G. Hunnius

Grundbegriffe und Grundgesetze der Mechanik

Bibl. d. ges. Technik 381
FÜNFTE AUFLAGE

Hoffmann Marcel

Grundbegriffe und Grundgesetze der Mechanik

für

Ingenieurschulen

Von

Prof. Dipl.-Ing. Gerhard Hunnius

Fünfte Auflage

Leipzig
Dr. Max Jänecke Verlagsbuchhandlung
1943

Vorwort

Das vorliegende Buch enthält in erweiterter Form den Lehrstoff, welchen ich zur Einführung in die Mechanik an der Höheren Maschinenbauschule in Hagen diktiert habe, und soll ein Lehrbuch sein zur Ergänzung des Unterrichts.

Beim Unterricht in der Mechanik hat es sich nach meiner Erfahrung als zweckmäßig erwiesen, mit den Grundbegriffen, die sich aus der Bewegungslehre ergeben, und den Grundgesetzen zu beginnen, auf die sich die ganze Mechanik aufbaut. Es wird dadurch das Verständnis für die später zu behandelnden einzelnen Lehrgebiete vorbereitet und der Studierende mit den Begriffen rechtzeitig bekannt gemacht, die er im parallel beginnenden Unterricht im Maschinenbau braucht. Im vorliegenden Buche habe ich deshalb alles das zusammengestellt, was für die Einführung in die Mechanik notwendig erscheint und als geschlossenes Ganzes mit „Grundbegriffe und Grundgesetze" bezeichnet.

Da an den höheren Maschinenbauschulen und ähnlichen Lehranstalten auch die Elemente der Differential- und Integralrechnung gleichzeitig gelehrt und später in der Mechanik, soweit nötig, angewandt werden, ist auch in dieser Einführung schon auf sie hingewiesen worden.

Den Hauptwert habe ich auf die Entstehung und Ableitung der Grundbegriffe gelegt, den Text aber so kurz wie möglich abgefaßt und nur durch einfache Beispiele erläutert, damit die Übersicht über den Stoff nicht verloren geht. Zur Übung des Gelernten müssen aber möglichst viele Zahlenbeispiele durchgerechnet werden. Hierzu eignen sich die Mechanik-Aufgaben von Menge-Zimmermann, Verlagsbuchhandlung Dr. Jänecke, Leipzig.

Hagen (Westf.), März 1929.

Hunnius.

Vorwort zur zweiten und dritten Auflage

Das Buch hat sich bewährt, so daß ich mich bei der neuen Auflage auf die Richtigstellung der wenigen mir zur Kenntnis gekommenen Druckfehler beschränken konnte. Anregungen für die Verbesserung des Buches sind mir jederzeit willkommen.

Hagen (Westf.), Juli 1940.

Hunnius.

Vorwort zur vierten Auflage

In der neuen Auflage sind zahlreiche kleine Verbesserungen in der Darstellung der Gleichungen und einige Berichtigungen und Ergänzungen im Text gemacht worden.

Hagen (Westf.), Juni 1942.

Hunnius.

Vorwort zur fünften Auflage

Abgesehen von einigen Berichtigungen und Ergänzungen ist der Text unverändert geblieben.

Hagen (Westf.), 10. Juli 1943.

Hunnius.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Mechanik ist die Lehre von der Bewegung der Körper und von den Ursachen der Bewegung. Eine Änderung des Bewegungszustandes eines Körpers kann nach der Erfahrung stets nur von einem anderen Körper hervorgebracht werden. Diese Einwirkung eines Körpers auf den Bewegungszustand eines anderen nennt man Kraft.

Nimmt man an, daß der Körper starr, d. h. vollkommen fest ist, also von unveränderlicher Gestalt, so kann die Wirkung einer Kraft in einer Größenänderung seiner Geschwindigkeit, einer Richtungsänderung der Bewegung oder auch in beiden Bewegungsänderungen sich äußern. Ein Körper kann aber auch trotz Einwirkung mehrerer Kräfte im Ruhezustande verbleiben oder die schon vorhandene geradlinige Bewegung unverändert beibehalten, wenn die Kräfte in ihrer Gesamtwirkung sich gegenseitig aufheben, also im Gleichgewicht halten. Hiernach teilt man die Mechanik ein in die Lehre vom Gleichgewicht (Statik) und in die Lehre von der Bewegungsänderung (Dynamik).

In Wirklichkeit erfährt jeder feste Körper durch Einwirkung einer Kraft auch eine Formänderung. Soll nur der Bewegungszustand des ganzen Körpers untersucht werden, so kann sie wegen ihrer geringen Größe in den meisten Fällen unberücksichtigt bleiben.

Die Formänderung der festen Körper und ihre innere Widerstandsfähigkeit werden in der Festigkeitslehre besonders behandelt.

Flüssige Körper verhalten sich äußeren Kräften gegenüber wesentlich anders als feste Körper.

Gasförmige Körper ändern ihr Volumen erheblich bei Änderung des Druckes und der Temperatur.

Deshalb teilt man den Lehrstoff der Mechanik nach den physikalischen Eigenschaften der Körper ein und untersucht zunächst ihr statisches und dann ihr dynamisches Verhalten.

Hiernach ergeben sich folgende Gebiete:

Statik und Dynamik fester Körper.
Statik und Dynamik flüssiger Körper.
Statik und Dynamik gasförmiger Körper (Wärmemechanik).
Festigkeitslehre.

Für die Einführung in die Mechanik ist es zweckmäßig, zunächst die Grundbegriffe und Grundgesetze kennenzulernen, auf welche sich die einzelnen Lehrgebiete aufbauen.

Grundbegriffe und Grundgesetze

A. Geschwindigkeit und Beschleunigung

Die grundlegenden Begriffe Geschwindigkeit und Beschleunigung ergeben sich bei der Untersuchung der verschiedenen Arten der Bewegung eines Körpers aus den Beziehungen, welche zwischen dem zurückgelegten Wege und der dazu verbrauchten Zeit bestehen. Man unterscheidet gleichförmige und veränderliche Bewegung. Beide können entweder geradlinig oder krummlinig sein.

Für die Untersuchung der Bewegung eines Körpers soll im folgenden zunächst seine räumliche Ausdehnung unbeachtet bleiben. Man denkt sich den Körper zu einem Punkte zusammengeschrumpft, aber mit den ihm eigenen physikalischen Eigenschaften (seiner Masse) behaftet. Ein solcher punktförmiger Körper wird mit Massenpunkt bezeichnet. Die im folgenden abgeleiteten Bewegungsgesetze behalten aber auch für den räumlichen Körper ihre volle Gültigkeit, da jeder Körper, wie später in der Statik nachgewiesen wird, einen Punkt, den Massenmittelpunkt oder Schwerpunkt, besitzt, der sich genau ebenso bewegt wie ein Massenpunkt. Die Fälle, in denen die räumliche Ausdehnung berücksichtigt werden muß, z. B. bei fortschreitender Bewegung und gleichzeitiger Drehbewegung, werden später in der Dynamik besonders behandelt.

I. Gleichförmige Bewegung

1. Gleichförmige geradlinige Bewegung

Ein Körper möge sich auf einer geraden Bahn fortbewegen. Die Bahnlinie sei in eine beliebige Anzahl gleichlanger Abschnitte eingeteilt. Legt der Körper jeden Abschnitt in der gleichen Zeit zurück, so ist seine Bewegung überall gleichförmig.

Unter gleichförmiger Bewegung versteht man eine solche, bei welcher gleich lange Teile des Weges in gleichen Zeiten zurückgelegt werden.

Unter Geschwindigkeit einer gleichförmigen Bewegung versteht man die in der Zeiteinheit zurückgelegte Weglänge.

In der Mechanik nimmt man in der Regel als Maßeinheit für die Weglänge das Meter (m) und für die Zeit die Sekunde (s). Beträgt demnach der zurückgelegte Weg s Meter und die verflossene Zeit t Sekunden, so erhält man die Geschwindigkeit v, indem man den Weg s durch die Zeit t dividiert.

$$v = \frac{s}{t}$$

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}}.$$

Die Maßeinheit für die Geschwindigkeit ist eine zusammengesetzte Einheit. Mit den in Klammern angegebenen Maßeinheiten für Weg und Zeit erhält man $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ oder m/s, gesprochen: Meter je Sekunde.

In der Technik verwendet man oft, um möglichst einfache Zahlenwerte zu erhalten, für die Längeneinheit auch das Kilometer (km), das Zentimeter (cm) und das Millimeter (mm) und für die Zeiteinheit auch die Stunde (h) und die Minute (min). In der Mechanik sind die Grundeinheiten stets das Meter und die Sekunde.

Die vorstehend in Klammern angegebenen Einheitszeichen für die Maßeinheiten sind durch Dinorm 1301 festgelegt. Es sind die Anfangsbuchstaben der Maßeinheiten, zum Teil auch ihrer lateinischen Übersetzungen: Weg s (spatium), Zeit t (tempus), Stunde h (hora), Geschwindigkeit v (velocitas), Anzahl n (numerus).

Nach Dinorm 1338 werden die Buchstaben für die Formelzeichen schräg, für die Einheitszeichen senkrechtstehend gedruckt.

Beispiel 1: Ein Fußgänger legt einen Weg von 6 km in einer Stunde zurück. Wie groß ist seine (mittlere) Geschwindigkeit?

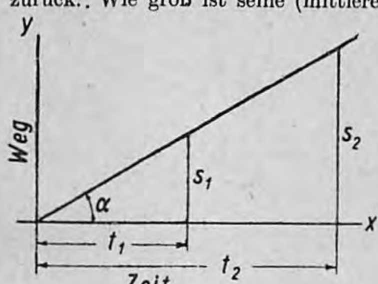

Abb. 1. Weg als Funktion der Zeit für eine gleichförmige Bewegung.

$$v = \frac{s}{t} = \frac{6000}{3600} = 1{,}67 \text{ m/s}.$$

Bei der gleichförmigen Bewegung werden in gleichen Zeiten gleichlange Wege zurückgelegt. Ist daher nach der Zeit t_1 der Weg s_1 zurückgelegt, so wird nach einer doppelt so großen Zeit t_2 auch ein doppelt so großer Weg s_2 zurückgelegt sein. Der zurückgelegte Weg wächst also direkt proportional der Zeit.

Trägt man in einem rechtwinkligen Achsenkreuz wie in Abb. 1 auf der X-Achse die einzelnen Zeitabschnitte und senkrecht dazu in Richtung der Y-Achse die zurückgelegten Weglängen in den entsprechenden Zeitpunkten in geeigneten Maßstäben auf (z. B. für die Zeit 1 s = 10 mm und für den Weg 1 m = 10 mm) und verbindet die Endpunkte der aufgetragenen Wegstrecken miteinander, so müssen diese bei gleichförmiger Bewegung auf einer nach rechts ansteigenden Geraden liegen. Diese Linie heißt allgemein **Weg-Zeit-Linie** (im vorliegenden Falle eine Gerade). Ihre Abbildung stellt den Weg als Funktion der Zeit dar. Bezeichnet man den Neigungswinkel dieser Linie zur X-Achse mit α, so ist

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{s_1}{t_1} = \frac{s_2}{t_2} = v.$$

Die Geschwindigkeit erscheint demnach in der Abbildung als das Ansteigungsverhältnis der Weg-Zeit-Linie, welches gleich dem Tangenswert des Neigungswinkels ist.

Die Größe des in der Abbildung erscheinenden Neigungswinkels hängt natürlich von den Maßstäben ab, mit welchen s und t aufgetragen sind. Der abgebildete Winkel stimmt nur dann mit dem aus der Gleichung $\operatorname{tg}\alpha = \frac{s}{t}$ sich ergebenden überein, wenn s und t mit gleichem Maßstabe aufgetragen sind, z. B. für den Weg 1 m = 10 mm und für die Zeit 1 s = 10 mm, wenn also das Maßstabverhältnis = 1 ist.

In gleicher Weise läßt sich auch die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit abbilden. Für gleichförmige Bewegung, bei welcher die Geschwindigkeit unveränderlich bleibt, ergibt sich als **Geschwindigkeits-Zeitlinie** eine zur X-Achse parallele Gerade (Abb. 2).

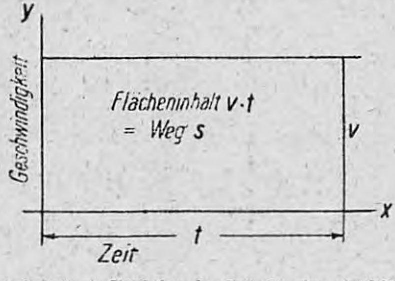

Abb. 2. Geschwindigkeit als Funktion der Zeit für eine gleichförmige Bewegung.

Es war

$$v = \frac{s}{t} \text{ oder } \quad s = v \cdot t.$$

Der zurückgelegte **Weg** s erscheint demnach in der Abbildung als der **Flächeninhalt** eines Rechtecks von der Grundlinie t und der Höhe v.

2. Gleichförmige Drehbewegung

Bewegt sich ein Körper gleichförmig auf einer kreisförmigen Bahn (Abb. 3) und macht er n Umläufe in der Minute, so legt er bei einem Umlaufe einen Weg von $2\pi r$ Meter zurück, bei n Umläufen in der Minute einen Weg von $2\pi r \cdot n$ Meter. Der je Sekunde zurückgelegte Weg, d. h. die Umfangsgeschwindigkeit ist demnach

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r \cdot n}{60}$$

$$\text{Umfangsgeschwindigkeit } \boldsymbol{v = \frac{2\pi r n}{60} = \frac{\pi d n}{60}}.$$

Die Drehzahl wird in der Technik stets auf die Minute bezogen (U/min).

Abb. 3 soll jetzt eine kreisförmige Scheibe darstellen, welche sich um ihre Mittelachse gleichförmig dreht. Dann bewegt sich jeder Punkt

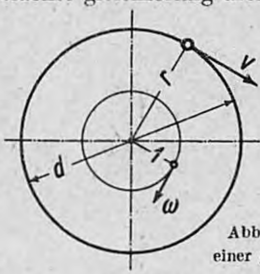

Abb. 3. Umfangsgeschwindigkeit einer gleichförmigen Drehbewegung.

der Scheibe auf einem seinem Abstande vom Mittelpunkte entsprechenden Kreise. Seine Umfangsgeschwindigkeit ist dabei um so größer, je weiter der Punkt von der Drehachse entfernt ist. Alle Punkte der Scheibe machen aber die gleiche Anzahl von Umläufen in der Minute, sie bewegen sich also bei gleichförmiger Bewegung alle in derselben Zeit um denselben Drehwinkel weiter. Um auch ein Maß für die Geschwindigkeit der Drehbewegung zu haben, legt man die Umfangsgeschwindigkeit des Punktes zugrunde, welcher den Abstand $r = 1$ von der Drehachse besitzt und bezeichnet sie mit Winkelgeschwindigkeit.

$$\text{Winkelgeschwindigkeit } \omega = \frac{2\pi 1 n}{60} = \frac{2\pi n}{60}.$$

Als Maßeinheit für die Winkelgeschwindigkeit ergibt sich $1/s$.

Der Begriff Winkelgeschwindigkeit läßt sich noch besser in folgender Weise ableiten:

Bei einer Umdrehung entspricht dem Drehwinkel von 360^0 in Gradmaß ein Bogenwinkel 2π in Bogenmaß (gleich dem Umfange eines Kreises vom Halbmesser $r = 1$). Der Drehwinkel bei n Umdrehungen in der Minute ist dann $2\pi \cdot n$. Daher ist der Drehwinkel, um welchen sich die Scheibe in der Sekunde weiterdreht,

$$\omega = \frac{2\pi n}{60}.$$

Unter Winkelgeschwindigkeit versteht man den Drehwinkel in der Sekunde, gemessen in Bogenmaß (oder auch die Umfangsgeschwindigkeit im Abstande $r = 1$ von der Drehachse).

Mit Hilfe des Begriffes Winkelgeschwindigkeit läßt sich noch ein zweiter Ausdruck für die Umfangsgeschwindigkeit aufstellen. Es war

$$v = \frac{2\pi r n}{60} = r \cdot \frac{2\pi n}{60}.$$

$$\boldsymbol{v = r \cdot \omega}.$$

Umfangesgeschwindigkeit = Radius mal Winkelgschwindigkeit.

Beispiel 2. In einem Bergwerk soll der Förderkorb wie in Abb. 4 durch Aufwickeln des Förderseils auf eine zylindrische Windetrommel gehoben werden. Hubhöhe $s = 600$ m. Hubgeschwindigkeit $v = 15$ m/s. Windetrommeldurchmesser $D = 6$ m. Wie groß ist

a) die Hubzeit?
b) die Drehzahl der Windetrommel in der Minute?
c) die Winkelgeschwindigkeit der Windetrommel?

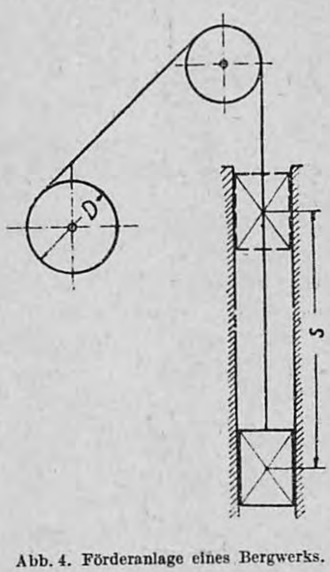

Abb. 4. Förderanlage eines Bergwerks.

Zu a). Es ist für gleichförmige Hubbewegung

$$v = \frac{s}{t} \quad \text{oder} \quad t = \frac{s}{v} = \frac{600}{15} = 40 \text{ s}.$$

Zu b). Die Umfangsgeschwindigkeit der Trommel ist gleich der Hubgeschwindigkeit

$$v = \frac{\pi D n}{60} \quad \text{oder} \quad n = \frac{v \cdot 60}{\pi D} = \frac{15 \cdot 60}{3{,}14 \cdot 6} = 47{,}8 \text{ U/min}.$$

Zu c). Die Winkelgeschwindigkeit ist

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 47{,}8}{60} = 5 \text{ 1/s}.$$

II. Veränderliche Bewegung

Legt ein Körper in jeder einzelnen Sekunde verschieden lange Wege zurück, so ist seine Bewegung veränderlich.

1. Gleichförmig beschleunigte Bewegung

Nimmt die Geschwindigkeit eines Körpers in jeder Sekunde um den gleichen Betrag zu, so heißt seine Bewegung gleichförmig beschleunigt. Die Geschwindigkeitszunahme je Sekunde bezeichnet man mit Beschleunigung.

Ein Körper möge zu Beginn der betrachteten Bewegung die Anfangsgeschwindigkeit v_0 besitzen und seine Geschwindigkeit in jeder Sekunde um b Meter zunehmen. Nach der Zeit t möge seine Geschwindigkeit auf den Wert v angewachsen sein. Dann ist seine Geschwindigkeitszunahme je Sekunde, also seine Beschleunigung

$$\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0}{\boldsymbol{t}}.$$

$$\text{Beschleunigung} = \frac{\text{Geschwindigkeitszunahme}}{\text{Zeit}}.$$

Sie wird gemessen in $\frac{\mathrm{m/s}}{\mathrm{s}} = \mathrm{m/s^2}$.

Aus vorstehender Gleichung ergibt sich:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{b}\,\boldsymbol{t}.$$

Die Geschwindigkeit wächst also direkt proportional der Zeit, da die Beschleunigung b bei gleichförmig beschleunigter Bewegung unveränderlich ist.

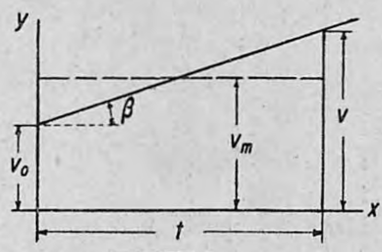

Abb. 5. Geschwindigkeitszunahme als Funktion der Zeit für eine gleichförmig beschleunigte Bewegung.

Trägt man die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit auf (Abb. 5), so erhält man als Geschwindigkeits-Zeit-Linie eine nach rechts ansteigende

Gerade. Die Beschleunigung erscheint als das Ansteigungsverhältnis der Geschwindigkeitslinie. Denn es ist

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v - v_0}{t} = b.$$

Die zurückgelegte Weglänge s muß auch hier ebenso wie für gleichförmige Bewegung (Abb. 2) gleich dem Flächeninhalte der Fläche zwischen der Geschwindigkeitslinie und der X-Achse sein (Trapez).

$$s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t.$$

Setzt man $\frac{v_0 + v}{2} = v_m$ = mittlere Geschwindigkeit, so erhält man

$$s = v_m \cdot t$$

Weg = mittlere Geschwindigkeit mal Zeit.

2. Gleichförmig verzögerte Bewegung

Die Abb. 6 der Geschwindigkeits-Zeit-Linie einer gleichförmig verzögerten Bewegung ergibt ohne weiteres eine nach rechts abfallende Gerade. Da die Endgeschwindigkeit v kleiner ist als die Anfangsgeschwindigkeit v_0, wird die Beschleunigung

$$b = \frac{v - v_0}{t}$$

negativ.

Abb. 6. Geschwindigkeitsabnahme als Funktion der Zeit für eine gleichförmig verzögerte Bewegung.

Die negative Beschleunigung nennt man auch Verzögerung.

Als zurückgelegte Weglänge erhält man ebenso wie oben als Flächeninhalt des Trapezes

$$s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t.$$

Aus der Gleichung für die Beschleunigung ergibt sich

$$v = v_0 + bt \quad \text{und} \quad t = \frac{v - v_0}{b}.$$

Setzt man diese Werte nacheinander in die Gleichung für s ein, so erhält man den Weg

$$s = v_0 t + \frac{b t^2}{2} \quad \text{als Funktion der Zeit}$$

und $$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2 b} \quad \text{als Funktion der Geschwindigkeit.}$$

3. Beschleunigte Drehbewegung

Unter Winkelbeschleunigung einer gleichförmig beschleunigten Drehbewegung versteht man die Zunahme der Winkelgeschwindigkeit in der Sekunde.

Mit den entsprechenden Bezeichnungen ergibt sich ohne weiteres

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t}$$

$$\text{Winkelbeschleunigung} = \frac{\text{Zunahme der Winkelgeschwindigkeit}}{\text{Zeit}}.$$

Ihr Maß ist $1/s^2$.

Multipliziert man vorstehende Gleichung mit dem Halbmesser r, so erhält man

$$r\varepsilon = \frac{r\omega - r\omega_0}{t} = \frac{v - v_0}{t}.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung ist die Zunahme der Umfangsgeschwindigkeit je Sekunde, d. h. die Umfangsbeschleunigung

$$b_u = r \cdot \varepsilon$$

Umfangsbeschleunigung = Radius mal Winkelbeschleunigung.

Beispiel 3. Ein Straßenbahnwagen durchfährt eine Strecke von $s = 200$ m Länge. Die ganze Fahrbewegung besteht aus drei Teilen: dem Anfahren mit (annähernd) gleichbleibender Beschleunigung, der gleichförmigen Fahrbewegung auf freier Strecke mit unveränderlicher Geschwindigkeit und der (annähernd) gleichförmig verzögerten Bewegung während des Bremsens bis zum Anhalten. Abb. 7 zeigt die Geschwindigkeitsänderung als Funktion der Zeit.

Die Anfahrzeit betrage $t_1 = 15$ s, die Geschwindigkeit auf freier Strecke $v = 6$ m/s und der Bremsweg $s_3 = 30$ m. Wie groß ist die Beschleunigung b_1 beim Anfahren, der Anfahrweg s_1, die Bremszeit t_3, die Verzögerung b_3 während des Bremsens, die Fahrzeit t_2 auf freier Strecke und die ganze Fahrzeit t?

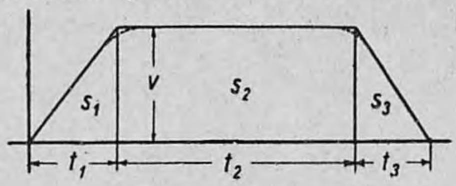

Abb. 7. Geschwindigkeitsdiagramm eines Straßenbahnwagens.

Die Beschleunigung beim Anfahren ist

$$b_1 = \frac{v - 0}{t_1} = \frac{6}{15} = 0{,}4 \text{ m/s}^2.$$

Der Anfahrweg

$$s_1 = \frac{0 + v}{2} \cdot t_1 = \frac{6}{2} \cdot 15 = 45 \text{ m}.$$

Die Bremszeit ergibt sich aus

$$s_3 = \frac{v + 0}{2} \cdot t_3 \quad \text{oder} \quad t_3 = \frac{2 s_3}{v} = \frac{2 \cdot 30}{6} = 10 \text{ s}.$$

Die Verzögerung

$$b_3 = \frac{v - 0}{t_3} = \frac{6}{10} = 0{,}6 \text{ m/s}^2.$$

Die freie Strecke hat eine Länge

$$s_2 = s - (s_1 + s_3) = 200 - (45 + 30) = 125 \text{ m}.$$

Die Fahrzeit auf freier Strecke ergibt sich aus

$$v = \frac{s_2}{t_2} \quad \text{oder} \quad t_2 = \frac{s_2}{v} = \frac{125}{6} = 20{,}83 \text{ s}.$$

Die ganze Fahrzeit beträgt

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = 15 + 20{,}83 + 10 = 45{,}83 \text{ s}.$$

Die Geschwindigkeitsänderung erfolgt beim Übergang von der beschleunigten Bewegung in die gleichförmige und umgekehrt in Wirklichkeit nicht augenblicklich, sondern allmählich, wie in Abb. 7 punktiert angedeutet ist.

Beispiel 4. Ein Elektromotor läuft gleichförmig beschleunigt an und erreicht nach 3 Sekunden eine Drehzahl von 800 U/min. Wie groß ist seine Winkelbeschleunigung während des Anlaufens?

Die Winkelgeschwindigkeit ist $\omega = \frac{2 \pi n}{60} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 800}{60} = 83{,}73$ 1/s.

Die Winkelbeschleunigung $\varepsilon = \frac{\omega - 0}{t} = \frac{83{,}73}{3} = 27{,}91$ 1/s².

4. Freie Fallbewegung

Im luftleeren Raume führt jeder frei fallende Körper infolge der Anziehungskraft der Erde eine gleichförmig beschleunigte senkrechte Abwärtsbewegung aus. Nach Messungen beträgt in unseren Breitengraden die

Fallbeschleunigung $\boldsymbol{g} = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$.

Sie ändert sich mit dem Abstande vom Erdmittelpunkte. An den Polen ist sie etwas größer (9,83 in Meereshöhe), am Äquator etwas kleiner (9,78).

Es gelten demnach dieselben Gleichungen, welche für gleichförmig beschleunigte Bewegung abgeleitet wurden. Setzt man in diesen für die Beschleunigung b die Fallbeschleunigung g und für den Weg s die Fallhöhe h ein, so erhält man

$$g = \frac{v - v_0}{t} \qquad h = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t.$$

Ist die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$, so ist

$$g = \frac{v}{t} \quad \text{oder} \quad v = gt \quad \text{oder} \quad t = \frac{v}{g}$$

$$h = \frac{v}{2} \cdot t.$$

Setzt man den Wert $v = gt$ in die zweite Gleichung ein, so erhält man die Fallhöhe

$$\boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{g\,t^2}}{\boldsymbol{2}} \quad \text{als Funktion der Zeit.}$$

Setzt man den Wert $t = \frac{v}{g}$ in die zweite Gleichung ein, so erhält die Fallhöhe

$$\boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{2g}} \quad \text{als Funktion der Geschwindigkeit}$$

und hieraus die

Fallgeschwindigkeit $\boldsymbol{v} = \sqrt{\boldsymbol{2gh}}$.

Wird ein Körper mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht in die Höhe geworfen, so führt er eine gleichförmig verzögerte Bewegung aus mit der negativen Beschleunigung bzw. Verzögerung $\boldsymbol{g}$. Er steigt so hoch, bis seine Endgeschwindigkeit $v = 0$ ist. Es ist dann

die Beschleunigung $\quad g = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0 - v_0}{t} = -\frac{v_0}{t}$

oder die Verzögerung $g = \frac{v_0}{t}$.

Die Steighöhe ist $h = \frac{v_0}{2} \cdot t$.

Vorstehende Gleichungen gelten genau nur für Fallbewegungen im luftleeren Raume. In Wirklichkeit übt der Luftwiderstand einen hemmenden Einfluß auf die Bewegung aus. Er wächst nach Versuchen direkt proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit und proportional der Dichte der Luft und hängt außerdem von der Form des Körpers ab.

Ist die Geschwindigkeit nicht erheblich und die Wichte des Körpers groß, so ist der Luftwiderstand so gering, daß er vernachlässigt werden kann.

Beispiel 5. Ein Körper fällt aus einer Höhe von 30 m herab. Mit welcher Geschwindigkeit kommt er unten an? Wie groß ist seine Fallzeit?

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 30} = \sqrt{588{,}6} = 24{,}27 \text{ m/s}.$$

$$g = \frac{v - 0}{t} \quad \text{oder} \quad t = \frac{v}{g} = \frac{24{,}27}{9{,}81} \doteq 2{,}48 \text{ s}.$$

5. Ungleichförmig veränderliche Bewegung

In Abb. 1 wurde gezeigt, daß bei gleichförmiger Bewegung die Endpunkte der zurückgelegten Wegstrecken, als Funktion der Zeit aufgetragen, auf einer nach rechts ansteigenden Geraden liegen. Ist nun die Bewegung ungleichförmig, z. B. so, daß die Geschwindigkeit allmählich zunimmt, so wachsen die Wege schneller als die dazu verbrauchten Zeiten. Die Weg-Zeit-Linie wird eine nach oben gekrümmte

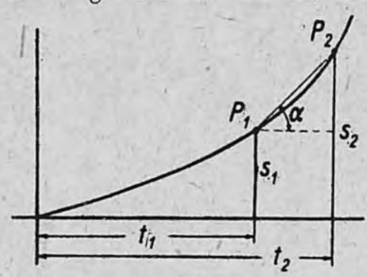

Abb. 8. Weg als Funktion der Zeit einer ungleichförmigen Bewegung.

Linie (Abb. 8). Die Geschwindigkeit ist dann innerhalb des Bereiches der Kurve von P_1 bis P_2 annähernd

$$v \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Δs ist die abgekürzte Schreibweise für eine kleine Wegzunahme und Δt für die entsprechende kleine Zeitzunahme. Das Ergebnis wird um so genauer, je geringer der Abstand von P_1 bis P_2 ist, je weniger also die Kurve P_1P_2 von der Sehne P_1P_2 abweicht. Der Fehler wird verschwindend klein, wenn P_1 und P_2 unendlich nahe beieinander liegen, d. h. wenn die Sehne in die Tangente übergeht. Dann wird die Wegzunahme $s_2 - s_1 = \Delta s = ds =$ unendlich klein (verschwindend klein) und ebenso die Zeitzunahme $t_2 - t_1 = \Delta t = dt =$ unendlich klein.

ds und dt sind die Bezeichnungen für die unendlich kleinen Größen.

Das Verhältnis $\frac{ds}{dt}$ dieser verschwindend kleinen Größen ist dann die Geschwindigkeit im Zeitpunkte t.

Bei beliebig aber stetig veränderlicher Bewegung ist also die Geschwindigkeit in einem bestimmten Augenblicke

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{ds}}{\boldsymbol{dt}} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{unendlich kleine Wegzunahme}}{\text{unendlich kleine Zeitzunahme}}.$$

Auf der Tatsache, daß das Verhältnis zweier unendlich kleiner Größen einen endlichen Wert haben kann, beruht die Differentialrechnung.

Die Ermittlung von $v = \frac{ds}{dt}$ geschieht analytisch (rechnerisch) nach den Regeln der Differentialrechnung. Dazu muß der Weg s als Funktion der Zeit t in einer Gleichung gegeben sein.

Die Geschwindigkeits-Zeit-Linie kann aber auch zeichnerisch aus der gegebenen Weg-Zeit-Linie in folgender Weise ermittelt werden:

An der gegebenen Weg-Zeit-Linie (Abb. 9) mißt man die Neigungswinkel α der Tangenten zur X-Achse in beliebig vielen Punkten mit dem Transporteur (in der Abbildung ist der Neigungswinkel nur für einen Punkt gezeichnet). Ist dabei der Weg s in dem Maßstabe 1 m $= y$ mm und die Zeit t in dem Maßstabe 1 s $= x$ mm aufgetragen, so ist

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{ds \cdot y}{dt \cdot x} \quad \text{oder} \quad v = \frac{ds}{dt} = \frac{x}{y} \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Die Tangenswerte der Neigungswinkel α entnimmt man einer trigonometrischen Tabelle.

Die ermittelten Werte von v trägt man in einem besonderen (oder auch in demselben) Achsenkreuze (Abb. 9) in geeignetem Maßstabe

($1\ \mathrm{m/s} = y'\ \mathrm{mm}$) über der gleichen Zeitachse auf. Dann stellen die Endpunkte der aufgetragenen Geschwindigkeitsstrecken die gesuchte Geschwindigkeitslinie dar.

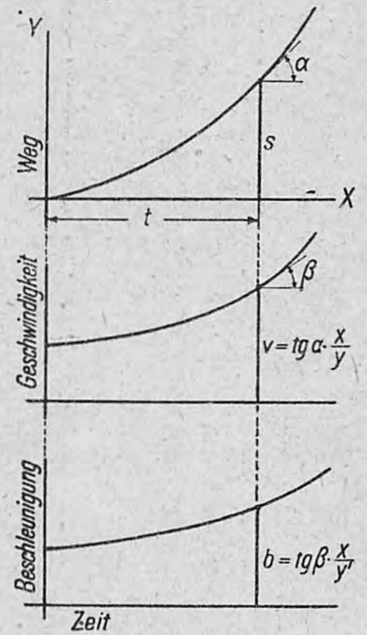

Abb. 9. Beziehungen zwischen Weg-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungs-Diagramm einer beliebig veränderlichen Bewegung.
Maßstab für die Zeit t: $1\ \mathrm{s} = x\ \mathrm{mm}$
für den Weg s: $1\ \mathrm{m} = y\ \mathrm{mm}$
für die Geschwindigkeit v: $1\ \mathrm{m/s} = y'\ \mathrm{mm}$

Aus dieser läßt sich nach demselben Verfahren auch die Beschleunigungslinie ableiten (Abb. 9). Es ist

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{dv \cdot y'}{dt \cdot x}$$

$$b = \frac{dv}{dt} = \frac{x}{y'} \cdot \operatorname{tg}\beta .$$

Rechnerisch erhält man nach den Regeln der Differentialrechnung aus der Gleichung

$$s = f(t) = \text{Funktion von } t$$

durch Differentiation

$$v = f'(t) = \frac{ds}{dt}$$

und durch nochmalige Differentiation

$$b = f''(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} .$$

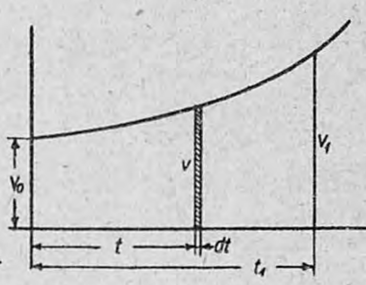

Abb. 10. Geschwindigkeitslinie einer beliebig veränderlichen Bewegung.

In der Darstellung der Geschwindigkeitslinie (Abb. 10) ist der Flächeninhalt der Fläche unter dieser Linie gleich der zurückgelegten Weglänge. Aus der Geschwindigkeitslinie kann demnach auch umgekehrt die zurückgelegte Weglänge ermittelt werden, indem man den Flächeninhalt unter der Geschwindigkeitslinie in mehrere Trapeze zerlegt und ihre Inhalte ausrechnet (unter Berücksichtigung der Maßstäbe).

Für die analytische Berechnung kann man sich die Fläche in unendlich viele unendlich schmale Streifen parallel zur Y-Achse zerlegt denken, deren Grundlinien überall gleich dt und deren Höhen gleich dem zugehörigen Werte v sind. Dann ist der ganze Flächeninhalt

$$s = \int_{t=0}^{t=t_1} v\,dt = \text{Summe der unendlich schmalen Rechtecke}$$

von $t=0$ bis $t=t_1$. Hierzu muß v als Funktion von t in einer Gleichung gegeben sein. Die Ausrechnung erfolgt nach den Regeln der Integralrechnung.

Das Summenzeichen (Integralzeichen) $\int$ benutzt man in der Integralrechnung für die Summe von unendlich vielen Summanden.

Für ungleichförmige Drehbewegung ergibt sich entsprechend als augenblickliche Winkelgeschwindigkeit in einem bestimmten Zeitpunkte t

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}.$$

Hierzu muß der Drehwinkel α, in Bogenmaß gemessen, als Funktion von t gegeben sein.

Die Winkelbeschleunigung im Zeitpunkte t ist

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

III. Zusammengesetzte Bewegung

Wirken auf einen Körper gleichzeitig zwei Bewegungsursachen, so heißt seine Bewegung eine zusammengesetzte.

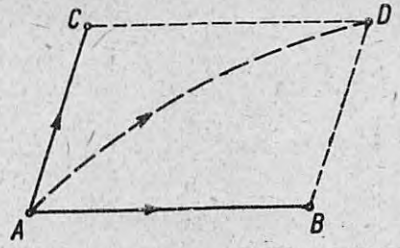

Abb. 11. Zusammengesetzte Bewegung, aus zwei beliebigen geradlinigen Seitenbewegungen entstanden.

Bewegt sich z. B. ein Körper wie in Abb. 11 auf einer Geraden von A nach B und wird gleichzeitig diese Gerade AB parallel zu sich selbst in der Richtung AC nach CD verschoben, dann gelangt der Körper nach D. Wie die wirkliche (resultierende) Bahnlinie AD gestaltet ist, hängt von der Art der beiden Einzelbewegungen (Seitenbewegungen) ab.

1. Parallelogramm der Bewegungen

Sind die Seitenbewegungen gleichförmig und geradlinig, so ist auch die resultierende Bewegung gleichförmig und geradlinig und erfolgt auf der Diagonalen eines Parallelogramms, dessen Seiten die Bahnlinien der Seitenbewegungen sind. (Beweis: Abb. 12.)

Bezeichnet man die Geschwindigkeiten der beiden Seitenbewegungen mit u und w, so sind die zurückgelegten Weglängen, da allgemein

$v = \frac{s}{t}$ oder $s = vt$ ist,

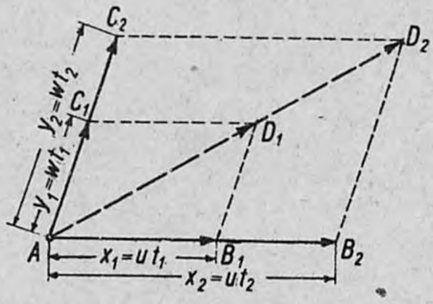

Abb. 12. Zusammengesetzte Bewegung, aus zwei gleichförmigen geradlinigen Seitenbewegungen entstanden.

nach t_1 Sekunden:	nach t_2 Sekunden:
$x_1 = u\,t_1$	$x_2 = u\,t_2$
$y_1 = w\,t_1$	$y_2 = w\,t_2$.

Durch Division der Gleichungen erhält man

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{u}{w} \qquad \frac{x_2}{y_2} = \frac{u}{w}.$$

Folglich ist

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}.$$

Diese Proportion ist nur möglich, wenn die Punkte A, D_1 und D_2 auf einer Geraden, der Diagonalen des Parallelogramms, liegen.

2. Parallelogramm der Geschwindigkeiten

Beträgt die in Abb. 12 beliebig groß gewählte Zeit t_2 eine Sekunde, so stellen die in einer Sekunde zurückgelegten Seitenwege x_2 und y_2 auch die Seitengeschwindigkeiten dar. Die Größe und Richtung der resultierenden Geschwindigkeit wird demnach auch durch die Diagonale des mit den Seitengeschwindigkeiten gezeichneten Parallelogramms dargestellt.

Für die Aufzeichnung der Seitengeschwindigkeiten muß ein geeigneter Maßstab gewählt werden, z. B. 1 m/s = 1 cm. Die Längen der gezeichneten Strecken (Abb. 13) stellen dann die Größen der Geschwindigkeiten und die am Ende hinzugefügten Pfeile die Richtung dar. Ist der Winkel α zwischen u und w in Grad gegeben, so ergibt sich auch durch Rechnung nach dem Kosinussatze:

In jedem Dreiecke ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten, vermindert um das doppelte Produkt dieser Seiten, multipliziert mit dem Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

$$v^2 = u^2 + w^2 - 2\,u\,w \cos(180 - \alpha).$$

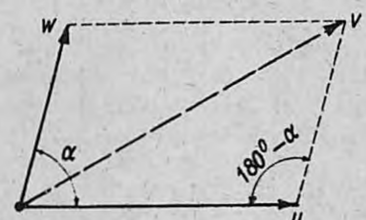

Abb. 13. Zusammensetzung zweier Geschwindigkeiten durch Parallelogrammkonstruktion.

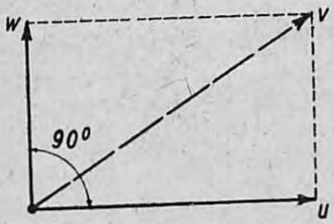

Abb. 14. Zusammensetzung zweier rechtwinklig zueinander gerichteten Geschwindigkeiten.

Ist $\alpha = 90^0$ (Abb. 14), so ist das Parallelogramm ein Rechteck und nach dem Lehrsatz des Pythagoras

$$v^2 = u^2 + w^2$$

$$v = \sqrt{u^2 + w^2}.$$

Ist $\alpha = 0$, d. h. haben die Einzelgeschwindigkeiten gleiche Richtung, so ist die resultierende Geschwindigkeit gleich ihrer Summe

$$v = u + w.$$

Ist $\alpha = 180^0$, d. h. haben die Einzelgeschwindigkeiten entgegengesetzte Richtung, so ist die resultierende Geschwindigkeit gleich ihrer Differenz

$$v = u - w \quad \text{bzw.} \quad = w - u.$$

Auf Grund des Parallelogrammgesetzes läßt sich auch umgekehrt jede Geschwindigkeit in zwei Seitengeschwindigkeiten oder Komponenten zerlegen. Dann müssen aber die Richtungslinien der Komponenten gegeben sein. Soll z. B. wie in Abb. 15 die Geschwindigkeit v in zwei senkrecht zueinander gerichtete Komponenten zerlegt werden, so ist

$$u = v \cos \beta \text{ und } w = v \sin \beta.$$

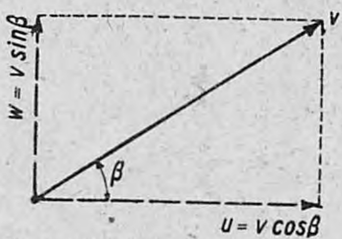

Abb. 15. Zerlegung einer Geschwindigkeit in zwei rechtwinklig zueinander gerichtete Seitengeschwindigkeiten.

3. Parallelogramm der Beschleunigungen

Führt ein Körper gleichzeitig zwei gleichförmig beschleunigte Seitenbewegungen aus mit den Beschleunigungen b_1 und b_2 (Abb. 16), so ist die resultierende Beschleunigung b gleich der Diagonalen des aus den Seitenbeschleunigungen sich ergebenden Parallelogramms.

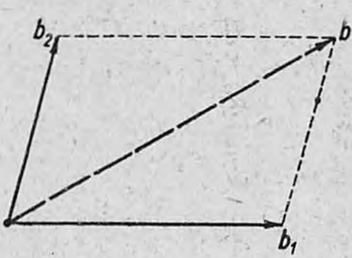

Abb. 16.
Parallelogramm der Beschleunigungen.

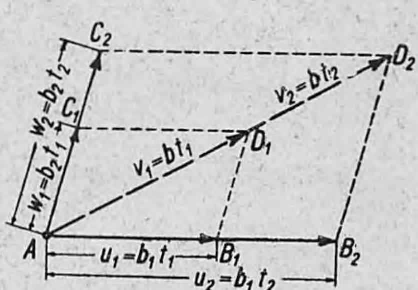

Abb. 17. Parallelogramm der Geschwindigkeit zweier gleichförmig beschleunigter Seitenbewegungen.

Beweis: Ein Körper habe wie in Abb. 17 zwei gleichförmig beschleunigte Seitenbewegungen in der Richtung AB und AC, welche beide mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ beginnen. Die Beschleunigungen seien b_1 und b_2. Dann sind die Geschwindigkeiten, da allgemein $v = v_0 + b\,t$ ist,

nach t_1 Sekunden: nach t_2 Sekunden:

$$u_1 = b_1\,t_1 \qquad u_2 = b_1\,t_2$$

$$w_1 = b_2\,t_1 \qquad w_2 = b_2\,t_2.$$

Durch Division der Gleichungen erhält man

$$\frac{u_1}{w_1} = \frac{b_1}{b_2} \qquad \frac{u_2}{w_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$

Folglich

$$\frac{u_1}{w_1} = \frac{u_2}{w_2}.$$

Diese Proportion ist nur möglich, wenn die Punkte A, D_1 und D_2 auf einer Geraden, der Diagonalen des Parallelogramms, liegen. Beträgt die beliebig gewählte Zeit $t_2 = 1$ s, so stellen die Seiten des Parallelogramms auch die Seitenbeschleunigungen dar und die Diagonale die resultierende Beschleunigung.

Beispiel 6. Ein Boot fährt über einen Fluß mit einer Geschwindigkeit $w = 4$ m/s, die rechtwinklig zum Strom gerichtet ist (Abb. 18). Die Ge-

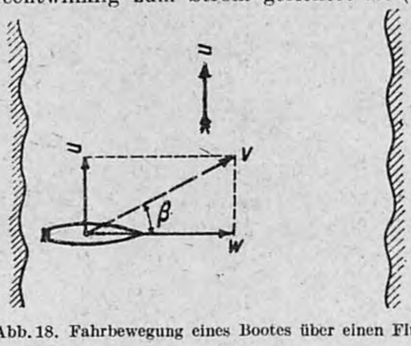

Abb. 18. Fahrbewegung eines Bootes über einen Fluß.

schwindigkeit des fließenden Wassers beträgt $u = 2$ m/s. Dann wird das Boot durch den Strom abgetrieben. Die wirkliche Geschwindigkeit ist

$$v = \sqrt{w^2 + u^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 4{,}47 \text{ m/s}.$$

Die Ablenkung durch den Strom beträgt

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{u}{w} = \frac{2}{4} = 0{,}5$$

$$\beta = 26^0\,30'.$$

4. Relative oder scheinbare Bewegung

Bewegt sich wie in Abb. 19 die Laufkatze eines Laufkranes von einer Seite der Laufkranbühne auf die andere und wird gleichzeitig die Bühne senkrecht dazu fortbewegt, so erfolgt die wirkliche oder resultierende Bewegung der Laufkatze auf der Diagonalen des aus den Seitenbewegungen sich ergebenden Parallelogramms.

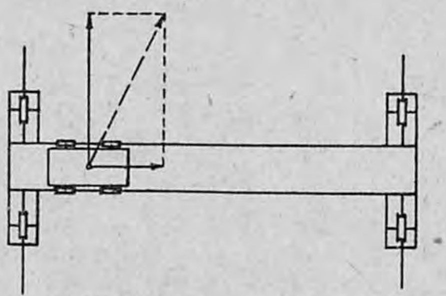

Abb. 19. Fahrbewegung eines Laufkranes.

Man bezeichnet nun die Bewegung der Laufkatze auf der fahrenden Bühne mit scheinbarer oder relativer Bewegung. Es ist die Bewegung, die der auf der Bühne befindliche Kranführer wahrnimmt, also die Bewegung relativ (in bezug auf) zur Bühne.

Bei manchen Aufgaben ist diese relative Bewegung die gesuchte, die aus der wirklichen Bewegung und der des fortschreitenden Raumes ermittelt werden muß. Allgemein gilt hierbei, daß das Parallelogramm immer so gezeichnet werden muß, daß die wirkliche oder resultierende Bewegung als Diagonale erscheint.

Beispiel 7. Ein Eisenbahnzug fährt mit einer Geschwindigkeit $u = 25$ m/s (Abb. 20). Senkrecht zur Fahrtrichtung wird ein Stein gegen den Zug geworfen

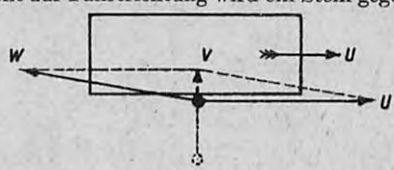

Abb. 20. Relative Geschwindigkeit eines Körpers in bezug auf einen fahrenden Eisenbahnwagen.

mit einer Geschwindigkeit $v = 3$ m/s. Wie groß ist die relative Geschwindigkeit w, mit welcher der Stein auf den Zug trifft?

$$w = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{25^2 + 3^2} = \sqrt{634} = 25{,}18 \text{ m/s}.$$

w ist die relative Geschwindigkeit des geworfenen Steines in bezug auf den Eisenbahnwagen, also die scheinbare für den im Zuge Sitzenden. Mit dieser großen Geschwindigkeit trifft der Stein den Zug.

Beispiel 8 (Abb. 21). Ein Dampfschiff hat eine Fahrgeschwindigkeit $u = 5$ m/s. Rechtwinklig zur Fahrtrichtung weht der Wind mit einer Geschwindigkeit $v = 4$ m/s. Wie groß ist die scheinbare oder relative Windgeschwindigkeit auf dem fahrenden Schiffe und in welcher Richtung stellt sich eine Windfahne auf dem Schiffe ein?

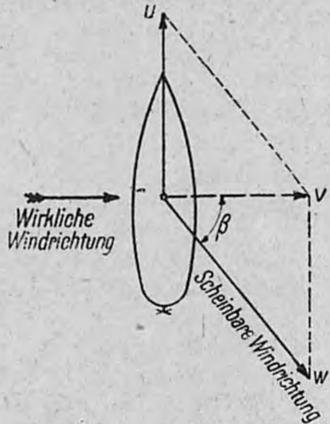

Abb. 21. Relative Bewegung des Windes auf einem Schiffe.

Die scheinbare, d. h. für den Beobachter auf dem Schiffe fühlbare Windgeschwindigkeit ist

$$w = \sqrt{v^2 + u^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41} = 6{,}4 \text{ m/s}.$$

Die Windfahne stellt sich auf dem Schiffe unter einem Neigungswinkel β ein, der sich ergibt aus

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{u}{v} = \frac{5}{4} = 1{,}25,$$

$$\beta = 51^0\, 20'.$$

B. Physikalische Grundgesetze der Mechanik

Im vorhergehenden Abschnitte wurden die verschiedenen Arten der Bewegung behandelt und ihre Hauptmerkmale festgestellt. Sollen nun die Ursachen dieser Bewegungsarten ermittelt werden, so sind dazu gewisse physikalische Grundgesetze erforderlich, deren Richtigkeit nicht mathematisch bewiesen werden kann, sondern nur durch die Erfahrung sichergestellt ist.

1. Gesetz der Trägheit (von Galilei 1638)

Jeder Körper bleibt im Zustande der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, solange er nicht durch äußere Einwirkung zu einer Änderung dieses Zustandes veranlaßt wird.

2. Gesetz der Beschleunigung (von Newton 1687)

Soll eine Änderung des im ersten Grundgesetze angegebenen Bewegungs- bzw. Ruhezustandes eintreten, so ist dazu eine äußere Einwirkung erforderlich, die nach der Erfahrung stets nur von einem anderen Körper hervorgebracht werden kann. Diese Einwirkung bezeichnet man mit Kraft. Die durch die Kraft hervorgerufene Bewegungsänderung besteht im allgemeinen in einer Größenänderung der Geschwindigkeit und in einer Richtungsänderung der Bewegung. Erfolgt die Kraftwirkung auf einen im Ruhezustande befindlichen Körper oder in Richtung der schon vorhandenen Bewegung, so entsteht eine beschleunigte Bewegung. Wirkt die Kraft senkrecht zur Bewegungsrichtung, so findet nur eine Richtungsänderung, also eine Seitenablenkung statt. Die Bahnlinie ist gekrümmt. Es wird später in der Dynamik nachgewiesen, daß auch die durch die Ablenkung hervorgerufene Seitenbewegung eine beschleunigte Bewegung ist, die nach dem Krümmungsmittelpunkte der Bahnkurve gerichtet ist. Wird demnach auf einen starren Körper nur eine Kraft ausgeübt, so besteht ihre Wirkung in jedem Falle in einer Beschleunigung. Je größer die Beschleunigung des Körpers ist, um so größer muß auch die Kraft sein, welche die Beschleunigung hervorruft. Die Kraft kann demnach direkt proportional der Beschleunigung gesetzt werden. Sieht man die Kraft als die gegebene Größe an, so kann man auch umgekehrt sagen: die Beschleunigung ist direkt proportional der Kraft.

Untersucht man die Wirkung einer Kraft auf verschiedene Körper, so zeigt die Erfahrung, daß die eintretende Beschleunigung um so kleiner ist, je größer die Stoffmenge oder Masse des Körpers ist. Die Beschleunigung ist also andererseits umgekehrt proportional der Masse des Körpers.

Bezeichnet man die Kraft mit P und die Masse mit m, so kann für die Beschleunigung die Gleichung aufgestellt werden

$$b = \frac{P}{m}$$

oder

$$\boldsymbol{P = m \cdot b}$$

Kraft = Masse mal Beschleunigung.

3. Gesetz der Schwere (von Newton 1685)

Die Erde übt auf jeden Körper eine Anziehungskraft aus, die senkrecht abwärts gerichtet ist und ihm (im luftleeren Raume in unseren Breitengraden) eine Beschleunigung $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ erteilt. Diese Kraft heißt Schwerkraft oder das Gewicht des Körpers.

Bezeichnet man sie mit G, so muß nach dem zweiten Grundgesetze gelten

$$G = m \cdot g$$

Gewicht = Masse mal Fallbeschleunigung.

Das Gesetz der Schwere ist also ein besonderer Fall des allgemeinen Gesetzes der Beschleunigung.

Die Gewichtseinheit ist in der technischen Mechanik das Kilogramm (kg). Das Gewicht von 1 kg ist die Anziehungskraft, welche die Erde auf 1 Liter Wasser von $+4^0$ ausübt. Das Gewicht ist strenggenommen eine veränderliche Größe. Es ist proportional der Fallbeschleunigung g, die sich mit dem Abstande vom Erdmittelpunkte ändert. Nur die Masse ist eine unveränderliche Größe. Denn das Verhältnis $\frac{G}{g}$ bleibt stets dasselbe, da sich das Gewicht G in demselben Verhältnis ändert wie die Fallbeschleunigung g.

Hiernach ergibt sich die Größe der Masse eines Körpers aus

$$m = \frac{G}{g}$$

$$\text{Masse} = \frac{\text{Gewicht}}{\text{Fallbeschleunigung}}.$$

Als Bezeichnung für die Masseneinheit erhält man

$$m = \frac{9{,}81\ \mathrm{kg}}{9{,}81\ \mathrm{m/s^2}} = 1\,\frac{\mathrm{kg\,s^2}}{\mathrm{m}}.$$

Ein Körper hat also die Masse 1, wenn er 9,81 kg an einem Orte wiegt, wo die Erdbeschleunigung $9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ beträgt.

In Dinorm 1305 sind die Begriffsbezeichnungen Masse, Schwere, Gewicht und Last eines Körpers ausführlicher angegeben und eindeutig festgelegt.

Die vorstehend festgelegte Gewichtseinheit kg wird in der Mechanik auch als Krafteinheit benutzt. Ihre genaue Größe ist vom internationalen Maß- und Gewichtsbureau durch einen in Sèvres bei Paris aufbewahrten

Block aus Platin-Iridium sichergestellt. In der Technik verwendet man als Maßeinheit auch 1 Tonne (t) = 1000 kg und 1 Gramm (g) = $^1/_{1000}$ kg.

Alle aus den Begriffen hervorgehenden Maßeinheiten ergeben sich aus den drei Grundeinheiten für Kraft, Weg und Zeit. Diese sind

in der technischen Mechanik: das Kilogramm (kg), das Meter (m) und die Sekunde (s);

in der Physik und Elektrotechnik: das Gramm (g), das Zentimeter (cm) und die Sekunde (s).

4. Gesetz der Gegenwirkung (von Newton 1687)

Die Kräfte, mit denen zwei Körper aufeinander einwirken, treten stets paarweise in gleicher Größe, aber entgegengesetzter Richtung auf.

Hierbei ist es gleichgültig, ob die Kräfte durch unmittelbare Berührung der Körper zur Wirkung kommen oder durch Fernwirkung wie bei den magnetischen, den elektrischen und den allgemeinen Massenanziehungskräften. (Der Mond übt auf die Erde dieselbe Anziehungskraft aus wie die Erde auf den Mond.)

Ein auf dem Fußboden liegender Körper übt an der Berührungsstelle eine senkrecht nach unten gerichtete Druckkraft auf ihn aus, die gleich seinem Gewichte ist. Da der Körper in Ruhe bleibt, sich also im Gleichgewicht befindet, muß ein gleich großer Gegendruck vom Fußboden auf den Körper senkrecht nach oben hin wirken. Die durch Gegenwirkung hervorgerufenen Kräfte sind also beide vorhanden. Ihre Wirkung äußert sich in einer gegenseitigen Zusammendrückung beider Körper an der Berührungsstelle. Die beiden Kräfte halten sich das Gleichgewicht, heben sich aber nicht auf.

Nur zwei gleich große entgegengesetzt gerichtete Kräfte, welche an demselben Körper in einem Punkte angreifen, heben sich auf. Sie haben keine Wirkung. Man kann deshalb solche Kräfte an einem Körper beliebig hinzufügen bzw. fortlassen. Hiervon wird bei der Ermittelung der Gesamtwirkung von Kräften Gebrauch gemacht. Diese Kräfte sind demnach keine Gegenkräfte, was für die Kraftwirkung in der Statik zu beachten ist.

Übt ein Körper auf einen anderen von der Masse m, der in keiner Weise durch andere Kräfte festgehalten wird, eine Druckkraft P aus, so erfährt der andere Körper nach dem zweiten Grundgesetz eine Beschleunigung $b = \frac{P}{m}$ und setzt dabei dem ersten Körper eine gleich große Widerstandskraft (Trägheitskraft) $m\,b = P$ entgegen. Auch hier tritt demnach das Gesetz der Gegenwirkung auf.

Wird ein Seil durch zwei Männer an jedem Seilende mit der gleichen Kraft P angespannt, so treten an jedem Ende Zuggegenkräfte auf, nämlich die äußere Zugkraft P und die gleich große entgegengesetzt gerichtete Seilspannkraft. Die innere Spannkraft an einer beliebigen Stelle des Seils ist ebenso groß wie P (nicht etwa doppelt so groß).

C. Das Parallelogramm der Kräfte

In dem Abschnitte über zusammengesetzte Bewegung wurde bei Abb. 16 u. 17 nachgewiesen, daß ein Körper, der gleichzeitig zwei beschleunigte Bewegungen in voneinander verschiedenen Richtungen ausführt, eine resultierende Beschleunigung besitzt, die durch die Diagonale eines Parallelogramms dargestellt wird, dessen Seiten die Einzelbeschleunigungen sind. Multipliziert man die Beschleunigungen mit der Masse m des Körpers, so erhält man ein Parallelogramm, das nur proportional m vergrößert ist. Die Seiten stellen dann die Einzelkräfte P_1 und P_2 dar, welche die Beschleunigungen hervorrufen und die Diagonale ist ihre Mittelkraft oder Resultierende R (Abb. 22).

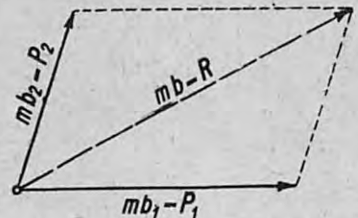

Abb. 22. Parallelogramm der Kräfte.

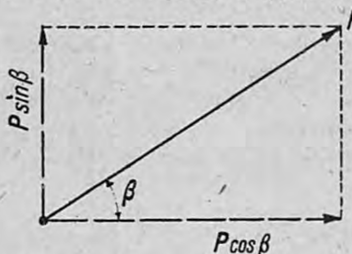

Abb. 23. Zerlegung einer Kraft in zwei senkrecht zueinander gerichtete Komponenten.

Aus dem Verfahren, zwei Kräfte durch Parallelogrammkonstruktion zu einer Mittelkraft zu vereinigen, folgt ohne weiteres, daß sich auch umgekehrt jede Kraft in zwei Seitenkräfte oder Komponenten zerlegen und durch diese völlig ersetzen läßt. Die Richtungen der Seitenkräfte können beliebig gewählt werden. Soll z. B. wie in Abb. 23 die Kraft P in zwei senkrecht zueinander gerichtete Seitenkräfte zerlegt werden, so erhält man als waagerechte Komponente $P \cos \beta$ und als senkrechte Komponente $P \sin \beta$.

D. Das Drehmoment oder statische Moment einer Kraft

An einem Körper möge im Punkte A eine Kraft P angreifen (Abb. 24). Im Punkte O sei eine Drehachse angebracht, welche senkrecht zur Wirkungsebene der Kraft gerichtet ist. Der senkrechte Abstand der Kraftrichtung von der Drehachse habe die Länge a. Dann wird die Kraft das Bestreben haben, den Körper um diese Achse zu drehen. Die Drehwirkung wird um so größer sein, je größer die Kraft P und je größer der Hebelarm a ist. Sie wächst also direkt proportional mit P und a und kann daher ausgedrückt werden durch die Gleichung

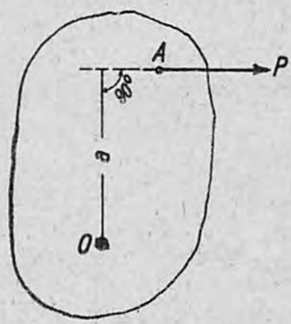

Abb. 24. Drehmoment einer Kraft.

$$M = P \cdot a$$

Drehmoment = Kraft mal Hebelarm.

Unter Hebelarm versteht man den senkrechten Abstand der Kraftrichtung von der Drehachse.

Der Hebelarm a kann in m, cm oder mm gemessen werden. Demnach ist die Maßeinheit für das Drehmoment kgm, kgcm oder kgmm.

Die Bezeichnung Drehmoment benutzt man dann, wenn eine Drehbewegung wirklich vorliegt. Ist aber der Hebelarm nur der Abstand der Kraftrichtung von irgendeinem Punkte des Körpers und kommt in Wirklichkeit eine Drehbewegung gar nicht in Frage, so nennt man das Produkt $P \cdot a$ allgemein statisches Moment.

E. Die mechanische Arbeit

1. Erklärung des Begriffes mechanische Arbeit

Ist zur Fortbewegung eines Körpers, z. B. eines Wagens (Abb 25),

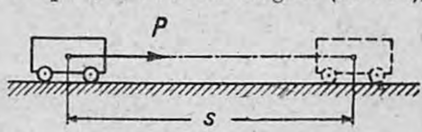

Abb. 25. Mechanische Arbeit beim Ziehen eines Wagens.

auf einem Wege von s m Länge eine Zugkraft in der Fahrtrichtung von P kg erforderlich, so ist die dazu aufgewandte körperliche Arbeit um so größer, je größer die Zugkraft und je länger der zurückgelegte Weg ist. Sie ist also direkt proportional der Zugkraft P und dem Wege s. Demnach kann die Arbeit allgemein auch bei mechanischen Kräften durch das Produkt $P \cdot s$ ausgedrückt werden.

$$\boldsymbol{A = P \cdot s}$$

Arbeit = Kraft mal Weg in der Kraftrichtung.

Als Maßeinheit der Arbeit ergibt sich kg m.

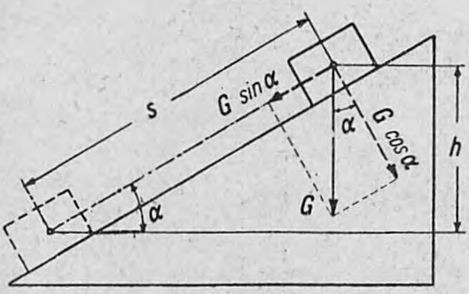

Abb. 26. Mechanische Arbeit der Schwerkraft eines auf einer geneigten Ebene hinabgleitenden Körpers.

Gleitet ein Körper von G kg Gewicht wie in Abb. 26 eine geneigte Ebene hinab, so beträgt die Arbeit der Schwerkraft

$$A = G\,h,$$

h ist dabei der in der Kraftrichtung zurückgelegte Weg.

Es ist $\sin\alpha = \frac{h}{s}$ oder $h = s \sin\alpha$.

Zur Berechnung der Arbeit kann man die Schwerkraft G aber auch in ihre Seitenkräfte $G \sin\alpha$ und $G \cos\alpha$ parallel und senkrecht zur geneigten Ebene zerlegen. Dann ist die mechanische Arbeit

$$A = G \sin\alpha \cdot s.$$

Die Seitenkraft $G \cos\alpha$ leistet keine Arbeit, da in ihrer Richtung kein Weg zurückgelegt wird.

Da $\sin\alpha \cdot s = h$ ist, ist das Ergebnis bei beiden Rechnungen dasselbe, wie verlangt werden muß.

Satz: Die mechanische Arbeit einer Kraft, welche senkrecht zur Bewegung gerichtet ist, ist gleich Null.

2. Leistung

Der aufgestellte Wert für die mechanische Arbeit ist von der Zeit unabhängig. Da es jedoch wesentlich ist, in welcher Zeit eine Arbeit geleistet wird, hat man für die in der Sekunde geleistete Arbeit einen besonderen Begriff eingeführt, welchen man Leistung nennt. Beträgt die ganze Arbeitszeit t Sekunden, so ist die Leistung

$$L = \frac{Ps}{t}.$$

Da bei gleichförmiger Bewegung $\frac{s}{t} = v$ ist, so ist auch

$$\boldsymbol{L = P \cdot v}$$

Leistung = Kraft mal Geschwindigkeit.

Ihre Maßeinheit ist kgm/s.

Um eine bessere Vorstellung von der Größe einer Arbeitsleistung zu haben, hat man (James Watt) in der Technik noch eine größere Einheit, die Pferdestärke (PS) eingeführt und hierfür eine Leistung von 75 kgm/s angenommen.

1 PS = 75 kgm/s

1 Pferdestärke = 75 Kilogrammeter je Sekunde.

Bezeichnet man die Anzahl der Pferdestärken bei einer Arbeitsleistung mit N, so erhält man die Gleichung

$$\boldsymbol{N = \frac{Pv}{75}}.$$

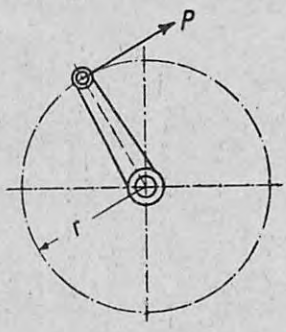

Abb. 27. Antrieb durch eine Kurbel.

Wirkt die Kraft P als Umfangskraft an einer Kurbel (Abb. 27) von r m Halbmesser und ist n die Drehzahl der Kurbel in der Minute, so ist die Umfangsgeschwindigkeit des Kurbelzapfens

$$v = \frac{2\pi r n}{60}$$

und die Antriebsleistung

$$N = \frac{Pv}{75} = \frac{P \cdot 2\pi r n}{75 \cdot 60}.$$

Folglich das Drehmoment

$$P\,r = \frac{75 \cdot 60}{2\pi} \cdot \frac{N}{n}$$

$$\boldsymbol{M = 716{,}2\,\frac{N}{n}} \text{ in kgm} = \boldsymbol{71\,620\,\frac{N}{n}} \text{ in kgcm.}$$

In der Elektrotechnik wird die Leistung in Watt (W) ausgedrückt.

1 Kilowatt (kW) = 1000 Watt.

Die Beziehung zur mechanischen Leistung ist

1 PS = 736 W = 0,736 kW.

Hieraus ergibt sich

1 kW = 1,36 PS ≈ 102 kgm/s.

3. Arbeitsvermögen

Ein Körper von der Masse m, auf welchen eine unveränderliche Kraft P wirkt, führt eine gleichförmig beschleunigte Bewegung in Richtung dieser Kraft aus. Ist die Anfangsgeschwindigkeit der betrachteten Bewegung v_0, die Endgeschwindigkeit v nach der Zeit t und der zurückgelegte Weg s, so hat die Kraft P die mechanische Arbeit

$$A = P\,s$$

verrichtet. Für die Kraft P kann nach dem zweiten Grundgesetz gesetzt werden

$$P = m\,b.$$

Für gleichförmig beschleunigte Bewegung ergaben sich nach früherer Ableitung die beiden Hauptgleichungen

$$s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t$$

und $$b = \frac{v - v_0}{t} \quad \text{oder} \quad t = \frac{v - v_0}{b},$$

folglich ist $$s = \frac{v + v_0}{2} \cdot \frac{v - v_0}{b} = \frac{v^2 - v_0^2}{2b}.$$

Setzt man vorstehende Werte von P und s in die Arbeitsgleichung ein, so erhält man

$$A = P\,s = m\,b\,\frac{v^2 - v_0^2}{2b} = \frac{m\,(v^2 - v_0^2)}{2}$$

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = Ps.$$

Den Ausdruck $\frac{mv^2}{2}$ nennt man Arbeitsvermögen (Bewegungsenergie, Wucht). Sein Maß ist kgm, also unabhängig von der Zeit.

Aus vorstehender Gleichung ergibt sich folgender

Satz vom Arbeitsvermögen: Die Zunahme an Arbeitsvermögen ist gleich der von der wirkenden Kraft geleisteten mechanischen Arbeit.

Dieser Satz sagt aus, daß die von der wirkenden Kraft geleistete Arbeit am Ende der Bewegung in Form von vermehrtem Arbeitsvermögen im Körper aufgespeichert ist. Dieses kann wieder in mechanische Arbeit umgesetzt werden.

Beispiel 9. Ein Kran hebt eine Last von 1000 kg Gewicht bei gleichbleibender Geschwindigkeit in 8 s 12 m hoch. Wie groß ist seine Arbeitsleistung?

$$L = \frac{Gs}{t} = \frac{1000 \cdot 12}{8} = 1500 \text{ kgm/s}.$$

$$N = \frac{L}{75} = \frac{1500}{75} = 20 \text{ PS}.$$

Beispiel 10. Eine Schnellzuglokomotive fährt einen Zug auf freier Strecke mit einer Geschwindigkeit von 90 km/h und hat zur Überwindung des Reibungs- und Luftwiderstandes eine Zugkraft von 2500 kg aufzuwenden. Wie groß ist ihre Leistung in Pferdestärken?

Es ist
$$v = \frac{90000}{3600} = 25 \text{ m/s}.$$

$$N = \frac{Zv}{75} = \frac{2500 \cdot 25}{75} = 833{,}3 \text{ PS}.$$

Beispiel 11. Zum Antreiben einer Handwinde übt ein Mann am Kurbelgriff eine Kraft aus, die durchschnittlich während der ganzen Umdrehung in tangentialer Richtung $P = 10$ kg beträgt (Abb. 27). Die Kurbel macht 30 Umdrehungen in der Minute. Der Kurbelhalbmesser hat eine Länge $r = 40$ cm. Wie groß ist die Arbeitsleistung in Pferdestärken?

Die Umfangsgeschwindigkeit ist

$$v = \frac{2\pi r n}{60} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}4 \cdot 30}{60} = 1{,}26 \text{ m/s}.$$

Die Leistung

$$N = \frac{Pv}{75} = \frac{10 \cdot 1{,}26}{75} = 0{,}168 \text{ PS}.$$

Beispiel 12. Ein Eisenbahnzug von 120 t Gewicht hat eine Fahrgeschwindigkeit von 60 km/h. Wie groß ist

a) sein Arbeitsvermögen?

b) die erforderliche Bremskraft B an den Rädern, um den Zug nach einer Strecke von $s = 400$ m zum Stehen zu bringen, wenn der mittlere Fahrwiderstand infolge der Reibung $W = 1400$ kg beträgt?

Zu a). $v = \frac{60000}{3600} = 16{,}67$ m/s.

$$\frac{m v^2}{2} = \frac{G \cdot v^2}{g \cdot 2} = \frac{120000 \cdot 16{,}67^2}{9{,}81 \cdot 2} = 1700000 \text{ kgm}.$$

Zu b). Nach dem Satze vom Arbeitsvermögen muß gelten

$$\frac{m v^2}{2} = W s + B s$$

$$B = \frac{m v^2}{2 s} - W = \frac{1700000}{400} - 1400 = 4250 - 1400 = 2850 \text{ kg}.$$

4. Mechanischer Wirkungsgrad

In jeder Maschine wird ein Teil der Antriebsarbeit (aufgewandte Arbeit, hineingeschickte Arbeit) zur Überwindung der Reibungswiderstände in den Getriebeteilen verbraucht. Die abgegebene Arbeit (Nutzarbeit) ist daher stets kleiner als die hineingeschickte Arbeit. Als Maß für die Güte einer Maschine benutzt man das Verhältnis der Nutzarbeit zur aufgewandten Arbeit und bezeichnet es mit Wirkungsgrad.

$$\text{Wirkungsgrad} = \frac{\text{Nutzarbeit}}{\text{Aufgewandte Arbeit}}$$

$$\eta = \frac{N_n}{N_a}.$$

Je größer der Wirkungsgrad η einer Maschine ist, um so besser ist sie. η ist stets kleiner als 1.

Beispiel 13. Das elektrisch angetriebene Hubwerk eines Laufkranes hebt eine Last von 10 t Gewicht mit einer Geschwindigkeit von 7,5 m/min. Die Antriebsleistung des Motors beträgt (nach Messung) 22 Pferdestärken. Wie groß ist der Wirkungsgrad des Hubwerks?

Gewicht der Last

$$Q = 10 \text{ t} = 10000 \text{ kg}.$$

Hubgeschwindigkeit

$$v = 7{,}5 \text{ m/min} = \frac{7{,}5}{60} = 0{,}125 \text{ m/s}.$$

Lastarbeit oder Nutzarbeit

$$N_n = \frac{Q\,v}{75} = \frac{10000 \cdot 0{,}125}{75} = 16{,}7 \text{ PS}.$$

Antriebsarbeit des Motors

$$N_a = 22 \text{ PS}.$$

Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{N_n}{N_a} = \frac{16{,}7}{22} = 0{,}76.$$

Sind mehrere, z. B. drei Maschinen mit den Einzelwirkungsgraden η_1, η_2 und η_3 hintereinander geschaltet und ist die hineingeschickte Antriebsarbeit N_a, so beträgt die von der ersten Maschine an die zweite abgegebene Arbeit nur noch $\eta_1 \cdot N_a$, die von der zweiten abgegebene $\eta_2 \cdot (\eta_1 \cdot N_a)$ und die von der dritten abgegebene $\eta_3(\eta_2 \cdot \eta_1 \cdot N_a)$. Die von der Maschinengruppe am Ende abgegebene Nutzarbeit ist also $N_n = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot N_a$, folglich

$$\frac{N_n}{N_a} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 = \eta.$$

Satz: Der Gesamtwirkungsgrad ist gleich dem Produkte der Einzelwirkungsgrade.

Hoffmann Marcel