LEÇONS

DE

TRIGONOMÉTRIE

SPHÉRIQUE,

PAR

A. Meyer,

DOCTEUR EN SCIENCES, EMPLOYÉ AU DÉPOT DE LA GUERRE.

BRUXELLES.

A LA LIBRAIRIE POLYTECHNIQUE D'AUG. DECQ,

RUE DE LA MADELAINE, N° 9.

1844

Imprimerie de Delevingne et Callewaert.

AVANT-PROPOS.

Ces leçons ont été rédigées pour servir de texte au cours de trigonométrie sphérique que M. le colonel Trumper, directeur du dépôt de la guerre, m'avait chargé de donner l'hiver dernier à MM. les officiers d'état-major attachés à sa division. J'ai cru devoir les publier pour faire suite à mes leçons de trigonométrie rectiligne, dont elles forment le complément nécessaire.

Sans m'astreindre à faire dépendre uniquement d'un seul principe toutes les propositions de la sphérique, à l'exemple de Lagrange, j'ai indiqué dans les remarques la possibilité de cette déduction unitaire, en rattachant chaque fois les propositions démontrées par des principes divers, au théorème fondamental de la trigonométrie sphérique. Cette manière d'exposer les principes de la science m'a paru seule concilier la simplicité et la facilité des démonstrations, avec l'uniformité et la valeur scientifique de la méthode.

Le lecteur verra sans doute aussi avec plaisir la constante corrélation que j'ai établie entre les formules des deux trigonométries, corrélation qui m'a fourni un moyen assez simple pour mnémoniser les relations de la trigonométrie sphérique, notamment celles qui se rapportent aux divers cas de la résolution des triangles rectangles.

J'ai cru devoir substituer à la démonstration de Lagrange sur l'excès sphérique de Legendre, une autre méthode de déduction qui m'a paru plus directe et plus élégante.

On verra aussi, je pense, avec plaisir le développement que j'ai donné à l'examen des cas douteux; car il est à regretter que dans la plupart des traités élémentaires cette matière ne soit pas toujours traitée avec les soins que réclame son importance.

Il ne m'a pas paru nécessaire de donner dans ce traité des applications numériques, attendu que les exemples multipliés et variés de ma *Trigonométrie rectiligne* suffisent pour apprendre comment il convient de gouverner ces sortes de calculs.

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

PREMIÈRE LEÇON.

SOMMAIRE.

DÉFINITIONS. — FORMULES FONDAMENTALES.

1. On appelle *triangle sphérique* une partie de la surface de la sphère comprise par trois arcs de grands cercles, c'est-à-dire dont les plans passent par le centre.

Ces trois arcs se nomment les *côtés*, et les angles qu'ils forment deux à deux, les *angles* du triangle sphérique.

On désigne les angles d'un triangle sphérique par les lettres majuscules A, B, C placées à leurs sommets, et les côtés opposés à ces angles par les lettres minuscules homonymes a, b, c.

Les angles du triangle sphérique sont aussi les angles dièdres que les plans des trois arcs, qui en sont les côtés, forment entre eux.

Les côtés d'un triangle sphérique sont toujours supposés plus petits qu'une demi-circonférence; et les angles plus petits que deux droits. On exclut les autres triangles de la définition des triangles sphériques, puisque leur résolution est toujours renfermée dans celle des triangles que nous avons définis. En effet, on voit que si on conçoit les côtés et les angles d'un triangle ABC tracé sur une sphère, on connaîtra aussi les côtés et les angles du triangle ABC qui est le reste de la sphère.

2. La trigonométrie sphérique s'occupe de la résolution des triangles sphériques; elle enseigne les formules générales qui servent à cette résolution, puis les applique à tous les cas particuliers.

Dans un triangle sphérique il y a, en général, six parties à considérer : les trois angles et les trois côtés. Or, trois quelconques de ces choses étant données, on pourra toujours déterminer les trois autres. Les formules de la trigonométrie sphérique ont pour but d'établir les liaisons possibles entre les trois parties connues, et les parties à déterminer d'un triangle sphérique.

3. Soit O le centre de la sphère à laquelle appartient le triangle ABC; si l'on tire les rayons CO, AO, BO, on pourra les considérer comme les trois arêtes d'un angle solide trièdre dont le sommet est au centre de la sphère. Cet angle trièdre sera composé de trois angles plans, et de trois angles dièdres; les angles plans ont respectivement pour mesures les côtés correspondants du triangle sphérique, et les angles dièdres seront les mêmes que les angles correspondants du triangle sphérique. Il suit de là que le solide trièdre en O peut être substitué au triangle sphérique correspondant, et réciproquement. On voit aussi par là que la résolution des triangles sphériques et des angles trièdres correspondants, doit présenter identiquement les mêmes questions.

Nous allons passer maintenant à la démonstration des formules fondamentales de la trigonométrie sphérique.

1re Formule. — *Dans tout triangle sphérique les sinus des angles sont proportionnels aux sinus des côtés opposés, c'est-à-dire, on a :*

$$\sin A : \sin B : \sin C :: \sin a : \sin b : \sin c. \quad (a).$$

Démonstration. — Soient ABC le triangle proposé, et O le centre de la sphère dont on suppose le rayon CO=1.

Abaissez du point C, extrémité du rayon CO, la perpendiculaire CP sur la face opposée AOB du trièdre ABCO. Si du point P nous tirons sur les côtés AO, BO, respectivement les perpendiculaires PE, PF, il est clair qu'en joignant les points E et F au point C, les droites CE, CF seront pareillement perpendiculaires aux côtés AO, BO (Legendre, liv. V, prop. vi). Il suit de là que les angles PEC, PFC mesureront respectivement les angles dièdres ayant pour arêtes les côtés AO, BO; mais ces angles dièdres sont les mêmes que les angles sphériques correspondants A et B; on a donc : angle PEC=A, angle PFC=B.

De plus, les angles COE, COF sont respectivement mesurés par les arcs b et a, d'où : angle COE$=b$, angle COF$=a$. Cela posé, si OC$=$OB$=$CA$=$R.

1° Le triangle CEO, rectangle en E, donnera

$$CE = CO \times \sin COE = R \sin b.$$

2° Le triangle CFO, rectangle en F, donnera

$$CF = CO \times \sin COF = R \sin a.$$

3° Le triangle CPE, rectangle en P, donnera

$$CP = CE \times \sin CEP = R \sin b \times \sin A. \quad (1).$$

4° Le triangle CPF, rectangle en P, donnera

$$CP = CF \times \sin CEP = R \sin a \times \sin B. \quad (2).$$

En comparant les égalités (1) et (2), on en tire :

$$\sin b \times \sin A = \sin a \times \sin B,$$

d'où la proportion :

$$\sin A : \sin B :: \sin a : \sin b.$$

On démontrerait de la même manière les proportions :

$$\sin A : \sin C :: \sin a : \sin c,$$
$$\sin B : \sin C :: \sin b : \sin c.$$

Remarque. — Comme a et b sont les arcs AC, BC pour un rayon égal à R, il est clair que $\frac{a}{R}, \frac{b}{R}$ seront les mêmes arcs pour un rayon égal à 1. car on a les proportions

$$1 : \frac{a}{R} :: R : \frac{a}{R}, \quad 1 : \frac{b}{R} :: R : \frac{b}{R}.$$

On a donc aussi la proportion :

$$\sin A : \sin B :: \sin \frac{a}{R} : \sin \frac{b}{R};$$

mais puisqu'on a (*Trigonométrie rectiligne*, page 75, § 6) :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots,$$

on aura aussi :

$$\sin \frac{a}{R} = \frac{a}{R} - \frac{a^3}{6R^3} + \ldots = \frac{1}{R}\left(a - \frac{a^3}{6R^2} + \ldots\right),$$
$$\sin \frac{b}{R} = \frac{b}{R} - \frac{b^3}{6R^3} + \ldots = \frac{1}{R}\left(b - \frac{b^3}{6R^2} + \ldots\right).$$

On a donc

$$\sin \frac{a}{R} : \sin \frac{b}{R} :: a - \frac{a^3}{6R^2} + \ldots : b - \frac{b^3}{6R^2} + \ldots$$

Si donc nous supposons le rayon R infini, il est clair que le triangle ABC deviendra rectiligne, et la proportion précédente donnera

$$\sin\frac{a}{R} : \sin\frac{b}{R} :: a : b;$$

on a donc, pour les triangles rectilignes,

$$\sin A : \sin B :: a : b.$$

On voit par cette remarque que les formules de la trigonométrie sphérique contiennent, comme cas particuliers, celles de la trigonométrie rectiligne. Nous aurons souvent occasion de vérifier cette remarque.

2° FORMULE. — *Dans tout triangle sphérique le cosinus d'un côté est égal au produit des cosinus des deux autres côtés, plus le produit de leurs sinus, multiplié par le cosinus de l'angle compris.*

DÉMONSTRATION. — Aux côtés AB, AC du triangle proposé ABC, menez les tangentes AD, AE, et les sécantes OD, OE. On suppose que O soit le centre de la sphère du rayon OA=1. Joignez D et E, le triangle DAE donnera :

$$\overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - 2AD \times AE \times \cos DAE.$$

Le triangle DOE donnera pareillement

$$\overline{DE}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OE}^2 - 2OD \times OE \times \cos DOE.$$

De ces égalités on tire

$$\overline{OD}^2 + \overline{OE}^2 - 2OD \times OE \times \cos DOE = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - 2AD \times AE \times \cos DAE.$$

Mais on a :

$OD = R \operatorname{séc} a$, $OE = R \operatorname{séc} b$, $DOE = a$, $AD = R \operatorname{tg} c$, $AE = R \operatorname{tg} b$, $DAE = BAC = A$,

par conséquent l'égalité précédente devient :

$$R^2 \operatorname{séc}^2 c + R^2 \operatorname{séc}^2 b - 2R^2 \operatorname{séc} c \operatorname{séc} b \cos a = R^2 \operatorname{tg}^2 c + R^2 \operatorname{tg}^2 b - 2R^2 \operatorname{tg} c \operatorname{tg} b \cos A.$$

Mais comme $R^2 \operatorname{séc}^2 c - R^2 \operatorname{tg}^2 c = R^2$, $R^2 \operatorname{séc}^2 b - R^2 \operatorname{tg}^2 b = R^2$, il vient, en transposant et en divisant par $2R^2$,

$$1 - \operatorname{séc} c \operatorname{séc} b \cos a = -\operatorname{tg} c \operatorname{tg} b \cos A,$$

ou

$$1 - \frac{1}{\cos c} \times \frac{1}{\cos b} \times \cos a = -\frac{\sin c}{\cos c} \times \frac{\sin b}{\cos b} \cos A.$$

Multiplions tout par $\cos c \cos b$, il vient :

$$\cos c \cos b - \cos a = -\sin c \sin b \cos A,$$

d'où l'on tire enfin, en transposant :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

En changeant a en b, b en a, puis b en c, c en b, on a, avec la précédente, les trois formules comprenant le 2[e] principe fondamental, savoir :

$$\left.\begin{array}{l}\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C\end{array}\right\} (b).$$

Remarque 1. — Lagrange, dans le 6[e] cahier du *Journal de l'école polytechnique*, a déduit de la 2[e] formule fondamentale, d'une manière purement analytique, toutes les formules de la trigonométrie sphérique; nous suivrons sa marche en partie, et nous ferons voir actuellement comment la 1[re] formule peut se déduire des formules (b).

On a :
$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A.$$

Mais de l'égalité $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$, on tire

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c};$$

d'où

$$\cos^2 A = \frac{\cos^2 b \cos^2 c + \cos^2 a - 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c},$$

et

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \frac{\cos^2 b \cos^2 c + \cos^2 a - 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

$$= \frac{\sin^2 b \sin^2 c - \cos^2 b \cos^2 c - \cos^2 a + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c},$$

$$= \frac{(1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) - \cos^2 b \cos^2 c - \cos^2 a + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

$$= \frac{1 - \cos^2 b - \cos^2 c - \cos^2 a + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c}.$$

Multiplions haut et bas par $\sin^2 a$, il vient

$$\sin^2 A = \sin^2 a \times \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}.$$

Par des calculs tout à fait semblables on trouverait

$$\sin^2 B = \sin^2 b \times \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c},$$

$$\sin^2 C = \sin^2 c \times \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}.$$

En divisant ces égalités deux à deux, le facteur commun

$$\frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}$$

disparaîtra, et l'on aura

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B} = \frac{\sin^2 a}{\sin^2 b}, \quad \frac{\sin^2 A}{\sin^2 C} = \frac{\sin^2 a}{\sin^2 c}, \quad \frac{\sin^2 B}{\sin^2 C} = \frac{\sin^2 b}{\sin^2 c};$$

d'où l'on tire, en extrayant la racine carrée de tous les termes,

$$\sin A : \sin B : \sin C = \sin a : \sin b : \sin c.$$

REMARQUE 2. — Faisons voir que la relation

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

devient

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

lorsque le triangle sphérique devient rectiligne, c'est-à-dire lorsque le rayon de la sphère devient infini. Pour cela, en changeant d'abord les arcs a, b, c pour le rayon R, en arcs pour le rayon 1, on a :

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos A;$$

mais on a, en général

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \text{etc.}, \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + ..$$

par conséquent l'égalité précédente devient

$$\left(1 - \frac{a^2}{2R^2} + ..\right) = \left(1 - \frac{b^2}{2R^2} + ..\right)\left(1 - \frac{c^2}{2R^2} + ..\right) + \left(\frac{b}{R} - \frac{b^3}{6R^3} + ..\right)\left(\frac{c}{R} - \frac{c^3}{6R^3} + ..\right)\cos A,$$

ou, en effectuant les multiplications indiquées, et supprimant de part et d'autre le terme 1,

$$-\frac{a^2}{2R^2} + .. = -\frac{b^2}{2R^2} + .. - \frac{c^2}{2R^2} + .. + \frac{b^2c^2}{4R^4} - .. + \left(\frac{bc}{R^2} - \frac{b^3c}{6R^3} + ..\right)\cos A$$

Multiplions les deux membres par $-2R^2$, il vient

$$a^2 + .. = b^2 + ... + c^2 + .. - \frac{b^2c^2}{2R^2} - .. - \left(2bc + \frac{b^3c}{3R} - ..\right)\cos A.$$

Observons que les termes qui doivent remplir les lacunes indiquées par des points, ont tous au dénominateur le facteur R; il suit de là que tous ces termes deviennent nuls lorsqu'on pose $R = \infty$: on a donc, pour cette valeur du rayon,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

REMARQUE 3. — La proportion

$$\sin A : \sin B :: \sin a : \sin b$$

conduit à :

$$\sin A + \sin B : \sin A - \sin B :: \sin a + \sin b : \sin a - \sin b.$$

Mais puisqu'on a, en général (*Trigonométrie rectiligne*, p. 64) :

$$\sin p + \sin q : \sin p - \sin q :: \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(p+q) : \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(p-q),$$

on trouve :

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a+b) : \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a-b) :: \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B) : \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-B).$$

On tire de là,

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a+b) \times \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)}. \quad (1).$$

Puisque chaque angle et chaque côté d'un triangle sphérique est plus petit que 180°, il est clair que $A-B<180°$, et aussi $a-b<180°$; d'où $\frac{1}{2}(A-B<90°$, $\frac{1}{2}(a-b)<90°$; il suit de là que $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)$, et $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)$ sont tous les deux positifs.

Donc, 1° si $a+b<180°$, ou $\frac{1}{2}(a+b)<90°$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)$ sera positif. Donc, le deuxième membre de (1) sera positif, et par conséquent $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)$ sera aussi positif; donc $\frac{1}{2}(A+B)<90°$, ou $A+B<180°$.

2° Si $a+b=180°$, ou $\frac{1}{2}(a+b)=90°$, alors $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)=\infty$; par conséquent le deuxième membre de (1) sera infini, ou bien $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)=\infty$; d'où $\frac{1}{2}(A+B)=90°$, $A+B=180°$.

3° Si $a+b>180°$, ou $\frac{1}{2}(a+b)>90°$, le facteur $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)$ sera négatif; donc le deuxième membre de (1), ou bien $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)$ sera négatif; d'où il suit que $\frac{1}{2}(A+B)>90°$, ou $(A+B>180°$.

Donc, *dans tout triangle sphérique la somme de deux de ses angles sera plus petite ou plus grande que* 180°, *ou bien égale à deux droits, selon que la somme des côtés opposés sera plus petite, plus grande que* 180°, *ou égale à deux droits.*

DEUXIÈME LEÇON.

SOMMAIRE.

SUITE DES FORMULES FONDAMENTALES. — CES FORMULES COMPRENNENT LA RÉSOLUTION DE TOUS LES CAS DES TRIANGLES SPHÉRIQUES.

3° FORMULE. — *Dans tout triangle sphérique le cosinus d'un angle pris négativement, est égal au produit des cosinus des deux autres angles, moins le produit de leurs sinus, multiplié par le cosinus du côté adjacent.*

DÉMONSTRATION. — Soient ABC le triangle proposé, A'B'C' son polaire, on sait, par la géométrie élémentaire (LEGENDRE, liv. VII, prop. x), que les relations suivantes subsistent :

$$\left.\begin{array}{l} a'=180°-A,\ \ b'=180°-B,\ \ c'=180°-C\,; \\ A'=180°-a,\ \ B'=180°-b,\ \ C'=180°-c \end{array}\right\}\ (b').$$

Mais en appliquant la deuxième formule fondamentale au triangle A'B'C', on a :

$$\begin{aligned} \cos a' &= \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A', \\ \cos b' &= \cos a' \cos c' + \sin a' \sin c' \cos B', \\ \cos c' &= \cos a' \cos b' + \sin a' \sin b' \cos C'. \end{aligned}$$

Donc, en substituant les valeurs (b') :

$$\cos(180^\circ - A) = \cos(180^\circ - B)\cos(180^\circ - C) + \sin(180 - B)\sin(180 - C)\cos(180 - a),$$

$$\cos(180^\circ - B) = \cos(180^\circ - A)\cos(180^\circ - C) + \sin(180^\circ - A)\sin(180^\circ - C)\cos(180^\circ - b),$$

$$\cos(180^\circ - C) = \cos(180 - A)\cos(180^\circ - B) + \sin(180^\circ - A)\sin(180^\circ - B)\cos(180^\circ - c).$$

Mais comme on a, en général :

$$\cos(180 - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(180 - \alpha) = \sin\alpha,$$

les formules précédentes deviennent :

$$\left.\begin{aligned} -\cos A &= \cos B\cos C - \sin B\sin C\cos a \\ -\cos B &= \cos A\cos C - \sin A\sin C\cos b \\ -\cos C &= \cos A\cos B - \sin A\sin B\cos c \end{aligned}\right\}\ (c).$$

Remarque 1. — Voyons comment les formules (c) se déduisent des formules (b).

Si, dans la formule

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A,$$

nous mettons pour $\cos c$ sa valeur

$$\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos C,$$

il vient

$$\cos a = \cos a\cos^2 b + \sin a\sin b\cos b\cos C + \sin b\sin c\cos A;$$

ou

$$\cos a = \cos a(1 - \sin^2 b) + \sin a\sin b\cos b\cos C + \sin b\sin c\cos A;$$

ou

$$\cos a = \cos a - \cos a\sin^2 b + \sin a\sin b\cos b\cos C + \sin b\sin c\cos A;$$

d'où l'on tire

$$\cos a\sin^2 b = \sin a\sin b\cos b\cos C + \sin b\sin c\cos A.$$

ou, en divisant par $\sin b$,

$$\cos a\sin b = \sin a\cos b\cos C + \sin c\cos A \quad (2).$$

En changeant a en b, et A en B, on a aussi

$$\cos b\sin a = \sin b\cos a\cos C + \sin c\cos B \quad (3).$$

Si nous substituons dans (2) pour $\sin a\cos b$ sa valeur donnée par (3), il vient :

$$\cos a\sin b = \sin b\cos a\cos^2 C + \sin c\cos B\cos C + \sin c\cos A,$$

ou

$$\cos a\sin b = \sin b\cos a(1 - \sin^2 C) + \sin c\cos B\cos C + \sin c\cos A,$$

d'où l'on tire, en effectuant la multiplication indiquée, et en réduisant

$$\sin b\cos a\sin^2 C = \sin c(\cos B\cos C + \cos A).$$

Mais on a, par la formule (a),

$$\sin c = \frac{\sin b \sin C}{\sin B};$$

donc, en substituant, et en divisant par $\sin b \sin C$,

$$\cos a \sin C = \frac{\cos B \cos C + \cos A}{\sin B};$$

d'où :

$$\cos a \sin B \sin C = \cos B \cos C + \cos A;$$

on en tire enfin, en transposant,

$$-\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a.$$

C'est la première des formules (c); on obtient les autres en changeant d'abord A, a, respectivement en B, b; puis, dans le résultat obtenu, B, b en C, c.

Remarque 2. — Pour le rayon de la sphère égal à 1, $\cos a$ se change en $\cos \frac{a}{R} = 1 - \frac{a^2}{2R^2} + \text{etc.}$

La formule précédente devient

$$-\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C \left\{ 1 - \frac{a^2}{2R^2} + \ldots \right\}; \text{ si } R = \infty,$$

il vient

$$-\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C,$$
$$-\cos A = \cos (B + C).$$

Cette relation fait voir que les angles A et B+C sont supplément l'un de l'autre, et conduisent à la formule de la trigonométrie rectiligne

$$A + B + C = 180.$$

Remarque 3. — La formule (3), appliquée au triangle polaire donne :

$$\cos b' \sin a' = \sin b' \cos a' \cos C' + \sin c' \cos B';$$

en mettant ici les valeurs (b'), il vient :

$$\cos (180 - B) \sin (180 - A) =$$
$$\sin (180 - B) \cos (180 - A) \cos (180 - C) +$$
$$\sin (180 - C) \cos (180 - b);$$

ou

$$-\cos B \sin A = \sin B \cos A \cos c - \sin C \cos b,$$

ou

$$\sin C \cos b = \cos B \cos A + \sin B \cos A \cos c;$$

on trouverait de même

$$\sin C \cos a = \cos A \cos B + \sin A \cos B \cos c \quad (4).$$

En permutant convenablement les lettres, on trouve aussi :

$$\left.\begin{aligned} \sin A \cos b &= \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a \\ \sin A \cos c &= \cos C \sin B + \sin C \cos B \cos a \end{aligned}\right\} (5).$$

et,

$$\sin B \cos a = \cos A \sin C + \sin A \cos C \cos b,$$
$$\sin B \cos c = \cos C \sin A + \sin C \cos A \cos b.$$

Il est inutile de remarquer que les formules (2) et (3) en contiennent également six, qu'on obtient par une simple permutation de lettres.

4° Formule. — Si dans un triangle sphérique on connaît un côté et les deux angles adjacents à ce côté, on trouvera toujours l'un des côtés inconnus par la relation :

La cotangente du côté inconnu multiplié par le sinus du côté connu, est égale au cosinus du côté connu multiplié par le cosinus de l'angle connu adjacent au côté inconnu, plus le sinus de ce même angle multiplié par la cotangente de l'angle connu opposé au côté inconnu.

Cet énoncé conduit aux six relations :

$$\left.\begin{array}{l}
\cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot A \\
\cot a \sin c = \cos c \cos B + \sin B \cot A \\
\cot b \sin a = \cos a \cos C + \sin C \cot B \\
\cot b \sin c = \cos c \cos A + \sin A \cot B \\
\cot c \sin a = \cos a \cos B + \sin B \cot C \\
\cot c \sin b = \cos b \cos A + \sin A \cot C
\end{array}\right\} (d).$$

Démonstration. — Si dans la formule

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

on substitue

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

on aura

$$\cos a = \cos a \cos^2 b + \sin a \sin b \cos b \cos C + \sin b \sin c \cos A.$$

D'où, en mettant pour $\cos^2 b$ sa valeur $1 - \sin^2 b$, en réduisant et en divisant par $\sin b$, on aura

$$\cos a \sin b = \sin a \cos b \cos C + \sin c \cos A.$$

Substituons pour $\sin c$ sa valeur $\frac{\sin a \sin C}{\sin A}$, déduite de la formule (a), nous aurons

$$\cos a \sin b = \sin a \cos b \cos C + \sin a \sin C \frac{\cos A}{\sin A}.$$

Divisons par $\sin a$, et mettons pour $\frac{\cos a}{\sin a}$, $\frac{\cos A}{\sin A}$, respectivement leurs valeurs $\cot a$, $\cot A$, on aura enfin

$$\cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot A;$$

c'est la première des équations (d). Pour obtenir la deuxième, il suffirait de mettre dans la formule $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$, pour $\cos b$ sa valeur $\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos A$, et d'achever le calcul comme précédemment.

Les quatre autres formules (d) se déduisent, par des procédés tout à fait semblables, des formules

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B,$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

Remarque 1. — Les formules (a), (b), (c), (d), renferment la solution de tous les cas des triangles sphériques ; en effet, comme trois des six éléments d'un triangle suffisent pour le déterminer, il est clair que les formules qui servent à la solution des cas les plus simples de la trigonométrie sphérique ne devront renfermer que quatre éléments, savoir : les trois éléments donnés, avec l'élément à chercher ; d'où il suit que les cas pour la résolution des triangles sphériques ne pourront admettre que les quatre combinaisons que voici :

1° Relation entre trois côtés et un angle ; cette relation est donnée par les formules (b).

2° Entre deux côtés et deux angles, qui peuvent être opposés aux deux côtés, ou l'un opposé, l'autre adjacent au même côté.

La relation entre deux côtés et les deux angles opposés est donnée par la formule (a).

3° La relation entre deux côtés et deux angles dont l'un est opposé, et l'autre adjacent au même côté, est fournie par les égalités (d).

4° Enfin, la relation entre trois angles et un côté est fournie par les formules (c).

Remarque 2. — Quoique les formules précédentes, que nous nommerons fondamentales, suffisent pour la résolution de tous les cas des triangles sphériques, on en a déduit plusieurs autres, servant au même but, et qui ont l'avantage de se prêter immédiatement au calcul logarithmique. L'exposition de ces formules formera l'objet de la leçon suivante.

Remarque 3. — On a (*Trigonométrie rectiligne*, page 83) :

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \text{, etc.};$$

donc, pour

$$\operatorname{cotg} \frac{a}{R} \sin \frac{b}{R} = \cos \frac{b}{R} \cos C + \sin C \operatorname{cotg} A,$$

on a

$$\left(\frac{R}{a} - \frac{a}{3R} - \ldots\right)\left(\frac{b}{R} - \frac{b^3}{6R^3} + \ldots\right) = \left(1 - \frac{b^2}{2R^2} + \ldots\right) \cos C + \sin C \operatorname{cotg} A,$$

ou,

$$\frac{b}{a}-\frac{ab}{3R^2}-\text{etc.},=\left(1-\frac{b^2}{2R^2}+\ldots\right)\cos C+\sin C\,\mathrm{cotg}\,A.$$

Pour $R=\infty$, on a la formule de la *Trigonométrie rectiligne*

$$\frac{b}{a}=\cos C+\sin C\,\mathrm{cotg}\,A,$$

qui se déduit aisément de

$$\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}.$$

On trouverait de même

$$\frac{c}{a}=\cos B+\sin B\,\mathrm{cotg}\,A$$

$$\frac{a}{b}=\cos C+\sin C\,\mathrm{cotg}\,B$$

$$\frac{c}{b}=\cos A+\sin A\,\mathrm{cotg}\,B$$

$$\frac{a}{c}=\cos B+\sin B\,\mathrm{cotg}\,C$$

$$\frac{b}{c}=\cos A+\sin A\,\mathrm{cotg}\,C.$$

Ces formules n'ont jamais été données, que je sache, sous cette forme.

TROISIÈME LEÇON.

SOMMAIRE.

DÉVELOPPEMENT DES SINUS ET COSINUS DE LA MOITIÉ DE CHACUN DES TROIS ANGLES D'UN TRIANGLE SPHÉRIQUE, EN FONCTION DES TROIS CÔTÉS, ET RÉCIPROQUEMENT. — FORMULES DE GAUSS. — ANALOGIES DE NÉPER.

1er Problème. — *Trouver les angles d'un triangle sphérique en fonction de ses côtés.*

Résolvons les équations (b) respectivement par rapport à cos A, cos B, cos C, nous aurons :

$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c},$$

$$\cos B=\frac{\cos b-\cos a\cos c}{\sin a\sin a},$$

$$\cos C=\frac{\cos c-\cos a\cos b}{\sin a\sin b}.$$

En retranchant ces égalités de $1=1$, et en les ajoutant à $1=1$, puis observant qu'en général, $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$, $1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{1}{2}\alpha$, on aura :

$$1-\cos A=2\sin^2\tfrac{1}{2}A=1-\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}=\frac{\sin b\sin c-\cos a+\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$$
$$=\frac{\cos(b-c)-\cos a}{\sin b\sin c};$$

$$1-\cos B=2\sin^2\tfrac{1}{2}B=1-\frac{\cos b-\cos a\cos c}{\sin a\sin c}=\frac{\sin a\sin c+\cos a\cos c-\cos b}{\sin a\sin c}$$
$$=\frac{\cos(a-c)-\cos b}{\sin a\sin c};$$

$$1-\cos C=2\sin^2\tfrac{1}{2}C=1-\frac{\cos c-\cos a\cos b}{\sin a\sin b}=\frac{\sin a\sin b+\cos a\cos b-\cos c}{\sin a\sin b}$$
$$=\frac{\cos(a-b)-\cos c}{\sin a\sin b};$$

$$1+\cos A=2\cos^2\tfrac{1}{2}A=1+\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}=\frac{\cos a+\sin b\sin c-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$$
$$=\frac{\cos a-\cos(b+c)}{\sin b\sin c};$$

$$1+\cos B=2\cos^2\tfrac{1}{2}B=1+\frac{\cos b-\cos a\cos c}{\sin a\sin c}=\frac{\cos b+\sin a\sin c-\cos a\cos c}{\sin a\sin c}$$
$$=\frac{\cos b-\cos(a+c)}{\sin a\sin c};$$

$$1+\cos C=2\cos^2\tfrac{1}{2}C=1+\frac{\cos c-\cos a\cos b}{\sin a\sin b}=\frac{\cos c+\sin a\sin b-\cos a\cos b}{\sin a\sin b}$$
$$=\frac{\cos c-\cos(a+b)}{\sin a\sin b};$$

mais comme on a, en général,

$$\cos q-\cos p=2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2},$$

on aura

$$\cos(b-c)-\cos a=2\sin\frac{a+b-c}{2}\sin\frac{a+c-b}{2}$$

$$\cos(a-c)-\cos b=2\sin\frac{b+a-c}{2}\sin\frac{b+c-a}{2}$$

$$\cos(a-b)-\cos c=2\sin\frac{c+a-b}{2}\sin\frac{c+b-a}{2}$$

$$\cos a-\cos(b+c)=2\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{b+c-a}{2}$$

$$\cos b - \cos(a+c) = 2\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{a+c-b}{2}$$
$$\cos c - \cos(a+b) = 2\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2};$$

on a donc, en substituant,

$$\left.\begin{array}{ll}
\sin^2\frac{1}{2}A = \dfrac{\sin\frac{a+b-c}{2}\sin\frac{a+c-b}{2}}{\sin b\sin c}; & \cos^2\frac{1}{2}A = \dfrac{\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{b+c-a}{2}}{\sin b\sin c};\\
\sin^2\frac{1}{2}B = \dfrac{\sin\frac{a+b-c}{2}\sin\frac{b+c-a}{2}}{\sin a\sin c}; & \cos^2\frac{1}{2}B = \dfrac{\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{a+c-b}{2}}{\sin a\sin c};\\
\sin^2\frac{1}{2}C = \dfrac{\sin\frac{a+c-b}{2}\sin\frac{b+c-a}{2}}{\sin a\sin b}; & \cos^2\frac{1}{2}C = \dfrac{\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}}{\sin a\sin b};
\end{array}\right\}(e)$$

Remarque. — Si nous faisons $a+b+c=2s$, on aura

$$\frac{a+b-c}{2}=s-c,\quad \frac{a+c-b}{2}=s-b,\quad \frac{b+c-a}{2}=s-a,\quad \frac{a+b+c}{2}=s;$$

donc, en substituant, les formules (e) se changeront en

$$\left.\begin{array}{ll}
\sin^2\frac{1}{2}A = \dfrac{\sin(s-c)\sin(s-b)}{\sin b\sin c}; & \cos^2\frac{1}{2}A = \dfrac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c};\\
\sin^2\frac{1}{2}B = \dfrac{\sin(s-c)\sin(s-a)}{\sin a\sin c}; & \cos^2\frac{1}{2}B = \dfrac{\sin s\sin(s-b)}{\sin a\sin c};\\
\sin^2\frac{1}{2}C = \dfrac{\sin(s-b)\sin(s-a)}{\sin a\sin b}; & \cos^2\frac{1}{2}C = \dfrac{\sin s\sin(s-c)}{\sin a\sin b}
\end{array}\right\}(e').$$

Corollaire 1. — En divisant membre à membre les deux égalités de chaque ligne des formules (e) et (e'), on en tire

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\sin^2\frac{1}{2}A}{\cos^2\frac{1}{2}A} = \mathrm{tg}^2\frac{1}{2}A = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)} = \dfrac{\sin(s-c)\sin(s-b)}{\sin s\sin(s-a)};\\
\dfrac{\sin^2\frac{1}{2}B}{\cos^2\frac{1}{2}B} = \mathrm{tg}^2\frac{1}{2}B = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)} = \dfrac{\sin(s-c)\sin(s-a)}{\sin s\sin(s-b)};\\
\dfrac{\sin^2\frac{1}{2}C}{\cos^2\frac{1}{2}C} = \mathrm{tg}^2\frac{1}{2}C = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)} = \dfrac{\sin(s-b)\sin(s-a)}{\sin s\sin(s-c)}.
\end{array}\right\}(f)$$

Corollaire 2. — En multipliant membre à membre les deux égalités de chaque ligne des formules (e'), et en observant qu'on a en général

$$\sin\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha,$$

on obtient

$$\sin^2\tfrac{1}{2}A\cos^2\tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{4}\sin^2 A = \frac{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin^2 b\sin^2 c};$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}B\cos^2\tfrac{1}{2}B=\tfrac{1}{4}\sin^2 B=\frac{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin^2 a\sin^2 c};$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}C\cos^2\tfrac{1}{2}C=\tfrac{1}{4}\sin^2 C=\frac{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin^2 a\sin^2 b}.$$

D'où l'on tire

$$\left.\begin{aligned}\sin A&=\frac{2\sqrt{\{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\}}}{\sin b\sin c};\\ \sin B&=\frac{2\sqrt{\{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\}}}{\sin a\sin c};\\ \sin C&=\frac{2\sqrt{\{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\}}}{\sin a\sin b}\end{aligned}\right\}(g).$$

Corollaire 3. — Nous avons trouvé, dans la première leçon,

$$\sin A=\sin a.\frac{\sqrt{\{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c\}}}{\sin a\sin b\sin c};$$

$$\sin B=\sin b.\frac{\sqrt{\{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c\}}}{\sin a\sin b\sin c};$$

$$\sin C=\sin c.\frac{\sqrt{\{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c\}}}{\sin a\sin b\sin c}.$$

Donc, en comparant ces valeurs aux formules (g), on en tire :

$$(h)\ldots\ 1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c=4\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c).$$

Corollaire 4. — On trouvera facilement

$$\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C=\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin a\sin b\sin c}.\quad(g').$$

Remarque 1. — Si dans les formules (e'), (f), (g), on change $s-a$, $s-b$, $s-c$, a, b, c, respectivement en $\frac{s-a}{R}$, $\frac{s-b}{R}$, etc., qu'on remplace les sinus par leur développement en série, on trouvera aisément les formules correspondantes de la trigonométrie rectiligne (voy. ma *Trigonométrie rectiligne*, p. 149).

2° Problème. — *Exprimer les côtés d'un triangle sphérique en fonction de ses angles.*

Soient (fig. 4) A', B', C' les angles, et a', b', c' les côtés du triangle décrit des sommets A, B, C du triangle donné comme pôles, on aura, par les éléments de la géométrie,

$$A'=180^\circ-a,\ B'=180^\circ-b,\ C'=180^\circ-c;$$

donc

$$\tfrac{1}{2}A'=90^\circ-\tfrac{1}{2}a,\ \tfrac{1}{2}B'=90^\circ-\tfrac{1}{2}b,\ \tfrac{1}{2}C'=90^\circ-\tfrac{1}{2}c.$$

De plus, on a aussi :

$$a'=180^\circ-\mathrm{A},\quad b'=180^\circ-\mathrm{B},\quad c'=180^\circ-\mathrm{C}\,;$$

donc

$$\tfrac{1}{2}(a'+b'-c')=90^\circ-\tfrac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C})\,;\quad \tfrac{1}{2}(a'+c'-b')=90^\circ-\tfrac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{C}-\mathrm{B})\,;$$
$$\tfrac{1}{2}(b'+c'-a')=90^\circ-\tfrac{1}{2}(\mathrm{B}+\mathrm{C}-\mathrm{A})\,;\quad \tfrac{1}{2}(a'+b'+c')=270^\circ-\tfrac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}).$$

Il suit de là, que

$$\left.\begin{array}{l}\sin\tfrac{1}{2}\mathrm{A}'=\cos\tfrac{1}{2}a,\ \sin a'=\sin \mathrm{A},\ \sin b'=\sin \mathrm{B},\ \sin c'=\sin \mathrm{C}\,;\\ \sin\tfrac{1}{2}(a'+b'-c')=\cos\tfrac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C}),\ \sin\tfrac{1}{2}(a'+c'-b')=\cos\tfrac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{C}-\mathrm{B}),\\ \sin\tfrac{1}{2}(b'+c'-a')=\cos\tfrac{1}{2}(\mathrm{B}+\mathrm{C}-\mathrm{A}),\ \sin\tfrac{1}{2}(a'+b'+c')=-\cos\tfrac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C})\end{array}\right\}\ (1).$$

Cela posé, en appliquant les deux premières des formules (*e*) au triangle polaire A'B'C', on aura :

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\mathrm{A}'=\frac{\sin\tfrac{1}{2}(a'+b'-c')\sin\tfrac{1}{2}(a'+c'-b')}{\sin b'\sin c'}\,;\ \cos^2\tfrac{1}{2}\mathrm{A}'=\frac{\sin\tfrac{1}{2}(a'+b'+c')\sin\tfrac{1}{2}(b'+c'-a')}{\sin b'\sin c'}.$$

Or, si dans ces dernières on substitue les valeurs données par les formules (1), on aura :

$$(k)\left\{\begin{array}{l}\cos^2\tfrac{1}{2}a=\dfrac{\cos\tfrac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C})\cos\tfrac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{C}-\mathrm{B})}{\sin \mathrm{B}\sin \mathrm{C}}\,;\ \sin^2\tfrac{1}{2}a=\dfrac{-\cos\tfrac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C})\cos\tfrac{1}{2}(\mathrm{B}+\mathrm{C}-\mathrm{A})}{\sin \mathrm{B}\sin \mathrm{C}}\,;\\ \text{on trouverait pareillement}\\ \cos^2\tfrac{1}{2}b=\dfrac{\cos\tfrac{1}{2}(\mathrm{B}+\mathrm{C}-\mathrm{A})\cos\tfrac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C})}{\sin \mathrm{A}\sin \mathrm{C}}\,;\ \sin^2\tfrac{1}{2}b=\dfrac{-\cos\tfrac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C})\cos\tfrac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{C}-\mathrm{B})}{\sin \mathrm{A}\sin \mathrm{C}}\,;\\ \cos^2\tfrac{1}{2}c=\dfrac{\cos\tfrac{1}{2}(\mathrm{B}+\mathrm{C}-\mathrm{A})\cos\tfrac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{C}-\mathrm{B})}{\sin \mathrm{A}\sin \mathrm{B}}\,;\ \sin^2\tfrac{1}{2}c=\dfrac{-\cos\tfrac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C})\cos\tfrac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C})}{\sin \mathrm{A}\sin \mathrm{B}}.\end{array}\right.$$

Remarque 1. — En posant A+B+C=2S, on trouvera, comme pour les formules (*e*),

$$\left.\begin{array}{l}\cos^2\tfrac{1}{2}a=\dfrac{\cos(\mathrm{S}-\mathrm{C})\cos(\mathrm{S}-\mathrm{B})}{\sin \mathrm{B}\sin \mathrm{C}}\,;\ \sin^2\tfrac{1}{2}a=\dfrac{-\cos \mathrm{S}\cos(\mathrm{S}-\mathrm{A})}{\sin \mathrm{B}\sin \mathrm{C}}\,;\\ \cos^2\tfrac{1}{2}b=\dfrac{\cos(\mathrm{S}-\mathrm{A})\cos(\mathrm{S}-\mathrm{C})}{\sin \mathrm{A}\sin \mathrm{C}}\,;\ \sin^2\tfrac{1}{2}b=\dfrac{-\cos \mathrm{S}\cos(\mathrm{S}-\mathrm{B})}{\sin \mathrm{A}\sin \mathrm{C}}\,;\\ \cos^2\tfrac{1}{2}c=\dfrac{\cos(\mathrm{S}-\mathrm{A})\cos(\mathrm{S}-\mathrm{B})}{\sin \mathrm{A}\sin \mathrm{B}}\,;\ \sin^2\tfrac{1}{2}c=\dfrac{-\cos \mathrm{S}\cos(\mathrm{S}-\mathrm{C})}{\sin \mathrm{A}\sin \mathrm{B}}\end{array}\right\}\ (k').$$

Remarque 2. — Quoique le deuxième membre de la formule

$$\sin^2\tfrac{1}{2}a=\frac{-\cos\tfrac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C})\cos\tfrac{1}{2}(\mathrm{B}+\mathrm{C}-\mathrm{A})}{\sin \mathrm{B}\sin \mathrm{C}},$$

se présente sous une forme négative, il est cependant positif. En effet :

1° On a (Legendre, *Géométrie*, liv. VII, prop. xix),

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}>180^\circ,\ \text{et}\ \mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}<540^\circ\,;$$

donc

$$\tfrac{1}{2}(A+B+C) > 90^\circ, \text{ et } \tfrac{1}{2}(A+B+C) < 270^\circ.$$

D'où il suit que l'angle $\frac{1}{2}(A+B+C)$ est compris entre 90° et 270°; mais les cosinus des angles compris entre ces limites étant négatifs, il s'ensuit que le facteur $-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)$ sera positif.

2° Comme dans tout triangle sphérique un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres (Legendre, *Géométrie*, liv. VII, prop. II), il s'ensuit que l'on aura, dans le triangle polaire

$$a' < b' + c';$$

par conséquent, dans le triangle donné,

$$180^\circ - A < 180^\circ - B + 180^\circ - C.$$

ou, en transposant :

$$B + C - A < 180^\circ;$$

donc

$$\tfrac{1}{2}(B+C-A) < 90^\circ.$$

Il suit de là que le facteur $\cos\frac{1}{2}(B+C-A)$ est positif, et par conséquent le deuxième membre de $\sin^2\frac{1}{2}a =$ etc., sera positif. On démontrera de la même manière que les deuxièmes membres des égalités $\sin^2\frac{1}{2}b =$ etc., $\sin^2\frac{1}{2}c =$ etc., sont positifs.

Corollaire 1. — En divisant deux à deux les formules (k'), on trouvera aisément

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\sin^2\frac{1}{2}a}{\cos^2\frac{1}{2}a} &= \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}a = \frac{-\cos S\cos(S-A)}{\cos(S-C\cos(S-B)};\\
\frac{\sin^2\frac{1}{2}b}{\cos^2\frac{1}{2}b} &= \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}b = \frac{-\cos S\cos(S-B)}{\cos(S-A)\cos(S-C)};\\
\frac{\sin^2\frac{1}{2}c}{\cos^2\frac{1}{2}c} &= \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}c = \frac{-\cos S\cos(S-C)}{\cos(S-A)\cos(S-B)}.
\end{aligned}\right\} (l).$$

Corollaire 2. — En multipliant deux à deux les formules (k'), on trouve facilement

$$\sin^2 a = \frac{-4\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin^2 B\sin^2 C};$$

$$\cos^2 b = \frac{-4\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin^2 A\sin^2 C};$$

$$\cos^2 c = \frac{-4\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin^2 A\sin^2 B}.$$

Corollaire 3. — De la formule

$$\sin^2 A' = \frac{1 - \cos^2 a' - \cos^2 b' - \cos^2 c' + 2\cos a'\cos b'\cos c'}{\sin b'\sin c'},$$

on tire, à cause des relations entre les éléments des triangles polaires,

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C - 2\cos A \cos B \cos C}{\sin^2 B \sin^2 C}.$$

Donc, en comparant celle-ci avec la première des trois formules précédentes, on trouve

$$(l')\ldots\ 1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C-2\cos A\cos B\cos C = -4\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C).$$

ANALOGIES DE GAUSS.

En multipliant deux à deux les formules (e'), on obtient :

$$1^\circ\ \sin^2\tfrac{1}{2}A\sin^2\tfrac{1}{2}B = \frac{\sin^2(s-c)}{\sin^2 c}.\frac{\sin(s-b)\sin(s-a)}{\sin b\sin a} = \sin^2\tfrac{1}{2}C.\frac{\sin^2(s-c)}{\sin^2 c};$$

d'où

$$\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B = \sin\tfrac{1}{2}C.\frac{\sin(s-c)}{\sin c}, \quad (1'.$$

$$2^\circ\ \cos^2\tfrac{1}{2}A\cos^2\tfrac{1}{2}B = \frac{\sin^2 s}{\sin^2 c}.\frac{\sin(s-b)\sin(s-a)}{\sin b\sin a} = \sin^2\tfrac{1}{2}C.\frac{\sin^2 s}{\sin^2 c};$$

d'où

$$\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B = \sin\tfrac{1}{2}C.\frac{\sin s}{\sin c}, \quad (2'.$$

$$3^\circ\ \sin^2\tfrac{1}{2}A\cos^2\tfrac{1}{2}B = \frac{\sin^2(s-b)}{\sin^2 c}.\frac{\sin s\sin(s-c)}{\sin a\sin b} = \cos^2\tfrac{1}{2}C.\frac{\sin^2(s-b)}{\sin^2 c};$$

d'où

$$\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B = \cos\tfrac{1}{2}C.\frac{\sin(s-b)}{\sin c}, \quad (3'.$$

$$4^\circ\ \sin^2\tfrac{1}{2}B\cos^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin^2(s-a)}{\sin^2 c}.\frac{\sin s\sin(s-c)}{\sin a\sin b} = \cos^2\tfrac{1}{2}C.\frac{\sin^2(s-a)}{\sin^2 c};$$

d'où

$$\sin\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}A = \cos\tfrac{1}{2}C.\frac{\sin(s-a)}{\sin c}. \quad (4'.$$

Ajoutons et retranchons d'abord les formules (1', (2', puis celles (3' et (4', il viendra :

$$1^\circ\ \cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B+\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B = \cos\tfrac{1}{2}(A-B) = \sin\tfrac{1}{2}C.\frac{\sin s+\sin(s-c)}{\sin c};$$

$$2^\circ \cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B - \sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B = \cos\tfrac{1}{2}(A+B) = \sin\tfrac{1}{2}C.\frac{\sin s - \sin(s-c)}{\sin c};$$

$$3^\circ \sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B + \cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B = \sin\tfrac{1}{2}(A+B) = \cos\tfrac{1}{2}C.\frac{\sin(s-b)+\sin(s-a)}{\sin b};$$

$$4^\circ \sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B - \cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B = \sin\tfrac{1}{2}(A-B) = \cos\tfrac{1}{2}C.\frac{\sin(s-b)-\sin(s-a)}{\sin b}.$$

Mais on a, par les formules, page 62, de ma *Trigonométrie rectiligne :*

$$\sin s + \sin(s-c) = 2\sin\tfrac{1}{2}\{s+s-c\}\cos\tfrac{1}{2}\{s-(s-c)\} = 2\sin\tfrac{1}{2}(a+b)\cos\tfrac{1}{2}c,$$

$$\sin s - \sin(s-c) = 2\sin\tfrac{1}{2}\{s-(s-c)\}\cos\tfrac{1}{2}\{s+s-c\} = 2\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}c,$$

$$\sin(s-b) + \sin(s-a) = 2\sin\tfrac{1}{2}\{s-b+s-a\}\cos\tfrac{1}{2}\{(s-b)-(s-a)\} = 2\cos\tfrac{1}{2}(a-b)\sin\tfrac{1}{2}c,$$

$$\sin(s-b) - \sin(s-a) = 2\sin\tfrac{1}{2}\{(s-b)-(s-a)\}\cos\tfrac{1}{2}\{s-b+s-a\} = 2\sin\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}c.$$

En substituant ces valeurs dans les formules précédentes, et en observant que l'on a, en général,

$$\sin\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha,$$

il vient :

$$\cos\tfrac{1}{2}(A-B) = \sin\tfrac{1}{2}C.\frac{2\sin\tfrac{1}{2}(a+b)\cos\tfrac{1}{2}c}{2\sin\tfrac{1}{2}c\cos\tfrac{1}{2}c} = \sin\tfrac{1}{2}C.\frac{\sin\tfrac{1}{2}(a+b)}{\sin\tfrac{1}{2}c} \quad (1'',$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B) = \sin\tfrac{1}{2}C.\frac{2\sin\tfrac{1}{2}c\cos\tfrac{1}{2}(a+b)}{2\sin\tfrac{1}{2}c\cos\tfrac{1}{2}c} = \sin\tfrac{1}{2}C.\frac{\cos\tfrac{1}{2}(a+b)}{\cos\tfrac{1}{2}c} \quad (2'',$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B) = \cos\tfrac{1}{2}C.\frac{2\sin\tfrac{1}{2}c\cos\tfrac{1}{2}(a-b)}{2\sin\tfrac{1}{2}c\cos\tfrac{1}{2}c} = \cos\tfrac{1}{2}C.\frac{\cos\tfrac{1}{2}(a-b)}{\cos\tfrac{1}{2}c} \quad (3'',$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(A-B) = \cos\tfrac{1}{2}C.\frac{2\sin\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}c}{2\sin\tfrac{1}{2}c\cos\tfrac{1}{2}c} = \cos\tfrac{1}{2}C.\frac{\sin\tfrac{1}{2}(a-b)}{\sin\tfrac{1}{2}c} \quad (4''.$$

Si dans ces quatre formules on change d'abord B en C, b en c, et réciproquement, puis, dans les résultats obtenus, A en B, a en b, et *vice versâ,* on obtiendra en tout douze formules, dues à Gauss, et que nous nommons, pour cette raison, analogies de Gauss.

Gauss paraît avoir trouvé le premier ces formules; car il s'en est servi fréquemment dans l'ouvrage intitulé : *Theoria motûs corporum cœlestium,* publié en 1809. Il observe, à la page 51 de ce livre, que ces formules mériteraient d'être introduites dans les traités de trigonométrie sphérique. Cependant, observons aussi que Delambre les a trouvées, de son côté; il les a même publiées un an avant la publication de l'ouvrage cité de Gauss. Le professeur Mollweide les a également publiées, comme étant de lui, en 1808, dans le tome XVIII, page 394, de son recueil périodique, portant pour titre : *Correspondance mensuelle*.

Remarque 1. — Si on connaissait dans un triangle un côté, l'angle opposé, et les deux côtés qui le comprennent, on pourrait trouver, par les analogies précédentes, les deux autres angles. Si le côté opposé à l'angle donné n'était pas connu, on devrait éliminer par la division le sinus et le cosinus de ce côté, mais alors on tomberait, comme nous le verrons bientôt, sur les analogies de Néper, ce qui restreint beaucoup l'usage des formules de Gauss.

Remarque 2. — Si a, b, c, etc., sont des arcs pour le rayon R, leurs valeurs pour le rayon $=1$ seront respectivement

$$\frac{a}{R}, \frac{b}{R}, \frac{c}{R}, \frac{a+b}{R}, \frac{a-b}{R}.$$

Mais on a :

$$\sin \tfrac{1}{2}\frac{(a+b)}{R} = \frac{\frac{1}{2}(a+b)}{R} - \frac{\overline{\frac{1}{2}(a+b)}^3}{6R^3} + \ldots$$

$$\sin \tfrac{1}{2}\frac{(a-b)}{R} = \frac{\frac{1}{2}(a-b)}{R} - \frac{\frac{1}{2}(a-b)^3}{6R^3} + \ldots$$

$$\sin \tfrac{1}{2}\frac{c}{R} = \frac{\frac{1}{2}c}{R} - \frac{\overline{\frac{1}{2}c}^3}{6R^3} + \ldots$$

En substituant dans (1″ et (4″, et remarquant que $\frac{1}{R}$ devient facteur commun, en le supprimant, il restera encore au dénominateur de tous les termes à partir du deuxième. Donc, en faisant $R=\infty$, ce qui change le triangle sphérique en rectiligne, tous les termes disparaîtront à l'exception du premier ; par conséquent, pour $R=\infty$, les formules (1″ et (4″ deviennent :

$$\cos \tfrac{1}{2}(A-B) = \sin \tfrac{1}{2} C \frac{a+b}{c},$$

$$\sin \tfrac{1}{2}(A-B) = \cos \tfrac{1}{2} C \frac{a-b}{c},$$

ce qui reproduit les formules (III) de ma *Trigonométrie rectiligne*, p. 145.

Corollaire. — Si nous résolvons les analogies précédentes par rapport à $\sin \frac{1}{2}(a+b)$, $\cos \frac{1}{2}(a+b)$, $\cos \frac{1}{2}(a-b)$, $\sin \frac{1}{2}(a-b)$, nous trouverons :

$$(1''' \quad \sin \tfrac{1}{2}(a+b) = \sin \tfrac{1}{2} c . \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2} C};$$

$$(2''' \quad \cos \tfrac{1}{2}(a+b) = \cos \tfrac{1}{2} c . \frac{\cos \frac{1}{2}(A+B)}{\sin \frac{1}{2} C};$$

$$3''' \quad \cos \tfrac{1}{2}(a-b) = \cos \tfrac{1}{2} c \; \frac{\sin \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \frac{1}{2} C};$$

$$4''' \quad \sin \tfrac{1}{2}(a-b) = \sin \tfrac{1}{2} c \; \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2} C}.$$

Ces formules pourront servir à trouver deux côtés quand on donne les trois angles et le troisième côté. On en déduit huit autres en changeant d'abord b en c, B en C, puis dans les résultats obtenus, a en b, A en B.

ANALOGIES DE NÉPER.

1re Démonstration. — 1° Éliminons $\sin \frac{1}{2} c$ entre (1″ et (4″, et pour cela, divisons ces égalités; il viendra :

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A-B)} = \mathrm{tg} \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\cos \frac{1}{2} C}{\sin \frac{1}{2} C} \times \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} = \mathrm{cotg} \tfrac{1}{2} C \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \ldots \quad (\mathrm{I};$$

2° Éliminons $\cos \frac{1}{2} c$ entre (2″ et (3″, pour cela, divisons ces formules; il viendra :

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)} = \mathrm{tg} \tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos \frac{1}{2} C}{\sin \frac{1}{2} C} \times \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} = \mathrm{cotg} \tfrac{1}{2} C \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} \ldots \quad (\mathrm{II};$$

3° Éliminons $\sin \frac{1}{2}$ C entre (1‴ et (2‴, nous aurons :

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} = \frac{\sin \frac{1}{2} c}{\cos \frac{1}{2} c} \times \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)}, \text{ ou } \mathrm{tg} \tfrac{1}{2}(a+b) = \mathrm{tg} \tfrac{1}{2} c \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)} \ldots \quad (\mathrm{III};$$

4° Éliminons $\cos \frac{1}{2}$ C entre (3‴ et (4‴, nous aurons :

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a-b)} = \frac{\sin \frac{1}{2} c}{\cos \frac{1}{2} c} \times \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)}; \text{ ou } \mathrm{tg} \tfrac{1}{2}(a-b) = \mathrm{tg} \tfrac{1}{2} c \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)} \ldots \quad (\mathrm{IV}.$$

Si dans les formules (I, (II, (III et (IV, on change d'abord B en C, b en c et réciproquement, puis dans les résultats obtenus A en B, a en b, et réciproquement, on obtiendra en tout douze formules, nommées analogies de Néper; elles servent à résoudre les problèmes suivants :

1° *Étant donnés un angle et les deux côtés qui le comprennent, trouver les deux autres angles;*

2° *Étant donnés deux angles et le côté adjacent, trouver les deux autres côtés.*

Ces formules sont d'un grand usage dans les applications de la trigonométrie sphérique.

REMARQUE. — Si on suppose a, b, c, $a+b$, $a-b$ des arcs appartenant au rayon r, pour un rayon $=1$, les arcs $\frac{1}{2}(a+b)$, $\frac{1}{2}(a-b)$, se réduiront à $\frac{\frac{1}{2}(a+b)}{r}$, $\frac{\frac{1}{2}(a-b)}{r}$, et l'on aura :

$$\sin\frac{\frac{1}{2}(a\pm b)}{r}=\frac{\frac{1}{2}(a\pm b)}{r}-\frac{\overline{\frac{1}{2}(a\pm b)}^3}{6r^3}+\ldots=\frac{1}{r}\left\{\frac{1}{2}(a\pm b)-\frac{\overline{\frac{1}{2}(a\pm b)}^3}{6r^2}+\ldots\right\}.$$

En substituant, la formule (1 devient :

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)=\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C\,\frac{\frac{1}{2}(a-b)-\frac{\overline{\frac{1}{2}(a-b)}^3}{6r^2}+\ldots}{\frac{1}{2}(a+b)-\frac{\overline{\frac{1}{2}(a+b)}^3}{6r^2}+\ldots}$$

Cette formule s'appliquera aux triangles rectilignes pour $r=\infty$, mais alors elle donne :

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)=\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C\,\frac{a-b}{a+b};$$

C'est la formule connue de la trigonométrie rectiligne.

2e DÉMONSTRATION. — Dans la première leçon nous avons démontré la proportion :

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B):\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)::\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b):\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b).$$

Donc, on a :

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B):\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)::\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}:\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}::\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}:\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}.$$

Soient maintenant k et k' des constants tels que l'on ait :

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)=k\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)},\quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)=k'\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}.$$

Pour le rayon 1, ces formules deviendront

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)=k\frac{\cos\frac{1}{2}\frac{(a-b)}{r}}{\cos\frac{1}{2}\frac{(a+b)}{r}}=k\frac{\left\{1-\frac{\overline{\frac{1}{2}(a-b)}^2}{2r^2}+\frac{\overline{\frac{1}{2}(a-b)}^4}{24r^4}-\text{etc.}\right\}}{\left\{1-\frac{\overline{\frac{1}{2}(a+b)}^2}{2r^2}+\frac{\overline{\frac{1}{2}(a+b)}^4}{24r^4}-\text{etc.}\right\}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)=k'.\frac{\sin\frac{1}{2}\frac{(a-b)}{r}}{\sin\frac{1}{2}\frac{(a+b)}{r}}=k'.\frac{\frac{\frac{1}{2}(a-b)}{r}-\frac{\overline{\frac{1}{2}(a-b)}^3}{6r^3}+\ldots}{\frac{\frac{1}{2}(a+b)}{r}-\frac{\overline{\frac{1}{2}(a+b)}^3}{6r^3}+\ldots}=k'.\frac{\frac{1}{2}(a-b)-\frac{\overline{\frac{1}{2}(a-b)}^3}{6r^2}+\ldots}{\frac{1}{2}(a+b)-\frac{\overline{\frac{1}{2}(a+b)}^3}{6r^2}+\ldots}$$

Donc, pour $r=\infty$ on a :

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)=\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C=k;\ \text{et}\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)=k'\frac{a-b}{a+b}.$$

Mais on a, par la trigonométrie rectiligne,

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-B)=\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C\,\frac{a-b}{a+b};$$

d'où $$k'=\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C.$$

Donc

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B)=\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)},\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-B)=\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C\,\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}.$$

Ce sont les deux premières analogies. Pour obtenir les deux autres, soit A'B'C' le triangle polaire du triangle donné, on aura :

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A'+B')=\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C'\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a'-b')}{\cos\frac{1}{2}(a'+b')},\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A'-B')=\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C'\,\frac{\sin\frac{1}{2}(a'-b')}{\sin\frac{1}{2}(a'+b')}.$$

Mais comme on a :

$$A'=180^\circ-a,\ B'=180^\circ-b,\ C'=180^\circ-c,\ a'=180^\circ-A,\ b'=180^\circ-B,$$

il vient :

$$\operatorname{tg}\left\{180^\circ-\tfrac{1}{2}(a+b)\right\}=\operatorname{cotg}\left\{90^\circ-\tfrac{1}{2}c\right\}\frac{\cos\frac{1}{2}\left\{-(A-B)\right\}}{\cos\left\{180-\frac{1}{2}(A+B)\right\}},$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\left\{-(a-b)\right\}=\operatorname{cotg}\left\{90^\circ-\tfrac{1}{2}c\right\}\frac{\sin\frac{1}{2}\left\{-(A-B)\right\}}{\sin\left\{180^\circ-\frac{1}{2}(A+B)\right\}};$$

ou, en réduisant,

$$-\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a+b)=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c\,\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{-\cos\frac{1}{2}(A+B)},$$

$$-\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a-b)=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c\,\frac{-\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)};$$

d'où, en changeant les signes,

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a+b)=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c\,\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)},\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a-b)=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c\,\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}.$$

3ᵉ Démonstration. — Par les formules (3) de la deuxième leçon, on a :

$$\cos b\sin a=\cos a\sin b\cos C+\sin c\cos B,$$
$$\cos a\sin b=\cos b\sin a\cos C+\sin c\cos A;$$

d'où, en transposant,

$$\sin a\cos B=\cos b\sin c-\sin b\cos c\cos A,$$
$$\sin a\cos C=\cos c\sin b-\sin c\cos b\cos A.$$

De celles-ci, on tire par addition

$$\sin a(\cos B+\cos C)=\sin(b+c)(1-\cos A)\quad (a').$$

Mais on a, par la première des formules fondamentales,

$$\sin a\sin B=\sin b\sin A,$$
$$\sin a\sin C=\sin c\sin A.$$

En ajoutant et en retranchant celles-ci, on a :

$$\left.\begin{array}{l}\sin a\,(\sin B+\sin C)=\sin A\,(\sin b+\sin c)\\ \sin a\,(\sin B-\sin C)=\sin A\,(\sin b-\sin c)\end{array}\right\}\quad(a'').$$

En divisant (a'') par (a'), on a :

$$\frac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}=\frac{\sin A}{1-\cos A}\cdot\frac{\sin b+\sin c}{\sin (b+c)},$$

$$\frac{\sin B-\sin C}{\cos B+\cos C}=\frac{\sin A}{1-\cos A}\cdot\frac{\sin b-\sin c}{\sin (b+c)}.$$

A cause des formules (24), (26), page 64 ; (30), (36) et (37), page 65, de ma *Trigonométrie rectiligne*, les formules précédentes se changent en :

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B+C)=\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A.\,\frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)},$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B-C)=\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A.\,\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)};$$

ce sont les deux premières analogies en question.

Pour obtenir les deux autres, on se servira des formules (5) de la deuxième leçon, savoir :

$$\sin A\cos b=\cos B\sin C+\sin B\cos C\cos a,$$
$$\sin A\cos c=\cos C\sin B+\sin C\cos B\cos a;$$

d'où, en ajoutant,

$$\sin A\,\{\cos b+\cos c\}=(1-\cos a)\sin (B+C)\quad(a_{,}.$$

En ajoutant et en retranchant

$$\sin A\sin b=\sin a\sin B,$$
$$\sin A\sin c=\sin a\sin C,$$

on trouve

$$\left.\begin{array}{l}\sin A\,(\sin b+\sin c)=\sin a\,(\sin B+\sin C)\\ \sin A\,(\sin b-\sin c)=\sin a\,(\sin B-\sin C)\end{array}\right\}\quad(a_{,,}.$$

En divisant chacune de celles-ci par $(a$, puis en transformant par les formules citées, il vient :

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(b+c)=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a.\,\frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}(B+C)};$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(b-c)=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a.\,\frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}(B+C)}.$$

Résumé des formules générales pour la résolution des triangles sphériques.

$$\text{I.}\quad\left\{\begin{array}{l}\sin A : \sin B :: \sin a : \sin b\\ \sin A : \sin C :: \sin a : \sin c\\ \sin B : \sin C :: \sin b : \sin c.\end{array}\right.$$

$$\text{II.}\quad\left\{\begin{array}{l}\cos a = \cos b\cos c + \sin b \sin c \cos A\\ \cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B\\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C\end{array}\right.\qquad\left.\begin{array}{l}-\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a\\ -\cos B = \cos A \cos C - \sin A \sin C \cos b\\ -\cos C = \cos A \cos B - \sin A \sin B \cos c\end{array}\right\}\quad\text{III.}$$

$$\text{IV.}\quad\left\{\begin{array}{l}\operatorname{cotg} a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \operatorname{cotg} A\\ \operatorname{cotg} a \sin c = \cos c \cos B + \sin B \operatorname{cotg} A\\ \operatorname{cotg} b \sin a = \cos a \cos C + \sin C \operatorname{cotg} B\\ \operatorname{cotg} b \sin c = \cos c \cos A + \sin A \operatorname{cotg} B\\ \operatorname{cotg} c \sin a = \cos a \cos B + \sin B \operatorname{cotg} C\\ \operatorname{cotg} c \sin b = \cos b \cos A + \sin A \operatorname{cotg} C.\end{array}\right.$$

$$a + b + c = 2s$$

$$\overbrace{\begin{array}{l}\sin^2\tfrac{1}{2}A = \dfrac{\sin(s-c)\sin(s-b)}{\sin b \sin c},\\ \sin^2\tfrac{1}{2}B = \dfrac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a \sin c},\\ \sin^2\tfrac{1}{2}C = \dfrac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a \sin b},\end{array}}^{\text{V}}\quad
\overbrace{\begin{array}{l}\cos^2\tfrac{1}{2}A = \dfrac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c},\\ \cos^2\tfrac{1}{2}B = \dfrac{\sin s \sin(s-b)}{\sin a \sin c},\\ \cos^2\tfrac{1}{2}C = \dfrac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b},\end{array}}^{\text{VI}}\quad
\overbrace{\begin{array}{l}\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}A = \dfrac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)},\\ \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}B = \dfrac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-b)},\\ \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}C = \dfrac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin s \sin(s-c)}.\end{array}}^{\text{VII}}$$

$$A + B + C = 2S$$

$$\overbrace{\begin{array}{l}\sin^2\tfrac{1}{2}a = \dfrac{-\cos S \cos(S-A)}{\sin B \sin C},\\ \sin^2\tfrac{1}{2}b = \dfrac{-\cos S \cos(S-B)}{\sin A \sin C},\\ \sin^2\tfrac{1}{2}c = \dfrac{-\cos S \cos(S-C)}{\sin A \sin B},\end{array}}^{\text{VIII}}\quad
\overbrace{\begin{array}{l}\cos^2\tfrac{1}{2}a = \dfrac{\cos(S-C)\cos(S-B)}{\sin B \sin C},\\ \cos^2\tfrac{1}{2}b = \dfrac{\cos(S-A)\cos(S-C)}{\sin A \sin C},\\ \cos^2\tfrac{1}{2}c = \dfrac{\cos(S-A)\cos(S-B)}{\sin A \sin B},\end{array}}^{\text{IX}}\quad
\overbrace{\begin{array}{l}\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}a = \dfrac{-\cos S \cos(S-A)}{\cos(S-C)\cos(S-B)},\\ \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}b = \dfrac{-\cos S \cos(S-B)}{\cos(S-A)\cos(S-C)},\\ \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}c = \dfrac{-\cos S \cos(S-C)}{\cos(S-A)\cos(S-B)}.\end{array}}^{\text{X}}$$

$$
\text{XI}\left\{
\begin{aligned}
&\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B+C)=\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A\,\frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)},\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B)=\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)},\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+C)=\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}B\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a-c)}{\cos\frac{1}{2}(a+c)},\\
&\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B-C)=\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A\,\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)},\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-B)=\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C\,\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)},\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-C)=\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}B\,\frac{\sin\frac{1}{2}(a-c)}{\sin\frac{1}{2}(a+c)},\\
&\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(b+c)=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a\,\frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}(B+C)},\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a+b)=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c\,\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)},\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a+c)=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b\,\frac{\cos\frac{1}{2}(A-C)}{\cos\frac{1}{2}(A+C)},\\
&\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(b-c)=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a\,\frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}(B+C)},\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a-b)=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c\,\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)},\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a-c)=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b\,\frac{\sin\frac{1}{2}(A-C)}{\sin\frac{1}{2}(A+C)},
\end{aligned}
\right.
$$

Observations mnémoniques.

Comme les formules précédentes renferment toute la trigonométrie sphérique, il est nécessaire qu'on se les grave bien dans la mémoire; à cette fin nous croyons utile de faire remarquer :

1° Que les formules I et II se retiennent facilement; 2° que les formules III se déduisent des formules I, en y changeant les petites lettres en grandes, et les grandes en petites, pourvu que l'on donne au premier et au troisième terme le signe moins.

Quant aux formules IV, remarquons 1° que les facteurs extrêmes sont des cotangentes; le deuxième et l'avant dernier, des sinus; et les deux facteurs moyens, des cosinus; 2° que les trois premières lettres sont minuscules, les trois dernières majuscules; 3° que les six formules IV se partagent en trois groupes de deux formules, dont chacune commence par la même cotangente. 4° Les deux sinus qui accompagnent la cotangente de chaque groupe se rapportent aux deux lettres différentes de celle qui affecte la cotangente. 5° Le premier cosinus du deuxième membre se rapporte à la même lettre que le sinus du premier membre; le deuxième cosinus est affecté d'une lettre de nom différent aux trois premières lettres de chaque formule. 6° L'avant-dernier sinus porte la même lettre que le cosinus qui précède; enfin 7° la dernière cotangente a une lettre de même nom que celle qui affecte la cotangente du premier membre.

Quant aux formules V, observons :

1° Que tous les facteurs sont des sinus; 2° que les lettres soustractives dans les numérateurs sont des lettres minuscules de noms différents de la lettre majuscule du premier membre; 3° que les lettres des dénominateurs sont les mêmes que celles qu'on retranche dans les numérateurs.

Par rapport aux formules VI, observons 1° que tous les facteurs du deuxième membre sont des sinus; 2° que le premier facteur des numérateurs est affecté de la lettre s seule, et que la lettre soustractive dans les mêmes numérateurs est de même nom que celle qui affecte le premier membre; 3° les dénominateurs sont les mêmes que dans les formules V.

Dans les formules VII, on remarque qu'elles ont pour numérateurs, les numérateurs des formules V, et pour dénominateurs, les numérateurs des formules VI.

Les numérateurs des formules VIII et IX sont des cosinus; quant aux lettres, on les déduit des formules V et VI, en changeant les petites lettres en grandes, et réciproquement. Observons encore 1° que les numérateurs des formules VIII correspondent aux numérateurs des formules VI, et qu'ils sont négatifs; 2° que les numérateurs des formules IX correspondent aux numérateurs des formules V.

Pour les formules XI, on remarquera 1° que dans tous les numérateurs se trouve la différence entre les lettres de même nom que celles du premier membre, tandis que dans tous les dénominateurs se trouve la somme des mêmes lettres; 2° s'il y a de grandes lettres dans le premier membre, on a de petites lettres homonymes dans le deuxième, et réciproquement; 3° s'il y a une somme dans le premier membre, les deux termes de la fraction du deuxième membre sont des cosinus; tandis qu'ils sont des sinus lorsque le premier membre affecte une différence; 4° s'il y a de grandes lettres dans le premier membre, le premier facteur du deuxième est une cotangente; tandis qu'il est une tangente si le premier membre se rapporte à de petites lettres.

APPENDICE A LA TROISIÈME LEÇON.

Relations remarquables entre les six éléments d'un triangle sphérique.

I.

$$\frac{\sin a \sin b}{\sin A \sin B} = \frac{\sin^2 c}{\sin^2 C}.$$

Démonstration. — On a, par la première formule fondamentale,

$$\sin A \sin c = \sin C \sin a,$$
$$\sin B \sin c = \sin C \sin b;$$

en multipliant par ordre,

$$\sin A \sin B \sin^2 c = \sin^2 C \sin a \sin b;$$

d'où

$$\frac{\sin a \sin b}{\sin A \sin B} = \frac{\sin^2 c}{\sin^2 C} \quad (\mathrm{I}).$$

Remarque. — Comme le deuxième membre de (I) est toujours positif, il suit que le signe des deux produits $\sin a \sin b$, $\sin A \sin B$ est toujours le même.

II.

$$\sin a \sin b + \cos a \cos b \cos C = \sin A \sin B - \cos A \cos B \cos c.$$

Démonstration. — On a :

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

En multipliant par cos C, puis remplaçant $\cos^2 C$ par $1 - \sin^2 C$, il vient

$$\cos c \cos C = \cos a \cos b \cos C + \sin a \sin b - \sin a \sin b \sin^2 C \quad (a).$$

En remplaçant les lettres majuscules par des minuscules, et *vice versâ*, en changeant toutefois en même temps le signe des facteurs cosinus, ce qui est permis à cause des relations qui existent entre les éléments d'un triangle et de son polaire, il vient

$$\cos C \cos c = -\cos A \cos B \cos c + \sin A \sin B - \sin A \sin B \sin^2 c \quad (b).$$

La comparaison de (a) et de (b) donne

$$\sin a \sin b + \cos a \cos b \cos C - \sin a \sin b \sin^2 C = \sin A \sin B - \cos A \cos B \cos c - \sin A \sin B \sin^2 c;$$

d'où, à cause de la relation (I),

$$\sin a \sin b + \cos a \cos b \cos C = \sin A \sin B - \cos B \cos A \cos c \quad (\mathrm{II}).$$

III.

$$\frac{\sin A}{\cot b \operatorname{tg} c - \cos A \sin b} = \frac{\cos C \operatorname{tg} B + \cos a \sin C}{\sin a}.$$

Démonstration. — Par les formules (2) et (3) de la deuxième leçon, on a :

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A;$$

divisant par $\cos c$, on a :

$$\frac{\sin a \cos B}{\cos c} = \cos b \operatorname{tg} c - \cos A \sin b \quad (a');$$

d'où, en échangeant les majuscules et les minuscules, puis changeant les signes des facteurs cosinus,

$$\frac{\sin A \cos b}{\cos C} = \cos B \operatorname{tg} C + \cos a \sin B \quad (b').$$

Divisons les deux membres de celle-ci par $\sin a$, puis divisons $\sin A = \sin A$, par (a'), on aura respectivement

$$\frac{\sin A \cos c}{\sin a \cos B} = \frac{\cos C \operatorname{tg} B + \cos a \sin C}{\sin a}.$$

$$\frac{\sin A \cos c}{\sin a \cos B} = \frac{\sin A}{\operatorname{cotg} b \operatorname{tg} c - \cos A \sin b}.$$

D'où, en égalant les deuxièmes membres

$$\frac{\sin A}{\operatorname{cotg} b \operatorname{tg} c - \cos A \sin b} = \frac{\cos C \operatorname{tg} B + \cos a \sin C}{\sin a} \quad (\text{III}).$$

IV.

$$\frac{\sin a}{\sin B + \cos B \cos a \operatorname{tg} C} = \frac{\sin b - \cos b \cos A \operatorname{tg} c}{\sin B + \cos B \cos a \operatorname{tg} C}.$$

Démonstration. — On a :

$$\operatorname{cotg} c \sin b = \cos b \cos A + \sin A \operatorname{cotg} C;$$

ou

$$\operatorname{cotg} C = \frac{\operatorname{cotg} c \sin b - \cos b \cos A}{\sin A}; \text{ ou } \operatorname{cotg} C = \frac{\sin b - \cos b \cos A \operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} c \sin A} \quad (a'').$$

En échangeant les lettres, on a aussi :

$$\operatorname{cotg} c = \frac{\sin B + \cos B \cos a \operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} C \sin a}.$$

On tire de celle-ci :

$$\operatorname{tg} C = \frac{\sin B + \cos B \cos a \operatorname{tg} C}{\sin a \operatorname{cotg} c};$$

d'où

$$\operatorname{cotg} C = \frac{\sin a \operatorname{cotg} c}{\sin B + \cos B \cos a \operatorname{tg} C} \quad (b'').$$

En comparant (a''), (b''), on trouve enfin :

$$\frac{\sin a}{\sin B + \cos B \cos a \operatorname{tg} C} = \frac{\sin b - \cos b \cos A \operatorname{tg} c}{\sin B + \cos B \cos a \operatorname{tg} C} \quad (\text{IV}).$$

V.

$$\frac{\cos A \sin c + \cos c \operatorname{cotg} b}{\operatorname{cotg} a} = \frac{\cos a \sin C - \operatorname{cotg} B \cos C}{\operatorname{cotg} A}.$$

Démonstration. — On a :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b};$$

En multipliant, il vient

$$\sin A \operatorname{cotg} a = \sin B \operatorname{cotg} b \cos c + \cos A \sin B \sin c \quad (a''');$$

en échangeant les lettres,

$$\sin a \operatorname{cotg} A = -\sin b \operatorname{cotg} B \cos C + \cos a \sin b \sin C \quad (b''').$$

Divisons (a''') par $\operatorname{cotg} a \sin B$, il vient :

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\operatorname{cotg} b \cos c + \cos A \sin c}{\operatorname{cotg} a} \quad (\alpha).$$

Divisons (b''') par $\operatorname{cotg} A \sin b$, il vient :

$$\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\cos a \sin C - \operatorname{cotg} B \cos C}{\operatorname{cotg} A} \quad (\beta).$$

Les premiers membres de (α), (β) étant égaux, il vient :

$$\frac{\cos A \sin c + \cos c \operatorname{cotg} b}{\operatorname{cotg} a} = \frac{\cos a \sin C - \operatorname{cotg} B \cos C}{\operatorname{cotg} A} \quad (\text{V}).$$

VI.

$$\sin a \sin b \sin c. \operatorname{Sin} A \sin B \sin C = 4\theta . \Theta.$$

Démonstration. — Si nous posons

$$\theta = \sqrt{\{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)\}}$$
$$\Theta = \sqrt{\{-\cos \tfrac{1}{2} S \cos \tfrac{1}{2} (S-A) \cos \tfrac{1}{2} (S-B) \cos \tfrac{1}{2} (S-C)\}}.$$

on a, par les formules ($\sin A =$, $\sin a =$) de la troisième leçon,

$$\sin b \sin c \sin A = 2\theta, \quad \sin a \sin B \sin C = 2\Theta.$$

En multipliant, il vient :

$$\sin a \sin b \sin c \sin A \sin B \sin C = 4\theta . \Theta \quad (\text{VI}).$$

VII.

$$\sin A \sin B \sin C = \frac{2\,\Theta^2}{\theta}, \ \sin a \sin b \sin c = \frac{2\,\theta^2}{\Theta}.$$

Démonstration. — On a :

$$\sin b \sin A \sin C = 2\Theta,$$
$$\sin c \sin A \sin B = 2\Theta,$$
$$\sin a \sin B \sin C = 2\Theta;$$

en multipliant, il vient

$$\sin a \sin b \sin c \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C = 8\Theta^3 \quad (b).$$

On a aussi :

$$\sin b \sin c \sin A = 2\theta,$$
$$\sin a \sin c \sin B = 2\theta,$$
$$\sin a \sin b \sin C = 2\theta\,;$$

d'où,

$$\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c \sin A \sin B \sin C = 8\theta^3 \quad (c).$$

En divisant (b) et (c) par (VI), on trouve

$$\sin A \sin B \sin C = \frac{2\,\Theta^2}{\theta},\ \sin a \sin b \sin c = \frac{2\,\theta^2}{\Theta} \quad \text{(VII)}.$$

Corollaire. — La division entre (b) et (c) donne

$$\frac{\sin A \sin B \sin C}{\sin a \sin b \sin c} = \frac{\Theta^3}{\theta^3} = \frac{\sqrt{\{1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C - 2\cos A \cos B \cos C\}^3}}{\sqrt{\{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c\}^3}}.$$

QUATRIÈME LEÇON.

SOMMAIRE.

FORMULES GÉNÉRALES POUR LA RÉSOLUTION DES TRIANGLES RECTANGLES. — RÉSOLUTION DE TOUS LES CAS. — CAS PARTICULIERS.

Formules générales pour la résolution des triangles rectangles (fig. 5).

Si l'angle A du triangle A B C est droit, on a $\sin A = 1$, $\cos A = 0$, $\cot g\, A = 0$; ces valeurs introduites dans les formules I, II, III et IV, conduiront aux formules pour la résolution des triangles rectangles.

1° Les formules I donneront :

$$1 : \sin B :: \sin a : \sin b;$$
$$1 : \sin C :: \sin a : \sin c.$$

De là on tire

$$\left.\begin{array}{l}\sin b = \sin a \sin B \\ \sin c = \sin a \sin C\end{array}\right\} \quad 1.$$

Donc, *dans tout triangle rectangle, le sinus d'un côté de l'angle droit est égal au sinus de l'hypoténuse, multiplié par le sinus de l'angle opposé.*

2° Les formules II donneront :

$$\cos a = \cos b \cos c \qquad 2.$$

Donc, *dans tout triangle rectangle, le cosinus de l'hypoténuse est égal au produit des cosinus des deux autres côtés.*

3° Les formules III donneront :

$$0 = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a;$$

ou, en divisant par sin B sin C et en transposant,

$$\cos a = \cot g\, B \cot g\, C;$$

où bien :

$$\cos a = \cot g\, B \times \frac{1}{\mathrm{tg}\, C};$$

d'où :

$$\cot g\, B = \cos a\ \mathrm{tg}\, C \qquad 3.$$

Donc, *dans tout triangle rectangle, la cotangente d'un angle est égale au cosinus de l'hypoténuse multiplié par la tangente de l'autre angle.*

Les deux dernières des formules III donnent encore :

$$\left.\begin{array}{l}\cos B = \cos b \sin C \\ \cos C = \cos c \sin B\end{array}\right\} 4.$$

Donc, *dans tout triangle rectangle, le cosinus d'un angle est égal au cosinus du côté opposé, multiplié par le sinus de l'autre angle.*

4° Les formules IV donneront :

$$\cot g\, a \sin b = \cos b \cos C.$$
$$\cot g\, a \sin c = \cos c \cos B;$$

ou bien :

$$\cot g\, a = \cot g\, b \cos C.$$
$$\cot g\, a = \cot g\, c \cos B;$$

ou

$$\frac{1}{\mathrm{tg}\, a} = \frac{1}{\mathrm{tg}\, b} \times \cos C.$$
$$\frac{1}{\mathrm{tg}\, a} = \frac{1}{\mathrm{tg}\, c} \times \cos B;$$

d'où, en chassant les dénominateurs,

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{tg}\, b = \mathrm{tg}\, a \cos C \\ \mathrm{tg}\, c = \mathrm{tg}\, a \cos B\end{array}\right\} 5.$$

Donc, *dans tout triangle rectangle, la tangente d'un côté est égale à la tangente de l'hypoténuse, multipliée par le cosinus de l'angle adjacent.*

Les formules IV donnent encore, savoir, la 4e et la 6e :

$$\cot g\, b \sin c = \cot g\, B,$$
$$\cot g\, c \sin b = \cot g\, C;$$

ou :

$$\frac{1}{\mathrm{tg}\, b} \times \sin c = \frac{1}{\mathrm{tg}\, B},$$
$$\frac{1}{\mathrm{tg}\, c} \times \sin b = \frac{1}{\mathrm{tg}\, C};$$

d'où, en chassant les dénominateurs :

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} B \sin c \\ \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} C \sin b\end{array}\right\} 6.$$

Donc, *dans tout triangle rectangle, la tangente d'un côté est égale au sinus de l'autre côté de l'angle droit, multiplié par la tangente de l'angle opposé.*

Les six principes déduits des formules 1, 2, 3, 4, 5 et 6 suffisent pour la résolution de tous les cas des triangles rectangles. Avant de passer à la résolution de ces cas, il importe que nous établissions les relations qui existent entre ces formules et celles pour la résolution des triangles rectilignes, afin d'en déduire un moyen mnémonique sûr et facile pour retenir ces formules.

Corrélation entre les formules précédentes et leurs analogues pour les triangles rectilignes rectangles.

Pour trouver cette corrélation nous changerons les arcs a, b, c, que nous supposons rapportés au rayon r, en $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$ rapportés au rayon 1 ; ensuite, nous remplacerons dans les six formules, les sinus, les cosinus et les tangentes de ces arcs par leurs développements en séries, d'après les formules

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \dots$$

Elles donnent, pour $x = \frac{a}{r}$, $x = \frac{b}{r}$, $x = \frac{c}{r}$, respectivement :

$$\sin\frac{a}{r} = \frac{a}{r} - \frac{a^3}{6r^3} + \dots,\ \sin\frac{b}{r} = \frac{b}{r} - \frac{b^3}{6r^3} + \dots,\ \sin\frac{c}{r} = \frac{c}{r} - \frac{c^3}{6r^3} + \dots$$

$$\cos\frac{a}{r} = 1 - \frac{a^2}{2r^2} + \dots,\ \cos\frac{b}{r} = 1 - \frac{b^2}{2r^2} + \dots,\ \cos\frac{c}{r} = 1 - \frac{c^2}{2r^2} + \dots$$

$$\operatorname{tg}\frac{a}{r} = \frac{a}{r} + \frac{a^3}{3r^3} + \dots,\ \operatorname{tg}\frac{b}{r} = \frac{b}{r} + \frac{b^3}{3r^3} + \dots,\ \operatorname{tg}\frac{c}{r} = \frac{c}{r} + \frac{c^3}{3r^3} + \dots$$

Cela posé :

1° Les formules 1 deviennent

$$\sin\frac{b}{r} = \sin\frac{a}{r}\sin B, \text{ ou } \frac{b}{r} - \frac{b^3}{6r^3} + \dots = \left(\frac{a}{r} - \frac{a^3}{6r^3} + \dots\right)\sin B,$$

$$\sin\frac{c}{r} = \sin\frac{a}{r}\sin C, \text{ ou } \frac{c}{r} - \frac{c^3}{6r^3} + \dots = \left(\frac{a}{r} - \frac{a^3}{6r^3} + \dots\right)\sin C,$$

d'où en multipliant par r,

$$b-\frac{b^3}{6r^2}+\ldots=\left(a-\frac{a^3}{6r^2}+\ldots\right)\sin B,$$

$$c-\frac{c^3}{r^2}+\ldots=\left(a-\frac{a^3}{6r^2}+\ldots\right)\sin C.$$

Ces formules étant vraies pour toutes les valeurs du rayon r de la sphère, elles le seront encore pour le cas de $r=\infty$; mais alors la sphère devient un plan, le triangle rectangle sphérique devient un triangle rectangle rectiligne. De plus, tous les termes des séries du premier et du deuxième membre qui suivent le premier terme contenant r au dénominateur, deviendront nuls, et l'on aura simplement

$$b=a\sin B,\quad c=a\sin C\ldots \qquad 1'.$$

Ce sont les formules connues pour les triangles rectangles rectilignes.

2° La formule 2 devient :

$$\cos\frac{a}{r}=\cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r},\ \text{ou}\ 1-\frac{a^2}{2r^2}+\ldots=\left(1-\frac{b^2}{2r^2}+\ldots\right)\left(1-\frac{c^2}{2r^2}+\ldots\right);$$

ou, en effectuant la multiplication du deuxième membre,

$$1-\frac{a^2}{2r^2}+\ldots=1-\frac{b^2}{2r^2}+\ldots-\frac{c^2}{2r^2}+\frac{b^2c^2}{4r^4}-\ldots$$

d'où, en effaçant 1 dans les deux membres, et en multipliant par $-r^2$,

$$a^2=b^2+c^2-\frac{b^2c^2}{4r^2}+\ldots$$

Tous les termes qui suivent les deux premiers ayant r au dénominateur, disparaîtront pour $r=\infty$, et l'on aura pour les triangles rectangles rectilignes la formule connue

$$a^2=b^2+c^2 \qquad 2'.$$

3° La formule 3 devient :

$$\operatorname{cotg} B=\cos\frac{a}{r}\operatorname{tg} C,\ \text{ou}\ \operatorname{cotg} B=\left(1-\frac{a^2}{2r^2}+\ldots\right)\operatorname{tg} C.$$

En faisant $r=\infty$, on a :

$$\operatorname{cotg} B=\operatorname{tg} C \qquad 3'.$$

4° Les formules 4 deviennent :

$$\cos B=\cos\frac{b}{r}\sin C;\ \text{ou}\ \cos B=\left(1-\frac{b^2}{2r^2}+\ldots\right)\sin C;$$

$$\cos C=\cos\frac{c}{r}\sin B;\ \text{ou}\ \cos C=\left(1-\frac{c^2}{2r^2}+\ldots\right)\sin B.$$

Pour $r=\infty$, on a :

$$\left.\begin{array}{l}\cos B=\sin C,\\ \cos C=\sin B.\end{array}\right\}\ 4'.$$

5° Les formules 5 deviennent :

$$\operatorname{tg}\frac{b}{r}=\operatorname{tg}\frac{a}{r}\cos C;\ \text{ou}\ \frac{b}{r}+\frac{b^3}{3r^3}+..=\left(\frac{a}{r}+\frac{a^3}{3r^3}+\ldots\right)\cos C;$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{r}=\operatorname{tg}\frac{a}{r}\cos B;\ \text{ou}\ \frac{c}{r}+\frac{c^3}{3r^3}+..=\left(\frac{a}{r}+\frac{a^3}{3r^3}+\ldots\right)\cos B.$$

d'où, en multipliant par r, puis en faisant $r=\infty$,

$$\left.\begin{array}{l} b=a\cos C, \\ c=a\cos B, \end{array}\right\} 5'.$$

Ce sont les formules connues de la trigonométrie rectiligne.

6° Les formules 6 deviennent :

$$\operatorname{tg}\frac{b}{r}=\sin\frac{c}{r}\operatorname{tg} B;\ \text{ou},\ \frac{b}{r}+\frac{b^3}{3r^3}+..=\left(\frac{c}{r}-\frac{c^3}{6r^3}+\ldots\right)\operatorname{tg} B;$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{r}=\sin\frac{b}{r}\operatorname{tg} C;\ \text{ou},\ \frac{c}{r}+\frac{c^3}{3r^3}+..=\left(\frac{b}{r}-\frac{b^3}{6r^3}+\ldots\right)\operatorname{tg} C.$$

d'où, en multipliant par r, puis posant $r=\infty$,

$$\left.\begin{array}{l} b=c.\operatorname{tg} B, \\ c=b.\operatorname{tg} C \end{array}\right\} 6'.$$

Ce sont les formules connues de la trigonométrie rectiligne.

Règles mnémoniques pour retenir les six formules des triangles sphériques rectangles.

Écrivez ces formules avec leurs correspondantes de la trigonométrie rectiligne trouvées ci-dessus, en cinq groupes, dans l'ordre suivant :

	FORMULES RECTILIGNES.	(T)	FORMULES SPHÉRIQUES CORRESPONDANTES.	
A	$\cot B = 1\times \operatorname{tg} C$ $\cos B = 1\times\sin C$ $\cos C = 1\times \sin B$		$\cot B=\cos a\times\operatorname{tg} C$ $\cos B=\cos b\times\sin C$ $\cos C=\cos c\times\sin B$	A′
B	$a^2=b^2+c^2$		$\cos a=\cos b\cos c$	B′
C	$b=a\sin B$ $c=a\sin C$		$\sin b=\sin a\sin B$ $\sin c=\sin a\sin C$	C′
D	$b=c\operatorname{tg} B$ $c=b\operatorname{tg} C$		$\operatorname{tg} b=\sin c\operatorname{tg} B$ $\operatorname{tg} c=\sin b\operatorname{tg} C$	D′
E	$b=a\cos C$ $c=a\cos B$		$\operatorname{tg} b=\operatorname{tg} a\cos C$ $\operatorname{tg} c=\operatorname{tg} a\cos B$	E′

1° Pour passer du groupe A au groupe correspondant A′, changez *le* facteur 1 successivement en cos a, cos b, cos c.

2° On voit ce qu'il y a à faire pour transformer la formule B en B′.

3° Pour passer de la classe C à la classe C′, écrivez *sin* devant les lettres minuscules.

4° Pour passer de la classe D à sa correspondante D′, écrivez *tg* devant les lettres du premier membre, et *sin* devant les lettres minuscules du deuxième.

5° Pour passer de la classe E à la classe E′, mettez *tg* devant les lettres minuscules.

Il suffira de quelques minutes pour retenir, à l'inspection attentive du tableau précédent, les six formules de manière à ne plus jamais les oublier. Il va sans dire que le moyen que nous indiquons, et qui nous appartient, est supérieur à la règle de Néper, perfectionnée par Mauduit. Déjà Delambre, dans le premier volume de son *Astronomie*, a avoué qu'il avait trouvé plus aisé d'apprendre par cœur les six formules, que de les chercher chaque fois par le procédé mnémonique de Mauduit. (Voyez Delambre, *Astronomie*, 1er vol., page 205.) Voici, au reste, la règle de Néper.

RÈGLE DE NÉPER.

1° Écrivez, à partir de l'angle droit A, sans cependant écrire cet élément, les cinq autres parties du triangle dans l'ordre où elles se suivent, plusieurs fois de suite, de cette manière.

$$b\,C\,a\,B\,c\,b\,C\,a\,B\,c\,b\,C\,a\,B\,c\ldots \quad (1).$$

2° Combinez les cinq éléments b C a B c, trois à trois, puis rangez les dix combinaisons possibles en deux rangs, de manière que le premier rang contienne toutes les combinaisons dans lesquelles les deux éléments extrêmes soient adjacents et contigus, l'un à gauche, l'autre à droite, dans la série (1), à l'élément du milieu, et que le deuxième rang contienne, au contraire, les combinaisons dans lesquelles les éléments extrêmes précèdent ou suivent tous les deux dans la série (1) l'élément moyen. On aura alors les deux groupes que voici :

(2) $b\,C\,a$, $C\,a\,B$, $a\,B\,c$, $B\,c\,b$, $c\,b\,C$, les éléments extrêmes sont adjacents à l'élément moyen.

(3) $b\,B\,C$, $C\,c\,a$, $a\,b\,B$, $B\,C\,c$, $c\,a\,b$, les éléments extrêmes précèdent ou suivent l'élément moyen.

Voici maintenant la règle de Néper :

I. *Le cosinus de l'élément moyen est égal au produit des cotangentes des éléments adjacents;*

II. ***Le cosinus de l'élément moyen est égal au produit des sinus des éléments non adjacents ;***

Dans l'application de ces règles, on doit avoir soin de remplacer les côtés de l'angle droit par leur complément.

La règle I se rapporte aux combinaisons (2), et la règle II aux combinaisons (3); on les démontre par induction, en écrivant les dix formules pour la résolution des triangles rectangles de cette manière.

Pour la règle I.

$$\begin{array}{lcl}
\cos C = \cotg a \operatorname{tg} b, & \text{ou} & \cos C = \cotg a \cotg (90^\circ - b) \\
\cos a = \cotg B \cotg C, & \text{»} & \cos a = \cotg B \cotg C \\
\cos B = \cotg a \operatorname{tg} c, & \text{»} & \cos B = \cotg a \cotg (90^\circ - c) \\
\sin c = \cotg B \operatorname{tg} b, & \text{»} & \cos (90^\circ - c) = \cotg B \cotg (90^\circ - b) \\
\sin b = \cotg C \operatorname{tg} c, & \text{»} & \cos (90^\circ - b) = \cotg C \cotg (90^\circ - c).
\end{array}$$

Ces cinq formules se rapportent aux combinaisons (2).

Pour la règle II.

$$\begin{array}{lcl}
\cos B = \cos b \sin C, & \text{ou} & \cos B = \sin (90^\circ - b) \sin C, \\
\sin c = \sin a \sin C, & \text{»} & \cos (90^\circ - c) = \sin a \sin C, \\
\sin b = \sin a \sin B, & \text{»} & \cos (90^\circ - b) = \sin a \sin B, \\
\cos C = \cos c \sin B, & \text{»} & \cos C = \sin (90^\circ - c) \sin B, \\
\cos a = \cos b \cos c, & \text{»} & \cos a = \sin (90^\circ - b) \sin (90^\circ - c).
\end{array}$$

Ces cinq formules se rapportent aux combinaisons (3).

Résolution de tous les cas des triangles rectangles.

Il y a six cas à examiner, savoir :

1° On donne *deux côtés,* et on demande le reste. Parmi les côtés donnés se trouve l'hypoténuse, ou elle ne s'y trouve pas, de sorte que ce cas en renferme deux.

2° On donne *un côté* et *un angle,* et on demande le reste. Ce cas en présente trois; car parmi les côtés donnés se trouve l'hypoténuse ou non, et l'angle donné peut être adjacent ou opposé au côté donné.

3° On donne les *deux angles,* et on demande le reste.

1er Problème. — *Étant donnés les deux côtés de l'angle droit, on demande l'hypoténuse et les deux angles adjacents.*

Exemple. — On donne b, c; on demande a, B, C.

Solution. — Cherchez, dans le tableau (T), les formules qui contiennent les données b, c, avec une des trois inconnues a, B, C; or, l'on voit qu'il faut prendre les formules des groupes B′ et D′. Mais observons que ces formules doivent être rendues homogènes en y introduisant le rayon des tables, ou 10^{10}.

On a donc, pour déterminer

1° L'hypoténuse a,

$$\cos a = \frac{\cos b \cos c}{10^{10}};$$

d'où : $$\log \cos a = \log \cos b + \log \cos c - 10.$$

2° L'angle B;

$$\operatorname{tg} b = \frac{\sin c \operatorname{tg} B}{10^{10}};$$

d'où l'on tire :

$$\operatorname{tg} B = \frac{10^{10} \times \operatorname{tg} b}{\sin c}.$$

Donc : $$\log \operatorname{tg} B = \log \operatorname{tg} b + \text{comp} \log \sin c.$$

3° L'angle C;

$$\operatorname{tg} c = \frac{\sin b \operatorname{tg} C}{10^{10}};$$

d'où $$\operatorname{tg} C = \frac{10^{10} \times \operatorname{tg} c}{\sin b};$$

et $$\log \operatorname{tg} C = \log \operatorname{tg} c + \text{comp} \log \sin b.$$

2e Problème. — *Étant donnés l'hypoténuse et un côté, on demande l'autre côté et les deux angles.*

Exemple. — On donne a, b; on demande c, B, C.

Les formules du groupe B′, la première du groupe C′ et la première du groupe E′, résolvent la question; car elles contiennent les deux données avec une des trois inconnues.

On a donc :

1° Le côté c, par la formule

$$\cos a = \frac{\cos b \cos c}{10^{10}},$$

qui donne :

$$\cos c = \frac{10^{10} \cos a}{\cos b};$$

d'où : $$\log \cos c = \log \cos a + \text{comp} \log \cos b.$$

2° L'angle B, par la formule

$$\sin b = \frac{\sin a \sin B}{10^{10}},$$

d'où $$\sin B = \frac{10^{10} \sin b}{\sin a}.$$

Donc, $\log \sin B = \log \sin b + \text{comp} \log \sin a.$

3° L'angle C, par la formule

$$\text{tg}\, b = \frac{\text{tg}\, a . \cos C}{10^{10}};$$

d'où

$$\cos C = \frac{10^{10} . \text{tg}\, b}{\text{tg}\, a};$$

donc, $\log \cos C = \log \text{tg}\, b + \text{comp} \log \text{tg}\, a.$

3° Problème. — *Étant donnés l'hypoténuse et l'un des angles adjacents, trouver les deux côtés de l'angle droit et l'autre angle.*

Exemple. — On donne a, B ; on demande b, c, C.

Solution. — Les formules qui résolvent la question sont la première du groupe A', la première du groupe C', et la deuxième du groupe E'; car elles contiennent toutes les trois les données a, B, et l'une des trois inconnues.

1° Chercher b.

On a :

$$\sin b = \frac{\sin a \sin B}{10^{10}};$$

d'où $\log \sin b = \log \sin a + \log \sin B + 10.$

2° Chercher c.

On a :

$$\text{tg}\, c = \frac{\text{tg}\, a \cos B}{10^{10}};$$

d'où $\log \text{tg}\, c = \log \text{tg}\, a + \log \cos B - 10.$

3° Chercher C.

On a :

$$\text{cotg}\, B = \frac{\cos a . \text{tg}\, C}{10^{10}};$$

d'où

$$\text{tg}\, C = \frac{10^{10} \text{cotg}\, B}{\cos a};$$

$$\log \text{tg}\, C = \log \text{cotg}\, B + \text{comp} \log \cos a.$$

4° Problème. — *Étant donnés l'un des côtés de l'angle droit et l'angle adjacent, trouver l'hypoténuse, le troisième côté et l'autre angle.*

Exemple. — On donne b, c, trouver a, c, B.

Solution. — Il faut prendre les formules suivantes : la deuxième du groupe A', la deuxième du groupe D', la première du groupe E'; car elles contiennent toutes les trois les deux données avec l'une des inconnues.

1° Chercher a.

On a :

$$\text{tg}\, b = \frac{\text{tg}\, a \cos C}{10^{10}};$$

d'où

$$\text{tg } a = \frac{10^{10} \times \text{tg } b}{\cos C}.$$

$$\log \text{tg } a = \log \text{tg } b + \text{comp} \log \cos C.$$

2° Chercher c.

On a :

$$\text{tg } c = \frac{\sin b \text{ tg } C}{10^{10}};$$

$$\log \text{tg } c = \log \sin b + \log \text{tg } C - 10.$$

3° Chercher B.

On a :

$$\cos B = \frac{\cos b \sin C}{10^{10}};$$

d'où :

$$\log \cos B = \log \cos b + \log \sin C - 10.$$

5e Problème. — *Étant donnés l'un des côtés de l'angle droit et l'angle opposé à ce côté, trouver l'hypoténuse, le troisième côté et l'autre angle.*

Exemple. — On donne b, B, trouver a, c, C.

Solution. — La deuxième de A′, la première de C′, la première formule du groupe D′, résolvent la question.

1° Chercher a.

On a :

$$\sin b = \frac{\sin a \sin B}{10^{10}};$$

d'où

$$\sin a = \frac{10^{10} \sin b}{\sin B};$$

et

$$\log \sin a = \log \sin b + \text{comp} \log \sin B.$$

2° Chercher c.

On a :

$$\text{tg } b = \frac{\sin c \text{ tg } B}{10^{10}};$$

d'où

$$\sin c = \frac{10^{10} \text{ tg } b}{\text{tg } B};$$

et

$$\log \sin c = \log \text{tg } b + \text{comp} \log \text{tg } B.$$

3° Chercher C.

On a :

$$\cos B = \frac{\cos b . \sin C}{10^{10}};$$

d'où

$$\sin C = \frac{10^{10} \cos B}{\cos b};$$

et

$$\log \sin C = \log \cos B + \text{comp} \log \cos b.$$

Remarque. — Comme dans ce problème les trois inconnues sont données par des sinus, on peut prendre la valeur des arcs correspondants dans le premier et le deuxième quadrant, ce qui donne deux triangles qui répondent aux données de la question. Ce cas est appelé, pour cette raison, le *cas douteux*.

En effet, l'on voit par la figure (6), que les deux triangles BAC, B'AC, contiennent les mêmes données, angle B = angle B', et le côté AC = b.

6^e Problème. — *Étant donnés les deux angles adjacents à l'hypoténuse, trouver l'hypoténuse et les côtés de l'angle droit.*

Exemple. — On donne B, C, trouver a, b, c.

Solution. — Les formules suivantes résolvent la question :

La première de A', la deuxième de A', la troisième de A'.

1° Chercher a.

On a :
$$\cot B = \frac{\cos a \operatorname{tg} C}{10^{10}};$$
d'où
$$\cos a = \frac{10^{10} \cot B}{\operatorname{tg} C},$$
et
$$\log \cos a = \log \cot B + \text{comp} \log \operatorname{tg} C.$$

2° Chercher b.

On a :
$$\cos B = \frac{\cos b \sin C}{10^{10}};$$
d'où
$$\cos b = \frac{10^{10} \cos B}{\sin C},$$
et
$$\log \cos b = \log \cos B + \text{comp} \log \sin C.$$

3° Chercher c.

On a :
$$\cos C = \frac{\cos c \sin B}{10^{10}};$$
d'où
$$\cos c = \frac{10^{10} \cos C}{\sin B}.$$
et
$$\log \cos c = \log \cos C + \text{comp} \log \sin B.$$

Remarque. — Les formules pour la résolution des triangles rectangles sont constamment employées en astronomie pour le calcul du soleil.

Soient BC, AC, respectivement des arcs de l'écliptique et de l'équateur, AD un arc de méridien. Comme le soleil avance sur l'écliptique, on détermine sa position sur ce cercle par les coordonnées AB, CA, auxquelles on donne respectivement les noms de *déclinaison* et d'*ascension droite*. La déclinaison se marque constamment par D, et l'ascension droite par AR ; l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur est marquée par ω, et l'hypoténuse DC par Θ; cela posé, voici les formules pour le calcul du soleil :

$\cot B = \cos a \operatorname{tg} C$,	ou	$\cot B = \cos \Theta \operatorname{tg} \omega$,
$\cos B = \cos b \sin C$,	»	$\cos B = \cos AR \sin \omega$,
$\cos a = \cos b \cos c$,	»	$\cos \Theta = \cos AR \cos D$,
$\sin c = \sin a \sin C$,	»	$\sin D = \sin \Theta \sin \omega$,
$\operatorname{tg} c = \sin b \operatorname{tg} C$,	»	$\operatorname{tg} D = \sin AR \operatorname{tg} \omega$,
$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C$,	»	$\operatorname{tg} AR = \operatorname{tg} \Theta \cos \omega$.

Cas particuliers.

1° Lorsque l'angle ou l'arc à chercher sont très-petits, et qu'ils sont donnés par des cosinus, tels que $\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}$, $\cos C = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a}$ dans le 2° problème, $\cos b = \frac{\cos B}{\cos C}$ dans le 6°, les tables ne donneront plus la quantité demandée avec une exactitude suffisante; dans ce cas on tâchera de trouver l'inconnue par la tangente de sa moitié. La formule (x) (page 69, *Trigonométrie rectiligne*) nous en fournira le moyen. En effet, par cette formule, on a, en général :

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} \alpha = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

Appliquons cette formule aux trois équations précédentes.

$$1,\ \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} c = \frac{1 - \cos c}{1 + \cos c} = \frac{1 - \dfrac{\cos a}{\cos b}}{1 + \dfrac{\cos a}{\cos b}} = \frac{\cos b - \cos a}{\cos b + \cos a} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b) \sin \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b)}$$

$$= \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a+b)\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a-b).$$

$$2,\ \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{1 - \cos C}{1 + \cos C} = \frac{1 - \dfrac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a}}{1 + \dfrac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a}} = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b} = \frac{\sin(a-b)}{\cos(a+b)}.$$

$$3,\ \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} b = \frac{1 - \cos b}{1 + \cos b} = \frac{1 - \dfrac{\cos B}{\cos C}}{1 + \dfrac{\cos B}{\cos C}} = \frac{\cos C - \cos B}{\cos C + \cos B} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(C+B)\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(C-B).$$

On traitera de même la formule du 6° problème $\cos c = \frac{\cos C}{\sin B}$, qui donnera :

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} c = \frac{\operatorname{tg} \left\{ \frac{1}{2}(B+C) - 45° \right\}}{\operatorname{tg} \left\{ \frac{1}{2}(B-C) + 45° \right\}}.$$

Enfin, le 6° problème fournit encore l'équation

$$\cos a = \frac{\operatorname{cotg} B}{\operatorname{tg} C};$$

on trouve

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{-\cos(B+C)}{\cos(A-B)}.$$

Cette formule donne lieu à deux remarques : la première est que la somme des angles $B+C$, adjacents à l'hypoténuse, doit toujours surpasser 90°, car sans cela l'expression précédente conduirait à des valeurs imaginaires; la deuxième est que l'on peut trouver l'hypoténuse, pourvu que l'on connaisse la somme et la différence des angles obliques.

2° Lorsque l'angle ou l'arc inconnu sont presque droits, et qu'ils doivent être cherchés par un sinus, les résultats obtenus par les tables ne seront plus suffisamment exacts. Dans ce cas, on cherchera aussi d'obtenir l'angle ou l'arc demandé par sa tangente; pour cela, on se servira de la formule (x') (p. 69, *Trig. rect.*), qui donne, en général,

$$\mathrm{tg}^2\,(45^\circ-\tfrac{1}{2}\alpha)=\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}.$$

La conversion en tangente s'obtiendra toujours par cette formule, si le deuxième membre de l'équation proposée est mis sous la forme d'un rapport; telles sont les valeurs suivantes :

$$\sin B=\frac{\sin b}{\sin a}\ \text{(probl. 2)},\quad \sin C=\frac{\cos B}{\cos b},\quad \sin a=\frac{\sin b}{\sin B},\quad \sin c=\frac{\mathrm{tg}\, b}{\mathrm{tg}\, B}\ \text{(probl. 5)}.$$

Traitons ces exemples :

1, De $\sin B=\dfrac{\sin b}{\sin a}$, on tire la proportion $1 : \sin B :: \sin a : \sin b$;

d'où $$1-\sin B : 1+\sin B :: \sin a-\sin b : \sin a+\sin b;$$

ou $$\frac{1-\sin B}{1+\sin B}=\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}B=\frac{\sin a-\sin b}{\sin a+\sin b}=\frac{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(a-b)}{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(a+b)}.$$

2, De $\sin C=\dfrac{\cos B}{\cos b}$, on tire $1-\sin C : 1+\sin C :: \cos b-\cos B : \cos b+\cos B$;

d'où

$$\frac{1-\sin C}{1+\sin C}=\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}C=\frac{\cos b-\cos B}{\cos b+\cos B}=\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(b+B)\ \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(b-B).$$

3, De $\sin a=\dfrac{\sin b}{\sin B}$, on tire $\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}a=\dfrac{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(B-b)}{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(B+b)}$.

4, De $\sin c=\dfrac{\mathrm{tg}\, b}{\mathrm{tg}\, B}$, on tire $\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}c=\dfrac{\sin(B-b)}{\cos(B+b)}$.

Mais si le deuxième membre est sous la forme d'un produit, la conversion en tangente s'obtiendra par la formule

$$\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}\alpha=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha},$$

après avoir converti le sinus en cosinus du complément. La seule formule à laquelle on puisse appliquer cette transformation est prise dans le problème 3°, savoir : $\sin b=\sin a \sin B$.

Soit $2x$ le complément de b, on aura :

$$\sin b = \cos 2x = \sin a \sin B.$$

Mais

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} = \frac{1-\sin a \sin B}{1+\sin a \sin B}.$$

Faisons $\operatorname{tg} \varphi = \sin a \sin B$, nous connaîtrons φ, et la formule précédente devient :

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}\varphi} = \operatorname{tg}(45^\circ-\varphi);$$

d'où

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{\operatorname{tg}(45^\circ-\varphi)};$$

on connaîtra x par cette dernière, et alors

$$b = 90^\circ - 2x.$$

3° Un ou deux côtés peuvent être égaux à 90°; de même, deux ou trois angles peuvent être droits ; les formules, pour ces cas, et les propriétés géométriques auxquelles elles conduisent, sont trop faciles à obtenir par le moyen des quatre formules fondamentales pour que nous devions nous arrêter à ces détails.

4° La règle des signes des lignes trigonométriques appliquée aux formules

$\cos a = \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C$,	la première des formules A′,
$\cos B = \cos b \sin C$,	la deuxième de A′,
$\operatorname{tg} b = \sin c \operatorname{tg} B$,	la première de D′,
$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C$,	la première de E′,

nous conduira encore à quelques remarques utiles.

1. Si les angles B et C sont tous les deux aigus ou obtus, les signes de cotg B et cotg C seront de même nature, et cos a sera positif, c'est-à-dire l'hypoténuse sera $< 90^\circ$.

Si l'un des angles B et C est aigu, et l'autre obtus, cos a sera négatif, et l'hypoténuse sera plus grande que 90°.

2. Comme dans la formule

$$\cos B = \cos b \sin C,$$

sin C est positif, il s'ensuit que le signe du deuxième membre, et partant celui de cos B, dépendra du signe de cos b. Il suit de là que dans tout triangle sphérique rectangle un angle oblique est toujours de même espèce que le côté opposé.

3. La remarque précédente suit encore de la troisième formule.

4. Si de la formule $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C$, on tire $\frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a} = \cos C$, on voit que si C, angle compris entre l'hypoténuse et le côté adjacent, est aigu ou obtus, l'hypoténuse et le côté adjacent seront de même espèce, ou d'espèce différente.

RÉSUMÉ DES CAS POUR LA RÉSOLUTION DES TRIANGLES RECTANGLES.

CAS	DONNÉES.	INCONNUES.	FORMULES.	FORMULES RÉSOLUES.
I	b, c	a	$\cos a = \cos b \cos c$	$\cos a = \cos b \cos c.$
		B	$\operatorname{tg} b = \sin c \operatorname{tg} B$	$\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin c}$
		C	$\operatorname{tg} c = \sin b \operatorname{tg} C$	$\operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{tg} c}{\sin b}$
II	a, b	c	$\cos a = \cos b \cos c$	$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}$
		B	$\sin b = \sin a \sin B$	$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a}$
		C	$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C$	$\cos C = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a}$
III	a, B	b	$\sin b = \sin a \sin B$	$\sin b = \sin a \sin B$
		c	$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B$	$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B$
		C	$\operatorname{cotg} B = \cos a \operatorname{tg} C$	$\operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{cotg} B}{\cos a}$
IV	b, C	a	$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C$	$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} b}{\cos C}$
		c	$\operatorname{tg} c = \sin b \operatorname{tg} C$	$\operatorname{tg} c = \sin b \operatorname{tg} C$
		B	$\cos B = \cos b \sin C$	$\cos B = \cos b \sin C$
V	b, B	a	$\sin b = \sin a \sin B$	$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B}$
		c	$\operatorname{tg} b = \sin c \operatorname{tg} B$	$\sin c = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} B}$
		C	$\cos B = \cos b \sin C$	$\sin C = \frac{\cos B}{\cos b}$
VI	B, C	a	$\operatorname{cotg} B = \cos a \operatorname{tg} C$	$\cos a = \frac{\operatorname{cotg} B}{\operatorname{tg} C}$
		b	$\cos B = \cos b \sin C$	$\cos b = \frac{\cos B}{\sin C}$
		c	$\cos C = \cos c \sin B$	$\cos c = \frac{\cos C}{\sin B}$

CINQUIÈME LEÇON.

SOMMAIRE.

RÉSOLUTION DES SIX CAS. — MÉTHODE DES ASTRONOMES.

Résolution des triangles obliquangles.

On se sert, pour la résolution des triangles obliquangles, des formules I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI du résumé. Cependant, parmi ces formules il y en a trois, celles II, III, IV, qu'on doit modifier afin de les approprier au calcul logarithmique. Nous indiquerons les modifications à mesure que nous en aurons besoin.

Toutes ces formules contiennent quatre quantités, parmi lesquelles trois seront toujours données. Il y aura donc autant de cas à traiter qu'il y a de combinaisons 3 à 3 entre quatre objets, c'est-à-dire $\frac{4\times3\times2}{1.2.3}=6$.

En effet, 1° on peut donner trois côtés, et demander le reste; 2° deux côtés et un angle, mais l'angle donné peut être compris entre les côtés donnés ou opposé à l'un de ces côtés, ce qui fournira deux cas; 3° un côté et deux angles, mais les angles donnés peuvent être adjacents au côté donné, ou l'un adjacent et l'autre opposé; 4° enfin on peut donner les trois angles, et demander les trois côtés.

1er Problème. — *Étant donnés les trois côtés, trouver les angles.*

Exemple. — On donne a, b, c, on demande A, B, C.

Solution. — Les formules V, VI et VII du résumé résolvent la question, car elles sont calculables par logarithmes; et les deuxièmes membres sont des fonctions des côtés donnés. Cependant les deuxièmes membres des formules V et VI doivent être multipliés par 10^{10}, et le deuxième membre de la formule VII par 10^{20}.

La formule VII peut être employée dans toutes les circonstances; la formule VI est peu exacte dans le cas où l'angle A est très-petit; et la formule V aurait cet inconvénient si l'angle A différait peu de 180°.

2e Problème.—*Étant donnés deux côtés et l'angle compris, trouver les deux autres angles et le troisième côté.*

Exemple. — On donne a, b, C; on demande A, B, c.

Solution. — Les angles A et B se trouvent par les deux premières analogies de Néper, et le côté c par la troisième des formules II.

En effet :

1° Chercher A et B.

On a, par les formules XI,

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B)=\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)},$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-B)=\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C\,\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)};$$

d'où l'on tire :

$$\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B)=\log\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C+\log\cos\tfrac{1}{2}(a-b)+\operatorname{comp}\log\cos\tfrac{1}{2}(a+b)-10,$$

$$\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-B)=\log\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C+\log\sin\tfrac{1}{2}(a-b)+\operatorname{comp}\log\sin\tfrac{1}{2}(a+b)-10.$$

Ces formules feront connaître la somme et la différence entre les angles cherchés.

Soient $A+B=m,\quad A-B=n,$

on aura $A=\frac{1}{2}(m+n),\ B=\frac{1}{2}(m-n).$

2° Chercher c.

On a :

$$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C.$$

Il s'agit de transformer le deuxième membre en un monôme, afin que la formule se prête au calcul logarithmique. Pour cela, divisons et multiplions le deuxième membre par $\cos a$, il viendra :

$$\cos c=\cos a\left(\cos b+\frac{\sin a}{\cos a}\sin b\cos C\right);$$

ou

$$\cos c=\cos a\,(\cos b+\sin b\operatorname{tg}a\cos C).$$

Faisons

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}a\cos C=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

En substituant, il vient :

$$\cos c=\cos a\left(\cos b+\sin b\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right),$$

ou

$$\cos c=\cos a\left(\frac{\cos b\cos\varphi+\sin b\sin\varphi}{\cos\varphi}\right),$$

ou

$$\cos c=\frac{\cos a\cos(b-\varphi)}{\cos\varphi}.$$

De celle-ci on tire :

$$\log\cos c=\log\cos a+\log\cos(b-\varphi)+\operatorname{comp}\log\cos\varphi-10.$$

Cette formule fera connaître le côté c, car l'angle φ qui y entre, sera déterminé par

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\operatorname{tg}a\cos C}{10^{10}},$$

dont on tire :

$$\log\operatorname{tg}\varphi=\log\operatorname{tg}a+\log\cos C-10.$$

Remarque 1. — Le calcul analytique qui précède revient à l'emploi d'un arc auxiliaire, employé de tout temps par les astronomes.

En effet, du sommet B (fig. 7), abaissez la perpendiculaire BD, et nommez φ le segment CD adjacent à l'angle donné C. On aura d'abord φ dans le triangle rectangle BCD, en écrivant, conformément à la première des formules E′,

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} a \cos C.$$

On trouvera ensuite la perpendiculaire BD par la formule B′, savoir :

$$\cos a = \cos \varphi \cos BD, \text{ d'où : } \cos BD = \frac{\cos a}{\cos \varphi}.$$

Le côté c se trouve ensuite dans le triangle rectangle BDA, en écrivant :

$$\cos c = \cos BD \cos DA = \frac{\cos a}{\cos \varphi} \cos (b - \varphi).$$

Cette solution exige une attention, c'est de faire tomber la perpendiculaire sur un côté connu.

Cette perpendiculaire peut tomber en dedans ou en dehors du triangle CBA, c'est ce que dira le signe de $b - \varphi$.

Remarque 2. — Il y a encore plusieurs autres manières de rendre la formule

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

calculable par logarithmétiques, parmi lesquelles nous distinguerons la suivante :

Faites
$$\cos C = 1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} C;$$

on a :

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \left(1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} C\right),$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b - 2 \sin a \sin b \sin^2 \tfrac{1}{2} C,$$
$$\cos c = \cos (a - b) - 2 \sin a \sin b \sin^2 \tfrac{1}{2} C.$$

Mais on a

$$\cos (a + b) - \cos (a - b) = 2 \sin a \sin b;$$

donc

$$\cos c = \cos (a - b) - \sin^2 \tfrac{1}{2} C \left\{ \cos (a - b) - \cos (a + b) \right\},$$
$$\cos c = \cos (a - b) - \cos (a - b) \sin^2 \tfrac{1}{2} C + \cos (a + b) \sin^2 \tfrac{1}{2} C,$$
$$\cos c = \cos (a - b) \left\{ 1 - \sin^2 \tfrac{1}{2} C \right\} + \cos (a + b) \sin^2 \tfrac{1}{2} C,$$
$$\cos c = \cos (a - b) \cos^2 \tfrac{1}{2} C + \cos (a + b) \sin^2 \tfrac{1}{2} C,$$
$$\cos c = \cos (a - b) \cos^2 \tfrac{1}{2} C \left\{ 1 + \frac{\cos (a + b)}{\cos (a - b)} \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} C \right\}$$

d'où, en faisant

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{\cos(a+b)}{\cos(a-b)} \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}C,$$

$$\cos c = \cos(a-b)\cos^2\tfrac{1}{2}C\,\{1+\operatorname{tg}^2\varphi\},$$

$$\cos c = \cos(a-b)\cos^2\tfrac{1}{2}C\,\text{séc}^2\varphi = \frac{\cos(a-b)\cos^2\tfrac{1}{2}C}{\cos^2\varphi}.$$

REMARQUE 3. — Après avoir trouvé c, on pourrait déterminer les angles A et B par les proportions

$$\sin c : \sin a :: \sin C : \sin A,$$
$$\sin c : \sin b :: \sin C : \sin B.$$

3° PROBLÈME. — *Étant donnés deux côtés et un angle opposé à l'un des côtés donnés, trouver le troisième côté et les deux autres angles.*

EXEMPLE. — On donne a, b, A, et on demande B, c, C.

SOLUTION. — La première des formules I, la première des formules II, et la première des formules IV résolvent la question; car toutes contiennent les trois données avec l'une des inconnues.

1° Chercher B.

On a :

$$\sin a : \sin b :: \sin A : \sin B;$$

d'où

$$\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a};$$

$$\log \sin B = \log \sin b + \log \sin A + \text{comp} \log \sin a - 10.$$

2° Chercher c.

On a :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Divisons par $\cos b$, il vient :

$$\frac{\cos a}{\cos b} = \cos c + \sin c \operatorname{tg} b \cos A.$$

Faisons

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} b \cos A = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi};$$

il vient :

$$\frac{\cos a}{\cos b} = \cos c + \sin c\,\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\cos c\cos\varphi + \sin c \sin\varphi}{\cos\varphi};$$

ou

$$\frac{\cos a}{\cos b} = \frac{\cos(c-\varphi)}{\cos\varphi};$$

d'où

$$\cos(c-\varphi) = \frac{\cos a}{\cos b} \times \cos\varphi,$$

et

$$\log\cos(c-\varphi) = \log\cos a + \log\cos\varphi + \text{comp}\log\cos b - 10.$$

Cette formule fera connaître $c-\varphi$; et en y ajoutant l'angle φ, qui est donné par l'équation

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\operatorname{tg} b\cos A}{10^{10}},$$

on aura le côté c.

Remarque. — En abaissant du point C′ (fig. 8) la perpendiculaire CD, et en appelant φ le segment DA adjacent à l'angle A, on aura dans le triangle rectangle DCA, par les formules E′,

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg} b\cos A:$$

ce qui fera connaître φ.

On a $BD=c-\varphi$; $\cos CD=\frac{\cos b}{\cos\varphi}$; le triangle rectangle BDC donnera

$$\cos BD=\cos(c-\varphi)=\frac{\cos a}{\cos CD}=\frac{\cos a\cos\varphi}{\cos b}.$$

Cette solution coïncide avec la solution analytique donnée plus haut.

3° Chercher C.

On a :

$$\operatorname{cotg} a\sin b=\cos b\cos C+\sin C\operatorname{cotg} A;$$

je divise par $\cos b$, il vient :

$$\operatorname{cotg} a\operatorname{tg} b=\cos C+\sin C\frac{\operatorname{cotg} A}{\cos b}.$$

Faisons $\frac{\operatorname{cotg} A}{\cos b}=\operatorname{tg}\varphi$, on a, en substituant :

$$\operatorname{cotg} a\operatorname{tg} b=\cos C+\sin C\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\frac{\cos C\cos\varphi+\sin C\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

d'où

$$\operatorname{cotg} a\operatorname{tg} b=\frac{\cos(C-\varphi)}{\cos\varphi},$$

et

$$\cos(C-\varphi)=\cos\varphi\operatorname{cotg} a\operatorname{tg} b;$$

d'où

$$\log\cos(C-\varphi)=\log\cos\varphi+\log\operatorname{cotg} a+\log\operatorname{tg} b-20.$$

φ, étant donné par la formule

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\operatorname{cotg} A}{\cos b}\times 10^{10},$$

on ajoutera sa valeur à celle de $C-\varphi$, obtenue par la formule précédente, et on aura C.

Remarque. — En abaissant du point C (fig. 9) sur le côté opposé la perpendiculaire CD, si on nomme φ le segment angulaire DCA, le triangle rectangle DCA donnera, par la formule A′,

$$\operatorname{cotg} A=\cos b\times\operatorname{tg}\varphi;\ \text{d'où}\ \operatorname{tg}\varphi=\frac{\operatorname{cotg} A}{\cos b}.$$

Mais le triangle CBD donne, par les formules E',

$$\operatorname{tg} CD = \operatorname{tg} a \cos (C - \varphi);$$

d'où

$$\cos (C - \varphi) = \frac{\operatorname{tg} CD}{\operatorname{tg} a} = \cot a \times \operatorname{tg} CD.$$

Ensuite le triangle rectangle CDA donne aussi, par les formules E',

$$\operatorname{tg} CD = \operatorname{tg} b \cos \varphi;$$

donc, en substituant, on aura enfin, comme précédemment :

$$\cos (C - \varphi) = \cot a \operatorname{tg} b \cos \varphi.$$

4° Problème. — *Étant donnés un côté et les deux angles adjacents à ce côté, trouver les deux autres côtés et le troisième angle.*

Exemple. — On donne le côté c, et les angles adjacents A, B, on demande les côtés a, b, et l'angle C.

Solution. — La deuxième série des formules XI et la troisième des formules III résolvent la question.

1° Chercher a et b.

On a, par les deux dernières analogies de Néper :

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (a+b) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c . \frac{\cos \frac{1}{2} (A-B)}{\cos \frac{1}{2} (A+B)}, \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (a-b) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c . \frac{\sin \frac{1}{2} (A-B)}{\sin \frac{1}{2} (A+B)};$$

d'où

$$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (a+b) = \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c + \log \cos \tfrac{1}{2} (A-B) + \text{comp} \log \cos \tfrac{1}{2} (A+B) - 10;$$
$$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (a-b) = \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c + \log \sin \tfrac{1}{2} (A-B) + \text{comp} \log \sin \tfrac{1}{2} (A+B) - 10.$$

Ces formules feront connaître $a+b$, $a-b$.

Soient $\quad a+b=p, \quad a-b=q;$

on aura : $\quad a=\frac{1}{2}(p+q), \quad b=\frac{1}{2}(p-q).$

2° Chercher C.

On a :

$$-\cos C = \cos A \cos B - \sin A \sin B \cos c;$$

ou, en changeant les signes,

$$\cos C = \sin A \sin B \cos c - \cos A \cos B.$$

Divisons par cos A, il vient :

$$\cos C = \cos A \left\{ \operatorname{tg} A \cos c \sin B - \cos B \right\}.$$

Faisons

$$\cot \varphi = \cos c \operatorname{tg} A = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi},$$

on aura, en substituant :

$$\cos C = \cos A \left\{ \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \sin B - \cos B \right\};$$

ou

$$\cos C = \frac{\cos A}{\sin \varphi} \left\{ \cos \varphi \sin B - \cos B \sin \varphi \right\};$$

$$\cos C = \frac{\cos A}{\sin \varphi} \sin (B - \varphi);$$

d'où enfin,

$$\log\cos C = \log\cos A + \log\sin(B-\varphi) + \text{comp}\log\sin\varphi - 10.$$

Cette formule donnera l'angle C ; car sin (B—φ) est connu, attendu que l'angle φ se détermine par la formule

$$\cot g\,\varphi = \frac{\cos c \operatorname{tg} A}{10^{10}}.$$

Remarque 1. — En nommant φ le segment angulaire DBA formé par la perpendiculaire BD (fig. 10), on aura dans le triangle rectangle DBA, en vertu de la première des formules A',

$$\cot g\,\varphi = \cos c.\operatorname{tg} A.$$

Le triangle BDA donne, en vertu des formules A',

$$\cos A = \cos BD \sin\varphi,\ \text{d'où}\ \cos BD = \frac{\cos A}{\sin\varphi}.$$

Le triangle CBD donne :

$$\cos C = \cos BD \sin(B-\varphi).$$

Donc, en substituant la valeur de cos BD, on a, comme précédemment

$$\cos C = \frac{\cos A}{\sin\varphi}\sin(B-\varphi).$$

Remarque 2. — Il y a plusieurs manières de rendre la formule

$$\cos C = \sin A \sin B \cos c - \cos A \cos B,$$

calculable par logarithmes; en voici une autre :

Faites

$$\operatorname{tg}\varphi = \sin A \sin B \cos c,\quad \operatorname{tg}\psi = \cos A \cos B;$$

on aura :

$$\cos C = \operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi = \frac{\sin(\varphi-\psi)}{\cos\varphi\cos\psi}.$$

On pourrait faire aussi

$$\sin\varphi = \sin A \sin B \cos c,\quad \sin\psi = \cos A \cos B;$$

alors on aurait :

$$\cos C = \sin\varphi - \sin\psi = 2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi).$$

5e Problème. — *Étant donnés un côté et deux angles, dont l'un est adjacent et l'autre opposé au côté donné, trouver les deux autres côtés et le troisième angle.*

Exemple. — On donne c, A, C ; on demande a, b, B.

Solution. — Il faut recourir à la deuxième des formules I, à la troisième des formules III, et à la dernière des formules IV.

1° Chercher a.

On a :

$$\sin C : \sin A :: \sin c : \sin a;$$

d'où

$$\log \sin a = \log \sin c + \log \sin A + \text{comp} \log \sin C - 10.$$

2° Chercher b.

On a :

$$\cot c \sin b = \cos b \cos A + \sin A \cot C.$$

En transposant d'abord dans un même membre les termes qui renferment l'inconnue, on aura :

$$\sin A \cot C = \cot c \sin b - \cos b \cos A.$$

Divisons par cos A, il vient :

$$\text{tg}\, A \cot C = \frac{\cot c \sin b}{\cos A} - \cos b.$$

Faites

$$\cot \varphi = \frac{\cot c}{\cos A}, \text{ d'où } \text{tg}\, \varphi = \text{tg}\, c \cos A.$$

On a :

$$\text{tg}\, A \cot C = \cot \varphi \sin b - \cos b = \frac{\cos \varphi \sin b - \sin \varphi \cos b}{\sin \varphi};$$

d'où

$$\text{tg}\, A \cot C = \frac{\sin (b - \varphi)}{\sin \varphi},$$

et

$$\sin (b - \varphi) = \sin \varphi \,\text{tg}\, A \cot C.$$

$$\log \sin (b - \varphi) = \log \cos \varphi + \log \text{tg}\, A + \log \cot C - 20.$$

Cette formule fera connaître $b - \varphi$; on y ajoutera l'angle φ, donné par $\text{tg}\, \varphi = \frac{\text{tg}\, c \cos A}{10^{10}}$, et on aura b.

Remarque. — Abaissez la perpendiculaire BD (fig. 11), le triangle rectangle BDA donnera, en vertu des formules E',

$$\text{tg}\, \varphi = \text{tg}\, c \cos A;$$

φ est le segment DA.

Les triangles BDC, BDA, en vertu des formules D', donneront

$$\text{tg BD} = \sin (b - \varphi)\, \text{tg}\, C; \quad \text{tg BD} = \sin \varphi \,\text{tg}\, A,$$

d'où

$$\sin (b - \varphi)\, \text{tg}\, C = \sin \varphi \,\text{tg}\, A;$$

donc

$$\sin (b - \varphi) = \frac{\sin \varphi \,\text{tg}\, A}{\text{tg}\, C} = \sin \varphi \,\text{tg}\, A \cot C.$$

Cette solution est conforme à la précédente.

3° Chercher B.

On a :

$$-\cos C = \cos A \cos B - \sin A \sin B \cos c,$$

ou

$$\cos C = \sin A \sin B \cos c - \cos A \cos B.$$

Divisons par cos A, il vient :

$$\frac{\cos C}{\cos A} = \operatorname{tg} A \cos c \sin B - \cos B.$$

Faisons

$$\operatorname{cotg} \varphi = \cos c \operatorname{tg} A = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi},$$

il vient :

$$\frac{\cos C}{\cos A} = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \sin B - \cos B;$$

ou,

$$\frac{\cos C}{\cos A} = \frac{\cos \varphi \sin B - \sin \varphi \cos B}{\sin \varphi} = \frac{\sin (B - \varphi)}{\sin \varphi};$$

d'où

$$\sin (B - \varphi) = \frac{\cos C}{\cos A} \sin \varphi,$$

et

$$\log \sin (B - \varphi) = \log \cos C + \log \sin \varphi + \text{comp} \log \cos A - 10.$$

Cette formule fera connaître $B - \varphi$; on ajoutera à cet angle la valeur de φ, donnée par

$$\operatorname{cotg} \varphi = \frac{\cos c \operatorname{tg} A}{10^{10}},$$

et on aura B.

Remarque. — Abaissez l'arc BD (fig. 10) perpendiculaire à CA, et nommez φ l'angle DBA, on aura $DBC = B - \varphi$.

Le triangle rectangle ABD donnera par les formules A',

$$\operatorname{cotg} \varphi = \cos c \operatorname{tg} A.$$

Les triangles BDC, BDA donneront par les formules A',

$$\cos C = \cos BD \times \sin (B - \varphi).$$
$$\cos A = \cos BD \times \sin \varphi.$$

d'où :

$$\frac{\cos C}{\cos A} = \frac{\cos BD \sin (B - \varphi)}{\cos BD \sin \varphi} = \frac{\sin (B - \varphi)}{\sin \varphi}.$$

De là on tire :

$$\sin (B - \varphi) = \frac{\cos C}{\cos A} \sin \varphi;$$

et $$\log \sin (B - \varphi) = \log C + \log \sin \varphi + \text{comp} \log \cos A - 10.$$

Ces résultats sont les mêmes que ceux de la solution précédente.

6e Problème. — *Étant donnés les trois angles, trouver les trois côtés.*

Exemple. — On donne A, B, C, trouver *a, b, c*.

Solution. — Les formules VIII, IX et X résolvent la question. Elles sont calculables par logarithmes, et sont toutes résolues.

Les formules X conviennent pour tous les cas; il faut éviter les formules IX, lorsque les côtés doivent être très-petits; et les formules VIII, lorsque tous les côtés ou quelques-uns approchent de 180°.

Observations mnémoniques.

Les formules que nous avons rendues calculables par logarithmes, dans les six problèmes précédents, sont de trois espèces, savoir :

1° Trois sont de la forme

$$P = Q \cos x + R \sin x;$$

2° Deux sont de la forme

$$P = R \sin x - Q \cos x;$$

3° Une est de la forme

$$R \sin x = Q \cos x + P.$$

Mais comme de cette dernière on tire

$$P = R \sin x - Q \cos x,$$

nous n'avons réellement que deux formes différentes, savoir :

$$P = R \sin x + Q \cos x,$$
$$P = R \sin x - Q \cos x.$$

Règle. — 1° *Pour rendre calculable par logarithmes la première forme, divisez par le coefficient* Q *de cos* x, *et posez* $\frac{R}{Q} = tg\ \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$.

2° *Pour rendre calculable par logarithme la deuxième forme, divisez par le coefficient* Q *de cos* x, *et posez* $\frac{R}{Q} = \cot g\ \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$.

x *est toujours l'angle ou le côté inconnu.*

Exemple pour la première règle.

$$\cot g\, a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot g\, A.$$

Ici on a :

$$C = x,\ \text{donc}\ \cot g\, a \sin b = P,\ \cos b = Q,\ \cot g\, A = R;$$

d'où

$$P = Q \cos x + R \sin x.$$

Divisez par Q, on a :

$$\frac{P}{Q} = \cos x + \frac{R}{Q} \sin x,$$

ou

$$\frac{\cot g\, a \sin b}{\cos b} = \cos C + \frac{\cot g\, A}{\cos b} \sin C.$$

Faites

$$\frac{R}{Q} = \frac{\cot g\, A}{\cos b} = tg\, \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi},$$

il vient :

$$\cot a \operatorname{tg} b = \cos C + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \sin C = \frac{\cos \varphi \cos C + \sin \varphi \sin C}{\cos \varphi} = \frac{\cos (C - \varphi)}{\cos \varphi}.$$

Exemple pour la deuxième règle.

$$\cot c \sin b = \cos b \cos A + \sin A \cot C.$$

Si je fais $b = x$, on aura $\cot C = R$, $\sin A \cot C = P$, $\cos A = Q$;

d'où
$$R \sin x = Q \cos x + P,$$
ou
$$P = R \sin x - Q \cos x.$$
Donc
$$\frac{P}{Q} = \frac{R}{Q} \sin x - \cos x;$$
ou :
$$\frac{\sin A \cot C}{\cos A} = \operatorname{tg} A \cot C = \frac{\cot C}{\cos A} \sin b - \cos b.$$

Je fais
$$\frac{R}{Q} = \frac{\cot C}{\cos A} = \cot \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi};$$
on aura :
$$\operatorname{tg} A \cot C = \sin b \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} - \cos b = \frac{\sin b \cos \varphi - \sin \varphi \cos b}{\sin \varphi} = \frac{\sin (b - \varphi)}{\sin \varphi}.$$

REMARQUE. — On pourra s'exercer à résoudre numériquement quelques-uns des problèmes précédents, en choisissant les données à volonté parmi les éléments d'un triangle sphérique tout calculé, par exemple, parmi les éléments suivants, que Delambre a calculés dans le 1[er] volume de son *Astronomie,* et qu'il appelle triangle d'épreuve.

TRIANGLE D'ÉPREUVE.

NOMS.	VALEURS.	LOG. SINUS.	LOG. COSINUS.	LOG. TANGENTE.	LOG. COTANGENTE
A	121° 36′ 19″, 81	9.9302747	—9.7193874	—0.2108873	—9.7891127
B	42° 15′ 13″, 66	9.8276379	9.8693336	9.9583044	0.0416956
C	34° 15′ 2″, 76	9.7503664	9.9172860	9.8330804	0.1669196
a	76° 35′ 36″, 00	9.9880008	9.3652279	0.6227729	9:3772271
b	50° 10′ 30″, 00	9.8853636	9.8064817	0.0788818	9.9211182
c	40° 0′ 10″, 00	9.8080926	9.8842363	9.9238563	0.0761437

APPENDICE A LA CINQUIÈME LEÇON.

Examen des cas douteux dans la résolution des triangles sphériques.

1° Lorsque l'inconnue d'un triangle est exprimée par un cosinus ou une tangente, ou une cotangente, le signe du résultat fera toujours connaître si cette inconnue est plus grande ou plus petite que 90°; par conséquent, dans ce cas, on ne peut jamais prendre indifféremment deux valeurs l'une plus grande, l'autre plus petite que 90°, pour le côté ou l'angle inconnu; le problème n'aura alors qu'une seule solution. C'est ce qui arrive pour les cas II et IV du résumé précédent.

2° Il n'en est pas de même lorsque l'inconnue est donnée par un sinus. Car on se rappelle que le sinus d'un angle ou d'un arc, plus petit que 90°, a la même valeur numérique, et le même signe que le sinus de son supplément.

Par conséquent, lorsqu'on a le sinus du côté ou de l'angle inconnu, on peut, en général, prendre pour cette inconnue indifféremment une valeur plus petite ou plus grande que 90°. Il y a donc, dans ce cas, en général, deux solutions. Ceci arrive, par exemple, dans le premier et le sixième, le troisième et le cinquième problème.

Cependant il y a des circonstances qui permettent, dans certains cas, d'exclure la deuxième solution; il s'agit de reconnaître ces circonstances. Pour cela, on a les règles suivantes :

1re Règle. — *Dans tout triangle sphérique le plus grand côté est opposé au plus grand angle, et réciproquement le plus grand angle est opposé au plus grand côté.*

Démonstration. — On a, par les formules de Gauss :

$$\frac{\sin\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}A}=\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}(B-C)}.$$

1° Comme on suppose les côtés et les angles d'un triangle sphérique toujours plus petits que 180°, il s'ensuit que $\frac{1}{2}a < 90$, $\frac{1}{2}A < 90$: par conséquent, le premier membre de l'égalité précédente est toujours positif; ceci exige que les deux termes du deuxième membre soient toujours de même signe. Donc, si l'on a $b > c$, on devra avoir en même temps $B > C$; et si $b < c$, on doit avoir aussi $B < C$.

Il suit de là que le premier et le sixième problème, dans le cas où l'inconnue est donnée par un sinus, ne présente pas de cas douteux. En effet, si l'on donne les trois côtés, l'angle inconnu devra être de la même espèce (plus grand ou plus petit que 90°) que le côté opposé. De même, si l'on donne les trois angles, le côté inconnu doit être de la même espèce que l'angle connu qui lui est opposé.

2° Règle. — *Dans le cas où il y a réellement deux solutions, on doit toujours rejeter celle qui est en opposition avec les circonstances naturelles de la question.*

Par exemple, si dans des calculs astronomiques, on trouve pour la distance zénithale d'un astre, donnée par son sinus, deux valeurs, l'une $< 90^\circ$, l'autre $> 90^\circ$, cette dernière devra être rejetée; car si cette distance avait surpassé 90°, le phénomène céleste aurait été invisible.

3° Règle. — *Soient* a *le côté donné opposé à l'angle donné* A, b *l'autre côté donné; si l'on a :*

$$1^\circ \quad A < 90^\circ, \text{ et } \begin{cases} a > b \\ a > 18^\circ - b; \end{cases}$$

$$2^\circ \quad A > 90^\circ, \text{ et } \begin{cases} a < b \\ a < 180^\circ - b; \end{cases}$$

tout est déterminé dans le triangle, l'inconnue est toujours de la même espèce que la quantité connue qui lui est opposée.

4° Règle. — *Soient* A *et* B *les angles donnés,* a *le côté donné opposé à l'angle* A, *si l'on a :*

$$1^\circ \quad a > 90^\circ, \text{ et } \begin{cases} A < B \\ A < 180^\circ - B; \end{cases}$$

$$2^\circ \quad a < 90^\circ, \text{ et } \begin{cases} A > B \\ A > 180^\circ - B; \end{cases}$$

tout est déterminé dans le triangle, l'inconnue est toujours de la même espèce que la quantité connue qui lui est opposée.

Démonstration de la 3° règle. — a et b sont les côtés donnés, A est l'angle donné.

Les cas suivants peuvent se présenter :

$$\text{I}^{\text{er}} \text{ cas. } \left\{ A < 90^\circ \left\{ \begin{array}{l} b < 90^\circ \begin{cases} a < b \\ a = b \\ a > b \end{cases} \\ b = 90^\circ \begin{cases} a < b \\ a = b \\ a > b \end{cases} \\ b > 90^\circ \begin{cases} a + b < 180^\circ \\ a + b = 180^\circ \\ a + b > 180^\circ \end{cases} \end{array} \right. \right.$$

$$\text{II}^{\text{e}}\ \text{cas.}\quad \left\{ A = 90^\circ \begin{cases} b < 90^\circ & \begin{cases} a > b \\ a = b \\ a < b \end{cases} \\ b = 90^\circ & \begin{cases} a = 90 \\ a < 90^\circ \\ a > 90^\circ. \end{cases} \end{cases} \right.$$

$$\text{III}^{\text{e}}\ \text{cas.}\quad \left\{ A > 90^\circ \begin{cases} b < 90^\circ & \begin{cases} a + b > 180^\circ \\ a + b = 180^\circ \\ a + b < 180^\circ \end{cases} \\ b = 90^\circ & \begin{cases} a > b \\ a = b \\ a < b \end{cases} \\ b > 90^\circ & \begin{cases} a > b \\ a = b \\ a < b \end{cases} \end{cases} \right.$$

I^er^ CAS.

$$1^\circ \quad \left.\begin{matrix} A < 90^\circ \\ b < 90^\circ \end{matrix}\right\} \text{ et } a < b \qquad \text{(fig. 12).}$$

Si du point C, extrémité de AC$=b$, j'abaisse l'arc CD perpendiculaire au grand cercle ADEA, il est clair qu'en décrivant de C comme pôle, avec $a < b$, un arc, cet arc rencontrera le cercle ADE en deux points B, B', tels que BD$=$DB', par conséquent il y aura *deux solutions*, attendu que les deux triangles ACB, ACB' contiennent les mêmes données.

$$2^\circ \quad \left.\begin{matrix} A < 90^\circ \\ b < 90^\circ \end{matrix}\right\} a = b, \text{ ou } a > b \qquad \text{(fig. 12).}$$

Puisque $a = b$, il est clair que l'arc décrit du pôle C avec a, rencontrera le cercle ADE, aux points A et B', tels que AD$=$DB'; il n'y a donc qu'*une seule solution*.

$$3^\circ \quad \left.\begin{matrix} A < 90^\circ \\ b < 90^\circ \end{matrix}\right\} a > b \qquad \text{(fig. 13).}$$

Puisque $a > b$, le cercle décrit de C avec a rencontrera le cercle ADEA, aux points B, B', et il se formera deux triangles CB'A, CAB, dont il faudra rejeter le premier comme ne contenant point l'angle donné A—. Il n'y a donc qu'*une solution*.

Remarque 1. — Si $a =$ CE, ou $a + b = 180^\circ$, l'arc décrit de C avec a ne rencontrera le cercle ADEA qu'en un point E, et il n'y aura pas de triangle possible avec les données A, a, b; il n'y a donc *pas de solution*.

Remarque 2. — Si $a >$ CE, ou $a + b > b +$ CE $> 180^\circ$, l'arc décrit de C avec a ne rencontrera pas le cercle ADEA; donc, *pas de solution.*

$$4^\circ \quad \left.\begin{array}{r} A < 90^\circ \\ b = 90^\circ \end{array}\right\} \quad a < b \quad \text{(fig. 12).}$$

Puisque $a < b$, l'arc décrit de C avec a rencontrera le cercle ADEA, aux points B, B'; donc il y aura *deux solutions,* savoir : les triangles ACB, ACB', construits avec les mêmes données A, a, b.

$$5^\circ \quad \left.\begin{array}{r} A < 90^\circ \\ b = 90^\circ \end{array}\right\} \quad a = b \quad \text{(fig. 12).}$$

Comme $a = b$, l'arc a sera de 90°, donc l'arc décrit de C avec a rencontrera le grand cercle en A et en E; ainsi il n'y aura pas de triangle possible, donc *pas de solution.*

Remarque. — Si $a > b$, le cercle décrit de C avec a ne rencontrera pas le cercle ADEA; donc, *pas de solution.*

$$6^\circ \quad \left.\begin{array}{r} A < 90^\circ \\ b > 90 \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{c} a + b < 180^\circ \\ \text{ou} \\ a < CE \end{array}\right. \quad \text{(fig. 14).}$$

Comme $a < CE$, ou $a + b < b + CE < 180^\circ$, il est clair que l'arc décrit de C avec a coupe le cercle ABE, aux points B, B'; il y aura donc deux triangles ACB, ACB' avec les mêmes données; donc, *deux solutions.*

$$7^\circ \quad \left.\begin{array}{r} A < 90^\circ \\ b > 90 \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{c} a + b = 180^\circ \\ \text{ou} \\ a = CE \end{array}\right. \quad \text{(fig. 14).}$$

Comme $a + b = 180^\circ$, ou $a = CE$, il est clair que l'arc décrit de C avec a rencontrera le cercle ADEA aux points B, E; on ne peut donc construire qu'un seul triangle avec les données du problème; donc, *une solution.*

Remarque 1. — Si $a + b > 180^\circ$, ou $a > CE$, le cercle décrit de C avec a rencontrera le cercle ADEA aux points β, β', de sorte qu'il y aura deux triangles ACβ, ACβ', dont le dernier doit être rejeté, attendu qu'il ne renferme pas l'angle A; il n'y a donc qu'*une solution.*

Remarque 2. — Si $a = b$, le cercle décrit de C avec a ne pourra rencontrer le cercle ADEA qu'en A; donc, *pas de solution.*

Remarque 3. — Si $a > b$, le cercle décrit de C avec a rencontrera le cercle BAE aux points γ, γ', et formera les deux triangles ACγ, ACγ', qu'on doit rejeter puisqu'ils ne contiennent pas l'angle A; donc, *aucune solution.*

II^e CAS.

$$1^\circ \quad \left.\begin{array}{r} A = 90^\circ \\ b < 90^\circ \end{array}\right\} \quad a > b \quad \text{(fig. 13).}$$

Comme b est perpendiculaire à ABEA, et que $a > b$, le cercle décrit de C avec a rencontrera ABEA, en B et B'; mais comme les deux triangles ACB, ACB' sont égaux, il n'y a qu'*une solution.*

$$2^\circ \quad \left.\begin{array}{r} A = 90^\circ \\ b < 90^\circ \end{array}\right\} \ a = b.$$

Le cercle décrit de C avec a ne fera que toucher le cercle ABE ; il n'y a donc *pas de solution.*

$$3^\circ \quad \left.\begin{array}{r} A = 90^\circ \\ b < 90^\circ \end{array}\right\} \ a < b.$$

Comme $a < b$, l'arc décrit de C avec a ne rencontrera pas la circonférence ABEA ; donc, *aucune solution.*

REMARQUE. — Si $b = CE$, ou $a + b = a + CE = 180^\circ$, il n'y *aura pas de triangle;* il en serait de même pour $b > CE$, ou $a + b > a + CE > 180$.

$$4^\circ \quad \left.\begin{array}{r} A = 90^\circ \\ b = 90^\circ \end{array}\right\} \ a = 90.$$

Comme $a = 90^\circ$, ainsi que b, il y aura une *infinité de triangles* ACB, ACB', etc., avec les données du problème.

$$5^\circ \quad \left.\begin{array}{r} A = 90^\circ \\ b = 90^\circ \end{array}\right\} \ a < 90^\circ.$$

Le cercle décrit de C avec $a < 90^\circ$ ne pourra pas rencontrer le cercle ABEA ; donc, *pas de solution.*

$$6^\circ \quad \left.\begin{array}{r} A = 90^\circ \\ b = 90^\circ \end{array}\right\} \ a > 90^\circ,$$

pas de solution ; car le cercle décrit de C avec a ne pourra pas rencontrer le cercle ABEA.

IIIe CAS.

$$1^\circ \quad \left.\begin{array}{r} A > 90^\circ \\ b < 90^\circ \end{array}\right\} \begin{array}{c} a + b > 180^\circ \\ \text{ou} \\ a > CE \end{array} \quad \text{(fig. 15).}$$

Comme A est obtus, la perpendiculaire CD mesurera le plus grand chemin de C au cercle ABEA. Donc, puisque $a + b > 180^\circ$, ou $a > CE$, l'oblique CB, sera plus proche de la perpendiculaire CD que l'oblique CE ; donc, si de C avec a on décrit un arc, il rencontrera le cercle ABEA aux points B, B' ; il y a donc deux triangles possibles avec les mêmes données : d'où *deux solutions.*

$$2^\circ \quad \left.\begin{array}{r} A > 90^\circ \\ b < 90^\circ \end{array}\right\} \begin{array}{c} a + b = 180^\circ \\ \text{ou} \\ a = CE. \end{array}$$

Comme $a = CE$, l'arc décrit de C avec a rencontrera le cercle ADE en deux points B et E ; il n'y a donc qu'*une solution*.

$$3^\circ \quad \left.\begin{array}{r} A > 90^\circ \\ b < 90^\circ \end{array}\right\} \begin{array}{c} a + b < 180^\circ \\ \text{ou} \\ a < CE. \end{array}$$

Comme a est plus petit que CE, a sera plus éloigné de la perpendiculaire CD que CE, donc des triangles ACB, ACB″ obtenus, le deuxième doit être rejeté, comme ne renfermant point l'angle A. Donc, *une solution*.

REMARQUE 1. — Si $a = b$, le cercle décrit de C avec a touchera ADEA en A ; donc, *pas de solution*.

REMARQUE 2. — Si $a < b$, le côté a sera plus éloigné de la perpendiculaire CD que CA, ou b—. Il se formera donc un triangle avec le supplément de A, qui ne convient pas. *Pas de solution*.

$$4^\circ \quad \left.\begin{array}{r} A > 90^\circ \\ b = 90^\circ \end{array}\right\} \; a > b \quad (\text{fig. } 15).$$

Comme $a > b$, a sera plus près de la perpendiculaire CD que b, donc le cercle décrit de C avec a coupe ADEA en B, B′; donc, *deux solutions*.

$$5^\circ \quad \left.\begin{array}{r} A > 90^\circ \\ b = 90^\circ \end{array}\right\} \; a = b.$$

Comme $a = b$, le cercle décrit de C avec a ne fera que toucher ADEA ; donc, *pas de solution*.

REMARQUE. — Si $a < b$, il n'y aura pas de triangle; car le cercle décrit de C avec a ne rencontrera pas la circonférence ADEA.

$$6^\circ \quad \left.\begin{array}{r} A > 90^\circ \\ b > 90^\circ \end{array}\right\} \; a > b \quad (\text{fig. } 15).$$

Comme $a > b$, a sera plus près de la perpendiculaire CD que b; donc le cercle décrit de C avec a rencontrera ADEA en deux points B, B′ ; il y a donc *deux solutions*.

$$7^\circ \quad \left.\begin{array}{r} A > 90^\circ \\ b > 90^\circ \end{array}\right\} \; a = b.$$

Le cercle décrit de C avec a rencontrera le cercle ADEA aux points B et A ; donc, *une solution*.

REMARQUE 1. — Si $a < b$, a sera plus éloigné de CD que b; le cercle décrit de C rencontrera ADE aux points B″, B ; donc, deux triangles. Mais le triangle CAB″ doit être rejeté, comme ne contenant point l'angle A. Donc, *une solution*.

REMARQUE 2. — Si $a = CE$, ou $a + b = b + CE = 180^\circ$; il n'y aura pas de triangle possible ; de même si $a < CE$, ou $a + b < b + CE < 180^\circ$.

RÉSUMÉ.

CAS. $< 90°$	$b < 90°$	$a < b$	deux solutions
		$a \geqq b$	une solution
		$a+b \geqq 180°$	aucune
	$b = 90$	$a < b$	deux solut.
		$a \geqq b$	aucune
	$b > 90°$	$a+b < 180°$	deux sol.
		$a+b \geqq 180°$	une sol.
		$a \geqq b$	aucune
II^e CAS. $A = 90°$	$b < 90°$	$a > b$	une solut.
		$a \leqq b$	pas
		$a+b \geqq 180°$	pas
	$b = 90°$	$a = 90°$	infini
		$a \lessgtr 90°$	pas
	$b > 90°$	$a < b$	une solut.
		$a \geqq b$	pas
		$a+b \leqq 180°$	pas
III^e CAS. $A > 90°$	$b < 90°$	$a+b > 180°$	deux solut.
		$a+b \leqq 180$	une solut.
		$a \leqq b$	pas
	$b = 90°$	$a > b$	deux solut.
		$a \leqq b$	pas
	$b > 90°$	$a > b$	deux solut.
		$a \leqq b$	une solut.
		$a+b \leqq 180°$	pas.

On voit que, dans le cas I, a n'est jamais plus grand que b lorsqu'il y a deux solutions, ni $a > 180° - b$; dans III, a n'est jamais plus petit que b lorsqu'il y a deux solutions, ni $a < 180° - b$; donc, la troisième règle est vraie.

Démonstration de la 4^e règle. — Soient A′, B′, C′, a', b', c', respectivement les angles et les côtés du triangle polaire au triangle A, B, C; en accentuant toutes les lettres du tableau précédent, il est clair qu'il sera approprié au triangle polaire. Mais alors, si dans le nouveau tableau nous remplaçons A′, B′, C′, a', b', c', respectivement par $180°-a$, $180°-b$, $180°-c$, $180°-A$, $180°-B$, $180°-C$, on aura un troisième tableau, qui différera du premier, en ce que les grandes lettres se seront changées en petites, et réciproquement; de plus, en ce que le signe $>$ sera devenu $<$, et réciproquement. Ce nouveau tableau se rapportera par conséquent au problème où l'on donne les angles A et B et le côté a, opposé à l'angle A. Il est donc clair que, si nous changeons dans la troisième règle les petites lettres en grandes, et si nous intervertissons le signe de l'inégalité, on aura la quatrième règle, applicable au cas douteux du problème précédent.

SIXIÈME LEÇON.

SOMMAIRE.

CAS PARTICULIERS. — CALCUL DES SEGMENTS. — TRIANGLES SPHÉRIQUES PEU COURBES. — CÔTÉS PEU DIFFÉRENTS DE 90°.

a. *Calcul des segments.*

1er **Problème.** — (Fig. 16.) *Du sommet* B *on abaisse sur le côté opposé la perpendiculaire* BD; *exprimer les segments* $CD = p$, $AD = q$, *en fonction des trois côtés du triangle* ABC.

1° Dans le triangle rectangle BCD on a :

$$\operatorname{tg} p = \operatorname{tg} a \cos C = \frac{\sin a}{\cos a} \cos C \qquad (1).$$

De la formule

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

on tire :

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}.$$

En substituant cette valeur dans (1), il vient :

$$\operatorname{tg} p = \frac{\sin a}{\cos a} \times \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\cos a \sin b} \qquad (\text{I}.$$

2° Dans le triangle rectangle BDA, on a :

$$\operatorname{tg} q = \operatorname{tg} c \cos A = \frac{\sin c}{\cos c} \cos A.$$

En substituant pour cos A sa valeur, on aura :

$$\operatorname{tg} q = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\cos c \sin b} \qquad (\text{II}.$$

Les formules (I et (II résolvent la question.

2° Problème. — (Fig. 16.) *Étant donnés les trois angles d'un triangle sphérique, trouver les segments angulaires* P *et* Q, *formés par l'arc* BD *perpendiculaire au côté* AC?

1° Dans le triangle rectangle BDC, on a :

$$\operatorname{cotg} P = \cos a \operatorname{cotg} C = \frac{\sin C}{\cos C} \cos a \qquad (2);$$

mais on a

$$-\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a;$$

d'où

$$\cos a = \frac{\cos B \cos C + \cos A}{\sin B \sin C}.$$

En substituant dans (2), on trouve :

$$\operatorname{cotg} P = \frac{\cos B \cos C + \cos A}{\cos C \sin B} \qquad (\text{I}'.$$

2° Le triangle rectangle ABD donnera de même :

$$\operatorname{cotg} Q = \frac{\cos B \cos A + \cos C}{\cos A \sin B} \qquad (\text{II}'.$$

Les formules (I' et (II' résolvent la question.

3° Problème. — (Fig. 16.) *Étant donnés le côté* b *sur lequel tombe la perpendiculaire* BD, *et les angles* A *et* C *adjacents à ce côté, trouver les segments* p *et* q.

On a :

$$\cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot A,$$
$$\cot c \sin b = \cos b \cos A + \sin A \cot C;$$

On en tire :

$$\left.\begin{aligned} \cot a &= \frac{\cos b \cos C + \sin C \cot A}{\sin b}, \\ \cot c &= \frac{\cos b \cos A + \sin A \cot C}{\sin b} \end{aligned}\right\} \quad (3).$$

Mais les triangles rectangles BDC, BDA donnent respectivement

$$\operatorname{tg} p = \operatorname{tg} a \cos C, \qquad \operatorname{tg} q = \operatorname{tg} c \cos A,$$

ou : $\cot a = \cot p \cos C, \quad \cot c = \cot q \cos A.$

En substituant, les formules (3) deviennent :

$$\cot p \cos C = \frac{\cos b \cos C + \sin C \cot A}{\sin b},$$
$$\cot q \cos A = \frac{\cos b \cos A + \sin A \cot C}{\sin b};$$

ou, en divisant respectivement par cos C, cos A :

$$\cot p = \cot b + \frac{\operatorname{tg} C \cot A}{\sin b} \qquad (\mathrm{I}'',$$
$$\cot q = \cot b + \frac{\operatorname{tg} A \cot C}{\sin b} \qquad (\mathrm{II}''.$$

Les formules (I″ et (II″ résolvent la question.

4ᵉ PROBLÈME.—(Fig. 16.) *Étant donnés l'angle* B, *et les côtés* a, c, *qui comprennent cet angle, trouver les angles* P *et* Q *dans lesquels l'angle* B *est divisé par la perpendiculaire* BD.

On a : $\cot a \sin c = \cos c \cos B + \sin B \cot A,$
$\cot c \sin a = \cos a \cos B + \sin B \cot C;$

Ces formules donnent :

$$\cot A = \frac{\cot a \sin c}{\sin B} - \cos c \cot B,$$
$$\cot C = \frac{\cot c \sin a}{\sin B} - \cos a \cot B.$$

Les triangles rectangles BCD, BDA, donnent :

$$\cot C = \cos a \operatorname{tg} P, \qquad \cot A = \cos c \operatorname{tg} Q;$$

donc, en substituant :

$$\cos c \operatorname{tg} Q = \frac{\cot a \sin c}{\sin B} - \cos c \cot B,$$
$$\cos a \operatorname{tg} P = \frac{\cot c \sin a}{\sin B} - \cos a \cot B.$$

D'où, enfin :

$$\operatorname{tg} Q = \frac{\operatorname{cotg} a \operatorname{tg} c}{\sin B} - \operatorname{cotg} B \quad (\mathrm{I}''',$$

$$\operatorname{tg} P = \frac{\operatorname{cotg} c \operatorname{tg} a}{\sin B} - \operatorname{cotg} B \quad (\mathrm{II}'''.$$

Les formules (I''' et (II''' résolvent la question.

b. *Triangles sphériques peu courbes. Théorème de Legendre.*

Théorème. — (Fig. 17.) *Si l'on retranche de chaque angle d'un triangle sphérique le tiers de l'excès de la somme de ses trois angles sur deux droits, on aura les trois angles d'un triangle rectiligne dont les côtés seront égaux en longueur à ceux du triangle sphérique. Ainsi on pourra traiter celui-ci comme un triangle rectiligne, et les résultats seront exacts aux quantités près de l'ordre* $\frac{1}{r^4}$, *r étant le rayon de la sphère.*

Démonstration. — Soit $2s = a + b + c$,
on trouvera aisément que

$$s^2 + (s-a)^2 - b^2 - c^2 = 2\,(s-c)\,(s-b) \qquad (1),$$
$$(s-b)^2 + (s-c)^2 - b^2 - c^2 = -2s\,(s-a) \qquad (2).$$

Cela posé, soient A', B', C' les angles d'un triangle rectiligne respectivement opposés aux côtés a, b, c; et A, B, C les angles d'un triangle sphérique ayant pour côtés des arcs égaux en longueur aux mêmes quantités a, b, c, le rayon de la sphère étant r. On aura évidemment, par les formules VIII et IX de la quatorzième leçon de la *Trigonométrie rectiligne*.

$$\cos^2\tfrac{1}{2}A' = \frac{s(s-a)}{bc}, \quad \sin^2\tfrac{1}{2}A' = \frac{(s-b)(s-c)}{bc},$$

$$\sin^2 A' = \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{b^2c^2} \ldots \quad (3);$$

de là on tire :

$$(4) \quad \cos A' = \cos^2\tfrac{1}{2}A' - \sin^2\tfrac{1}{2}A' = \frac{s(s-a)}{bc} - \frac{(s-b)(s-c)}{bc} = \frac{s(s-a)-(s-b)(s-c)}{bc}.$$

Mais on a aussi, par les formules de la trigonométrie sphérique,

$$\cos^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}, \quad \sin^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c};$$

d'où l'on tire :

$$(5) \quad \cos A = \cos^2\tfrac{1}{2}A - \sin^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin s \sin(s-a) - \sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}.$$

Mais comme a, b, c sont les longueurs absolues des côtés du triangle sphérique, pour le rayon r, on aura la mesure des angles correspondants à ces côtés, ou ces arcs, en évaluant les mêmes longueurs pour un rayon égal à 1. Or cette évaluation se fait en remplaçant a, b, c, respectivement par $\frac{a}{r}, \frac{b}{r}, \frac{c}{r}$; par conséquent, l'équation (5) devient :

$$(6)\qquad \cos A = \frac{\sin\frac{s}{r}\sin\frac{s-a}{r} - \sin\frac{s-b}{r}\sin\frac{s-c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}}.$$

Remplaçons maintenant les six sinus de la formule précédente par leurs développements en série, en négligeant tous les termes qui ont pour facteurs une quantité supérieure à $\frac{1}{r^3}$; nous aurons alors pour cos A une valeur exacte aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{r^3}$, savoir :

$$\cos A = \frac{\left(\frac{s}{r} - \frac{s^3}{6r^3}\right)\left(\frac{s-a}{r} - \frac{(s-a)^3}{6r^3}\right) - \left(\frac{s-b}{r} - \frac{(s-b)^3}{6r^3}\right)\left(\frac{s-c}{r} - \frac{(s-c)^3}{6r^3}\right)}{\left(\frac{b}{r} - \frac{b^3}{6r^3}\right)\left(\frac{c}{r} - \frac{c^3}{6r^3}\right)}.$$

ou, en multipliant haut et bas par r, et en effectuant les multiplications indiquées,

$$\cos A = \frac{s(s-a) - (s-b)(s-c) + \frac{(s-c)(s-b)^3 + (s-b)(s-c)^3 - s^3(s-a) - s(s-a)^3}{6r^2}}{bc\left(1 - \frac{b^2+c^2}{6r^2}\right)}.$$

Mais en effectuant la division indiquée par le facteur $\frac{1}{1-\frac{b^2+c^2}{6r^2}}$, et en s'arrêtant au terme du quotient dont le dénominateur ne surpasse pas la deuxième puissance de r, on aura :

$$\frac{1}{1-\frac{b^2+c^2}{6r^2}} = 1 + \frac{b^2+c^2}{6r^2}.$$

Par conséquent, l'expression précédente devient :

$$\cos A = \left\{\frac{s(s-a)-(s-b)(s-c)}{bc} + \frac{(s-c)(s-b)^3 + (s-b)(s-c)^3 - s^3(s-a) - s(s-a)^3}{6r^2 bc}\right\}\left\{1 + \frac{b^2+c^2}{6r^2}\right\}.$$

Mais en effectuant la multiplication indiquée, et en négligeant toujours les termes du produit dans les dénominateurs desquels entre une puissance de r supérieure à la deuxième, nous aurons :

$$\cos A = \frac{s(s-a)-(s-b)(s-c)}{bc} - \frac{s^3(s-a)+s(s-a)^3-(s-c)(s-b)^3-(s-b)(s-c)^3}{6r^2\,bc}$$

$$+\frac{s(s-a)(b^2+c^2)-(s-b)(s-c)(b^2+c^2)}{6r^2\,bc} = \frac{s(s-a)-(s-b)(s-c)}{bc} - \frac{s(s-a)}{6r^2\,bc}$$

$$\{s^2+(s-a)^2-b^2-c^2\} + \frac{(s-b)(s-c)}{6r^2\,bc}\{(s-b)^2+(s-c)^2-b^2-c^2\};$$

ou bien, en ayant égard aux égalités (1) et (2),

$$\cos A = \frac{s(s-a)-(s-b)(s-c)}{bc} - \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{6r^2 bc} = \frac{s(s-a)-(s-b)(s-c)}{bc}$$

$$-\frac{bc}{6r^2}\times\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{b^2c^2}.$$

Donc, à cause des égalités (3) et (4), on aura, à l'ordre $\frac{1}{r^3}$ près,

$$\cos A = \cos A' - \frac{bc}{6r^2}\times \sin^2 A' = \cos A' - \frac{bc}{2}\sin A' \times \frac{\sin A'}{3r^2}\ldots \quad (7).$$

Mais si nous désignons par S l'aire du triangle rectiligne A'B'C', nous savons que l'on a (*Trigonométrie rectiligne*, p. 194) :

$$S = \tfrac{1}{2}\,bc\sin A';$$

par conséquent, (7) devient :

$$\cos A = \cos A' - \frac{S\sin A'}{3r^2}.$$

On aurait trouvé de même

$$\cos B = \cos B' - \frac{S\sin B'}{3r^2},$$

$$\cos C = \cos C' - \frac{S\sin C'}{3r^2}. \qquad (8).$$

Les formules (8) conviennent à tous les triangles sphériques; et l'on voit que les angles A', B', C' diffèrent d'autant moins des angles A, B, C, que le rayon r est plus grand par rapport à S.

Soit donc r une quantité tellement grande, que les différences entre A et A', B et B', C et C', soient très-petites; ce qui arrivera lorsque le triangle ABC a peu d'étendue, et qu'il est tracé sur une sphère d'un très-grand rayon, comme le sont, par exemple, les triangles géodésiques, tracés sur la surface du globe; il est clair qu'on pourra poser

$$A = A' + \epsilon, \quad B = B' + \epsilon', \quad C = C' + \epsilon''.$$

On a donc :

$$\cos A = \cos(A' + \varepsilon) = \cos A' \cos \varepsilon - \sin A' \sin \varepsilon,$$
$$\cos B = \cos(B' + \varepsilon') = \cos B' \cos \varepsilon' - \sin B' \sin \varepsilon',$$
$$\cos C = \cos(C' + \varepsilon'') = \cos C' \cos \varepsilon'' - \sin C' \sin \varepsilon''.$$

Mais comme le cosinus d'un très-petit arc diffère peu du rayon, ou de 1, et que son sinus coïncide sensiblement avec l'arc, ou aura, pour un triangle sphérique peu courbe :

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= \cos A' - \varepsilon \sin A', \\ \cos B &= \cos B' - \varepsilon' \sin B', \\ \cos C &= \cos C' - \varepsilon'' \sin C'. \end{aligned}\right\} \quad (9).$$

En comparant ces égalités aux relations (8), on en déduit :

$$\varepsilon = \frac{S}{3r^2}, \quad \varepsilon' = \frac{S}{3r^2}, \quad \varepsilon'' = \frac{S}{3r^2};$$

d'où il suit que, dans un triangle sphérique peu courbe, on a, à l'ordre $\frac{1}{r^3}$ près,

$$A = A' + \frac{S}{3r^2}, \quad B = B' + \frac{S}{3r^2}, \quad C = C' + \frac{S}{3r^2}.$$

Si l'on ajoute ces égalités membre à membre, il vient :

$$A + B + C = A' + B' + C' + \frac{S}{r^2} = 2dr + \frac{S}{r^2} = 180^\circ + \frac{S}{r^2}.$$

On en tire :

$$\frac{S}{r^2} = A + B + C - 180^\circ = e \quad (10).$$

La quantité $\frac{S}{r^2}$ a été nommée par Legendre *excès sphérique*. On voit donc que l'excès sphérique, réduit en secondes, a pour valeur l'excès de la somme des trois angles du triangle sphérique peu courbe, sur deux angles droits.

On tire de l'égalité (10) :

$$\frac{S}{3r^2} = \frac{A + B + C - 180}{3} = \tfrac{1}{3} e;$$

par conséquent,

$$A' = A - \tfrac{1}{3} e,$$
$$B' = B - \tfrac{1}{3} e,$$
$$C' = C - \tfrac{1}{3} e.$$

Il suit de là que les angles du triangle rectiligne dont les côtés ont la même longueur que ceux d'un triangle sphérique peu courbe, sont respectivement égaux aux angles correspondants du triangle sphérique, diminués chacun du tiers de l'excès sphérique.

Il suit encore de là que, pour évaluer les côtés d'un triangle sphérique peu courbe, il faut évaluer les côtés d'un triangle rectiligne ayant mêmes longueurs que ceux du triangle sphérique, mais dont on a corrigé, par la remarque précédente, les angles de l'excès sphérique. Il y a avantage à traiter les triangles sphériques peu courbes comme des triangles rectilignes; car si le rayon de la sphère est très-grand, les angles au centre, correspondants aux côtés a, b, c, seraient très-petits, et les tables trigonométriques ne seraient plus suffisantes pour donner des valeurs assez exactes pour les côtés et les angles du triangle sphérique. C'est principalement au calcul des côtés des triangles tracés sur la surface du globe, soit pour la triangulation d'un royaume, ou pour le calcul d'une ligne géodésique telle qu'un arc de méridien ou de parallèle, que la méthode précédente, due à Legendre, s'applique avec un grand avantage.

c. *Triangles sphériques dont deux côtés approchent d'un quadrant.*

5° Problème. — *Étant donnés deux côtés d'un triangle sphérique peu différents de 90°, et le troisième côté, trouver l'angle compris entre les deux premiers.*

Soient les côtés a, b, du triangle ABC, peu différents de 90°, et posons

$$a = 90° - \alpha, \quad b = 90° - \beta,$$

on aura :

$$\left.\begin{array}{l}\cos a = \sin \alpha,\ \cos b = \sin \beta,\\ \sin a = \cos \alpha,\ \sin b = \cos \beta\end{array}\right\} \quad (1).$$

Comme on demande l'angle C, tirons sa valeur de la formule

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C;$$

on aura :

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} \quad (2).$$

Soient CB' = CA' = 90°; l'angle C aura pour mesure l'arc A'B'. Cet arc diffère peu de AB $= c$; soit x la différence, et posons A'B' $= c + x$, on aura

$$C = c + x.$$

x sera un arc très-petit; on a donc :

$$\cos C = \cos (c + x) = \cos c \cos x - \sin c \sin x = \cos c - x \sin c \quad (3).$$

Par là, la formule (2) devient :

$$\cos c - x \sin c = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b};$$

ou, à cause des valeurs (1), et de leurs développements en série,

$$\cos c - x\sin c = \frac{\cos c - \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\cos c - \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6} + ..\right)\left(\beta - \frac{\beta^3}{6} + ..\right)}{\left(1 - \frac{\alpha^2}{2} + ..\right)\left(1 - \frac{\beta^2}{2} + ..\right)}.$$

Mais, puisque α et β sont très-petits, on pourra négliger tous les termes qui dépassent le deuxième ordre, et l'on aura, à cet ordre près,

$$(4) \quad \cos c - x\sin c = \frac{\cos c - \alpha\beta}{1 - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\beta^2}{2}} = (\cos c - \alpha\beta) \times \frac{1}{1 - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\beta^2}{2}}.$$

Si l'on effectue la division indiquée par le facteur $\frac{1}{1 - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\beta^2}{2}}$, en s'arrêtant aux termes du deuxième ordre, on aura

$$\frac{1}{1 - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\beta^2}{2}} = 1 + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2}.$$

Par là, l'expression (4) devient :

$$\cos c - x\sin c = (\cos c - \alpha\beta)\left(1 + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2}\right) = \cos c - \alpha\beta + \tfrac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\cos c.$$

De cette équation, on tire :

$$x = \frac{\alpha\beta - \cos c\,\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}}{\sin c} \ldots \quad (5).$$

Cette valeur peut se mettre sous une forme plus commode pour le calcul, en posant

$$p = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta), \quad q = \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta);$$

d'où

$$\alpha = p + q, \qquad \beta = p - q,$$

$$\alpha\beta = p^2 - q^2, \quad \tfrac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) = p^2 + q^2.$$

En substituant, (5) devient :

$$(6) \quad x = \frac{p^2 - p^2\cos c - q^2\cos c - q^2}{\sin c} = p^2\left(\frac{1 - \cos c}{\sin c}\right) - q^2\left(\frac{1 + \cos c}{\sin c}\right),$$

mais on a

$$2\sin^2\tfrac{1}{2}c = 1 - \cos c, \quad 2\cos^2\tfrac{1}{2}c = 1 + \cos c;$$

donc

$$\frac{1 - \cos c}{\sin c} = \frac{2\sin^2\frac{1}{2}c}{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c,$$

$$\frac{1 + \cos c}{\sin c} = \frac{2\cos^2\frac{1}{2}c}{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c} = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}c.$$

En substituant dans (6), il vient :

$$x = p^2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c - q^2 \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} c;$$

ou, en mettant pour p^2 et q^2 leurs valeurs, on a enfin :

$$x = \tfrac{1}{4}(\alpha + \beta)^2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c - \tfrac{1}{4}(\alpha - \beta)^2 \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} c.$$

On a donc, pour l'angle C,

$$C = c + \tfrac{1}{4}(\alpha + \beta)^2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c - \tfrac{1}{4}(\alpha - \beta)^2 \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} c \quad (7).$$

Remarque. — Lorsque l'angle BOA entre les signaux A et B, observé du point O, ne se trouve pas dans un plan horizontal, tel que celui de l'angle A'OB', on doit le réduire à l'horizon. Le problème à résoudre consiste alors à trouver l'angle A'OB', connaissant l'angle observé AOB, ou l'arc $AB = c$ qui le mesure. Pour cela, comme l'angle horizontal A'OB' a pour mesure l'arc A'B', ou l'angle sphérique correspondant C, la question se réduit à trouver cet angle. Or pour cela, on doit observer les distances au zénith des objets A et B, c'est-à-dire les côtés $BC = a$, $AC = b$. Car alors dans le triangle sphérique BCA, on connaîtra les trois côtés, et par conséquent on trouvera l'angle C par l'une des formules

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a \sin b}, \quad \cos^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b}.$$

Ces formules donneront l'angle C avec beaucoup de précision lorsque les arcs a et b ne sont pas trop voisins de 90°, par exemple lorsqu'ils diffèrent d'un quadrant de plus de 2°. Mais si ces différences, désignées dans la figure par α et β, sont au-dessous de 90°, on aura la valeur de l'angle C avec beaucoup plus de précision en se servant de la formule (7).

SEPTIÈME LEÇON.

SOMMAIRE.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES. — PROBLÈMES DE GÉODÉSIE.

a. *Applications géométriques.*

1er Problème.—(Fig. 18.) *Étant donnés les trois angles* A, B, C, *trouver les trois perpendiculaires* $CP = P$, $AQ = Q$, $BR = R$?

On a

$$\sin a = 2 \sin \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2} a.$$

Donc, en écrivant pour $\sin \frac{1}{2} a$ et $\cos \frac{1}{2} a$ leurs valeurs en fonction des trois angles, il vient

$$\sin a = \frac{2\sqrt{\{-\cos S \cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)\}}}{\sin B \sin C} = \frac{V}{\sin B \sin C} \quad (1).$$

Mais le triangle rectangle CPB donne

$$\sin P = \sin a \sin B;$$

donc, en mettant dans celle-ci, pour $\sin a$, sa valeur (1), il vient

$$\sin P = \frac{V \sin B}{\sin C \sin B} = \frac{V}{\sin C}.$$

On trouverait de même

$$\sin Q = \frac{V}{\sin A}, \quad \sin R = \frac{V}{\sin B}.$$

2e Problème. (Fig. 18.) — *Étant donnés les trois côtés* a, b, c, *trouver les trois perpendiculaires* P, Q, R.

On a

$$\sin A = \frac{2\sqrt{\{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\}}}{\sin b \sin c} = \frac{U}{\sin b \sin c}. \quad (2).$$

Le triangle rectangle CAP donne

$$\sin P = \sin b \sin A;$$

d'où

$$\sin P = \frac{\sin b.\ U}{\sin b \sin c} = \frac{U}{\sin c}.$$

On trouverait de même

$$\sin Q = \frac{U}{\sin a}, \quad \sin R = \frac{U}{\sin b}.$$

3e Problème (Fig. 18.) — *Étant donnés les deux côtés* a, b, *et l'angle compris* C, *trouver la perpendiculaire* CP = P.

Le triangle rectangle CAP donne

$$\operatorname{cotg} A = \cos b \operatorname{tg} \varphi \quad (3);$$

mais on a

$$\operatorname{cotg} a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \operatorname{cotg} A;$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{cotg} A = \frac{\operatorname{cotg} a \sin b - \cos b \cos C}{\sin C}.$$

En substituant dans (3), il vient

$$\frac{\operatorname{cotg} a \sin b - \cos b \cos C}{\sin C} = \cos b \operatorname{tg} \varphi;$$

d'où l'on tire, en divisant par $\cos b$,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{cotg} a \operatorname{tg} b - \cos C}{\sin C};$$

puis, en élevant au carré, et en ajoutant l'unité aux deux membres,

$$1 + \operatorname{tg}^2\varphi = 1 + \frac{\operatorname{cotg}^2 a \operatorname{tg}^2 b - 2 \operatorname{cotg} a \operatorname{tg} b \cos C + \cos^2 C}{\sin^2 C}$$

$$= \frac{1 + \operatorname{cotg}^2 a \operatorname{tg}^2 b - 2 \operatorname{cotg} a \operatorname{tg} b \cos C}{\sin^2 C};$$

d'où

$$\text{séc}\ \varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi} = \frac{1 + \operatorname{cotg}^2 a \operatorname{tg}^2 b - 2 \operatorname{cotg} a \operatorname{tg} b \cos C}{\sin^2 C}.$$

Multiplions par $\operatorname{cotg}^2 b$, nous aurons

$$\frac{\operatorname{cotg}^2 b}{\cos^2\varphi} = \frac{\operatorname{cotg}^2 b + \operatorname{cotg}^2 a - 2 \operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} b \cos C}{\sin^2 C} \quad (4).$$

Mais le triangle rectangle CAP donne

$$\operatorname{tg} P = \operatorname{tg} b \cos\varphi;$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{cotg} P = \frac{1}{\operatorname{tg} b \cos\varphi} = \frac{\operatorname{cotg} b}{\cos\varphi}; \quad \text{et } \operatorname{cotg}^2 P = \frac{\operatorname{cotg}^2 b}{\cos^2\varphi}.$$

En comparant cette valeur à (4), il vient

$$\operatorname{cotg}^2 P = \frac{\operatorname{cotg}^2 b + \operatorname{cotg}^2 a - 2 \operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} b \cos C}{\sin^2 C} \quad (5).$$

4° Problème. (Fig. 19.)—*Étant donnés les angles* A, B, *et le côté adjacent* c, *trouver la perpendiculaire* P.

Le triangle rectangle CPA donne

$$\operatorname{tg} m = \operatorname{tg} b \cos A;$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{cotg} m = \frac{\operatorname{cotg} b}{\cos A} \quad (6);$$

mais on a

$$\operatorname{cotg} b \sin c = \cos c \cos A + \sin A \operatorname{cotg} B.$$

Donc, en substituant dans (6) la valeur de $\operatorname{cotg} b$, donnée par cette dernière, il vient

$$\operatorname{cotg} m = \frac{\cos c + \operatorname{tg} A \operatorname{cotg} B}{\sin c};$$

d'où

$$1 + \operatorname{cotg}^2 m = \text{cosé}^2 m = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 A \operatorname{cotg}^2 B + 2 \cos c \operatorname{tg} A \operatorname{cotg} B}{\sin^2 c}.$$

En multipliant par $\cot g^2 A$, on a

$$\text{cosé}^2 m \cot g^2 A = \frac{\cot g^2 A + \cot g^2 B + 2\cos c \cot g A \cot g B}{\sin^2 c} \quad (7).$$

Le triangle rectangle CAP donne

$$\operatorname{tg} P = \sin m \operatorname{tg} A;$$

d'où

$$\frac{1}{\operatorname{tg} P} = \frac{1}{\sin m \operatorname{tg} A},$$

ou

$$\cot g P = \text{cosé}\, m \cot g A;$$

et

$$\cot g^2 P = \text{cosé}^2 m \cot g^2 A.$$

En comparant cette dernière à la formule (7), il vient enfin

$$\cot g^2 P = \frac{\cot g^2 A + \cot g^2 B + 2\cos c \cot g A \cot g B}{\sin^2 c}.$$

5° Problème. — *Étant donnés deux côtés* a, b, *et l'angle compris* C, *trouver la surface du triangle?*

Soit S la surface cherchée, on a (Legendre, *Géométrie prop.*, XXIII, liv. 7):

$$S = A + B + C - 180°;$$

on en tire

$$A + B + C = 180° + S, \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{2}(A + B + C) = 90° + \tfrac{1}{2} S,$$

d'où

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A + B + C) = -\cot g \tfrac{1}{2} S \qquad (8).$$

Mais on a, par les formules (1) de la huitième leçon de *Trigonométrie rectiligne*

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A + B + C) = \frac{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A + B) + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C}{1 - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A + B) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C}.$$

Substituons pour $\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A + B)$ sa valeur donnée par la première analogie de Néper, il vient

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A + B + C) = \frac{\cot g \tfrac{1}{2} C \dfrac{\cos \tfrac{1}{2}(a - b)}{\cos \tfrac{1}{2}(a + b)} + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C}{1 - \cot g \tfrac{1}{2} C \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C \dfrac{\cos \tfrac{1}{2}(a - b)}{\cos \tfrac{1}{2}(a + b)}}.$$

Mais si l'on observe que $\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C \cot g \tfrac{1}{2} C = 1$, on aura, en réduisant au même dénominateur

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A + B + C) = \frac{\cot g \tfrac{1}{2} C \cos \tfrac{1}{2}(a - b) + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C \cos \tfrac{1}{2}(a + b)}{\cos \tfrac{1}{2}(a + b) - \cos \tfrac{1}{2}(a - b)};$$

ou, en développant les cosinus, et en réduisant :

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B+C)=\frac{(\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C+\operatorname{tg}\frac{1}{2}C)\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b+(\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C-\operatorname{tg}\frac{1}{2}C)\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b}.$$

Mais, en substituant pour $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C+\operatorname{tg}\frac{1}{2}C$, $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C-\operatorname{tg}\frac{1}{2}C$, leurs valeurs données par les formules (33), (34) de la neuvième leçon de la *Trigonométrie rectiligne*, on a

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B+C)=\frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\operatorname{cos\acute{e}}C+\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\operatorname{cotg}C}{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b}.$$

Multiplions, haut et bas, par sin C, et divisons de même par $\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b$, il vient

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B+C)=-\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}S=\frac{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}a\operatorname{cotg}\frac{1}{2}b+\cos C}{\sin C}\quad(9).$$

6e Problème. — *Étant donnés les trois côtés d'un triangle sphérique, trouver sa surface.*

On a, par le problème précédent :

$$-\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}S=\frac{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}a\operatorname{cotg}\frac{1}{2}b+\cos C}{\sin C}\quad(1'.$$

Mais on a aussi

$$2\cos^2\tfrac{1}{2}a=1+\cos a,\quad 2\cos^2\tfrac{1}{2}b=1+\cos b;$$

donc, en multipliant,

$$4\cos^2\tfrac{1}{2}a\cos^2\tfrac{1}{2}b=1+\cos a+\cos b+\cos a\cos b\quad(2'.$$

Ensuite, comme on a

$$2\sin\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}a=\sin a,$$
$$2\sin\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}b=\sin b,$$

il vient, en multipliant,

$$4\sin\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}b=\sin a\sin b\quad(3'.$$

En divisant (2' par (3', on a

$$\frac{4\cos^2\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}b}{4\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}b}=\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}a\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}b=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos a\cos b}{\sin a\sin b}.$$

En ajoutant cos C, et en divisant par sin C, on a

$$(4'\ldots\quad\frac{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}a\operatorname{cotg}\frac{1}{2}b+\cos C}{\sin C}=-\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}S$$
$$=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C}{\sin a\sin b\sin C}.$$

Mais on a

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

$$\sin C = \frac{2\sqrt{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{\sin a \sin b};$$

donc, en substituant dans (4'), il vient enfin

$$-\cot\tfrac{1}{2}S = \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{2\sqrt{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}} \quad (10).$$

REMARQUE 1. — Si l'on veut avoir une formule propre au calcul logarithmique, on pourra traiter la question ainsi qu'il suit :

Élevons (1' au carré, et ajoutons l'unité aux deux membres, il viendra

$$1+\cot^2\tfrac{1}{2}S = \mathrm{cos\acute{e}}^2\tfrac{1}{2}S = \frac{1}{\sin^2\tfrac{1}{2}S} =$$

$$\frac{1+\cot^2\tfrac{1}{2}a\cot^2\tfrac{1}{2}b+2\cot\tfrac{1}{2}a\cot\tfrac{1}{2}b\cos C}{\sin^2 C} \ldots \quad (5'.$$

Mais on a

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a\cos b}{\sin a \sin b}.$$

Donc

$$2\cot\tfrac{1}{2}a\cot\tfrac{1}{2}b\cos C = \frac{2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos C}{\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b}$$

$$= \frac{2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b(\cos c-\cos a\cos b)}{\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\sin a\sin b} = \frac{2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b(\cos c-\cos a\cos b)}{4\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}b}$$

$$= \frac{\cos c-\cos a\cos b}{2\sin^2\tfrac{1}{2}a\sin^2\tfrac{1}{2}b} = \frac{1-2\sin^2\tfrac{1}{2}c-(1-2\sin^2\tfrac{1}{2}a)(1-2\sin^2\tfrac{1}{2}b)}{2\sin^2\tfrac{1}{2}a\sin^2\tfrac{1}{2}b}$$

$$= \frac{\sin^2\tfrac{1}{2}a+\sin^2\tfrac{1}{2}b-\sin^2\tfrac{1}{2}c-2\sin^2\tfrac{1}{2}a\sin^2\tfrac{1}{2}b}{\sin^2\tfrac{1}{2}a\sin^2\tfrac{1}{2}b} \quad (6'.$$

On a aussi :

$$\cot^2\tfrac{1}{2}a\cot^2\tfrac{1}{2}b = \frac{1-\sin^2\tfrac{1}{2}a}{\sin^2\tfrac{1}{2}a}\times\frac{1-\sin^2\tfrac{1}{2}b}{\sin^2\tfrac{1}{2}b}$$

$$= \frac{1-\sin^2\tfrac{1}{2}a-\sin^2\tfrac{1}{2}b+\sin^2\tfrac{1}{2}a\sin^2\tfrac{1}{2}b}{\sin^2\tfrac{1}{2}a\sin^2\tfrac{1}{2}b} \quad (7'.$$

Si l'on substitue (6' et (7' dans (5', on aura

$$\frac{1}{\sin^2\tfrac{1}{2}S} = \frac{1-\sin^2\tfrac{1}{2}c}{\sin^2\tfrac{1}{2}a\sin^2\tfrac{1}{2}b\sin^2 c};$$

d'où, en renversant,

$$\sin^2\tfrac{1}{2}S = \frac{\sin^2\tfrac{1}{2}a\sin^2\tfrac{1}{2}b\sin^2 C}{\cos^2\tfrac{1}{2}c}, \text{ ou } \sin\tfrac{1}{2}S = \frac{\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\sin C}{\cos\tfrac{1}{2}c}.$$

Mettons pour sin C sa valeur, il vient

$$\sin\tfrac{1}{2}S = \frac{\sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}b \times \dfrac{2\sqrt{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{\sin a \sin b}}{\cos\tfrac{1}{2}c}\;;$$

ou, en mettant pour $\sin a \sin b$, sa valeur $2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}b$, on trouve enfin, en réduisant :

$$\sin\tfrac{1}{2}S = \frac{\sqrt{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c} \qquad (11).$$

FIN.