DISSERTATIO INAUGURALIS MATHEMATICA,

DE

MAXIMORUM, MINIMORUM

THEORIA EXEMPLIS ILLUSTRATA,

QUAM

EX RECTORIS MAGNIFICI P. J. DESTRIVEAUX,

ET SENATUS ACADEMICI AUCTORITATE,

PRÆVIO FACULTATIS DISCIPLINARUM MATHEMATICARUM
ET PHYSICARUM DECRETO,

PRO GRADU DOCTORIS,

SUMMISQUE IN MATHESI ET PHILOSOPHIA NATURALI HONORIBUS,
AC PRIVILEGIIS,

IN UNIVERSITATE LEODIENSI,

RITÈ AC LEGITIMÈ CONSEQUENDIS,

PUBLICO EXAMINI SUBMITTIT,

Die 29. Novembris 1823, horâ, 10.

AUCTOR

ANTONIUS MEYER, LUCILIBURGUS.

LUCILIBURGI, APUD J. LAMORT, TYPOGRAPHUM.

MDCCCXXIII.

Le *Specimen* sera soumis à la censure de la Faculté, afin de s'assurer qu'il ne s'y trouve rien de contraire à la tranquillité publique et aux bonnes mœurs; chacun étant, du reste, libre de présenter au public les résultats de ses opérations, sans que, pour cela, ils puissent être considérés comme ceux de la Faculté ou de l'Université.

Art. 56 *du Réglement.*

AMICIS MEIS,

A. Meyer.

Tout change — excepté la Géométrie.

DISSERTATIO INAUGURALIS MATHEMATICA,

DE

MAXIMORUM, MINIMORUM THEORIA

EXEMPLIS ILLUSTRATA.

Si sunt z, $z+h$, $z+2h$, $z+3h$, $z+2h$, $z+h$, z, ordinatæ proxime positæ curvæ cujus æquatio $z, =fx$; est $z+3h$ ordinata maxima. Sunt enim z, $z+h$, etc., ordinatam $z+3h$ antecedentia et subsequentia, ordinatâ $z+3h$ respective minora.

Si essent iterum z, $z-h$, $z-2h$, $z-3h$, $z-2h$, $z-h$, z, ejusmodi ordinatæ, esset etiam $z-3h$, ordinata minimi valoris, quia haberes similiter z, $z-h$, etc., ipso valore $z-3h$ majora.

Habeas autem z, $z\pm h$, $z\pm 2h$, etc., ordinatas lineæ ad infinitum usque crescentes vel decrescentes, erit functio ejusmodi lineam representans, neque maximi neque minimi valoris; elucet enim ordinatam quamlibet subsequentem esse ordinata quâlibet antecedente sive majorem sive minorem.

Quod jam de ordinatis speciatim adjeci, pro quâlibet etiam functione valet, cum ex quâlibet functione linea hâc functione representata elici possit.

Facta igitur comparatione, diversos ejusdem functionis valores spectante, elucet utrum ejusmodi functio valore maximo, minimo gaudeat nec-ne.

Sequitur inde theoriam de maximis et minimis docere imprimis sequentia:

1) *Conditiones, quarum ope videre est, utrum functio maximo vel minimo valore gaudeat nec-ne.*

2) *Conditiones quibus elucet functionem gaudere :*

   a) *Valore maximo,*

   b) *Valore minimo.*

3) *Methodum sive regulas, quarum ope ex functione data, valores maximum, minimum elici possunt.*

Sub hoc igitur triplici respectu, functiones juxta propositum determinatæ examinentur, ut sic habeamus theoriæ de qua agitur notitiam.

Ut autem ejusmodi conditiones atque regulæ reperiantur, oportet ut definitiones maximum, minimum spectantes, capite ponamus. Continet definitio ejusmodi valoris notas.

Ex iis quæ initio posuimus facile colligas:

Valorem MAXIMUM *functionis esse valorem majorem quam cæteri valores, valorem maximum* IMMEDIATE *antecedentes et* IMMEDIATE *subsequentes;*

Valorem autem MINIMUM *functionis esse valorem, minorem quam valores omnes ejusdem functionis valorem minimum* IMMEDIATE *antecedentes et* IMMEDIATE (1) *subsequentes.*

Ex functione quidem qualibet erui possunt conditiones vi quarum maximum, minimum reperiantur, num sit ejusmodi functio algebraïca sive transcendens, sive integralis indefinita, num sit pluribus vel unâ variabilibus prædita; in hoc autem specimine, de maximo et minimo valore tantum ejusmodi functionum tractabitur, quæ sunt algebraïcæ vel transcendentes, quæ denique unâ tantum variabili et duabus variabilibus præditæ sunt; quod ex rationibus quibusdam ad me unice spectantibus sic ordinavi.

De maximo, minimo functionis una variabili præditæ.

Sit $y = fx$ ejusmodi functio. Ut sit fx maximum vel minimum, habeas oportet respective $fx > f(x \pm h)$, $fx < f(x \pm h)$; (h est quantitas indeterminate parva) quæ conditiones immediate eruuntur ex definitionibus respective maximum, minimum spectantibus.

Involvendo autem $y = fx$ juxta theorema tayloreanum habebis:

$$f(x \pm h) = y \pm y'h + y''\frac{h^2}{2} \pm \text{etc.}$$

Habeas igitur pro casu maximi:

$$(y = fx) > y \pm y'h + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots (m).$$

Pro casu minimi:

$$(y = fx) < y \pm y'h + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots (n).$$

---

(1) In utraque definitione vocem *immediate* adjeci, quæ vox etiam in definitione completâ requiritur. Si enim haberes functionem cujus valores crescant, denique minuantur, atque iterum crescant (quæ alternatio fiat, si vis, repetitis vicibus), essent in ejusmodi functione plura maxima et minima. Si jam definissemus maximum v. g., valorem cæteris ejusdem omnibus functionis valoribus majorem, omissâ voce *immediate*, tunc ex ejusmodi valoribus maximis unum maximum, et quidem maximorum maximum tantum definissemus; esset itaque incompleta ejusmodi definitio, in quâ videlicet vox *immediate* omitteretur.

Cum autem sit h indeterminate parvum, satis etiam parvum supponi potest, ut terminus $y'h$ absolute sumptus (i. e. facta abstractione a signo) major sit quam summa terminorum omnium in eâdem serie terminum $y'h$ sequentium; si enim dividas per h quemvis terminum seriei, erit y' factore h orbatum, et igitur majus quam summa terminorum sequentium ipso h affectorum, quod vero h concipi potest pro voluntate parvum. Cum sit y' majus quam summa terminorum ipsum terminum y' sequentium, erit etiam $y'h$ majus quam summa terminorum $y''\frac{h^2}{2} \pm$ etc.; erit igitur summa terminorum terminum primum y sequentium, aut positiva aut negativa, prout terminus $y'h$ est positivus aut negativus.

Est autem in relationibus (m), (n) terminus $y'h$ simul $\left\{\begin{matrix}\text{positivus}\\ \text{negativus}\end{matrix}\right\}$, est igitur summa terminorum terminum primum y in iisdem relationibus sequentium, simul $\left\{\begin{matrix}\text{positiva}\\ \text{negativa}\end{matrix}\right\}$, ergo neque $y > y \pm y'h +$ etc., neque $y < y \pm y'h +$ etc., ergo y neque maximum neque minimum.

Si autem esset terminus $y'h = o$, sive saltem $y' = o$, (cum sit h indeterminatum nec igitur pro zero habendum) habebis series:

$$y + y''\frac{h^2}{2} \pm \text{ etc., et inde conditiones.}$$

$$\text{Pro casu maximi} \ldots\ldots (y = fx) > y + y''\frac{h^2}{2} \pm \text{ etc.} \ldots\ldots (m'),$$

$$\text{Pro casu minimi} \ldots\ldots (y = fx) < y + y''\frac{h^2}{2} \pm \text{ etc.} \ldots\ldots (n'),$$

quæ conditiones possibiles sunt, si est in casu (m') secundus terminus negativus, et si in casu (n') terminus $y''\frac{h^2}{2}$ positivus est.

Inde sequuntur conditiones:

Ut sit ($y = fx$) *maximum vel minimum, habeas* $y' = o$;

Ut vero sit ($y = fx$) *speciatim maximum, habeas* y'' *negativum;*

Nam ut sit $(y = fx) > y + y''\frac{h^2}{2} \pm$ etc., oportet ut sit summa terminorum terminum y sequentium negativa. Cum autem sumi potest h satis parvum ut sit terminus $y''\frac{h^2}{2}$ major quam summa terminorum subsequentium, erit etiam summa terminorum $y''\frac{h^2}{2} \pm$ etc., positiva aut negativa prout est ipse terminus $y''\frac{h^2}{2}$. Ut ergo sit summa terminorum $y''\frac{h^2}{2} \pm$ etc. negativa, fiat saltem terminus $y''\frac{h^2}{2}$ negativus, sive saltem y'' negativum (est enim $\frac{h^2}{2}$ necessario positivum).

Ut denique sit $(y = fx)$ *minimum, habeas* y'' *positivum;*

Habito enim respectu ad relationem (n'), sequitur summam terminorum $y''\frac{h^2}{2} \pm$ etc. esse positivam, ut sit $y < y +$ etc. Cum autem ex naturâ quantitatis h ejusmodi summa positiva sit, si est positivus ipse terminus $y''\frac{h^2}{2}$, et cum ejusmodi terminus positivus sit, si est y'' positivum, sequitur ut sit $(y = fx)$ minimum, habeas y'' positivum.

Ut jam valor maximus vel minimus ex functione datâ $y = fx$ eliceatur, ad sequentem respiciatur regulam, quam facile ex præcedentibus colligas:

Summatur coefficiens differentialis y', *functionis datæ* $(y = fx)$, *qui zero æqualis habeatur; si zero æqualis reperitur, concludatur inde functionem* $(y = fx)$ *gaudere valore maximo vel minimo. Ponatur in relatione* $(y = fx)$ *pro* x, *ejus valor (si vis* a*) ex relatione* $y' = 0$ *desumptus, habebis sic* $y = fa$ *maximum vel minimum; maximum si est* $y'' < 0$, *minimum si est* $y'' > 0$, *substituto in ipso* y'', *loco* x, *ejus valore ex relatione* $y' = 0$ *desumpto.*

EXEMPLUM I.

Reperire $\left\{ \begin{array}{c} \textit{maximum} \\ \textit{minimum} \end{array} \right\}$ *functionis* $y = \sqrt{2px}$.

Summatur coefficiens differentialis $y' = \frac{p}{\sqrt{2px}}$; fiat $y' = 0$, vel $\frac{p}{\sqrt{2px}} = 0$. Est autem hæc relatio impossibilis; continet itaque $y = \sqrt{2px}$ neque maximum, neque minimum.

EXEMPLUM II.

Reperire maximum vel minimum functionis $y = \sin x$.

Fiat $y' (= \cos x) = 0$; ergo functio data est vel maximi vel minimi valoris, est enim $\cos x = 0$, si fit $x = 90°$. Ponatur $x = 90°$ in functione $y = \sin x$, erit $y = \sin 90°$, ergo $\sin 90° = r$ (radio) maximum vel minimum. Sed cum sit $y'' = -\sin x$, sive cum sit y'' negativum, eruitur inde valorem r, sive $y = \sin 90°$ esse maximum.

EXEMPLUM III.

In quadratum datum inscribere quadrum quod sit minimum.

Vocetur a latus quadrati dati; sit x pars ejusdem lateris, quæ pars continetur, inter punctum intersectionis lateris inscripti cum latere dato, et punctum intersectionis duorum laterum quadrati dati; erit $a - x$ altera pars ejusdem lateris a. Fiat y latus quadrati inscripti, habebis pro quadrato inscripto: $y^2 = x^2 + (a - x)^2 = \text{minimum}$.

Est autem $y' = \frac{2x - a}{\sqrt{(2x^2 - 2ax + a^2)}} = 0$, si fit $2x = a$, sive $x = \frac{1}{2}a$, sive $y^2 = \frac{1}{2}a^2$.

EXEMPLUM IV.

Corpus impellitur in alterum, quod sua vice impellitur in tertium; quæritur quænam sit ratio trium corporum, ut motus tertii corporis fiat maximum.

Vocentur tria corpora respective 1, x, b; representetur motus primi corporis per 1, habebis proportionem:

$$1 + x : x = 1 : \frac{x}{1 + x}.$$

Est enim summa duorum corporum, quorum unum ex quiete pellitur per alterius impulsum, ad alterum corpus, sicuti motus primi corporis ad motum alterius.

Ex eodem principio sequitur proportio:

$$x + b : b = \frac{x}{1 + x} : \frac{bx}{(x + b)(1 + x)} = y.$$

$$\text{Est autem } y' = \frac{b - x^2}{x^2\left(1 + b + x + \frac{b}{x}\right)^2} = 0.$$

Habebis igitur $x^2 = b$ pro maximo quæsito.

Exempla modo data relatum habent ad functiones in quibus y'' fit aut positivum aut negativum, nec ultra extendi queunt. Si enim esset $y'' = 0$, vel $y'' = \infty$, essent etiam conditiones supra datæ pro his-ce casibus non satis latæ. Extenduntur jam in sequentibus ejusmodi conditiones et quidem ita ut uterque ex casibus modo adjectis in iis contineatur.

Casus in quo supponitur $y'' = 0$.

Si involvitur $y = fx$ juxta theorema notum, sive si fit

$$(y = fx) = y \pm y'h + y''\frac{h^2}{2} \pm y'''\frac{h^3}{2 \cdot 3} + \text{etc.},$$

erit etiam eadem functio, $y \pm y'''\frac{h^3}{2 \cdot 3} + \text{etc.}$,

suppositis $y' = 0$, $y'' = 0$.

Ut jam sit $(y = fx)$ maximum habeas juxta definitionem :

$$y > y \pm y''' \frac{h^3}{2.3} + \text{etc.} \dots (1),$$

Ut sit minimum, fiat

$$y < y \pm y''' \frac{h^3}{2.3} + \text{etc.} \dots (2).$$

Ut autem habeas (1), (2), habeas etiam $y''' = 0$. Cum enim in utraque conditione terminus $y''' \frac{h^3}{2.3}$, ex natura ipsius h, major sit quam summa terminorum in eâdem serie subsequentium, est etiam summa terminorum $y''' \frac{h^3}{2.3} + \text{etc.}$ Sive positiva, sive negativa prout signum termini $y''' \frac{h^3}{2.3}$ sit plus vel minus. Supposito igitur termino $y''' \frac{h^3}{2.3}$, sive saltem y''' realiter existente, erit y neque majus simul, neque minus simul quam series $y \pm$ etc.; erit igitur $(y = fx)$ neque maximi neque minimi valoris.

Ut ergo sit functio $(y = fx)$ *maximum, vel minimum, suppositis* $y' = 0$, $y'' = 0$, *fiat etiam* $y''' = 0$.

Habito autem $y''' = 0$, unde :

$$y > y + y^{IV} \frac{h^4}{2.3.4} \pm \text{etc.} \dots (3),$$

$$y < y + y^{IV} \frac{h^4}{2.3.4} \pm \text{etc.} \dots (4),$$

sequitur, ut sit y majus quam $y +$ etc. pro utroque valore ipsius h (i. e. pro valore $+$ et pro valore $-$), esse $y^{IV} \frac{h^4}{2.3.4}$ negativum, sive saltem $y^{IV} < 0$ (cum sit $\frac{h^4}{2.3.4}$ necessario positivum). Est enim ejusmodi terminus major quam subsequentium summa; est inde summa terminorum $y^{IV} \frac{h^4}{2.3.4} \pm$ etc. negativa si est ipse terminus $y^{IV} \frac{h^4}{2.3.4}$, sive saltem y^{IV}, negativus. Si autem ejusmodi summa est negativa, erit etiam y majus quam $y +$ etc., erit igitur y maximi valoris.

Ex relatione (4) sequitur etiam $y^{IV} \frac{h^4}{2.3.4}$ esse positivum, si est $y < y +$ etc. Ut ergo locum habeat (4), habeas etiam $y^{IV} \frac{h^4}{2.3.4}$ positivum, (sive saltem $y^{IV} > 0$), cum inde sit summa terminorum $y^{IV} \frac{h^4}{2.3.4} \pm$ etc. positiva.

Ut ergo sit functio $(y = fx)$ *maximum, (suppositis* $y' = 0$, $y'' = 0$, $y''' = 0$) *fiat etiam* $y^{IV} < 0$, *et ut eadem functio sit minimum, habeas* $y^{IV} > 0$.

EXEMPLUM.

Reperire maximum, vel minimum functionis

$$y = \frac{1}{4} a^2x^4 - \frac{2}{3} a^3x^3 + \frac{1}{2} a^4x^2 + b.$$

Est $y' = a^2x^3 - 2a^3x^2 + a^4x = (ax - a^2)(ax^2 - a^2x) = 0$, pro $x = a$. Cum sit $y'' = (ax - a^2)(2ax - a^2) + a(ax^2 - a^2x) = 0$, etiam pro $x = a$, sumas oportet

$$y''' = (ax - a^2)\, 2a + (2ax - a^2)\, a + a(2ax - a^2).$$

Cum autem y''' nihilo æquari nequeat substituto pro x valore a, sequitur functionem $y = \frac{1}{4} a^2x^4 -$ etc., esse neque maximi neque minimi valoris.

Ex præcedentibus denuo facile colliges, quod si esset etiam $y^{IV} = 0$, haberes etiam necessum esset $y^{V} = 0$; esset enim sine hac conditione functio $(y = fx)$ neque maximi, neque minimi valoris (quod facile ut antea ex duplici signo termini $y^{V} \frac{h^5}{2.3.4.5}$ demonstratur).

Si reperitur $y^{V} = 0$ (suppositis etiam $y' = 0$, $y'' = 0$, $y''' = 0$, $y^{IV} = 0$) habeas etiam pro casu maximi $y^{VI} < 0$, et pro casu minimi $y^{VI} > 0$; quæ conditiones ex supra demonstratis, (ad casum ubi supponitur $y'' = 0$ relatum habentibus) facillime probes.

Ex omnibus huc-usque dictis igitur sequentia in universum proferri valent.

Terminus (seu coefficiens differentialis) paris ordinis si fit nihilo æqualis, evanescat etiam terminus subsequens imparis ordinis, ut inde colligas $(y = fx)$ esse maximi vel minimi valoris : *minimi* nimirum valoris si positivus est terminus paris ordinis subsequens terminum imparis ordinis evanescentem; *maximi* valoris, si negativus est terminus modo determinatus.

Sint jam $2n$, $2n - 1$ respectivè indices ordinis paris cujuslibet, et imparis, ad coefficientes differentiales functionis $y = fx$ pertinentes sic breviter eadem dicas :

$$y = fx \left\{ \begin{array}{l} \text{maximum} = y^{2n} < 0 \\ \text{minimum} = y^{2n} > 0 \end{array} \right\} y^{2n-1} = 0.$$

Casus in quo supponitur $y'' = \infty$.

Functio $y = fx$ quandoque ejus est naturæ, ut in serie tayloreana in quam est involuta, terminus adsit qui fit infinito æqualis pro valore determinato (si vis a) loco x in ejusmodi terminum misso. Quod fit si series tayloreana vitiosa reperitur, si videlicet in ejusmodi serie terminus adsit cujus h potentiâ gaudeat nec integrâ nec positivâ, sive (quod in universum valet) si unus ex coefficientibus differentialibus denominatore gaudeat evanescente, pro valore determinato loco x in ejusmodi denominatorem misso. Quod elucet ex functione $y = \sqrt{x-b}\,(x-a)$.

Est enim $y' = \frac{x-a}{2\sqrt{(x-b)}} + \sqrt{(x-b)} = \infty$, faciendo $x = b$.

Demonstratur etiam (Fonct. analy. pag. 38, Ed. in-4°, prairial an V) coefficientem differentialem quemlibet ejusdem functionis esse infinito æqualem si reperitur unus ex coefficientibus differentialibus ejusdem functionis, inferioris ordinis, infinito æqualis.

Si itaque supponitur $y'' = \infty$, supponas etiam $y' = 0$, vel $y' = \infty$, vel $y' =$ (valori integro vel fracto, positivo aut negativo). Si est $y' = 0$, vel $y = \infty$, erit etiam functio maximi vel minimi valoris; est enim $y' = 0$ ejusmodi conditionis signum, ut suprà demonstravimus. Facile nunc probes etiam $y' = \infty$ esse ejusmodi conditionis signum, quia est $(y' = \infty)$ signum puncti flexus contrarii (point de rebroussement); supposito autem $y' =$ (valori integro etc.) erit ipsa functio neque maximi neque minimi valoris.

Si est $y' = 0$, vel $y' = \infty$, supposito etiam $y'' = \infty$, videas insuper utrum functio sit maximum, utrum sit minimum; quod facile sequenti modo ex ejusmodi valorum conditione imprimis detegas.

Sit a valor ipsius x, qui pro x in ipso y' substitutus, reddit hunc coefficientem aut ipsi zero aut infinito æqualem. Ponatur ejusmodi valor a loco x in ipsa functione $(y = fx)$, habebis $y = fa$. Transmutetur in eâdem functione $(y = fx)$, x in $a \pm h$, habebis pro fx, functionem $f(a \pm h)$; involvatur hæc ultima functio juxta regulas (Francœur, tom. II, pag. 698, id. 2^e.), habebis sic seriem tayloreanum integram, i. e. termino infinito æquali carentem; videas deniquè utrum sit pro casu maximi $fa > f(a \pm h)$, et pro casu minimi $fa < f(a \pm h)$.

EXEMPLUM:

Reperire $\left\{\begin{matrix}\text{maximum}\\ \text{minimum}\end{matrix}\right\}$ *functionis* $y = b + c\sqrt[3]{(x-a)^2}$.

Est $y' = \frac{2c}{3(x-a)^{\frac{1}{3}}} = \infty$, pro $x = a$. Est ergo ejusmodi functio vel maximi vel minimi valoris. Ponatur jam valor a loco x in functione $y = b +$ etc., habebis $y = b$; est igitur b vel maximum vel minimum. Ponas nunc in eandem functionem pro x, valorem $a \pm h$, erit $y = f(a \pm h) = b + ch^{\frac{2}{3}}$. Est autem $b < b + ch^{\frac{2}{3}}$, est igitur b valor minimus functionis datæ.

De maximo et minimo functionis duabus variabilibus præditæ.

Cum sit $z = f(x, y)$ ejusmodi functio, erunt etiam $z_1 = f(x + h, y + k)$ et ${}'z = f'(x - h, y - k)$ functiones, functionem z immediatè antecedentes et immediate subsequentes; quo fit ut sint $z > {}_{{}'z}^{z_1}$, $z < {}_{{}'z}^{z_1}$ respective conditiones maximi et minimi valoris ipsius z.

Sint jam $k = \alpha h$, $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$, $\frac{d^2z}{dx^2} = \mathrm{P}$, $\frac{d^2z}{dy^2} = \mathrm{Q}$, $\frac{d^2z}{dxdy} = \mathrm{R}$, habebis :

$$z_1 = z + (p + \alpha q)\,h + (\mathrm{P} + 2\alpha\mathrm{R} + \alpha^2\mathrm{Q})\,\frac{h^2}{2} + \text{etc.},$$

$${}'z = z - (p + \alpha q)\,h + (\mathrm{P} + 2\alpha\mathrm{R} + \alpha^2\mathrm{Q})\,\frac{h^2}{2} - \text{etc.}$$

Inde sequitur :

$(p + \alpha q) = 0$, sive $p = 0$, $q = 0$, ut sit z maximi vel minimi valoris.

Ex theoria autem de maximo, minimo functionem unâ variabili præditam spectante, sequitur pro valore maximo ipsius $z = f(x, y)$ (supponitur y constans), P *esse negativum* et pro valore minimo, P *esse positivum.*

Invenies pariter Q *esse negativum*, ut sit $z = f(x, y)$ (x supponitur constans) valor maximus, Q *esse positivum*, ut sit eadem functio minimi valoris capax.

Inde liquet

ut sit $z = f(x, y)$ (neque x neque y supponuntur constantia) maximi valoris habeas;

P *et* Q *ambo negativa*,

et ut sit eadem functio minimi valoris habeas :

P *et* Q *ambo positiva.*

Ut autem sint P et Q uterque positivum, uterque negativum, i. e. unà semper eodem signo prædita, sit factor $\mathrm{P} + 2\alpha\mathrm{R} + \alpha^2\mathrm{Q}$ ejusdem signi, sive + sive —, est enim $\mathrm{P} + \alpha^2\mathrm{Q} > 2\alpha\mathrm{R}$ pro quolibet valore ipsius α.

Si jam essent radices ipsius $\mathrm{P} + 2\alpha\mathrm{R} + \alpha^2\mathrm{Q}$ imaginariæ, haberes :

$P + 2\alpha R + \alpha^2 Q = Q\,[(\alpha + p)^2 + k^2]$. Est autem factor $(\alpha + p)^2 + k^2$ necessario positivus; est igitur $Q\,[(\alpha + p)^2 + k^2]$ ejusdem signi ac Q, est inde $P + 2\alpha R + \alpha^2 Q$ positivum vel negativum prout est Q positivum vel negativum.

Ut ergo $P + 2\alpha R + \alpha^2 Q$ semper gaudeat eodem signo, sint radices ipsius $P + 2\alpha R + \alpha^2 Q$ imaginariæ, sive habeas relationem :

$$PQ - R^2 > 0$$

$$\text{est enim } \alpha = \frac{-R \pm \sqrt{(R^2 - PQ)}}{Q}.$$

Nunc adhuc breviter conditiones modo separatim demonstratas unà sic sequendi schemate ob oculos ponam :

Ut sit

$$z = f(x, y) \left\{ \begin{array}{l} \text{maximum} = \left\{ \begin{array}{l} P \\ Q \end{array} \right. < 0 \\ p = 0,\ q = 0 \left\{ \right. \\ \text{minimum} = \left\{ \begin{array}{l} P \\ Q \end{array} \right. > 0 \end{array} \right\} PQ - R^2 > 0.$$

THESES.

1.

RADICES imaginariæ simili modo ac quantitates negativæ interpretari queunt.

2.

Non datur methodus ad solvendum æquationes hujus formæ $ax^{nx} = b$, quæ est æquatio mere indeterminata.

3.

Demonstrationes ex *absurdo* ductæ, quæ sunt in mathesi, in geometria videlicet maxime copiosæ cum demonstrationibus *directis* commútari queunt.

4.

Lineæ haud congruentes, sed ejusdem directionis parallelæ vocentur.

5.

Conditiones maximum, minimum duarum variabilium spectantes, ab Eulero (calcul. diff. part. II, cap. XI) datæ, haud sufficiunt.

6.

Problemata de maximis et minimis, variationum methodo soluta, resolvi queunt quin notatione utamur ejusmodi methodum spectante.

7.

Medullæ finis in plantis is præcipue esse videtur, ut ejus ope plantarum elasticitas augeatur.

8.

Principium « *omne vivum ex ovo* » non universaliter verum est.

9.

Animalia petrefacta, in nostris regionibus reperta, licet analogiam habeant proximam cum iis quæ zonas calidiores inhabitant, hic tamen olim vixisse verisimillimum puto.

10.

Ex caracteribus externis chimica corporis natura dignosci posse assero.

11.

Libræ romanæ mecanismum, ex ejus centro gravitatis positione diversa explices.

FINIS.