l'équation* $\mathfrak{C}a=-\mathfrak{D}a$.

Les valeurs du § précédent donnent :

$$a=-(\overline{4n+1}\cdot\frac{\pi}{2}-\alpha)=[-(2n+\tfrac{1}{2})\pi+\alpha],$$

$$=-(\overline{4n+1}\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha)=[-(2n+\tfrac{1}{2})\pi-\alpha],$$

$$=+(\overline{4n+3}\cdot\frac{\pi}{2}-\alpha)=[(2n+1+\tfrac{1}{2})\pi-\alpha],$$

$$=+(\overline{4n+3}\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha)=[(2n+1+\tfrac{1}{2})\pi+\alpha];$$

on a donc $\quad a=-(-1)^k[(k+\tfrac{1}{2})\pi]\pm\alpha.$

5. *Résoudre l'équation* $\mathfrak{D}a=\mathfrak{C}\alpha$.

On trouve, par les formules du § précédent :

$$a=+[\overline{4n+1}\cdot\frac{\pi}{2}-\alpha]=[(2n+\tfrac{1}{2})\pi-\alpha]=+[2n+\tfrac{1}{2})\pi-\alpha],$$

$$=-[\overline{4n+1}\cdot\frac{\pi}{2}-\alpha]=[-(2n+\tfrac{1}{2})\pi+\alpha]=-[(2n+\tfrac{1}{2})\pi-\alpha],$$

$$=+(\overline{4n+3}\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha)=[(2n+1+\tfrac{1}{2})\pi+\alpha]=+[(2n+1+\tfrac{1}{2})\pi+\alpha],$$

$$=-[\overline{4n+3}\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha]=[-(2n+1+\tfrac{1}{2})\pi-\alpha]=-[(2n+1+\tfrac{1}{2})\pi+\alpha];$$

donc $\quad a=\pm[(k+\tfrac{1}{2})\pi-(-1)^k\alpha].$

6. *Résoudre l'équation* $\mathfrak{D}a=-\mathfrak{C}\alpha$.

Le § précédent donne :

$$a=+(\overline{4n+1}\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha)=[(2n+\tfrac{1}{2})\pi+\alpha],$$

$$=-(\overline{4n+1}\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha)=-[(2n+\tfrac{1}{2})\pi+\alpha],$$

$$=+(\overline{4n+3}.\frac{\pi}{2}-\alpha)=[(2n+1+\tfrac{1}{2})\pi-\alpha],$$

$$=-(\overline{4n+3}.\frac{\pi}{2}-\alpha)=-[(2n+1+\tfrac{1}{2})\pi-\alpha];$$

donc $\quad a=\pm(k+\tfrac{1}{2})\pi+(-1)^k\alpha],\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

7. *Résoudre l'équation* $\text{Ɔ}a=\text{Ɔ}\alpha$.

Le § précédent donne :

$$a=+(4n.\frac{\pi}{2}-\alpha)=+(2n.\pi-\alpha),$$

$$=-(4n.\frac{\pi}{2}-\alpha)=-(2n.\pi-\alpha),$$

$$=+(4n.\frac{\pi}{2}+\alpha)=+(2n.\pi+\alpha),$$

$$=-(4n.\frac{\pi}{2}+\alpha)=-(2n.\pi+\alpha);$$

donc $\quad a=\pm[2k\pi\pm\alpha],\quad k=0,\ 1,\ 2,\ldots$

8. *Résoudre l'équation* $\text{Ɔ}a=-\text{Ɔ}\alpha$.

On a : $\quad a=+(\overline{4n+2}.\frac{\pi}{2}-\alpha)=+(\overline{2n+1}.\pi-\alpha),$

$$=-(\overline{4n+2}.\frac{\pi}{2}-\alpha)=-(\overline{2n+1}.\pi-\alpha),$$

$$=+(\overline{4n+2}.\frac{\pi}{2}+\alpha)=+(\overline{2n+1}.\pi+\alpha),$$

$$=-(\overline{4n+2}.\frac{\pi}{2}+\alpha)=-(\overline{2n+1}.\pi+\alpha),$$

d'où : $\quad a=\pm[(2k+1)\pi\pm\alpha],\quad k=0,\ 1,\ 2,$ etc.

§ 10.

Décomposition des binômes

$\mathrm{C}a-\mathrm{C}\alpha$, $\mathrm{C}a+\mathrm{C}\alpha$, $\mathrm{C}a-\text{Ɔ}\alpha$, $\mathrm{C}a+\text{Ɔ}\alpha$,
$\text{Ɔ}a-\mathrm{C}\alpha$, $\text{Ɔ}a+\mathrm{C}\alpha$, $\text{Ɔ}a-\text{Ɔ}\alpha$, $\text{Ɔ}a+\text{Ɔ}\alpha$,
en facteurs.

1. L'équation $\mathrm{C}a-\mathrm{C}\alpha=0$, donne $a=\pm k\pi+(-1)^k\alpha$, donc

$$\mathrm{C}a - \mathrm{C}\alpha = \prod_{0k}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{a}{k\pi + (-1)^k \alpha}\right)\left(1 + \frac{a}{k\pi - (-1)^k \alpha}\right) \right\},$$

2. L'équation $\mathrm{C}a + \mathrm{C}\alpha = 0$ donne $a = \pm k\pi - (-1)^k \alpha$, on a donc :

$$\mathrm{C}a + \mathrm{C}\alpha = \prod_{0k}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{a}{k\pi - (-1)^k \alpha}\right)\left(1 + \frac{a}{k\pi + (-1)^k \alpha}\right) \right\}.$$

3. L'équation $\mathrm{C}a - \text{Ɔ}\alpha = 0$, donne $a = (-1)^k (k + \frac{1}{2})\pi \pm \alpha$; on a donc :

$$\mathrm{C}a - \text{Ɔ}\alpha = \prod_{0k}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{a}{(-1)^k (k+\frac{1}{2})\pi + \alpha}\right)\left(1 - \frac{a}{(-1)^k (k+\frac{1}{2})\pi - \alpha}\right) \right\}.$$

4. L'équation $\mathrm{C}a + \text{Ɔ}\alpha = 0$, donne

$$a = -(-1)^k [(k+\tfrac{1}{2})\pi] \pm \alpha = (-1)^{k+1} (k+\tfrac{1}{2})\pi \pm \alpha; \qquad \text{donc}$$

$$\mathrm{C}a + \text{Ɔ}\alpha = \prod_{0k}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{a}{(-1)^{k+1} (k+\frac{1}{2})\pi + \alpha}\right)\left(1 - \frac{a}{(-1)^{k+1} (k+\frac{1}{2})\pi - \alpha}\right) \right\}.$$

5. L'équation $\text{Ɔ}a - \mathrm{C}\alpha = 0$, donne

$$a = \pm [(k + \tfrac{1}{2})\pi - (-1)^k \alpha],$$

$$a^2 = [(k + \tfrac{1}{2})\pi - (-1)^k \alpha]^2; \qquad \text{donc}$$

$$\text{Ɔ}a - \mathrm{C}\alpha = \prod_{0k}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{a^2}{[(k+\frac{1}{2})\pi - (-1)^k \alpha]^2} \right\}.$$

6. L'équation $\text{Ɔ}a + \mathrm{C}\alpha = 0$, donne

$$a = \pm [(k + \tfrac{1}{2})\pi + (-1)^k \alpha],$$

$$a^2 = [(k + \tfrac{1}{2})\pi + (-1)^k \alpha]^2, \qquad \text{donc}$$

$$\text{Ɔ}a + \mathrm{C}\alpha = \prod_{0k}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{a^2}{[(k+\frac{1}{2})\pi + (-1)^k \alpha]^2} \right\}.$$

7. L'équation $\text{Ɔ}a - \text{Ɔ}\alpha = 0$, donne

$$a = \pm (2k\pi \pm \alpha),$$

$$a^2 = (2k\pi \pm \alpha)^2, \qquad \text{donc}$$

$$\text{Ɔ}a - \text{Ɔ}\alpha = \prod_{0k}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{a^2}{[2k\pi \pm \alpha]^2} \right\}.$$

8. L'équation $\text{Ɔ}a + \text{Ɔ}\alpha = 0$, donne

$$a = \pm [(2k+1)\pi \pm \alpha],$$

$$a^2 = [(2k+1)\pi \pm \alpha]^2, \qquad \text{donc}$$

$$\text{Ɔ}a + \text{Ɔ}\alpha = \prod_{0k}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{a^2}{[(2k+1)\pi \pm \alpha]^2} \right\}.$$

§ 11.

Expressions exponentielles des fonctions C et ɔ.

1. De l'équation $\dfrac{dCa}{da} = \text{ɔ}a = \sqrt{1 - C^2 a}$ on déduit

$$\left(\frac{dCa}{da}\right)^2 + C^2 a = 1. \qquad (1)$$

Intégrons (1); à cet effet, posons $\left(\dfrac{dCa}{da}\right)^2 + C^2 a = 0$, (2)

alors $x = Ca = e^{ma}$, réduira (2) à $m^2 + 1 = 0$, donc $m = \pm\sqrt{-1}$.

Donc k, k' désignant des constantes, les expressions $ke^{a\sqrt{-1}}$, $k'e^{-a\sqrt{-1}}$, seront des intégrales particulières de (2). On peut donc supposer que l'intégrale de (1) est de la forme :

$$x = Ca = ke^{a\sqrt{-1}} + k'e^{-a\sqrt{-1}}; \qquad (3)$$

k et k' étant des fonctions inconnues de a.

Mais à cause de (3), l'équation (1) devient :

$$\left(\frac{dCa}{da}\right)^2 + C^2 a = 4kk' + \left(\frac{dk}{da}\right)^2 e^{2a\sqrt{-1}} + \left(\frac{dk'}{da}\right)^2 e^{-2a\sqrt{-1}} + 2\frac{dk}{da}\cdot\frac{dk'}{da} + 2\sqrt{-1}\left\{k\left(\frac{dk}{da}\right)e^{2a\sqrt{-1}} + k\frac{dk'}{da} - k'\frac{dk}{da} - k'\frac{dk'}{da}\cdot e^{-2a\sqrt{-1}}\right\} = 1.$$

Cette équation se partage en deux, savoir :

$$4kk' + \left(\frac{dk}{da}\right)^2 e^{2a\sqrt{-1}} + \left(\frac{dk'}{da}\right)^2 e^{-2a\sqrt{-1}} + 2\frac{dk}{da}\cdot\frac{dk'}{da} = 0, \qquad (4)$$

$$\frac{dk}{da}\left(ke^{2a\sqrt{-1}} - k'\right) - \frac{dk'}{da}\left(k'e^{-2a\sqrt{-1}} - k\right) = 0. \qquad (5)$$

L'équation indéterminée (5) est satisfaite, en posant :

$\dfrac{dk}{da} = 0$, $\dfrac{dk'}{da} = 0$, donc, en prenant k et k' constants.

Mais alors l'équation (4) se réduit à :

$$4kk' = 1. \qquad (6)$$

Or, k et k' étant constants, (3) donne pour $a=0$, $k'=-k$, donc (6) devient :

$$(2\sqrt{-1})k=1,\ \text{donc}\ k=\frac{1}{2\sqrt{-1}},\ k'=-\frac{1}{2\sqrt{-1}}.$$

Donc l'intégrale cherchée est

$$\mathrm{C}a=\frac{e^{a\sqrt{-1}}-e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.\qquad (a)$$

En différentiant on a :

$$\mathrm{Ɔ}a=\frac{e^{a\sqrt{-1}}+e^{-a\sqrt{-1}}}{2}.\qquad (b)$$

2. On peut vérifier, ainsi qu'il suit, la formule (a).

On a :

$$a=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.\ \text{Posons}\ \sqrt{-1}.x=\tfrac{1}{2}\left(x'-\frac{1}{x'}\right),\ \text{on trouvera :}$$

$$a=\frac{1}{\sqrt{-1}}\int_1^{x'}\frac{dx'}{x'},\ \text{donc}\ a\sqrt{-1}=\log x',\ \text{donc}\ x'=e^{a\sqrt{-1}},$$

donc $$x=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(e^{a\sqrt{-1}}-e^{-a\sqrt{-1}}\right).$$

§ 12.

Conséquences et applications des formules (a) *et* (b) *du § précédent.*

1. Soit $\mathrm{A}=e^{\log \mathrm{A}}$ on aura, à la place de (a) et (b) :

$$\mathrm{C}(a\log \mathrm{A})=\frac{\mathrm{A}^{a\sqrt{-1}}-\mathrm{A}^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

$$\mathrm{Ɔ}(a\log \mathrm{A})=\frac{\mathrm{A}^{a\sqrt{-1}}+\mathrm{A}^{-a\sqrt{-1}}}{2}.$$

2. De (a) et (b), on tire par addition et soustraction :

$$e^{a\sqrt{-1}}=\mathrm{Ɔ}a+\sqrt{-1}.\mathrm{C}a,\ e^{-a\sqrt{-1}}=\mathrm{Ɔ}a-\sqrt{-1}.\mathrm{C}a.$$

Soit $a=\frac{\pi}{4}$, donc $\text{Ɔ}(\frac{\pi}{4})=\text{C}(\frac{\pi}{4})$, les équations précédentes deviennent :

$$\text{C}(\tfrac{\pi}{4})[1+\sqrt{-1}]=e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}},\ \text{C}(\tfrac{\pi}{4})[1-\sqrt{-1}]=e^{-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}},$$

d'où : $\dfrac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}=e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}$ et $\dfrac{\pi}{2}\sqrt{-1}=\log\dfrac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}$.

A cause de $\log\dfrac{1+x}{1-x}=2(x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\text{etc.})$, il vient :

$$\frac{\pi}{2}=2(1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\text{etc.})$$

3. En changeant a en μa, on a :

$$e^{\mu a\sqrt{-1}}=[\text{Ɔ}a+\sqrt{-1}\,\text{C}a]^{\mu}=\text{Ɔ}\mu a+\sqrt{-1}\,\text{C}\mu a;$$

$$e^{-\mu a\sqrt{-1}}=[\text{Ɔ}a-\sqrt{-1}\,\text{C}a]^{\mu}=\text{Ɔ}\mu a-\sqrt{-1}\,\text{C}\mu a.$$

4. Soit $m+n\sqrt{-1}=e^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}=e^{\alpha}.e^{\beta\sqrt{-1}}=e^{\alpha}[\text{Ɔ}\beta+\sqrt{-1}\,\text{C}\beta]$; on aura :

$$m=e^{\alpha}\text{Ɔ}\beta,\ n=e^{\alpha}\text{C}\beta,\ m^2+n^2=e^{2\alpha},\ e^{\alpha}=\sqrt{m^2+n^2};$$

soit r cette valeur, on a :

$$\frac{m}{r}=\text{Ɔ}\beta,\ \frac{n}{r}=\text{C}\beta;$$

ces équations sont légitimes, car chacune des fractions $\frac{m}{r}$, $\frac{n}{r}$, est comprise entre les limites 0 et 1.

Déterminons β. Soit φ la plus petite des amplitudes pour laquelle on a :

$$\frac{m}{r}=\text{Ɔ}\varphi,\ \frac{n}{r}=\text{C}\varphi;\ \text{on aura :}$$

(1) $\text{Ɔ}\beta=\text{Ɔ}\varphi$, (2) $\text{C}\beta=\text{C}\varphi$, donc, par le § 9, (1) et (2) donnent respectivement :

$$\beta=\pm[2k\pi\pm\varphi],\ \beta=\pm k\pi+(-1)^k\varphi.$$

Les valeurs communes seront :

$$\beta=\pm 2k\pi+\varphi,\quad k=0,1,2,\ldots$$

on a donc :

$$m+n\sqrt{-1}=r[\text{Ɔ}\varphi+\sqrt{-1}\,\text{C}\varphi],\ r=\sqrt{m^2+n^2},$$

$$\text{Ɔ}\varphi=\frac{m}{r}\,,\quad \text{C}\varphi=\frac{n}{r}\,,$$

$$\varphi=\frac{1}{\text{Ɔ}}\cdot\frac{m}{r}=\frac{1}{\text{C}}\cdot\frac{n}{r}\,,\ \text{ou}\ \varphi=\frac{1}{\text{S}}\cdot\frac{n}{m}\,.$$

De même

$$m-n\sqrt{-1}=r\,[\text{Ɔ}\varphi-\sqrt{-1}\,\text{C}\varphi].$$

4. $$\sqrt[\mu]{m+n\sqrt{-1}}=(\sqrt[\mu]{r})\,[\text{Ɔ}\frac{\beta}{\mu}+\sqrt{-1}\ \text{C}\,\frac{\beta}{\mu}]=$$

$$(\sqrt[\mu]{r})[\text{Ɔ}\,\frac{2k\pi+\varphi}{\mu}+\sqrt{-1}\ \text{C}\,\frac{2k\pi+\varphi}{\mu}],\ k=0,\,1,\,2,\,\ldots\,\mu-1.$$

($\sqrt[\mu]{r}$ n'a qu'une valeur, savoir : sa valeur arithmétique; les deux membres ont ainsi chacun μ valeurs, et l'équation est exacte.

Pour $n=0$, on a $r=1$, $\varphi=0$, si donc on fait $m=1$, on a :

$$\sqrt[\mu]{1}=\text{Ɔ}\,\frac{2k\pi}{\mu}+\sqrt{-1}\ \text{C}\,\frac{2k\pi}{\mu}\,,\quad k=0,\,1,\,2\ldots\mu-1\,,$$

pour $n=0$, $m=-1$, on a $r=1$, $\varphi=\pi$, donc

$$\sqrt[\mu]{-1}=\text{Ɔ}\,\frac{(2k+1)\pi}{\mu}+\sqrt{-1}\,.\,\text{C}\,\frac{\overline{2k+1}\,\pi}{\mu}\,,\ k=0,1,2,\ldots\,m-1.$$

Ces deux relations résolvent les équations $x^\mu-1=0$, $x^\mu+1=0$, μ étant entier et positif.

5. On a $\log(m+n\sqrt{-1})=\log.e^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}=\alpha+\beta\sqrt{-1}$;

mais
$$\alpha=\log r=\tfrac{1}{2}\log\,(m^2+n^2)\,,$$
$$\beta=\pm\,2k\pi+\varphi\,.$$

φ est la plus petite des amplitudes pour laquelle on a à la fois

$$\beta=\frac{m}{r}\,,\ \text{C}\beta=\frac{n}{r}\,,\ \text{ou bien}\ \text{S}\beta=\frac{n}{m}\,.$$

On a donc :

$$\log.\,(m+n\sqrt{-1})=\tfrac{1}{2}\log\,(m^2+n^2)+\sqrt{-1}\,[\pm 2k\pi+\frac{1}{\text{S}}\cdot\frac{n}{m}\,],$$
$$k=0,\,1,\,2,\,\ldots$$

6. On a : $$x=\frac{e^{a\sqrt{-1}}-e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}=\text{C}a;$$ on tire de là :

$$e^{a\sqrt{-1}}=x\sqrt{-1}\pm\sqrt{1-x^2}\,;\qquad \text{donc}$$

$$a=\frac{1}{\mathrm{C}}[\pm x]=\frac{1}{\sqrt{-1}}\log[x\sqrt{-1}\pm\sqrt{1-x^2}].$$

On a : $y=\dfrac{e^{a\sqrt{-1}}+e^{-a\sqrt{-1}}}{2}=\mathrm{Ɔ}a$, d'où

$$e^{a\sqrt{-1}}=y\pm\sqrt{-1}\sqrt{1-y^2}, \quad \text{donc}$$

$$a=\frac{1}{\mathrm{Ɔ}}[\pm y]=\frac{1}{\mathrm{Ɔ}}\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{\sqrt{-1}}\log[y\pm\sqrt{-1}\sqrt{1-y^2}].$$

7. Dans les traités de calcul différentiel et intégral, on cherche par induction, les dérivées

$$\frac{d^n(\frac{a}{a^2+b^2})}{da^n}, \quad \frac{d^n(\frac{b}{a^2+b^2})}{da^n};$$

on les obtient immédiatement de cette manière :

on a : $\dfrac{1}{a+b\sqrt{-1}}=\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{b}{a^2+b^2}\sqrt{-1}$, donc

$$\frac{d^n(\frac{a}{a^2+b^2})}{da^n}-\sqrt{-1}\,\frac{d^n(\frac{b}{a^2+b^2})}{da^n}=\frac{d^n(\frac{1}{a+b\sqrt{-1}})}{da^n}=$$

$$(-1)^n\frac{1.2\ldots n}{(a+b\sqrt{-1})^{n+1}}=(-1)^n\frac{1.2\ldots n}{r^{n+1}[\mathrm{Ɔ}\,\overline{n+1}\,\varphi+\sqrt{-1}\,\mathrm{C}\overline{n+1}\,\varphi]}=$$

$$(-1)^n\frac{1.2\ldots n}{r^{n+1}}\mathrm{Ɔ}\,\overline{n+1}\,\varphi-(-1)^n\frac{1.2\ldots n}{r^{n+1}}\sqrt{-1}\,\mathrm{C}\overline{n+1}\,\varphi;$$

donc $$\frac{d^n(\frac{a}{a^2+b^2})}{da^n}=(-1)^n\frac{1.2\ldots n}{r^{n+1}}\mathrm{Ɔ}\,\overline{n+1}\,\varphi,$$

$$\frac{d^n(\frac{b}{a^2+b^2})}{da^n}=(-1)^n\frac{1.2\ldots n}{r^{n+1}}\mathrm{C}\overline{n+1}\,\varphi,\quad r=\sqrt{a^2+b^2},\quad \varphi=\frac{1}{\mathrm{S}}\cdot\frac{b}{a}.$$

§ 13.

Développement des fonctions C[a ± b], Ɔ[a ± b].

1. Soient $a+b=\displaystyle\int_0^u\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$, $u=\mathrm{C}(a+b)$, $a=\displaystyle\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

$$x = \mathrm{C}a,\ \sqrt{1-x^2} = \mathrm{Ↄ}a,\ b = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},\ z = \mathrm{C}b,\ \sqrt{1-z^2} = \mathrm{Ↄ}b;$$

on a : $$a+b = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

z est la valeur de u, pour $x = 0$, on peut donc écrire :

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \text{const.};\quad \text{d'où}$$

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad \text{ou}\quad \sqrt{1-u^2}\cdot dx - \sqrt{1-x^2}\cdot du = 0.$$

Mais on a : $xu.\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}} - xu \cdot \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$, donc en ajoutant : $d[x\sqrt{1-u^2}] - d[u\sqrt{1-x^2}] = 0$. En intégrant, il vient : $x\sqrt{1-u^2} - u\sqrt{1-x^2} = \text{const.}$ pour $x = 0$, celle-ci donne const. $= -u, = -z$, donc

$$x\sqrt{1-u^2} - u\sqrt{1-x^2} = -z.$$

Résolvons cette équation par rapport à u, il vient :

$$u = x\sqrt{1-z^2} + z\sqrt{1-x^2},\quad \text{ou}\quad \mathrm{C}[a+b] = \mathrm{C}a\,\mathrm{Ↄ}b + \mathrm{C}b\,\mathrm{Ↄ}a,$$
$$\text{et}\quad \mathrm{C}[a-b] = \mathrm{C}a\,\mathrm{Ↄ}b - \mathrm{C}b\,\mathrm{Ↄ}a.$$

En différentiant par rapport à a, on trouve :

$$\mathrm{C}[a \pm b] = \mathrm{Ↄ}a\,\mathrm{Ↄ}b \mp \mathrm{C}a\,\mathrm{C}b.$$

On a donc inversement :

$$a \pm b = \frac{1}{\mathrm{C}}\,x \pm \frac{1}{\mathrm{C}}\,z = \frac{1}{\mathrm{C}}[x\sqrt{1-z^2} \mp z\sqrt{1-x^2}];$$

$$a \pm b = \frac{1}{\mathrm{Ↄ}}\,x \pm \frac{1}{\mathrm{Ↄ}}\,y = \frac{1}{\mathrm{Ↄ}}[\sqrt{1-x^2}\ \sqrt{1-z^2} \mp xz].$$

Des équations précédentes, on déduit par les procédés ordinaires :

$$\mathrm{C}a = 2\mathrm{C}\frac{a}{2}\cdot\mathrm{Ↄ}\frac{a}{2},\ \mathrm{Ↄ}a = \mathrm{Ↄ}^2\frac{a}{2} - \mathrm{C}^2\frac{a}{2},$$

$$1+\mathrm{Ↄ}a = 2\mathrm{Ↄ}^2\frac{a}{2},\quad 1-\mathrm{Ↄ}a = 2\mathrm{C}^2\frac{a}{2},$$

$$\mathrm{C}a+\mathrm{C}b=2\,\mathrm{C}\,\frac{a+b}{2}\cdot\text{Ↄ}\,\frac{a-b}{2},\quad \text{Ↄ}b+\text{Ↄ}a=2\,\text{Ↄ}\,\frac{a+b}{2}\cdot\text{Ↄ}\,\frac{a-b}{2},$$

$$\mathrm{C}a-\mathrm{C}b=2\,\text{Ↄ}\,\frac{a+b}{2}\cdot\mathrm{C}\,\frac{a-b}{2},\quad \text{Ↄ}b-\text{Ↄ}a=2\,\mathrm{C}\,\frac{a+b}{2}\cdot\mathrm{C}\,\frac{a-b}{2},$$

$$\mathrm{C}(n+1)x=2\,\mathrm{C}\,nx\cdot\text{Ↄ}x-\mathrm{C}(n-1)x,$$

$$\text{Ↄ}(n+1)x=2\,\text{Ↄ}\,nx\cdot\text{Ↄ}x-\text{Ↄ}(n-1)x.$$

Pour $n=0,\ 1,\ 2$, etc., on déduit de celles-ci :

$$\text{(I)}\left\{\begin{array}{l}\mathrm{C}x=\mathrm{C}x\,,\\ \mathrm{C}2x=\mathrm{C}x\cdot2\text{Ↄ}x\,,\\ \mathrm{C}3x=\mathrm{C}x\cdot[4\text{Ↄ}^2x-1]\,,\\ \mathrm{C}4x=\mathrm{C}x[8\text{Ↄ}^3x-4\text{Ↄ}x]\,,\\ \quad\text{etc.}\\ \mathrm{C}nx=\mathrm{M}\,.\end{array}\right.\qquad \text{(II)}\left\{\begin{array}{l}\text{Ↄ}x=\text{Ↄ}x\,,\\ \text{Ↄ}2x=2\text{Ↄ}^2x-1\,,\\ \text{Ↄ}3x=4\text{Ↄ}^3x-3\text{Ↄ}x\,,\\ \text{Ↄ}4x=8\text{Ↄ}^4x-8\text{Ↄ}^2x+1\,,\\ \quad\text{etc.}\\ \text{Ↄ}nx=\mathrm{M}'.\end{array}\right.$$

§ 14.

Résolution des équations $\mathrm{C}nx=\mathrm{M}$, $\text{Ↄ}nx=\mathrm{M}'$.

Les inconnus sont $z=\mathrm{C}x$, pour la 1re, $y=\sqrt{1-z^2}=\text{Ↄ}x$, pour la 2de, M et M′ sont les seconds membres des équations qui, pour $n=0,\ 1,\ 2,\ldots$ donnent (I) et (II).

1. ***Résolution de l'équation*** $\mathrm{C}nx=\mathrm{M}$.

1er Cas, $n=2m$.

On voit par (I) qu'on a $\mathrm{C}2mx=z\cdot y\cdot\psi(z^2)=z\sqrt{1-z^2}\cdot\psi(z^2)$.

Donc $\qquad \mathrm{C}^2 2mx=z^2(1-z^2)\cdot\psi^2(z^2)=\xi(z^2)\quad(1)$, donc

$$\mathrm{C}^2 2mx=\xi[\mathrm{C}^2x].\qquad(2)$$

Soit $z=\mathrm{C}a$, une racine de (1), on aura :

$$\mathrm{C}^2 2mx=\xi[\mathrm{C}^2a].\qquad(\alpha)$$

En changeant x en a, dans (2), on a :

$$\mathrm{C}^2 2ma=\xi[\mathrm{C}^2a].\qquad(\beta)$$

α) et (β) donnent :

$\mathrm{C}^2 2ma=\mathrm{C}^2 2mx$, d'où $\mathrm{C}2ma=\mathrm{C}2mx$ et $\mathrm{C}[-2ma]=\mathrm{C}2mx$ ou $\mathrm{C}[2ma]=-\mathrm{C}2mx$.

Par le § 9, ces deux équations donnent respectivement :

$$2ma=\pm k\pi+(-1)^k 2mx,\quad 2ma=\pm k\pi-(-1)^k 2mx,$$

on a donc :

$$2ma = \pm[k\pi + (-1)^k 2mx], \quad a = \pm\left[\frac{k}{2m}\pi + (-1)^k \cdot x\right];$$

donc $$z = \mathrm{C}a = \pm \mathrm{C}\left[\frac{k}{2m}\pi + (-1)^k \cdot x\right], \quad k = 0, 1, 2, \text{ etc.}$$

Soit $k = 2mh + k'$, $k' < 2m$, on a :

$$z = \mathrm{C}a = \pm \mathrm{C}\left[\frac{k'}{2m}\pi + (-1)^{k'} \cdot x + h\pi\right],$$
$$= \pm \mathrm{C}\left[\frac{k'}{2m}\pi + (-1)^{k'} \cdot x\right].$$

Il suffit donc de prendre pour k des valeurs plus petites que $2m$ ou faire $k = 0, 1, 2, \ldots 2m-1$.

2$^{\text{me}}$ Cas, $n = 2m+1$.

On voit par (I), que $\mathrm{C}2\overline{m+1}\,x$, est de la forme :

$$\mathrm{C}2\overline{m+1}\,x = z \cdot \psi(z^2),$$

donc $$\mathrm{C}^2 2\overline{m+1}\,x = z^2\psi^2(z^2) = \xi(z^2), \quad (1); \quad \text{et}$$
$$\mathrm{C}^2 2\overline{m+1}\,x = \xi[\mathrm{C}^2 x], \qquad (2)$$

Soit $z = \mathrm{C}a$ une racine de (1) on a $\mathrm{C}^2 2\overline{m+1}\,x = \xi[\mathrm{C}^2 a]$.

En changeant x en a dans (2) il vient :

$$\mathrm{C}^2 2\overline{m+1}\,a = \xi[\mathrm{C}^2 a], \quad \text{donc}$$
$$\mathrm{C}^2 2\overline{m+1}\,a = \mathrm{C}^2 2\overline{m+1}\,x.$$

Cette équation se partage en deux :

$$\mathrm{C}[2\overline{m+1}\,a] = \mathrm{C}[2\overline{m+1}\,x]$$
$$\mathrm{C}[2\overline{m+1}\,a] = -\mathrm{C}[2\overline{m+1}\,x];$$

d'où l'on déduit, comme ci-dessus :

$$z = \mathrm{C}a = \pm \mathrm{C}\left[\frac{k\pi}{2m+1} + (-1)^k x\right]. \qquad k = 0, 1, 2 \ldots 2m.$$

2. *Résoudre l'équation* $\text{ɔ}nx = \mathrm{M}'$.

Les équations (II) font voir que $\text{ɔ}nx$ est de la forme

$$\text{ɔ}nx = \psi(y), \qquad (1)$$
$$= \psi(\text{ɔ}x). \qquad (2)$$

Soit $y = \text{ɔ}a$ une racine de (1), on a $\text{ɔ}nx = \psi[\text{ɔ}a]$. Si l'on change x en a, dans (2), il vient : $\text{ɔ}na = \psi[\text{ɔ}a]$; de ces deux équations on conclut :

$$\text{ɔ}na = \text{ɔ}nx. \qquad (3)$$

En vertu du § 9, les racines de (3) sont

$$na=\pm[2k\pi \pm nx], \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

donc $\quad y=\text{ɔ}a=\text{ɔ}[\frac{2k}{n}\pi \pm x]$;

en fesant $k=nh+k'$, $k'<n$, on verra qu'il suffira de prendre $k<n$. De plus comme on a $\text{ɔ}[-x+\frac{2k\pi}{n}]=\text{ɔ}[x-\frac{2k\pi}{n}]$, on peut prendre le signe $+$ devant x, ce qui donnera :

$$y=\text{ɔ}[\frac{2k\pi}{n}+x]. \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n-1.$$

§ 15.

Transformation des Intégrales

$$a=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ x=\mathrm{C}a,\ a=\int_0^y \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}},\ y=\sqrt{1-x^2}=\text{ɔ}a.$$

1. Soit $u=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (2), d'où $x=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$ (1), on aura :

$$a=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^u \frac{du}{1+u^2}. \qquad (3)$$

Nous nommons $\mathrm{S}a$ la fonction inverse de (3), ce qui donne $u=\mathrm{S}a$; $a=\frac{1}{\mathrm{S}}u$, indiquera la réciproque de cette dernière équation.

2. Soit $v=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ (6), d'où $y=\frac{v}{\sqrt{1+v^2}}$ (5), on a :

$$a=\int_1^y \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}}=\int_{\frac{1}{0}}^v \frac{-dv}{1+v^2}\ (7),\ v=\text{Ƨ}a,\ a=\frac{1}{\text{Ƨ}}v.$$

$v=\text{Ƨ}a$ désigne la fonction inverse de (7), comme $a=\frac{1}{\text{Ƨ}}v$, représente l'inverse de la fonction $v=\text{Ƨ}a$.

§ 16.

Propriétés élémentaires des fonctions S, Ƨ, $\dfrac{1}{\mathrm{S}}$, $\dfrac{1}{\text{Ƨ}}$.

1. Les équat. (1) et (2) donnent $\mathrm{C}a=\dfrac{\mathrm{S}a}{\sqrt{1+\mathrm{S}^2a}}$, $\mathrm{S}a=\dfrac{\mathrm{C}a}{\text{Ɔ}a}$.

De $y=\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\dfrac{u^2}{1+u^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}$, on tire

$$\text{Ɔ}a=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{S}^2a}}.$$

2. Les équat. (5) et (6) donnent $\text{Ɔ}a=\dfrac{\text{Ƨ}a}{\sqrt{1+\text{Ƨ}^2a}}$, $\text{Ƨ}a=\dfrac{\text{Ɔ}a}{\mathrm{C}a}$.

De $x=\sqrt{1-y^2}=\sqrt{1-\dfrac{v^2}{1+v^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+v^2}}$, on tire

$$\mathrm{C}a=\frac{1}{\sqrt{1+\text{Ƨ}^2a}}.$$

3. Les équations (2) et (6) donnent :

$$uv=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\times\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\times\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=1.$$

Donc $\mathrm{S}a\cdot\text{Ƨ}a=1$, donc $\text{Ƨ}a=\dfrac{1}{\mathrm{S}a}$.

4. En intégrant $a=\displaystyle\int_0^u\frac{du}{1+u^2}$, on trouve :

$$a=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{1+\sqrt{-1}\,u}{1-\sqrt{-1}\,u}.\ \text{Donc}$$

$$\frac{1}{\mathrm{S}}u=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{1+\sqrt{-1}\cdot u}{1-\sqrt{-1}\cdot u},\ \text{ou}\ a=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{1+\sqrt{-1}\cdot\mathrm{S}a}{1-\sqrt{-1}\cdot\mathrm{S}a}.$$

Comme on a $\log\dfrac{1+x}{1-x}=2\left\{x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\text{etc.}\right\}$, il vient :

$$\frac{1}{\mathrm{S}}u=u-\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}-\text{etc.}\quad\text{ou}\quad a=\mathrm{S}a-\tfrac{1}{3}\mathrm{S}^3a+\tfrac{1}{5}\mathrm{S}^5a-\text{etc.}$$

5. De $u=\mathrm{S}a$ on tire $a=\dfrac{1}{\mathrm{S}}u$;

de $\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}=\mathrm{C}a$, on tire $a=\frac{1}{\mathrm{C}}\cdot\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$, donc :

$\frac{1}{\mathrm{S}}[\pm u]=\frac{1}{\mathrm{C}}[\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}]$, on a mis $\pm$, parce que le radical du second membre a deux valeurs.

On a : $u=\mathrm{S}a$, $a=\frac{1}{\mathrm{S}}u$; $\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}=\text{Ɔ}a$, donc

$$a=\frac{1}{\text{Ɔ}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\text{; on a donc }\frac{1}{\mathrm{S}}[\pm u]=\frac{1}{\text{Ɔ}}[\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}].$$

On a : $y=\text{Ɔ}a$, $a=\frac{1}{\text{Ɔ}}y$; $\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}=\mathrm{S}a$, $a=\frac{1}{\mathrm{S}}\cdot\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$;

$$\text{donc}\quad \frac{1}{\text{Ɔ}}(\pm y)=\frac{1}{\mathrm{S}}[\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}].$$

On a : $x=\mathrm{C}a$, $a=\frac{1}{\mathrm{C}}x$; $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\mathrm{S}a$, $a=\frac{1}{\mathrm{S}}\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,

$$\text{donc}\quad \frac{1}{\mathrm{C}}[\pm x]=\frac{1}{\mathrm{S}}[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}].$$

On a : $v=\text{Ƨ}a$, $a=\frac{1}{\text{Ƨ}}v$; $\frac{v}{\sqrt{1+v^2}}=\text{Ɔ}a$, $a=\frac{1}{\text{Ɔ}}\cdot\frac{v}{\sqrt{1+v^2}}$;

$$\text{donc}\quad \frac{1}{\text{Ƨ}}[\pm v]=\frac{1}{\text{Ɔ}}[\frac{v}{\sqrt{1+v^2}}].$$

On a : $v=\text{Ƨ}a$, $a=\frac{1}{\text{Ƨ}}v$; $\frac{1}{\sqrt{1+v^2}}=\mathrm{C}a$, $a=\frac{1}{\mathrm{C}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+v^2}}$,

$$\text{donc}\quad \frac{1}{\text{Ƨ}}(\pm v)=\frac{1}{\mathrm{C}}[\frac{1}{\sqrt{1+v^2}}].$$

6. $u=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, donne $u=0$ quand $x=0$. Mais $x=0$ donne $a=0$, donc $\mathrm{S}(0)=0$. Pour $x=1$, on a $u=\frac{1}{0}$, mais $x=1$ donne $a=\frac{\pi}{2}$, donc $\mathrm{S}(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{0}$, et $\frac{\pi}{2}=\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{du}{1+u^2}$.

7. Soit $-a=\int_0^u\frac{du}{1+u^2}$, $u=\mathrm{S}(-a)$. Dans $a=\int_0^u\frac{du}{1+u^2}$,

changeons u en $-u$, on a :

$$a=\int_0^{-u}\frac{d(-u)}{1+(-u)^2},\ -u=\mathrm{S}(a),\ \text{donc } u=-\mathrm{S}a;\ \text{donc } \mathrm{S}(-a)=-\mathrm{S}a.$$

On a de même $\text{Ƨ}(-a)=-\text{Ƨ}a$.

8. Soit $a+b=\frac{\pi}{2}=\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{du}{1+u^2}=\int_0^u\frac{du}{1+u^2}+\int_u^{\frac{1}{0}}\frac{du}{1+u^2}$; donc en posant $a=\int_0^u\frac{du}{1+u^2}$, $u=\mathrm{S}a$, on a $b=\int_u^{\frac{1}{0}}\frac{du}{1+u^2}=\int_{\frac{1}{0}}^u\frac{-du}{1+u^2}$, donc $u=\text{Ƨ}b$; donc $\mathrm{S}a=\text{Ƨ}b=\text{Ƨ}(\frac{\pi}{2}-a)$.

9. Soit $a+b=\pi=\int_0^{0'}\frac{du}{1+u^2}=\int_0^u\frac{du}{1+u^2}+\int_u^{0'}\frac{du}{1+u^2}$; donc en posant $a=\int_0^u\frac{du}{1+u^2}$, $u=\mathrm{S}a$, on a $b=\int_u^{0'}\frac{du}{1+u^2}$, donc $-b=\int_0^u\frac{du}{1+u^2}$, $u=\mathrm{S}(-b)=-\mathrm{S}b$.

Donc $$\mathrm{S}a=-\mathrm{S}b=-\mathrm{S}(\pi-a).$$

10. De $\mathrm{S}a=\text{Ƨ}(\frac{\pi}{2}-a)$, en fesant $a=\frac{\pi}{4}$, on tire :

$$\mathrm{S}\,\frac{\pi}{4}=\text{Ƨ}\,\frac{\pi}{4}=1.$$

§ 17.

Valeurs de S a , Ƨ a *correspondantes aux amplitudes*

$$\mathrm{a}=\pm(4\mathrm{n}+1)\frac{\pi}{2},\ \pm(4\mathrm{n}+2)\frac{\pi}{2},\ \text{etc.}$$

1. *Valeurs de* S a.

On a $$u=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}};\ \text{donc}$$

pour $a=(4n+1)\frac{\pi}{2}$, ayant $x=1$, on a $u=\frac{1}{0}$,

» $a=-(4n+1)\frac{\pi}{2}$, » $x=-1$, » $u=-\frac{1}{0}$,

» $a=(4n+2)\frac{\pi}{2}$, » $x=0$, » $u=0$,

» $a=-(4n+2)\frac{\pi}{2}$, » $x=0$, » $u=0$,

» $a=(4n+3)\frac{\pi}{2}$, » $x=-1$, » $u=-\frac{1}{0}$,

» $a=-(4n+3)\frac{\pi}{2}$, » $x=1$, » $u=\frac{1}{0}$,

» $a=4n\cdot\frac{\pi}{2}$, » $x=0$, » $u=0$,

» $a=-4n\cdot\frac{\pi}{2}$, » $x=0$, » $u=0$.

2. *Valeurs de* Ƨa.

On a : $$v=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}};$$ donc

pour $a=(4n+1)\frac{\pi}{2}$, ayant $y=0$, on a $v=0$,

» $a=-(4n+1)\frac{\pi}{2}$ » $y=0$, » $v=0$,

» $a=(4n+2)\frac{\pi}{2}$, » $y=-1$, » $v=-\frac{1}{0}$,

» $a=-(4n+2)\frac{\pi}{2}$, » $y=-1$, » $v=-\frac{1}{0}$,

» $a=(4n+3)\frac{\pi}{2}$, » $y=0$, » $v=0$,

» $a=-(4n+3)\frac{\pi}{2}$, » $y=0$, » $v=0$,

» $a=4n\cdot\frac{\pi}{2}$, » $y=1$, » $v=\frac{1}{0}$,

» $a=-4n\cdot\frac{\pi}{2}$, » $y=1$, » $v=\frac{1}{0}$.

§ 18.

Résolution des équations
$\mathrm{S}a=0,\ \frac{1}{0},\ -\frac{1}{0},\quad \mathfrak{S}a=0,\ \frac{1}{0},\ -\frac{1}{0}.$

1. *Résolution des équations* $\mathrm{S}a=0,\frac{1}{0},-\frac{1}{0}$.

$\mathrm{S}a=0$, d'après le § 17, répond à $a=\overline{2n+1}.\pi$, $-(2n+1)\pi$, $2n.\pi$, $-2n\pi$, donc $a=\pm k\pi$, $k=0, 1, 2, \ldots$

$\mathrm{S}a=\frac{1}{0}$, d'après le § 17, répond à

$$a=(2n+\tfrac{1}{2})\pi,\ -(2n+1+\tfrac{1}{2})\pi,\ \text{donc}$$
$$a=(-1)^k[k+\tfrac{1}{2}]\pi,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

$\mathrm{S}a=-\frac{1}{0}$, d'après le § 17, répond à

$$a=-(2n+\tfrac{1}{2})\pi,\ (2n+1+\tfrac{1}{2})\pi,\quad \text{donc}$$
$$a=-(-1)^k[k+\tfrac{1}{2}]\pi,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

2. *Résolution des équations* $\mathfrak{S}a=0,\ \frac{1}{0},\ -\frac{1}{0}$.

$\mathfrak{S}a=0$, répond à $a=(2n+\frac{1}{2})\pi$, $-(2n+\frac{1}{2})\pi$, $(2n+1+\frac{1}{2})\pi$, $-(2n+1+\frac{1}{2})\pi$, donc $a=\pm(k+\frac{1}{2})\pi$, $k=0, 1, 2, \ldots$

$\mathfrak{S}a=\frac{1}{0}$, répond à $a=2n.\pi$, $-2n\pi$, donc $a=\pm 2k\pi$, $k=0, 1, 2, \ldots$

$\mathfrak{S}a=-\frac{1}{0}$, répond à $a=(2n+1)\pi$, $-(2n+1)\pi$, donc

$$a=\pm(2k+1)\pi,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

§ 19.

Décomposition de $\mathrm{S}a$, $\mathfrak{S}a$ *en facteurs.*

1. $\mathrm{S}a=0$ donne $a=\pm k\pi$, $a^2=k^2\pi^2$, $1-\dfrac{a^2}{k^2\pi^2}=0$,

$$a=0 \text{ pour } k=0,\ \text{donc } \mathrm{S}a=a\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{a^2}{k^2\pi^2}\right). \qquad (*)$$

(*) Le produit des facteurs qui répondent à $\mathrm{S}a=0$ donne, comme l'on voit, $\mathrm{C}a$; cela provient de ce que $\mathrm{S}a=\mathrm{C}a\cdot\dfrac{1}{\mathrm{C}a}$, et que $\dfrac{1}{\mathrm{C}a}=0$, n'a pas de racines réelles. De même le produit qui répond à $\mathfrak{S}a$ donne $\mathfrak{D}a$, à cause de $\mathfrak{S}a=\mathfrak{D}a\cdot\dfrac{1}{\mathrm{C}a}$, et que $\mathrm{C}a=\infty$ n'a pas de racines réelles.

2. $\text{Ƨ}a=0$ donne $a=\pm(k+\frac{1}{2})\pi=\pm\left(\frac{2k+1}{2}\right)\pi$,

$$a^2=\frac{(2k+1)^2\pi^2}{2^2}\ ,\quad 1-\frac{2^2a^2}{(2k+1)^2\pi^2}=0\ ,$$

donc
$$\text{Ƨ}a=\prod_{0\,k}^{\infty}\left(1-\frac{2^2a^2}{\overline{2k+1}^2\pi^2}\right).$$

§ 20.

Valeurs de S *et* Ƨ *correspondantes aux amplitudes*

$$a=\pm[4\,\overline{n+1}\frac{\pi}{2}\pm\alpha]\ ,\ \pm[4\,\overline{n+2}\frac{\pi}{2}\pm\alpha]\ ,\ \text{etc.}$$

Comme aux limites $u=0,\ \frac{1}{0},\ 0',\ -\frac{1}{0}$, $v=\frac{1}{0},\ 0,\ -\frac{1}{0},\ 0'$, répondent respectivement les amplitudes

$$a=4n\cdot\frac{\pi}{2},\ \overline{4n+1}\cdot\frac{\pi}{2},\ \overline{4n+2}\cdot\frac{\pi}{2},\ \overline{4n+3}\cdot\frac{\pi}{2}\ ,$$

nous pourrions procéder, pour la détermination des valeurs en question , comme nous avons fait au § 8 , c'est ainsi qu'en posant :

$$a=\overline{4n+1}\,\frac{\pi}{2}+\alpha=\int_0^u\frac{du}{1+u^2}=\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{du}{1+u^2}+\int_{\frac{1}{0}}^{u}\frac{du}{1+u^2}\ ,$$

$u=\mathrm{S}[\,\overline{4n+1}\,\frac{\pi}{2}+\alpha\,]$, on aurait

$$\alpha=\int_{\frac{1}{0}}^{u}\frac{du}{1+u^2}\ ,\quad -\alpha=\int_{\frac{1}{0}}^{u}\frac{-du}{1+u^2}\ ,\quad u=\text{Ƨ}(-\alpha)=-\text{Ƨ}\alpha,\ \text{donc}$$

$$\mathrm{S}[\overline{4n+1}\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha]=-\text{Ƨ}\alpha,\ \text{et}$$

$$\mathrm{S}[-(\overline{4n+1}\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha)]=\text{Ƨ}\alpha;$$

et en posant :

$$a=\overline{4n+1}\cdot\frac{\pi}{2}-\alpha=\int_0^u\frac{du}{1+u^2}=\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{du}{1+u^2}+\int_{\frac{1}{0}}^{u}\frac{du}{1+u^2},$$

$u=\mathrm{S}[\overline{4n+1}\cdot\frac{\pi}{2}-\alpha\,]$ on aurait :

$$-\alpha=\int_{\frac{1}{0}}^{u}\frac{du}{1+u^2},\quad \alpha=\int_{\frac{1}{0}}^{u}\frac{-du}{2+u^2},\quad u=\text{Ƨ}(\alpha),\ \text{donc}$$

$$\mathrm{S}[\overline{4n+1}\cdot\frac{\pi}{2}-\alpha]=\text{Ƨ}\alpha,$$

$$\mathrm{S}[-(\overline{4n+1}\,\frac{\pi}{2}-\alpha)]=-\text{Ƨ}\alpha,\quad \text{d'où :}$$

$$\mathrm{S}[\overline{4n+1}\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha]=-\mathrm{S}[\overline{4n+1}\cdot\frac{\pi}{2}-\alpha]=-\text{Ƨ}\alpha.$$

Mais il est plus facile de former ces valeurs à l'aide de celles du § 8, et de la formule $\mathrm{S}a=\dfrac{\mathrm{C}a}{\text{Ɔ}a}$.

1. *Détermination des valeurs de* Sα.

On a :

$$\mathrm{S}[\overline{4n+1}\,\frac{\pi}{2}-\alpha]=\frac{\text{Ɔ}\alpha}{\mathrm{C}\alpha}=\text{Ƨ}\alpha,\quad \mathrm{S}[\overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2}-\alpha]=\frac{\mathrm{C}\alpha}{-\text{Ɔ}\alpha}=-\mathrm{S}\alpha,$$

$$\mathrm{S}[-(\overline{4n+1}\,\frac{\pi}{2}-\alpha)]=\frac{-\text{Ɔ}\alpha}{\mathrm{C}\alpha}=-\text{Ƨ}\alpha,$$

$$\text{Ƨ}[-(\overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2}+\alpha)]=\frac{-\mathrm{C}\alpha}{-\text{Ɔ}\alpha}=\mathrm{S}\alpha,$$

$$\mathrm{S}[\overline{4n+1}\,\frac{\pi}{2}+\alpha]=\frac{\text{Ɔ}\alpha}{-\mathrm{C}\alpha}=-\text{Ƨ}\alpha,\quad \mathrm{S}[\overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2}+\alpha]=\frac{-\mathrm{C}\alpha}{-\text{Ɔ}\alpha}=\mathrm{S}\alpha,$$

$$\mathrm{S}[-(\overline{4n+1}\,\frac{\pi}{2}+\alpha)]=\frac{-\text{Ɔ}\alpha}{-\mathrm{C}\alpha}=\text{Ƨ}\alpha,$$

$$\text{Ƨ}[-(\overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2}+\alpha)]=\frac{\mathrm{C}\alpha}{-\text{Ɔ}\alpha}=-\mathrm{S}\alpha,$$

$$\mathrm{S}[\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}-\alpha]=\frac{-\text{Ɔ}\alpha}{-\mathrm{C}\alpha}=\text{Ƨ}\alpha,\quad \mathrm{S}[4n\cdot\frac{\pi}{2}-\alpha]=\frac{-\mathrm{C}\alpha}{\text{Ɔ}\alpha}=-\mathrm{S}\alpha,$$

$$\mathrm{S}[-(\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}-\alpha)]=\frac{\text{Ɔ}\alpha}{-\mathrm{C}\alpha}=-\text{Ƨ}\alpha,$$

$$\mathrm{S}[-(4n\cdot\frac{\pi}{2}-\alpha)]=\frac{\mathrm{C}\alpha}{\text{Ɔ}\alpha}=\mathrm{S}\alpha,$$

$$\mathrm{S}[\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}+\alpha]=\frac{-\text{Ɔ}\alpha}{\mathrm{C}\alpha}=-\text{Ƨ}\alpha,\quad \mathrm{S}[4n\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha]=\frac{\mathrm{C}\alpha}{\text{Ɔ}\alpha}=\mathrm{S}\alpha,$$

$$\mathrm{S}[-(\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}+\alpha)]=\frac{\text{Ɔ}\alpha}{\mathrm{C}\alpha}=\text{Ƨ}\alpha,$$

$$\mathrm{S}[-(4n\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha)]=\frac{-\mathrm{C}\alpha}{\text{Ɔ}\alpha}=-\mathrm{S}\alpha.$$

2. *Détermination des valeurs de* $\text{Ƨ}a$.

Elles sont contenues dans le tableau précédent à cause de la relation $\text{Ƨ}a = \dfrac{1}{\mathrm{S}a}$.

En rapprochant ces valeurs, on en conclut les égalités suivantes, qui règlent les signes, et le calcul des fonctions S et Ƨ pour des amplitudes qui surpassent $\dfrac{\pi}{2}$; on a :

$$\mathrm{S}[\overline{4n+1}\frac{\pi}{2}+\alpha] = -\mathrm{S}[\overline{4n+1}\frac{\pi}{2}-\alpha] = -\text{Ƨ}\alpha,$$

$$\mathrm{S}[\overline{4n+2}\frac{\pi}{2}+\alpha] = -\mathrm{S}[\overline{4n+2}\frac{\pi}{2}-\alpha] = \mathrm{S}\alpha,$$

$$\mathrm{S}[\overline{4n+3}\frac{\pi}{2}+\alpha] = -\mathrm{S}[\overline{4n+3}\frac{\pi}{2}-\alpha] = -\text{Ƨ}\alpha,$$

$$\mathrm{S}[4n\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha] = -\mathrm{S}[4n\cdot\frac{\pi}{2}-\alpha] = \mathrm{S}\alpha.$$

§ 21.

Résolution des équations $\mathrm{S}a = \mathrm{S}\alpha$, $-\mathrm{S}\alpha$, $\text{Ƨ}\alpha$, $-\text{Ƨ}\alpha$.

1. $\mathrm{S}a = \mathrm{S}\alpha$ donne $a = \begin{cases} -\overline{2n+1}\,\pi+\alpha, \\ \overline{2n+1}\,\pi+\alpha, \\ -2n\pi+\alpha, \\ +2n\pi+\alpha, \end{cases}$

donc $a = \pm k\pi + \alpha$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

2. $\mathrm{S}a = -\mathrm{S}\alpha$ donne $a = \begin{cases} \overline{2n+1}\,\pi-\alpha, \\ -\overline{2n+1}\,\pi-\alpha, \\ 2n\pi-\alpha, \\ -2n\pi-\alpha, \end{cases}$

d'où $a = \pm k\pi - \alpha$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

3. $\mathrm{S}a = \text{Ƨ}\alpha$ donne $a = \begin{cases} [\overline{2n+\frac{1}{2}}\cdot\pi-\alpha], \\ -[\overline{2n+\frac{1}{2}}\cdot\pi-\alpha], \\ [\overline{2n+1+\frac{1}{2}}\cdot\pi-\alpha], \\ -[\overline{2n+1+\frac{1}{2}}\cdot\pi+\alpha], \end{cases}$

d'où $a = \pm[(k+\frac{1}{2})\pi-\alpha]$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

4. $\mathrm{S}a = -\mathrm{S}\alpha$ donne $a = \begin{cases} -(2n+\frac{1}{2})\pi + \alpha, \\ +(2n+\frac{1}{2})\pi + \alpha, \\ -(2n+1+\frac{1}{2})\pi + \alpha, \\ +(2n+1+\frac{1}{2})\pi + \alpha, \end{cases}$

d'où $a = \pm(k+\frac{1}{2})\pi + \alpha,\ k = 0, 1, 2, \ldots$

§ 22.

Décomposition des binômes $\mathrm{S}a - \mathrm{S}\alpha$, $\mathrm{S}a + \mathrm{S}\alpha$, $\mathrm{S}a - \mathrm{S}\alpha$, $\mathrm{S}a + \mathrm{S}\alpha$, *en facteurs.*

1. $\mathrm{S}a - \mathrm{S}\alpha = 0$ donne $a = +k\pi + \alpha$ ou $1 - \frac{a}{k\pi+\alpha} = 0$,

$a = -k\pi + \alpha$ » $1 + \frac{a}{k\pi - \alpha} = 0$,

donc

$$\mathrm{S}a - \mathrm{S}\alpha = \prod_{0k}^{\infty}\left\{\left(1 - \frac{a}{k\pi+\alpha}\right)\left(1 + \frac{a}{k\pi - \alpha}\right)\right\}.$$

2. $\mathrm{S}a + \mathrm{S}\alpha = 0$ donne $a = +k\pi - \alpha$ ou $1 - \frac{a}{k\pi - \alpha} = 0$,

$a = -k\pi - \alpha$ » $1 + \frac{a}{k\pi + \alpha} = 0$,

donc

$$\mathrm{S}a + \mathrm{S}\alpha = \prod_{0k}^{\infty}\left\{\left(1 - \frac{a}{k\pi - \alpha}\right)\left(1 + \frac{a}{k\pi + \alpha}\right)\right\}.$$

3. $\mathrm{S}a - \mathrm{S}\alpha = 0$ donne $a = \pm[(k+\frac{1}{2})\pi - \alpha]$,

$a^2 = [(k+\frac{1}{2})\pi - \alpha]^2$ ou $1 - \frac{a^2}{[(k+\frac{1}{2})\pi - \alpha]^2} = 0$,

donc

$$\mathrm{S}a - \mathrm{S}\alpha = \prod_{0k}^{\infty}\left\{1 - \frac{a^2}{[(k+\frac{1}{2})\pi - \alpha]^2}\right\}.$$

4. $\mathrm{S}a + \mathrm{S}\alpha = 0$ donne $a = (k+\frac{1}{2})\pi + \alpha$ ou $1 - \frac{a}{(k+\frac{1}{2})\pi + \alpha} = 0$,

$a = -(k+\frac{1}{2})\pi + \alpha$ » $1 + \frac{a}{(k+\frac{1}{2})\pi - \alpha} = 0$,

donc

$$\mathrm{S}a + \mathrm{S}\alpha = \prod_{0k}^{\infty}\left\{\left(1 - \frac{a}{(k+\frac{1}{2})\pi + \alpha}\right)\left(1 + \frac{a}{(k+\frac{1}{2})\pi - \alpha}\right)\right\}.$$

§ 23.

Développement de $S[a \pm b]$.

Soient $a+b=\int_0^w \frac{dw}{1+w^2}$, $a=\int_0^u \frac{du}{1+u^2}$, $b=\int_0^z \frac{dz}{1+z^2}$,

on aura $\quad w=S(a+b)$, $u=Sa$, $z=Sb$.

z est la valeur de w pour $u=0$, on pourra écrire :

$$\int \frac{dw}{1+w^2}=\int \frac{du}{1+u^2}+\text{const.},\ \text{d'où}\ \frac{dw}{1+w^2}=\frac{du}{1+u^2},$$

ou $\quad dw(1+u^2)-du(1+w^2)=0.$

En multipliant cette équation par le facteur $\frac{1}{(1+wu)^2}$, on a l'équation différentielle exacte

$$\frac{dw(1+u^2)-du(1+w^2)}{(1+wu)^2}=d\frac{w-u}{1+wu}=0\,;$$

en intégrant, il vient : $\frac{w-u}{1+wu}=\text{const.}$ Pour $u=0$,

on a $w=\text{const.}=z$, donc $\frac{w-u}{1+wu}=z$, d'où :

$$w=\frac{u+z}{1-uz},\ \text{ou}\ S(a+b)=\frac{Sa+Sb}{1-SaSb}. \qquad (a)$$

On a donc aussi :

$$S(a-b)=\frac{Sa-Sb}{1+SaSb}. \qquad (b)$$

Comme on a : $a+b=\frac{1}{S}\left[\frac{u+z}{1-uz}\right]$, $a=\frac{1}{S}u$, $b=\frac{1}{S}z$,

il vient : $\frac{1}{S}u+\frac{1}{S}z=\frac{1}{S}\left[\frac{u+z}{1-uz}\right]$.

Des formules (a) et (b) on en déduit plusieurs autres par les procédés ordinaires, c'est ainsi que l'on a :

$$S(2a)=\frac{2Sa}{1-S^2a},\ S\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=\frac{1+S\frac{a}{2}}{1-S\frac{a}{2}}=\frac{\text{Ɔ}\frac{a}{2}+C\frac{a}{2}}{\text{Ɔ}\frac{a}{2}-C\frac{a}{2}}=$$

$$\frac{1+Ca}{Ca}=\frac{Ca}{1-Ca}\,;\quad \text{donc}\quad S\left[\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right]=\sqrt{\left\{\frac{1+Ca}{1-Ca}\right\}}.$$

§ 24.

Autres transformations des expressions

$$a=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,,\quad a=\int_1^y \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}}\,.$$

1. Soit $t=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, d'où $x=\dfrac{\sqrt{t^2-1}}{t}$, on aura :

$$a=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_1^t \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}\,,$$ fesons la réciproque $t=\mathfrak{J}a$,

et $a=\dfrac{1}{\mathfrak{J}}t.$

2. Soit $r=\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, d'où $y=\dfrac{\sqrt{r^2-1}}{r}$, on aura :

$$a=\int_1^y \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}}=\int_{\frac{1}{0}}^r \frac{-dr}{r\sqrt{r^2-1}}\,,$$ fesons l'inverse $r=\mathfrak{l}a$; et

$a=\dfrac{1}{\mathfrak{l}}r.$

§ 25.

Propriétés élémentaires des fonctions $\mathfrak{J}a$, $\mathfrak{l}a$ *et de leurs inverses.*

1. $t=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1}{y}$, donne $\mathfrak{J}a=\dfrac{1}{\text{Ɔ}a}$.

2. $x=\dfrac{\sqrt{t^2-1}}{t}$, donne $\mathfrak{C}a=\dfrac{\sqrt{\mathfrak{J}^2a-1}}{\mathfrak{J}a}$.

3. $\left.\begin{array}{l} a=\dfrac{1}{\mathfrak{J}}t \\ a=\dfrac{1}{\mathfrak{C}}x \end{array}\right\}$ donnent $\dfrac{1}{\mathfrak{C}}(\pm x)=\dfrac{1}{\mathfrak{J}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{1}{\mathrm{J}}\,t \\ a &= \frac{1}{\text{Ɔ}}\,y \end{aligned}\right\} \quad \text{donnent} \quad \frac{1}{\text{Ɔ}}\,y = \frac{1}{\mathrm{J}}\left(\frac{1}{y}\right), \quad \text{ou}$$

$$\frac{1}{\text{Ɔ}}\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{\mathrm{J}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right);$$

4. $r = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \dfrac{1}{x}$ donne $\text{ʇ}a = \dfrac{1}{\mathrm{C}a}$;

$y = \dfrac{\sqrt{r^2-1}}{r}$ donne $\text{Ɔ}a = \dfrac{\sqrt{\text{ʇ}^2 a - 1}}{\text{ʇ}a}$;

5. $$\left.\begin{aligned} a &= \frac{1}{\text{ʇ}}\,r \\ a &= \frac{1}{\mathrm{C}}\,x \end{aligned}\right\} \quad \text{donnent} \quad \frac{1}{\mathrm{C}}\,x = \frac{1}{\text{ʇ}}\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{1}{\text{ʇ}}\,r \\ a &= \frac{1}{\text{Ɔ}}\,y \end{aligned}\right\} \quad \text{donnent} \quad \frac{1}{\text{Ɔ}}\,y = \frac{1}{\text{ʇ}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right), \quad \text{ou}$$

$$\frac{1}{\text{Ɔ}}\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{\text{ʇ}}\left(\frac{1}{x}\right).$$

6. $t=1$ donne $x=0$, donc pour $a=0$, on a $t=1$ ou $\mathrm{J}(0)=1$;

$t=\frac{1}{0}$ donne $x=1$, donc $a=\dfrac{\pi}{2}$, donc

$$\mathrm{J}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{0}, \quad \frac{\pi}{2} = \int_1^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}.$$

7. Si l'on pose $\quad -a = \displaystyle\int_1^t \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$, on a $\quad t = \mathrm{J}(-a)$,

l'équation précédente donne

$$a = \int_1^t \frac{-dt}{t\sqrt{t^2-1}}; \quad \text{soit} \quad t = \frac{1}{y}, \quad \text{on aura}$$

$$a=\int_1^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}, \quad -a=\int_1^y \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}}, \quad y=\text{Ↄ}(-a)=\text{Ↄ}a,$$

donc $t=\dfrac{1}{\text{Ↄ}a}=-\text{J}a$; donc $\text{J}(-a)=\text{J}a$.

8. Si l'on pose $-a=\displaystyle\int_{\frac{1}{0}}^r \frac{-dr}{r\sqrt{r^2-1}}$, on a $r=\mathfrak{l}(-a)$,

l'équation précédente donne

$$a=\int_{\frac{1}{0}}^r \frac{dr}{r\sqrt{r^2-1}}; \text{ soit } r=\frac{1}{x}, \text{ on aura } -a=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

d'où $x=\text{C}(-a)=-\text{C}a$; donc

$$r=-\frac{1}{\text{C}a}=-\mathfrak{l}a; \text{ on a donc } \mathfrak{l}(-a)=-\mathfrak{l}a.$$

9. Si dans $a=\displaystyle\int_1^t \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$, $t=\text{J}(a)$, on pose $u=\sqrt{t^2-1}$,

donc $t=\sqrt{1+u^2}$, on trouve

$$a=\int_1^t \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}=\int_0^u \frac{du}{1+u^2}, \quad u=\text{S}a;$$

donc $\text{S}a=\sqrt{\text{J}^2a-1}$, $\text{J}a=\sqrt{1+\text{S}^2a}$.

10. Si dans $a=\displaystyle\int_{\frac{1}{0}}^r \frac{-dr}{r\sqrt{r^2-1}}$, on pose $v=\sqrt{r^2-1}$,

donc $r=\sqrt{1+v^2}$, on aura :

$$a=\int_{\frac{1}{0}}^r \frac{-dr}{r\sqrt{r^2-1}}=\int_{\frac{1}{0}}^v \frac{-dv}{1+v^2}, \quad v=\text{Ƨ}a;$$

donc $\text{Ƨ}a=\sqrt{\mathfrak{l}^2a-1}$, $\mathfrak{l}a=\sqrt{1+\text{Ƨ}^2a}$.

§ 26.

Valeurs extrêmes des fonctions J, I.

$a = 4\overline{n+1}\,\frac{\pi}{2}$, donne $y = 0$, donc $t = \frac{1}{0}$,

$a = 4\overline{n+1}\,\frac{\pi}{2}$, » $x = 1$, » $r = 1$,

$a = (4n+2)\,\frac{\pi}{2}$, » $y = -1$, » $t = -1$,

$a = (4n+2)\,\frac{\pi}{2}$, » $x = 0$, » $r = \frac{1}{0}$,

$a = (4n+3)\,\frac{\pi}{2}$, » $y = 0$, » $t = \frac{1}{0}$,

$a = (4n+3)\,\frac{\pi}{2}$, » $x = -1$, » $r = -1$,

$a = 4n \cdot \frac{\pi}{2}$, » $y = 1$, » $t = 1$,

$a = 4n \cdot \frac{\pi}{2}$, » $x = 0$, » $r = \frac{1}{0}$.

DEUXIÈME PARTIE.

PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE $a=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$,

OU DES FONCTIONS HYPERBOLIQUES.

§ 1.

Définitions et notations.

Dans $a=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, je pose $x=\dot{\mathrm{C}}a$; $\dot{\mathrm{C}}$ sera un signe de fonction; je désignerai l'inverse de l'équation $x=\dot{\mathrm{C}}a$ par $a=\frac{1}{\dot{\mathrm{C}}}x$, a se nomme l'amplitude de x.

Soit $y=\sqrt{1+x^2}$, l'intégrale ci-dessus deviendra

$a=\int_1^y \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}$; l'inverse y de cette intégrale sera marquée par $y=\dot{\text{Ɔ}}a$, $\dot{\text{Ɔ}}a$ étant un signe de fonction. L'inverse de $y=\dot{\text{Ɔ}}a$ sera désignée par

$a=\frac{1}{\dot{\text{Ɔ}}}y=\frac{1}{\dot{\text{Ɔ}}}\sqrt{1-x^2}$; a sera l'amplitude de y.

§ 2.

Propriétés élémentaires des fonctions $\dot{\mathrm{C}}$ et $\dot{\text{Ɔ}}$.

1. La relation $y=\sqrt{1+x^2}$ donne $\dot{\text{Ɔ}}a=\sqrt{1+\dot{\mathrm{C}}^2a}$, ou $\dot{\text{Ɔ}}^2a-\dot{\mathrm{C}}^2a=1$.

2. x et y croissent indéfiniment avec a. Pour $x=0$ on a

$$a=\int_0^0 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=0, \quad \text{donc} \quad \dot{\mathrm{C}}(0)=0\ ;$$

pour $y=1$ on a $a=\int_1^1 \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}=0$, donc $\dot{\text{Ɔ}}(0)=1$.

3. Soit $-a=\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, on a $x=\dot{\text{C}}(-a)$.

Changeons x en $-x$, on a $a=\int_0^{-x} \frac{d(-x)}{\sqrt{1+(-x)^2}}$, donc

$-x=\dot{\text{C}}a$, $x=-\dot{\text{C}}a$. On a donc $\dot{\text{C}}(-a)=-\dot{\text{C}}a$.

On a $y=\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+(-x)^2}$, donc $\dot{\text{Ɔ}}(-a)=\dot{\text{Ɔ}}a$.

4. $$a=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\int_0^x (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx=x-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}x^3+\frac{1.3}{2.4}\cdot\tfrac{1}{5}x^5-\text{etc.}$$

§ 3.

Relations entre les fonctions $\dot{\text{C}}$, $\dot{\text{Ɔ}}$ *et* C, Ɔ, *pour des amplitudes imaginaires.*

1. Soit $a\sqrt{-1}=\int_1^y \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}$, $y=\dot{\text{Ɔ}}(a\sqrt{-1})$;

alors il vient $a=\frac{1}{\sqrt{-1}}\int_1^y \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}=\int_1^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$;

donc $$-a=\int_1^y \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}},$$ donc $y=\text{Ɔ}(-a)=\text{Ɔ}a$,

on a donc $$\dot{\text{Ɔ}}(a\sqrt{-1})=\text{Ɔ}a.$$

2. On a $$-\text{C}^2a=\text{Ɔ}^2a-1=\dot{\text{Ɔ}}^2(a\sqrt{-1})-1=\dot{\text{C}}^2(a\sqrt{-1}),$$

donc : $$\dot{\text{C}}(a\sqrt{-1})=\sqrt{-1}\cdot\text{C}a$$

3. Soit $a\sqrt{-1}=\int\limits_1^y \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}}$, donc $y=\text{Ↄ}(a\sqrt{-1})$.

Mais l'équation précédente peut s'écrire :

$$-a=\int\limits_1^y \frac{dy}{\sqrt{-1}\sqrt{1^2-y^2}}=\int\limits_1^y \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}\text{, donc}$$

$$y=\dot{\text{Ↄ}}(-a)=\dot{\text{Ↄ}}a.\text{ On a donc } \text{Ↄ}(a\sqrt{-1})=\dot{\text{Ↄ}}(a).$$

4. On a $\quad C^2(a\sqrt{-1})=1-\text{Ↄ}^2(a\sqrt{-1})=1-\dot{\text{Ↄ}}^2a=-\dot{C}^2a$,

donc $$C(a\sqrt{-1})=\sqrt{-1}.\dot{C}a.$$

§ 4.

Calcul et dérivées des fonctions $\dot{\text{Ↄ}}a$, $\dot{C}a$.

1. On a : $da=\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$, $dx=\frac{d\dot{C}a}{da}\cdot da$, donc en multipliant : $1=\frac{d\dot{C}a}{da}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, donc $\frac{d\dot{C}a}{da}=\dot{\text{Ↄ}}a$.

2. $da=\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}$, $dy=\frac{d\dot{\text{Ↄ}}a}{da}\cdot da$, donc en multipliant :

$$1=\frac{d\dot{\text{Ↄ}}a}{da}\cdot\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}\text{, donc }\frac{d\dot{\text{Ↄ}}a}{da}=\dot{C}a.$$

3. On trouve, par des différentiations consécutives :

$$\frac{d^2\dot{C}a}{da^2}=\frac{d\dot{\text{Ↄ}}a}{da}=\dot{C}a,\quad \frac{d^2\dot{\text{Ↄ}}a}{da^2}=\frac{d\dot{C}a}{da}=\dot{\text{Ↄ}}a,$$

$$\frac{d^3\dot{C}a}{da^3}=\frac{d\dot{C}a}{da}=\dot{\text{Ↄ}}a,\quad \frac{d^3\dot{\text{Ↄ}}a}{da^3}=\frac{d\dot{\text{Ↄ}}a}{da}=\dot{C}a.$$

etc.

4. On a :

$$\dot{C}a=\dot{C}(0)+\frac{d\dot{C}(0)}{da}\cdot a+\frac{d^2\dot{C}(0)}{da^2}\cdot\frac{a^2}{1.2}+\text{etc.}=a+\frac{a^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

$$\dot{\text{Ↄ}}a=\dot{\text{Ↄ}}(0)+\frac{d\dot{\text{Ↄ}}(0)}{da}\cdot a+\frac{d^2\dot{\text{Ↄ}}(0)}{da^2}\cdot\frac{a^2}{1.2}+\text{etc.}=1+\frac{a^2}{1.2}+\text{etc.}$$

§ 5.

Valeurs de $\dot{\mathrm{C}}$a *et* $\dot{\mathfrak{S}}$a *correspondantes à*

$$a=\pm(4\overline{n+1}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}),\quad \pm(4\overline{n+2}\cdot\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}),\ \text{etc.}$$

1. *Valeurs de* $\dot{\mathrm{C}}$a.

Soit $a=(4\overline{n+1}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{-1})=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$, d'où

$$x=\dot{\mathrm{C}}[4\overline{n+1}\,\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{-1}]=\sqrt{-1}\,.\,\mathrm{C}[4\overline{n+1}\cdot\frac{\pi}{2}]=\sqrt{-1}\,,$$

$$a=-(4\overline{n+1}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{-1})=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}\qquad\text{d'où}$$

$$x=-\dot{\mathrm{C}}[4\overline{n+1}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}]=-\sqrt{-1}\cdot\mathrm{C}[4\overline{n+1}\cdot\frac{\pi}{2}]=-\sqrt{-1}\,,$$

$$a=(4\overline{n+2}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{-1})=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}\,,\qquad\text{d'où}$$

$$x=\dot{\mathrm{C}}[4\overline{n+2}.\,\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}]=\sqrt{-1}.\mathrm{C}[4\overline{n+2}\cdot\frac{\pi}{2}]=0\,,$$

$$a=-(4\overline{n+2}.\,\frac{\pi}{2}\sqrt{-1})=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}\,,\qquad\text{d'où}$$

$$x=-\dot{\mathrm{C}}[4\overline{n+2}\cdot\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}]=-\sqrt{-1}\cdot\mathrm{C}[4\overline{n+2}.\,\frac{\pi}{2}]=0\,,$$

$$a=(4\overline{n+3}.\,\frac{\pi}{2}\sqrt{-1})=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}\,,\qquad\text{d'où}$$

$$x=\dot{\mathrm{C}}[4\overline{n+3}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}]=\sqrt{-1}\,\mathrm{C}[4\overline{n+3}.\,\frac{\pi}{2}]=-\sqrt{-1}\,,$$

$$a = -(\overline{4n+3}\cdot\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad \text{d'où}$$

$$x = -\dot{C}[\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}] = -\sqrt{-1}\,C[\overline{4n+3}\cdot\frac{\pi}{2}] = \sqrt{-1},$$

$$a = (4n.\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad \text{d'où}$$

$$x = \dot{C}[4n.\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}] = \sqrt{-1}\,C[4n\cdot\frac{\pi}{2}] = 0,$$

$$a = -(4n.\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad \text{d'où}$$

$$x = -\dot{C}[4n.\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}] = -\sqrt{-1}\,C[4n.\frac{\pi}{2}] = 0.$$

2. *Valeurs de* $\dot{\text{Ↄ}}$a.

$a = \overline{4n+1}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$, donne

$$y = \dot{\text{Ↄ}}[\overline{4n+1}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}] = \text{Ↄ}[\overline{4n+1}\cdot\frac{\pi}{2}] = 0,$$

$a = -\overline{4n+1}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$, donne

$$y = \dot{\text{Ↄ}}[-\overline{4n+1}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}] = \text{Ↄ}[\overline{4n+1}\cdot\frac{\pi}{2}] = 0,$$

$a = \overline{4n+2}.\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$, donne

$$y = \dot{\text{Ↄ}}[\overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}] = \text{Ↄ}[\overline{4n+2}\cdot\frac{\pi}{2}] = -1,$$

$a = -\overline{4n+2}\cdot\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$, donne

$$y = \dot{\text{Ↄ}}[-\overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}] = \text{Ↄ}[\overline{4n+2}.\frac{\pi}{2}] = -1,$$

$a = \overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$, donne

$$y = \dot{\text{Ↄ}}[\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}] = \text{Ↄ}[\overline{4n+3}.\frac{\pi}{2}] = 0,$$

$a = -\overline{4n+3}\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$, donne

$y = \dot{Ɔ}[-\overline{4n+3}\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}] = Ɔ[\overline{4n+3}\,.\frac{\pi}{2}] = 0$,

$a = 4n \cdot \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$, donne

$y = \dot{Ɔ}[4n \cdot \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}] = Ɔ[4n.\frac{\pi}{2}] = 1$,

$a = -4n.\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$, donne

$y = \dot{Ɔ}[-4n \cdot \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}] = Ɔ[4n \cdot \frac{\pi}{2}] = 1.$

§ 6.

Résolution des équations
$\dot{C}a = 0$, $\dot{C}a = \sqrt{-1}$, $\dot{C}a = -\sqrt{-1}$, $\dot{Ɔ}a = 0$, $\dot{Ɔ}x = 1$, $\dot{Ɔ}a = -1$.

1. *Résolution des équations* $\dot{C}a = 0$, $\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$.

$\dot{C}a = 0$ donne par le § précédent :

$a = 2\overline{n+1}\pi\sqrt{-1}$, $-2\overline{n+1}\,\pi\sqrt{-1}$, $2n\pi\sqrt{-1}$, $-2n\pi\sqrt{-1}$,

donc $a = \pm k\pi\sqrt{-1}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

$\dot{C}a = \sqrt{-1}$, donne $a = (2n+\frac{1}{2})\pi\sqrt{-1}$, $-(2n+1+\frac{1}{2})\pi\sqrt{-1}$,

donc $a = (1-)^k(k+\frac{1}{2})\pi\sqrt{-1}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

$\dot{C}a = -\sqrt{-1}$, donne $a = -(2n+\frac{1}{2})\pi\sqrt{-1}$, $+(2n+1+\frac{1}{2})\pi\sqrt{-1}$,

donc $a = -(-1)^k(k+\frac{1}{2})\pi\sqrt{-1}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

2. *Résolution des équations* $\dot{Ɔ}a = 0, 1, -1$.

$\dot{Ɔ}a = 0$ donne $a = (2n+\frac{1}{2})\pi\sqrt{-1}$, $-(2n+\frac{1}{2})\pi\sqrt{-1}$,

$(2n+1+\frac{1}{2})\pi\sqrt{-1}$, $-(2n+1+\frac{1}{2})\pi\sqrt{-1}$,

donc $a = \pm(k+\frac{1}{2})\pi\sqrt{-1}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

$\dot{Ɔ}a = 1$ donne $a = 2n\pi\sqrt{-1}$, $-2n\pi\sqrt{-1}$, donc

$a = \pm 2k\pi\sqrt{-1}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

$\dot{Ɔ}a = -1$ donne $a = 2\overline{n+1}\,\pi\sqrt{-1}$, $-2\overline{n+1}\pi\sqrt{-1}$, donc

$a = \pm(2k+1)\pi\sqrt{-1}.$

§ 7.

Décomposition des quantités $\dot{\mathrm{C}}a$, $\dot{\text{Ɔ}}a$, $\dot{\text{Ɔ}}a-1$, $\dot{\text{Ɔ}}a+1$ *en facteurs.*

1. $\dot{\mathrm{C}}a=0$ donne, d'après le § précédent, $a=\pm k\pi\sqrt{-1}$, donc

$a=0$ pour $k=0$, et $1+\dfrac{a^2}{k^2\pi^2}=0$ pour $k=1, 2$, etc.

on a donc :

$$\dot{\mathrm{C}}a=a\prod_{1,k}^{\infty}\left\{(1+\frac{a^2}{k^2\pi^2}\right\}.$$

2. $\dot{\text{Ɔ}}a=0$ donne $a=\pm\dfrac{2k+1}{2})\pi\sqrt{-1}$, $a^2=-\dfrac{\overline{2k+1}^2}{2^2}\pi$,

$$1+\frac{2^2a^2}{\overline{2k+1}^2\pi^2}=0, \quad \text{d'où :}$$

$$\dot{\text{Ɔ}}a=\prod_{0,k}^{\infty}\left\{1+\frac{2^2a^2}{2\overline{k+1}^2\pi^2}\right\}.$$

3. $\dot{\text{Ɔ}}a-1=0$ donne $a=\pm 2k\pi\sqrt{-1}$, donc $a=0$ p^r^ $k=0$,

$a^2=-2^2k^2\pi^2$ pour $k=0, 1, 2, \ldots$

ou $$1+\frac{a^2}{2^2k^2\pi^2}=0, \quad \text{donc}$$

$$\dot{\text{Ɔ}}a-1=a\prod_{1,k}^{\infty}\left\{1+\frac{a^2}{2^2k^2\pi^2}\right\}.$$

4. $\dot{\text{Ɔ}}a+1=0$ donne $a=\pm(2k+1)\pi\sqrt{-1}$, donc

$$1+\frac{a^2}{2\overline{k+1}\pi^2}=0, \quad \text{d'où}$$

$$\dot{\text{Ɔ}}a+1=\prod_{0,k}^{\infty}\left(1+\frac{a^2}{2\overline{k+1}^2\pi^2}\right).$$

Remarque. On a, par 1., pour $a=\pi$,

$\dot{\mathrm{C}}\pi=\pi.\prod_{1,k}^{\infty}\left(\dfrac{k^2+1}{k^2}\right)$; comme $\pi=2\prod_{1,k}^{\infty}k\left(\dfrac{2^2k^2}{2^2k^2-1}\right)$, il vient :

$$\dot{\mathrm{C}}\pi=2\prod_{1,k}^{\infty}\left\{\frac{k^2+1}{k^2}\cdot\frac{2^2k^2}{2^2k^2-1}\right\}.$$

§ 8.

Valeurs des fonctions $\dot{C}$, $\dot{\text{Ɔ}}$ *correspondantes aux amplitudes*

$$a = \pm \left\{ 4\overline{n+1}\,\frac{\pi}{2} \pm \alpha \right\} \sqrt{-1}\text{, etc.}$$

1. *Valeurs de* $\dot{C}$. On a :

$$\dot{C}[\overline{4n+1}\cdot\frac{\pi}{2} \pm \alpha]\sqrt{-1} = \sqrt{-1}\,.\,C[\overline{4n+1}\cdot\frac{\pi}{2} \pm \alpha] = \text{Ɔ}\alpha.\sqrt{-1},$$

$$\dot{C}[-(\overline{4n+1}\cdot\frac{\pi}{2} \pm \alpha)]\sqrt{-1} = \sqrt{-1}\cdot C[-(\overline{4n+1}\,\frac{\pi}{2} \pm \alpha)] = -\text{Ɔ}\alpha\cdot\sqrt{-1},$$

$$\dot{C}[\overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2} \pm \alpha]\sqrt{-1} = \sqrt{-1}\cdot C[\overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2} \pm \alpha] = \mp C\alpha\cdot\sqrt{-1},$$

$$\dot{C}[-(\overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2} \pm \alpha)]\sqrt{-1} = \sqrt{-1}\cdot C[-(\overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2} \pm \alpha] = \pm C\alpha\cdot\sqrt{-1}.$$

$$\dot{C}[\overline{4n+3}\cdot\frac{\pi}{2} \pm \alpha]\sqrt{-1} = \sqrt{-1}\,C[\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2} \pm \alpha] = -\text{Ɔ}\alpha.\sqrt{-1},$$

$$\dot{C}[-(\overline{4n+3}\cdot\frac{\pi}{2} \pm \alpha)]\sqrt{-1} = \sqrt{-1}\,C[-(\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2} \pm \alpha)] = \text{Ɔ}\alpha\cdot\sqrt{-1},$$

$$\dot{C}[4n\cdot\frac{\pi}{2} \pm \alpha]\sqrt{-1} = \sqrt{-1}\,C[4n.\frac{\pi}{2} \pm \alpha] = \pm C\alpha\cdot\sqrt{-1},$$

$$\dot{C}[-(4n\cdot\frac{\pi}{2} \pm \alpha)]\sqrt{-1} = \sqrt{-1}\,C[-(4n\cdot\frac{\pi}{2} \pm \alpha)] = \mp C\alpha\cdot\sqrt{-1},$$

2. *Valeurs de* $\dot{\text{Ɔ}}$. On a :

$$\dot{\text{Ɔ}}[\overline{4n+1}\cdot\frac{\pi}{2} \pm \alpha]\sqrt{-1} = \text{Ɔ}[\overline{4n+1}\,\frac{\pi}{2} \pm \alpha] = \mp C\alpha,$$

$$\dot{\text{Ɔ}}[-(\overline{4n+1}\,\frac{\pi}{2} \pm \alpha)]\sqrt{-1} = \text{Ɔ}[-(\overline{4n+1}\,\frac{\pi}{2} \pm \alpha)] = \mp C\alpha,$$

$$\dot{\text{Ɔ}}[\overline{4n+2}\cdot\frac{\pi}{2} \pm \alpha]\sqrt{-1} = \text{Ɔ}[\overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2} \pm \alpha] = -\text{Ɔ}\alpha,$$

$$\dot{\text{Ɔ}}[-(\overline{4n+2}\cdot\frac{\pi}{2} \pm \alpha)]\sqrt{-1} = \text{Ɔ}[-(\overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2} \pm \alpha)] = -\text{Ɔ}\alpha,$$

$$\dot{\text{Ɔ}}[(\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2} \pm \alpha)]\sqrt{-1} = \text{Ɔ}[\overline{4n+3}\cdot\frac{\pi}{2} \pm \alpha] = \pm C\alpha,$$

$$\dot{\text{Ɔ}}[-(4n+3\frac{\pi}{2}\pm\alpha)]\sqrt{-1}=\text{Ɔ}[-4\overline{n+3}\frac{\pi}{2}\pm\alpha)]=\pm\mathrm{C}\alpha\,,$$

$$\dot{\text{Ɔ}}[4n.\frac{\pi}{2}\pm\alpha]\sqrt{-1}=\text{Ɔ}[4n.\frac{\pi}{2}\pm\alpha]=\text{Ɔ}\alpha\,,$$

$$\dot{\text{Ɔ}}[-(4n.\frac{\pi}{2}\pm\alpha)]\sqrt{-1}=\text{Ɔ}[-(4n.\frac{\pi}{2}\pm\alpha)]=\text{Ɔ}\alpha.$$

§ 9.

Résolution des équations

$$\dot{\mathrm{C}}a=\text{Ɔ}\alpha.\sqrt{-1},\ -\text{Ɔ}\alpha.\sqrt{-1},\ \mathrm{C}\alpha.\sqrt{-1},\ -\mathrm{C}\alpha.\sqrt{-1}\,, \qquad (\alpha)$$

$$\dot{\text{Ɔ}}a=\mathrm{C}\alpha,\ -\mathrm{C}\alpha,\ \text{Ɔ}\alpha,\ -\text{Ɔ}\alpha. \qquad (\beta)$$

1. *Résolution des équations* (α).

$\dot{\mathrm{C}}a=\text{Ɔ}\alpha.\sqrt{-1}$ répond à

$a=+[(2n+\frac{1}{2})\pi\pm\alpha]\sqrt{-1},\ -[(2n+1+\frac{1}{2})\pi\pm\alpha]\sqrt{-1},$ d'où :

$a=[(-1)^k(\overline{k+\frac{1}{2}}\pi\pm\alpha)]\sqrt{-1}\,,\quad k=0,\,1,\,2,\,\ldots$

$\dot{\mathrm{C}}\alpha=-\text{Ɔ}\alpha.\sqrt{-1}\,,$ répond à

$a=-[(2n+\frac{1}{2})\pi\pm\alpha]\sqrt{-1},\ +[(2n+1+\frac{1}{2})\pi\pm\alpha]\,,$ donc

$a=[-(-1)^k(\overline{k+\frac{1}{2}}\pi\pm\alpha)]\sqrt{-1}\,,\ k=0,\,1,\,2,\,\ldots$

$\dot{\mathrm{C}}a=\mathrm{C}a.\sqrt{-1}\,,$ répond à

$a=[\overline{2n+1}\pi-\alpha]\sqrt{-1}\,,\ [-\overline{2n+1}\pi-\alpha]\sqrt{-1}\,,$

$[2n.\pi+\alpha]\sqrt{-1},\ [-2n.\pi+\alpha]\sqrt{-1}\,,$

donc $a=[\pm k\pi+(-1)^k\alpha]\sqrt{-1}\,,\ k=0,\,1,\,2,\,\ldots$

$\dot{\mathrm{C}}a=-\mathrm{C}\alpha.\sqrt{-1}\,,$ répond à

$a=[\overline{2n+1}\pi+\alpha]\sqrt{-1},\ [-\overline{2n+1}\pi+\alpha]\sqrt{-1}\,,$

$[2n.\pi-\alpha]\sqrt{-1},\ [-2n.\pi-\alpha]\sqrt{-1}\,,$

donc $a=[\pm k\pi-(-1)^k\alpha]\sqrt{-1}\,,\quad k=0,\,1,\,2,\,\ldots$

2. *Résolution des équations* (β).

$\dot{\text{Ɔ}}a=\mathrm{C}\alpha$ répond à

$a=[\overline{2n+\frac{1}{2}}\pi-\alpha]\sqrt{-1}\,,\ -[\overline{2n+\frac{1}{2}}\pi-\alpha]\sqrt{-1}\,,$

$[\overline{2n+1+\frac{1}{2}}\pi+\alpha]\sqrt{-1},\ -[\overline{2n+1+\frac{1}{2}}\pi+\alpha]\sqrt{-1}\,,$

donc $a=\pm[(k+\tfrac{1}{2})\pi-(-1)^{k}\alpha]\sqrt{-1}\ ,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ldots$

$\dot{\text{Ɔ}}a=-\mathrm{C}\alpha$ répond à

$$a=[\overline{2n+\tfrac{1}{2}}\pi+\alpha]\sqrt{-1}\ ,\ -[\overline{2n+\tfrac{1}{2}}\pi+\alpha]\sqrt{-1}\ ,$$

$$[\overline{2n+1+\tfrac{1}{2}}\pi-\alpha]\sqrt{-1}\ ,\ -[\overline{2n+1+\tfrac{1}{2}}\pi-\alpha]\sqrt{-1}\ ,$$

donc $a=\pm[(k+\tfrac{1}{2})\pi+(-1)^{k}\alpha]\sqrt{-1}\ ,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

$\dot{\text{Ɔ}}a=\text{Ɔ}\alpha$ répond à

$$a=[2n.\pi\pm\alpha]\sqrt{-1},\ -[2n.\pi\pm\alpha]\sqrt{-1}\ ,$$

donc $a=\pm[2k\pi\pm\alpha]\sqrt{-1}\ ,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

$\dot{\text{Ɔ}}a=-\text{Ɔ}\alpha$ répond à

$$a=[(2n+1)\pi\pm\alpha]\sqrt{-1}\ ,\ -[(2n+1)\pi\pm\alpha]\sqrt{-1}\ ,$$

donc $a=\pm[(2k+1)\pi\pm\alpha]\sqrt{-1}\,.$

§ 10.

Valeurs des fonctions $\dot{\mathrm{C}}$ *et* $\dot{\text{Ɔ}}$ *pour*

$$a=\pm[(4n+1)\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\pm\alpha],\ \pm[(4n+2)\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\pm\alpha],\ \text{etc.}$$

1. *Valeurs de* $\dot{\mathrm{C}}$.

Par les formules $\dot{\mathrm{C}}a=-\sqrt{-1}\,\mathrm{C}(a\sqrt{-1}),\ \dot{\text{Ɔ}}a=\text{Ɔ}(a\sqrt{-1}),$ on a :

$$\begin{array}{lll}
\dot{\mathrm{C}}[\overline{4n+1}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\pm\alpha]= & \sqrt{-1}\,\mathrm{C}[(4n+1)\frac{\pi}{2}\mp\alpha\sqrt{-1}]= & \dot{\text{Ɔ}}\alpha.\sqrt{-1}\ ,\\
\dot{\mathrm{C}}[-(\overline{4n+1}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\pm\alpha)]= & \text{»} & =-\dot{\text{Ɔ}}a.\sqrt{-1}\ ,\\
\dot{\mathrm{C}}[\overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\pm\alpha]= & \sqrt{-1}\,\mathrm{C}[(\overline{4n+2})\frac{\pi}{2}\mp\alpha\sqrt{-1}]= & \mp\dot{\mathrm{C}}\alpha,\\
\dot{\mathrm{C}}[-(\overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\pm\alpha)]= & \text{»} & =\pm\dot{\mathrm{C}}\alpha\ ,\\
\dot{\mathrm{C}}[\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\pm\alpha]= & \sqrt{-1}\,\mathrm{C}[\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}\mp\alpha\sqrt{-1}]= & -\dot{\text{Ɔ}}\alpha.\sqrt{-1}\ ,\\
\dot{\mathrm{C}}[-(\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\pm\alpha)]= & \text{»} & =\ \dot{\text{Ɔ}}\alpha.\sqrt{-1}\ ,
\end{array}$$

$$\dot{\mathrm{C}}\left[4n\cdot\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\pm\alpha\right]=\sqrt{-1}\,\mathrm{C}\left[4n\cdot\frac{\pi}{2}\mp\alpha\sqrt{-1}\right]=\pm\,\dot{\mathrm{C}}\alpha,$$

$$\dot{\mathrm{C}}\left[-\left(4n\cdot\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\pm\alpha\right)\right]=\qquad\text{»}\qquad=\mp\,\dot{\mathrm{C}}\alpha.$$

2. *Valeurs de* $\dot{\text{Ↄ}}$.

$$\dot{\text{Ↄ}}\left[\overline{4n+1}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\pm\alpha\right]=\text{Ↄ}\left[\overline{4n+1}\,\frac{\pi}{2}\mp\alpha\sqrt{-1}\right]=\pm\,\dot{\mathrm{C}}\alpha\cdot\sqrt{-1},$$

$$\dot{\text{Ↄ}}\left[-\left(\overline{4n+1}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\pm\alpha\right)\right]=\qquad\text{»}\qquad=\pm\,\dot{\mathrm{C}}\alpha\cdot\sqrt{-1},$$

$$\dot{\text{Ↄ}}\left[\overline{4n+2}\cdot\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\pm\alpha\right]=\text{Ↄ}\left[\overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2}\mp\alpha\sqrt{-1}\right]=-\,\dot{\text{Ↄ}}\alpha,$$

$$\dot{\text{Ↄ}}\left[-\left(\overline{4n+2}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\pm\alpha\right]=\qquad\text{»}\qquad=-\,\dot{\text{Ↄ}}\alpha,$$

$$\dot{\text{Ↄ}}\left[\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\pm\alpha\right]=\text{Ↄ}\left[\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}\mp\alpha\sqrt{-1}\right]=\mp\,\dot{\mathrm{C}}\alpha\cdot\sqrt{-1},$$

$$\dot{\text{Ↄ}}\left[-\left(\overline{4n+3}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\pm\alpha\right)\right]=\qquad\text{»}\qquad=\mp\,\dot{\mathrm{C}}\alpha\cdot\sqrt{-1},$$

$$\dot{\text{Ↄ}}\left[4n\cdot\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\pm\alpha\right]=\text{Ↄ}\left[4n\cdot\frac{\pi}{2}\mp\alpha\sqrt{-1}\right]=\dot{\text{Ↄ}}\alpha,$$

$$\dot{\text{Ↄ}}\left[-\left(4n\cdot\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\pm\alpha\right)\right]=\qquad\text{»}\qquad=\dot{\text{Ↄ}}\alpha.$$

§ 11.

Résolution des équations

$$\dot{\mathrm{C}}a=\dot{\text{Ↄ}}\alpha\cdot\sqrt{-1},\quad-\dot{\text{Ↄ}}\alpha\cdot\sqrt{-1},\quad\dot{\mathrm{C}}\alpha,\quad-\dot{\mathrm{C}}\alpha,$$
$$\dot{\text{Ↄ}}a=\dot{\mathrm{C}}\alpha\cdot\sqrt{-1},\quad-\dot{\mathrm{C}}\alpha\cdot\sqrt{-1},\quad-\dot{\text{Ↄ}}\alpha,\quad\dot{\text{Ↄ}}\alpha.$$

1. $\dot{\mathrm{C}}a=\dot{\text{Ↄ}}\alpha\cdot\sqrt{-1}$, donne

$a=[(2n+\frac{1}{2})\pi\sqrt{-1}\pm\alpha],\ -[(2n+1+\frac{1}{2})\pi\sqrt{-1}\pm\alpha]$, donc

$a=(-1)^k[(k+\frac{1}{2})\pi\sqrt{-1}\pm\alpha],\quad k=0,1,2,\ldots$

$\dot{\mathrm{C}}a=-\dot{\text{Ↄ}}\alpha.\sqrt{-1}$, donne

$a=-[(2n+\frac{1}{2})\pi\sqrt{-1}\pm\alpha],\ [(2n+1+\frac{1}{2})\pi\sqrt{-1}\pm\alpha]$, donc

$a=-(-1)^k[(k+\frac{1}{2})\pi\sqrt{-1}\pm\alpha],\quad k=0,1,2,\ldots$

$\dot{C}a = \dot{C}\alpha$, donne

$$a = [(2n+1)\pi\sqrt{-1} - \alpha],\ [-(2n+1)\pi\sqrt{-1} - \alpha],$$
$$[2n\pi\sqrt{-1} + \alpha],\ [-2n\pi\sqrt{-1} + \alpha], \quad \text{donc}$$
$$a = \pm k\pi\sqrt{-1} + (-1)^k\alpha, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$\dot{C}a = -\dot{C}\alpha$, donne

$$a = [(2n+1)\pi\sqrt{-1} + \alpha],\ [-(2n+1)\pi\sqrt{-1} + \alpha],$$
$$[2n\pi\sqrt{-1} - \alpha],\ [-2n\pi\sqrt{-1} - \alpha], \quad \text{donc}$$
$$a = \pm k\pi\sqrt{-1} - (-1)^k\alpha, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

2. $\dot{\text{Ɔ}}a = \dot{C}\alpha \cdot \sqrt{-1}$, donne

$$a = [(2n+\tfrac{1}{2})\pi\sqrt{-1} + \alpha],\ -[(2n+\tfrac{1}{2})\pi\sqrt{-1} + \alpha],$$
$$[(2n+1+\tfrac{1}{2})\pi\sqrt{-1} - \alpha],\ -[(2n+1+\tfrac{1}{2})\pi\sqrt{-1} - \alpha],$$

donc $a = \pm[(k+\tfrac{1}{2})\pi\sqrt{-1} + (-1)^k\alpha]$. $k = 0, 1, 2, \ldots$

$\dot{\text{Ɔ}}a = -\dot{C}\alpha . \sqrt{-1}$, donne

$$a = [(2n+\tfrac{1}{2})\pi\sqrt{-1} - \alpha],\ -[(2n+\tfrac{1}{2})\pi\sqrt{-1} - \alpha],$$
$$[(2n+1+\tfrac{1}{2})\pi\sqrt{-1} + \alpha],\ -[(2n+1+\tfrac{1}{2})\pi\sqrt{-1} + \alpha],$$

donc $a = \pm[(k+\tfrac{1}{2})\pi\sqrt{-1} - (-1)^k\alpha]$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

$\dot{\text{Ɔ}}a = -\dot{\text{Ɔ}}\alpha$, donne

$$a = [(2n+1)\pi\sqrt{-1} \pm \alpha],\ -[(2n+1)\pi\sqrt{-1} \pm \alpha], \quad \text{donc}$$
$$a = \pm[(2k+1)\pi\sqrt{-1} \pm \alpha], \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$\dot{\text{Ɔ}}a = \dot{\text{Ɔ}}\alpha$, donne

$$a = [2n\pi\sqrt{-1} \pm \alpha],\ -[2n\pi\sqrt{-1} \pm \alpha], \quad \text{donc}$$
$$a = \pm[2k\pi\sqrt{-1} \pm \alpha], \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

§ 12.

Expressions exponentielles des fonctions $\dot{C}a$, $\dot{\text{Ɔ}}a$.

1. De l'équation $\dfrac{d\dot{C}a}{da} = \dot{\text{Ɔ}}a = \sqrt{1+\dot{C}^2a}$, on déduit

$$\left(\frac{d\dot{C}a}{da}\right)^2 - \dot{C}^2a = 1. \qquad (1)$$

Intégrons (1); à cet effet posons $\left(\frac{d\dot{C}a}{da}\right)^2 - \dot{C}^2 a = 0$, (2)

alors $x = \dot{C}a = e^{ma}$ réduira (2) à $m^2 - 1 = 0$, donc $m = \pm 1$.

Donc k, k' désignant des constantes, les expressions ke^{a}, $k'e^{-a}$, seront des intégrales particulières de (2). On peut donc supposer que l'intégrale de (1) est de la forme

$$x = \dot{C}a = ke^{a} + k'e^{-a} , \qquad (3)$$

k et k' étant des fonctions inconnues de a. Mais à cause de (3) l'équation (1) devient :

$$\left(\frac{d\dot{C}a}{da}\right)^2 - \dot{C}^2 a = -4kk' + \left(\frac{dk}{da}\right)^2 e^{2a} + \left(\frac{dk'}{da}\right) e^{-2a} + 2\frac{dk}{da}\cdot\frac{dk'}{da} +$$
$$2\frac{dk}{da}[ke^{2a} - k'] - 2\frac{dk'}{da}[k'e^{-2a} - k] = 1.$$

On peut satisfaire à cette équation indéterminée en posant

$$\frac{dk}{da} = 0 , \quad \frac{dk'}{da} = 0 , \quad -4kk' = 1.$$

Donc k, k' sont constants; donc (3) donne pour $a = 0$, $k' = -k$. On a donc $4k^2 = 1$, $k = \frac{1}{2}$, $k' = -\frac{1}{2}$. Donc l'intégrale cherchée est :

$$\dot{C}a = \frac{e^{a} - e^{-a}}{2}. \qquad (a)$$

En différentiant on a :

$$\dot{\mathfrak{D}}a = \frac{e^{a} + e^{-a}}{2} . \qquad (b)$$

2. On peut vérifier, ainsi qu'il suit, la formule (a).

On a : $a = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$. Posons $x = \frac{1}{2}\left(x' - \frac{1}{x'}\right)$, on aura :

$$a = \int_1^{x'} \frac{dx'}{x'} = \log x', \quad \text{d'où} \quad x' = e^{a} , \quad \text{donc}$$

$$x = \dot{C}a = \tfrac{1}{2}(e^{a} - e^{-a}).$$

§ 13.

Conséquences et applications des formules (a) *et* (b).

1. Soit $A = e^{\log A}$, on aura à la place de (a) et de (b) :

$$\dot{C}[a \log A] = \frac{A^a - A^{-a}}{2}, \quad \dot{\text{Ɔ}}[a \log A] = \frac{A^a + A^{-a}}{2}.$$

2. De (a) et (b) on tire, par addition et soustraction :

$$e^a = \dot{\text{Ɔ}}a + \dot{C}a, \quad e^{-a} = \dot{\text{Ɔ}}a - \dot{C}a.$$

Soit $a = \frac{\pi}{4}\sqrt{-1}$, on a :

$$\dot{C}\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}\right) + \dot{C}\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}\right) = e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}} = \text{Ɔ}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{-1}\cdot C\left(\frac{\pi}{4}\right);$$

donc $\dot{\text{Ɔ}}\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}\right) = \text{Ɔ}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$,

$$\dot{C}\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}\right) = \sqrt{-1}\, C\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{-1}\,.\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

3. Soit $x' = e^a$, $a = \log x'$, on aura :

$$x = \dot{C}a = \dot{C}[\log x'], \quad y = \dot{\text{Ɔ}}a = \dot{\text{Ɔ}}[\log x'], \qquad \text{donc}$$

$$\dot{C}[\log x'] = \tfrac{1}{2}\left(x' - \frac{1}{x'}\right), \quad \dot{\text{Ɔ}}[\log x'] = \tfrac{1}{2}\left(x' + \frac{1}{x'}\right).$$

Soit $x' = 2$, on a :

$$\dot{C}[\log 2] = \tfrac{3}{4}, \quad \dot{\text{Ɔ}}[\log 2] = \tfrac{5}{4}; \quad \log 2 = 0{,}693147\ldots$$

4. Changeons a en μa, il vient :

$$e^{\mu a} = [\dot{\text{Ɔ}}a + \dot{C}a]^{\mu} = \dot{\text{Ɔ}}\mu a + \dot{C}\mu a,$$
$$e^{-\mu a} = [\dot{\text{Ɔ}}a - \dot{C}a]^{\mu} = \dot{\text{Ɔ}}\mu a - \dot{C}\mu a.$$

5. Soit

$$m + n = e^{\alpha+\beta} = e^{\alpha}\cdot e^{\beta} = e^{\alpha}[\dot{\text{Ɔ}}\beta + \dot{C}\beta],$$
$$m - n = e^{\alpha-\beta} = e^{\alpha}\cdot e^{-\beta} = e^{\alpha}[\dot{\text{Ɔ}}\beta - \dot{C}\beta];$$

en multipliant il vient :

$$m^2 - n^2 = e^{2\alpha}[\dot{\text{Ɔ}}^2\beta - \dot{C}^2\beta] = e^{2\alpha}, \quad e^{\alpha} = \sqrt{m^2 - n^2} = r, \quad \alpha = \log r.$$

donc $m + n = r[\dot{\text{Ɔ}}\beta + \dot{C}\beta]$ donc $\frac{m}{r} = \dot{\text{Ɔ}}\beta$, $\frac{n}{r} = \dot{C}\beta$.

Soit φ la plus petite amplitude, pour laquelle on a simultanément $\dot{\text{Ɔ}}\varphi = \frac{m}{r}$, $\dot{C}\varphi = \frac{n}{r}$; on aura, pour déterminer β, les équations (1') $\dot{Ɔ}\beta = \dot{Ɔ}\varphi$, $\dot{C}\beta = \dot{C}\varphi$. (2')

Par le § 11, (1') donne $\beta = \pm[2k\pi\sqrt{-1} \pm \varphi]$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

et (2') donne $\beta = \pm k\pi\sqrt{-1} + (-1)^k\varphi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

On a donc $\beta = \pm 2k\pi\sqrt{-1} + \varphi$ pour la valeur commune à (1') et (2'), c'est la valeur cherchée de β. On peut donc écrire :

$$m + n = r.e^{\pm 2k\pi\sqrt{-1} + \varphi} = r[\dot{Ɔ}\varphi + \dot{C}\varphi], \quad r = \sqrt{m^2 n^2},$$

$$\dot{Ɔ}\varphi = \frac{m}{r}, \quad \dot{C}\varphi = \frac{n}{r}.$$

$$m - n = r.e^{\mp 2k\pi\sqrt{-1} - \varphi} = r[\dot{Ɔ}\varphi - \dot{C}\varphi].$$

5. Donc :

$$\sqrt[\mu]{m \pm n} = r^{\frac{1}{\mu}} \cdot e^{\frac{\beta}{\mu}} = r^{\frac{1}{\mu}} [\dot{Ɔ}\frac{2k\pi\sqrt{-1} + \varphi}{\mu} \pm \dot{C}\frac{2k\pi\sqrt{-1} + \varphi}{\mu}],$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots \mu - 1.$$

6. $\mathrm{Log}(m+n) = \alpha + \beta$; soit $\alpha = lr$, lr désignant la valeur arithmétique unique de $\log r$, on a :

$$\log(m+n) = lr \pm 2k\pi\sqrt{-1} + \varphi,$$
$$= \tfrac{1}{2}l[m^2 - n^2] \pm 2k\pi\sqrt{-1} + \varphi.$$

$$\mathrm{Log}(m-n) = lr \pm 2k\pi\sqrt{-1} - \varphi.$$

En retranchant on a : $\varphi = \frac{1}{2}\log\frac{m+n}{m-n} = \frac{1}{2}\log\frac{\dot{Ɔ}\varphi + \dot{C}\varphi}{\dot{Ɔ}\varphi - \dot{C}\varphi}$.

7. Soit $\dot{C}a = x = \frac{e^a - e^{-a}}{2}$, on trouve $e^a = x \pm \sqrt{1 + x^2}$,

donc $a = \log[x \pm \sqrt{1 + x^2}]$, mais $a = \frac{1}{\dot{C}}x$, donc

$$\frac{1}{\dot{C}}[\pm x] = \log[x \pm \sqrt{1 + x^2}].$$

Soit $\dot{Ɔ}a = y = \frac{e + e^{-a}}{2}$, on trouve $e^a = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$, d'où

$a = \log[y \pm \sqrt{y^2 - 1}]$.

Donc $a = \frac{1}{\dot{Ɔ}}y = \log[y + \sqrt{y^2 - 1}]$; ou

$$\frac{1}{\dot{Ɔ}}\sqrt{1 + x^2} = \log[\sqrt{1 + x^2} + x].$$

8. On a :

$$\frac{1}{a+b} = \frac{a-b}{a^2-b^2} = \frac{a}{a^2-b^2} - \frac{b}{a^2-b^2}, \quad \text{donc}$$

$$\frac{d^n\left(\frac{a}{a^2-b^2}\right)}{da^n} - \frac{d^n\left(\frac{b}{a^2-b^2}\right)}{da^n} = \frac{d^n\left(\frac{1}{a+b}\right)}{da^n} =$$

$$(-1)^n \frac{1.2\ldots n}{(a+b)^{n+1}} = (-1)^n \frac{1\cdot2\ldots n}{r^{n+1}\left[\dot{\mathrm{Ↄ}}\,\overline{n+1}\,\varphi + \dot{\mathrm{C}}\,\overline{n+1}\,\varphi\right]} =$$

$$(-1)^n \frac{1\cdot2\ldots n\left[\dot{\mathrm{Ↄ}}\,\overline{n+1}\,\varphi - \dot{\mathrm{C}}\,\overline{n+1}\,\varphi\right]}{r^{n+1}};$$

donc :

$$\frac{d^n\left(\frac{a}{a^2-b^2}\right)}{da^n} = (-1)^n \frac{1\cdot2\ldots n}{r^{n+1}}\,\dot{\mathrm{Ↄ}}\,\overline{n+1}\,\varphi, \quad \frac{d^n\left(\frac{b}{a^2-b^2}\right)}{da^n} =$$

$$(-1)^n \frac{1.2\ldots n}{r^{n+1}}\,\dot{\mathrm{C}}\,\overline{n+1}\,\varphi.$$

$$r = \sqrt{a^2-b^2}, \quad \frac{a}{r} = \dot{\mathrm{Ↄ}}\varphi, \quad \frac{b}{r} = \dot{\mathrm{C}}\varphi.$$

§ 14.

Développement des expressions $\dot{\mathrm{C}}(a \pm b)$, $\dot{\mathrm{Ↄ}}(a \pm b)$.

1. Soient $a+b = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$, $a = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$,

$$b = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}, \quad \text{donc} \quad u = \dot{\mathrm{C}}(a+b),\ x = \dot{\mathrm{C}}a,$$

$$\sqrt{1+x^2} = \dot{\mathrm{Ↄ}}a, \quad z = \dot{\mathrm{C}}b, \quad \sqrt{1+z^2} = \dot{\mathrm{Ↄ}}b.$$

On a :

$$a+b = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}.$$

z est la valeur de u pour $x=0$, on peut écrire :

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + \text{const.}; \text{ d'où : } \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

ou $$\sqrt{1+u^2}\; dx - \sqrt{1+x^2}.du = 0.$$

Mais on a : $xu \dfrac{du}{\sqrt{1+u^2}} - xu \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = 0$, donc, en ajoutant : $$d[x\sqrt{1+u^2}] - d[u\sqrt{1+x^2}] = 0.$$ En intégrant il vient : $$x\sqrt{1+u^2} - u\sqrt{1+x^2} = \text{const.}$$ pour $x=0$, on a const. $= -u = -z$, donc

$$x\sqrt{1+u^2} - u\sqrt{1+x^2} = -z.$$

Résolvons cette équation par rapport à u, il vient :

$u = x\sqrt{1+z^2} + z\sqrt{1+x^2}$, ou $\dot{C}(a+b) = \dot{C}a\,\dot{Ɔ}b + \dot{C}b\,\dot{Ɔ}a$; donc
$$\dot{C}(a-b) = \dot{C}a\,\dot{Ɔ}b - \dot{C}b\,\dot{Ɔ}a.$$

En différentiant la 1re de ces équations par rapport à a, on obtient :

$$\dot{Ɔ}(a+b) = \dot{Ɔ}a\,\dot{Ɔ}b + \dot{C}a\,\dot{C}b \quad \text{d'où} \quad \dot{Ɔ}(a-b) = \dot{Ɔ}a\,\dot{Ɔ}b - \dot{C}a\,\dot{C}b.$$

2. $$a \pm b = \frac{1}{\dot{C}}x \pm \frac{1}{\dot{C}}z = \frac{1}{\dot{C}}[x\sqrt{1+z^2} \pm z\sqrt{1+x^2}.$$

$$a \pm b = \frac{1}{\dot{Ɔ}}x \pm \frac{1}{\dot{Ɔ}}z = \frac{1}{\dot{Ɔ}}[\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+z^2} \pm xz].$$

3. Par les opérations ordinaires, on trouve ultérieurement :

$$\dot{C}2a = 2\dot{C}a\dot{Ɔ}a, \quad \dot{Ɔ}2a = \dot{Ɔ}^2a + \dot{C}^2a,$$

$$\dot{Ɔ}a+1 = 2\dot{Ɔ}^2\frac{a}{2}, \quad \dot{Ɔ}a-1 = 2\dot{C}^2\frac{a}{2}.$$

$$\dot{C}(a+b) + \dot{C}(a-b) = 2\dot{C}a\,\dot{Ɔ}b,$$
$$\dot{C}(a+b) - \dot{C}(a-b) = 2\dot{Ɔ}a\,\dot{C}b,$$
$$\dot{Ɔ}(a+b) + \dot{Ɔ}(a-b) = 2\dot{Ɔ}a\,\dot{Ɔ}b,$$
$$\dot{Ɔ}(a+b) - \dot{Ɔ}(a-b) = 2\dot{C}a\,\dot{C}b.$$

Soient $a+b=(n+1)x$, $a=nx$, $b=x$, on a :

$$\dot{C}(n+1)x = 2\dot{C}nx.\dot{Ɔ}x - \dot{C}(n-1)x,$$
$$\dot{Ɔ}(n+1)x = 2\dot{Ɔ}nx.\dot{Ɔ}x - \dot{Ɔ}(n-1)x,$$ d'où :

$$(\mathrm{I})\begin{cases}\dot{\text{C}}x=\dot{\text{C}}x\,,\\ \dot{\text{C}}2x=\dot{\text{C}}x\cdot 2\dot{\text{Ɔ}}x\,,\\ \dot{\text{C}}3x=\dot{\text{C}}x[4\dot{\text{Ɔ}}^2x-1]\,,\\ \dot{\text{C}}4x=\dot{\text{C}}x[8\dot{\text{Ɔ}}^3x-4\dot{\text{Ɔ}}x]\,,\\ \dot{\text{C}}5x=\dot{\text{C}}x[16\dot{\text{Ɔ}}^4x-12\dot{\text{Ɔ}}^2x+1]\end{cases}\qquad(\mathrm{II})\begin{cases}\dot{\text{Ɔ}}x=\dot{\text{Ɔ}}x\,,\\ \dot{\text{Ɔ}}2x=2\dot{\text{Ɔ}}x^2-1\,,\\ \dot{\text{Ɔ}}3x=4\dot{\text{Ɔ}}^3x-3\dot{\text{Ɔ}}x\,,\\ \dot{\text{Ɔ}}4x=8\dot{\text{Ɔ}}^4x-8\dot{\text{Ɔ}}^2x+1\,,\\ \dot{\text{Ɔ}}5x=16\dot{\text{Ɔ}}^5x-20\dot{\text{Ɔ}}^3x+5\dot{\text{Ɔ}}x.\end{cases}$$

etc. etc.

$$\dot{\text{C}}nx=\mathrm{N}.\quad(1)\qquad\qquad \dot{\text{Ɔ}}nx=\mathrm{N}'.\quad(2)$$

§ 15.

Résolution des équations $\dot{\text{C}}\mathrm{nx}=\mathrm{N}$, $\dot{\text{Ɔ}}\mathrm{nx}=\mathrm{N}'$.

1. *Résolution de l'équation* $\dot{\text{C}}\mathrm{nx}=\mathrm{N}$.

N est le second membre de l'équation générale qui, pour $n=0, 1, 2$, etc., produit les équations particulières de la série (I).

1^er^ Cas, $n=2m$.

Soient $y=\dot{\text{Ɔ}}x$, $z=\dot{\text{C}}x$, on a $y^2=1+z^2$; on voit de plus, par les équations (I) que $\dot{\text{C}}2mx$ est une fonction paire de z, multipliée par le produit zy, on a donc :

$\dot{\text{C}}2mx=zy\psi(z^2)$, donc $\dot{\text{C}}^22mx=z^2y^2\psi^2(z^2)=z^2(1+z^2)\psi^2(z^2)$ ou $\dot{\text{C}}^22mx=\xi(z^2)$ (1), donc $\dot{\text{C}}^22mx=\xi(\dot{\text{C}}^2x)$. (2)

Soit $z=\dot{\text{C}}a$ une racine de (1), on a, par (1) $\dot{\text{C}}^22mx=\xi(\dot{\text{C}}a)$. Mais en changeant x en a dans (2) on a $\dot{\text{C}}^22ma=\xi(\dot{\text{C}}^2a)$, donc $\dot{\text{C}}^22ma=\dot{\text{C}}^22mx$, d'où

$$\dot{\text{C}}2ma=\dot{\text{C}}2mx\,,\qquad(1'$$
$$\dot{\text{C}}2ma=-\dot{\text{C}}2mx.\qquad(2'$$

Le § 11 nous donne les racines de ces équations, savoir :

$2ma=\pm k\pi\sqrt{-1}+(-1)^k 2mx$, racines de (1', et

$2ma=\pm k\pi\sqrt{-1}-(-1)^k 2mx$, racines de (2', $k=0, 1, 2, \ldots$

donc $$2ma=\pm[k\pi\sqrt{-1}+(-1)^k 2mx]\,,$$

$$a=\pm\left[\frac{k\pi}{2m}\sqrt{-1}+(-1)^k x\right]\,,$$

d'où : $$z=\dot{\text{C}}a=\pm\dot{\text{C}}\left[\frac{k\pi}{2m}\sqrt{-1}+(-1)^k x\right].\ k=0, 1, 2, \text{etc.}$$

Si l'on fait $k=2mh+k'$, $k'<2m$, on trouve une équation en k' de la même forme que la précédente; il suffira donc de poser dans celle-ci $k=0, 1, 2, \ldots 2m-1$. En effet on a :

$$\pm \dot{C}[\frac{k\pi}{2m}\sqrt{-1}+(-1)^k x] =$$

$$\pm \dot{C}[h\pi\sqrt{-1}+\frac{k'\pi}{2m}\sqrt{-1}+(-1)^k x] =$$

$$\pm \left\{ \dot{C}h\pi\sqrt{-1}\,.\,\dot{\Im}[\frac{k'\pi}{2m}\sqrt{-1}+(-1)^k x] + \right.$$

$$\left. \dot{\Im}h\pi\sqrt{-1}\cdot\dot{C}[\frac{k'\pi}{2m}\sqrt{-1}+(-1)^k x] \right\} =$$

$$\pm \left\{ \sqrt{-1}\,.\,Ch\pi\cdot\dot{\Im}[\frac{k'\pi}{2m}\sqrt{-1}+(-1)^k x] + \right.$$

$$\left. \Im h\pi\cdot\dot{C}[\frac{k'\pi}{2m}\sqrt{-1}+(-1)^k x] \right\} =$$

$$\pm \dot{C}[\frac{k'\pi}{2m}\sqrt{-1}+(-1)^k x].$$

2me CAS, $n=2m+1$.

Les équations (I) font voir que $\dot{C}(2m+1)x$ est une fonction paire de z multipliée par z, on peut donc écrire :

$\dot{C}(2m+1)x = z\psi(z^2)$, donc $\dot{C}^2(2m+1)x = z^2\psi^2(z^2) = \xi(z^2)$, (1''

et $\dot{C}^2(2m+1)x = \xi(\dot{C}^2 x)$. (2''

Soit $z=\dot{C}a$ une racine de (1''

on a $$\dot{C}^2(2m+1)x = \xi(\dot{C}^2 a).$$

Mais (2'' donne, en changeant x en a :

$$\dot{C}^2(2m+1)a = \xi(\dot{C}^2 a).$$

De ces équations on déduit :

$$\dot{C}^2(2m+1)a = \dot{C}^2(2m+1)x, \quad \text{d'où :}$$
$$\dot{C}(2m+1)a = \dot{C}(2m+1)x,$$
$$\dot{C}(2m+1)a = -\dot{C}(2m+1)x.$$

On a donc, en vertu du § 11 :

$$(2m+1)a = \pm[k\pi\sqrt{-1}+(-1)^k(2m+1)x],$$

$$a = \pm[\frac{k\pi}{2m+1}\sqrt{-1}+(-1)^k x]; \quad k=0, 1, 2, \ldots$$

donc $z = \dot{C}a = \pm \dot{C}[\frac{k\pi}{2m+1}\sqrt{-1} + (-1)^k x]$.

Si l'on fait $k = (2m+1)h + k'$, $k' < 2m+1$, on aura une équation de la même forme, il suffira donc de poser $k = 0, 1, 2, 2m...$

2. *Résolution de l'équation* $\dot{\mathfrak{I}}\,\mathrm{nx} = \mathrm{N}'$.

N′ est le second membre de l'équation générale de laquelle on déduirait les équations (II), en fesant $n = 0, 1, 2$, etc.

On voit aisément, par les équations (II), que $\dot{\mathfrak{I}}nx$ est de la forme :

$$\dot{\mathfrak{I}}nx = \psi(y) \quad (1'', \quad \text{d'où} \quad \dot{\mathfrak{I}}nx = \psi(\dot{\mathfrak{I}}x). \quad (2''$$

Soit $y = \dot{\mathfrak{I}}a$ une racine de (1″, on a : $\dot{\mathfrak{I}}nx = \psi(\dot{\mathfrak{I}}a)$.

Mais (2″ donne $\dot{\mathfrak{I}}na = \psi(\dot{\mathfrak{I}}a)$, donc :

$$\dot{\mathfrak{I}}na = \dot{\mathfrak{I}}nx.$$

En vertu du § 11, cette équation a pour racines :

$$na = \pm[2k\pi\sqrt{-1} \pm nx], \quad k = 0, 1, 2, ...$$

donc $\quad a = \pm[\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1} \pm x]$. On a donc aussi :

$$y = \dot{\mathfrak{I}}a = \dot{\mathfrak{I}}[\pm x + \frac{2k}{n}\pi\sqrt{-1}].$$

On démontre, comme ci-dessus, qu'il suffira de poser $k = 0, 1, 2, .. n-1$. De plus comme

$$\dot{\mathfrak{I}}[-x + \frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}] = \dot{\mathfrak{I}}[x - \frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}],$$

on peut écrire x à la place de $\pm x$, donc

$$y = \dot{\mathfrak{I}}[x + \frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}].$$

§ 16.

Transformation des expressions

$$\mathrm{a} = \int_0^x \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{1+\mathrm{x}^2}}, \quad \mathrm{x} = \dot{C}\mathrm{a}, \quad \mathrm{a} = \int_1^y \frac{\mathrm{dy}}{\sqrt{\mathrm{y}^2 - 1}}, \quad \mathrm{y} = \sqrt{1+\mathrm{x}^2} = \dot{\mathfrak{I}}\mathrm{a}.$$

1. Soit $u = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ (2), d'où $x = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$ (1), on aura :

$$a = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int_0^u \frac{du}{1-u^2} \quad (3).$$

Nous désignerons la fonction inverse de cette équation par $u = \dot{S}a$. La réciproque de cette dernière équation sera marquée par $a = \frac{1}{\dot{S}} u$.

2. Soit $v = \frac{y}{\sqrt{y^2 - 1}}$, (5) d'où : $y = \frac{v}{\sqrt{v^2 - 1}}$, (4) on aura :

$$a = \int_1^y \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} = \int_{\frac{1}{0}}^v \frac{-dv}{v^2 - 1}.$$

Nous désignerons la fonction inverse de cette intégrale par $v = \dot{\reflectbox{S}}a$, et l'inverse de cette équation par $a = \frac{1}{\dot{\reflectbox{S}}} v$.

§ 17.

Propriétés élémentaires des fonctions $\dot{S}$, $\dot{\reflectbox{S}}$, $\frac{1}{\dot{S}}$, $\frac{1}{\dot{\reflectbox{S}}}$.

1. Les équations (1) et (2) donnent

$$\dot{C}a = \frac{\dot{S}a}{\sqrt{1 - \dot{S}^2 a}}, \quad \dot{S}a = \frac{\dot{C}a}{\dot{\reflectbox{C}}a}.$$

De $\quad y = \sqrt{1 + x^2} = \sqrt{1 + \frac{u^2}{1 - u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}$, on tire :

$$\dot{\reflectbox{C}}a = \frac{1}{\sqrt{1 - \dot{\reflectbox{C}}^2 a}}.$$

2. Les équations (4) et (5) donnent :

$$x = \sqrt{y^2 - 1} = \sqrt{\frac{v^2}{v^2 - 1} - 1} = \frac{1}{\sqrt{v^2 - 1}}, \text{ donc } \dot{C}a = \frac{1}{\sqrt{\dot{\reflectbox{S}}^2 a - 1}},$$

$$\dot{\reflectbox{C}}a = \frac{\dot{\reflectbox{S}}a}{\sqrt{\dot{\reflectbox{S}}^2 a - 1}}, \quad \dot{\reflectbox{S}}a = \frac{\dot{\reflectbox{C}}a}{\sqrt{\dot{\reflectbox{C}}^2 a - 1}} = \frac{\dot{\reflectbox{C}}a}{\dot{C}a}.$$

3. Les équations (2) et (5) donnent :

$$uv = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \times \frac{y}{\sqrt{y^2 - 1}} = 1, \text{ donc } \dot{S}a \cdot \dot{\reflectbox{S}}a = 1 \text{ ou } \dot{\reflectbox{S}}a = \frac{1}{\dot{S}a}.$$

4. L'intégration donne :

$$a = \int_0^u \frac{du}{1 - u^2} = \tfrac{1}{2} \log \frac{1 + u}{1 - u} = \frac{1}{\dot{S}} u.$$

On a donc aussi

$$a=\tfrac{1}{2}\log\frac{1+\dot{\mathrm{S}}a}{1-\dot{\mathrm{S}}a}=\dot{\mathrm{S}}a+\tfrac{1}{3}\dot{\mathrm{S}}^3a+\tfrac{1}{5}\dot{\mathrm{S}}^5a+\text{ etc.}$$

5. $u=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ donne $u=0$ quand $x=0$, mais $x=0$ donne $a=0$, donc $\dot{\mathrm{S}}(0)=0$. On voit aussi que u croît avec x, donc avec a.

6. $\dot{\mathrm{S}}a$ change de signe avec a, car on a :

$$\dot{\mathrm{S}}(-a)=\frac{\dot{\mathrm{C}}(-a)}{\dot{\text{Ɔ}}(-a)}=\frac{-\dot{\mathrm{C}}a}{\dot{\text{Ɔ}}a}=-\dot{\mathrm{S}}(a).$$

On a de même $\dot{\text{ƨ}}(-a)=-\dot{\text{ƨ}}a$.

7. On a :

$$\dot{\mathrm{S}}\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}\right)=\frac{\dot{\mathrm{C}}\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}\right)}{\dot{\text{Ɔ}}\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}\right)}=\frac{\sqrt{-1}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}=\sqrt{-1}.$$

8. On a $\dot{\mathrm{S}}(a\sqrt{-1})=\dfrac{\dot{\mathrm{C}}(a\sqrt{-1}}{\dot{\text{Ɔ}}(a\sqrt{-1}}=\dfrac{\sqrt{-1}\cdot\mathrm{C}a}{\text{Ɔ}a}=\sqrt{-1}.\mathrm{S}a$;

$$\dot{\text{ƨ}}(a\sqrt{-1})=\frac{\dot{\text{Ɔ}}(a\sqrt{-1})}{\dot{\mathrm{C}}(a\sqrt{-1})}=\frac{\text{Ɔ}a}{\sqrt{-1}\,\mathrm{C}a}=-\sqrt{-1}\,\text{ƨ}a.$$

Réciproquement :

$$\mathrm{S}(a\sqrt{-1})=\frac{\mathrm{C}(a\sqrt{-1})}{\text{Ɔ}(a\sqrt{-1})}=\frac{\sqrt{-1}\,\dot{\mathrm{C}}a}{\dot{\text{Ɔ}}a}=\sqrt{-1}\,\dot{\mathrm{S}}a.$$

$$\text{ƨ}(a\sqrt{-1})=\frac{\text{Ɔ}(a\sqrt{-1})}{\mathrm{C}(a\sqrt{-1})}=\frac{\dot{\text{Ɔ}}a}{\sqrt{-1}\,\dot{\mathrm{C}}a}=-\sqrt{-1}\,\dot{\text{ƨ}}a.$$

§ 18.

Valeurs de $\dot{\mathrm{S}}a$, $\dot{\text{ƨ}}a$ correspondantes aux amplitudes

$$a=\pm(4n+1)\frac{\pi}{2}\sqrt{-1},\ \pm(2n+2)\frac{\pi}{2}\sqrt{-1},\text{ etc.}$$

1. *Valeurs de $\dot{\mathrm{S}}a$.*

On a :

$$\dot{\mathrm{S}}\left[\overline{4n+1}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\right]=\sqrt{-1}\,\mathrm{S}\left[\overline{4n+1}\,\frac{\pi}{2}\right]=\tfrac{1}{0},$$

$$\dot{\mathrm{S}}\left[-\overline{4n+1}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\right]=-\quad»\qquad=-\tfrac{1}{0},$$

$$\dot{S}[\overline{4n+2}\,\tfrac{\pi}{2}\sqrt{-1}]=\sqrt{-1}\;S[\overline{4n+2}\,\tfrac{\pi}{2}]=0\,,$$

$$\dot{S}[-\overline{4n+2}\,\tfrac{\pi}{2}\sqrt{-1}]=\qquad \text{»} \qquad =0\,,$$

$$\dot{S}[\overline{4n+3}\,\tfrac{\pi}{2}\sqrt{-1}]=\sqrt{-1}\;S[\overline{4n+3}\,\tfrac{\pi}{2}]=-\tfrac{1}{0}\,,$$

$$\dot{S}[-\overline{4n+3}\,\tfrac{\pi}{2}\sqrt{-1}]=\qquad \text{»} \qquad =\tfrac{1}{0}\,,$$

$$\dot{S}[4n.\tfrac{\pi}{2}\sqrt{-1}]=\sqrt{-1}\;S[4n.\tfrac{\pi}{2}]=0\,,$$

$$\dot{S}[-4n.\tfrac{\pi}{2}\sqrt{-1}]=\qquad \text{»} \qquad =0\,.$$

2. *Valeurs de* $\dot{\mathfrak{C}}a$.

Elles se déduisent des précédentes par la formule $\dot{\mathfrak{C}}a=\dfrac{1}{\dot{S}a}$.

§ 19.

Résolution des équations $\dot{S}a=0$, $\dot{S}a=\frac{1}{0}$, $\dot{S}a=-\frac{1}{0}$.

$\dot{S}a=0$, en vertu du § précédent, donne :

$$a=(2n+1)\pi\sqrt{-1}\,,\ -(2n+1)\pi\sqrt{-1}\,,$$
$$2n\pi\sqrt{-1}\,,\ -2n\pi\sqrt{-1}\,,\qquad \text{on a donc}$$
$$a=\pm k\pi\sqrt{-1}\,,\quad k=0,1,2,\text{etc.}$$

$\dot{S}a=\frac{1}{0}$ donne $a=(2n+\frac{1}{2})\pi\sqrt{-1}\,,\ -(2n+1+\frac{1}{2})\pi\sqrt{-1}\,,$
donc
$$a=(-1)^k(k+\tfrac{1}{2})\pi\sqrt{-1}\,.$$

$\dot{S}a=-\frac{1}{0}$ donne $a=-(2n+\frac{1}{2})\pi\sqrt{-1}\,,\ (2n+1+\frac{1}{2})\pi\sqrt{-1}\,,$
donc
$$a=-(-1)^k(k+\tfrac{1}{2})\pi\sqrt{-1}\,.$$

§ 20.

Décomposition de $\dot{S}a$ *en facteurs.* (*)

$\dot{S}a=0$ donne $a=\pm k\pi\sqrt{-1}$, $a^2=-k^2\pi^2$, $1+\dfrac{a^2}{k^2\pi^2}=0$,
$k=1, 2$, etc., pour $k=0$ on a $a=0$, donc :

$$\dot{S}a=a\prod_{1k}^{\infty}\left\{1+\frac{a^2}{k^2\pi^2}\right\}.$$

(*) Voir la note de la page 46.

§ 21.

Développement de l'expression $\dot{\mathfrak{S}}(a \pm b)$.

Soient $a+b=\int_0^w \frac{dw}{1-w^2}$, $w=\dot{S}(a+b)$, $a=\int_0^u \frac{du}{1-u^2}$, $u=\dot{S}a$, $b=\int_0^z \frac{dz}{1-z^2}$, $z=\dot{S}b$, on aura :

$$a+b=\int_0^w \frac{dw}{1-w^2}=\int_0^u \frac{du}{1-u^2}+\int_0^z \frac{dz}{1-z^2}.$$

Soit z la valeur de w pour $u=0$, on pourra écrire :

$\int \frac{dw}{1-w^2}=\int \frac{du}{1-u^2}+C$; donc $\frac{dw}{1-w^2}=\frac{du}{1-u^2}$, ou $(1-w^2)du-(1-u^2)dw=0$.

Multiplions cette équation par le facteur $\frac{1}{(1-wu)^2}$, alors $\frac{1-w^2}{(1-wu)^2}du-\frac{1-u^2}{(1-wu)^2}dw=0$, sera une équation différentielle exacte et l'on aura :

$$\frac{(1-w^2)du-(1-u^2)dw}{(1-wu)^2}=d\frac{w-u}{1-wu}=0\ ;$$

donc $\frac{w-u}{1-wu}=C$. Pour $u=0$ on a $C=w=z$, donc

$$\frac{w-u}{1-wu}=z, \quad \text{d'où} \quad w=\frac{u+z}{1+uz}, \quad \text{ou}$$

$\dot{S}(a+b)=\frac{\dot{S}a+\dot{S}b}{1+\dot{S}a\,\dot{S}b}$. Donc $\dot{S}(a-b)=\frac{\dot{S}a-\dot{S}b}{1-\dot{S}a\,\dot{S}b}$.

§ 22.

Autres transformations des intégrales

$$a=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},\quad a=\int_1^y \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}.$$

1. Si dans $a = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, on pose $t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (1),

d'où $x = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}$ (2).

On aura : $a = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int_1^t \frac{-dt}{t\sqrt{1-t^2}}$.

Nommons $t = \mathbf{j}a$ l'inverse de cette intégrale, alors $a = \frac{1}{\mathbf{j}}t$ sera l'inverse de t.

2. Si dans $a = \int_1^y \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}$ on fait $\frac{1}{\sqrt{y^2-1}} = r$,

d'où $y = \frac{\sqrt{1+r^2}}{r}$, on aura :

$$a = \int_1^y \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int_{\frac{1}{0}}^r \frac{-dr}{r\sqrt{r^2-1}}.$$

Nous désignerons l'inverse de cette intégrale par $r = \mathbf{i}a$, et la réciproque de cette équation par $a = \frac{1}{\mathbf{i}}r$.

§ 23.

Propriétés élémentaires des fonctions $\mathbf{i}a$, $\mathbf{j}a$.

1. $t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{y}$, donne $\mathbf{j}a = \frac{1}{\dot{\text{Ɔ}}a}$.

$x = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}$, donne $\dot{\mathrm{C}}a = \frac{\sqrt{1-\mathbf{j}^2a}}{\mathbf{j}a}$.

$y = \frac{1}{t}$, donne $\dot{\text{Ɔ}}a = \frac{1}{\mathbf{j}a}$.

2. $r = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} = \frac{1}{x}$, donne $\mathbf{i}a = \frac{1}{\dot{\mathrm{C}}a}$.

$$y=\frac{\sqrt{1+r^2}}{r}, \quad \text{donne} \quad \dot{\text{Ↄ}}a=\frac{\sqrt{1+\mathfrak{t}^2a}}{\mathfrak{t}a}.$$

3. Si dans $a=\int_1^t \frac{-dt}{t\sqrt{1-t^2}}$, $t=\mathfrak{j}a$, on pose $t=\sqrt{1+u^2}$,

on obtient :

$$a=\int_1^t \frac{-dt}{t\sqrt{1-t^2}}=\int_0^u \frac{du}{1-u^2}, \text{ donc } u=\dot{\mathrm{S}}a.$$

On a donc $\mathfrak{j}a=\sqrt{1+\dot{\mathrm{S}}^2a}$.

4. Quand $a=0$ l'expression $a=\int_1^t \frac{-dt}{t\sqrt{1-t^2}}$, donne

$$0=\int_1^1 \frac{-dt}{t\sqrt{1-t^2}}, \text{ donc } t=1 \text{ ; donc } \mathfrak{j}(0)=1.$$

On a :

$$\mathfrak{j}(-a)=\frac{1}{\dot{\text{Ↄ}}(-a)}=\frac{1}{\dot{\text{Ↄ}}a}=\mathfrak{j}(a) \text{ ;}$$

$$\mathfrak{t}(-a)=\frac{1}{\dot{\mathrm{C}}(-a)}=\frac{1}{-\dot{\mathrm{C}}a}=-\mathfrak{t}a.$$

§ 24.

Relations entre les fonctions C, Ↄ, S *et* Ċ, $\dot{\text{Ↄ}}$, Ṡ
pour des amplitudes réelles.

1. On a : $a=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $x=\dot{\mathrm{C}}a$, $b=\int_0^u \frac{du}{1-u^2}$, $u=\dot{\mathrm{S}}b$

Les fonctions C et Ṡ varient entre 0 et 1 ; soit donc $b=\varphi(a)$, quand $x=u$, déterminons φ. On a :

$$\varphi(a)=\int_0^x \frac{dx}{1-x^2}=\tfrac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}=\tfrac{1}{2}\log\frac{1+\mathrm{C}a}{1-\mathrm{C}a}=\log \mathrm{S}\left[\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right].$$

Désignons, avec Gudermann, cette fonction par L, on aura :

$b = L(a) = \log S[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}a]$; on trouve donc b quand on connait a.

Soit $a = lb$ la fonction inverse de La, on a :

$b = \log S[\frac{\pi}{4} + lb]$; cette formule fera connaître $a = lb$, quand on connaît b.

2. On voit aisément que les fonctions L et l jouissent des propriétés suivantes :

$$L(-a) = -L(a)\,,\quad l(-a) = -la\,,\quad Lla = lLa = a.$$

3. En supposant $x = u$, $x = Ca$, $u = \dot{S}b$, $b = La$, $a = lb$, il est facile de démontrer les relations suivantes :

$$(\mathrm{I})\left\{\begin{array}{l} Ca = \dot{S}La, \\ \text{Ↄ}a = \dfrac{1}{\dot{\text{Ↄ}}La}, \\ Sa = \dot{C}La, \\ \text{Ƨ}a = \dfrac{1}{\dot{C}La}, \end{array}\right. \qquad (\mathrm{II})\left\{\begin{array}{l} \dot{C}a = Sla, \\ \dot{\text{Ↄ}}a = \dfrac{1}{\text{Ↄ}la}, \\ \dot{S}a = Cla, \\ \dot{\text{Ƨ}}a = \dfrac{1}{Cla}. \end{array}\right.$$

(I).

On a $x = u$, donc $Ca = \dot{S}La$.

On a aussi $1 - C^2a = 1 - \dot{S}^2La$ ou $\text{Ↄ}^2a = \dfrac{1}{\dot{\text{Ↄ}}^2La}$, d'où $\text{Ↄ}a = \dfrac{1}{\dot{\text{Ↄ}}La}$.

On a $Sa = \dfrac{Ca}{\text{Ↄ}a} = \dot{S}La \times \dot{\text{Ↄ}}La = \dfrac{\dot{C}La}{\dot{\text{Ↄ}}La} \cdot \dot{\text{Ↄ}}La = \dot{C}La.$

On a ensuite $\text{Ƨ}a = \dfrac{\text{Ↄ}a}{Ca} = \dfrac{1}{\dot{\text{Ↄ}}La} : \dot{S}La = \dfrac{1}{\dot{\text{Ↄ}}La} \times \dfrac{\dot{\text{Ↄ}}La}{\dot{C}La} = \dfrac{1}{\dot{C}La}.$

(II).

Si dans les relations (I) on change a en la, alors La devient Lla, ou a, ce qui donne :

$$Cla = \dot{S}a,\quad \text{Ↄ}la = \frac{1}{\dot{\text{Ↄ}}a},\quad Sla = \dot{C}a,\quad \text{Ƨ}la = \frac{1}{\dot{C}a}.$$

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS CIRCULAIRES.

IIme PARTIE.

FONCTIONS HYPERBOLIQUES.

FIN DE LA TABLE.