

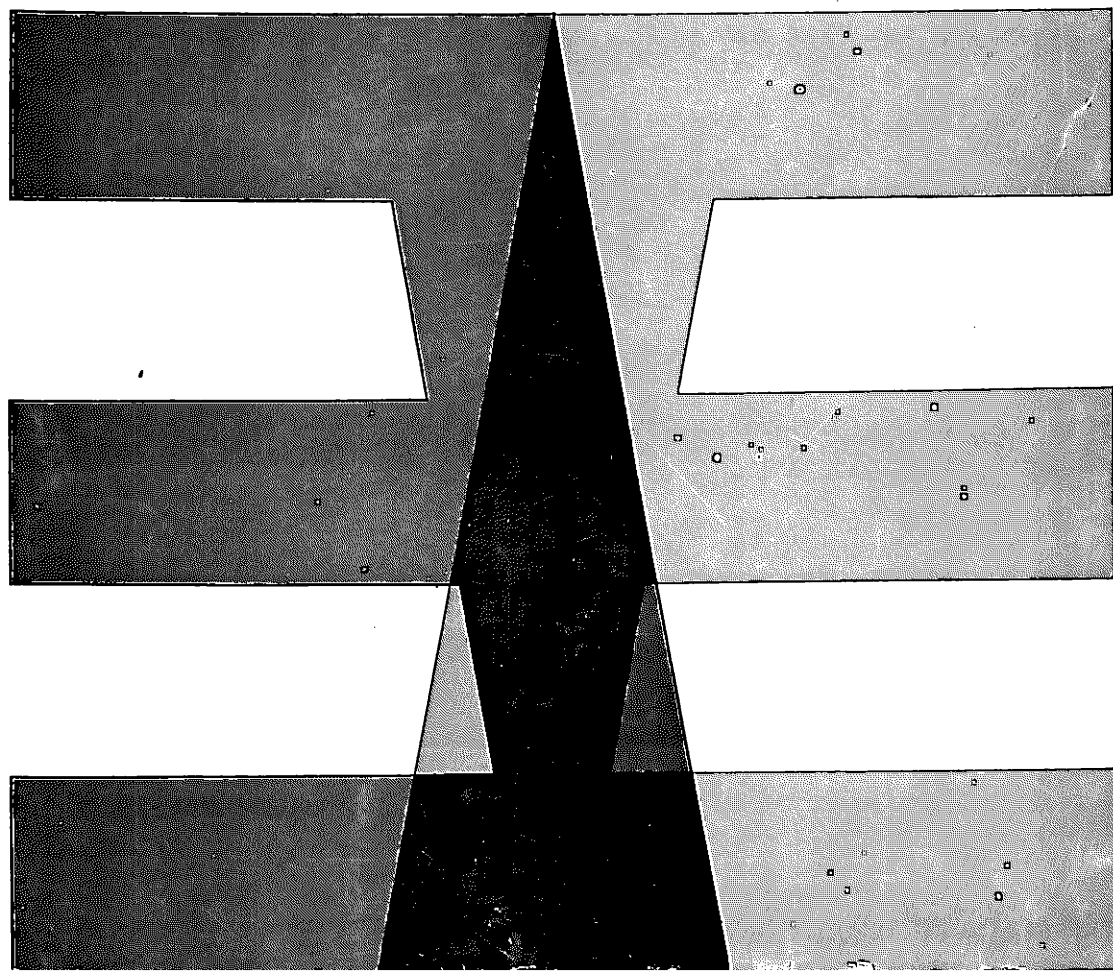
La Mathématique dans l'Enseignement Technique

Tome III B
Troisième année

G. Bielen

A. Dewelf, H. América

Editions L'Elan, Liège



LA MATHÉMATIQUE
DANS
L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE

LA MATHÉMATIQUE

DANS

L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE

TOME IIIb

G. BIELEN

AVEC LA COLLABORATION DE

A. DEWELF et H. AMÉRICA

TROISIÈME ÉDITION



ÉDITIONS L'ÉLAN
6 RUE DE LA PAIX, LIÈGE

—
1976

ERRATA TOME III (a et b)

	Lire :	au lieu de :
p. 67, ex. 4, 4)	a^{5-m}	a^{5-n}
p. 222, 12 ^e ligne	$\cotg 90^\circ = 0$	$\cotg 90^\circ = 1$
13 ^e ligne	$\cotg 270^\circ = 0$	$\cotg 270^\circ = -1$
p. 224, 5 ^e ligne	$\cotg (90^\circ - \alpha) =$ $\frac{\cos (90^\circ - \alpha)}{\sin (90^\circ - \alpha)}$	$\cotg (90^\circ - \alpha) =$ $\frac{\sin (90^\circ - \alpha)}{\cos (90^\circ - \alpha)}$
p. 293, ex. 2, 1)	$(-a - 2b)(-a + 2b)$	$(-a - 2b)(-a - 2b)$
p. 322, 15 ^e ligne	$x^2 + 3x + 2$	$x^2 - 3x + 2$
16 ^e ligne	$x^4 + x^3 - 12x^2 - 28x - 16$	
p. 323, 7 ^e ligne		$x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 28x + 12$
p. 323, ex. 2, 9)	$x^3 - 6x^2 + 12x - 8$	$x^2 - 6x^2 + 12x - 8$
p. 329, ex. 1, 19)	$x^2 - 4x + 3$	$x^2 - 4x - 3$

© Éditions L'Élan, rue de la Paix 6, 4000 Liège.

Toute reproduction, même fragmentaire, sous quelque forme que ce soit, y compris photographie, photocopie, microfilm, bande magnétique, disque ou autre, strictement interdite sans accord préalable et écrit de l'éditeur.

Dépôt légal D/1976/0080/5

CHAPITRE XX

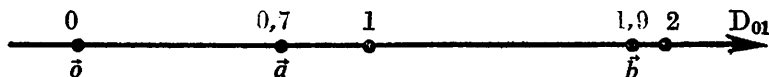
PRODUIT SCALAIRE DE VECTEURS

1. Produit scalaire de deux vecteurs $\vec{a}, \vec{b} \in D_0$

Calculons $\vec{a} \cdot \vec{b}$



Portons un repère $(0,1)$ sur D_0 . Les extrémités a et b de $\vec{a}$ et de $\vec{b}$ ont alors des abscisses bien précises.



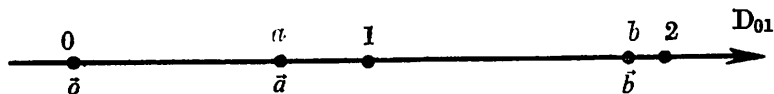
abscisse $a = 0,7$

abscisse $b = 1,9$

Le produit de l'abscisse de a par l'abscisse de b est appelé produit scalaire des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= \text{abscisse } a \cdot \text{abscisse } b \\ &= 0,7 \times 1,9 \\ &= 1,33\end{aligned}$$

En général :



Si $a \in \mathbb{R}$ est l'abscisse de l'extrémité de $\vec{a}$,

$b \in \mathbb{R}$ celle de l'extrémité de $\vec{b}$,

alors $a \cdot b \in \mathbb{R}$ est le produit scalaire des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \in D_0 : \vec{a} \cdot \vec{b} = \text{abscisse } a \cdot \text{abscisse } b$$

Le produit scalaire de deux vecteurs $\in D_0$, étant un produit de deux nombres réels, est un nombre réel.

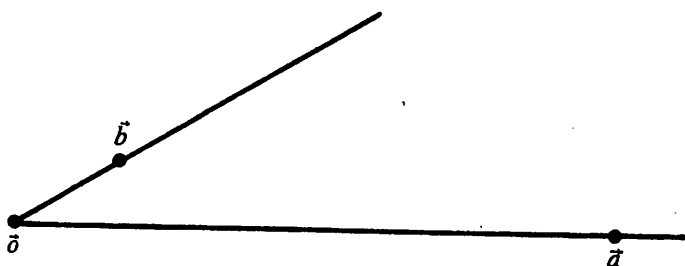
Le produit scalaire dépend du repère.

Conséquences :

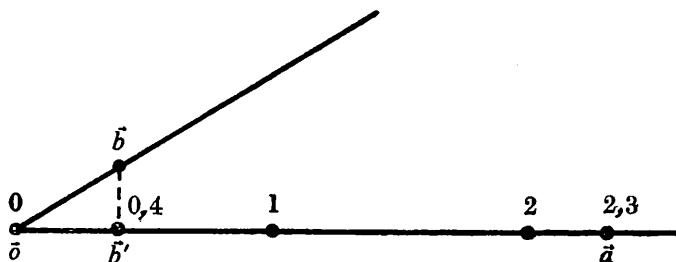
1. $\forall \vec{a} \in D_0 : \vec{o} \cdot \vec{a} = 0 = \vec{a} \cdot \vec{o}$
2. $\vec{o} \cdot \vec{o} = 0$

2. Produit scalaire de deux vecteurs $\vec{a}, \vec{b} \in \Pi_0$

Calculons $\vec{a} \cdot \vec{b}$



Projetons $\vec{b}$ perpendiculairement sur oa et soit $p(\vec{b}) = \vec{b}'$ cette projection. Portons un repère $(0, 1)$ sur oa . Les extrémités a et b' de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ont alors des abscisses bien précises.

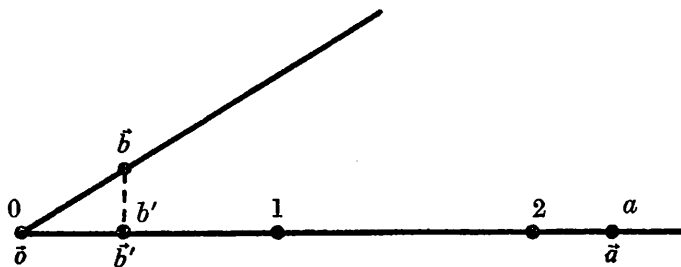


abscisse $a = 2,3$
abscisse $b' = 0,4$

Le produit de l'abscisse de a par l'abscisse de b' est appelé produit scalaire des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= \text{abscisse } a \cdot \text{abscisse } b' \\ &= 2,3 \times 0,4 \\ &= 0,92\end{aligned}$$

En général :



Si $a \in \mathbb{R}$ est l'abscisse de l'extrémité de $\vec{a}$,
 $b' \in \mathbb{R}$ celle de l'extrémité de $\vec{b}'$,
 b' la projection de b sur oa ,
 alors $a \cdot b' \in \mathbb{R}$ est le produit scalaire des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

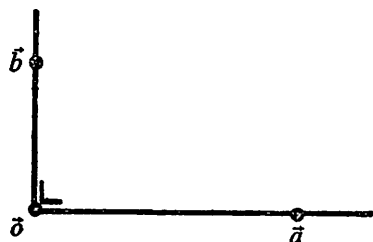
$$\forall \vec{a}, \vec{b} \in \Pi_0 : \vec{a} \cdot \vec{b} = \text{abscisse } a \cdot \text{abscisse } b'$$

b' étant la projection orthogonale de b sur oa

Le produit scalaire de deux vecteurs $\in \Pi_0$ est un nombre réel.
 Il dépend du repère sur oa .

3. Vecteurs perpendiculaires

Deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b} \in \Pi_0$ sont perpendiculaires, si $oa \perp ob$.



$$\vec{a} \perp \vec{b}$$

Propriété :

Deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b} \in \Pi_0$ sont perpendiculaires, si et seulement si leur produit scalaire est nul.

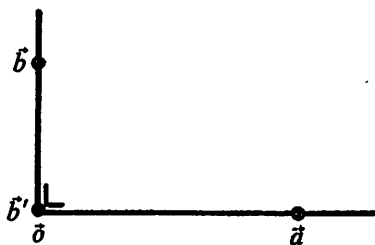
$$\forall \vec{a}, \vec{b} \in \Pi_0 : \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Démonstration :

$$1. \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

car $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow oa \perp ob$, et la projection b' de b coïncide avec o .

$$\text{Donc } \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b'} = \vec{a} \cdot \vec{o} = 0.$$



$$2. \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ et } \vec{a} \neq \vec{o} \neq \vec{b} \Rightarrow oa \perp ob \text{ ou } \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{car } 0 = \vec{a} \cdot \vec{b} = \text{abscisse } a \cdot \text{abscisse } b' \\ \text{et } \vec{a} \neq \vec{o} \text{ donc abscisse } a \neq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{donc abscisse } b' = 0 \\ \text{ou } b' = o \\ \text{et } oa \perp ob \\ \text{ou } \vec{a} \perp \vec{b}. \end{array}$$

Conséquences :

$$1. \vec{o} \perp \vec{o} \text{ car } \vec{o} \cdot \vec{o} = 0$$

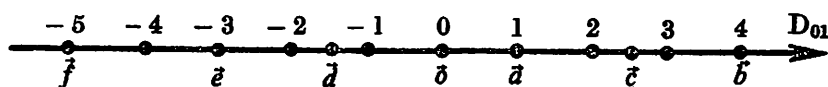
$$2. \forall \vec{a} \in \Pi_0 : \vec{a} \perp \vec{o} \text{ car } \vec{a} \cdot \vec{o} = 0$$

$$3. \forall \vec{a} \in \Pi_0 : \vec{o} \perp \vec{a} \text{ car } \vec{o} \cdot \vec{a} = 0.$$

Le vecteur zéro est perpendiculaire à tout vecteur de Π_0 et réciproquement.

Exercices

1. Calculez les produits scalaires suivants :



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ | 2) $\vec{b} \cdot \vec{a}$ | 3) $\vec{c} \cdot \vec{a}$ | 4) $\vec{d} \cdot \vec{a}$ | 5) $\vec{e} \cdot \vec{a}$ | 6) $\vec{f} \cdot \vec{a}$ | 7) $\vec{o} \cdot \vec{a}$ |
| $\vec{a} \cdot \vec{c}$ | $\vec{b} \cdot \vec{c}$ | $\vec{c} \cdot \vec{b}$ | $\vec{d} \cdot \vec{b}$ | $\vec{e} \cdot \vec{b}$ | $\vec{f} \cdot \vec{b}$ | $\vec{o} \cdot \vec{b}$ |
| $\vec{a} \cdot \vec{d}$ | $\vec{b} \cdot \vec{d}$ | $\vec{c} \cdot \vec{d}$ | $\vec{d} \cdot \vec{c}$ | $\vec{e} \cdot \vec{c}$ | $\vec{f} \cdot \vec{c}$ | $\vec{o} \cdot \vec{c}$ |
| $\vec{a} \cdot \vec{e}$ | $\vec{b} \cdot \vec{e}$ | $\vec{c} \cdot \vec{e}$ | $\vec{d} \cdot \vec{e}$ | $\vec{e} \cdot \vec{d}$ | $\vec{f} \cdot \vec{d}$ | $\vec{o} \cdot \vec{d}$ |
| $\vec{a} \cdot \vec{f}$ | $\vec{b} \cdot \vec{f}$ | $\vec{c} \cdot \vec{f}$ | $\vec{d} \cdot \vec{f}$ | $\vec{e} \cdot \vec{f}$ | $\vec{f} \cdot \vec{e}$ | $\vec{o} \cdot \vec{e}$ |
| $\vec{a} \cdot \vec{o}$ | $\vec{b} \cdot \vec{o}$ | $\vec{c} \cdot \vec{o}$ | $\vec{d} \cdot \vec{o}$ | $\vec{e} \cdot \vec{o}$ | $\vec{f} \cdot \vec{o}$ | $\vec{o} \cdot \vec{f}$ |

2. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in D_0$

abscisse $a = 3,6$

abscisse $b = -2,4$

abscisse $c = \frac{5}{12}$

abscisse $d = -\frac{4}{9}$

- Calculez :
- | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1) $\vec{a} \cdot \vec{a}$ | 2) $\vec{b} \cdot \vec{a}$ | 3) $\vec{c} \cdot \vec{a}$ | 4) $\vec{d} \cdot \vec{a}$ |
| $\vec{a} \cdot \vec{b}$ | $\vec{b} \cdot \vec{b}$ | $\vec{c} \cdot \vec{b}$ | $\vec{d} \cdot \vec{b}$ |
| $\vec{a} \cdot \vec{c}$ | $\vec{b} \cdot \vec{c}$ | $\vec{c} \cdot \vec{c}$ | $\vec{d} \cdot \vec{c}$ |
| $\vec{a} \cdot \vec{d}$ | $\vec{b} \cdot \vec{d}$ | $\vec{c} \cdot \vec{d}$ | $\vec{d} \cdot \vec{d}$ |

3. Sur D_{01} , dessinez les vecteurs $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sachant que :

$$\vec{a} \cdot \vec{x} = 12$$

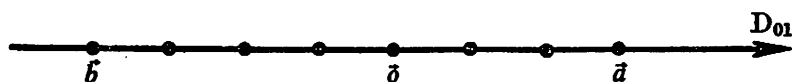
$$\vec{u} \cdot \vec{b} = -10$$

$$\vec{a} \cdot \vec{y} = -7$$

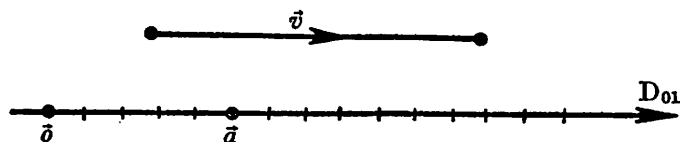
$$\vec{v} \cdot \vec{b} = -16$$

$$\vec{a} \cdot \vec{z} = 0$$

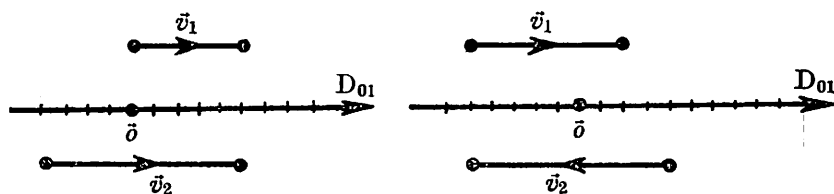
$$\vec{w} \cdot \vec{b} = 16$$



4. Calculez $\vec{a} \cdot \vec{v}$



5. Calculez $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$



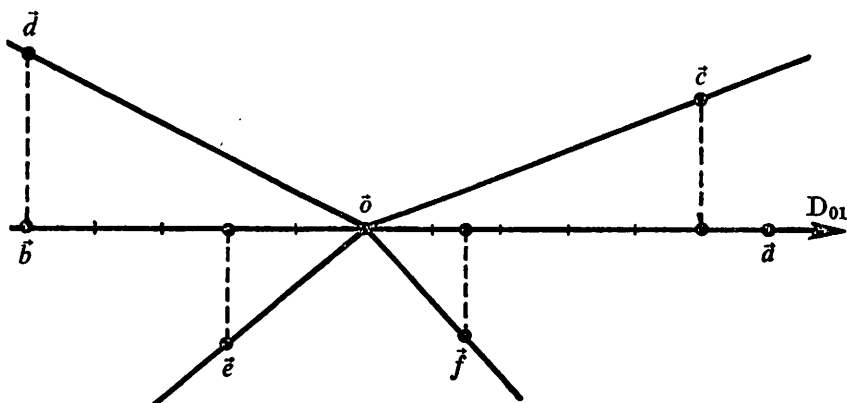
6. Sachant que $\vec{m}$ est le vecteur unitaire sur D_{01} ,



calculez $\vec{a} \cdot \vec{b}$

- | | |
|------------------------------------|----------------------------------|
| 1) $\vec{a} = 5\vec{m}$ | $\vec{b} = -3\vec{a}$ |
| 2) $\vec{a} = -6,27\vec{m}$ | $\vec{b} = -1,5\vec{a}$ |
| 3) $\vec{a} = -\frac{5}{7}\vec{m}$ | $\vec{b} = \frac{14}{25}\vec{a}$ |
| 4) $\vec{a} = 5,3\vec{m}$ | $\vec{b} = -1,16\vec{a}$ |
| 5) $\vec{a} = 2\frac{3}{5}\vec{m}$ | $\vec{b} = 5\frac{2}{9}\vec{a}$ |

7. Calculez les produits scalaires suivants :

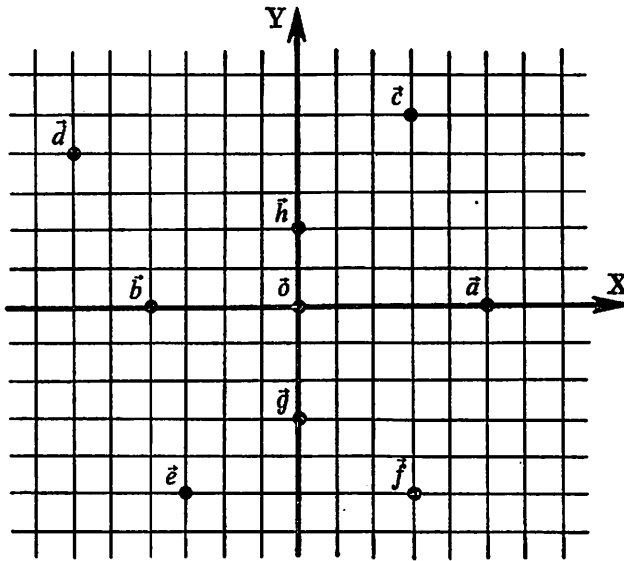


- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ | 2) $\vec{b} \cdot \vec{a}$ | 3) $\vec{c} \cdot \vec{a}$ | 4) $\vec{d} \cdot \vec{a}$ | 5) $\vec{e} \cdot \vec{a}$ | 6) $\vec{f} \cdot \vec{a}$ | 7) $\vec{o} \cdot \vec{a}$ |
| $\vec{a} \cdot \vec{c}$ | $\vec{b} \cdot \vec{c}$ | $\vec{c} \cdot \vec{b}$ | $\vec{d} \cdot \vec{b}$ | $\vec{e} \cdot \vec{b}$ | $\vec{f} \cdot \vec{b}$ | $\vec{o} \cdot \vec{b}$ |

$\vec{a} \cdot \vec{d}$	$\vec{b} \cdot \vec{d}$	$\vec{c} \cdot \vec{d}$	$\vec{d} \cdot \vec{c}$	$\vec{e} \cdot \vec{c}$	$\vec{f} \cdot \vec{c}$	$\vec{o} \cdot \vec{c}$
$\vec{a} \cdot \vec{e}$	$\vec{b} \cdot \vec{e}$	$\vec{c} \cdot \vec{e}$	$\vec{d} \cdot \vec{e}$	$\vec{e} \cdot \vec{d}$	$\vec{f} \cdot \vec{d}$	$\vec{o} \cdot \vec{d}$
$\vec{a} \cdot \vec{f}$	$\vec{b} \cdot \vec{f}$	$\vec{c} \cdot \vec{f}$	$\vec{d} \cdot \vec{f}$	$\vec{e} \cdot \vec{f}$	$\vec{f} \cdot \vec{e}$	$\vec{o} \cdot \vec{e}$
$\vec{a} \cdot \vec{a}$	$\vec{b} \cdot \vec{b}$	$\vec{c} \cdot \vec{c}$	$\vec{d} \cdot \vec{d}$	$\vec{e} \cdot \vec{e}$	$\vec{f} \cdot \vec{f}$	$\vec{o} \cdot \vec{f}$
$\vec{a} \cdot \vec{o}$	$\vec{b} \cdot \vec{o}$	$\vec{c} \cdot \vec{o}$	$\vec{d} \cdot \vec{o}$	$\vec{e} \cdot \vec{o}$	$\vec{f} \cdot \vec{o}$	$\vec{o} \cdot \vec{o}$

8. Calculez :

- | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1) $\vec{a} \cdot \vec{a}$ | 2) $\vec{b} \cdot \vec{a}$ | 3) $\vec{g} \cdot \vec{a}$ | 4) $\vec{h} \cdot \vec{a}$ |
| $\vec{a} \cdot \vec{b}$ | $\vec{b} \cdot \vec{b}$ | $\vec{g} \cdot \vec{b}$ | $\vec{h} \cdot \vec{b}$ |
| $\vec{a} \cdot \vec{c}$ | $\vec{b} \cdot \vec{c}$ | $\vec{g} \cdot \vec{c}$ | $\vec{h} \cdot \vec{c}$ |
| $\vec{a} \cdot \vec{d}$ | $\vec{b} \cdot \vec{d}$ | $\vec{g} \cdot \vec{d}$ | $\vec{h} \cdot \vec{d}$ |
| $\vec{a} \cdot \vec{e}$ | $\vec{b} \cdot \vec{e}$ | $\vec{g} \cdot \vec{e}$ | $\vec{h} \cdot \vec{e}$ |
| $\vec{a} \cdot \vec{f}$ | $\vec{b} \cdot \vec{f}$ | $\vec{g} \cdot \vec{f}$ | $\vec{h} \cdot \vec{f}$ |
| $\vec{a} \cdot \vec{g}$ | $\vec{b} \cdot \vec{g}$ | $\vec{g} \cdot \vec{g}$ | $\vec{h} \cdot \vec{g}$ |
| $\vec{a} \cdot \vec{h}$ | $\vec{b} \cdot \vec{h}$ | $\vec{g} \cdot \vec{h}$ | $\vec{h} \cdot \vec{h}$ |



9. Dans un système d'axes orthonormé d'origine o dans Π_0 , les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{f}, \vec{g}, \vec{h} \in \Pi_0$ sont déterminés par les points :

$$a(-5, 0) \quad b\left(\frac{4}{7}, 0\right) \quad c\left(-2, -\frac{2}{3}\right) \quad d(1, 2, 5)$$

$$e\left(\frac{3}{8}, -4\right) \quad f(-11, -3, 4) \quad g(0, -2, 5) \quad h\left(0, -\frac{1}{2}\right)$$

Calculez les mêmes produits scalaires que pour l'exercice 8.

10. b' étant la projection orthogonale de b sur oa , calculez $\vec{a} \cdot \vec{b}$, sachant que :

1) abscisse $a = 2,36$

3) abscisse $a = -3,15$

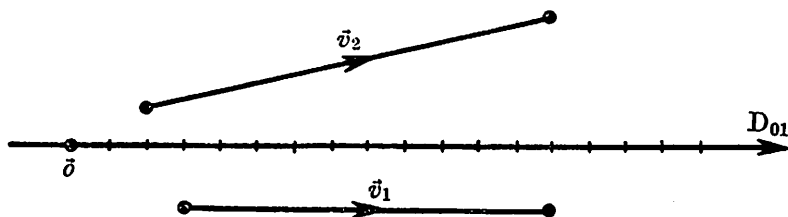
abscisse $b' = -7,2$

abscisse $b' = \frac{25}{9}$

2) abscisse $a = -\frac{7}{18}$

abscisse $b' = -\frac{4}{21}$

11. Calculez $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$



12. Vérifiez si $\Pi_0, \cdot$ est un groupe.

13. Le produit scalaire de deux vecteurs, est-il une opération commutative ?

14. On donne : $\vec{a} \cdot \vec{b} = 18$

b' projection orthogonale de b sur oa .

On demande : 1) l'abscisse de a , sachant que celle de $b' = 6$

2) l'abscisse de b' , sachant que celle de $a = 2$.

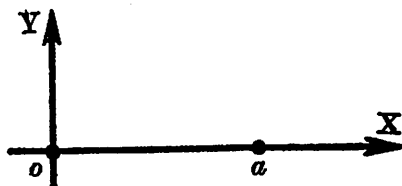
15. Dans un système d'axes orthonormé d'origine o dans Π_0 , les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{f} \in \Pi_0$ sont déterminés par :

$$a(7, 0) \quad b(4, 0) \quad c(4, -3) \quad d(4, 5) \quad e\left(4, \frac{7}{2}\right) \quad f(4, -6, 2)$$

Calculez $\vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{a} \cdot \vec{c}, \vec{a} \cdot \vec{d}, \vec{a} \cdot \vec{e}, \vec{a} \cdot \vec{f}$. Quelle est votre conclusion ?

16. Quand peut-on dire que $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$?

17. Sachant que abscisse $a = 4$, situez tous les points b tels que $\vec{b} \in \{ \vec{x} \mid \vec{x} \in \Pi_0 \text{ et } \vec{a} \cdot \vec{x} = 12 \}$.



18. Démontrez que la relation « ... $\perp$... » dans Π_0 est symétrique.

19. Démontrez que :

$$\begin{aligned} \vec{a} \perp \vec{b} &\Leftrightarrow 2\vec{a} \perp \vec{b} \\ \vec{a} \perp \vec{b} &\Leftrightarrow \vec{a} \perp 5\vec{b} \\ \vec{a} \perp \vec{b} &\Leftrightarrow 7\vec{a} \perp 3\vec{b} \end{aligned}$$

20. Démontrez que $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}(\vec{a} - \vec{b})$.

CHAPITRE XXI

L'ESPACE VECTORIEL EUCLIDIEN

1. Propriétés du produit scalaire

Propriété I

Le produit d'un vecteur par lui-même est appelé carré scalaire.
Nous écrivons :

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2$$

$$\vec{0} \cdot \vec{0} = \vec{0}^2$$

- 1) Nous savons déjà que $\vec{0} \cdot \vec{0} = 0$.

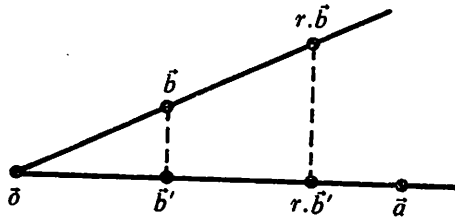
Par conséquent, le carré scalaire du vecteur zéro est nul.

- 2) $\vec{a} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = \text{abscisse } a \cdot \text{abscisse } a = (\text{abscisse } a)^2 > 0$.

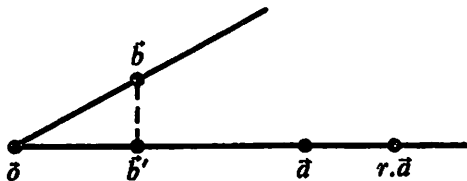
Par conséquent, le carré scalaire de tout vecteur non nul est positif.

Propriété II

- 1) $\vec{a} \cdot (r \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\text{la projection de } r \cdot \vec{b} \text{ sur } \vec{a})$
 $= \vec{a} \cdot (r\vec{b}')$
 $= \text{abscisse } a \cdot \text{abscisse } r \cdot b'$
 $= \text{abscisse } a \cdot r \cdot \text{abscisse } b'$
 $= r \cdot (\text{abscisse } a \cdot \text{abscisse } b')$
 $= r \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}')$
 $= r \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$



$$\begin{aligned} 2. (r \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} &= r \cdot \vec{a} \cdot (\text{la projection de } b \text{ sur } r \cdot \vec{a}) \\ &= (r \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b}' \\ &= \text{abscisse } r \cdot a \cdot \text{abscisse } b' \\ &= r \cdot \text{abscisse } a \cdot \text{abscisse } b' \\ &= r \cdot (\text{abscisse } a \cdot \text{abscisse } b') \\ &= r \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}') \\ &= r \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) \end{aligned}$$



Done :

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \in \Pi_0, \forall r \in \mathbb{R} : \\ r \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (r \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (r \cdot \vec{b})$$

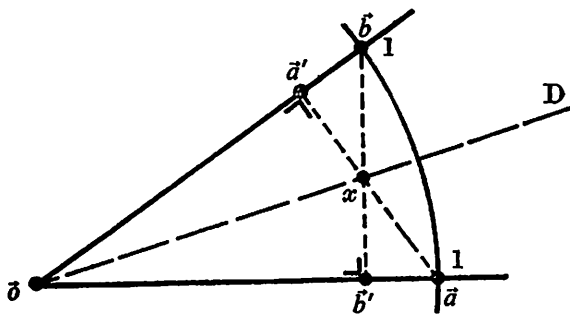
Pour multiplier un produit scalaire par un nombre, il suffit de multiplier un des vecteurs par ce nombre.

Le produit scalaire est associatif mixte.

Propriété III

Examinons la commutativité du produit scalaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

1. $\vec{a}$ et $\vec{b} \in \Pi_0$ sont des vecteurs unitaires, soit $\vec{a} = \vec{b} = 1$



$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}' = \text{abscisse } a \cdot \text{abscisse } b' = 1 \cdot \text{abscisse } b' =$
 $\text{abscisse } b'$

$\vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{a}' = \text{abscisse } b \cdot \text{abscisse } a' = 1 \cdot \text{abscisse } a' =$
 $\text{abscisse } a'$.

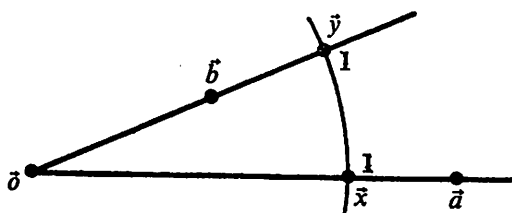
Construisez la bissectrice D de δ .

$$S_D [oa = ob$$

$$S_D (\vec{a}) = \vec{b}$$

$$\left. \begin{array}{l} xb' \perp oa \text{ et } b' \in oa \\ xa' \perp ob \text{ et } a' \in ob \end{array} \right\} \Rightarrow S_D(b') = a' = \text{abscisse } a' = \text{abscisse } b' \\ \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

2. $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont quelconques



$\vec{x}$ est le vecteur unitaire sur oa et $\vec{y} = 1$ sur ob . Nous avons donc :

$$\vec{a} = r \cdot \vec{x}$$

$$\vec{b} = s \cdot \vec{y}$$

Par suite de l'associativité mixte et puisque $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$, nous pouvons écrire :

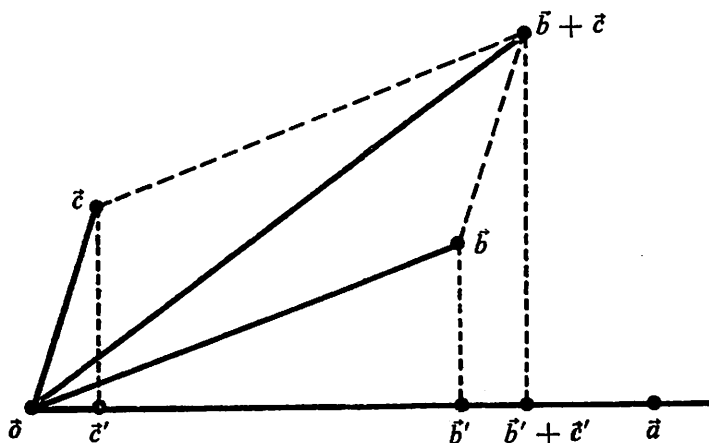
$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (r \cdot \vec{x}) \cdot (s \cdot \vec{y}) \\ &= r \cdot \vec{x} \cdot s \cdot \vec{y} \\ &= r \cdot s \cdot \vec{x} \cdot \vec{y} \\ &= s \cdot r \cdot \vec{y} \cdot \vec{x} \\ &= s \cdot \vec{y} \cdot r \cdot \vec{x} \\ &= (s \cdot \vec{y}) \cdot (r \cdot \vec{x}) \\ &= \vec{b} \cdot \vec{a} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \in \Pi_0 : \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

Le produit scalaire est commutatif.

Propriété IV



Soit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \Pi_0$. Construisons $\vec{b} + \vec{c} \in \Pi_0$.

Projetons $\vec{b}, \vec{c}$ et $\vec{b} + \vec{c}$ sur oa , d'où $\vec{b}', \vec{c}'$ et $\vec{b}' + \vec{c}'$, car la projection parallèle conserve la somme des vecteurs.

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \cdot (\vec{b}' + \vec{c}') = \text{abscisse } a \cdot \text{abscisse } (b' + c') \\ &= \text{abscisse } a \cdot (\text{abscisse } b' + \text{abscisse } c') \\ &= \text{abscisse } a \cdot \text{abscisse } b' + \text{abscisse } a \cdot \text{abscisse } c' \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

Donc :

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \Pi_0 : \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

Par suite de la commutativité du produit scalaire, nous pouvons écrire :

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \Pi_0 : (\vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{a}$$

Le produit scalaire d'un vecteur par une somme de vecteurs est égal à la somme des produits scalaires du vecteur par chacun des termes de la somme.

La multiplication scalaire distribue la somme des vecteurs.

Remarque :

Par l'application simultanée des propriétés II et IV, nous obtenons :

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \Pi_0, \forall r, s \in \mathbb{R} : \vec{a} \cdot (r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}) = r \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{a} \cdot \vec{c}$$

ce que nous énonçons en disant :

la multiplication scalaire est bilinéaire.

2. L'espace vectoriel euclidien

Puisque: 1) $\mathbb{R}, \Pi_0, +$ est un espace vectoriel,

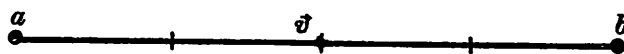
2) le carré scalaire est positif,

3) le produit scalaire est commutatif,

4) le produit scalaire est bilinéaire,

nous disons : $\mathbb{R}, \Pi_0, +$ pourvu de la multiplication scalaire, est un espace vectoriel euclidien.

3. Norme d'un vecteur



$|ab|$, mesure de $[ab]$, est appelé norme du vecteur $\vec{ab}$.

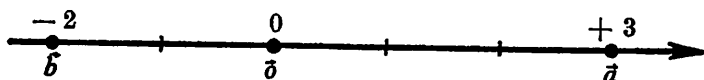
$$|\vec{ab}| = |v| = |ab| = 4$$

La norme d'un vecteur est donc toujours un nombre réel positif, soit :

$$\forall \vec{v} : |\vec{v}| \in \mathbb{R}^+$$

Remarque :

Pour $a \in D_0$, la valeur absolue de l'abscisse de a indique la norme de $\vec{a}$.



$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= 3 \\ |\vec{b}| &= 2 \\ |\vec{c}| &= 0 \end{aligned}$$

Nous savons que $\vec{a}^2 = (\text{abscisse } a)^2$ et $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = |\vec{oa}|^2 = |oa|^2$

Le carré scalaire d'un vecteur est égal au carré de sa norme.

Exemples :

$$\begin{aligned} |\vec{a}| = 3 &\Rightarrow \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 3^2 = 9 \\ |\vec{b}| = 2 &\Rightarrow \vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 2^2 = 4. \end{aligned}$$

Exercices

1. Développez :

- | | |
|---|---|
| 1) $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c})$ | 4) $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b})$ |
| 2) $(\vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{a}$ | 5) $(\vec{a} + \vec{b})^2$ |
| 3) $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{c} + \vec{d})$ | 6) $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + \vec{d})$ |

2. Effectuez :

- | | |
|--|---|
| 1) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a}$ | 8) $\vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$ |
| 2) $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ | 9) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})$ |
| 3) $(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{a}$ | 10) $(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})(\vec{a} + \vec{b})$ |
| 4) $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ | 11) $(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2$ |
| 5) $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ | 12) $(\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2$ |
| 6) $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) - \vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ | 13) $(\vec{a} - \vec{b})^2 + (\vec{a} + \vec{b})^2$ |
| 7) $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) - \vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ | 14) $(\vec{a} - \vec{b})^2 - (\vec{a} + \vec{b})^2$ |

Que deviennent les résultats, si $\vec{a} \perp \vec{b}$?

3. Effectuez :

- 1) $(3\vec{x} + 2\vec{y}) \cdot 5\vec{z}$
- 2) $-2\vec{x} \cdot (3\vec{x} + 2\vec{y} - 5\vec{z})$
- 3) $(5\vec{x} - 3\vec{y})(5\vec{x} + 2\vec{y})$
- 4) $2\vec{x} \cdot (5\vec{x} - 2\vec{y}) - 3\vec{y} \cdot (3\vec{y} - 2\vec{x})$
- 5) $(5\vec{x} - \vec{y})^2$
- 6) $(3\vec{x} - 2\vec{y})(3\vec{x} + 2\vec{y})$
- 7) $5\vec{x} \cdot (3\vec{x} - 2\vec{y} + 5\vec{z}) + 2\vec{y} \cdot (-2\vec{x} + 5\vec{y} + 4\vec{z})$
- 8) $(2\vec{x} + 5\vec{y})^2 - (3\vec{x} - 2\vec{y})^2$
- 9) $2\vec{x} \cdot (3\vec{y} - 2\vec{z}) + 5\vec{y} \cdot (2\vec{x} - 5\vec{z}) - 2\vec{z} \cdot (3\vec{y} - 7\vec{x})$
- 10) $3\vec{x} \cdot (5\vec{x} - 2\vec{y} + 3\vec{z}) - 5\vec{y} \cdot (-2\vec{x} + 3\vec{y} - 5\vec{z})$
 $+ 2\vec{z} \cdot (4\vec{x} - 3\vec{x} - 7\vec{z})$

Que deviennent les résultats, si $\vec{x} \perp \vec{y}$?

4. Sachant que $\vec{a} \perp \vec{b} \perp \vec{c} \perp \vec{d} \perp \vec{e} \perp \vec{f}$, calculez :

$$\vec{a} \cdot \vec{c} \cdot \vec{d}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{e} \cdot \vec{d}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} \cdot \vec{f} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{f} \cdot \vec{c}$$

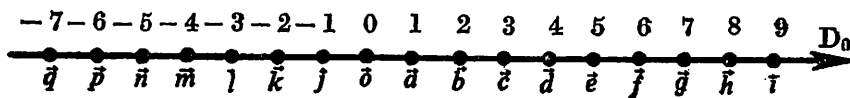
$$\vec{a} \cdot \vec{c} \cdot \vec{f} \cdot \vec{d} \cdot \vec{b} \cdot \vec{e}$$

5. A quelles conditions doivent satisfaire $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ pour que $3\vec{a} \cdot (2\vec{b} - 5\vec{c}) = 0$?

6. A quelles conditions doivent satisfaire $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$ pour que $(2\vec{a} - 3\vec{b})(4\vec{c} + 5\vec{d}) = 0$?

7. Démontrez que $(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

8.



A. Trouvez les normes de :

- | | | | |
|--------------|--------------|----------------|----------------|
| 1) $\vec{a}$ | 5) $\vec{h}$ | 9) $\vec{bg}$ | 13) $\vec{dm}$ |
| 2) $\vec{f}$ | 6) $\vec{n}$ | 10) $\vec{hc}$ | 14) $\vec{ef}$ |
| 3) $\vec{p}$ | 7) $\vec{j}$ | 11) $\vec{pk}$ | 15) $\vec{qi}$ |
| 4) $\vec{m}$ | 8) $\vec{e}$ | 12) $\vec{jq}$ | 16) $\vec{aj}$ |

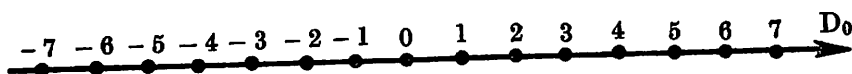
B. Comment appelle-t-on les paires suivantes ?

- | | |
|---------------------------|-----------------------------|
| 1) $\vec{d}$ et $\vec{m}$ | 5) $\vec{mq}$ et $\vec{dq}$ |
| 2) $\vec{p}$ et $\vec{f}$ | 6) $\vec{ad}$ et $\vec{gd}$ |
| 3) $\vec{a}$ et $\vec{j}$ | 7) $\vec{lc}$ et $\vec{cl}$ |
| 4) $\vec{n}$ et $\vec{e}$ | 8) $\vec{bn}$ et $\vec{jf}$ |

Déterminez la norme de chacun des vecteurs et complétez :
Deux vecteurs ... ont ... norme.

9. Sur D_0 , dessinez les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ tels que :

$$|\vec{a}| = 3, \quad |\vec{b}| = 7, \quad |\vec{c}| = 0, \quad |\vec{d}| = 5,3 \text{ et } |\vec{e}| = \frac{7}{3}.$$

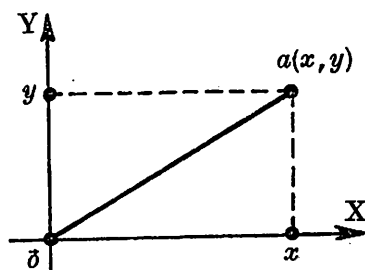


10. Dans un système d'axes orthonormé, $\vec{a} \in \Pi_0$ est donné par le point $a(x, y)$.

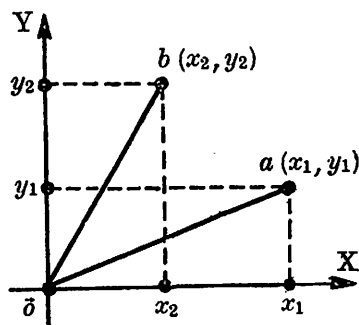
1. Démontrez que $\vec{a}^2 = x^2 + y^2$

2. Calculez $\vec{a}^2$ pour $a(-3, 7)$

pour $a\left(\frac{3}{5}, -\frac{5}{6}\right)$



11. Dans un système d'axes orthonormé, $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont donnés par les points $a(x_1, y_1)$ et $b(x_2, y_2)$.



1. Démontrez que $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$

2. Calculez $\vec{a} \cdot \vec{b}$ pour $a(5, 7)$ et $b(2, 4)$
pour $a(-3, 6)$ et $b(-1, -5)$

3. Démontrez : $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \frac{x_1}{y_1} = -\frac{y_2}{x_2}$

CHAPITRE XXII

THÉORÈME DE PYTHAGORE

1. Théorème

Dans le triangle rectangle abc , où $\hat{a} = 90^\circ$, nous constatons

$$\text{que } \vec{cb} = \vec{ca} + \vec{ab}$$

$$\vec{cb}^2 = (\vec{ca} + \vec{ab})^2$$

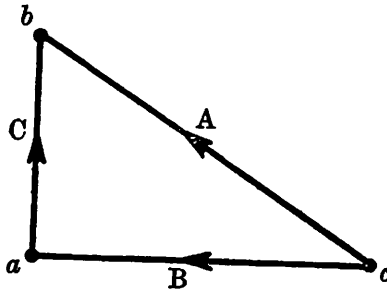
$$\vec{cb}^2 = \vec{ca}^2 + 2 \cdot \vec{ca} \cdot \vec{ab} + \vec{ab}^2$$

Mais $\vec{ca} \perp \vec{ab}$ donc $\vec{ca} \cdot \vec{ab} = 0$

$$\text{et } \vec{cb}^2 = \vec{ca}^2 + \vec{ab}^2$$

$$\Rightarrow |\vec{cb}|^2 = |\vec{ca}|^2 + |\vec{ab}|^2$$

$$\Rightarrow |cb|^2 = |ca|^2 + |ab|^2$$



$$\begin{array}{l} \text{Si } |cb| = A \\ |ca| = B \\ |ab| = C \end{array}$$

on obtient :

$$A^2 = B^2 + C^2$$

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.

2. Réciproque

$$A^2 = B^2 + C^2 \Rightarrow |\hat{a}| = 90^\circ$$

Dans le triangle abc , on a

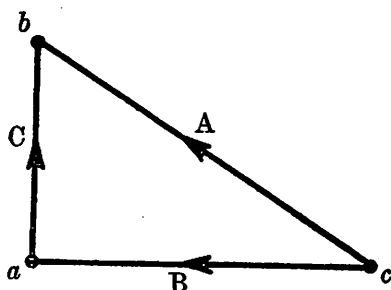
$$\vec{cb} = \vec{ca} + \vec{ab}$$

$$\vec{cb}^2 = (\vec{ca} + \vec{ab})^2$$

$$\vec{cb}^2 = \vec{ca}^2 + 2 \cdot \vec{ca} \cdot \vec{ab} + \vec{ab}^2$$

$$|\vec{cb}|^2 = |\vec{ca}|^2 + 2 \cdot \vec{ca} \cdot \vec{ab} + |\vec{ab}|^2$$

$$|cb|^2 = |ca|^2 + 2 \cdot \vec{ca} \cdot \vec{ab} + |ab|^2$$



$$\text{Mais } A^2 = B^2 + C^2 \text{ ou } |cb|^2 = |ca|^2 + |ab|^2$$

$$\text{et donc } 2 \vec{ca} \cdot \vec{ab} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{ca} \cdot \vec{ab} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{ca} \perp \vec{ab}$$

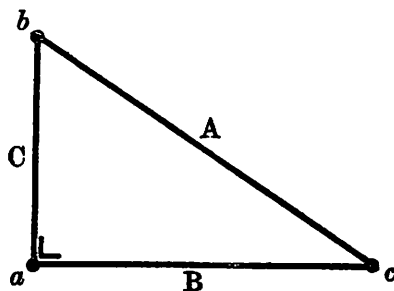
$$\Rightarrow ca \perp ab$$

$$\Rightarrow |\hat{a}| = 90^\circ$$

Si, dans un triangle, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors l'angle opposé au premier côté est un angle droit.

3. Application

Connaissant deux côtés d'un triangle rectangle, le théorème de Pythagore permet de calculer le troisième.



$$\begin{aligned} A^2 &= B^2 + C^2 &\Leftrightarrow A &= \sqrt{B^2 + C^2} \\ & &\Leftrightarrow B &= \sqrt{A^2 - C^2} \\ & &\Leftrightarrow C &= \sqrt{A^2 - B^2} \end{aligned}$$

Exemples :

$$\begin{aligned} 1) \quad & \left. \begin{array}{l} A = ? \\ B = 12 \text{ cm} \\ C = 5 \text{ cm} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow A = \sqrt{B^2 + C^2} \\ \Rightarrow A = \sqrt{12^2 + 5^2} \\ \Rightarrow A = \sqrt{144 + 25} \\ \Rightarrow A = \sqrt{169} \\ \Rightarrow A = 13 \end{array} \end{aligned}$$

$$A = 13 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & \left. \begin{array}{l} A = 50 \text{ m} \\ B = ? \\ C = 14 \text{ m} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow B = \sqrt{A^2 - C^2} \\ \Rightarrow B = \sqrt{50^2 - 14^2} \\ \Rightarrow B = \sqrt{2\,500 - 196} \\ \Rightarrow B = \sqrt{2\,304} \\ \Rightarrow B = 48 \end{array} \end{aligned}$$

$$B = 48 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & \left. \begin{array}{l} A = 32,5 \text{ m} \\ B = 16,5 \text{ m} \\ C = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow C = \sqrt{A^2 - B^2} \\ \Rightarrow C = \sqrt{32,5^2 - 16,5^2} \\ \Rightarrow C = \sqrt{1\,056,25 - 272,25} \\ \Rightarrow C = \sqrt{784} \\ \Rightarrow C = 28 \end{array} \end{aligned}$$

$$C = 28 \text{ m}$$

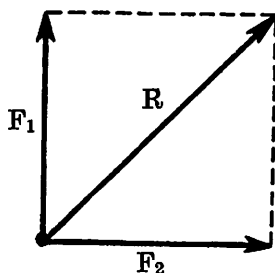
Exercices

1. Dans le triangle abc , $\hat{a} = 90^\circ$. Calculez le troisième côté à moins de 0,01 près.

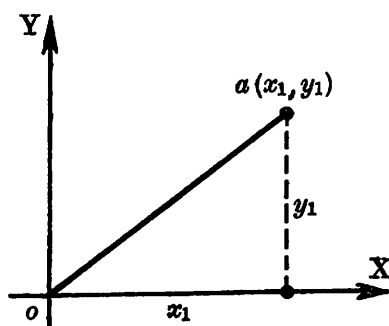
1) $A = \dots$	$B = 37 \text{ cm}$	$C = 23 \text{ cm}$
2) $A = 5,36 \text{ m}$	$B = 2,57 \text{ m}$	$C = \dots$
3) $A = 642 \text{ mm}$	$B = \dots$	$C = 395 \text{ mm}$
2. Dans un triangle rectangle, les côtés de l'angle droit sont 9,25 m et 11,5 m. Calculez l'hypoténuse à moins d'un mm près.
3. Un terrain a la forme d'un triangle rectangle. Son hypoténuse mesure 25 m, un côté de l'angle droit 20 m. Calculez le troisième côté.
4. La diagonale d'un rectangle égale 4,12 cm. Un côté mesure 2,4 cm. Calculez le deuxième côté à moins d'un mm près.
5. Dans un triangle rectangle, les côtés de l'angle droit sont entre eux comme 5 est à 12. Le périmètre mesure 600 m. Calculez les trois côtés.
6. Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est égale aux $\frac{15}{12}$ d'un côté de l'angle droit. Le périmètre mesure 126 m.
Calculez les trois côtés.
7. Les côtés d'un triangle rectangle sont 5 m, 12 m et 13 m. Quelle est l'hypoténuse?
Dans un triangle rectangle, est toujours le côté.
8. Lesquels des triangles suivants sont rectangles?

1) $A = 22 \text{ m}$	$B = 17 \text{ m}$	$C = 15 \text{ m}$
2) $A = 2,5 \text{ m}$	$B = 2,4 \text{ m}$	$C = 0,7 \text{ m}$
3) $A = \sqrt{10} \text{ cm}$	$B = \sqrt{7} \text{ cm}$	$C = \sqrt{3} \text{ cm}$
4) $A = 8 \text{ mm}$	$B = 4\sqrt{3} \text{ mm}$	$C = 4 \text{ mm}$
5) $A = 7 \text{ m}$	$B = 2\sqrt{7} \text{ m}$	$C = 3\sqrt{2} \text{ m}$

9. Deux forces égales F_1 et F_2 font entre elles un angle droit. Sachant que leur résultante $R = 338$ N, calculez les forces.



10. Une antenne de T.V. de 19 m est montée sur un toit plat au moyen de câbles. Ceux-ci, fixés à 3 m de l'extrémité de l'antenne, mesurent 20 m. A quelle distance du pied de l'antenne se trouvent les attaches des câbles ?
11. Les côtés parallèles d'un trapèze isocèle mesurent 21 et 13 cm. Les deux autres côtés égalent 5 cm. Calculez l'aire du trapèze et la longueur d'une diagonale.
12. Sachant que les diagonales d'un losange ont des longueurs de 42 cm et 56 cm, calculez le côté.
13. La base d'un triangle isocèle est représentée par A et les deux autres côtés par B. Exprimez l'aire du triangle en fonction de A et de B.
14. Le côté d'un triangle équilatéral est représenté par A. Exprimez l'aire du triangle en fonction de A.
15. Démontrez que les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque de la bissectrice d'un angle sur les côtés sont également distants du sommet.
16. Dans un système d'axes orthonormé, calculez la distance d'un point $a(x_1, y_1)$ à l'origine o .

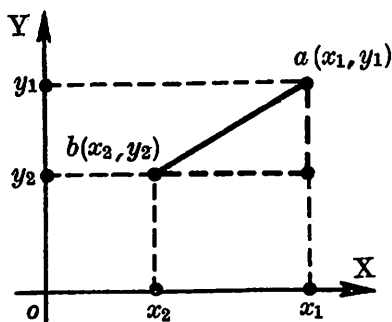


Appliquez ensuite la formule aux points suivants :

$$a(-3, 4) \quad b(1, 2, 0, 5) \quad c(-4, -8)$$

$$d(7, 24) \quad e\left(\frac{3}{2}, -\frac{4}{5}\right)$$

17. Dans un système d'axes orthonormé, calculez la distance entre les deux points $a(x_1, y_1)$ et $b(x_2, y_2)$.



Appliquez ensuite la formule trouvée aux points suivants :

1) $a(7, -2)$ et $b(4, -6)$

2) $c(0, 3, 6)$ et $d(-2, 2, 4)$

3) $e(-17, 15)$ et $f(-12, 3)$

4) $g(-7, 0)$ et $h(8, -20)$

5) $i(2\sqrt{3}, -7\sqrt{13})$ et $j(6\sqrt{3}, -3\sqrt{13})$

18. Démontrez que le triangle ayant pour sommets les points

$a(7, -2)$

$b(4, 2)$

$c(3, 1)$ est isocèle.

19. Démontrez que le triangle ayant pour sommets les points
 $a(5, 1)$
 $b(1, 5)$
 $c(3 - 2\sqrt{3}, (3 - 2\sqrt{3}))$ est équilatéral.

20. Démontrez qu'un trapèze $abcd$, dans lequel $ab \parallel cd$ et ayant pour sommets les points
 $a(2, 6), \quad b(2, -3), \quad c(5, 4), \quad d(5, -1)$
 est isocèle et que les diagonales sont égales.

21. Démontrez l'inégalité de Cauchy et Swartz :

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

22. Démontrez l'inégalité de Minkowski :

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

23. Démontrez que dans un triangle, un côté est plus petit que la somme des deux autres, mais plus grand que leur différence.

24. Pouvez-vous construire un triangle ayant pour côtés :

$$1) \quad A = 12 \text{ cm} \qquad B = 13 \text{ cm} \qquad C = 27 \text{ cm}$$

$$2) \quad A = 25 \text{ cm} \qquad B = 48 \text{ cm} \qquad C = 12 \text{ cm}$$

Justifiez votre réponse.

25. La médiane par rapport à un côté d'un triangle est inférieure à la demi-somme des deux autres côtés. Démontrez.

26. Démontrez que la somme des médianes d'un triangle est plus petite que le périmètre.

27. Dans un triangle rectangle, le carré d'un côté de l'angle droit est égal au produit de l'hypoténuse et de sa projection sur l'hypoténuse. Démontrez.

28. Démontrez que dans un triangle rectangle, les carrés des côtés de l'angle droit sont entre eux comme leurs projections sur l'hypoténuse.

29. Dans un triangle rectangle, le carré de la hauteur relative à l'hypoténuse est égal au produit des deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse. Démontrez.

CHAPITRE XXIII

GONIOMÉTRIE

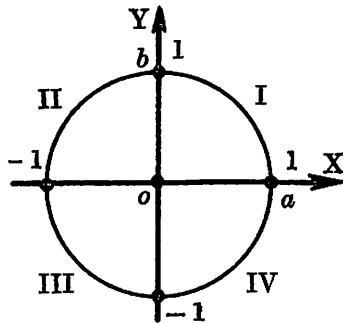
1. Cercle goniométrique

Soit $(\vec{a}, \vec{b})$ une base orthonormée dans Π_o .

Le cercle de centre o et passant par a et par b , est appelé cercle goniométrique.

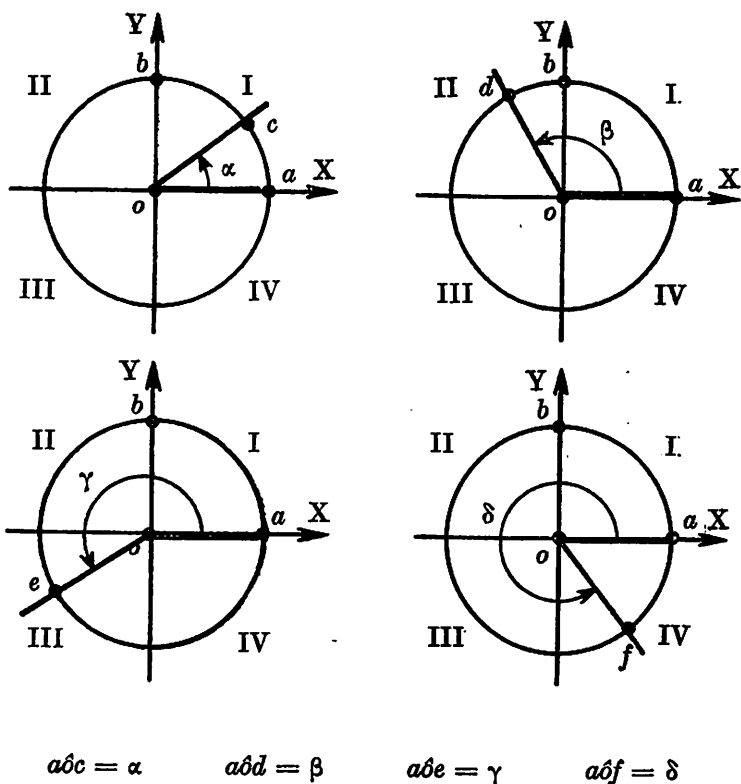
Le rayon du cercle goniométrique est donc égal à 1.

Les axes orthonormés de la base $(\vec{a}, \vec{b})$, divisent le cercle en 4 quadrants I, II, III, IV.

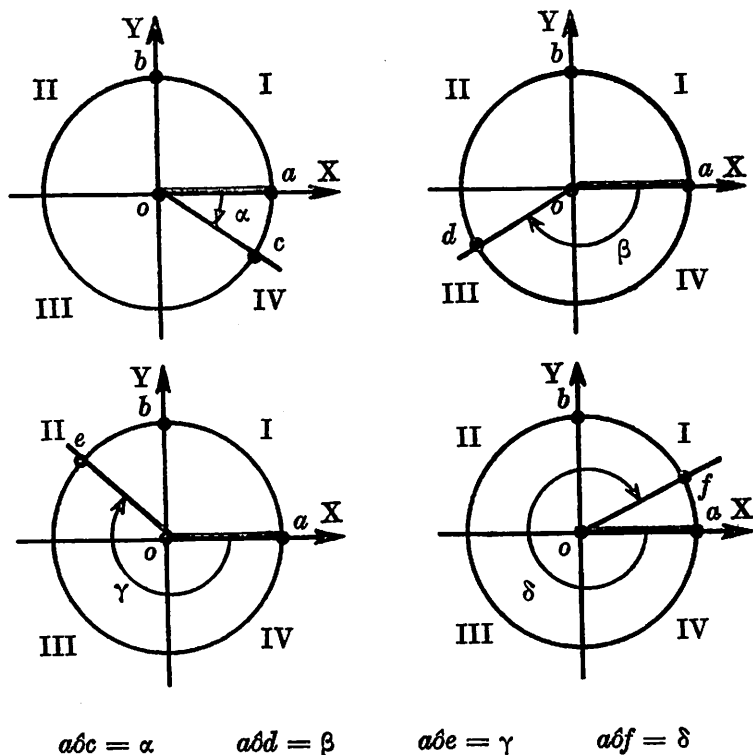


Pour tout angle orienté dans le cercle goniométrique, $[oa$ est la demi-droite origine. La demi-droite extrémité coupe le cercle en un seul point.

A un angle orienté correspond un seul point du cercle.



Le point c étant situé dans le premier quadrant, l'angle α est un angle du premier quadrant. β est un angle du deuxième, γ du troisième et δ du quatrième quadrant.



Un raisonnement analogue est valable pour les angles négatifs : α est un angle du quatrième, β du troisième, γ du deuxième et δ du premier quadrant.

2. Cosinus

a) Cosinus d'un couple de vecteurs non nuls

Par définition, le cosinus d'un couple de vecteurs non nuls est le produit scalaire de ces vecteurs divisé par le produit de leur norme.

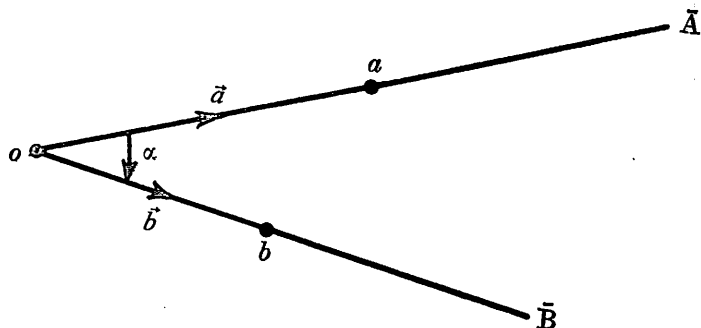
Ce qui s'écrit :

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Remarquons dès lors que le produit scalaire de deux vecteurs peut s'écrire :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

b) *Cosinus d'un angle*



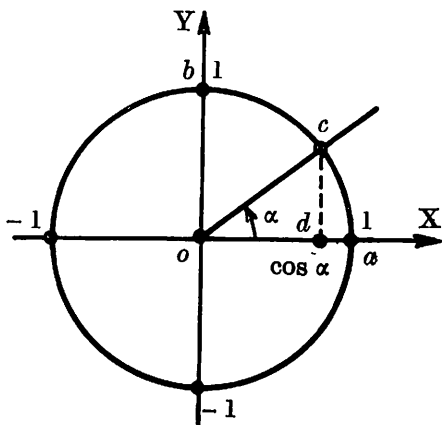
$$\cos \widehat{A \ B} = \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \cos \alpha$$

c) *Cosinus d'un angle rapporté au cercle goniométrique*

Soit l'angle orienté $\alpha = a\hat{c}$ rapporté au cercle goniométrique. En vertu des définitions précédentes, on a :

$$\cos \alpha = \cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{1 \cdot d}{1 \cdot 1} = d$$

Le cosinus de l'angle α est donc égal à l'abscisse du point c , soit d .



En général :

Le cosinus d'un angle rapporté au cercle goniométrique est l'abscisse du point d'intersection du cercle et du côté extrémité de l'angle.

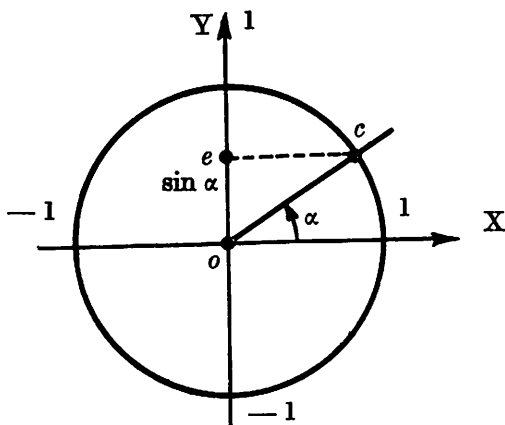
Conséquences :

- 1) Dans le cercle goniométrique, l'axe X est appelé axe des cosinus.
- 2) $\cos 0^\circ = 1$ $\cos 180^\circ = -1$
 $\cos 90^\circ = 0$ $\cos 270^\circ = 0$
- 3) $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$

3. Sinus

Le sinus d'un angle rapporté au cercle goniométrique est l'ordonnée du point d'intersection du cercle et du côté extrémité de l'angle.

Le sinus de l'angle α s'écrit $\sin \alpha$.



Conséquences :

- 1) Dans le cercle goniométrique, l'axe Y est appelé axe des sinus.
- 2) $\sin 0^\circ = 0$ $\sin 180^\circ = 0$
 $\sin 90^\circ = 1$ $\sin 270^\circ = -1$

3) $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$

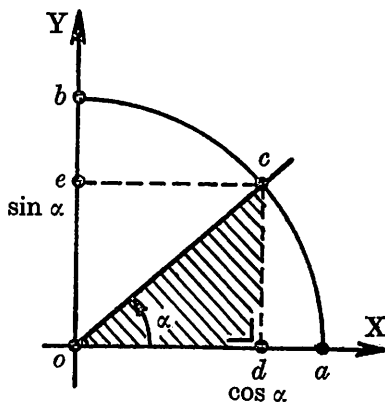
4) Les signes de $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$ se résument dans le tableau suivant :

	I	II	III	IV
$\cos \alpha$	+	—	—	+
$\sin \alpha$	+	+	—	—

4. Relation entre $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$

Le triangle cdo étant rectangle, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$|dc|^2 + |od|^2 = |oc|^2$$



Mais $|dc| = |oe| = \sin \alpha$
 $|od| = \cos \alpha$
 $|oc| = 1$

Donc

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1, \text{ soit}$$

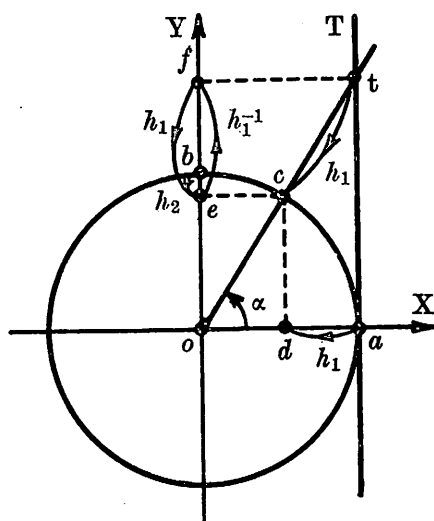
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

5. Tangente d'un angle

La tangente d'un angle est le quotient de son sinus par son cosinus.

La tangente de l'angle α est notée $\operatorname{tg} \alpha$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$



Traçons la tangente T au point a du cercle goniométrique.

Soit t le point d'intersection de T et de $[oc$.

Traçons *tf* // *oa*.

L'homothétie $h_1(o, \cos \alpha)$ applique a sur d , t sur c et f sur e .

L'homothétie $h_1^{-1}\left(o, \frac{1}{\cos \alpha}\right)$ applique donc e sur f .

L'homothétie h_2 (o , $\sin \alpha$) applique b sur e .

$h = h_1^{-1} \circ h_2$ est une homothétie de centre o , de rapport

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \text{ qui applique } b \text{ sur } f.$$

L'ordonnée de f est donc $\operatorname{tg} \alpha$.

Or, $[at] = [of]$.

Donc l'ordonnée de t égale $\operatorname{tg} \alpha$.

De ce fait, la droite T est appelée **axe des tangentes**.

D'où la nouvelle définition de la tangente d'un angle :

La tangente d'un angle rapporté au cercle goniométrique est l'ordonnée du point d'intersection de l'axe des tangentes et du côté extrémité de l'angle.

Conséquences :

$$\operatorname{tg} 0^\circ = 0$$

$$\operatorname{tg} 180^\circ = 0$$

$\operatorname{tg} 90^\circ$ et $\operatorname{tg} 270^\circ$ ne sont pas définies.

6. Cotangente d'un angle

La cotangente d'un angle est le quotient de son cosinus et de son sinus.

La cotangente de l'angle α est notée $\operatorname{cotg} \alpha$.

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Conséquences :

$\operatorname{cotg} 0^\circ$ et $\operatorname{cotg} 180^\circ$ ne sont pas définies.

$$\operatorname{cotg} 90^\circ = 1$$

$$\operatorname{cotg} 270^\circ = -1$$

7. Relation entre $\operatorname{tg} \alpha$ et $\operatorname{cotg} \alpha$

$\operatorname{tg} \alpha$ et $\operatorname{cotg} \alpha$ étant inverses l'un de l'autre, on a :

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 1$$

Remarque :

$\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ et $\operatorname{cotg} \alpha$ sont appelés les nombres goniométriques de l'angle α .

8. Nombres goniométriques d'angles opposés

abscisse de $c' =$ abscisse de c

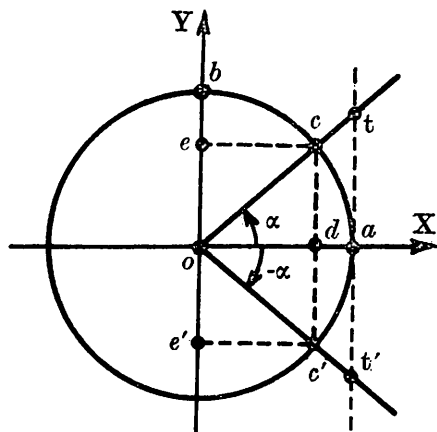
ordonnée de $c' = -$ ordonnée de c

ordonnée de $t' = -$ ordonnée de t

$$\text{d'où } \cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$



$$\text{De plus, } \cotg(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\cotg \alpha$$

Les cosinus de deux angles opposés sont égaux.
 Les sinus de deux angles opposés sont opposés.
 Les tangentes de deux angles opposés sont opposées.
 Les cotangentes de deux angles opposés sont opposées.

Exemples :

$$\cos(-28^\circ) = \cos 28^\circ$$

$$\sin(-52^\circ) = -\sin 52^\circ$$

$$\operatorname{tg}(-76^\circ) = -\operatorname{tg} 76^\circ$$

$$\cotg(-87^\circ) = -\cotg 87^\circ$$

9. Nombres goniométriques d'angles complémentaires

odc iso ohf car

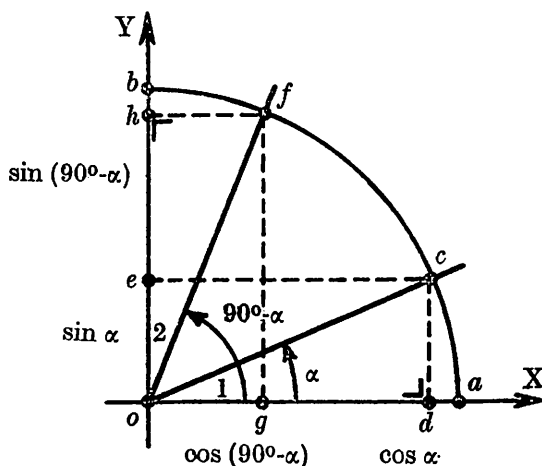
$$1) |\hat{d}| = |\hat{h}| = 90^\circ$$

$$2) |oc| = |of|$$

$$3) |\hat{o}_1| = |\hat{o}_2| = |\alpha|$$

$$\Rightarrow |hf| = |dc| \Rightarrow \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\Rightarrow |oh| = |od| \Rightarrow \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$



On en déduit :

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{cotg} \alpha$$

$$\operatorname{cotg}(90^\circ - \alpha) = \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

En résumé :

$\begin{aligned}\cos(90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \sin(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha \\ \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{cotg} \alpha \\ \operatorname{cotg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{tg} \alpha\end{aligned}$
--

Exemples :

$$\sin 72^\circ 18' = \cos(90^\circ - 72^\circ 18') = \cos 17^\circ 42'$$

$$\cos 24^\circ 20' = \sin(90^\circ - 24^\circ 20') = \sin 65^\circ 40'$$

$$\operatorname{tg} 84^\circ 19' 32'' = \operatorname{cotg}(90^\circ - 84^\circ 19' 32'') = \operatorname{cotg} 5^\circ 40' 28''$$

$$\operatorname{cotg} 60^\circ 16' 38'' = \operatorname{tg}(90^\circ - 60^\circ 16' 38'') = \operatorname{tg} 29^\circ 43' 22''$$

10. Tables des nombres goniométriques.

Il existe des tables donnant avec un certain nombre de décimales, les valeurs des nombres goniométriques d'angles compris entre 0° et 90° .

Nous utiliserons les tables à 5 décimales, les angles variant de minute en minute.

Exercices

1. Complétez le tableau suivant :

	0°	90°	180°	270°	360°
sin					
cos					
tg					
cotg					

2. Dans le cercle goniométrique, construisez les angles α tels que :

1) $\sin \alpha = 0,7$

2) $\sin \alpha = -\frac{1}{4}$

3) $\cos \alpha = -0,4$

4) $\cos \alpha = 0,8$

3. Démontrez que $0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow \sin \alpha < \operatorname{tg} \alpha$.

4. Complétez par + ou -

	I	II	III	IV
$\operatorname{tg} \alpha$				
$\operatorname{cotg} \alpha$				

5. Complétez le tableau suivant :

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{cotg} \alpha$
1	$\frac{15}{17}$	—	—	—
2	—	$\frac{3}{5}$	—	—
3	$-\frac{7}{25}$	—	—	—
4	—	$-\frac{40}{41}$	—	—

6. Etablissez des formules permettant de trouver les nombres goniométriques d'angles supplémentaires.

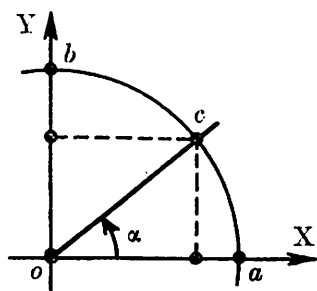
7. a) Existe-t-il un angle α tel que $\sin \alpha = \frac{2}{5}$ et $\cos \alpha = \frac{3}{5}$?

Justifiez votre réponse.

b) Même question pour $\sin \alpha = -0,6$ et $\cos \alpha = 0,8$.

8. Démontrez que : $\cos \alpha = \vec{a} \cdot \vec{c}$

$$\sin \alpha = \vec{b} \cdot \vec{c}$$



9. Calculez :

1) $\frac{2 \sin \alpha + 3 \cos \alpha}{5 \cos \alpha - 7 \sin \alpha}$ si $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{3}$

2) $\frac{3 \sin^2 \alpha + 5 \cos^2 \alpha}{13 \cos^2 \alpha - 8 \sin^2 \alpha}$ si $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{3}{5}$

10. Démontrez que :

- 1) $\sin 27^\circ = \cos 63^\circ$
- 2) $\operatorname{tg} 56^\circ 19' 37'' = \operatorname{cotg} 33^\circ 40' 23''$
- 3) $\sin (30^\circ + \alpha) = \cos (60^\circ - \alpha)$
- 4) $\operatorname{tg} (45^\circ - \alpha) = \operatorname{cotg} (45^\circ + \alpha)$
- 5) $\operatorname{tg} (45^\circ + \alpha) \cdot \operatorname{tg} (45^\circ - \alpha) = 1$

11. Complétez :

- 1) $\cos 63^\circ 43' = \sin \dots$
- 2) $\operatorname{cotg} 17^\circ 41' 27'' = \dots$
- 3) $\cos (60^\circ + \alpha) = \dots$
- 4) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} (90^\circ - \alpha) = \dots$
- 5) $\operatorname{cotg} (27^\circ - \alpha) \cdot \operatorname{cotg} (\alpha + 63^\circ) = \dots$

12. Simplifiez :

- 1) $\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1$
- 2) $(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)$
- 3) $(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)$
- 4) $\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} + \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha}$
- 5) $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$
- 6) $\left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{cotg} \alpha} \right) \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha$
- 7) $(1 + \operatorname{cotg} \alpha) \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}$
- 8) $\frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - \frac{1}{\sin \alpha}$

13. Démontrez :

- 1) $1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$
- 2) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$

$$3) \frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha = \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$4) \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha$$

$$5) \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \operatorname{cotg} \alpha \right) (1 - \cos \alpha) = \sin \alpha$$

$$6) 1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$7) 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$8) \frac{\operatorname{cotg} \alpha}{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha} = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

14. A l'aide des tables, trouvez la valeur de :

- | | | |
|-----------------------------------|--|---|
| 1) $\sin 32^\circ$ | 9) $\sin 7^\circ 23'$ | 17) $\sin 27^\circ 36' 45''$ |
| 2) $\cos 41^\circ$ | 10) $\cos 39^\circ 45'$ | 18) $\cos 5^\circ 23' 36''$ |
| 3) $\operatorname{tg} 27^\circ$ | 11) $\operatorname{tg} 15^\circ 37'$ | 19) $\operatorname{tg} 42^\circ 17' 27''$ |
| 4) $\operatorname{cotg} 18^\circ$ | 12) $\operatorname{cotg} 23^\circ 52'$ | 20) $\operatorname{cotg} 35^\circ 35' 35''$ |
| 5) $\sin 63^\circ$ | 13) $\sin 49^\circ 5'$ | 21) $\sin 53^\circ 48' 52''$ |
| 6) $\cos 82^\circ$ | 14) $\cos 71^\circ 17'$ | 22) $\cos 61^\circ 25' 18''$ |
| 7) $\operatorname{tg} 56^\circ$ | 15) $\operatorname{tg} 85^\circ 31'$ | 23) $\operatorname{tg} 75^\circ 53' 7''$ |
| 8) $\operatorname{cotg} 74^\circ$ | 16) $\operatorname{cotg} 67^\circ 48'$ | 24) $\operatorname{cotg} 87^\circ 5' 23''$ |

15. A l'aide des tables, trouvez x .

- | | | |
|--------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 1) $\sin x = 0,39073$ | 9) $\sin x = 0,14781$ | 17) $\sin x = 0,42932$ |
| 2) $\cos x = 0,99985$ | 10) $\cos x = 0,77421$ | 18) $\cos x = 0,86406$ |
| 3) $\operatorname{tg} x = 0,86929$ | 11) $\operatorname{tg} x = 0,46171$ | 19) $\operatorname{tg} x = 0,92741$ |
| 4) $\operatorname{cotg} x = 1,53986$ | 12) $\operatorname{cotg} x = 3,02667$ | 20) $\operatorname{cotg} x = 2,15950$ |
| 5) $\sin x = 0,81915$ | 13) $\sin x = 0,89193$ | 21) $\sin x = 0,73380$ |
| 6) $\cos x = 0,69466$ | 14) $\cos x = 0,67623$ | 22) $\cos x = 0,43295$ |
| 7) $\operatorname{tg} x = 2,74748$ | 15) $\operatorname{tg} x = 8,96227$ | 23) $\operatorname{tg} x = 1,71534$ |
| 8) $\operatorname{cotg} x = 0,50953$ | 16) $\operatorname{cotg} x = 0,32717$ | 24) $\operatorname{cotg} x = 0,88916$ |

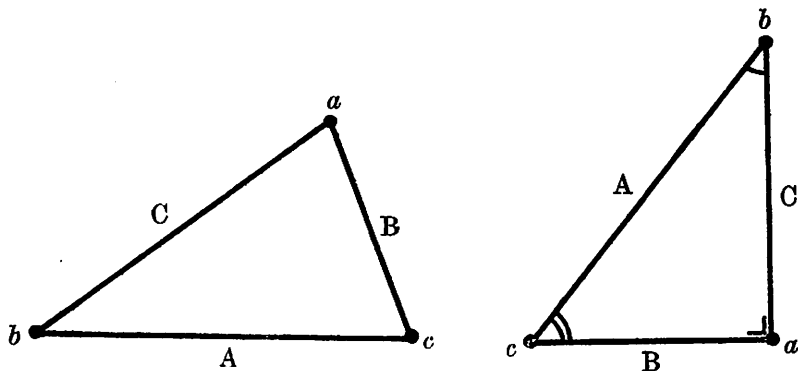
CHAPITRE XXIV

RÉSOLUTION DES TRIANGLES RECTANGLES

1. Notion

Un triangle abc comporte six éléments : trois angles $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ et trois côtés A , B , C .

Résoudre un triangle, c'est déterminer la valeur de tous ses éléments.



2. Relations dans un triangle rectangle

1. Relation entre les angles

$$\left. \begin{array}{l} \hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180^\circ \\ \hat{a} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\hat{b} + \hat{c} = 90^\circ} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \hat{b} = 90^\circ - \hat{c} \\ \Rightarrow \hat{c} = 90^\circ - \hat{b} \end{array}$$

2. Relation entre les côtés

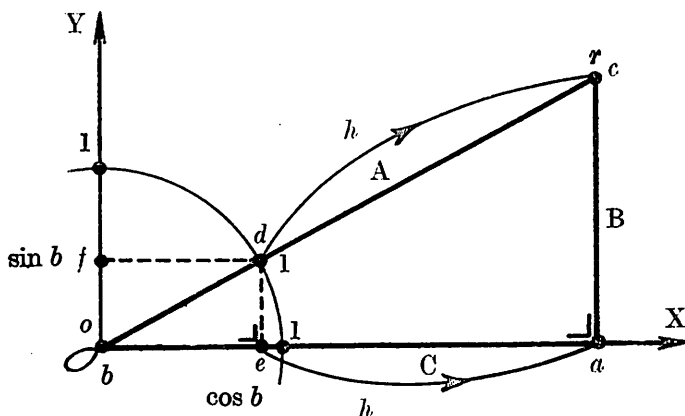
$$\hat{a} = 90^\circ \Rightarrow \boxed{A^2 = B^2 + C^2} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow A = \sqrt{B^2 + C^2} \\ \Rightarrow B = \sqrt{A^2 - C^2} \\ \Rightarrow C = \sqrt{A^2 - B^2} \end{array}$$

3. Relations entre les côtés et les nombres goniométriques des angles

a. Considérons le triangle rectangle abc

Traçons le système d'axes rectangulaires ayant b comme origine et ba comme axe des X.

Avec b comme centre, construisons le cercle goniométrique coupant bc en d .



Traçons $de \parallel$ axe Y

$df \parallel$ axe X.

Nous avons $|be| = \cos b$

$|bf| = |ed| = \sin b$

b, d et c déterminent l'homothétie $h(b, r)$

et puisque $de \parallel ca$,

on a $(e, a) \in h$.

Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} |ac| = A = r \\ |ba| = B = r \\ |bc| = C = r \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} |ed| \\ |be| \\ |bd| \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ou } A = r \cdot \sin b \\ \text{ou } B = r \cdot \cos b \\ \text{ou } C = r \cdot 1 = r \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B = A \sin b \\ C = A \cos b \end{array} \right.$$

b. Divisons les formules trouvées, membre à membre :

$$\frac{B}{C} = \frac{A \sin b}{A \cos b} = \frac{\sin b}{\cos b} = \operatorname{tg} b \quad \text{donc} \quad B = C \operatorname{cotg} b$$

$$\frac{C}{B} = \frac{A \cos b}{A \sin b} = \frac{\cos b}{\sin b} = \operatorname{cotg} b \quad \text{donc} \quad C = B \operatorname{cotg} b$$

$$c. \quad b + \hat{c} = 90^\circ \Rightarrow \sin b = \cos \hat{c}$$

$$\cos b = \sin \hat{c}$$

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{cotg} \hat{c}$$

$$\operatorname{cotg} b = \operatorname{tg} \hat{c}$$

$$\begin{aligned}
 \text{et donc } B &= A \sin \hat{b} & \Leftrightarrow & B = A \cos \hat{c} \\
 C &= A \cos \hat{b} & \Leftrightarrow & C = A \sin \hat{c} \\
 B &= C \operatorname{tg} \hat{b} & \Leftrightarrow & B = C \operatorname{cotg} \hat{c} \\
 C &= B \operatorname{cotg} \hat{b} & \Leftrightarrow & C = B \operatorname{tg} \hat{c}
 \end{aligned}$$

RÉSUMÉ

Un côté de l'angle droit égale

$B = A \sin \hat{b}$	}	l'hypoténuse $\times$ sinus de l'angle opposé
$C = A \sin \hat{c}$		
$B = A \cos \hat{c}$	}	l'hypoténuse $\times$ cosinus de l'angle adjacent
$C = A \cos \hat{b}$		
$B = C \operatorname{tg} \hat{b}$	}	le deuxième côté de l'angle droit $\times$ tangente de l'angle opposé
$C = B \operatorname{tg} \hat{c}$		
$B = C \operatorname{cotg} \hat{c}$	}	le deuxième côté de l'angle droit $\times$ cotangente de l'angle adjacent.
$C = B \operatorname{cotg} \hat{b}$		

Les formules ci-dessus peuvent s'écrire de la façon suivante :

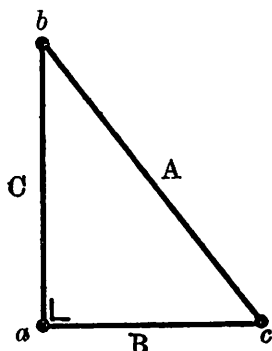
Pour un angle aigu :

$\sin \hat{b} = \frac{B}{A}$	}	sinus de l'angle = $\frac{\text{le côté opposé}}{\text{l'hypoténuse}}$
$\sin \hat{c} = \frac{C}{A}$		
$\cos \hat{b} = \frac{C}{A}$	}	cosinus de l'angle = $\frac{\text{le côté adjacent}}{\text{l'hypoténuse}}$
$\cos \hat{c} = \frac{B}{A}$		
$\operatorname{tg} \hat{b} = \frac{B}{C}$	}	tangente de l'angle = $\frac{\text{le côté opposé}}{\text{le côté adjacent}}$
$\operatorname{tg} \hat{c} = \frac{C}{B}$		
$\operatorname{cotg} \hat{b} = \frac{C}{B}$	}	cotangente de l'angle = $\frac{\text{le côté adjacent}}{\text{le côté opposé}}$
$\operatorname{cotg} \hat{c} = \frac{B}{C}$		

3. Résolution des triangles rectangles

L'angle droit étant connu, la résolution d'un triangle rectangle requiert la connaissance de deux autres éléments, dont nécessairement un côté.

Quatre cas peuvent se présenter.



1^{er} cas

On donne : $\hat{a} = 90^\circ$, A , b

On demande : $\hat{c}$, B , C

Solution : 1) $b + \hat{c} = 90^\circ \Rightarrow \hat{c} = 90^\circ - b$

$$2) B = A \sin b$$

$$3) C = A \cos b$$

Exemple :

On donne : $\hat{a} = 90^\circ$, $A = 20$ m, $b = 18^\circ 20' 40''$

On demande : $\hat{c}$, B , C

Solution :

$$\begin{aligned} 1) \hat{c} &= 90^\circ - b \\ \hat{c} &= 90^\circ - 18^\circ 20' 40'' \\ \hat{c} &= 71^\circ 39' 20'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) B &= A \sin b \\ B &= 20 \times \sin 18^\circ 20' 40'' \\ B &= 20 \times 0,31473 \\ B &= 6,29 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) C &= A \cos b \\ C &= 20 \times \cos 18^\circ 20' 40'' \\ C &= 20 \times 0,94918 \\ C &= 18,98 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} \sin 18^\circ 20' & = 0,31454 \\ + 40'' & + 19 \end{array} \quad \left| \quad \frac{28 \times 40}{60} = 19 \right.$$

$$\sin 18^\circ 20' 40'' = 0,31473$$

$$\begin{array}{r|l} \cos 18^\circ 20' & = 0,94924 \\ + 40'' & - 6 \end{array} \quad \left| \quad \frac{9 \times 40}{60} = 6 \right.$$

$$\cos 18^\circ 20' 40'' = 0,94718$$

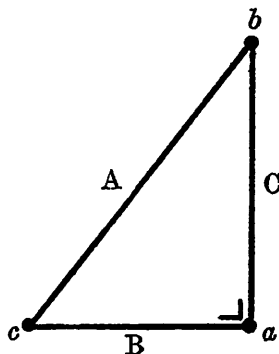
$$\begin{aligned} \text{Donc } \hat{a} &= 90^\circ \\ A &= 20 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= 18^\circ 20' 40'' \\ B &= 6,29 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{c} &= 71^\circ 39' 20'' \\ C &= 18,98 \text{ m} \end{aligned}$$

2^{ème} cas

 On donne : $a = 90^\circ$, A, B

 On demande : C, $\hat{b}$, $\hat{c}$

 Solution : 1) $A^2 = B^2 + C^2 \Rightarrow C = \sqrt{A^2 - B^2}$

$$2) \sin \hat{b} = \frac{B}{A}$$

$$3) \cos \hat{c} = \frac{B}{A}$$

Exemple :

 On donne : $\hat{a} = 90^\circ$, A = 18,4 cm, B = 12,8 cm

 On demande : C, $\hat{b}$, $\hat{c}$

Solution :

$$1) C = \sqrt{A^2 - B^2}$$

$$C = \sqrt{18,4^2 - 12,8^2}$$

$$C = \sqrt{338,56 - 163,84}$$

$$C = \sqrt{174,72}$$

$$C = 13,21 \text{ cm}$$

$$2) \sin \hat{b} = \frac{B}{A}$$

$$\sin \hat{b} = \frac{12,8}{18,4} = 0,69565$$

$$\hat{b} = 44^\circ 4' 46''$$

$$3) \cos \hat{c} = \frac{B}{A}$$

$$\cos \hat{c} = 0,69565$$

$$\hat{c} = 45^\circ 55' 14''$$

$$\begin{array}{l|l} 0,69549 = \sin 44^\circ 4' & \frac{60 \times 16}{21} = 46 \\ + 16 & + 46'' \end{array}$$

$$0,69565 = \sin 44^\circ 4' 46''$$

$$\begin{array}{l|l} 0,69549 = \cos 45^\circ 56' & \frac{60 \times 16}{21} = 46 \\ + 16 & - 46'' \end{array}$$

$$0,69565 = \cos 45^\circ 55' 14''$$

 Donc $\hat{a} = 90^\circ$

A = 18,4 cm

 $\hat{b} = 44^\circ 4' 46''$

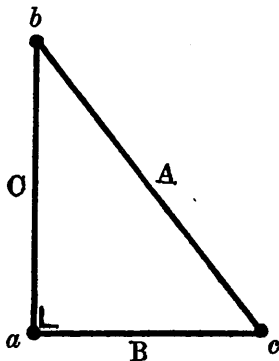
B = 12,8 cm

 $\hat{c} = 45^\circ 55' 14''$

C = 13,21 cm

 Preuve : $\hat{b} = 44^\circ 4' 46''$
 $\hat{c} = 45^\circ 55' 14''$

$$\hat{b} + \hat{c} = 90^\circ$$

3^{ème} casOn donne : $\hat{a} = 90^\circ$, B, $\hat{b}$ On demande : $\hat{c}$, A, CSolution : 1) $c = 90^\circ - \hat{b}$ 2) $C = B \cotg \hat{b}$ 3) $B = A \sin \hat{b} \Rightarrow A = \frac{B}{\sin \hat{b}}$ *Exemple :*On donne : $\hat{a} = 90^\circ$, B = 96 m, $\hat{b} = 27^\circ 32'$ On demande : $\hat{c}$, A, C

Solution :

1) $\hat{c} = 90^\circ - \hat{b}$ $\hat{c} = 90^\circ - 27^\circ 32'$ $\hat{c} = 62^\circ 28'$ 2) $C = B \cotg \hat{b}$ $C = 96 \times \cotg 27^\circ 32'$ $C = 96 \times 1,91826$ $C = 184,15 \text{ m}$ 3) $A = \frac{B}{\sin \hat{b}}$ $A = \frac{96}{\sin 27^\circ 32'}$ $A = \frac{96}{0,46226}$ $A = 207,6 \text{ m}$ Donc $\hat{a} = 90^\circ$

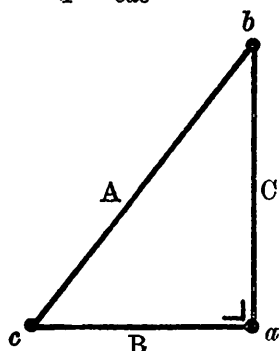
A = 207,6 m

 $\hat{b} = 27^\circ 32'$

B = 96 m

 $\hat{c} = 62^\circ 28'$

C = 184,15 m

4^{ème} casOn donne : $\hat{a} = 90^\circ$, B, COn demande : A, $\hat{b}$, $\hat{c}$ Solution : 1) $A^2 = B^2 + C^2$

$$\Rightarrow A = \sqrt{B^2 + C^2}$$

$$2) \operatorname{tg} \hat{b} = \frac{B}{C}$$

$$3) \operatorname{cotg} \hat{c} = \frac{B}{C}$$

*Exemple :*On donne : $\hat{a} = 90^\circ$, B = 56 m, C = 42 mOn demande : A, $\hat{b}$, $\hat{c}$.

Solution :

$$1) A = \sqrt{B^2 + C^2}$$

$$A = \sqrt{56^2 + 42^2}$$

$$A = \sqrt{3136 + 1764}$$

$$A = \sqrt{4900}$$

$$A = 70 \text{ m}$$

$$2) \operatorname{tg} \hat{b} = \frac{B}{C}$$

$$\operatorname{tg} \hat{b} = \frac{56}{42} = 1,33333$$

$$\hat{b} = 53^\circ 7' 48''$$

$$3) \operatorname{cotg} \hat{c} = \frac{B}{C}$$

$$\operatorname{cotg} \hat{c} = 1,33333$$

$$\hat{c} = 36^\circ 52' 12''$$

$\begin{array}{r} 1,33268 = \operatorname{tg} 53^\circ 7' \\ + 65 \qquad \qquad + 48'' \end{array}$	$\frac{65 \times 60}{81} = 48$
$1,33333 = \operatorname{tg} 53^\circ 7' 48''$	
$\begin{array}{r} 1,33268 = \operatorname{cotg} 36^\circ 53' \\ + 65 \qquad \qquad - 48'' \end{array}$	$\frac{65 \times 60}{81} = 48$
$1,33333 = \operatorname{cotg} 36^\circ 52' 12''$	

Donc $\hat{a} = 90^\circ$
A = 70 m

$\hat{b} = 53^\circ 7' 48''$
B = 56 m

$\hat{c} = 36^\circ 52' 12''$
C = 42 m

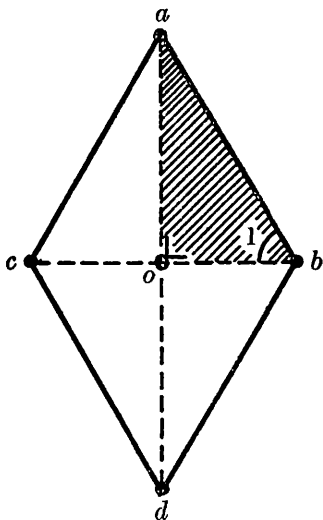
Preuve : $\hat{b} = 53^\circ 7' 48''$
 $\hat{c} = 36^\circ 52' 12''$

$$\hat{b} + \hat{c} = 90^\circ$$

4. Applications

1. L'angle obtus d'un losange mesure $148^{\circ} 20' 16''$ et la petite diagonale égale 38,2 cm.

Calculez le côté et la grande diagonale.



On donne :

$$\begin{aligned} |ab| &= |bd| = |dc| = |ca| \\ \hat{b} &= 148^{\circ} 20' 16'' \\ |bc| &= 38,2 \text{ cm} \end{aligned}$$

On demande :

$$|ab| \text{ et } |ad|$$

Solution :

Dans le triangle rectangle aob , on a

$$\hat{b}_1 = 148^{\circ} 20' 16'' : 2 = 74^{\circ} 10' 8''$$

$$|ob| = 38,2 \text{ cm} : 2 = 19,1 \text{ cm}$$

1) $|ab| = ?$

$$\cos \hat{b}_1 = \frac{|ob|}{|ab|} \Rightarrow |ab| = \frac{|ob|}{\cos \hat{b}_1}$$

$$|ab| = \frac{19,1}{\cos 74^{\circ} 10' 8''} = \frac{19,1}{0,27280}$$

$$|ab| = 70 \text{ cm}$$

$$\begin{array}{r|l} \cos 74^{\circ} 10' & = 0,27284 \\ - 8'' & - 4 \end{array} \quad \left| \quad \frac{28 \times 8}{60} = 4 \right.$$

$$\cos 74^{\circ} 10' 8'' = 0,27280$$

2) $|ad| = ?$

$$|ao| = |ob| \operatorname{tg} \hat{b}_1$$

$$|ao| = 19,1 \times \operatorname{tg} 74^{\circ} 10' 8''$$

$$|ao| = 19,1 \times 3,52661$$

$$|ao| = 67,35 \text{ cm}$$

$$|ad| = 67,35 \times 2$$

$$|ad| = 134,7 \text{ cm}$$

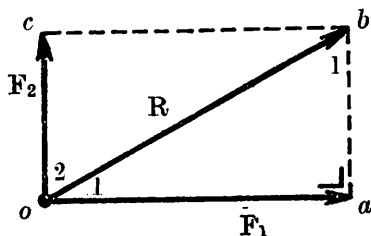
$$\begin{array}{r|l} \operatorname{tg} 74^{\circ} 10' & = 3,52609 \\ + 8'' & + 52 \end{array} \quad \left| \quad \frac{392 \times 8}{60} = 52 \right.$$

$$\operatorname{tg} 74^{\circ} 10' 8'' = 3,52661$$

2. Deux forces rectangulaires d'intensité respective de 840 N et 630 N sont appliquées à un corps solide.

Calculez la résultante R ainsi que l'angle formé par la résultante et chacune des composantes F_1 et F_2 .

On donne : $F_1 = |oa| = 840 \text{ N}$
 $F_2 = |oc| = 630 \text{ N}$



On demande : $R = |ob|$
 δ_1
 δ_2

Solution :

Dans le triangle rectangle oab , on a $|ab| = |oc| = 630 \text{ N}$.

- 1) $R = ?$

$$\begin{aligned} |ob|^2 &= |oa|^2 + |ab|^2 \\ &= 840^2 + 630^2 \\ &= 705\,600 + 396\,900 \\ &= 1\,102\,500 \end{aligned}$$

$$|ob| = \sqrt{1\,102\,500} = 1\,050$$

$$R = 1\,050 \text{ N}$$

- 2) $\delta_1 = ?$

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{|ab|}{|oa|} = \frac{630}{840} = 0,75000$$

$$\delta_1 = 36^\circ 52' 12''$$

- 3) $\delta_2 = ?$

$$\delta_2 = \delta_1$$

$$\operatorname{cotg} \delta_1 = \frac{|ab|}{|oa|} = 0,75000$$

$$\delta_1 = 53^\circ 7' 48''$$

$$\delta_2 = 53^\circ 7' 48''$$

$$\begin{array}{r|l} 0,74991 = \operatorname{tg} 36^\circ 52' & \frac{60 \times 9}{46} = 12 \\ + 9 & + 12'' \end{array}$$

$$0,75000 = \operatorname{tg} 36^\circ 52' 12''$$

$$\begin{array}{r|l} 0,74991 = \operatorname{cotg} 53^\circ 8' & \frac{60 \times 9}{46} = 12 \\ + 9 & - 12'' \end{array}$$

$$0,75000 = \operatorname{cotg} 53^\circ 7' 48''$$

Exercices

1. Dessinez l'angle α , sachant que :

a) $\sin \alpha = \frac{5}{7}$

b) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$

c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$

d) $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{13}{8}$

2. Démontrez :

a) $B \sin \hat{b} + C \sin \hat{c} = A$

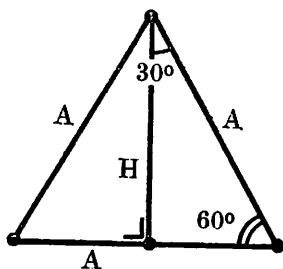
b) $(A + B) \sin \hat{b} + (A + C) \sin \hat{c} = A + B + C$

c) $\sin \hat{b} \operatorname{tg} \hat{b} = \frac{A}{C} - \frac{C}{A}$

d) $\cos \hat{c} \operatorname{cotg} \hat{c} = \frac{A}{C} - \frac{C}{A}$

e) $\frac{1}{\cos \hat{c}} + \operatorname{tg} \hat{c} = \frac{A + C}{B} = \frac{B}{A - C}$

3. Dans un triangle équilatéral de côté A, on construit la hauteur H.



a) Calculez cette hauteur.

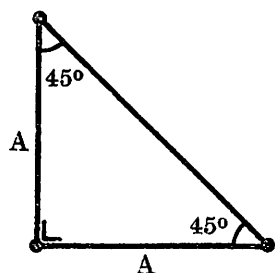
b) Démontrez que l'aire du triangle est exprimée par $\frac{1}{4} A^2 \sqrt{3}$

c) Calculez les nombres goniométriques d'un angle de 60° et d'un angle de 30° .

4. Dans un triangle rectangle isocèle, A représente les côtés de l'angle droit.

a) Calculez l'hypoténuse.

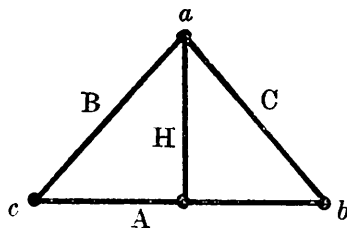
b) Calculez les nombres goniométriques d'un angle de 45° .



5. Complétez le tableau suivant :

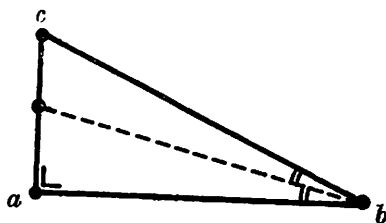
A	B	C	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{c}$
572			90°	$42^\circ 18' 42''$	
	5,894		90°	$35^\circ 42' 22''$	
84	66		90°		
	240	344	90°		
100			90°		$82^\circ 17' 45''$
		4,27	90°	$67^\circ 15' 10''$	
	52		90°		$21^\circ 49' 37''$
		36,6	90°		$58^\circ 39' 18''$
520		135	90°		
	17,5	11,2	90°		

6. Sachant que $B = C$, complétez le tableau suivant :



A	B	$\hat{a}$	$\hat{b}$	H	aire
16	12				
	1,8		$24^{\circ}37'15''$		
0,27		$52^{\circ}28'24''$			
	36			24	
		$38^{\circ}42'30''$		44	
	84,6	$118^{\circ}14'30''$			
2,7			$56^{\circ}28'43''$		
3,6				2,4	

- Les côtés d'un rectangle sont respectivement de 120 m et 80 m. Calculez la diagonale et les angles formés par cette diagonale et les côtés.
- La diagonale d'un rectangle mesure 26 cm. Elle forme un angle de $31^{\circ}12'26''$ avec la base. Calculez les côtés du rectangle.
- $\hat{b} = 40^{\circ}30'50''$. La bissectrice de $\hat{b}$ égale 24 cm. Calculez tous les éléments du triangle.



10. a) On donne : $\hat{a} = 90^\circ$, $A = 10$ cm, $\hat{c} = 25^\circ 47' 12''$

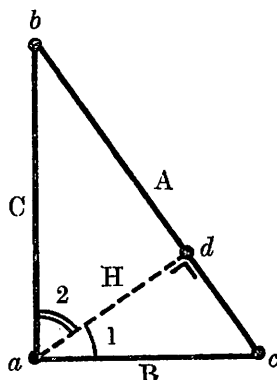
On demande : B , C , b , $|bd|$ et $|dc|$

- b) On donne : $\hat{a} = 90^\circ$, $B = 10$ cm, $C = 40$ cm

On demande : A , b , $\hat{c}$, $\hat{a}_1$ et $\hat{a}_2$

- c) On donne : $\hat{d} = 90^\circ$, $B = 28,4$ cm,
 $H = 14,2$ cm

On demande : b , $\hat{c}$, A et C .

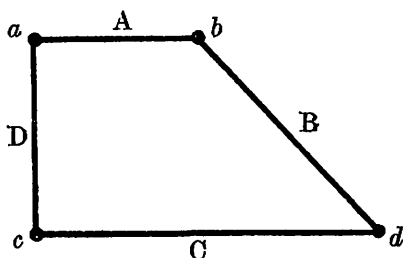


11. Une diagonale d'un losange égale 40,6 m et l'angle obtus $102^\circ 16' 40''$. Calculez la seconde diagonale, les angles et le côté du losange.

12. Le périmètre et une diagonale d'un losange mesurent respectivement 460 cm et 40 cm. Calculez la seconde diagonale, les angles et le côté du losange.

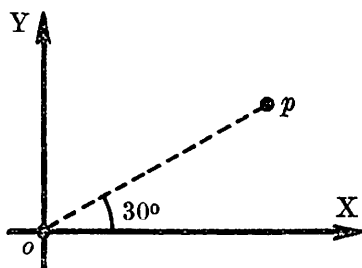
13. Dans un trapèze rectangle $abcd$, on donne $A = 63$ m, $C = 120$ m et $D = 81$ m.

Calculez tous les éléments de ce trapèze.



14. Dans un système orthonormé, p est situé à 13 cm de o . L'angle de $[op]$ avec l'axe X égale 30° .

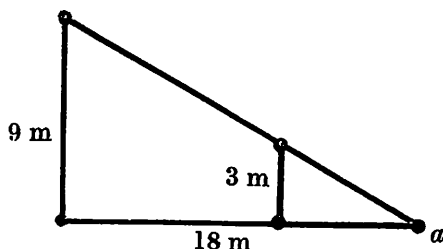
Calculez la coordonnée de p .



15. Un phare à une hauteur de 65 m. D'un navire, on observe la lumière sous un angle de $5^\circ 42' 15''$. A quelle distance du phare se trouve le navire?

16. Un projecteur a se trouve à une distance de 18 m d'un mur. Un poteau d'une hauteur de 3 m dessine sur ce mur une ombre de 9 m.

Calculez la distance du poteau au projecteur.



17. D'un point a , on observe une tour sous un angle de $56^\circ 23' 27''$ et d'un point situé 25 m plus près de la tour, sous un angle de $68^\circ 37' 17''$. Quelle est la hauteur de la tour?
18. Si l'ombre d'une antenne TV de 32 m de haut, a 48 m, quel angle fait le soleil avec l'horizon?
19. L'ombre d'une antenne TV a une longueur de 82 m, quand le soleil se trouve à 12° au-dessus de l'horizon. Quelle est la hauteur de l'antenne?

20. A 100 m du pied d'une tour, on observe le sommet d'une antenne sous un angle de $22^{\circ}16'$ et son pied sous un angle de $19^{\circ}38'$.

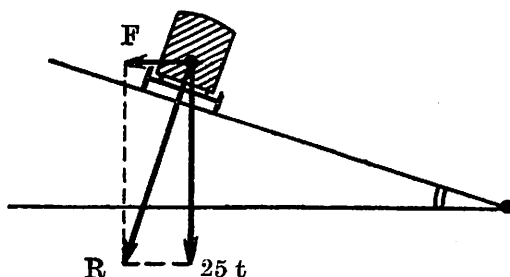
Calculez la hauteur de la tour et de l'antenne.

21. La marche d'un escalier mesure 23 cm et la contre-marche 19 cm. Quelle est la pente de l'escalier?

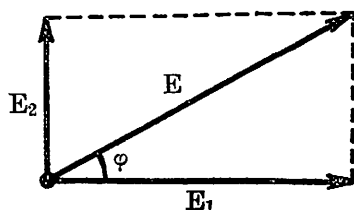
22. Deux forces $F_1 = 200$ N et $F_2 = 250$ N issues d'un même point font entre elles un angle de 90° . Calculez la résultante R et les angles qu'elle forme avec les composantes.

23. Deux forces F_1 et F_2 ayant le même point d'application, sont perpendiculaires entre elles. Sachant que $F_1 = 4200$ N et que la résultante R égale 6800 N, calculez F_2 et l'angle formé par F_1 et R .

24. Dans un virage, l'inclinaison d'une voie de chemin de fer est de $9^{\circ} 27' 33''$. Calculez la force centrifuge F assurant une pression égale sur les deux rails.

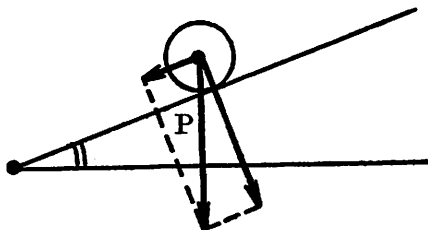


25. Deux tensions $E_1 = 220$ V et $E_2 = 110$ V sont déphasées de 90° . Quels sont la tension résultante E et l'angle de déphasage de E ?



26. Un corps de poids $P = 2\,500\text{ N}$ glisse le long d'un plan incliné dont l'angle de pente est de $17^\circ 23' 46''$.

Calculez les composantes du poids.



27. Calculez l'angle d'une pente de 3 %.
28. Durant une promenade, on parcourt 500 m sur un chemin formant un angle de $12^\circ 19' 16''$ avec l'horizontale. Quelle est la différence de niveau entre les deux points?
29. L'angle de pente d'une route est de $7^\circ 50' 36''$. Quelle est la distance à parcourir par un piéton pour qu'il s'élève de 36 m?
30. Sur 15 cm de hauteur, le diamètre d'une pièce conique diminue de 18 mm. Calculez l'angle du cône.

CHAPITRE XXV

FONCTIONS DE $\mathbb{R}$ VERS $\mathbb{R}$

1. Fonctions dans un ensemble A

Une relation dans A est une fonction dans A si chaque élément de A est au plus l'origine d'un couple.

Exemple :

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

« ... est d'une unité plus grand que ... »

$f : A \rightarrow A$ « ... est d'une unité plus grand que ... »
 $\{(2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$ est une fonction.

Ce qui s'écrit plus simplement :

$$f : A \rightarrow A : x \rightarrow x - 1 \text{ ou}$$

$$f : A \rightarrow A : x \rightarrow y \text{ si } y = f(x) = x - 1.$$

La fonction $f : A \rightarrow A$ est donc un ensemble de couples :

$$\{(x, y) \mid (x, y) \in A \times A \text{ et } y = f(x) = x - 1\}$$

2. Fonctions dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

Une fonction dans l'ensemble $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ s'écrit

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ et } y = f(x)\}$$

Exemple :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} &= \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ et } y = x + 3\} \\ &= \{\dots, (-4, -1), (-3, 0), (-2, 1), (-1, 2), (0, 3), \\ &\quad (1, 4), \dots\} \end{aligned}$$

Puisque $x = -2 \Rightarrow y = 1$, nous écrivons $f(-2) = 1$.

1 est appelé valeur numérique de f pour $x = -2$

Ainsi, -1 est la valeur numérique de f pour -4 , car $f(-4) = -1$

0 est la valeur numérique de f pour -3 , car $f(-3) = 0$

2 est la valeur numérique de f pour -1 , car $f(-1) = 2$

$f(a)$ est la valeur numérique de f pour a .

Puisque $f(-3) = 0$, -3 est appelé racine ou zéro de la fonction f .

En général : a est une racine de $f \Leftrightarrow f(a) = 0$.

3. Graphique cartésien d'une fonction

I.
$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} = \{ (x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ et } y = ax \}$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} = \{ (x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ et } y = 3x \}$$

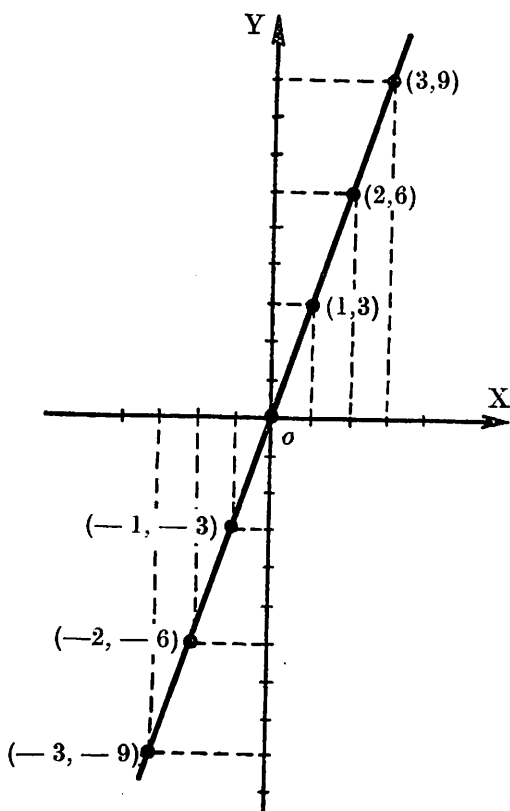
Soient plusieurs nombres $\in \mathbb{R}$. Calculons les valeurs numériques de f .

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	-9	-6	-3	0	3	6	9	...

Donc $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} =$

$$\{ \dots, (-3, -9), (-2, -6), (-1, -3), (0, 0), (1, 3), (2, 6), (3, 9), \dots \}$$

Dans un système d'axes orthonormé, chaque couple de f détermine un et un seul point de Π_0 .



En joignant ces points, nous obtenons le graphique cartésien de la fonction f .

Le graphique cartésien de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow 3x + 2$ est une droite passant par o .

II.

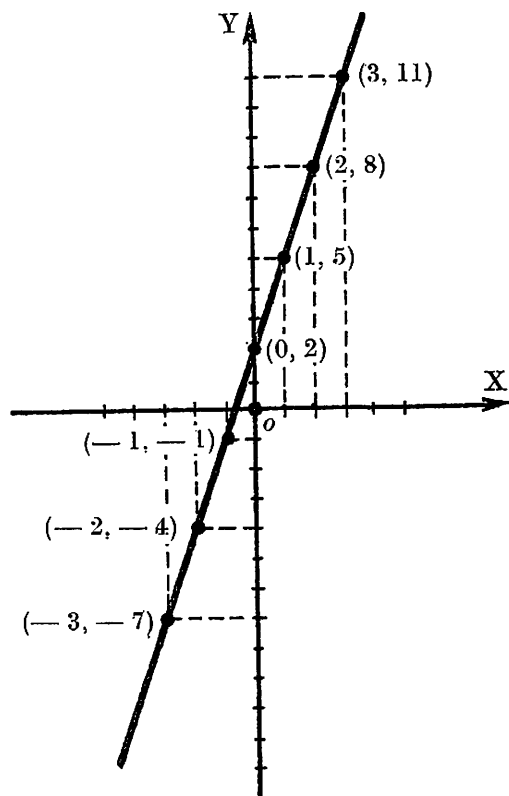
$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} = \{ (x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ et } y = ax + b \}$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} = \{ (x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ et } y = 3x + 2 \}$$

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	-7	-4	-1	2	5	8	11	...

Donc $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} =$

$\{ \dots, (-3, -7), (-2, -4), (-1, -1),$
 $(0, 2), (1, 5), (2, 8), (3, 11), \dots \}$



Le graphique cartésien de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow 3x + 2$ est également *une droite*.

Cette droite passe par $(0, 2)$ et est parallèle au graphique de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow 3x$

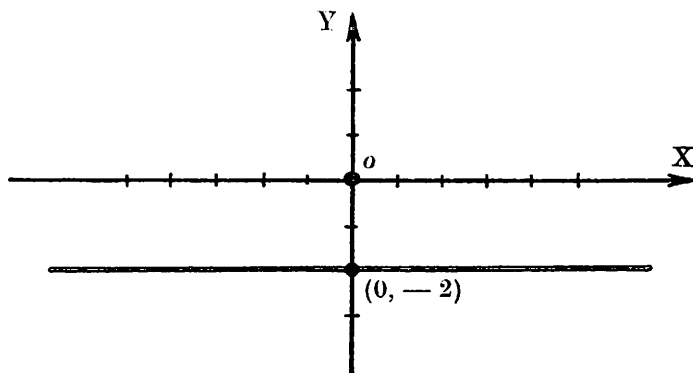
III.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} = \{ (x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ et } y = a \}$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} = \{ (x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ et } y = -2 \}$$

Pour tout nombre réel, la valeur numérique de $f = -2$

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	...



Le graphique de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow -2$ est *la droite*, parallèle à l'axe X et passant par le point $(0, -2)$.

IV.

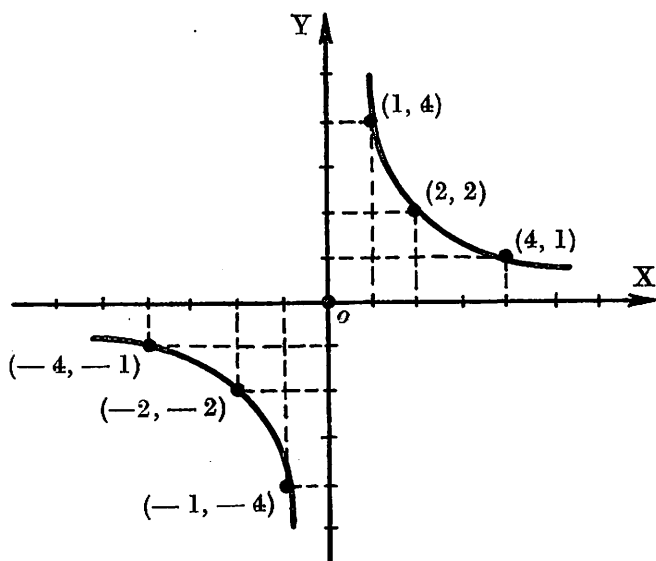
$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} = \{ (x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ et } y = \frac{a}{x} \}$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} = \{ (x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ et } y = \frac{4}{x} \}$$

x	...	-4	-2	-1	1	2	4	...
y	...	-1	-2	-4	4	2	1	...

Donc $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} =$

$\{ \dots, (-4, -1), (-2, -2), (-1, -4), (1, 4), (2, 2), (4, 1), \dots \}$



Le graphique cartésien de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \frac{4}{x}$ est une courbe, appelée *hyperbole*. L'origine o est le centre de symétrie.

Remarque : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \frac{4}{x}$ n'a pas de valeur numérique

pour 0 car $\frac{x}{0}$ n'a pas de sens.

Nous disons que la fonction f n'est pas définie pour 0.

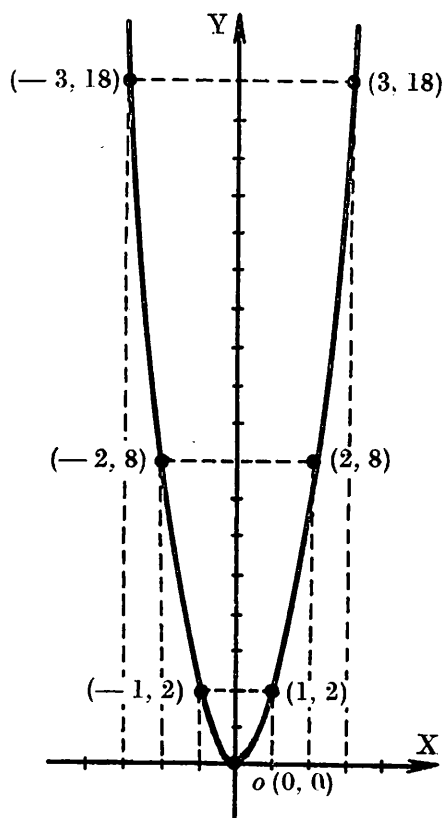
f est donc une fonction de $\mathbb{R}_0$ vers $\mathbb{R}$.

V.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} = \{ (x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ et } y = ax^2 \}$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} = \{ (x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ et } y = 2x^2 \}$$

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	18	8	2	0	2	8	18	...



Le graphique de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow 2x^2$ est une courbe, appelée *parabole*.

L'axe Y est l'axe de symétrie.

4. Graphiques empiriques

Il existe également des graphiques qui ne varient pas suivant une loi bien définie, exprimée par une formule mathématique.

De tels graphiques sont basés sur l'observation et montrent clairement l'évolution d'un phénomène.

On les appelle des *fonctions empiriques*.

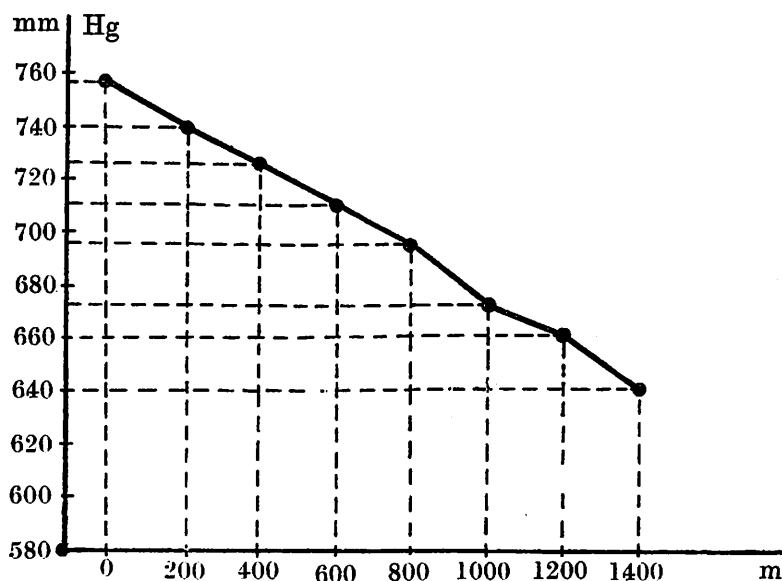
Exemple :

La valeur de la pression atmosphérique dépend de l'altitude du point d'observation.

Le tableau suivant donne les mesures effectuées à différentes altitudes.

altitude (m)	0	200	400	600	800	1 000	1 200	1 400
pression atm. (mm de Hg)	758	740	725	710	695	673	660	640

Le graphique illustre mieux l'évolution du phénomène observé.



Exercices

1. $A = \{ 2, 4, 6, 8, 10, 12 \}$

Quelles relations sont des fonctions ?

$R_1 : A \rightarrow A$ « ... est de 2 unités plus grand que ... »

$R_2 : A \rightarrow A$ « ... divise, mais n'est pas égal à... »

$R_3 : A \rightarrow A$ « ... est la moitié de ... »

$R_4 : A \rightarrow A$ « ... = ... »

$R_5 : A \rightarrow A$ « ... ont pour somme un multiple de 4. »

2. Les relations suivantes sont-elles des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$?

$$R_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} = \{ (x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ et } y = x - 3 \}$$

$$R_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} = \{ (x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ et } y = -x \}$$

$$R_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} = \{ (x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ et } y = 3x \}$$

$$R_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} = \{ (x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ et } y = \frac{x}{5} \}$$

$$R_5 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} = \{ (x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ et } y = 2x + 1 \}$$

3. Comment peut-on vérifier si une relation est une fonction, quand on donne :

- a) les couples en extension
- b) le graphe
- c) le réseau.

4. Ecrivez sous forme d'une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$:

- 1) « ... est de 5 unités plus grand que ... »
- 2) « ... est de 2 unités plus petit que ... »
- 3) « ... est le quadruple de ... »
- 4) « ... est le tiers de ... »
- 5) « ... a pour double ... »
- 6) « ... est le double de ... »
- 7) « ... est la moitié de ... »
- 8) « ... est le carré de ... »
- 9) « ... a pour carré ... »
- 10) « ... est de 3 unités plus petit que le double de ... »

5. Énoncez la relation des fonctions suivantes :

$$1) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y = x - 3$$

$$2) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y = x + 7$$

$$3) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y = 3x$$

$$4) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y = 2x - 5$$

$$5) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y = x^2 + 2$$

6. Complétez le tableau par les valeurs numériques de f pour les valeurs données de x .

$f \backslash x$	5	-2	0	$-\frac{1}{2}$	π	0,3	-1,2	$\sqrt{5}$	$-\sqrt{2}$	$\frac{3}{4}$	0,01
1) $y = -x$											
2) $y = 3x$											
3) $y = 2x - 5$											
4) $y = -3x^2$											
5) $y = 0$											
6) $y = 5$											
7) $y = x^3$											
8) $y = 4x^3 - 5$											
9) $y = -\frac{2}{3}x$											
10) $y = 5x^2 - 3x + 2$											
11) $y = \frac{3}{x-2}$											
12) $y = \frac{5x+3}{2x+1}$											

7. Déterminez les racines de :

- | | |
|-------------------------------------|------------------------|
| 1) $y = 3x - 6$ | 5) $y = x^2 - 4$ |
| 2) $y = -2x + 7$ | 6) $y = 5x^2 - 10$ |
| 3) $y = \frac{2}{5}x - \frac{3}{4}$ | 7) $y = \frac{x}{x+3}$ |
| 4) $y = 0,25x + 3$ | 8) $y = \sqrt{x-3}$ |

8. Représentez graphiquement les fonctions suivantes :

- | | | |
|----------------|--------------------------|------------------------|
| 1) $y = x$ | 12) $y = x^2$ | 22) $y = 0$ |
| 2) $y = -x$ | 13) $y = -2x^2$ | 23) $y = -2$ |
| 3) $y = 2x$ | 14) $y = 3x^2$ | 24) $y = \frac{1}{x}$ |
| 4) $y = -3x$ | 15) $y = x^3$ | 25) $y = \frac{1}{2x}$ |
| 5) $y = x - 4$ | 16) $y = \frac{3}{2}x^2$ | |
| 6) $y = x + 2$ | 17) $y = 3$ | |
| 7) $y = x $ | | |

$$\begin{array}{lll}
8) y = 3x - 2 & 18) y = x^2 + 5 & 26) y = -\frac{2}{x} \\
9) y = -2x + 1 & 19) y = -x^2 + x + 1 & 27) y = \sqrt{x} \\
10) y = \frac{5x}{2} & 20) y = x^3 + 2 & 28) y = \sqrt{x+3} \\
11) y = -\frac{2}{7}x + 5 & 21) y = x^2 - 3x + 2 & 29) y = \sqrt{4-x}
\end{array}$$

9. Représentez graphiquement :

$$\begin{array}{l}
1) y = 2x - 6 \\
2) y = -3x + 3 \\
3) y = 5x
\end{array}$$

Dans chaque cas, déterminez la racine.

Où se trouve l'image de cette racine sur le graphique ?

10. Représentez graphiquement :

$$\begin{array}{l}
C = 2\pi R \\
e = v \cdot t \text{ pour } v = 2 \text{ m/s} \\
I = \frac{E}{R} \text{ pour } E = 220 \text{ V.}
\end{array}$$

11. $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y = x + 3$

$$f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y = 2x - 1$$

$$f_1 + f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y = (x + 3) + (2x - 1)$$

$$y = 3x + 2$$

Démontrez que $f_1(x) + f_2(x) = (f_1 + f_2)(x)$

Vérifiez sur les graphiques de f_1 , f_2 et $f_1 + f_2$.

12. Même question pour :

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y = 2$$

$$f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y = x - 3$$

13. Même question pour :

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y = 2x + 1$$

$$f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y = x^2 + 3$$

- 14.
- $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y = x + 3$

$$f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y = 2x - 1$$

$$f_1 \cdot f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y = (x + 3)(2x - 1)$$

$$y = 2x^2 + 5x - 3$$

Démontrez que $f_1(x) \cdot f_2(x) = (f_1 \cdot f_2)(x)$ Vérifiez sur les graphiques de f_1 , f_2 et $f_1 \cdot f_2$.

15. Même question pour :

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y = 2$$

$$f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y = x - 3$$

16. Même question pour :

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y = 2x + 1$$

$$f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y = x^2 + 3$$

17. Dessinez le graphique empirique illustrant les relevés de température suivants :

heure	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
t°	5°	2°	0°	1°	-2°	6°	2°	7°	12°	10°	6°	1°	6°

18. Lors d'une course d'entraînement sur un circuit, on a enregistré les temps suivants :

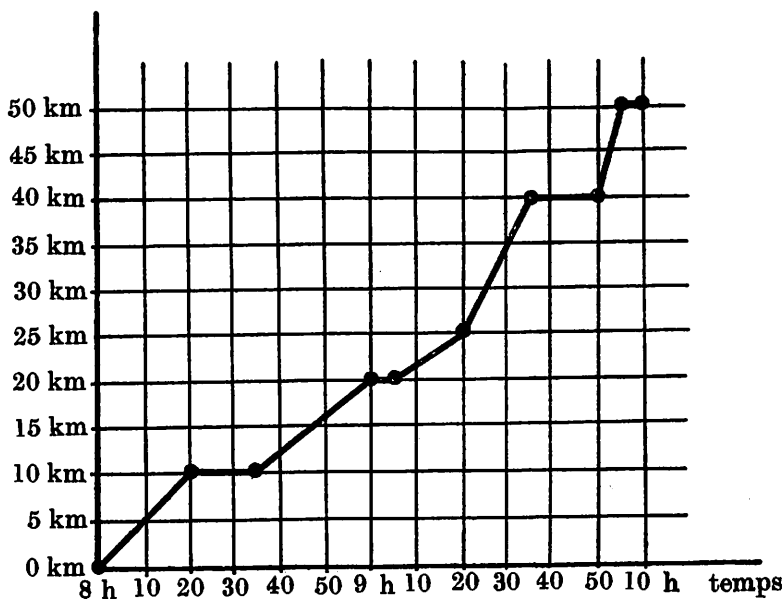
tour	1 ^{er}	2 ^e	3 ^e	4 ^e	5 ^e	6 ^e	7 ^e	8 ^e	9 ^e	10 ^e	11 ^e	12 ^e
temps (en min.)	15	12	16	11	13	10	10	12	13	11	14	16

Représentez le graphique.

19. Représentez le graphique empirique de la population scolaire d'un établissement entre 1960 et 1970.

Année	1960	'61	'62	'63	'64	'65	'66	'67	'68	'69	1970
Nombre d'élèves	420	390	450	410	500	420	460	520	560	630	600

20. Etudiez ce diagramme des chemins de fer et répondez aux questions.



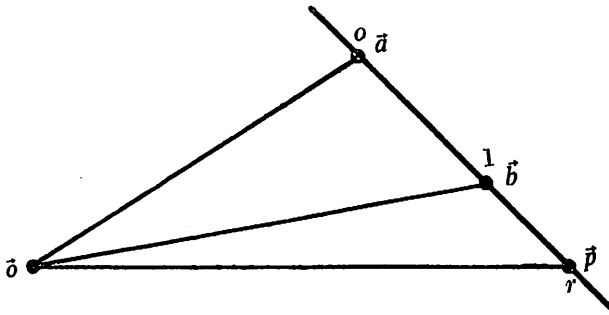
1. Quel est le chemin parcouru après 20 min ?
2. A quel instant l'espace parcouru était-il de 25 km ?
3. Quel est le nombre d'arrêts du train ? Leurs durées ? Après quelles distances ?
4. Quelle est la plus longue distance entre deux arrêts ?
5. Quand la vitesse était-elle la plus grande ?

CHAPITRE XXVI

ÉQUATIONS D'UNE DROITE

1. Equation vectorielle d'une droite

Deux points a et $b \in \Pi$, définis par $\vec{a}$ et $\vec{b} \in \Pi_0$, déterminent une et une seule droite ab .



Soit $\vec{p} \in \Pi_0$ tel que $p \in ab$.

$\vec{ab}$ étant le vecteur unitaire sur ab , on a :

abscisse $a = 0$

abscisse $b = 1$

abscisse $p = r \in \mathbb{R}$

et $\vec{ap} = r \cdot \vec{ab}$

Donc : $p \in ab \Leftrightarrow \vec{ap} = r \cdot \vec{ab}$

$$\Leftrightarrow \vec{ao} + \vec{op} = r(\vec{ao} + \vec{ob})$$

$$\Leftrightarrow -\vec{oa} + \vec{op} = r(-\vec{oa} + \vec{ob})$$

$$\Leftrightarrow -\vec{a} + \vec{p} = r(-\vec{a} + \vec{b})$$

$$\Leftrightarrow -\vec{a} + \vec{p} = r \cdot (-\vec{a}) + r \cdot \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow -\vec{a} + \vec{p} = -r \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \vec{p} = \vec{a} - r \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \vec{p} = (1 - r) \vec{a} + r \cdot \vec{b}$$

L'expression

$$\vec{p} = (1 - r) \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}$$

est appelée équation vectorielle de la droite ab telle que :

$$ab = \{ \vec{p} \in \Pi_o \mid \vec{p} = (1 - r) \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b} \text{ et } r \in \mathbb{R} \}$$

A chaque nombre réel r , correspond un et un seul vecteur $\vec{p} \in \Pi_o$ et par conséquent un et un seul point $p \in ab$.

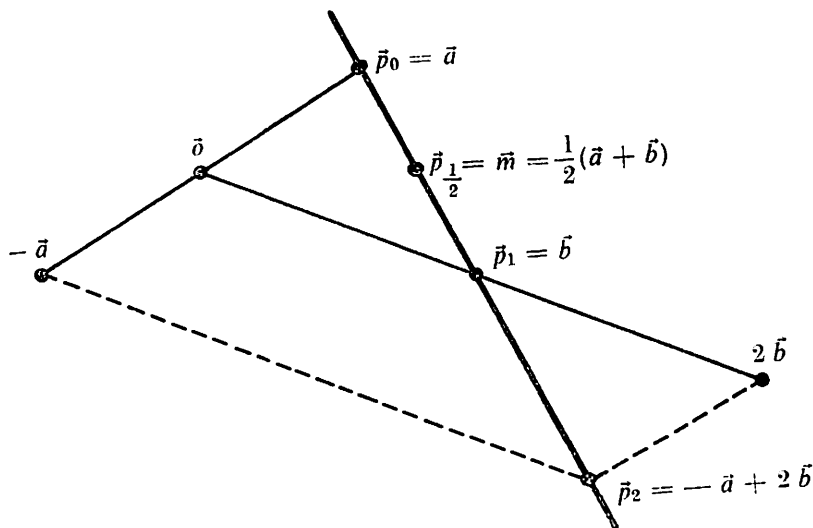
En donnant à r successivement toutes les valeurs de $\mathbb{R}$, p parcourt tous les points de la droite ab .

Exemples :

$$1) r = 0 \Rightarrow \vec{p}_0 = (1 - 0) \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} = 1 \cdot \vec{a} = \vec{a} \Rightarrow p_0 = a \in ab$$

$$2) r = 1 \Rightarrow \vec{p}_1 = (1 - 1) \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} = 1 \cdot \vec{b} = \vec{b} \Rightarrow p_1 = b \in ab$$

$$3) r = 2 \Rightarrow \vec{p}_2 = (1 - 2) \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b} = -\vec{a} + 2\vec{b} \Rightarrow p_2 \in ab$$



$$4) m \text{ milieu de } [ab] \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$r = \frac{1}{2} \Rightarrow \vec{p}_{\frac{1}{2}} = \vec{m} = (1 - \frac{1}{2}) \cdot \vec{a} + \frac{1}{2} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b})$$

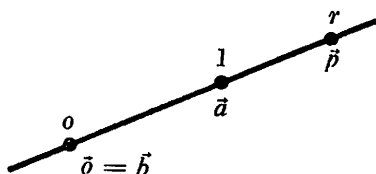
$$m \text{ milieu de } [ab] \Leftrightarrow \vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

Cas particuliers :

1. Si $\vec{a} = \vec{o}$, la droite $ab = ob$ passe par l'origine o .

Dans ce cas, on trouve l'équation vectorielle de la droite en remplaçant $\vec{a}$ par $\vec{o}$.

$$\begin{aligned}\vec{a} = \vec{o} &\Rightarrow \vec{p} = (1 - r) \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b} \\ &\Rightarrow \vec{p} = (1 - r) \cdot \vec{o} + r \cdot \vec{b} \\ &\Rightarrow \vec{p} = r \cdot \vec{b}\end{aligned}$$



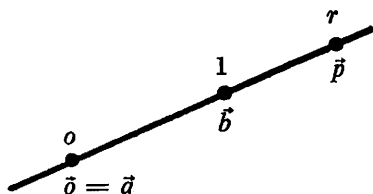
2. Si $\vec{b} = \vec{o}$, la droite $ab = oa$ passe par l'origine o .

Dans ce cas, on remplace $\vec{b}$ par $\vec{o}$.

$$\begin{aligned}\vec{b} = \vec{o} &\Rightarrow \vec{p} = (1 - r) \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b} \\ &\Rightarrow \vec{p} = (1 - r) \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{o} \\ &\Rightarrow \vec{p} = (1 - r) \cdot \vec{a}\end{aligned}$$

Mais $r \in \mathbb{R} \Rightarrow 1 - r \in \mathbb{R}$

donc $\vec{p} = r \cdot \vec{a}$

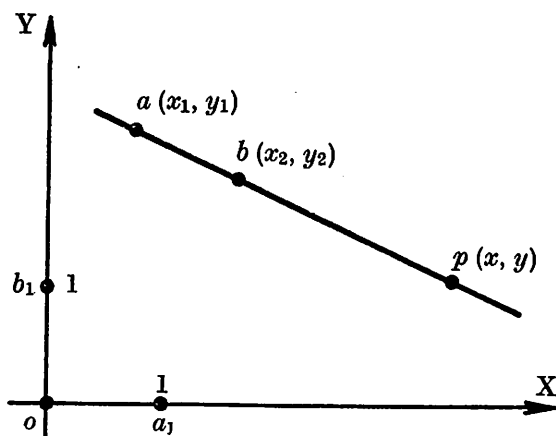


2. Equations paramétriques d'une droite

Soit dans Π_0 , un système d'axes orthonormé avec o comme origine et $(\vec{a}_1, \vec{b}_1)$ comme base.

Les points a , b et p ont alors comme coordonnées :

$$a(x_1, y_1), \quad b(x_2, y_2), \quad p(x, y).$$



$$p \in ab \Leftrightarrow \vec{p} = (1 - r) \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}$$

En passant aux coordonnées de a , b et p , on trouve dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, +$:

$$\begin{aligned} p \in ab &\Leftrightarrow (x, y) = (1 - r) \cdot (x_1, y_1) + r \cdot (x_2, y_2) \\ &\Leftrightarrow (x, y) = [(1 - r) \cdot x_1, (1 - r) \cdot y_1] + (r \cdot x_2, r \cdot y_2) \\ &\Leftrightarrow (x, y) = [(1 - r) \cdot x_1 + r \cdot x_2, (1 - r) \cdot y_1 + r \cdot y_2] \\ &\Leftrightarrow x = (1 - r) \cdot x_1 + r \cdot x_2 \text{ et } y = (1 - r) \cdot y_1 + r \cdot y_2 \end{aligned}$$

L'expression :

$$\begin{cases} x = (1 - r) \cdot x_1 + r \cdot x_2 \\ y = (1 - r) \cdot y_1 + r \cdot y_2 \end{cases}$$

est appelée équations paramétriques de la droite ab .

$r \in \mathbb{R}$ est le paramètre.

Exemple :

Pour $a(x_1, y_1) = a(-3, 2)$

$b(x_2, y_2) = b(4, 5)$

les équations paramétriques de la droite ab sont

$$\begin{cases} x = (1-r) \cdot (-3) + r \cdot 4 = -3 + 3r + 4r \\ y = (1-r) \cdot 2 + r \cdot 5 = 2 - 2r + 5r \end{cases}$$

ou $\begin{cases} x = 7r - 3 \\ y = 3r + 2 \end{cases}$

tel que $p(7r - 3, 3r + 2)$ est un point de la droite.

A chaque valeur de $r \in \mathbb{R}$ correspond un point de la droite ab :

$$r = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ et } y = 2 \Rightarrow p_0(-3, 2) \in ab$$

$$r = 1 \Rightarrow x = 4 \text{ et } y = 5 \Rightarrow p_1(4, 5) \in ab$$

$$r = 2 \Rightarrow x = 11 \text{ et } y = 8 \Rightarrow p_2(11, 8) \in ab$$

$$r = -1 \Rightarrow x = -10 \text{ et } y = -1 \Rightarrow p_{-1}(-10, -1) \in ab \text{ etc.}$$

Application :

Considérons la droite ab ayant pour équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 7r - 3 \\ y = 3r + 2 \end{cases}$$

A) Le point $p(-8, 6)$, est-il situé sur ab ?

$$-x = 7r - 3 \qquad y = 3r + 2$$

$$-8 = 7r - 3 \qquad 6 = 3r + 2$$

$$7r = -8 + 3 \qquad 3r = 6 - 2$$

$$7r = -5 \qquad 3r = 4$$

$$r = -\frac{5}{7} \qquad r = \frac{4}{3}$$

non : $p \notin ab$

B) Le point $p'(-17, -4)$, est-il situé sur ab ?

$$x = 7r - 3 \qquad y = 3r + 2$$

$$-17 = 7r - 3 \qquad -4 = 3r + 2$$

$$7r = -17 + 3 \qquad 3r = -4 - 2$$

$$7r = -14 \qquad 3r = -6$$

$$r = -2 \qquad r = -2$$

oui : $p' \in ab$

3. Equation cartésienne d'une droite

Des deux équations paramétriques de la droite ab , on déduit aisément la valeur de r .

$$\begin{aligned} x &= (1-r) \cdot x_1 + r \cdot x_2 & y &= (1-r) \cdot y_1 + r \cdot y_2 \\ x &= x_1 - r \cdot x_1 + r \cdot x_2 & y &= y_1 - r \cdot y_1 + r \cdot y_2 \\ x &= x_1 + r \cdot (x_2 - x_1) & y &= y_1 + r \cdot (y_2 - y_1) \\ x - x_1 &= r \cdot (x_2 - x_1) & y - y_1 &= r \cdot (y_2 - y_1) \\ r &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \text{ si } x_2 - x_1 \neq 0 & r &= \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \text{ si } y_2 - y_1 \neq 0 \end{aligned}$$

Or, la valeur de r est la même dans les deux équations et donc

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad \text{ou} \quad (x - x_1)(y_2 - y_1) = (x_2 - x_1)(y - y_1)$$

$$\text{ou} \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

Cette équation est appelée équation cartésienne de la droite passant par les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) .

Exemple :

Trouvez l'équation cartésienne de la droite passant par $(4, -2)$ et $(-1, 5)$.

$$\begin{aligned} y - y_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \\ y - (-2) &= \frac{5 - (-2)}{-1 - 4} (x - 4) \\ y + 2 &= \frac{5 + 2}{-1 - 4} (x - 4) \\ y + 2 &= -\frac{7}{5} (x - 4) \\ 5(y + 2) &= -7(x - 4) \\ 5y + 10 &= -7x + 28 \\ 7x + 5y - 18 &= 0 \end{aligned}$$

Application :

Considérons la droite ab ayant pour équation cartésienne $7x + 5y - 18 = 0$.

A) Le point $p \left(2, \frac{4}{5} \right)$, est-il situé sur ab ?

Remplaçons x par 2 et y par $\frac{4}{5}$:

$$7 \cdot 2 + 5 \cdot \frac{4}{5} - 18 =$$

$$14 + 4 - 18 = 0$$

Oui : $p \in ab$

B) Le point $p' (-6, 2)$ est-il situé sur ab ?

$$7(-6) + 5 \cdot 2 - 18 =$$

$$-42 + 10 - 18 =$$

$$-50 \neq 0$$

non : $p' \notin ab$

C) $(5, y) \in ab$. Trouvez y .

$$7 \cdot 5 + 5y - 18 = 0$$

$$35 + 5y - 18 = 0$$

$$5y = 18 - 35$$

$$5y = -17$$

$$y = -\frac{17}{5}$$

Donc le point $\left(5, -\frac{17}{5} \right) \in ab$

D) $(x, -2) \in ab$. Trouvez x .

$$7x + 5(-2) - 18 = 0$$

$$7x - 10 - 18 = 0$$

$$7x = 10 + 18$$

$$7x = 28$$

$$x = 4$$

Donc le point $(4, -2) \in ab$.

4. Equation cartésienne de droites particulières

1. Equation cartésienne de
- ab
- passant par
- $a = o(0, 0)$
- et
- $b(x_2, y_2)$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{y_2 - 0}{x_2 - 0} (x - 0)$$

$$y = \frac{y_2}{x_2} \cdot x$$

Posons $\frac{y_2}{x_2} = r \in \mathbb{R}$ et on trouve l'équation cartésienne d'une droite passant par l'origine o .

$$y = r \cdot x$$

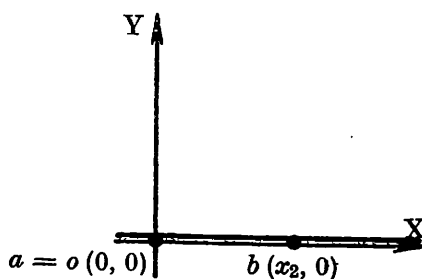
2. Equation cartésienne de
- ab
- passant par
- $a = o(0, 0)$
- et
- $b(x_2, 0)$

$$y = \frac{y_2}{x_2} \cdot x \Rightarrow x_2 \cdot y = y_2 \cdot x$$

$$x_2 \cdot y = 0 \cdot x$$

$$x_2 \cdot y = 0$$

$$y = 0, \text{ car } x_2 \neq 0$$



L'équation de l'axe X s'écrit :

$$y = 0$$

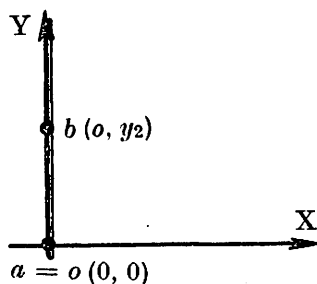
3. Equation cartésienne de ab passant par $a = o(0, 0)$ et $b(0, y_2)$

$$y = \frac{y_2}{x_2} \cdot x \Rightarrow x_2 \cdot y = y_2 \cdot x$$

$$0 \cdot y = y_2 \cdot x$$

$$y_2 \cdot x = 0$$

$$x = 0 \text{ car } y_2 \neq 0$$

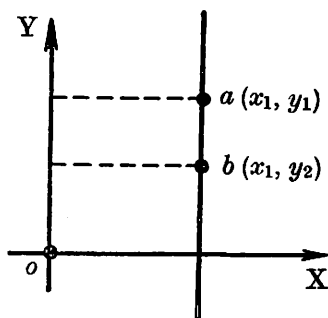


L'équation de l'axe Y s'écrit :

$$x = 0$$

4. Equation cartésienne de ab passant par $a(x_1, y_1)$ et $b(x_1, y_2)$

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) = (x_2 - x_1)(y - y_1)$$



Or $x_1 = x_2$, donc

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) = (x_1 - x_1)(y - y_1)$$

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) = 0 \cdot (y - y_1)$$

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) = 0$$

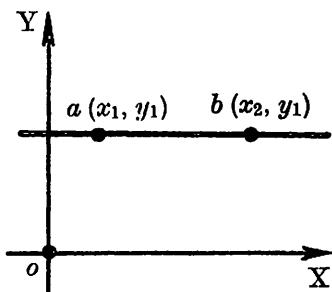
Mais $y_2 - y_1 \neq 0$ donc $x - x_1 = 0$ ou $x = x_1$

L'équation d'une droite parallèle à l'axe Y s'écrit :

$$x = x_1$$

5. Equation cartésienne de ab passant par $a(x_1, y_1)$ et $b(x_2, y_1)$

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) = (x_2 - x_1)(y - y_1)$$



Or $y_1 = y_2$, donc

$$(x - x_1)(y_1 - y_1) = (x_2 - x_1)(y - y_1)$$

$$(x - x_1) \cdot 0 = (x_2 - x_1)(y - y_1)$$

$$0 = (x_2 - x_1)(y - y_1)$$

Mais $x_2 - x_1 \neq 0$ donc $y - y_1 = 0$ ou $y = y_1$

L'équation d'une droite parallèle à l'axe X s'écrit :

$$y = y_1$$

5. Autre forme de l'équation cartésienne

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$\Leftrightarrow (x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1)$$

$$\Leftrightarrow x(y_2 - y_1) - x_1(y_2 - y_1) = y(x_2 - x_1) - y_1(x_2 - x_1)$$

$$\Leftrightarrow x(y_2 - y_1) - x_1(y_2 - y_1) - y(x_2 - x_1) + y_1(x_2 - x_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(y_2 - y_1) - y(x_2 - x_1) - x_1(y_2 - y_1) + y_1(x_2 - x_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(y_2 - y_1) - y(x_2 - x_1) - x_1 \cdot y_2 + x_1 \cdot y_1 + y_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot x_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(y_2 - y_1) - y(x_2 - x_1) - x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2 = 0$$

Posons $y_2 - y_1 = r \in \mathbb{R}$

$$x_2 - x_1 = s \in \mathbb{R}$$

$$-x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2 = t \in \mathbb{R}$$

et l'équation cartésienne de la droite devient :

$$rx + sy + t = 0$$

Cas particulier :

Quand la droite passe par l'origine $o(0, 0)$, nous avons

$$rx + sy + t = 0$$

$$r \cdot 0 + s \cdot 0 + t = 0$$

$$0 + 0 + t = 0$$

$$t = 0$$

L'équation cartésienne d'une droite passant par o peut donc s'écrire :

$$rx + sy = 0$$

6. Construction de la droite $rx + sy + t = 0$

Toute équation de la forme $rx + sy + t = 0$ représente une droite. On peut construire une droite pour autant que l'on connaisse deux de ses points. Déterminons donc deux coordonnées vérifiant l'équation de la droite.

Exemple :

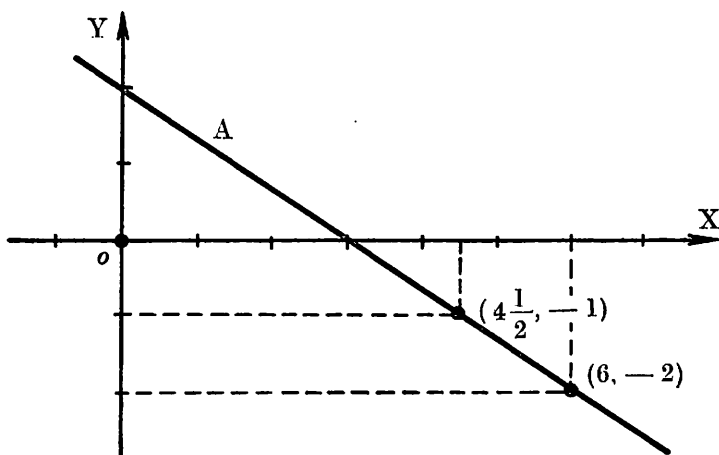
Construire la droite A d'équation $2x + 3y - 6 = 0$.

Choisissons deux abscisses quelconques et calculons les ordonnées correspondantes de façon que les points se situent sur la droite.

$$\begin{array}{ll}
 1) \ x=6 \Rightarrow 2 \cdot 6 + 3y - 6 = 0 & 2) \ x=4\frac{1}{2} \Rightarrow 2 \cdot 4\frac{1}{2} + 3y - 6 = 0 \\
 12 + 3y - 6 = 0 & 9 + 3y - 6 = 0 \\
 3y = -12 + 6 & 3y = -9 + 6 \\
 3y = -6 & 3y = -3 \\
 y = -2 & y = -1
 \end{array}$$

donc $(6, -2) \in A$ donc $(4\frac{1}{2}, -1) \in A$

Situons les deux points ainsi trouvés dans un système d'axes orthonormé. La droite A passe par ces deux points.



Nous aurions pu choisir les ordonnées et en déduire les abscisses. Pour simplifier, on déterminera de préférence les coordonnées des points de rencontre avec les axes en prenant successivement $x = 0$ et $y = 0$.

L'exemple ci-dessus devient alors :

$$\begin{array}{l}
 1) \ x = 0 \Rightarrow 2 \cdot 0 + 3y - 6 = 0 \\
 3y - 6 = 0 \\
 3y = 6 \\
 y = 2
 \end{array}$$

donc $(0, 2) \in A$

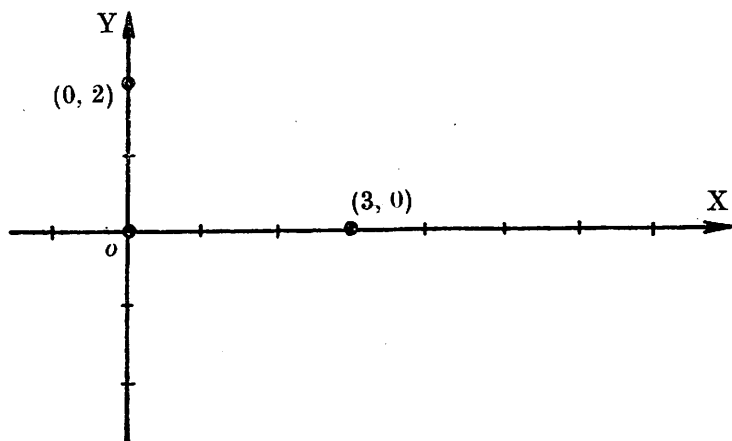
$$2) y = 0 \Rightarrow 2x + 3 \cdot 0 - 6 = 0$$

$$2x - 6 = 0$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

donc $(3, 0) \in A$



Il est évident que pour une équation donnée, on trouve toujours la même droite, quelle que soit la coordonnée choisie.

Exercices

1. a et b étant des points de Π , la droite $ab = ba$ peut être représentée par

$$\vec{p} = (1 - r) \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b} \quad (1)$$

$$\text{ou } \vec{p} = (1 - r) \cdot \vec{b} + r \cdot \vec{a} \quad (2)$$

Si dans (1) $r = 3$, on trouve $p_3 \in ab$.

Calculez la valeur de r dans (2).

Même question pour $r = 4, -2, 0, 1, -1, \frac{2}{3}$.

2. L'équation vectorielle de la droite ab étant

$$\vec{p} = (1 - r) \vec{a} + r \cdot \vec{b}$$

à quel point correspond la valeur $r = 0$? Et $r = 1$?

3. $\vec{a}$, $4\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{b}$, $3\vec{a}$, $-4\vec{a} + 5\vec{b}$, $2\vec{a} - 3\vec{b}$,
 $-\vec{a} + 2\vec{b}$, $-3\vec{a} + 2\vec{b}$, $-10\vec{a} + 11\vec{b}$, $-4\vec{a} - 3\vec{b}$.

Quels points appartiennent à la droite ab ayant pour équation vectorielle $\vec{p} = (1 - r) \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}$?

Donnez les valeurs de r .

4. Etablissez l'équation vectorielle de la droite passant par $\vec{o}$ et

- | | |
|---------------|--------------------------|
| 1) $\vec{a}$ | 4) $2\vec{a} + 3\vec{b}$ |
| 2) $3\vec{a}$ | 5) $-3\vec{a} + \vec{b}$ |
| 3) $2\vec{b}$ | 6) $\vec{a} - \vec{b}$ |

5. Etablissez l'équation vectorielle des droites passant par :

- | | |
|------------------------------|-------------------------------|
| 1) $\vec{a}$ et $\vec{b}$ | 4) $-7\vec{a}$ et $-4\vec{b}$ |
| 2) $2\vec{a}$ et $5\vec{b}$ | 5) $5\vec{a}$ et $-10\vec{b}$ |
| 3) $-3\vec{a}$ et $2\vec{b}$ | 6) $\vec{a}$ et $-\vec{b}$ |

6. Etablissez l'équation vectorielle des droites passant par :

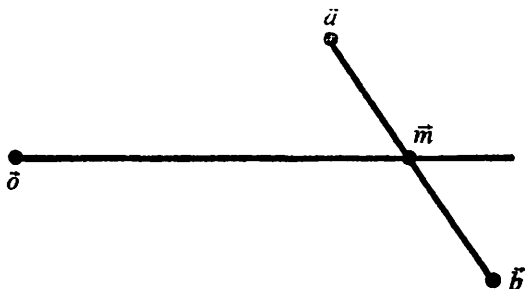
$$2\vec{a} + 3\vec{b} \quad \text{et} \quad -5\vec{a} + 4\vec{b}.$$

7. m , n , s , t sont situés sur la droite $\vec{p} = (1 - r) \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}$

Complétez :

- 1) $\vec{m} = 5\vec{a} \dots \vec{b}$
- 2) $\vec{n} = \dots \vec{a} - 3\vec{b}$
- 3) $\vec{s} = -2\vec{a} \dots \vec{b}$
- 4) $\vec{t} = \dots \vec{a} + 4\vec{b}$

8. Etablissez l'équation vectorielle de la droite om , m étant le milieu de $[ab]$.



9. Déterminez les coordonnées des points sur les droites :

$$\begin{cases} x = 2r \\ y = 3r \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5r + 2 \\ y = -3r - 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2r + 3 \\ y = 4r - 3 \end{cases}$$

pour $r = 5, -2, \frac{1}{3}, -\frac{3}{4}, 0, -1, 1$

10. Établissez les équations paramétriques de la droite passant par $o(0, 0)$ et par :

- | | |
|---------------------|---|
| 1) $(5, 2)$ | 4) $\left(\frac{2}{3}, -\frac{5}{6}\right)$ |
| 2) $(-\sqrt{3}, 4)$ | 5) $(0, 5)$ |
| 3) $(-2, -2)$ | 6) $(-3, 5, 2, 4)$ |

11. Établissez les équations paramétriques de la droite passant par :

- 1) $(2, 3)$ et $(4, 1)$
- 2) $(-3, 2)$ et $(-5, -3)$
- 3) $(6, -4)$ et $(-3, 4)$
- 4) $(0, 7)$ et $(-3, 0)$
- 5) $\left(\frac{1}{2}, 5\right)$ et $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right)$

12. Vérifiez si a, b, c , et d appartiennent à la droite :

- | | | |
|--|--|--|
| 1) $\begin{cases} x = 5r \\ y = -2r \end{cases}$ | 2) $\begin{cases} x = 2r - 5 \\ y = -3r + 6 \end{cases}$ | 3) $\begin{cases} x = -5r \\ y = 4r + 1 \end{cases}$ |
| $a(10, -4)$ | $a(4, -1)$ | $a(2, -6)$ |
| $b(-3, 5)$ | $b(-\sqrt{3}, 0)$ | $b(0, 1)$ |
| $c\left(-2, \frac{4}{5}\right)$ | $c(-5, 6)$ | $c(4, -3)$ |
| $d(-5, -2)$ | $d(3, -6)$ | $d(-5, 5)$ |

13. Vérifiez si a, b et c appartiennent à la même droite.

- | | | |
|---------------|-------------|------------|
| 1) $a(-4, 8)$ | $b(2, 2)$ | $c(-2, 5)$ |
| 2) $a(9, -4)$ | $b(-1, 11)$ | $c(5, 2)$ |

14. Complétez :

$$1) (\dots, -3) \in \begin{cases} x = 3r \\ y = -5r \end{cases}$$

$$2) (-2, \dots) \in \begin{cases} x = 7r + 5 \\ y = -4r - 3 \end{cases}$$

$$3) (\dots, 0) \in \begin{cases} x = 2r + 3 \\ y = 5r - 1 \end{cases}$$

$$4) \left(\frac{2}{3}, \dots\right) \in \begin{cases} x = -3r + 4 \\ y = -4r - 2 \end{cases}$$

15. Représentez les droites dont les équations paramétriques sont :

$$1) \begin{cases} x = 2r \\ y = 3r \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = 2r - 7 \\ y = -3r + 5 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x = -r + 4 \\ y = 3r + 2 \end{cases}$$

16. Déduisez l'équation cartésienne des équations paramétriques suivantes :

$$1) \begin{cases} x = 5r \\ y = 2r \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x = 2r - 1 \\ y = 5r + 2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x = -3r \\ y = 7r \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x = 4r + 3 \\ y = -3r - 2 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x = \frac{2}{3}r \\ y = -\frac{3}{4}r \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x = -5r + 6 \\ y = 12r + 3 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x = 2,5r \\ y = -4,3r \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} x = -\frac{1}{2}r + 3 \\ y = -2r - \frac{3}{4} \end{cases}$$

17. Calculez les coordonnées des points des droites :

$$1) y = 3x - 2$$

$$2) 2y - 5x = 0$$

$$3) 3x + 4y - 8 = 0$$

a) pour $x = 2, 0, -3, 1, \frac{2}{5}$

b) pour $y = 5, -2, 0, -\frac{1}{4}, 2, 3$

18. Établissez l'équation cartésienne de la droite passant par $o(0, 0)$ et

- | | |
|---------------|---|
| 1) $(2, 4)$ | 4) $\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{3}\right)$ |
| 2) $(-3, 5)$ | 5) $(-5, 4, 3, 5)$ |
| 3) $(-2, -3)$ | 6) $(0, -6)$ |

19. Établissez l'équation cartésienne des droites passant par:

- 1) $a(2, 5)$ et $b(4, 3)$
- 2) $a(-7, 2)$ et $b(-3, -3)$
- 3) $a\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}\right)$ et $b\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{5}\right)$
- 4) $a(0, -3)$ et $b(3, -2)$
- 5) $a(3, -5)$ et $b(-3, 5)$

20. Vérifiez si les points a, b, c et d appartiennent à la droite:

- | | | |
|---------------------------------|--|--|
| 1) $2y + 3x = 0$ | 2) $y = -3x + 4$ | 3) $3y - 4x + 6 = 0$ |
| $a(3, -2)$ | $a(0, 4)$ | $a\left(1, -\frac{2}{3}\right)$ |
| $b(-4, 6)$ | $b(1, 2)$ | $b(5, 5)$ |
| $c\left(\frac{4}{3}, -2\right)$ | $c\left(-\frac{1}{4}, \frac{19}{4}\right)$ | $c\left(\frac{2}{3}, -\frac{10}{9}\right)$ |
| $d(2, 4, -3, 6)$ | $d(-1, 2, 2, 8)$ | $d(-3, -6)$ |

21. Vérifiez si les points a, b et c appartiennent à la même droite :

- | | | |
|----------------|------------|-------------|
| 1) $a(2, 3)$ | $b(-3, 1)$ | $c(-8, -1)$ |
| 2) $a(-2, -5)$ | $b(6, -3)$ | $c(5, -3)$ |

22. Complétez :

$$1) (2, \dots) \in A \equiv 2x - 5y - 3 = 0$$

$$2) \left(\dots, \frac{1}{2} \right) \in A \equiv 5y - 4x = 0$$

$$3) (-4, \dots) \in A \equiv 2y - 3x + 6 = 0$$

$$4) (\dots, -3) \in A \equiv 3x - 5y - 7 = 0$$

23. Dans un système d'axes orthonormé, construisez :

$$1) y = 2x$$

$$7) y = 2x - 3$$

$$2) y = -\frac{3}{2}x$$

$$8) y = -\frac{2}{3}x + 3$$

$$3) y = -x$$

$$9) 3y - 6x - 15 = 0$$

$$4) 3y = 5x$$

$$10) 2x + 5y + 10 = 0$$

$$5) 2x - 7y = 0$$

$$11) 2y + 3x - 7 = 0$$

$$6) 5y + 4x = 0$$

$$12) \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$$

24. Sous quelle condition, la droite $rx + sy + t = 0$ passe-t-elle par $o(0, 0)$?

25. Montrez que les points $m(-s, r)$ et $n(s, -r)$ appartiennent à la droite $rx + sy = 0$.

Déterminez directement deux points de :

$$3x + 2y = 0$$

$$-5x + 3y = 0$$

$$-7x - 5y = 0$$

$$2x - 9y = 0$$

26. Dans un système d'axes orthonormé, construisez :

$$x = 5$$

$$y = -4$$

$$y = 3$$

$$2x = -7$$

$$x = -2$$

$$4y = 9$$

27. Les sommets d'un triangle sont $a(4, 3)$, $b(2, -3)$ et $c(-2, 2)$.

Etablissez les équations des médianes de ce triangle.

CHAPITRE XXVII

MONÔMES

1. Notion

Un monôme est un produit de plusieurs facteurs.

Le monôme $7 \times x \times x \times y \times (-2) \times x \times (-y) \times \frac{3}{4} \times z$

peut s'écrire simplement : $\frac{21}{2} x^2 y^3 z$

$\frac{21}{2}$ est le coefficient

$x^2 y^3 z$ est la partie littérale.

2. Monômes semblables

Des monômes sont semblables, s'ils possèdent la même partie littérale.

$3x^4 y^2 z$, $-5x^4 y^2 z$, $0,34x^4 y^2 z$ et $-\frac{2}{5}x^4 y^2 z$ sont semblables.

$5a^3 b c$, $-6a^2$ et $\frac{7}{3} a^2 b^2 c$ ne sont pas semblables.

3. Fonctions de monômes

Des fonctions telles que

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow x^2$ ou $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ et } y = x^2\}$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow 2x^3$ ou $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ et } y = 2x^3\}$

sont des fonctions de monômes parce que les images x^2 et $2x^3$ sont des monômes.

En général, nous écrirons :

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x)$ ou

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ et } y = f(x)\}$

4. Opérations sur les monômes

A. Somme de monômes semblables

- Règle* : 1. Additionner les coefficients.
2. Conserver la partie littérale.

Exemples :

$$3x^3 - 5x^3 = -2x^3$$

$$5x^2y - 3x^2y + 2x^2y = 4x^2y$$

B. Différence de monômes semblables

Règle : Pour soustraire un monôme, on ajoute son opposé.

Exemples :

$$16x - (-5x) = 16x + 5x = 21x$$

$$-6x^3y^2z - (4x^3y^2z) = -6x^3y^2z - 4x^3y^2z = -10x^3y^2z$$

L'addition et la soustraction de monômes semblables sont appelées réduction de monômes semblables.

C. Produit

- Règle* : 1. Effectuer le produit des coefficients.
2. Ecrire les lettres qui figurent dans les monômes en affectant chacune d'elles d'un exposant égal à la somme de ses exposants dans les monômes.

Exemples :

$$\left(\frac{3}{4}x^3y^2\right)(-8xy^3) = -6x^4y^5$$

$$(-3a^2bc)(-2ab) \cdot 3a = 18a^4b^2c$$

D. Élévation aux puissances

- Règle* : 1. Élever le coefficient à la puissance indiquée
2. Effectuer le produit de chacun des exposants par la puissance indiquée.

Exemples :

$$(-3x^2y)^3 = -27x^6y^3$$

$$\left(-\frac{1}{2}a^2bc\right)^2 = \frac{1}{4}a^4b^2c^2$$

E. Quotient

- Règle : 1. Effectuer le quotient des coefficients.
 2. Ecrire les lettres qui figurent dans les monômes en affectant chacune d'elles d'un exposant égal à la différence de ses exposants dans les monômes.

Exemples :

$$\begin{aligned}
 (-18x^4 y^2) : 3x^2 y &= \frac{-18x^4 y^2}{3x^2 y} \\
 &= \frac{-18}{3} \cdot \frac{x^4}{x^2} \cdot \frac{y^2}{y} \\
 &= -6x^2 y
 \end{aligned}$$

$$\left(-\frac{2}{3}x^5 y^3 z^2\right) : x^2 y^3 z = -\frac{2}{3}x^3 z$$

$$8x^6 y^2 z : (-2x^3 y z^3) = -4x^3 y z^{-2} = \frac{-4x^3 y}{z^2}$$

Exercices

1. Pour chacun des monômes suivants, donnez le coefficient et la partie littérale.

monôme	coefficient	partie littérale
1) $5a$		
2) $-3a^2 b$		
3) $-\frac{2}{7}p^3 qr^5$		
4) $0,32 x^2 y$		
5) $\frac{5,2x^2 y^3}{z^4}$		
6) $-x^2 y^3 z$		

2. Simplifiez les monômes suivants:

$$1) \frac{1}{2} \times x \times (-y) \times x^3 \times y^2 \times 3 \times \left(-\frac{1}{15}\right)$$

$$2) 2a \times 3b \times (-6) \times \left(-\frac{1}{12}a\right) \times a \times b \times 3a^2 \times b \times (-1)$$

$$3) (-x)^3 \times x^{-2} \times y \times \frac{7}{2} \times x^3 \times \left(-\frac{16}{21}\right)$$

3. Déterminez le degré de:

$$-\frac{2}{13}x^5y^2z^3$$

$$0,32x^7y^4$$

$$\pi x^3y^2z^2$$

a) par rapport à x

d) par rapport à x et y

b) par rapport à y

e) par rapport à x et z

c) par rapport à z

f) par rapport à y et z

g) par rapport à x , y et z .

4. Ecrivez 5 monômes semblables à :

$$1) 5x^3$$

$$2) -\frac{2}{3}x^2$$

$$3) 6x$$

5. Additionnez :

$$1) 5a^2, -3a^2, a^2, 27a^2 \text{ et } -13a^2$$

$$2) 7x^2y^2, -12x^2y^2, 5x^2y^2, 27x^2y^2 \text{ et } -13x^2y^2$$

$$3) -\frac{5}{3}xyz, \frac{1}{6}xyz, -\frac{3}{4}xyz, -2xyz \text{ et } -\frac{7}{24}xyz$$

$$4) 0,32ab^2, -5,6ab^2, -12,8ab^2, -0,027ab^2 \text{ et } 3,18ab^2$$

$$5) 5abc, -\frac{2}{3}abc, 5,3abc, \pi abc \text{ et } 5\frac{1}{2}abc$$

6. Soustrayez :

$$1) 2x \text{ de } 7x$$

$$5) 17x^2y^2z \text{ de } \frac{1}{4}x^2y^2z$$

$$2) \pi x \text{ de } 5\pi x$$

$$6) -\frac{2}{5}a^2b \text{ de } -0,8a^2b$$

- 3) $2,7 xy$ de $0,2 xy$ 7) $7abc^2$ de $-\frac{2}{3}abc^2$
 4) $-\frac{2}{7}a^2$ de $\frac{3}{4}a^2$ 8) $-3,182x^2z$ de $5,6x^2z$

7. Effectuez :

- 1) $5a - (-3a) + 2a - (+7a) - (+4a) + (-a)$
 2) $0,35 xy^2 + (-7,2 xy^2) - (-3,16 xy^2) + (+8,3 xy^2)$
 3) $\frac{2}{5}xyz - \left(-\frac{3}{4}xyz\right) + \left(-\frac{7}{10}xyz\right) - \left(+\frac{3}{20}xyz\right) + (+0,1 xyz)$
 4) $5a^2 - 7a^2 - 3a^2 + 2a^2 + 8a^2$
 5) $-2x^2y^2 + 5x^2y^2 - 7x^2y^2 + x^2y^2 + 8x^2y^2$
 6) $\frac{2}{3}xy^2z^3 - \frac{1}{6}xy^2z^3 + \frac{3}{5}xy^2z^3 + \frac{7}{15}xy^2z^3 - \frac{3}{20}xy^2z^3$
 7) $0,12 a^2b - 7,43 a^2b + 5,71 a^2b - 13,5 a^2b$
 8) $\sqrt{3}xy - 2\sqrt{7}xy + 3\sqrt{3}xy + 8\sqrt{7}xy - 2\sqrt{3}xy$

8. Effectuez :

- 1) $5xy^3 (-2x^2y^2z)$
 2) $\left(-\frac{4}{5}m^2n^3\right) \left(\frac{5}{4}mn^4p\right)$
 3) $7xyz \left(-\frac{3}{14}x^4y^2z^3\right)$
 4) $3x^my^n (-5x^py^q)$
 5) $x^{m+1}y^n \cdot 5x^{2m-1}y^{2n+3}$
 6) $-0,5 x^my^{3n} (-7x^2y^n)$
 7) $5x^2yz^3 (-3xy^2) (-2y^5z^2)$
 8) $\left(-\frac{15}{16}a^2b^2\right) \left(-\frac{4}{7}a^2c^3\right) \left(-\frac{2}{5}a^2b^3c^4\right)$
 9) $7,2 abc (-0,3 a^2b^3) (-5,2 b^2c^4)$

9. Effectuez :

1) $8a^3b^5c^4 : (-2ab^3c^4)$

6) $5ab^2c^5 : (-2a^3bc^7)$

2) $(-10a^5) : (-2a^3)$

7) $\left(-\frac{3}{10}xy^2\right) : (-21x^2y^5z)$

3) $7a^3b^2 : (-3a^3b^2)$

8) $6,8ab^3c^4 : (-0,17a^3b^3c^2)$

4) $\left(-\frac{3}{4}x^4y^3\right) : \left(-\frac{5}{8}x^2y\right)$

9) $-15x^m y^n : (-5x^3y^4)$

5) $(0,36 x^4 y z^2) : 2,4 x^2 z$

10) $3a^{2m+3b^{2n-4}} : (-12a^{m-1}b^{3n+2})$

10. Complétez :

	carré	cube	4 ^e puissance	5 ^e puissance
1) $-3a$				
2) $5a^2b$				
3) $-2pq$				
4) πR^2				
5) $\frac{U}{R}$				
6) $\frac{5a^2b}{c}$				
7) $\frac{-2ab^3}{3c^2}$				

11. Effectuez :

1) $5a^2b^3c(-2ab^2c^3)^3 : (-20a^3b^5c)$

2) $\left[\left(-\frac{5}{6}x^2yz\right) : \left(-\frac{10}{3}xy^3z\right)\right]^2$

3) $(0,2 a^2b^3c^3)^4 : (-0,1ab^4c)^3$

CHAPITRE XXVIII

POLYNÔMES

1. Notion

Un polynôme est une somme dont les termes sont des monômes.

$4x^4 + 3x^2$ est un binôme; $4x^4$ et $3x^2$ sont les termes.

$2xy + 3x^2y^2 - \frac{3}{4}x$ est un trinôme; $2xy$, $3x^2y^2$ et $-\frac{3}{4}x$ sont les termes.

$2a + 3b - c + 4d$ est un polynôme.

2. Réduction — Polynôme ordonné

Pratiquement, on réduit toujours les termes semblables d'un polynôme. Ensuite, le polynôme doit être ordonné par rapport aux puissances d'une lettre.

$$\begin{aligned} & \underline{4x^4} - \underline{7x} + \underline{6x^3} - 4 + \underline{6x^2} - \underline{3x} + 5 + \underline{6x^4} - \underline{2x^2} - 8 - \underline{7x^3} \\ &= 10x^4 - x^3 + 4x^2 - 10x - 7 \end{aligned}$$

3. Polynôme complet

$4x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 4x - 2$ est un polynôme complet, parce qu'il renferme toutes les puissances de x , depuis la plus élevée jusqu'à x^0 .

$4x^3 - \frac{3}{4}x + 0,4$ est un polynôme incomplet.

$3x^3 + 4xy + 5y^2 - 5y^3$ est un polynôme incomplet par rapport à x , mais complet par rapport à y .

Un polynôme incomplet peut être complété en ajoutant les termes manquants affectés d'un coefficient nul.

$$a^3 - 3a + 2 = a^3 + 0a^2 - 3a + 2$$

4. Fonctions de polynômes

Des fonctions telles que

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow x + 3 \text{ ou } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} = \\ \{ (x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ et } y = x + 3 \}$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow 3x^2 + 4x - 6 \text{ ou } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} = \\ \{ (x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ et } y = 3x^2 + 4x - 6 \}$$

sont des fonctions de polynômes, parce que les images $x + 3$ et $3x^2 + 4x - 6$ sont des polynômes.

D'une façon générale, nous écrirons :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x) \text{ ou } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} = \\ \{ (x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ et } y = f(x) \}$$

5. Opérations sur les polynômes

A. Addition

Règle : Pour additionner des polynômes, on les écrit à la suite l'un de l'autre en conservant les signes des différents termes.

Exemples :

$$1. (6x^2 - 4xy + 3y^2) + (-2x^2 + 7xy - 4y^2) + (6x^2 - 4xy + 5y^2) = \\ 6x^2 - 4xy + 3y^2 - 2x^2 + 7xy - 4y^2 + 6x^2 - 4xy + 5y^2 = \\ 10x^2 - xy + 4y^2$$

Disposition pratique :

$$\begin{array}{r} 6x^2 - 4xy + 3y^2 \\ - 2x^2 + 7xy - 4y^2 \\ 6x^2 - 4xy + 5y^2 \\ \hline 10x^2 - xy + 4y^2 \end{array}$$

$$2. (7x^3 - 5x^2 + 6x) + (-3x^2 + 5x - 4) + (x^3 - 7x + 6) = \\ 7x^3 - 5x^2 + 6x - 3x^2 + 5x - 4 + x^3 - 7x + 6 = \\ 8x^3 - 8x^2 + 4x + 2$$

Disposition pratique :

$$\begin{array}{r}
 7x^3 - 5x^2 + 6x \\
 - 3x^2 + 5x - 4 \\
 x^3 \quad - 7x + 6 \\
 \hline
 8x^3 - 8x^2 + 4x + 2
 \end{array}$$

B. Soustraction

Règle : Pour soustraire un polynôme d'un autre polynôme, on les additionne en changeant les signes des termes du polynôme à soustraire.

Exemple :

$$\begin{aligned}
 (7x^2 - 5x + 8) - (5x^2 + 7x - 6) &= \\
 7x^2 - 5x + 8 - 5x^2 - 7x + 6 &= \\
 2x^2 - 12x + 14
 \end{aligned}$$

Disposition pratique :

$$\begin{array}{r}
 7x^2 - 5x + 8 \\
 - 5x^2 - 7x + 6 \\
 \hline
 2x^2 - 12x + 14
 \end{array}$$

C. Multiplication

1. Produit d'un polynôme et d'un monôme

Règle : 1. Multiplier chaque terme du polynôme par le monôme.

2. Faire la somme des résultats obtenus.

Exemples :

$$\begin{aligned}
 (3x^2 - 6x + 5)(-4x) &= 3x^2(-4x) - 6x(-4x) + 5(-4x) = \\
 &= -12x^3 + 24x^2 - 20x
 \end{aligned}$$

$$4xy(2x^2 - 5xy + 6y^2) = 8x^3y - 20x^2y^2 + 24xy^3$$

2. Produit de deux polynômes

Règle : 1. Multiplier le multiplicande successivement par chaque terme du multiplicateur.

2. Additionner les produits partiels en réduisant les termes semblables.

Exemples :

$$1. \quad (4x^2 - 2x + 3)(x - 5)$$

$$4x^2 - 2x + 3$$

$$x - 5$$

$$4x^3 - 2x^2 + 3x$$

$$- 20x^2 + 10x - 15$$

$$4x^3 - 22x^2 + 13x - 15$$

$$2. \quad (-8x + 3 + 4x^3)(2x + 4x^2 - 7)$$

$$4x^3 \qquad - 8x + 3$$

$$4x^2 + 2x - 7$$

$$16x^5 \qquad - 32x^3 + 12x^2$$

$$8x^4 \qquad - 16x^2 + 6x$$

$$- 28x^3 \qquad + 56x - 21$$

$$16x^5 + 8x^4 - 60x^3 - 4x^2 + 62x - 21$$

$$3. \quad (3x^2y - 2x^3 + 3xy^2 + y^3)(2x^2 - xy + y^2)$$

$$- 2x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$2x^2 - xy + y^2$$

$$- 4x^5 + 6x^4y + 6x^3y^2 + 2x^2y^3$$

$$+ 2x^4y - 3x^3y^2 - 3x^2y^3 - xy^4$$

$$- 2x^3y^2 + 3x^2y^3 + 3xy^4 + y^5$$

$$- 4x^5 + 8x^4y + x^3y^2 + 2x^2y^3 + 2xy^4 + y^5$$

D. *Quotient d'un polynôme par un monôme*

Règle : 1. Diviser chaque terme du polynôme par le monôme.

2. Additionner les quotients obtenus.

Exemples :

$$(8x^4y - 12x^3y^2 + 4x^2y^3) : (-4x^2y) =$$

$$\frac{8x^4y}{-4x^2y} - \frac{12x^3y^2}{-4x^2y} + \frac{4x^2y^3}{-4x^2y} =$$

$$-2x^2 + 3xy - y^2$$

$$(12x^3y^2 - 6x^4y^3 + 3x^2y^2) : 3x^2y^2 = 4x - 2x^2y + 1$$

$$(3a^3b^2c - 7a^2b^3c^2 + 5ab^2c) : (-3ab^2c) = -a^2 + \frac{7}{3}abc - \frac{5}{3}$$

6. Mise en évidence

L'opération $(12x + 6xy + 9xz) : 3x = 4 + 2y + 3z$
peut s'écrire: $12x + 6xy + 9xz = 3x(4 + 2y + 3z)$.

Lorsque tous les termes d'un polynôme renferment un même facteur commun m , ce polynôme peut s'écrire sous forme d'un produit.

$$\text{polynôme} = m (\text{polynôme} : m)$$

Exemples :

$$3x - 12y + 6z = 3(x - 4y + 2z)$$

$$3x^2 - 12xy + 6xyz = 3x(x - 4y + 2yz)$$

$$12x^6y^3 - 18x^5y^4 + 24x^4y^5 = 6x^4y^3(2x^2 - 3xy + 4y^2)$$

$$7abc - 14a^2b^3c - 21a^3bc^4 = 7abc(1 - 2ab^2 - 3a^2c^3)$$

Exercices

1. Ordonnez :

a) par rapport aux puissances décroissantes de x :

$$5x - 3x^4 + 7 + 3x^2 - 6x^3$$

$$x^4 - 5xy^4 + 3y - 7x^2y^3 + 2x^5y^2$$

$$7xy^4 - 3x^4y + 8x^5 - 6x^2y^3 + 10x^3y^2 + 2y^5$$

b) par rapport aux puissances croissantes de x :

$$8x^2 - 5 + 7x^5 - 3x - x^6$$

$$3x^5 + 6xy^4 - 3x^3y^2 + 16x^4y - 5y^5$$

$$-6x^3y^3 + 8xy^5 + 3x^6$$

- Pour ces polynômes, précisez :
1. le degré par rapport à x
 2. le degré par rapport à y
 3. le degré.

Y a-t-il des polynômes incomplets ? Si oui, complétez.

2. Réduisez les termes semblables et ordonnez par rapport aux puissances décroissantes de x :

1) $5x^2 - 6 - 3x^2 + 5x - 7x^2 + 6x^3 + 2 - 5x^3$

2) $8 - 5x^2 - 2 - x + 3x^3 + 5x^2 + 6x + 3$

3) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2} + 2x^2 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{3}{4} - \frac{1}{7}x - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{4}$

4) $8x^4y + 5x^2y^3 - 8xy^4 + 9x^5 - 3x^2y^3 - 3x^3y^2 - 8x^2y^3 - 5x^4y$

5) $3x^4 + 5x^2y^2 - 4x^3y - y^4 + 5xy^3 - 7x^2y^2 + 7x^3y - 4y^4$

6) $0,5xy^2 - 7,2x^2y + 5,6xy^2 - 8,2x^3 - 4,3x^2y + 3,8x^3 + 11,5x^2y$

3. Complétez les polynômes suivants :

1) $3a^5 - 7a + 2$

2) $8x - 7x^4 + 5x^3$

3) $2x^5y - 7x^4y^2 + 3xy^5 - 7y^6$

4. A l'aide des coefficients suivants, écrivez des polynômes complets

- a) ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x

$$\begin{array}{ccccccccc} 5 & -2 & 6 & 3 & 0 & & & & \\ 3 & -7 & 2 & 5 & 8 & 1 & -4 & & \end{array}$$

- b) ordonnés par rapport aux puissances croissantes de x

$$\begin{array}{ccccccccc} -6 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{7} & -1 & \frac{2}{3} & & & \\ -5 & 8 & 4 & -7 & -3 & 9 & 5 & -2 & \end{array}$$

- c) ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x et croissantes de y

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & 4 & 0 & -7 & 6 & & \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{5}{3} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{7} & -\frac{3}{8} & \end{array}$$

De quel degré sont-ils ?

5. Calculez la valeur numérique des fonctions de polynômes suivantes :

$$1) y = 2x^2 - 7x + 5 \quad \text{pour } x = -1; \quad x = 3; \quad x = -\frac{1}{4}$$

$$2) y = -2x^3 + 7x^2 - 2x - 2 \quad \text{pour } x = 1; \quad x = -2; \quad x = -\frac{1}{3}$$

$$3) y = x^5 - 3x^2 + 5 \quad \text{pour } x = -1; \quad x = -2; \quad x = -\frac{1}{2}$$

$$4) y = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \quad \text{pour } x = 1; \quad x = 2; \quad x = \frac{1}{2}$$

6. Additionnez :

$$1) 5a^2 + 7a - 3 \quad \text{et} \quad 2a^2 - 10a + 5$$

$$2) 3a + 7b - 4c, \quad -2a + 3b - 3c \quad \text{et} \quad 5a - 8b + 9c$$

$$3) 3a^3 - 7a + 2, \quad 5a^3 + 3a + 3, \quad -5a^3 + 3a^2 - 5 \quad \text{et} \\ 8a^3 - 4a^2 + 5a$$

$$4) \frac{1}{2}a^2 - \frac{2}{3}a + \frac{1}{5}, \quad \frac{3}{4}a^2 + \frac{5}{6}a - \frac{3}{10} \quad \text{et} \quad -\frac{5}{8}a^2 - \frac{4}{9}a + \frac{4}{15}$$

$$5) 3a^6 - 4a^2 + a, \quad -4a^5 + 4a^3 - 1, \quad a^6 + 3a^4 + 5a \quad \text{et} \\ 4a^5 - 3a^3 + 2a + 5$$

$$6) 4x^2 - 7xy + 3y^2, \quad -6x^2 + 2xy - 5y^2 \quad \text{et} \quad 2x^2 - 5xy + 3y^2$$

$$7) 4x^3 - 3x^2y + 5xy^2 - 7y^3, \quad -8x^3 + 5x^2y - 9xy^2 - 2y^3 \quad \text{et} \\ -3x^3 + 7x^2y + 2xy^2 + 8y^3$$

$$8) 3x^5 - 7xy^4 + 5x^2y^3, \quad -2xy^4 - 7x^3y^2 + 2x^5, \quad 2x^2y^3 - 3xy^4 + 5x^4y, \\ 5x^2y^3 - 9xy^4 + 3y^5 \quad \text{et} \quad -2x^4y + 2y^5 - 3x^3y^2$$

$$9) \frac{2}{3}x^2y - \frac{1}{5}xy^2, \quad -\frac{1}{6}x^2y - \frac{3}{4}x^3, \quad -\frac{2}{5}y^3 + \frac{1}{2}xy^3 \quad \text{et} \\ -\frac{3}{8}x^2y - \frac{1}{4}xy^2$$

7. Soustrayez :

$$1) 3x^3 - 5x^2 - 7x + 2 \quad \text{de} \quad -2x^3 - 4x^2 - 3x + 2$$

$$2) 5x^3 + 2x^2 - 4 \quad \text{de} \quad 2x^2 + 3x - 4$$

- 3) $\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{4}$ de $-\frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}$
 4) $5a^3 - 3a^2b + 7ab^2 + 3b^3$ de $2a^3 - 3a^2b + 10ab^2 - 4b^3$
 5) $a^3 - 3b^3 - 4ab^2 - a^2b$ de $b^3 + 4ab^2 - 9a^2b$
 6) $\frac{1}{2}b^4 + \frac{3}{5}ab^3 + \frac{2}{3}a^4 - \frac{5}{6}a^3b - \frac{3}{4}a^2b^2$ de $\frac{5}{2}ab^3 - \frac{3}{7}b^4 + \frac{1}{4}a^3b$

8. Effectuez :

- 1) $3a^2bc^3 (4a^3bc^3 - 5ab^3c + 2a^3c)$
 2) $3x^2y (4x^2 - 7xy - 2y^2)$
 3) $-\frac{2}{3}x^2y^2 (-\frac{9}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2y - \frac{6}{7}xy^2 + \frac{2}{5}y^3)$
 4) $3x^my^{n+1} (-5x^{2m-1} - 3x^{m+2}y^{2n-3} + 4y^{n-1})$
 5) $(8x^3 - 7x^2y + 5xy^2 - y^3) (-4xy^2)$
 6) $(2,8 a^2bc^3 - 0,17 ab^2 + 5,12a^3b^3c^3) (2,1 ab^2c^3)$
 7) $\left(\frac{1}{4}x^2y + \frac{3}{5}xy^2 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{2}y^2\right) \left(-\frac{10}{3}x^3y^2\right)$
 8) $(5x^{m+3}y^{2n-3} - 2x^{2m-4}y^{n+4} + 3x^{m-3}y^{3n+5}) \cdot 2x^{2-m}y^{3n-4}$

9. Effectuez :

- 1) $(2x - 5 + 3x^2) (2 - x + 3x^2)$
 2) $(x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3) (x + y)$
 3) $(5x^3 + 2 - 3x + x^3) (x^2 - 4x - 3)$
 4) $(-3ab + 7b^3 + 5a^2) (4ab - 2a^2 - b^2)$
 5) $(5a^4 - 3a + 2a^2 - 1) (2a^2 + 5a - 3)$
 6) $(x - 3x^5 + 2x^3 + 5) (3x^3 - 5x + 2)$
 7) $\left(\frac{5}{3}a^3 + 3ab - \frac{7}{3}b^2\right) \left(2b^2 - ab - \frac{a^2}{2}\right)$
 8) $(3x^3y - 5xy^3 - 2x^4 - x^2y^2 + 4y^4) (2xy^2 - 3x^3 + 5y^3 - x^2y)$
 9) $\left(\frac{3}{2}x^3y^2 - \frac{2}{3}y^5 + \frac{1}{4}x^5 - \frac{2}{5}xy^4\right) \left(\frac{2}{3}x^2y - \frac{3}{2}y^3 + \frac{1}{2}x^3\right)$
 10) $(2x + 3) (-3x + 2) (4x - 1)$
 11) $(3x^2 - 4x + 2) (-x^2 + 2x - 1) (2x^2 - x - 2)$
 12) $(x^3 - 3x^2y + 2y^3) (2x^2y - 3xy^2 - y^2) (3x^3 + xy^2 - 2x^2y)$

10. $E(x)$ est l'ensemble de tous les polynômes en x .

Vérifiez si: 1) $E(x)$, $+$ est un groupe.

2) $E(x)$, $\cdot$ est un groupe.

3) $E(x)$, $+$, $\cdot$ est un champ.

11. Déterminez a , b , c et d pour que les polynômes suivants soient égaux :

$$(a + 3)x^3 - (5b - 2)x^2y + (4 - 3c)xy^2 - (5 - d)y^3 \text{ et}$$

$$(2a - 7)x^3 - (2b + 7)x^2y - (c + 5)xy^2 + (4d - 3)y^3$$

Ecrivez les polynômes.

12. Effectuez :

$$1) (6a^2 - 3a + 5) - [(8a^2 + 5) - (3a^2 - 8a - 1)]$$

$$2) 7a^4 - [3a^2 - (4a^3 - 7a)] + (3a^2 - 5a + 2) - [(3a^4 - 4a) + (2a^2 - 3a - 2)]$$

$$3) [(3x^2y - 7xy^2) - 4x^3] - [5y^3 - (7xy^2 - 3x^2y)] - [(x^3 - 2x^2y) - (4y^3 + 3xy^2)]$$

$$4) 5x^2(3x + 2) - 2x^3(x^2 - 5x - 7) + 5x(x^4 + 2x - 1)$$

$$5) x(x + y - z) - 2y(3x - 5y + 2z) + 3z(2x - 3y - z)$$

$$6) 3a^2b(2a^2 - 3ab + 4b^2) - 2ab^2(-3a^2 + 5ab - 2b^2) - 4a^2b^2(2a - 3b)$$

$$7) (3x^2 - 7x + 2)(x + 3) - (3x - 1)(4x^2 - x + 2)$$

$$8) (x + y - z)(x + y) + (x - y + z)(x + z) + (y + z - x)(y + z)$$

$$9) (2x - 3y)(x^3 - 5xy + 3y^2) - (5y^2 - 4xy - 3x^2)(3x + 2y)$$

$$10) [(15a^4b^4 - 27a^3b^3 + 9a^2b^2) : (-3ab^2)](5a^2 - 3ab + 7b^2)$$

13. Effectuez :

$$1) (15a^3b^2 - 20a^5b^4 - 40a^6b^3) : 5a^3b^2$$

$$2) (-9a^5b^7c^3 + 5a^4b^4c^4 - 12a^7b^6c^5) : (-6a^3b^2c^3)$$

$$3) (-3x^5y^2 - \frac{1}{9}x^4y^3 + \frac{2}{15}x^3y^4) : \left(-\frac{1}{3}x^3y\right)$$

$$4) (2x^5y^3z^4 - 4x^4y^4z^5 - 8x^3y^5z^6) : 2x^3y^2z^4$$

$$5) \left(\frac{3}{7}a^5b^4 - \frac{5}{6}a^7b^6 - \frac{1}{4}a^6b^3 - \frac{2}{5}a^4b^7\right) : (-30a^2b^3)$$

$$6) (6x^4y^4 - 3,6x^5y^6 + 0,12x^6y^5) : 1,2x^3y$$

14. Mettez les facteurs communs en évidence.

$$1) x^4y^3 - x^3y^4$$

$$2) 28a^3b^4 - 21a^4b^3$$

$$3) 3a^7b^4c^3 + 5a^3bc^5$$

$$4) 16a^7 - 20a^6 + 8a^5$$

$$5) 9a^4b^7 - 12a^2b^6 - 15a^6b^5$$

$$6) \frac{2}{15} x^3y^4z^6 + \frac{8}{15} x^6y^7z^5 - \frac{14}{15} x^5y^2z^3$$

$$7) 25a^4b^8 - 20a^7b^6 + 50a^5b^5 - 45a^3b^4$$

$$8) 3x^{m+2}y^m + 6x^my^{m+3}$$

$$9) 4x^{n+2}y^{m+1} + 8x^{n+3}y^{m+3} - 12x^{n-1}y^{m+4}$$

$$10) x(y+1) - 3(y+1)$$

$$11) a(x+y) + b(x+y) - c(x+y)$$

$$12) a(x-y) - b(x-y) - c(y-x)$$

$$13) 3(2a-b)(4x-5) - (2x+1)(b-2a)$$

$$14) 2a(a-b) - (a-b)^2$$

$$15) (x-3)(x-1) - (x-3) + 2(x-3)^2$$

$$16) (2x+y) - a(2x+y) - (2x+y)^2$$

$$17) (x-2y)(a-b) - (b-a)(2x+y)$$

CHAPITRE XXIX

IDENTITÉS REMARQUABLES

De la même façon que dans l'ensemble $\mathbb{Q}$, on a dans $\mathbb{R}$:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b + c + \dots)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \dots + 2ab + 2ac + \dots + 2bc + \dots + \dots$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

Ces identités se présentent tellement souvent en mathématique, qu'il est indispensable de les mémoriser.

Exemples :

I $(2x + y)(2x - y) = 4x^2 - y^2$

$$(-2xy + 3z^2)(-2xy - 3z^2) = 4x^2y^2 - 9z^2$$

$$\begin{aligned} \underline{(2a+b+5c)} \underline{(2a+b-5c)} &= [(2a+b)+5c][(2a+b)-5c] \\ &= (2a+b)^2 - 25c^2 \\ &= 4a^2 + 4ab + b^2 - 25c^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{(2x^3 - 3x^2 - 5x + 4)} \underline{(2x^3 + 3x^2 - 5x - 4)} \\ &= [(2x^3 - 5x) - (3x^2 - 4)][(2x^3 - 5x) + (3x^2 - 4)] \\ &= (2x^3 - 5x)^2 - (3x^2 - 4)^2 \\ &= 4x^6 - 20x^4 + 25x^2 - 9x^4 + 24x^2 - 16 \\ &= 4x^6 - 29x^4 + 49x^2 - 16 \end{aligned}$$

II $(9x + 5y)^2 = 81x^2 + 90xy + 25y^2$

$$(-2a + 4bc)^2 = 4a^2 - 16abc + 16b^2c^2$$

III $(2x + y)^3 = 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$

$$(-2a - 3b)^3 = -8a^3 - 36a^2b - 54ab^2 - 27b^3$$

$$\text{IV } (2x + 3y - 4z + u)^2 = 4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + u^2 + 12xy \\ - 16xz + 4xu - 24yz + 6yu - 8zu$$

$$\text{V } (x - 3)(x + 4) = x^2 + x - 12 \\ (4abc + 3)(4abc - 5) = 16a^2b^2c^2 - 8abc - 15 \\ \underline{(a + 2b + 8c)(a + 2b - 3c)} \\ = [(a + 2b) + 8c][(a + 2b) - 3c] \\ = (a + 2b)^2 + 5c(a + 2b) - 24c^2 \\ = a^2 + 4ab + 4b^2 + 5ac + 10bc - 24c^2 \\ \underline{(x^2 + 2x + 3)(x^2 - 5x + 3)} \\ = [(x^2 + 3) + 2x][(x^2 + 3) - 5x] \\ = (x^2 + 3)^2 - 3x(x^2 + 3) - 10x^2 \\ = x^2 + 6x^2 + 9 - 3x^3 - 9x - 10x^2 \\ = x^2 - 3x^3 - 4x^2 - 9x + 9$$

Exercices

$$\text{I. } \boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$$

1. Calculez :

- | | |
|---|--|
| 1) $(a - 4)(a + 4)$ | 10) $(5 + \frac{2}{7}a)(5 - \frac{2}{7}a)$ |
| 2) $(5x - 1)(5x + 1)$ | 11) $(\frac{2}{3}a + \frac{3}{5}b)(\frac{2}{3}a - \frac{3}{5}b)$ |
| 3) $(7 + 4x)(7 - 4x)$ | 12) $(\frac{1}{2}x^2y - \frac{5}{6}xy^2)(\frac{1}{2}x^2y + \frac{5}{6}xy^2)$ |
| 4) $(3x + 2y)(3x - 2y)$ | 13) $(0,4a - 3,2b)(0,4a + 3,2b)$ |
| 5) $(4a - y)(4a + y)$ | 14) $(\sqrt{3}x + \sqrt{5}y)(\sqrt{3}x - \sqrt{5}y)$ |
| 6) $(5a^2b - 2c)(5a^2b + 2c)$ | 15) $(3\sqrt{2}a - 2\sqrt{7}b)(3\sqrt{2}a + 2\sqrt{7}b)$ |
| 7) $(3a^2bc^3 - 5xy^4)(3a^2bc^3 + 5xy^4)$ | 16) $(2x^m + 3y^n)(2x^m - 3y^n)$ |
| 8) $(a^3 - 7b^3c)(a^3 + 7b^3c)$ | 17) $(3x^{m+2} - 4y^{n-3})(3x^{m+2} + 4y^{n-3})$ |
| 9) $(\frac{3}{4}x - 2)(\frac{3}{4}x + 2)$ | 18) $(2a^{m+1}b - 2,1ab^m)(2a^{m+1}b + 2,1ab^m)$ |

2. Calculez :

- | | |
|-------------------------------|---|
| 1) $(-a - 2b)(-a + 2b)$ | 5) $(3a - 5b)(5b + 3a)$ |
| 2) $(-x^2 + 5)(-x^2 - 5)$ | 6) $\left(-\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b\right)\left(-\frac{2}{3}b - \frac{1}{2}a\right)$ |
| 3) $(8 - 3ab^2c)(3ab^2c + 8)$ | 7) $(-0,5 + 1,2x)(0,5 + 1,2x)$ |
| 4) $(4 - 3a)(3a + 4)$ | |

3. Calculez :

- 1) $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$
- 2) $(3x + 2y)(3x - 2y)(9x^2 + 4y^2)$
- 3) $(3a - 5b^2c)(3a + 5b^2c)(9a^2 + 25b^4c^2)$
- 4) $(a + b)(a - b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)$
- 5) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1)$

4. Calculez :

- | | |
|-------------------|-------------------|
| 1) 29×31 | 3) 36×44 |
| 2) 58×62 | 4) 45×55 |

II.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

1. Calculez :

- | | |
|---|---|
| 1) $(x - y)^2$ | 15) $\left(\frac{1}{4}xy - 2x^2y\right)^2$ |
| 2) $(x + 3)^2$ | 16) $\left(-\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x^2\right)$ |
| 3) $(7 - y)^2$ | 17) $(\sqrt{3}x - \sqrt{6}y)^2$ |
| 4) $(2a + b)^2$ | 18) $(2\sqrt{2}x + 3\sqrt{6}y)^2$ |
| 5) $(3x - 2y)^2$ | 19) $(0,3x - 0,5y)^2$ |
| 6) $(4a - 5b)^2$ | 20) $(2,5a + 1,5b)^2$ |
| 7) $(-5a + 3b)^2$ | 21) $(3x^m + 5y^n)^2$ |
| 8) $(6x - 5)^2$ | |
| 9) $\left(\frac{2}{3}a - \frac{3}{5}b\right)^2$ | |

- | | |
|-------------------------------|----------------------------------|
| 10) $(-3x - 7y)^2$ | 22) $(2x^m - 3y^n)^2$ |
| 11) $(5a^2b - 7c)^2$ | 23) $(2x^{m+1} - 3y^{n+2})^2$ |
| 12) $(3xy + 4z)^2$ | 24) $(x^{m+1} - 4x^{m+3})^2$ |
| 13) $(4x^2yz + 7xy^2)^2$ | 25) $(4x^{2m+4} + 9x^{m-2})^2$ |
| 14) $(2a^3b^2c - 5ab^2c^3)^2$ | 26) $(a^{m+1}b^m - 4a^{m-1}b)^2$ |

2. Calculez :

- | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|
| 1) 81^2 | 3) 12^2 | 5) 72^2 | 7) 23^2 | 9) 102^2 |
| 2) 39^2 | 4) 49^2 | 6) 58^2 | 8) 67^2 | 10) 88^2 |

3. Calculez :

- 1) $(a + b - c)(a + b + c)$
- 2) $(a - b - c)(a + b + c)$
- 3) $(a - b + c)(a + b - c)$
- 4) $(2a - 3b + 5c)(2a + 3b + 5c)$
- 5) $(x^2 - x + 1)(x^2 + x - 1)$
- 6) $(2x^2 - 3xy + 5y^2)(5y^2 + 3xy - 2x^2)$
- 7) $(a + b - c + d)(a - b + c + d)$
- 8) $(a + b + c + d)(a + b - c - d)$
- 9) $(a - b - c - d)(a + b + c - d)$
- 10) $(a^3 + 3a^2 - 2a + 5)(a^3 + 3a^2 + 2a - 5)$
- 11) $(2a^3 - a^2 - 7a - 3)(2a^3 + a^2 + 7a - 3)$
- 12) $(x^3 + x^2 - x - 1)(x^2 - x^3 - x - 1)$

4. Calculez :

- 1) $(x + y)^2(x - y)^2$
- 2) $(2x - 5y)^2(2x + 5y)^2$
- 3) $(4y - 3)^2(4y + 3)^2$

III.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

1. Calculez :

- | | | | |
|----------------|----------------|------------------|--|
| 1) $(a + 1)^3$ | 6) $(a - b)^3$ | 11) $(-a - b)^3$ | 16) $\left(\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b\right)^3$ |
|----------------|----------------|------------------|--|

- 2) $(a+2)^3$ 7) $(a-4)^3$ 12) $(-a+b)^3$ 17) $\left(4a^2 + \frac{1}{3}b^2\right)^3$
 3) $(3+x)^3$ 8) $(5a-2y)^3$ 13) $(-4x+3y)^3$ 18) $(0,2xy-0,3z)^3$
 4) $(3a+2b)^3$ 9) $(4ab-c)^3$ 14) $(-3a+5b)^3$ 19) $(x^m+2y^n)^3$
 5) $(5a+3b)^3$ 10) $(2ab-3ac)^3$ 15) $(2a^2b-3c^3)^3$ 20) $(a^{m+2}-b^{n+1})^3$

2. Calculez :

- 1) $(x+y)^3(x-y)^3$
 2) $(a+3)^3(a-3)^3$
 3) $(2x-3y)^3(2x+3y)^3$

IV.

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

1. Calculez :

- 1) $(a-b+c)^2$ 8) $(a+b-c-d)^2$
 2) $(-a+b-c)^2$ 9) $(a-b-c+d)^2$
 3) $(3a+2b-5c)^2$ 10) $(-2a+5b+3c-4d)^2$
 4) $(2x-4y-7z)^2$ 11) $(a+b-c+d-e)^2$
 5) $(5xy-3xz+4yz)^2$ 12) $(4a^3-6a^2+a-3)^2$
 6) $(2x^2-3x+1)^2$ 13) $(2x+3y-2z+3u-2v+3w)^2$
 7) $\left(-x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\right)^2$ 14) $\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{2}xy-\frac{2}{5}y^2\right)^2$

2. Calculez :

- 1) $(a+b-c+d)(a+b-c-d)$
 2) $(2a^3-3a^2+a-1)(2a^3+3a^2-a+1)$
 3) $(x^3-3x^2+2x-4)(-x^3+3x^2+2x-4)$
 4) $(x+y)^4 = [(x+y)^2]^2 =$
 5) $(x-y)^4$
 6) $(a+b)^6 = [(a+b)^3]^2 =$
 7) $(a-b)^6$

V.

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

1. Calculez :

1) $(x + 5)(x - 2)$

2) $(x + 8)(x + 3)$

3) $(x - 7)(x + 3)$

4) $(x - 10)(x - 7)$

5) $(5a + 3)(5a - 9)$

6) $(4ab - 5)(4ab - 7)$

7) $(x^2 - 9)(x^2 - 4)$

8) $\left(x - \frac{7}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right)$

9) $\left(2a - \frac{5}{3}\right)\left(2a + \frac{3}{5}\right)$

10) $(x + 2,18)(x - 1,07)$

11) $(x + 4a)(x - 9a)$

21) $(5x - 7y)(5x + 3y)$

13) $(4 - 5a)(4 + 7a)$

14) $\left(\frac{2}{3}x - 5a\right)\left(\frac{2}{3}x - 8a\right)$

15) $\left(\frac{2}{5}x + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{5}x - \frac{3}{8}\right)$

16) $(3x^2 - 7a^2)(3x^2 + 5a^2)$

17) $(9 - x)(3 - x)$

18) $(3x + 2a)(3x - 3b)$

2. Calculez :

1) $(x + y - 5z)(x + y + 3z)$

2) $(x - 5y + 2z)(x - 3y + 2z)$

3) $(5x - 3y + 7z)(5x - 3y - 3z)$

4) $(2a - 3b - 2c)(7a - 3b - 2c)$

5) $(5x^2 - 7x + 4)(5x^2 - 3x + 4)$

6) $(3x^2 + 2x - 8)(3x^2 + 2x - 2)$

3. Révision.

1) $3(x - 2)(x + 2) + 5(x - 3)^2$

2) $(x + 4)(x - 3) - 2(x - 2)^2$

3) $(x - 1)(x - 2) + (x - 2)(x + 4) - 3(x + 2)^3$

4) $(3x - 4)(3x + 1) + 2(x + 2)^2$

5) $5(x^2 - 3x + 1)^2 - 7(x^2 - x)^2 + 3(x^2 + 1)^2$

4. Résolvez dans $\mathbb{R}$:

$$1) (x+2)^2 - (2x-3)^2 + 3(x-1)^2 = 0$$

$$2) (x+6)(x-6) = (2+x)(2-x) + 2(x+3)^2$$

$$3) (x+1)^2 + (x-6)^2 = 2(x-3)(x+3)$$

$$4) (x-2)^2 + (x-3)^2 = 2(x+5)(x+1) - 40$$

$$5) (x+5)^2 = (x-2)(x-3)$$

CHAPITRE XXX

DIVISION D'UN POLYNÔME PAR LE BINÔME $x - a$

I. MÉTHODE GÉNÉRALE

1. Division exacte

$$\begin{array}{r} x - 2 \\ 3x^2 - 4x + 5 \\ \hline 3x^3 - 6x^2 \\ - 4x^2 + 8x \\ 5x - 10 \\ \hline 3x^3 - 10x^2 + 13x - 10 \end{array}$$

Puisque $(x - 2)(3x^2 - 4x + 5) = 3x^3 - 10x^2 + 13x - 10$
on a aussi $(3x^3 - 10x^2 + 13x - 10) : (x - 2) = 3x^2 - 4x + 5$.

Posons $3x^3 - 10x^2 + 13x - 10 = P(x)$

et $3x^2 - 4x + 5 = Q(x)$

Alors $P(x) : (x - 2) = Q(x)$.

Calculons $Q(x)$ connaissant $P(x)$ et $x - 2$.

Le mode opératoire se déduit de la multiplication $Q(x) \cdot (x - 2)$.

1. Le 1 ^{er} terme de $P(x)$ = le 1 ^{er} terme de $Q(x) \cdot x$ = $3x^2 \cdot x$ = $3x^3$

1. Le 1 ^{er} terme de $Q(x)$ = le 1 ^{er} terme de $P(x) : x$ = $3x^3 : x$ = $3x^2$

2. De $P(x)$, soustrayons le produit $3x^2(x - 2) = 3x^3 - 6x^2$.
 Nous trouvons le produit $P_1(x)$ de $x - 2$ par les autres termes $-4x + 5$ de $Q(x)$.

$$P_1(x) = (x - 2)(-4x + 5) = -4x^2 + 13x - 10.$$

$$\begin{aligned} \text{Le 1}^{\text{er}} \text{ terme de } P_1(x) \\ &= \text{le 2}^{\text{e}} \text{ terme de } Q(x) \cdot x \\ &= -4x \cdot x \\ &= -4x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ Le 2}^{\text{e}} \text{ terme de } Q(x) \\ &= \text{le 1}^{\text{er}} \text{ terme de } P_1(x) : x \\ &= -4x^2 : x \\ &= -4x \end{aligned}$$

3. De $P_1(x)$, soustrayons le produit $-4x(x - 2) = -4x^2 + 8x$.
 Nous trouvons le produit $P_2(x)$ de $x - 2$ par le dernier terme 5 de $Q(x)$.

$$P_2(x) = (x - 2) \cdot 5 = 5x - 10$$

$$\begin{aligned} \text{Le 1}^{\text{er}} \text{ terme de } P_2(x) \\ &= \text{le 3}^{\text{e}} \text{ terme de } Q(x) \cdot x \\ &= 5 \cdot x \\ &= 5x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \text{ Le 3}^{\text{e}} \text{ terme de } Q(x) \\ &= \text{le 1}^{\text{er}} \text{ terme de } P_2(x) : x \\ &= 5x : x \\ &= 5 \end{aligned}$$

4. De $P_2(x)$, soustrayons le produit $5(x - 2) = 5x - 10$.
 La différence = 0.

$$Q(x) = 3x^2 - 4x + 5$$

Disposition pratique :

$P(x) =$	$3x^3 - 10x^2 + 13x - 10$	$x - 2$
	$- 3x^3 + 6x^2$	
	$P_1(x) = - 4x^2 + 13x - 10$	
	$+ 4x^2 - 8x$	
	$P_2(x) = 5x - 10$	
	$- 5x + 10$	
	0	

$3x^2 - 4x + 5 = Q(x)$

Règle : Pour diviser un polynôme $P(x)$, ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x , par le binôme $x - a$:

1. On divise le premier terme de $P(x)$ par x ; on obtient ainsi le premier terme du quotient $Q(x)$.
2. On multiplie ce premier terme par $x - a$ et on retranche le produit du dividende $P(x)$; on obtient le premier reste partiel.
3. On opère sur le premier reste partiel et sur les suivants comme on a opéré sur le dividende. Le dernier reste est nul.

Exemples :

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 4x + 39 & x - 3 \\
 \underline{- x^4 + 3x^3} & \\
 x^3 - 6x^2 - 4x + 39 & \\
 \underline{- x^3 + 3x^2} & \\
 - 3x^2 - 4x + 39 & \\
 + 3x^2 - 9x & \\
 \hline
 - 13x + 39 & \\
 + 13x - 39 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 3x^3 - 5x^2 + 6x + 56 & x + 2 \\
 \underline{- 3x^3 - 6x^2} & \\
 - 11x^2 + 6x + 56 & \\
 + 11x^2 + 22x & \\
 \hline
 28x + 56 & \\
 \underline{- 28x - 56} & \\
 0 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 4x^3 & + \quad x - 260 \\
 - 4x^3 + 16x^2 & \\
 \hline
 & 16x^2 + \quad x - 260 \\
 & - 16x^2 + 64x \\
 \hline
 & 65x - 260 \\
 & - 65x + 260 \\
 \hline
 & 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 x - 4 \\
 \hline
 4x^2 + 16x + 65
 \end{array}$$

Remarque :

Dans la division exacte d'un polynôme $P(x)$ par $x - a$, on a :

$$P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$$

2. La division ne s'effectue pas exactement

$$\begin{array}{r|l}
 3x^3 - 5x^2 + 4x - 1 & \\
 - 3x^3 + 12x^2 & \\
 \hline
 & 7x^2 + 4x - 1 \\
 & - 7x^2 + 28x \\
 \hline
 & 32x - 1 \\
 & - 32x + 128 \\
 \hline
 & 127
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 x - 4 \\
 \hline
 3x^2 + 7x + 32
 \end{array}$$

On opère comme on a opéré dans la division exacte jusqu'à ce que l'on obtienne un reste ne comportant plus de terme en x .

Remarque :

En appelant r le reste de la division d'un polynôme $P(x)$ par $x - a$, on a :

$$P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + r$$

$Q(x)$ est appelé quotient partiel.

II. MÉTHODE DE HORNER

1. Reste de la division

En remplaçant x par a dans $P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + r$,
on obtient :

$$P(a) = (a - a) \cdot Q(a) + r$$

$$P(a) = 0 \cdot Q(a) + r$$

$$P(a) = r$$

Le reste de la division d'un polynôme $P(x)$ par le binôme $x - a$ est égal à la valeur numérique $P(a)$ du polynôme pour $x = a$.
 a est la valeur de x qui annule le diviseur.

Exemples :

$$1) (3x^3 - 10x^2 + 13x - 10) : (x - 2)$$

$$\begin{aligned} r &= 3 \cdot 2^3 - 10 \cdot 2^2 + 13 \cdot 2 - 10 \\ &= 3 \cdot 8 - 10 \cdot 4 + 13 \cdot 2 - 10 \\ &= 24 - 40 + 26 - 10 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$2) (3x^3 - 5x^2 + 4x - 1) : (x - 4)$$

$$\begin{aligned} r &= 3 \cdot 4^3 - 5 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 - 1 \\ &= 3 \cdot 64 - 5 \cdot 16 + 4 \cdot 4 - 1 \\ &= 192 - 80 + 16 - 1 \\ &= 127 \end{aligned}$$

$$3) (5x^4 - 16x^3 + 5x^2 - x + 4) : (x + 3)$$

$$\begin{aligned} r &= 5(-3)^4 - 16(-3)^3 + 5(-3)^2 - (-3) + 4 \\ &= 5 \cdot 81 - 16(-27) + 5 \cdot 9 - (-3) + 4 \\ &= 405 + 432 + 45 + 3 + 4 \\ &= 889 \end{aligned}$$

2. Caractère de divisibilité par $x - a$

Un polynôme est divisible par $x - a$, quand le reste de la division est nul.

Dès lors, un polynôme $P(x)$ est divisible par $x - a$, à condition que sa valeur numérique $P(a)$ soit nulle pour $x = a$.

Exemple :

$x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 4x + 39$ est divisible par $x - 3$, car :

$$\begin{aligned} P(3) &= r = 3^4 - 2 \cdot 3^3 - 6 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 + 39 \\ &= 81 - 2 \cdot 27 - 6 \cdot 9 - 4 \cdot 3 + 39 \\ &= 81 - 54 - 54 - 12 + 39 \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. Loi de formation du quotient

Le quotient $Q(x)$ de la division d'un polynôme $P(x)$, de degré m , par le binôme $x - a$ est un polynôme de degré $m - 1$. Il suffit d'en déterminer les coefficients.

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t \\ - px^3 + pax^3 \\ \hline (pa+q)x^3 + rx^2 + sx + t \\ - ux^3 + uax^2 \\ \hline (ua+r)x^2 + sx + t \\ - vx^2 + vax \\ \hline (va+s)x + t \\ - wx + wa \\ \hline wa + t \end{array} & \begin{array}{l} x - a \\ \hline px^3 + \underbrace{(pa+q)x^2}_u + \underbrace{(ua+r)x}_v + \underbrace{(va+s)}_w \end{array} \end{array}$$

Les coefficients du quotient $Q(x)$ de la division d'un polynôme complet ordonné $P(x)$, par le binôme $x - a$, sont :

1. Le 1^{er} coefficient de $P(x)$.
 2. Le 1^{er} coefficient de $Q(x) \cdot a$ + le 2^e coefficient de $P(x)$.
 3. Le 2^e coefficient de $Q(x) \cdot a$ + le 3^e coefficient de $P(x)$.
 4. Le 3^e coefficient de $Q(x) \cdot a$ + le 4^e coefficient de $P(x)$.
- etc...

Le reste de la division s'obtient en multipliant le dernier coefficient de $Q(x)$ par a et en ajoutant au produit le dernier coefficient de $P(x)$.

Disposition pratique :

$$\begin{array}{cccc|c}
 p & q & r & s & t & a \\
 & pa & ua & va & wa & \\
 \hline
 \underbrace{pa+q}_u & \underbrace{ua+r}_v & \underbrace{va+s}_w & (wa+t) & = \text{reste}
 \end{array}$$

Exemples :

$$\begin{array}{cccc|c}
 1) & (2x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 16x - 3) : (x - 3) \\
 & 2 & -5 & -8 & +16 & -3 & \\
 & & & & & & 3 \\
 & & 6 & 3 & -15 & 3 & \\
 \hline
 & 2 & 1 & -5 & 1 & (0) & = \text{reste}
 \end{array}$$

$$Q(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 1$$

$$\text{Reste} = 0$$

Appliquons, à titre de vérification, la loi du reste.

$$\begin{aligned}
 r &= 2 \cdot 3^4 - 5 \cdot 3^3 - 8 \cdot 3^2 + 16 \cdot 3 - 3 \\
 &= 2 \cdot 81 - 5 \cdot 27 - 8 \cdot 9 + 16 \cdot 3 - 3 \\
 &= 162 - 135 - 72 + 48 - 3 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc|c}
 2) & (4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 5x - 6) : (x - 2) \\
 & 4 & -3 & 2 & 5 & -6 & \\
 & & & & & & 2 \\
 & & 8 & 10 & 24 & 58 & \\
 \hline
 & 4 & 5 & 12 & 29 & (52) & = \text{reste}
 \end{array}$$

$$Q(x) = 4x^3 + 5x^2 + 12x + 29$$

$$\text{Reste} = 52$$

$$\begin{aligned}
 \text{Vérification : } r &= 4 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 - 6 \\
 &= 4 \cdot 16 - 3 \cdot 8 + 2 \cdot 4 + 5 \cdot 2 - 6 \\
 &= 64 - 24 + 8 + 10 - 6 \\
 &= 52
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 3) \quad (3x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 7) : (x + 4) \\
 \begin{array}{r}
 3 \quad \quad -2 \quad \quad 3 \quad \quad -2 \quad \quad 1 \quad \quad -7 \\
 \quad \quad -12 \quad \quad 56 \quad \quad -236 \quad \quad 952 \quad \quad -3\,812 \\
 \hline
 3 \quad \quad -14 \quad \quad 59 \quad \quad -238 \quad \quad 953 \quad \quad (-3\,819) = \text{reste}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$Q(x) = 3x^4 - 14x^3 + 59x^2 - 238x + 953$$

$$\text{Reste} = -3\,819$$

Vérification :

$$\begin{aligned}
 r &= 3(-4)^5 - 2(-4)^4 + 3(-4)^3 - 2(-4)^2 + (-4) - 7 \\
 &= 3(-1\,024) - 2 \cdot 256 + 3(-64) - 2 \cdot 16 - 4 - 7 \\
 &= -3\,072 - 512 - 192 - 32 - 4 - 7 \\
 &= -3\,819
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 4) \quad (3x^4 - 2x + 1) : (x + 1) \\
 \begin{array}{r}
 3 \quad \quad 0 \quad \quad 0 \quad \quad -2 \quad \quad 1 \\
 \quad \quad -3 \quad \quad 3 \quad \quad -3 \quad \quad 5 \\
 \hline
 3 \quad \quad -3 \quad \quad 3 \quad \quad -5 \quad \quad (6) = \text{reste}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$Q(x) = 3x^3 - 3x^2 + 3x - 5$$

$$\text{Reste} = 6$$

$$\begin{aligned}
 \text{Vérification : } r &= 3(-1)^4 - 2(-1) + 1 \\
 &= 3 \cdot 1 - 2(-1) + 1 \\
 &= 3 + 2 + 1 \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 5) \quad (3x^3 - 4x^2 + 6x) : (x - 2) \\
 \begin{array}{r}
 3 \quad \quad -4 \quad \quad 6 \quad \quad 0 \\
 \quad \quad 6 \quad \quad 4 \quad \quad 20 \\
 \hline
 3 \quad \quad 2 \quad \quad 10 \quad \quad (20) = \text{reste}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$Q(x) = 3x^2 + 2x + 10$$

$$\text{Reste} = 20$$

$$\begin{aligned}
 \text{Vérification : } r &= 3 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 \\
 &= 3 \cdot 8 - 4 \cdot 4 + 6 \cdot 2 \\
 &= 24 - 16 + 12 \\
 &= 20
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
 6) & 3x^4 & + 5x^3 & - 2x^2 & + 8x & - 6 & & \\
 & 3 & & 5 & & - 2 & & 8 & & - 6 & & \\
 & & & - 6 & & 2 & & 0 & & - 16 & & - 2 \\
 \hline
 & 3 & & - 1 & & 0 & & 8 & & (-22) & = & \text{reste}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 Q(x) &= 3x^3 - 1x^2 + 0x + 8 \\
 &= 3x^3 - x^2 + 8
 \end{aligned}$$

$$\text{Reste} = -22$$

$$\begin{aligned}
 \text{Vérification : } r &= 3(-2)^4 + 5(-2)^3 - 2(-2)^2 + 8(-2) - 6 \\
 &= 3 \cdot 16 + 5(-8) - 2 \cdot 4 + 8(-2) - 6 \\
 &= 48 - 40 - 8 - 16 - 6 \\
 &= -22
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
 7) & (6x^3 - 16x^2 - x + 13) : \left(x - \frac{2}{3}\right) \\
 & 6 & & - 16 & & - 1 & & 13 & & \\
 & & & 4 & & - 8 & & - 6 & & \frac{2}{3} \\
 \hline
 & 6 & & - 12 & & - 9 & & (7) & = & \text{reste}
 \end{array}$$

$$Q(x) = 6x^2 - 12x - 9$$

$$\text{Reste} = 7$$

$$\begin{aligned}
 \text{Vérification : } r &= 6 \binom{2}{3}^3 - 16 \binom{2}{3}^2 - 3 + 13 \\
 &= 6 \cdot \frac{8}{27} - 16 \cdot \frac{4}{9} - \frac{2}{3} + 13 \\
 &= \frac{16}{9} - \frac{64}{9} - \frac{6}{9} + \frac{117}{9} \\
 &= \frac{63}{9} \\
 &= 7
 \end{aligned}$$

Exercices

1. Effectuez les divisions exactes suivantes :

- a) par la méthode générale,
- b) par la méthode de Horner.

- 1) $(x^3 - 4x^2 - 11x + 30) : (x + 3)$
- 2) $(2x^3 - 7x^2 - 75) : (x - 5)$
- 3) $(-3x^4 + 7x^3 - 2x - 4) : (x - 2)$
- 4) $(4x - 5x^2 + 2x^3 - 21) : (x - 3)$
- 5) $(x^4 - 16 - 15x^2) : (x + 4)$
- 6) $(3x^5 - 3 - 4x^4 - 3x + 7x^2) : (x + 1)$
- 7) $(4x^3 + 8x^2 - 7x + 1) : \left(x - \frac{1}{2}\right)$

2. Effectuez les divisions suivantes :

- a) par la méthode générale,
- b) par la méthode de Horner.

- 1) $(x^3 - 2x^2 - 3x - 2) : (x - 1)$
- 2) $(8x - 20 + 5x^4 + 3x^3) : (x + 3)$
- 3) $(2x^6 - 3x^4 + 9x - 6) : (x + 2)$
- 4) $(6x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 7 - 3x) : (x - 2)$
- 5) $(x^5 - 6x^2 + 4) : (x + 2)$
- 6) $(8x^4 - 7 + 8x - 7x^3) : (x - 4)$
- 7) $(6x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 2x - 8) : \left(x + \frac{1}{3}\right)$

3. Calculez directement le reste des divisions suivantes :

- 1) $(x^4 - x^3 + x + 6 - 7x^2) : (x - 3)$
- 2) $(5x^3 - 7x^2 - 8 + 3x) : (x + 5)$
- 3) $(6x^7 - 3x^5 + 7x^3 + 2x - 6) : (x + 1)$
- 4) $(5x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 3x + 6) : (x - 1)$
- 5) $(-x^3 + 17x + 4) : (x + 4)$
- 6) $(2x^5 - 3x^4 - 6 + 7x) : (x - 2)$

4. Calculez le reste :

$$1) (3x^3 - 8x^2 + 5x - 7) : (x - 1)$$

$$2) (6x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 7x - 3) : (x - 1)$$

$$3) (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) : (x - 1)$$

Le reste de la division d'un polynôme $P(x)$ par $x - 1$ égale...

Quand un polynôme $P(x)$ est-il divisible par $x - 1$?

5. Déterminez directement le reste :

$$1) (7x^3 - 5x^2 - 9x + 3) : (x + 1)$$

$$2) (2x^6 + 8x^5 - 3x^3 + 5x^2 - 6) : (x + 1)$$

$$3) (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) : (x + 1)$$

Le reste de la division d'un polynôme $P(x)$ par $x + 1$ égale...

Quand un polynôme $P(x)$ est-il divisible par $x + 1$?

6. Pour quelle valeur de a , les divisions suivantes s'effectuent-elles exactement ?

$$1) (4x^2 - 3x + a) : (x + 5)$$

$$2) (x^3 - 8x^2 + ax - 12) : (x - 1)$$

$$3) (x^5 + ax^2 - 4) : (x + 2)$$

$$4) (x^4 + ax^3 + 3x^2 + ax + 2) : (x - 2)$$

$$5) (2ax^3 - 7x^2 + 5ax - 6) : (x + 3)$$

Remplacez a par la valeur trouvée et effectuez les divisions.

7. Trouvez la valeur de a pour que le reste de la division :

$$1) (-3x^2 + ax - 13) : (x + 4) \quad \text{soit } r = -33$$

$$2) (x^4 + ax^3 + 6x^2 + 4x - 2) : (x - 2) \quad r = 6$$

$$3) (2x^5 + ax^2 - 7x + 4) : (x + 2) \quad r = -58$$

$$4) (2x^4 + 3ax^3 + 12x^2 + ax + 2) : (x + 1) \quad r = 28$$

$$5) [x^4 + (a + 1)x^3 + ax^2 + 7x + (a - 1)] : (x - 3) \quad r = 2$$

Remplacez a par la valeur trouvée et effectuez les divisions.

8. Déterminez la valeur de a pour que les divisions suivantes admettent le même reste :

$$(2x^3 + ax^2 + 3x + a) : (x - 3)$$

$$(ax^4 + 39x^3 + ax + 52) : (x + 3)$$

9. Déterminez la valeur de a pour que les divisions suivantes admettent des restes opposés :

$$(6x^3 + ax^2 - 7x + 3) : (x + 2)$$

$$(2x^4 - 3x^3 + ax^2 - 4x - 9) : (x - 2)$$

CHAPITRE XXXI

DÉCOMPOSITION EN FACTEURS

1. Notion

La simplification des fractions et la résolution des équations demandent qu'on sache transformer un polynôme en un produit de facteurs.

Cette opération est appelée décomposition en facteurs ou factorisation.

2. Mise en évidence des facteurs communs

Lorsque tous les termes d'un polynôme renferment des facteurs communs, on commence toujours par les mettre en évidence.

Exemples :

$$1) 4x^2y + 8xy^2 = 4xy(x + 2y)$$

$$2) 7a^3b^2c - 5ab^3c^2 + 6a^2bc^3 = abc(7a^2b - 5b^2c + 6ac^2)$$

$$3) a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$$

$$4) (x - y)a - (y - x)b = (x - y)a + (x - y)b = (x - y)(a + b)$$

$$5) a(p + q) - p - q = a(p + q) - (p + q) = (p + q)(a - 1)$$

3. Décomposition d'un binôme, différence de deux carrés

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Exemples :

$$1) x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ x & y \end{array}$$

$$2) 16a^2 - 9b^2 = (4a + 3b)(4a - 3b)$$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ 4a & 3b \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 3) \quad x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x + 1)(x - 1) \\
 \qquad \qquad \downarrow \quad \downarrow \\
 \qquad \qquad x \quad 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 4) \quad (3a - 2)^2 - 4b^2 = [(3a - 2) + 2b][(3a - 2) - 2b] \\
 \qquad \downarrow \qquad \downarrow = (3a - 2 + 2b)(3a - 2 - 2b) \\
 \qquad 3a - 2 \quad 2b = (3a + 2b - 2)(3a - 2b - 2)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 5) \quad (2a + b)^2 - (a - 3b)^2 = [(2a + b) + (a - 3b)][(2a + b) - (a - 3b)] \\
 \qquad \downarrow \qquad \downarrow = (2a + b + a - 3b)(2a + b - a + 3b) \\
 \qquad 2a + b \quad a - 3b = (3a - 2b)(a + 4b)
 \end{array}$$

4. Décomposition d'un trinôme, carré parfait d'un binôme

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

Exemples :

$$\begin{array}{c}
 1) \quad 4x^2 + 4xy + y^2 = (2x + y)^2 \\
 \qquad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 \qquad 2x \quad 2 \cdot 2x \cdot y \quad y \\
 \qquad \qquad = 4xy
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 2) \quad a^2 + a + \frac{1}{4} = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 \\
 \qquad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 \qquad a \quad \frac{1}{2} \\
 \qquad \qquad 2 \cdot a \cdot \frac{1}{2} \\
 \qquad \qquad = a
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 3) \quad 36x^2y - 36xy^2 + 9y^3 = 9y(4x^2 - 4xy + y^2) = 9y(2x - y)^2 \\
 \qquad \qquad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 \qquad \qquad 2x \quad 2 \cdot 2x \cdot y \quad y \\
 \qquad \qquad \qquad = 4xy
 \end{array}$$

5. Décomposition du trinôme $x^2 + (a + b)x + ab$

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

Exemples :

$$1) \quad x^2 + \underbrace{6x}_{2+4} + \underbrace{8}_{2 \cdot 4} = (x + 2)(x + 4)$$

$$2) \quad x^2 + \underbrace{-3x}_{(-2)+(-1)} + \underbrace{2}_{(-2)(-1)} = (x - 2)(x - 1)$$

$$3) \quad x^2 + \underbrace{7x}_{8+(-1)} - \underbrace{8}_{8 \cdot (-1)} = (x + 8)(x - 1)$$

$$4) \quad 8x^2y - 24xy - 32y = 8y \underbrace{(x^2 - 3x - 4)}_{-4+1} = 8y \underbrace{(x-4)(x+1)}_{(-4) \cdot 1}$$

6. Décomposition d'un quadrinôme, cube parfait d'un binôme

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

Exemples :

$$1) \quad \begin{array}{cccc} 8a^3 & + & 12a^2b & + & 6ab^2 & + & b^3 & = & (2a + b)^3 \\ \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 2a & & & & 3 \cdot 2a \cdot b^2 & & b & & \\ & & & & = 6ab^2 & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & 3 \cdot (2a)^2 \cdot b & & & & \\ & & & & = 12a^2b & & & & \end{array}$$

$$2) \quad \begin{array}{cccc} -64x^3 & + & 144x^2y & - & 108xy^2 & + & 27y^3 & = & (-4x + 3y)^3 \\ \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ -4x & & & & 3(-4x) \cdot (3y)^2 & & 3y & & \\ & & & & = -108xy^2 & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & 3(-4x)^2 \cdot 3y & & & & \\ & & & & = 144x^2y & & & & \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad & 125x^3y - 75x^2 + 15\frac{x}{y} - \frac{1}{y^2} \\
 &= y \left(125x^3 - 75\frac{x^2}{y} + 15\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y^3} \right) = y \left(5x - \frac{1}{y} \right)^3 \\
 &\quad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
 &\quad 5x \qquad \qquad \qquad 3 \cdot 5x \left(-\frac{1}{y} \right)^2 \qquad \qquad \qquad -\frac{1}{y} \\
 &\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
 &\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad = 15\frac{x}{y^2} \\
 &\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
 &\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 3 \cdot (5x)^2 \cdot \left(-\frac{1}{y} \right) \\
 &\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
 &\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad = -75\frac{x^2}{y}
 \end{aligned}$$

7. Décomposition d'un polynôme, carré parfait d'un polynôme

$$a^2 + b^2 + c^2 + \dots + 2ab + 2ac + 2bc + \dots = (a+b+c+\dots)^2$$

Exemples :

1) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = (x+y+z)^2$

$$\begin{array}{ccc}
 \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 x & y & z
 \end{array}$$

2) $4x^2 + 12xy - 4xz + 9y^2 - 6yz + z^2 = (2x+3y-z)^2$

$$\begin{array}{ccc}
 \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 2x & 3y & z
 \end{array}$$

3) $18a^3 + 2ac^2 + 48a^2d - 16acd + 32abd - 8abc - 12a^2c + 24a^2b + 8ab^2 + 32ad^2$

$$\begin{aligned}
 &= 2a(9a^2 + c^2 + 24ad - 8cd + 16bd - 4bc \\
 &\qquad \qquad \qquad - 6ac + 12ab + 4b^2 + 16d^2) \\
 &\quad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \downarrow \\
 &\quad 3a \qquad \qquad c \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 2b \qquad 4d
 \end{aligned}$$

$$= 2a(3a + 2b - c + 4d)^2$$

Attention aux signes des doubles produits !

8. Décomposition par groupements, par décomposition de certains termes ou par addition et soustraction d'une même quantité

A. Par groupements

Exemples :

- 1) $3ab - 6ac + 4b^2 - 8bc$
 $= (3ab - 6ac) + (4b^2 - 8bc)$
 $= 3a(b - 2c) + 4b(b - 2c)$
 $= (b - 2c)(3a + 4b)$
- 2) $24xy - 16x + 6y - 4$
 $= (24xy - 16x) + (6y - 4)$
 $= 8x(3y - 2) + 2(3y - 2)$
 $= (3y - 2)(8x + 2)$
- 3) $x^2 + 2xy + y^2 - z^2$
 $= (x^2 + 2xy + y^2) - z^2$
 $= (x + y)^2 - z^2$
 $= (x + y + z)(x + y - z)$
- 4) $-a^4b - 2a^2b^3 - b^5 + bc^4$
 $= b(-a^4 - 2a^2b^2 - b^4 + c^4)$
 $= b[c^4 - (a^4 + 2a^2b^2 + b^4)]$
 $= b[c^4 - (a^2 + b^2)^2]$
 $= b(c^2 + a^2 + b^2)(c^2 - a^2 - b^2)$

B. Par décomposition d'un terme

Exemples :

- 1) $x^4 + x^2y^4 + y^8 = x^4 + 2x^2y^4 + y^8 - x^2y^4$
 $= (x^4 + 2x^2y^4 + y^8) - x^2y^4$
 $= (x^2 + y^4)^2 - x^2y^4$
 $= (x^2 + y^4 + xy^2)(x^2 + y^4 - xy^2)$
- 2) $3a^2 + 8a + 4 = 3a^2 + 6a + 2a + 4$
 $= (3a^2 + 6a) + (2a + 4)$
 $= 3a(a + 2) + 2(a + 2)$
 $= (a + 2)(3a + 2)$

C. Par addition et soustraction d'un terme

Exemples :

$$\begin{aligned}
 1) \quad x^4y^4 + 4 &= x^4y^4 + 4x^2y^2 + 4 - 4x^2y^2 \\
 &= (x^4y^4 + 4x^2y^2 + 4) - 4x^2y^2 \\
 &= (x^2y^2 + 2)^2 - 4x^2y^2 \\
 &= (x^2y^2 + 2 + 2xy)(x^2y^2 + 2 - 2xy) \\
 &= (x^2y^2 + 2xy + 2)(x^2y^2 - 2xy + 2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad 4a^4 + 1 &= 4a^4 + 4a^2 + 1 - 4a^2 \\
 &= (4a^4 + 4a^2 + 1) - 4a^2 \\
 &= (2a^2 + 1)^2 - 4a^2 \\
 &= (2a^2 + 1 + 2a)(2a^2 + 1 - 2a) \\
 &= (2a^2 + 2a + 1)(2a^2 - 2a + 1)
 \end{aligned}$$

9. Décomposition par division par $x - a$

$$P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$$

Exemples :

1) $P(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$

Le dernier coefficient 18 est divisible par 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6, 9, -9, 18, -18

$P(x)$ pourrait être divisible par :

$x - 1, x + 1, x - 2, x + 2, x - 3, x + 3, x - 6, x + 6, x - 9, x + 9, x - 18, x + 18.$

Vérifions le reste :

division par $x - 1$:

$$r = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + 18 = 1 - 2 - 9 + 18 = 8$$

$P(x)$ n'est pas divisible par $x - 1$

division par $x + 1$:

$$r = (-1)^3 - 2(-1)^2 - 9(-1) + 18 = -1 - 2 + 9 + 18 = 24$$

$P(x)$ n'est pas divisible par $x + 1.$

division par $x - 2$:

$$r = 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 + 18 = 8 - 8 - 18 + 18 = 0$$

$$P(x) \text{ est divisible par } x - 2 \rightarrow P(x) = (x - 2) \cdot Q(x)$$

Déterminons $Q(x)$:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & & -2 & -9 & 18 & \\ & & 2 & 0 & -18 & 2 \\ \hline 1 & & 0 & -9 & (0) & = \text{reste} \end{array}$$

$$\begin{aligned} Q(x) &= 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 9 \\ &= x^2 - 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } x^3 - 2x^2 - 9x + 18 &= (x - 2)(x^2 - 9) \\ &= (x - 2)(x + 3)(x - 3) \end{aligned}$$

$$2) P(x) = x^3 + 6x^2 + 5x - 12$$

Les diviseurs possibles sont $x - 1, x + 1, x - 2, x + 2, x - 3, x + 3, x - 4, x + 4, x - 6, x + 6, x + 12, x - 12$

Vérifions le reste :

division par $x - 1$:

$$r = 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 12 = 1 + 6 + 5 - 12 = 0$$

$$P(x) \text{ est divisible par } x - 1 \rightarrow P(x) = (x - 1) \cdot Q(x)$$

Déterminons $Q(x)$:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & & 6 & 5 & -12 & \\ & & 1 & 7 & 12 & 1 \\ \hline 1 & & 7 & 12 & (0) & = \text{reste} \end{array}$$

$$Q(x) = x^2 + 7x + 12$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } x^3 + 6x^2 + 5x - 12 &= (x - 1)(x^2 + \underbrace{7x + 12}_{\substack{4+3 \quad 4 \cdot 3}}) \\ &= (x - 1)(x + 4)(x + 3) \end{aligned}$$

Exercices

1. Mise en évidence des facteurs communs :

1) $3xy + 6xz$

2) $5x^2y - 10xy^2 - 20xy$

- 3) $3x^4 - 7x^3 + 9x^2$
- 4) $5x^3y + 125xy^3$
- 5) $3mx^2 + 9my^2 - 12mz^2$
- 6) $36a^4b^5 - 60a^3b^2$
- 7) $a(x + y) + b(x + y)$
- 8) $5(2a - 3b) - 2x(2a - 3b)$
- 9) $(a + b)x + (a + b)y - (a + b)z$
- 10) $(3x-1)(x+2) + (3x-1)(2y-4)$
- 11) $(a + b)^2(a - b) - (a + b)(a - b)^2$
- 12) $(3x - 2y)^2 + (3x - 2y)(5x + 4y)$
- 13) $5x(x + 1) + 2y(x + 1) + x + 1$
- 14) $(4a - 3b)(3a + 2b) - 3(3a + 2b)^2$
- 15) $a(x - y) + b(y - x)$
- 16) $3x^2y(a - 1) - 24xy^2(1 - a)$
- 17) $(x - 3)(x + 2) - (x - 3)(x + 5)$
- 18) $(a - b)(a + b) - (a - b)^2$

2. Décomposez en facteurs les différences de deux carrés :

- | | |
|--|---------------------------------------|
| 1) $9x^2 - 16$ | 13) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{5}{2}y^2$ |
| 2) $4x^2 - y^2$ | 14) $16a^4 - b^4$ |
| 3) $4 - \frac{b^2}{16}$ | 15) $x^4 - y^4$ |
| 4) $\frac{9}{4}x^2y^2 - \frac{16}{25}x^2z^2$ | 16) $a^4 - 1$ |
| 5) $4x^2y^2 - 9z^4$ | 17) $x^4 - 81$ |
| 6) $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2$ | 18) $96x^4 - 6a^4$ |
| 7) $9a^2 - 64b^2c^2$ | 19) $25x^2 - (y - 3)^2$ |
| 8) $72x^4y - 50y^3x^2$ | 20) $(x - 1)^2 - 9x^2$ |
| 9) $x^4 - y^2z^6$ | 21) $4(x + 1)^2 - 16y^2$ |
| 10) $x^4y^2 - x^2y^6$ | 22) $(5x + 1)^2 - (2x - 3)^2$ |
| 11) $3a^2 - 75$ | 23) $(3x - 2y)^2 - (x + 5y)^2$ |
| 12) $15x^2 - 60y^2$ | 24) $9(2x + 1)^2 - 25(4 - x)^2$ |
| | 25) $36x^2 - (x + 2)^2$ |

3. Décomposez en facteurs les trinômes carrés parfaits :

- | | |
|---|--|
| 1) $9a^2 + 6ab + b^2$ | 10) $\frac{9}{25}a^2 + \frac{4}{5}ab + \frac{4}{9}b^2$ |
| 2) $x^2 - 4xy + 4y^2$ | 11) $-4x^2 - 12xy - 9y^2$ |
| 3) $81x^2 - 90xy + 25y^2$ | 12) $\frac{x^2}{9} - \frac{4}{3}x + 4$ |
| 4) $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$ | 13) $-20 - 20a - 5a^2$ |
| 5) $9a^2b^2 - 24abxy + 16x^2y^2$ | 14) $12a^4b - 60a^3b^2 + 75a^2b^3$ |
| 6) $25x^2 + 160xy^2 + 256y^4$ | 15) $36x^2 + 9 + 36x$ |
| 7) $x^6 - 4x^3y^2 + 4y^4$ | 16) $x^4 - 26x^2 + 169$ |
| 8) $25a^2 - 70ab + 49b^2$ | 17) $x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$ |
| 9) $\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{6}xy + \frac{1}{9}y^2$ | 18) $6x^4 - 12x^2 + 6$ |

4. Décomposez en facteurs les trinômes suivants :

- | | |
|----------------------|-------------------------------|
| 1) $a^2 + 5a + 4$ | 8) $2x^2y - 22xy + 36y$ |
| 2) $a^2 - 6a + 8$ | 9) $(a + 1)^2 - 2(a + 1) - 3$ |
| 3) $x^2 + x - 12$ | 10) $x^2 + 2xy - 15y^2$ |
| 4) $y^2 - 3y - 10$ | 11) $x^4 - 5x^2 + 4$ |
| 5) $m^2 + 8m + 15$ | 12) $x^2y^2 - 2xy - 24$ |
| 6) $x^2 - 5x - 6$ | 13) $-x^2 + 7x - 12$ |
| 7) $3x^2 - 15x - 42$ | 14) $-3x^2 - 15x + 150$ |

5. Décomposez en facteurs les quadrinômes cubes parfaits :

- 1) $a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$
- 2) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$
- 3) $8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$
- 4) $-\frac{1}{27} - \frac{1}{6}a - \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{8}a^3$
- 5) $125x^3 + 150x^2y + 60xy^2 + 8y^3$
- 6) $4x^4y + 12x^3y + 12x^2y + 4xy$
- 7) $125x^3 - 75\frac{x^2}{y} + 15\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y^3}$

$$8) \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{2}x^2y + \frac{2}{3}xy^2 + \frac{8}{27}y^3$$

6. Décomposez en facteurs les polynômes carrés parfaits :

$$1) 4a^2 + 9b^2 + c^2 + 12ab + 4ac + 6bc$$

$$2) 9a^2 - 12ab + 6ac + 4b^2 - 4bc + c^2$$

$$3) a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab - 2ac + 2ad + 2bc - 2bd - 2cd$$

$$4) 9x^2y^2 - 24xyz + 4y^2z^2 + 16z^2 + 16yz^2 - 12xy^2z$$

$$5) 16p^2 + 48pz + 36z^2 + x^2 - 72qz + 36q^2 - 48pq - 8px \\ - 12zx + 12qx$$

$$6) a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$$

$$7) \frac{x^2}{4} - \frac{xy}{3} + \frac{xz}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{yz}{6} + \frac{z^2}{16}$$

7. Décomposez en facteurs par groupements de termes :

$$1) a^2 + 2ab + a + 2b$$

$$2) a^2 - b^2 + ac + bc$$

$$3) x^2y^2 - x^2 - z^2y^2 + z^2$$

$$4) x^3 - 3x^2 + x - 3$$

$$5) 5ab - 10ac + 3db - 6dc$$

$$6) a^3 - a^2 - ab^2 + b^2$$

$$7) ab - ca + db - dc$$

$$8) 24ab - 16a + 6b - 4$$

$$9) ax^2 - ay^2 - 5x^2 + 5y^2$$

$$10) 4x^3 + 8x^2 - 25x - 50$$

$$11) 2a - 3b + 5c - 4a + 6b - 10c$$

$$12) a^3 + a^2 + a + 1$$

$$13) a^3 + a^2 - a - 1$$

$$14) a^2 + ab + 3b - 9$$

$$15) 2a^2 + 5ab - 3ac - 3bc + 5b^2 + 2ab$$

$$16) 5ma - 3nb + 3na - 5mb$$

$$17) ax + 3a + 7x + 21$$

$$18) x^3 - 5x^2 - 2x + 10$$

$$19) a^2 - b^2 + 6a - 6b$$

$$20) 5x^2 - 45 + 3xy - 9y$$

- 21) $12xy - 8x + 3y - 2$
- 22) $a^2 - 3ab + 3bc - ac$
- 23) $4a^2 + 4ab + b^2 - c^2$
- 24) $x^2 - y^2 + 2y - 1$
- 25) $4a^2 + 4b^2 - 100 - 8ab$
- 26) $x^2 - y^2 - 2yz - z^2$
- 27) $16a^2 - 9b^2 - 4c^2 + 12bc$
- 28) $x^2 - z^2 - 2xy + y^2$
- 29) $9x^2 - 6xy + y^2 - 4z^2$
- 30) $a^2 + 2ab + b^2 - x^2 + 2xy - y^2$
- 31) $4x^2 + 4x + 1 - y^2 + 4y - 4$

8. Décomposez en facteurs soit en décomposant soit en ajoutant et en retranchant un terme :

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| 1) $2x^2 + 5x + 2$ | 12) $5a^2b^2 + 12ab + 7$ |
| 2) $4x^2 + x - 5$ | 13) $x^3 + 5x^2 - 6$ |
| 3) $3x^2 + 17x + 10$ | 14) $3x^3 - 4x^2 + 1$ |
| 4) $3x^2 + 2x - 8$ | 15) $x^3 + 4x - 5$ |
| 5) $5x^2 + x - 6$ | 16) $a^4 + 4$ |
| 6) $6x^2 + 11x + 5$ | 17) $x^4 + 64$ |
| 7) $6x^2 - 11xy - 10y^2$ | 18) $a^4 + a^2b^2 + b^4$ |
| 8) $4x^2 - 15x + 14$ | 19) $x^4 + 3x^2 + 4$ |
| 9) $6x^2 + x - 15$ | 20) $4a^2 + 16a + 15$ |
| 10) $2x^2 - x - 1$ | 21) $x^4 - 6x^2 + 1$ |
| 11) $4x^2 - 16x + 15$ | 22) $x^2 + 4xy + 3y^2$ |

9. Décomposez en facteurs par division par $x - a$:

- 1) $x^3 - 8$
- 2) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
- 3) $2x^3 - 5x^2 - 23x - 10$
- 4) $x^3 + 4x + 5$
- 5) $x^3 - 19x + 30$
- 6) $4x^4 - 4x^3 - 25x^2 + x + 6$
- 7) $x^4 - 13x^2 + 36$

$$8) 5a^4 - 6a^3 - 19a^2 + 24a - 4$$

$$9) x^5 - 4x^4 + 4x^3 - x^2 + 4x - 4$$

10. Décomposez en facteurs :

$$1) a^2(a - 3) + 4(a + 1)(a - 3)$$

$$2) x^2 - 9 + 5(x + 3)$$

$$3) a^2(x^2 - 9y^2) - 4b^2(x^2 - 9y^2)$$

$$4) (a - 1)x^2 - 5x(a - 1) + 6(a - 1)$$

$$5) a^2(x - 1) + 4(1 - x)$$

$$6) (a + b)^2 + 6(a + b) + 9$$

$$7) x^2(m + n) - 9(m + n)$$

$$8) 6x^4 - 12x^2 + 6$$

$$9) 5a^2 + ma^2 - 5b^2 - mb^2$$

$$10) x^4 - (2x - 1)^2$$

$$11) x^4 - 2x^2 + 1$$

CHAPITRE XXXII

PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR

PLUS PETIT COMMUN MULTIPLE

1. Plus grand commun diviseur (p.g.c.d.)

- A. Le plus grand commun diviseur de plusieurs monômes est le produit de tous les facteurs communs, chacun étant affecté de son plus petit exposant.

Exemple :

$$\text{p.g.c.d. } (6x^3y^2z, -18x^4y^3z^2, -60x^2y^2) = 6x^2y^2$$

- B. Pour trouver le plus grand commun diviseur de plusieurs polynômes, on les décompose en facteurs et on effectue le produit des facteurs communs, chacun étant affecté de son plus petit exposant.

Exemple :

$$\begin{aligned} & \text{p.g.c.d. } \begin{bmatrix} x^2 - 3x + 2 \\ x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 28x + 12 \\ x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4 \end{bmatrix} \\ &= \text{p.g.c.d. } \begin{bmatrix} (x+1)(x+2) \\ (x+1)(x+2)^2(x-4) \\ (x+1)(x+2)(x^2+2) \end{bmatrix} \\ &= (x+1)(x+2) \end{aligned}$$

2. Plus petit commun multiple (p.p.c.m.)

- A. Le plus petit commun multiple de plusieurs monômes est égal au produit de tous les facteurs des monômes, chacun étant affecté de son plus grand exposant.

Exemple :

$$\text{p.p.c.m. } (6x^3y^2z, -18x^4y^3z^2, -60x^2y^2) = 180x^4y^3z^2$$

B. Pour trouver le plus petit commun multiple de plusieurs polynômes, on les décompose en facteurs et on effectue le produit de tous les facteurs, chacun étant affecté de son plus grand exposant.

Exemple :

$$\begin{aligned} \text{p.p.c.m.} & \left[\begin{array}{l} x^2 + 3x + 2 \\ x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 28x + 12 \\ x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4 \end{array} \right] \\ &= \text{p.p.c.m.} \left[\begin{array}{l} (x+1)(x+2) \\ (x+1)(x+2)^2(x-4) \\ (x+1)(x+2)(x^2+2) \end{array} \right] \\ &= (x+1)(x+2)^2(x-4)(x^2+2) \end{aligned}$$

Exercices

1. Calculez le p.g.c.d. et le p.p.c.m. de :

- 1) $a^5b^6c^3$, $a^4b^5c^6$ et $6a^6b^3c^4$
- 2) x^5y^4z , $x^3y^7u^2$ et x^4y^5u
- 3) $3a^6bc^4$, $7a^3b^2$ et $5a^5b^3c^2$
- 4) $25x^3y$, $75y^3z^2$ et $100xz^2$
- 5) $3x^4y^3z^2$, $5x^5y^2$, $9xy^2z$ et $15x^2y^3$
- 6) $12a^2b^4$, $18a^3b^3c^4$, $24a^4b^7c$ et $36a^5b^5c^2$
- 7) $(x-4)^2(x+3)^3(x-2)$, $(x-4)^4(x-3)(x-2)^3$ et $(x-4)^3(x+3)(x-2)^2$
- 8) $(a-b)^2(a+b)^3$, $(a+b)^2(b-a)^3$ et $(a+b)^4(b-a)^2$

2. Calculez le p.g.c.d. et le p.p.c.m. de :

- 1) $a^2 - 1$, $a^2 + 2a + 1$ et $a^2 + a$
- 2) $a^3b^2 - a^3c^2$, $b^3 - bc^2$ et $a^2b^3 - a^2bc^2$
- 3) $x^2 - 4x + 4$, $x^2 - 4$ et $x^2 + x - 6$
- 4) $x^2 - 3x - 28$, $x^2 - x - 20$ et $x^2 - 12x + 35$
- 5) $8a^2 - 8$, $4a^3 - 4$ et $6a^2 + 6a - 12$
- 6) $3x^2 - 24x + 48$, $4x^2 - 28x + 48$ et $6x^2 - 18x - 24$
- 7) $9x^2 - 12x + 4$, $15x^2 - 4x - 4$ et $6x^2 + 5x - 6$
- 8) $x^2 - 9y^2$, $x^2 - 5xy + 6y^2$ et $3x^2 - 10xy + 3y^2$
- 9) $x^4 - 8x^2 + 16$, $x^3 - x^2 - 8x + 12$ et $x^2 - 6x^2 + 12x - 8$
- 10) $x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$, $x^3 + 2x^2 - x - 2$ et $x^3 + 3x^2 - 4$

CHAPITRE XXXIII

FORMES FRACTIONNAIRES

1. Notion

Des fractions dont le numérateur et le dénominateur sont des monômes ou des polynômes, sont appelées formes fractionnaires. Toutes les propriétés des fractions réelles et les modes opératoires restent valables pour les formes fractionnaires.

2. Simplification

Règle : 1. Décomposer les deux termes en facteurs.
2. Simplifier.

Exemples :

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{48x^5y^4z^2}{32x^3y^5z} = \frac{3x^2z}{2y} \\ 2) \quad & \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 9} = \frac{(x-3)(x+4)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x+4}{x+3} \\ 3) \quad & \frac{3a-3b}{6b^2-6a^2} = \frac{3(a-b)}{6(b^2-a^2)} = \frac{3(a-b)}{-6(a^2-b^2)} \\ & = \frac{3(a-b)}{-6(a+b)(a-b)} = -\frac{1}{2(a+b)} \\ 4) \quad & \frac{x^3-4x^2-17x+60}{x^2-8x+15} = \frac{(x-3)(x^2-x-20)}{(x-3)(x-5)} \\ & = \frac{(x-3)(x+4)(x-5)}{(x-3)(x-5)} = x+4 \end{aligned}$$

3. Réduction au même dénominateur

Règle : 1. Si possible, simplifier.
2. Décomposer les dénominateurs en facteurs.
3. Chercher leur p.p.c.m. : c'est le dénominateur commun.
4. Adapter les numérateurs.

Exemples :

1. Réduisez au même dénominateur :

$$\frac{4b}{4a^2b} \quad , \quad \frac{7ab}{a^6b^5} \quad \text{et} \quad \frac{6bc}{3a^4c}$$

$$\frac{4b}{4a^2b} = \frac{1}{a^2}$$

$$\frac{7ab}{a^6b^5} = \frac{7}{a^5b^4}$$

$$\frac{6bc}{3a^4c} = \frac{2b}{a^4}$$

$$\text{p.p.c.m. } (a^2, a^5b^4, a^4) = a^5b^4$$

$$\text{Donc : } \frac{a^3b^4}{a^5b^4} \quad , \quad \frac{7}{a^5b^4} \quad \text{et} \quad \frac{2ab^5}{a^5b^4}$$

2. Réduisez au même dénominateur :

$$\frac{2x-6}{x^2-2x-3} \quad \frac{3x^2-9x}{x^2-9} \quad \text{et} \quad \frac{5x-15}{x^3+5x^2-9x-45}$$

$$\frac{2x-6}{x^2-2x-3} = \frac{2(x-3)}{(x-3)(x+1)} = \frac{2}{x+1}$$

$$\frac{3x^2-9x}{x^2-9} = \frac{3x(2-3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{3x}{x+3}$$

$$\frac{5x-15}{x^3+5x^2-9x-45} = \frac{5(x-3)}{x^2(x+5)-9(x+5)}$$

$$= \frac{5(x-3)}{(x+5)(x^2-9)}$$

$$= \frac{5(x-3)}{(x+5)(x+3)(x-3)} = \frac{5}{(x+5)(x+3)}$$

$$\text{p. g. c. d. } \left[\begin{array}{l} x+1 \\ x+3 \\ (x+5)(x+3) \end{array} \right] = (x+1)(x+3)(x+5)$$

Donc :

$$\frac{2(x+3)(x+5)}{(x+1)(x+3)(x+5)}, \quad \frac{3x(x+1)(x+5)}{(x+1)(x+3)(x+5)} \quad \text{et} \quad \frac{5(x+1)}{(x+1)(x+3)(x+5)}$$

4. Addition

- Règle* : 1. Réduire les fractions au même dénominateur.
 2. Former la somme des numérateurs en conservant le dénominateur commun.
 3. Simplifier.

Exemples :

$$\begin{aligned}
 1) \quad \frac{x+y}{3y} + \frac{1-x}{y^2} + \frac{1}{3} &= \frac{y(x+y)}{3y^2} + \frac{3(1-x)}{3y^2} + \frac{y^2}{3y^2} \\
 &= \frac{y(x+y) + 3(1-x) + y^2}{3y^2} \\
 &= \frac{xy + y^2 + 3 - 3x + y^2}{3y^2} \\
 &= \frac{2y^2 + xy - 3x + 3}{3y^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad \frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} + 4 &= \frac{(a+b)^2}{(a+b)(a-b)} + \frac{(a-b)^2}{(a+b)(a-b)} \\
 &\quad + \frac{4(a^2-b^2)}{(a+b)(a-b)} \\
 &= \frac{a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2+4a^2-4b^2}{(a+b)(a-b)} \\
 &= \frac{6a^2-2b^2}{(a+b)(a-b)}
 \end{aligned}$$

5. Soustraction

- Règle* : 1. Réduire les fractions au même dénominateur.
 2. Former la différence des numérateurs en conservant le dénominateur commun.
 3. Simplifier.

Exemples :

$$1) \quad \frac{a+b}{4a} - \frac{2a+3b}{a^2} = \frac{a(a+b)}{4a^2} - \frac{4(2a+3b)}{4a^2}$$

$$= \frac{a(a+b) - 4(2a+3b)}{4a^2}$$

$$= \frac{a^2 + ab - 8a - 12b}{4a^2}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad 3x-4 - \frac{3x^2+2x-9}{x+2} &= \frac{(3x-4)(x+2)}{x+2} - \frac{3x^2+2x-9}{x+2} \\ &= \frac{(3x-4)(x+2) - (3x^2+2x-9)}{x+2} \\ &= \frac{3x^2+6x-4x-8-3x^2-2x+9}{x+2} \\ &= \frac{1}{x+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \frac{a+5}{a+3} - \frac{a-3}{a-5} + \frac{a^2-a-20}{a^2-2a-15} \\ &= \frac{(a+5)(a-5)}{(a+3)(a-5)} - \frac{(a-3)(a+3)}{(a+3)(a-5)} + \frac{a^2-a-20}{(a+3)(a-5)} \\ &= \frac{(a+5)(a-5) - (a-3)(a+3) + a^2-a-20}{(a+3)(a-5)} \\ &= \frac{a^2-25-a^2+9+a^2-a-20}{(a+3)(a-5)} \\ &= \frac{a^2-a-36}{(a+3)(a-5)} \end{aligned}$$

6. Multiplication

Règle : 1. Multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

2. Simplifier.

Exemples :

$$1) \quad \frac{-3x^2}{y} \cdot \frac{-y^2}{xz} \cdot \frac{z}{x^4y^5} = \frac{(-3x^2)(-y^2) \cdot z}{y \cdot xz \cdot x^4y^5} = \frac{3x^2y^2z}{x^5y^6z} = \frac{3}{x^3y^4}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 + 3x - 4} \cdot \frac{x + 4}{3x - 2} &= \frac{(3x^2 - 5x + 2)(x + 4)}{(x^2 + 3x - 4)(3x - 2)} \\
 &= \frac{(x - 1)(3x - 2)(x + 4)}{(x - 1)(x + 4)(3x - 2)} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

7. Division

Règle : 1. Multiplier la première fraction par la deuxième renversée.

2. Simplifier.

Exemples :

$$\begin{aligned}
 1) \quad \frac{20xy}{x-z} : \frac{-16ax}{x^2-z^2} &= \frac{20xy}{x-z} \cdot \frac{x^2-z^2}{-16ax} \\
 &= \frac{20xy(x^2-z^2)}{(x-z)(-16ax)} \\
 &= \frac{20xy(x+z)(x-z)}{(x-z)(-16ax)} \\
 &= \frac{-5y(x+z)}{4a} \\
 2) \quad \frac{3x^2}{x^2+4x+4} : \frac{5x^2}{x^2+5x+6} &= \frac{3x^2}{x^2+4x+4} \cdot \frac{x^2+5x+6}{5x^2} \\
 &= \frac{3x^2(x^2+5x+6)}{5x^2(x^2+4x+4)} \\
 &= \frac{3x^2(x+2)(x+3)}{5x^2(x+2)^2} \\
 &= \frac{3(x+3)}{5(x+2)}
 \end{aligned}$$

Exercices

1. Simplifiez :

$$1) \quad \frac{5a^5b^2}{15a^2b^5}$$

$$2) \quad \frac{27a^5b^2c^4}{-15ab^4c^4}$$

- 3) $\frac{-3a^4bc^2d^3}{14a^3b^4c^2d^5}$
- 4) $\frac{(a-b)^5}{(a-b)^3}$
- 5) $\frac{(x-2)^5}{(2-x)^7}$
- 6) $\frac{5a-5b}{3a-3b}$
- 7) $\frac{5a^2-10ab}{15a-30b}$
- 8) $\frac{5x^2y}{25x^2y-15xy^2}$
- 9) $\frac{x^2-9}{x^2-6x-27}$
- 10) $\frac{x^2-4x+4}{2x^2-8}$
- 11) $\frac{a^2-16b^2}{5ab-20b^2}$
- 12) $\frac{3a^3-6a^2}{a^2-4}$
- 13) $\frac{b^2-a^2}{a+b}$
- 14) $\frac{(a+2b)^2}{a^2-4b^2}$
- 15) $\frac{3a^2-3ab}{2(6a^2-6b^2)}$
- 16) $\frac{(a-b)^3(c-d)^3}{(b-a)^2(d-c)}$
- 17) $\frac{12xy-6y}{8x^2-8x+2}$
- 18) $\frac{x^2+3x-28}{x^2-16}$
- 19) $\frac{x^2-x-6}{x^2-4x-3}$
- 20) $\frac{a^2+8a+16}{a^2-6a-40}$
- 21) $\frac{x^2+3x-40}{2x^2-13x+15}$
- 22) $\frac{3x^2-5x-2}{6x^2-x-1}$
- 23) $\frac{3x^2-7x+2}{6x^2-5x+1}$
- 24) $\frac{9x^2-(x+4)^2}{x^2-x-2}$
- 25) $\frac{a^2-2a+1}{a^3-a^2-a+1}$
- 26) $\frac{x^3+2x^2-9x-18}{x^2+5x+6}$
- 27) $\frac{x^3-9x^2+27x-27}{2x^3+8x^2-42x}$
- 28) $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$
- 29) $\frac{4-a+4b-ab}{5+a+5b+ab}$
- 30) $\frac{2x^3+5x^2-2x-5}{8x^3+20x^2-6x-15}$
- 31) $\frac{a^2+2ab+b^2-c^2}{a^2-2ac-b^2+c^2}$
- 32) $\frac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-3x^2-10x+24}$

2. Réduisez au même dénominateur :

$$1) \frac{7}{3a^2b}, -\frac{5}{a^7b^4} \text{ et } \frac{13b}{6a^5}$$

$$2) \frac{5ab^2}{25a^3b}, \frac{13ab}{15b^3}, \frac{a^2bc}{45ac} \text{ et } \frac{2c}{9a^4b^2}$$

$$3) \frac{a}{(a-b)(b-c)}, \frac{b}{(b-a)(c-a)} \text{ et } \frac{c}{(c-b)(a-c)}$$

$$4) \frac{5}{a-b}, \frac{2}{3(a+b)} \text{ et } \frac{2}{a^2-b^2}$$

$$5) \frac{3}{x-2}, -\frac{5}{2x+4} \text{ et } \frac{x}{x^2-4}$$

$$6) \frac{x}{x^2-4x}, \frac{2}{x^2+4x} \text{ et } \frac{x+1}{x^4-16x^2}$$

$$7) \frac{a}{1-3a}, \frac{5}{1+3a} \text{ et } \frac{2a}{9a^2-1}$$

$$8) \frac{3x}{x^2+3x-10}, \frac{7}{x^2+8x+15} \text{ et } \frac{-5x}{x^2+x-6}$$

$$9) \frac{x-1}{x^2-6x+9}, \frac{x+2}{x^2+2x-15} \text{ et } \frac{x-3}{x^2+10x+25}$$

$$10) \frac{x+2}{2x^2+5x-3}, \frac{3}{5x^2+17x+6} \text{ et } \frac{2x^2}{10x^2-x-2}$$

3. Effectuez :

$$1) \frac{5}{x^2y} + \frac{3}{y^2z} - \frac{7}{z^2x}$$

$$2) \frac{4}{x-5} - \frac{5}{x-3}$$

$$3) \frac{7}{a-b} + \frac{3}{b-a}$$

$$4) \frac{x+5}{x^2-9} - \frac{x-1}{2x^2-6x}$$

$$5) \frac{5}{x+3} + \frac{30}{x^2-9}$$

$$6) \ x + 3 - \frac{x^2 - 3x + 9}{x + 3}$$

$$7) \ \frac{5}{x} + \frac{4x + 1}{2x^2} - \frac{7}{x - 2}$$

$$8) \ \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1} - \frac{2x}{x + 1} + \frac{4}{x - 1}$$

$$9) \ \frac{3}{x^2 + x} - \frac{2x}{x^3 - x^2} - \frac{6}{x^2 - 1}$$

$$10) \ \frac{3x^2 + 5x + 7}{2x^2 + 4x + 6} - \frac{3x + 5}{2x + 4}$$

$$11) \ \frac{a^2}{a - 3} - \frac{9}{a - 3} + 7$$

$$12) \ \frac{x - 5}{x + 2} - \frac{x + 2}{x - 5} - \frac{2}{x - 5} + \frac{6}{x + 2}$$

$$13) \ \frac{x + 1}{x - 3} - \frac{8}{x - 2} - \frac{3x - 5}{x^2 - 5x + 6}$$

$$14) \ \frac{x}{x + 2} - \frac{6}{3 - x} - \frac{2x}{x - 3}$$

$$15) \ \frac{x - 5}{x + 4} - \frac{x^2 + 47}{x^2 + x - 12} + \frac{x - 4}{x - 3}$$

$$16) \ \frac{2}{x + 5} - \frac{3}{x - 3} + \frac{4(x + 3)}{x^2 + 2x - 15}$$

$$17) \ \frac{3x}{x + 2} - \frac{1 - x}{x^2 + 7x + 10} - \frac{2}{x + 5}$$

$$18) \ \frac{2 - a}{a - 2} - \frac{a + 2}{2 - a} - \frac{16}{a^2 - 4}$$

$$19) \ \frac{4}{x^2 - 2x} - \frac{3}{x^2 - 3x} + \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$$

$$20) \ \frac{a}{1 - 4a} - \frac{a}{1 + 4a} - \frac{2a}{16a^2 - 1}$$

$$21) \ \frac{2(x^2 - 1)}{x^2 + 2x - 15} - \frac{x - 1}{x + 5} - 2$$

$$22) \frac{2x+5}{x^2-2x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{5x^2-3x-2}{x^3-3x^2+3x-1}$$

$$23) \frac{4}{a+2} - \frac{3a-1}{a^2+4a+4} + \frac{2a+4}{a^3+6a^2+12a+8}$$

$$24) \frac{3x}{x^2-1} + \frac{7}{x^2-2x-3} - \frac{2x}{x^2-4x+3}$$

$$25) \frac{1}{x^2-4x+4} + \frac{1}{x^2-4} - \frac{1}{x^2-6x+8}$$

$$26) \frac{1}{x^2-7x+12} + \frac{2}{x^2-4x+3} - \frac{3}{x^2-5x+4}$$

$$27) \frac{x+2}{x^2+4x+3} + \frac{x+3}{x^2+3x+2} - \frac{x+1}{x^2+5x+6}$$

$$28) \frac{1}{x^2+2x+1} - \frac{11}{x^2-2x+1} + \frac{1}{x^2-1} + \frac{2x+2}{(x^2-1)^2}$$

4. Multipliez :

$$1) \frac{28}{5a^4} \cdot \frac{15a^2}{7}$$

$$2) 25xy^2z \cdot \frac{2xz^3}{15y^2z}$$

$$3) -\frac{5a^2}{2b} \cdot \frac{3abc}{25} \cdot \left(-\frac{10b^3c}{6a^3}\right)$$

$$4) 15a^3b \left(-\frac{ac}{45b^3}\right) \cdot \frac{9b^4c^3}{a^2}$$

$$5) \frac{x^3+3x}{x^2} \cdot \frac{15x^3}{3x^3+9x^2}$$

$$6) \frac{x^2-4}{16x^2} \cdot \frac{4x^3+8x^2}{x-2}$$

$$7) (x^2-6x+9) \cdot \frac{x+2}{x^2-x-6}$$

$$8) \frac{x-4}{x^2-9} \cdot \frac{x+3}{x^2-16}$$

$$9) \frac{2x+3}{x-2} \cdot \frac{2-x}{2x-3}$$

$$10) \frac{9a^2-1}{27} \cdot \frac{3}{1-3a}$$

$$11) \frac{x+5}{x^2+3x-18} \cdot \frac{x-3}{x^2-x-20}$$

$$12) \frac{x^2+6x+8}{x^2+3x-4} \cdot \frac{x^2-4x+3}{x^2-x-6}$$

$$13) \frac{a^2-4b^2}{a^2-4ab+4b^2} \cdot \frac{3a-6b}{4a+8b}$$

$$14) \frac{x^2+4x-21}{2x^2-13x-7} \cdot \frac{2x+1}{x-3}$$

$$15) \frac{3x^2-2x-8}{5x^2+13x-6} \cdot \frac{2x^2+6x}{9x^2+12x}$$

$$16) \frac{x^2-3x-4}{6x^2-22x+20} \cdot \frac{3x^2+2x-8}{x^2-1} \cdot \frac{2x^2+3x-5}{x^2-2x-8}$$

$$17) \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} \right) \cdot \frac{x^2-4}{6x}$$

$$18) \left(x^2-2x+4 - \frac{9x+8}{x+2} \right) \cdot \frac{x+2}{x-3}$$

$$19) \left(\frac{2x}{x+3} - \frac{5}{x+6} \right) \cdot \left(\frac{2}{x+5} + \frac{x+2}{x+4} \right)$$

$$20) \left(1 - \frac{y}{x} \right) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2} \right) \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2} \cdot \left(x - \frac{xy}{x+y} \right) \cdot \frac{x^2y^2}{x+y}$$

5. Divisez :

$$1) \frac{5a^2bc}{2d^2c} : \frac{10abc^3}{3d^3}$$

$$2) - \frac{4a^5b^5}{9c^3d^2} : \frac{a^3b^2}{6cd}$$

$$3) - \frac{27a^3b^2}{5bc^2} : 3a^4c$$

$$4) 9a^2b : \left(-\frac{3a^2b^3}{4c^5}\right)$$

$$5) \frac{3x+5}{x^2-25} : \frac{6x+10}{x+5}$$

$$6) \frac{x-2}{5x+3} : (x^2-8x+12)$$

$$7) \frac{4a^2-9b^2}{a^2-4b^2} : \frac{2a+3b}{a-2b}$$

$$8) \frac{5x^2y}{x^2-4y^2} : \frac{10xy^2}{x^2+4xy+4y^2}$$

$$9) \frac{x^2-3x-40}{x^2-x-6} : \frac{x+5}{x-3}$$

$$10) \frac{x-10}{x^2+9x+14} : \frac{x^2-11x+10}{x+7}$$

$$11) \frac{x^2+4x}{x^2-6x+8} : \frac{2x^2+7x+6}{x^2-4}$$

$$12) \frac{x^2-4x+3}{x^2-10x+21} : \frac{x^2-5x+4}{x^2-9x+20}$$

$$13) \frac{x^2-x-12}{2x^2+3x-9} : \frac{x^2+4x-12}{3x^2-10x+8}$$

$$14) \frac{3x^2-11x+6}{6x^2+11x-21} : \frac{9x^2-12x+4}{9x^2+9x-54}$$

$$15) \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}\right) : \left(\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}\right)$$

$$16) \left(\frac{a}{2b} + \frac{b}{2a} - 1 - \frac{c^2}{2ab}\right) : \left(1 - \frac{2c}{a-b+c}\right)$$

$$17) \left(\frac{x-2}{x^2+3x+2} - \frac{x-1}{x^2-x-6}\right) : \frac{5x^2-12x+7}{x^2-2x-3}$$

$$18) \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2x}{x^2-1}\right) : \frac{6x}{x^2+2x+1}$$

$$19) \left(\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}\right) \left(2 + \frac{a^2+b^2}{ab}\right) : \frac{2a^2+2b^2}{b}$$

6. Simplifiez :

$$1) \frac{\frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - 7x - 6}}{\frac{x^2 + x - 2}{3x^2 + 8x + 4}}$$

$$2) \frac{\frac{1}{a} - \frac{7}{a^2} + \frac{12}{a^3}}{\frac{16}{a^2} - 1}$$

$$3) \frac{a + 3 + \frac{6}{a-4}}{a - 2 + \frac{1}{a-4}}$$

$$4) \frac{\frac{x+1}{x-1} + \frac{x+5}{x+3}}{\frac{x-2}{x+3} - \frac{x-4}{x-1}}$$

$$5) \frac{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + 1}{1 - \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac}}$$

$$6) \frac{\frac{a+2}{a-2} - \frac{a-2}{a+2}}{\frac{a+2}{a-2} + \frac{a-2}{a+2} + 2}$$

$$7) \frac{\left(x + \frac{a^2}{x}\right) \left(\frac{a^2 + x^2}{ax} - 2\right)}{\frac{1}{ax} - \frac{2}{a^2 + x^2}}$$

$$8) \frac{3 + \frac{2}{x-1}}{\frac{3}{x-4} + 1} \cdot \frac{2 - \frac{6}{x+2}}{3 - \frac{9}{x^2-1}}$$

CHAPITRE XXXIV

SYSTÈMES DE DEUX ÉQUATIONS A DEUX INCONNUES

1. Notion

A. $3x + y = 17$ est une équation à deux inconnues : x et y .

$$\begin{aligned}x = 5 &\Rightarrow 3 \cdot 5 + y = 17 \\&\Rightarrow 15 + y = 17 \\&\Rightarrow y = 17 - 15 \\&\Rightarrow y = 2\end{aligned}$$

Nous disons que le couple $(5, 2)$
vérifie l'équation ou
qu'il satisfait l'équation ou
qu'il est une solution de l'équation $3x + y = 17$.

A chaque valeur de x , correspond une valeur de y :

$$\begin{aligned}x = -3 &\Rightarrow y = 26 \\x = -2 &\Rightarrow y = 23 \\x = -1 &\Rightarrow y = 20 \\x = 0 &\Rightarrow y = 17 \\x = 1 &\Rightarrow y = 14 \\x = 2 &\Rightarrow y = 11 \\x = 3 &\Rightarrow y = 8\end{aligned}$$

L'équation $3x + y = 17$ admet une *infinité de solutions*.

Nous représentons cet ensemble infini par A.

$$A = \{ \dots, (-3, 26), (-2, 23), (-1, 20), (0, 17), \\(1, 14), (2, 11), (3, 8), \dots \}$$

B. L'équation $4x + 3y = 41$ admet aussi une *infinité de solutions*.

$$B = \{ \dots, \left(-3, \frac{53}{3}\right), \left(-2, \frac{49}{3}\right), (-1, 15), \left(0, \frac{41}{3}\right), \left(1, \frac{37}{3}\right), \\(2, 11), \left(3, \frac{29}{3}\right), \dots \}$$

- C. Considérons maintenant les deux équations simultanément. Elles constituent un système de deux équations à deux inconnues.

$$\begin{cases} 3x + y = 17 \\ 4x + 3y = 41 \end{cases}$$

$$A \cap B = \{ (2, 11) \}.$$

Le couple (2, 11) vérifie simultanément les deux équations. Ce couple est appelé solution du système. Chercher cette solution, c'est résoudre le système.

2. Résolution d'un système de deux équations à deux inconnues.

I. Méthode par combinaison linéaire

Exemple 1.

$$\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 5x - y = 6 \end{cases}$$

En additionnant les équations membre à membre, on trouve l'équation $8x = 16$ ne renfermant que l'inconnue x . L'inconnue y a été éliminée.

On obtient ainsi le système :

$$\begin{cases} 8x = 16 \\ 5x - y = 6 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 2 \\ 5x - y = 6 \end{cases}$$

En remplaçant x par 2 dans la deuxième équation, on trouve :

$$\begin{aligned} 5 \cdot 2 - y &= 6 \\ 10 - y &= 6 \\ -y &= 6 - 10 \\ -y &= -4 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

La solution du système est donc $E = \{ (2, 4) \}$.

Pratiquement :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 5x - y = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 8x = 16 \\ 5x - y = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ 5x - y = 6 \end{cases} \\ &\quad 5 \cdot 2 - y = 6 \\ &\quad 10 - y = 6 \\ &\quad -y = 6 - 10 \\ &\quad -y = -4 \\ &\quad y = 4 \\ &\quad E = \{ (2, 4) \} \end{aligned}$$

Exemple 2.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 5x - 4y = -22 \end{cases}$$

Pour éliminer l'inconnue y , on multiplie les deux équations par des facteurs appropriés, puis on les additionne membre à membre.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 5x - 4y = -22 \end{cases} \begin{array}{l} \times 4 \\ \times 3 \end{array} \\ \begin{cases} 16x + 12y = 4 \\ 15x - 12y = -66 \end{cases} & \begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 31x = -62 \end{cases} \begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ x = -2 \end{cases} \\ & 4(-2) + 3y = 1 \\ & -8 + 3y = 1 \\ & 3y = 9 \\ & y = 3 \\ & E = \{(-2, 3)\} \end{aligned}$$

Exemple 3.

On peut également combiner les équations de façon à éliminer x .

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x - 5y = -5 \\ 6x + 4y = 42 \end{cases} \begin{array}{l} -3 \\ 1 \end{array} \\ \begin{cases} -6x + 15y = 15 \\ 6x + 4y = 42 \end{cases} & \begin{cases} 19y = 57 \\ 6x + 4y = 42 \end{cases} \begin{cases} y = 3 \\ 6x + 4y = 42 \end{cases} \\ & 6x + 4 \cdot 3 = 42 \\ & 6x + 12 = 42 \\ & 6x = 42 - 12 \\ & 6x = 30 \\ & x = 5 \\ & E = \{(5, 3)\} \end{aligned}$$

II. Méthode par substitution

Exemple 1.

$$\begin{cases} 5x + y = 16 \\ 4x - 5y = 7 \end{cases}$$

On déduit aisément de la première équation que $y = 16 - 5x$.
Le système devient alors :

$$\begin{cases} y = 16 - 5x \\ 4x - 5y = 7 \end{cases}$$

La valeur de y étant la même dans les deux équations, on peut remplacer y dans la deuxième par $16 - 5x$.

Cette substitution permet d'éliminer y .

$$4x - 5(16 - 5x) = 7$$

$$4x - 80 + 25x = 7$$

$$4x + 25x = 7 + 80$$

$$29x = 87$$

$$x = 3$$

Or $y = 16 - 5x$

$$= 16 - 5 \cdot 3$$

$$= 16 - 15$$

La solution du système est donc $E = \{(3, 1)\}$.

Pratiquement :

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 5x + y = 16 \\ 4x - 5y = 7 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \boxed{y = 16 - 5x} \\ 4x - 5y = 7 \end{array} \right. \\ \hline \begin{array}{l} 4x - 5(16 - 5x) = 7 \\ 4x - 80 + 25x = 7 \\ 4x + 25x = 7 + 80 \\ 29x = 87 \\ x = 3 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} y = 16 - 5 \cdot 3 \\ = 16 - 15 \\ = 1 \end{array} \right. \\ \hline E = \{(3, 1)\} \end{array}$$

Exemple 2.

Il est évident que l'on peut également éliminer x .

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 5x + 7y = \frac{53}{20} \\ 4x + 5y = 2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 5x + 7y = \frac{53}{20} \\ \boxed{x = \frac{2 - 5y}{4}} \end{array} \right. \\ \hline \begin{array}{l} 5 \frac{2 - 5y}{4} + 7y = \frac{53}{20} \\ \frac{10 - 25y}{4} + 7y = \frac{53}{20} \\ 50 - 125y + 140y = 53 \\ -125y + 140y = 53 - 50 \\ 15y = 3 \\ y = \frac{1}{5} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} x = \frac{2 - 4 \cdot \frac{1}{5}}{5} \\ = \frac{1}{4} \end{array} \right. \\ \hline E = \left\{ \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{5} \right) \right\} \end{array}$$

III. Méthode graphique

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

$3x + 2y = 12$ représente une droite $A \in \mathcal{D}$

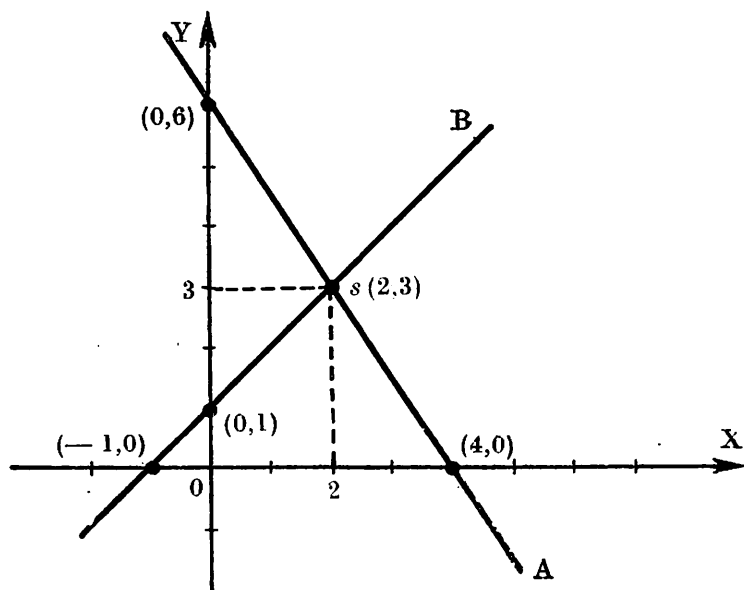
$$\begin{array}{l|l} x = 0 \Rightarrow 2y = 12 & y = 0 \Rightarrow 3x = 12 \\ \Rightarrow y = 6 & \Rightarrow x = 4 \\ \text{donc } (0, 6) \in A & \text{donc } (4, 0) \in A \end{array}$$

Toutes les solutions de $3x + 2y = 12$ sont les coordonnées des points de A.

$x - y = -1$ représente une droite $B \in \mathcal{D}$

$$\begin{array}{l|l} x = 0 \Rightarrow -y = -1 & y = 0 \Rightarrow x = -1 \\ \Rightarrow y = 1 & \\ \text{donc } (0, 1) \in B & \text{donc } (-1, 0) \in B \end{array}$$

Toutes les solutions de $x - y = -1$ sont les coordonnées des points de B.



La coordonnée du point $A \cap B = \{s\}$ détermine la solution du système.

$$E = \{ (2, 3) \}$$

3. Problèmes à deux inconnues

A) Mode opératoire

- 1) Choisir les inconnues.
- 2) Des données du problème, déduire un système de deux équations à deux inconnues.
- 3) Résoudre le système d'équations.

B) Exemples

1. Pour réparer un véhicule, un garagiste et son apprenti travaillent respectivement 6 et 5 heures. Le montant de la facture est de 900 F.

Pour une autre réparation, le client paye 820 F pour 4 heures de travail du garagiste et 7 heures de son apprenti.

Calculez le salaire horaire de chacun.

Résolution :

- 1) Le garagiste gagne x F l'heure et son apprenti y F.

- 2) 1ère facture $6x \text{ F} + 5y \text{ F} = 900 \text{ F}$ 2ème facture $4x \text{ F} + 7y \text{ F} = 820 \text{ F}$

$$\text{Donc } \begin{cases} 6x + 5y = 900 \\ 4x + 7y = 820 \end{cases}$$

$$3) \quad \begin{cases} 6x + 5y = 900 & | \quad 7 \\ 4x + 7y = 820 & | \quad -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 42x + 35y = 6\,300 \\ -20x - 35y = -4\,100 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x + 5y = 900 \\ 22x = 2\,200 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x + 5y = 900 \\ x = 100 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 600 + 5y &= 900 \\ 5y &= 900 - 600 \\ 5y &= 300 \\ y &= 60 \end{aligned}$$

Réponse : le garagiste gagne 100 F l'heure et son apprenti 60 F.

Preuve :

$$\begin{aligned} \underbrace{(100 \text{ F} \times 6)}_{600 \text{ F}} + \underbrace{(60 \text{ F} \times 5)}_{300 \text{ F}} &= 900 \text{ F} \\ \underbrace{(100 \text{ F} \times 4)}_{400 \text{ F}} + \underbrace{(60 \text{ F} \times 7)}_{420 \text{ F}} &= 820 \text{ F} \end{aligned}$$

2. Deux roues dentées engrènent ensemble. Le rapport des nombres de dents égale $\frac{1}{4}$. Si chaque roue avait 5 dents de plus, le rapport serait de $\frac{1}{3}$. Calculez le nombre de dents de chaque roue.

Résolution :

1) La première roue a x dents et la deuxième y .

$$2) \frac{x}{y} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{x+5}{y+5} = \frac{1}{3}$$

$$3) \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1}{4} \\ \frac{x+5}{y+5} = \frac{1}{3} \end{cases} \begin{cases} 4x = y \\ 3x+15 = y+5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - y = 0 \\ 3x - y = -10 \end{cases} \begin{cases} y = 4x \\ 3x - y = -10 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l} 3x - 4x = -10 & y = 4 \cdot 10 \\ -x = -10 & y = 40 \\ x = 10 & \end{array}$$

Réponse : la première roue a 10 dents et la deuxième 40.

Preuve : $\frac{10}{40} = \frac{1}{4}$

$$\frac{10+5}{40+5} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

Exercices

1. Résolvez par combinaison linéaire :

$$1) \begin{cases} x + y = 112 \\ x - y = 24 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2x - 5y = 6 \\ 5x - 5y = 23 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 6x - 2y = 25 \\ -3x + 2y = 68 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 7x + 3y = -23 \\ 5y - 9x = 3 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3x + 5y = -9,8 \\ -3x - 10y = 5,6 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 8x - 17y = -11 \\ 5x + 19y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
 7) \begin{cases} 4x - 3y = 8 \\ -3x + 7y = -6 \end{cases} & 9) \begin{cases} \frac{3x-4}{4} + \frac{5y+2}{3} = \frac{5}{6} \\ \frac{x-1}{5} - \frac{2y+3}{15} = \frac{2}{3} \end{cases} \\
 8) \begin{cases} 3(x+2y) - 2(2x-3y) = 10 \\ 2(x-4y) + 5(x+3y) = 21 \end{cases} &
 \end{array}$$

2. Résolvez par substitution :

$$\begin{array}{ll}
 1) \begin{cases} 3x = -15 \\ 2x - 7y = 32 \end{cases} & 7) \begin{cases} x + 3y = 6 \\ 5x - 4y = 30 \end{cases} \\
 2) \begin{cases} 5y = 7 \\ 4x + 3y = -5 \end{cases} & 8) \begin{cases} \frac{5x}{2} - \frac{2y}{3} = \frac{59}{6} \\ \frac{x}{3} + \frac{3y}{5} = \frac{61}{15} \end{cases} \\
 3) \begin{cases} x + y = -2 \\ 7y - 3x = 36 \end{cases} & \\
 4) \begin{cases} 2x - y = 11 \\ 3x + 5y = -3 \end{cases} & 9) \begin{cases} \frac{4x+15}{3} - \frac{3y-5}{5} = x + 4 \\ \frac{2y+2x}{4} + \frac{y+15}{5} = x + y \end{cases} \\
 5) \begin{cases} 3x + 8y = 2 \\ 4x - 5y = -11 \end{cases} & \\
 6) \begin{cases} -6x + 7y = -12 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases} &
 \end{array}$$

3. Résolvez graphiquement :

$$\begin{array}{ll}
 1) \begin{cases} 3x = 6 \\ 2x + y = 2 \end{cases} & 6) \begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \\
 2) \begin{cases} 2y = -8 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases} & 7) \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \\ 5x - 2y + 7 = 0 \end{cases} \\
 3) \begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - 3y = -6 \end{cases} & \\
 4) \begin{cases} 4x + 3y = 12 \\ x + 3y = -6 \end{cases} & 8) \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{4}{3} \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{7}{6} \end{cases} \\
 5) \begin{cases} 2x + 3y = 18 \\ 3x - 2y = 14 \end{cases} &
 \end{array}$$

4. Résolvez graphiquement :

$$\begin{array}{ll}
 1) \begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 4x + 6y = 10 \end{cases} & 2) \begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 4x - 6y = 24 \end{cases}
 \end{array}$$

5. Résolvez par les trois méthodes :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 5x - 2y = 0 \end{cases}$$

6. Les droites ab , bc et ca déterminent le triangle abc .

Trouvez les coordonnées des sommets, sachant que :

$$ab \equiv 5x + 3y - 19 = 0$$

$$bc \equiv x + 8y + 11 = 0$$

$$ca \equiv 4x - 5y + 7 = 0$$

Vérifiez graphiquement.

7. La solution du système $\begin{cases} 2x - 5y = 13 \\ 3x = y \end{cases}$ appartient à

l'ensemble des solutions de $(m + 3)x + (4 - m)y = 1 + m$

Déterminez m .

8. La droite $(m + 1)x + 2ny = 8$ passe par les points $(4, -2)$ et $(10, -7)$.

Déterminez m et n .

9. Le polynôme $x^3 - ax^2 + bx + 4$ est divisible par $x - 1$.

La division par $x - 2$ donne un reste égal à 6.

Déterminez a et b .

10. Démontrez que les droites suivantes passent par un même point :

$$3x - 5y = -9, \quad -2x + 3y = 5, \quad 5x - y = 7$$

11. La somme de deux nombres égale 33 et leur différence 17.

Trouvez ces nombres.

12. La différence de deux nombres égale 4. Le quintuple du premier et le triple du deuxième admettent 2 comme différence.

Cherchez ces deux nombres.

13. Pour payer la somme de 41 F, une personne débourse 7 pièces de 5 F de plus que le nombre de pièces de 1 F. Calculez le nombre de pièces de 5 F et de 1 F.

14. Dans un stade de football se trouvent 9 354 spectateurs. Une place debout coûte 50 F et une place dans les tribunes 70 F. Sachant que la recette est de 491 700 F, calculez le nombre de places vendues de chaque sorte.

15. Un commerçant mélange du vin à 35 F le litre et du vin à 50 F le litre. Il obtient ainsi 630 l de mélange à 42 F le litre. Combien devait-il en prendre de chaque qualité?
16. Un nombre est le quintuple d'un autre nombre. Si on augmente les deux nombres de 13 unités, le premier devient le triple du second. Quels sont ces nombres?
17. Dans un triangle, on donne $[ab] = 3 [bc]$. En diminuant $[ab]$ de 15 cm et en augmentant $[bc]$ de 15 cm, le triangle devient isocèle.
Calculez $[ab]$ et $[bc]$.
18. Pierre achète 8 kg de cerises et 6 kg de pêches pour la somme de 353 F. Jean paye 321 F pour 6 kg de cerises et 7 kg de pêches. Quels sont les prix unitaires?
19. Un commerçant paye 40 marteaux et 30 pinces, 7 200 F. Il vend 18 marteaux et 12 pinces pour la somme de 3 366 F. Le bénéfice réalisé sur un marteau est de 15 F et sur une pince, 3 F. Calculez le prix d'achat d'un marteau et d'une pince.
20. Un père de famille partage une certaine somme entre ses enfants. S'il donne 400 F à chaque enfant, il lui restera 200 F. Par contre, il lui manquera 300 F, s'il donne 500 F à chaque enfant. Quelle est la somme à partager et quel est le nombre d'enfants?
21. La largeur d'un rectangle est de 4 m plus petite que la longueur. Si on ajoutait 1 m aux deux dimensions, la surface augmenterait de 27 m². Quelles sont les dimensions?
22. Un nombre est composé de deux chiffres. La somme de ses chiffres égale 16. Si l'on inverse l'ordre des chiffres, le nombre augmente de 18. Trouvez ce nombre.
23. Le rapport des nombres de dents de deux roues dentées égale $\frac{3}{8}$.
Si la première roue avait 5 dents de plus et la deuxième 8 dents de moins, le rapport serait $\frac{1}{2}$. Combien de dents comporte chaque roue?

24. Deux ouvriers effectuent un travail en 12 jours. Si le premier travaillait seul durant 10 jours, il faudrait encore 15 jours au deuxième pour terminer le travail. En combien de jours chaque ouvrier pourrait-il effectuer le travail?
25. Un commerçant place son argent dans une banque : une première somme à 4 % et une deuxième à 5 %. Son argent lui rapporte annuellement 16 000 F d'intérêt, mais lui rapporterait 500 F de moins, s'il permutait les deux taux. Quelles sont les deux sommes ?

CHAPITRE XXXV

LE CERCLE

1. Cercle

Un cercle est l'ensemble de tous les points $x \in \Pi$ également distants d'un point donné $o \in \Pi$.

$$C(o, r) = \{ x \mid x \in \Pi \text{ et } |ox| = r \}$$

o est le centre

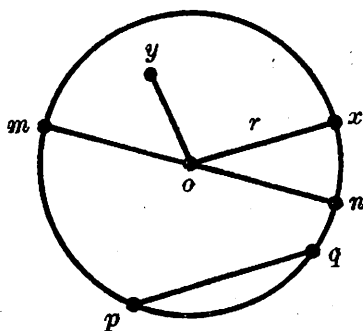
$[ox]$ est le rayon

$[mn]$ est le diamètre

$[pq]$ est une corde.

La partie de Π intérieure au cercle est appelée disque.

$$\text{Disque}(o, r) = \{ y \mid y \in \Pi \text{ et } |oy| < r \}$$



2. Cercle par trois points

1. Soient les deux points a et $b \in \Pi$. Construisons la médiatrice M de $[ab]$.

Tout point $o \in M$ est à égale distance de a et de b .

D'où

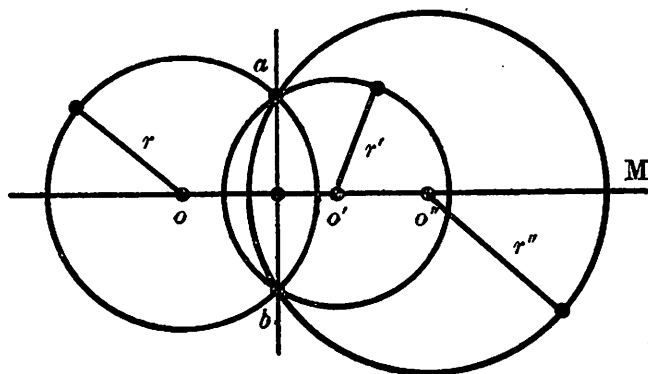
$$|oa| = |ob|$$

$$|o'a| = |o'b|$$

$$|o''a| = |o''b|$$

Tout point $o \in M$ peut donc être le centre d'un cercle passant par a et b .

Puisque M comporte une infinité de points, nous pouvons conclure que par deux points a et b passent une infinité de cercles.



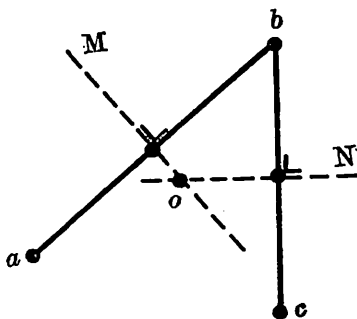
2. Soient dans Π trois points a , b et c non alignés.

Construisons les médiatrices M de $[ab]$ et N de $[bc]$.

Le centre o d'un cercle passant par a , b , et c doit satisfaire à :

$$\begin{array}{c} |oa| = |ob| = |oc| \\ \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ o \in M \quad o \in N \\ \{o\} = M \cap N \end{array}$$

o est donc le point d'intersection de M et N .



Ce point d'intersection existe, car

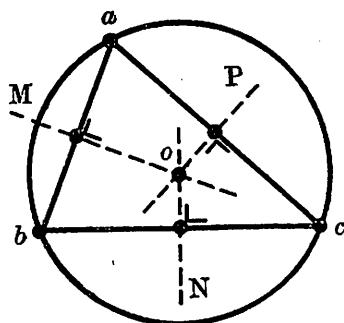
$$\left. \begin{array}{l} M \perp ab \\ N \perp bc \\ ab \nparallel bc \end{array} \right\} \Rightarrow M \cap N = \{o\}$$

M et N ayant un seul point d'intersection, nous pouvons conclure que par trois points non alignés passe un et un seul cercle.

Conséquences :

1. Un cercle est complètement déterminé par trois points non alignés.
2. Deux cercles distincts ont au plus deux points communs.
3. Par trois points alignés ne passe jamais un même cercle.
Une droite et un cercle ont donc au plus deux points communs.

4. $|oa| = |ob| = |oc|$
 $\Rightarrow |oa| = |ob| \Rightarrow o \in M$ médiatrice de $[ab]$
 $\Rightarrow |ob| = |oc| \Rightarrow o \in N$ médiatrice de $[bc]$
 $\Rightarrow |oa| = |oc| \Rightarrow o \in P$ médiatrice de $[ac]$

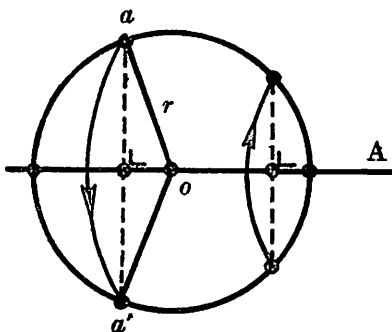


Les trois médiatrices d'un triangle passent par un même point. Ce point est le centre du cercle circonscrit au triangle.

3. Symétrie dans le cercle

1. Considérons le diamètre A de $C(o, r)$ tel que $o \in A$.

$$\begin{array}{l}
 a \in C \\
 \left. \begin{array}{l} S_A(a) = a' \\ S_A(o) = o \end{array} \right\} \Rightarrow S_A([oa]) = [oa'] \\
 \left. \begin{array}{l} [oa] = r \Rightarrow [oa'] = r \end{array} \right\} \Rightarrow a' \in C
 \end{array}$$



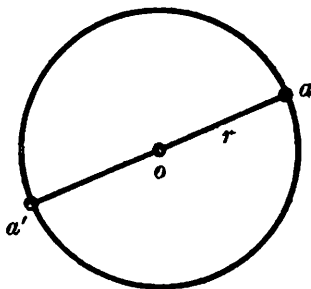
L'image d'un point $a \in C$ par S_A est un point $a' \in C$.

A est donc un axe de symétrie du cercle.

Tout diamètre est un axe de symétrie du cercle.

2. Considérons le centre o de $C(o, r)$.

$$\begin{array}{l}
 a \in C \\
 \left. \begin{array}{l} S_o(a) = a' \\ S_o(o) = o \end{array} \right\} \Rightarrow S_o([oa]) = [oa'] \\
 \left. \begin{array}{l} [oa] = r \Rightarrow [oa'] = r \end{array} \right\} \Rightarrow a' \in C
 \end{array}$$



L'image d'un point $a \in C$ par S_o est un point $a' \in C$.

o est donc le centre de symétrie du cercle.

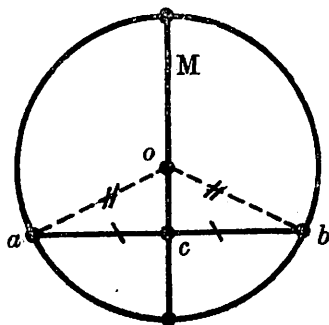
Le centre d'un cercle est le centre de symétrie du cercle.

3. c milieu de $[ab] \Rightarrow |ca| = |cb| \Rightarrow c \in M$ médiatrice de $[ab]$.

o centre de $C \Rightarrow |oa| = |ob| \Rightarrow o \in M$.

Donc $M = oc$ tel que $oc \perp ab$.

M est un axe de symétrie de $[ab]$.



Le diamètre qui passe par le milieu d'une corde est perpendiculaire à celle-ci.

La droite M satisfait donc aux trois conditions suivantes :

- 1) elle passe par o
- 2) elle passe par le milieu c de $[ab]$
- 3) elle est perpendiculaire à $[ab]$.

Une droite satisfaisant à deux de ces conditions, satisfait aussi à la troisième. D'où les propriétés suivantes :

- 1) La médiatrice d'une corde passe par le centre du cercle.
- 2) Le diamètre perpendiculaire à une corde, divise celle-ci en deux parties égales.

Exercices

1. Définissez l'ensemble des centres de tous les cercles passant par a et b .

$a \bullet$

$\bullet b$

2. Définissez l'ensemble des centres des cercles passant par a et de rayon r .



3. Construisez tous les cercles de rayon $r = 4$ cm et passant par a et b . Combien en trouvez-vous?

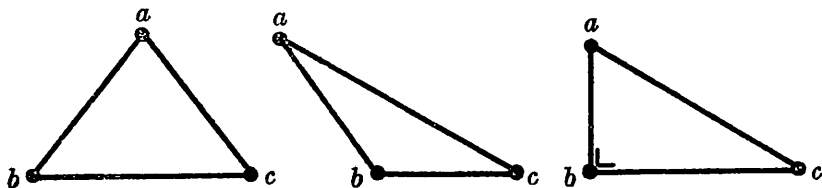


4. Construisez un cercle de rayon égal à 7 cm à partir d'une corde de 5 cm.

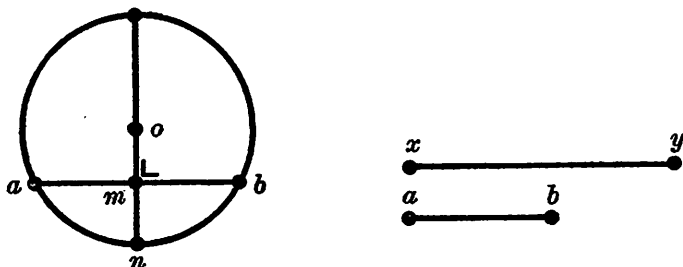
5. Construisez le cercle passant par a , b et c .



6. Construisez les cercles circonscrits aux triangles abc .

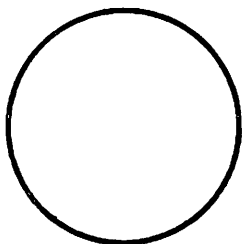


7. Le segment $[mn]$ du diamètre perpendiculaire à la corde $[ab]$ est appelé *flèche* de l'arc ab .

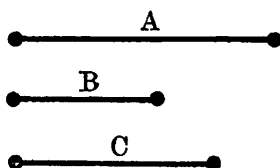


Construisez un cercle de corde $[xy]$ et de flèche $[ab]$.

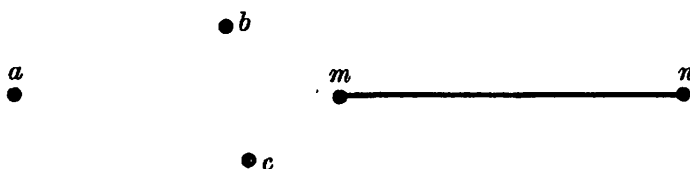
8. Déterminez le centre du cercle.



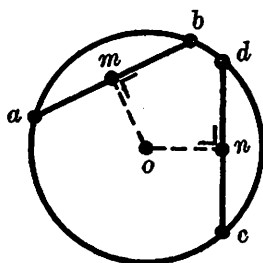
9. Construisez le triangle ayant A, B et C comme côtés.



10. Construisez les points également distants de b et c et situés à une distance $|mn|$ de a . Cette construction est-elle toujours possible ?

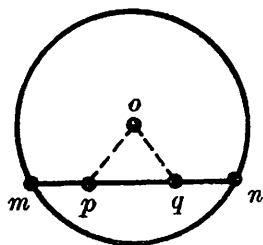


11. On donne : $|ab| = |cd|$
 $om \perp ab$
 $on \perp cd$
 Démontrez que $|om| = |on|$.

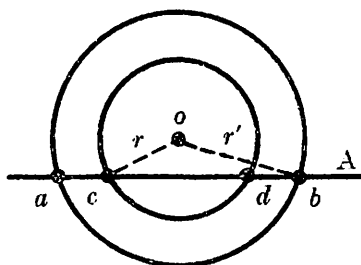


Énoncez la propriété. Quelle est la propriété réciproque ?
 Démontrez celle-ci.

12. On donne : $|pm| = |qn|$
 Démontrez que $|op| = |oq|$

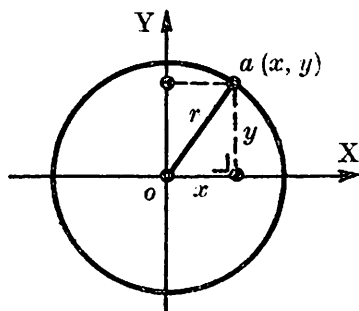


13. Deux cercles ayant le même centre sont dits *concentriques*.
 On donne : $C(o, r)$ et $C'(o, r')$ cercles concentriques.
 A sécante.



Démontrez que $|ac| = |db|$.

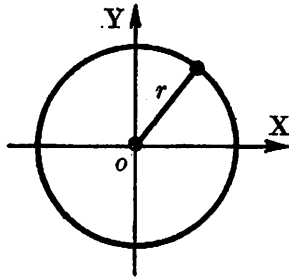
14. Entre la coordonnée (x, y) de a et le rayon r existe une relation, appelée équation du cercle.
 Ecrivez cette relation.



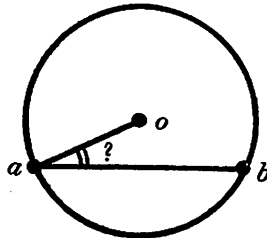
Application :

$a(3, -4) \in C(o, r)$. Quelle est la valeur de r ?

15. Les points $a(x, 5)$ et $b(-7, y)$ se trouvent sur le cercle $C(o, r)$ d'équation $x^2 + y^2 = 61$. Déterminez x et y .
16. Le cercle $C(o, r)$ a pour équation $x^2 + y^2 = 100$.
Vérifiez si les points suivants appartiennent au cercle :
- $a(7, -4)$ $b(-9, 8)$ $c(-9, 3)$
 $d(-8, -6)$ $e(-6, -8)$ $f(2\sqrt{7}, 6\sqrt{2})$



17. Dans un cercle de rayon égal à 13 cm, on trace une corde de 10 cm. Quelle est la distance de la corde au centre o ?
18. Une corde d'un cercle a une longueur de 32 cm et est située à 12 cm du centre o . Quel est le rayon ?
19. Dans un cercle de rayon égal à 43 cm, une corde est située à 27 cm du centre o . Calculez la corde à moins de 0,01 cm près.
20. On donne : $\begin{cases} |oa| = 27 \text{ cm} \\ |ab| = 34 \text{ cm} \end{cases}$
On demande $|a|$.



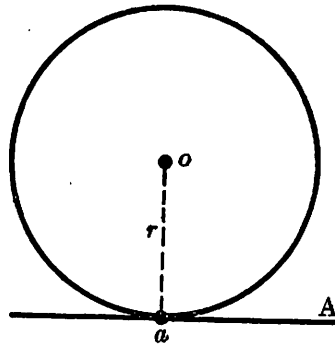
21. Un diamètre de 88 mm, passant par l'extrémité d'une corde, fait avec celle-ci un angle de $42^\circ 36' 24''$.
Quelle est la longueur de la corde et à quelle distance se trouve-t-elle du centre o ?

CHAPITRE XXXVI

TANGENTE, CERCLE ET ANGLES

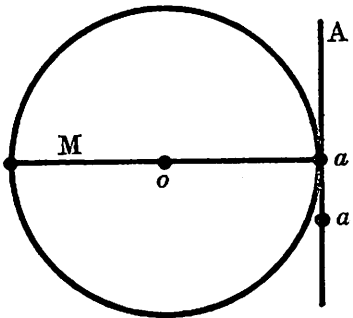
1. Tangente

Toute droite comprenant un et un seul point d'un cercle est tangente à ce cercle.



A est une tangente à $C(o, r) \Leftrightarrow A \cap C = \{a\}$
 a est le point de contact.

2. Théorème I



Une droite, perpendiculaire au rayon en un point d'un cercle, est tangente au cercle.

$$\left. \begin{array}{l} a \in C(o, r) \\ a \in A \\ A \perp oa \end{array} \right\} \Rightarrow A \cap C = \{a\}$$

Démonstration :

Deux cas peuvent se présenter : $A \cap C(o, r) = \{a, b\}$ et

$$A \cap C(o, r) = \{a\}$$

$$1^{\circ} A \cap C(o, r) = \{a, b\}$$

M est un axe de symétrie de $C(o, r)$

$$b \in C(o, r) \Rightarrow S_M(b) = b' \in C(o, r)$$

M est l'axe de symétrie de A

$$b \in A \Rightarrow S_M(b) = b' \in A$$

$$\Rightarrow b' \in A \cap C(o, r)$$

La droite A et le cercle $C(o, r)$ ont alors les trois points a, b et b' communs. Ce qui est impossible.

2^o Donc $A \cap C(o, r) = \{a\} \Rightarrow A$ est tangente à $C(o, r)$.

3. Théorème II

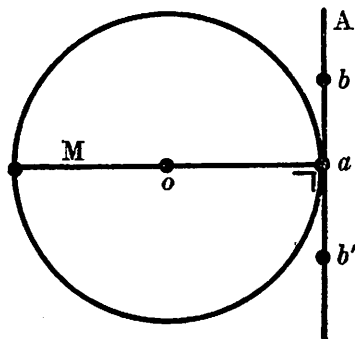
Une tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon au point de contact.

$$A \cap C(o, r) = \{a\} \Rightarrow A \perp oa$$

Démonstration :

Traçons le diamètre $M \perp A$.

Deux cas sont possibles :



$$1^{\circ} M \neq oa$$

M est un axe de symétrie de $C(o, r)$

$$a \in C(o, r) \Rightarrow S_M(a) = a' \in C(o, r)$$

M est l'axe de symétrie de A

$$a \in A \Rightarrow S_M(a) = a' \in A$$

$$\Rightarrow a' \in A \cap C(o, r)$$

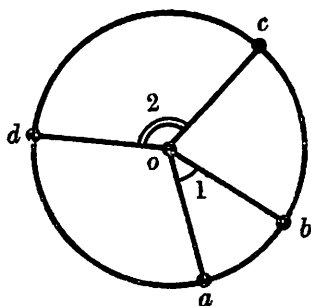
A et $C(o, r)$ ont alors les deux points a et a' communs.

Ce qui est en contradiction avec les données.

2^o Donc : $M = oa$ ou $oa \perp A \Rightarrow A \perp oa$.

4. Angle au centre

Un angle qui a son sommet au centre d'un cercle est appelé angle au centre.



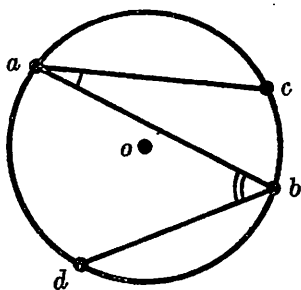
A chaque angle au centre correspond un arc. On dit que l'angle au centre *intercepte cet arc*.

δ_1 intercepte l'arc $[\widehat{ab}]$, δ_2 intercepte l'arc $[\widehat{cd}]$.

5. Angle inscrit

Un angle formé par deux cordes qui se coupent sur le cercle est appelé angle inscrit au cercle.

a intercepte l'arc $[\widehat{bc}]$, b intercepte l'arc $[\widehat{ad}]$.



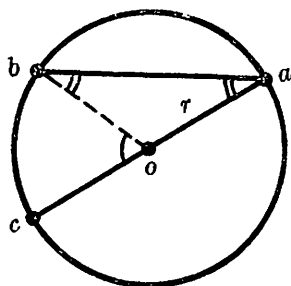
6. Théorème III

Un angle inscrit vaut la moitié de l'angle au centre interceptant le même arc.

$$\left. \begin{array}{l} \text{angle inscrit } \hat{a} \text{ intercepte l'arc } [\widehat{bc}] \\ \text{angle au centre } \delta \text{ intercepte l'arc } [\widehat{bc}] \end{array} \right\} \Rightarrow |\hat{a}| = \frac{1}{2} |\delta|$$

Démonstration :

1. *o se situe sur un côté de l'angle inscrit $\hat{a}$.*



Dans un triangle, un angle extérieur est égal à la somme des deux angles intérieurs non adjacents.

$$|\hat{a}| + |\hat{b}| = |\delta|$$

$$\text{Mais } |\hat{a}| = |\hat{b}| \text{ car } |oa| = |ob| = r$$

$$\text{donc } 2|\hat{a}| = |\delta|$$

$$\text{ou } |\hat{a}| = \frac{1}{2} |\delta|$$

2. *o se situe à l'intérieur de l'angle inscrit $\hat{a}$.*

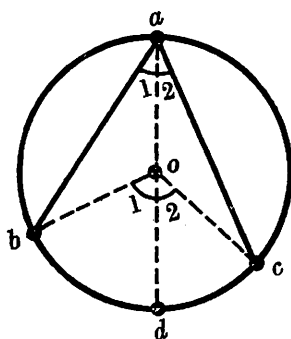
Traçons le diamètre $[ad]$.

En appliquant le cas précédent, on trouve :

$$|\hat{a}_1| = \frac{1}{2} |\delta_1|$$

$$+ |\hat{a}_2| = \frac{1}{2} |\delta_2|$$

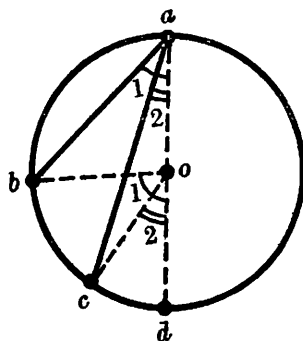
$$|\hat{a}| = \frac{1}{2} |\delta|$$



3. *o se situe à l'extérieur de l'angle inscrit $\hat{a}$.*

Traçons le diamètre $[ad]$.

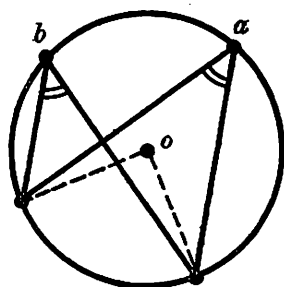
En appliquant le premier cas, on trouve :



$$\begin{array}{rcl}
 |\hat{a}_1| & = & \frac{1}{2} |\delta_1| \\
 - \quad |\hat{a}_2| & = & \frac{1}{2} |\delta_2| \\
 \hline
 |\hat{a}| & = & \frac{1}{2} |\delta|
 \end{array}$$

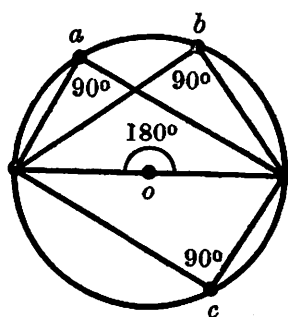
7. Conséquences

1. Tous les angles inscrits interceptant un même arc sont égaux.



$$|\hat{a}| = |\hat{b}| = \dots = \frac{1}{2} |\hat{\theta}|$$

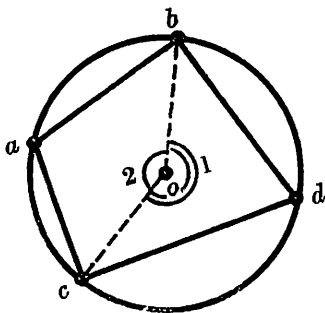
2. Tout angle inscrit interceptant un demi-cercle est un angle droit.



$$|\hat{\theta}| = 180^\circ$$

$$|\hat{a}| = |\hat{b}| = |\hat{c}| = \dots = \frac{1}{2} |\hat{\theta}| = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$$

3. Un quadrilatère est dit inscriptible à un cercle lorsque les quatre sommets peuvent être situés sur un même cercle.



Propriété :

$$|\hat{a}| = \frac{1}{2} |\delta_1|$$

$$|\hat{d}| = \frac{1}{2} |\delta_2|$$

$$|\hat{a}| + |\hat{d}| = \frac{1}{2} (|\delta_1| + |\delta_2|)$$

$$|\hat{a}| + |\hat{d}| = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$$

De la même manière, on trouve $|\hat{b}| + |\hat{c}| = 180^\circ$.

Dans un quadrilatère inscrit à un cercle, les angles opposés sont supplémentaires.

8. Théorème IV

Un angle formé par une tangente et une corde issue du point de contact, est égal à l'angle inscrit interceptant le même arc.

A tangente en a } $\Rightarrow |\hat{a}| = \text{un angle inscrit interceptant } [\widehat{ab}]$.
 [ab] corde

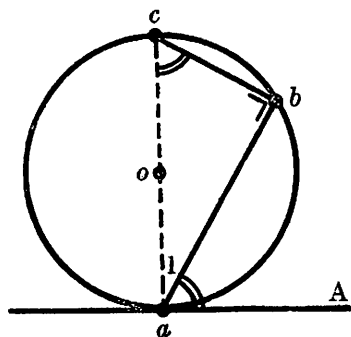
Démonstration :

Nous devons démontrer que $|\hat{a}| = |\hat{c}|$

Par a , tracer le diamètre $[ac]$ et joindre c à b .

$\hat{c}$ est alors un angle inscrit interceptant $[\widehat{ab}]$.

$\hat{b}$ intercepte un demi-cercle $\Rightarrow |\hat{b}| = 90^\circ$.



Dans le triangle rectangle, on a :

$$|\hat{c}| + |\hat{a}_1| = 90^\circ \Rightarrow |\hat{c}| = 90^\circ - |\hat{a}_1|$$

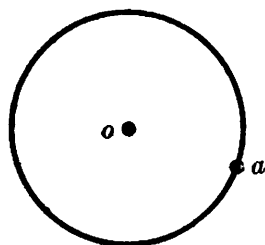
A est la tangente en a. Donc $A \perp oa$ tel que

$$\Rightarrow |\hat{a}| = |\hat{c}|$$

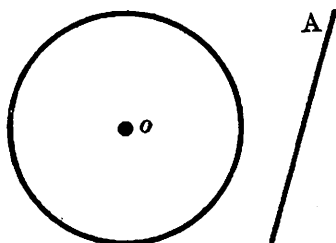
$$|\hat{a}| + |\hat{a}_1| = 90^\circ \Rightarrow |\hat{a}| = 90^\circ - |\hat{a}_1|$$

Exercices

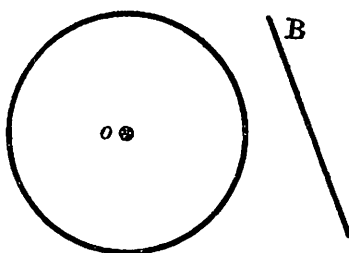
1. Construisez en a la tangente au cercle.



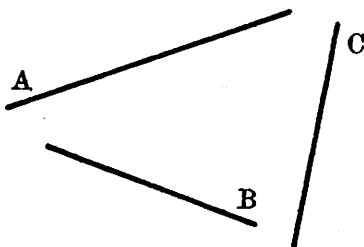
2. Construisez les tangentes au cercle parallèles à A.



3. Construisez les tangentes au cercle perpendiculaires à B.

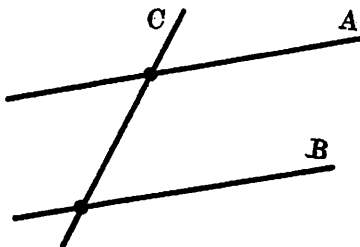


4. Construisez le cercle tangent à A et B et dont le centre est un point de C.



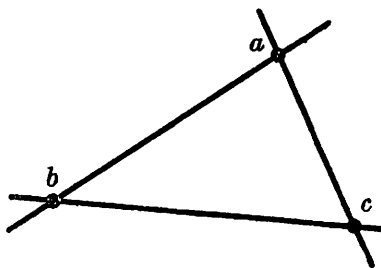
5. $A \parallel B \nparallel C$

Construisez le cercle tangent à A, B et C.



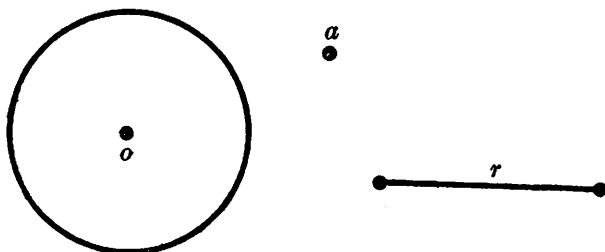
6. Le cercle tangent aux trois côtés d'un triangle est dit *cercle inscrit*.

Les cercles tangents à un côté et aux prolongements des deux autres côtés sont appelés *cercles exinscrits*.

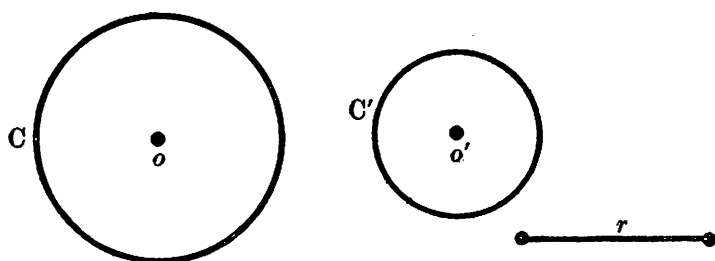


Construisez les cercles inscrits et exinscrits au triangle abc .

7. Par a , construisez un cercle de rayon r et tangent au cercle donné.

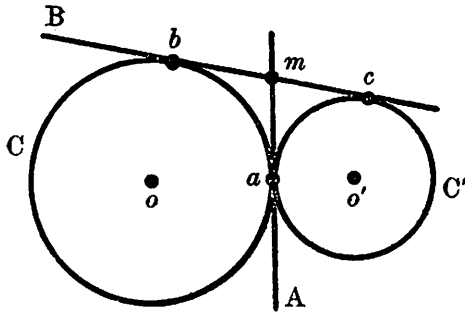


8. Construisez un cercle de rayon r et tangent aux cercles C et C' .

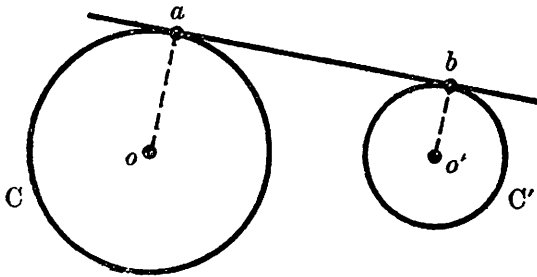


9. Démontrez que les tangentes à un cercle, tracées aux extrémités d'un diamètre, sont parallèles.

10. On donne : A tangente en a
 $mn \parallel A$

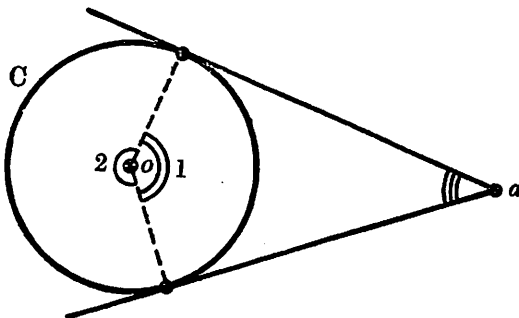


13. A est tangent à C et C' en a et b .



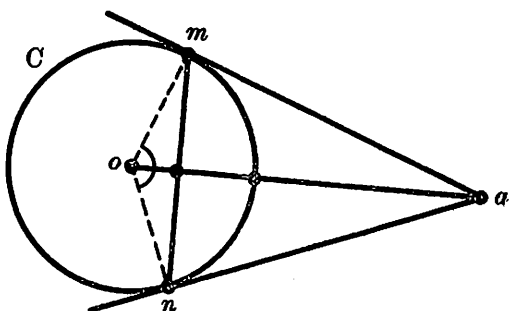
Démontrez que $oa \parallel o'b$.

14. Les deux tangentes au cercle C, issues de a , forment un angle $|\hat{a}| = 56^\circ$.
Calculez $|\delta_1|$ et $|\delta_2|$.



15. De a , mener les deux tangentes au cercle C .

$$|\delta| = 170^\circ$$

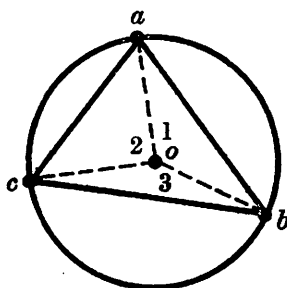


Calculez les angles des triangles mon , oma et man .

16. Dans un cercle C , construisez des angles inscrits de 45° , $22^\circ 30'$, 30° , 15° .

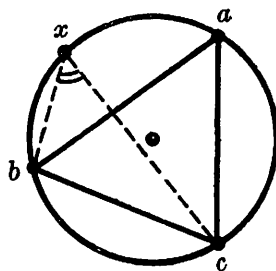
17. On donne : $|\hat{a}| = 74^\circ$

$$|\hat{b}| = 46^\circ$$



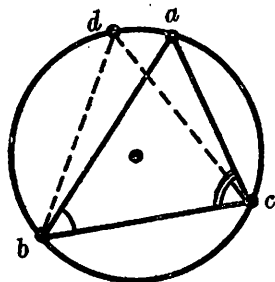
On demande : $|\delta_1|$, $|\delta_2|$, $|\delta_3|$

18. abc est un triangle équilatéral.
Quelle est la valeur de $|\hat{x}|$?



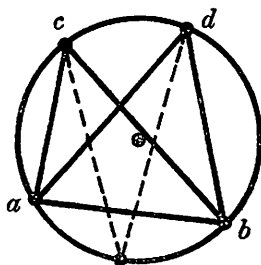
19. Dans le triangle abc , $|\hat{b}| = 40^\circ$ et $|\hat{c}| = 75^\circ$.

Calculez les angles du triangle dbc si $|db| = |dc|$.

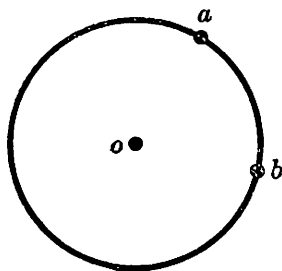


20. $\hat{c}$ et $\hat{d}$ sont des angles inscrits interceptant l'arc $[\widehat{ab}]$.

Démontrez que leurs bissectrices se coupent au milieu de l'arc $[\widehat{ab}]$.



21. Construisez $|\hat{abc}| = 90^\circ$.

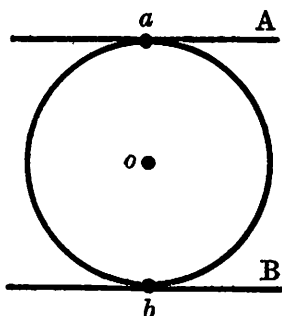


22. Construisez un angle droit tel que son sommet se situe sur A et les côtés passent par a et b.



23. A et B sont tangents au cercle C en a et b.
A // B.

Démontrez que tout angle, dont le sommet se trouve sur le cercle et dont les côtés passent par a et b, est un angle droit.



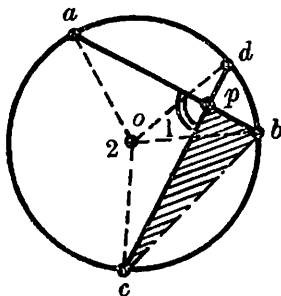
24. Construisez un triangle rectangle d'hypoténuse [ab].
Combien de solutions trouvez-vous?



25. Démontrez que dans un triangle rectangle, la médiane issue du sommet de l'angle droit et limitée à l'hypoténuse, égale la moitié de celle-ci.
26. Un angle formé par deux sécantes se coupant à l'intérieur d'un cercle est appelé *angle intérieur*.

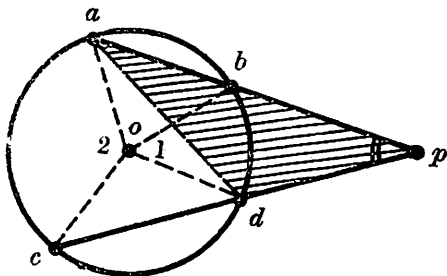
Démontrez que $|\hat{p}| = \frac{|\hat{o}_1| + |\hat{o}_2|}{2}$

Énoncez la propriété.



27. Un angle formé par deux sécantes se coupant à l'extérieur d'un cercle est appelé *angle extérieur*.

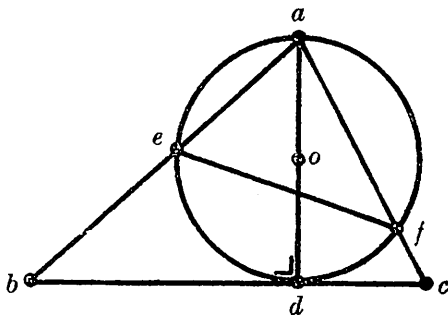
Démontrez que $|\hat{p}| = \frac{|\hat{o}_2| - |\hat{o}_1|}{2}$



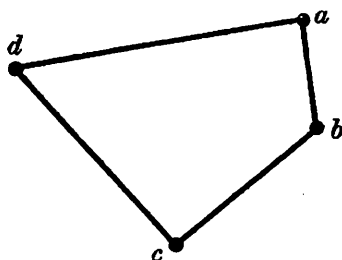
Énoncez la propriété.

28. Avec la hauteur $[ad]$ du triangle abc comme diamètre, on décrit un cercle coupant $[ab]$ et $[ac]$ respectivement en e et f .

Démontrez que les angles des triangles abc et $ae f$ sont égaux chacun à chacun.



29. Vérifiez de deux manières différentes que le quadrilatère est inscriptible.

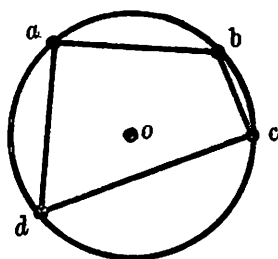


30. Un parallélogramme inscriptible à un cercle est un rectangle. Démontrez.

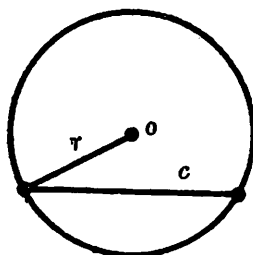
31. Un trapèze inscriptible à un cercle est isocèle. Démontrez.

32. Dans un quadrilatère inscriptible, on a $\frac{|a|}{4} = \frac{|b|}{5} = \frac{|c|}{8}$.

Calculez les angles du quadrilatère.



33. On donne : $r = 5$ cm
 $c = 8$ cm.



- On demande :
1. Calculez l'arc correspondant à la corde c .
 2. A quelle distance se trouve la corde c du centre o ?
 3. Quelle est la flèche du plus petit arc c ?

34. A un angle au centre de 106° correspond une corde située à 3,2 cm du centre.

Calculez le rayon du cercle.

35. L'angle au sommet d'un triangle isocèle mesure 52° et la base égale 42 mm.

Calculez le rayon du cercle circonscrit.

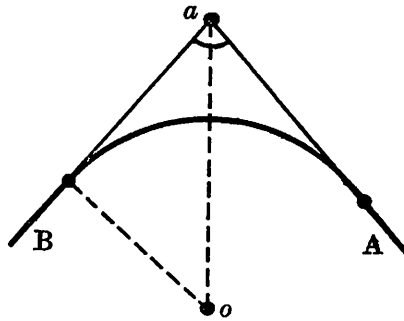
36. Un point a est situé à 70 mm du centre d'un cercle.

Les tangentes au cercle issues de a forment un angle de $15^\circ 10' 36''$.

Calculez le rayon du cercle.

37. Deux droites A et B se coupant sous un angle de 83° , doivent être jointes par un arc dont les points de contact sont situés à 45 mm du point d'intersection a des droites A et B.

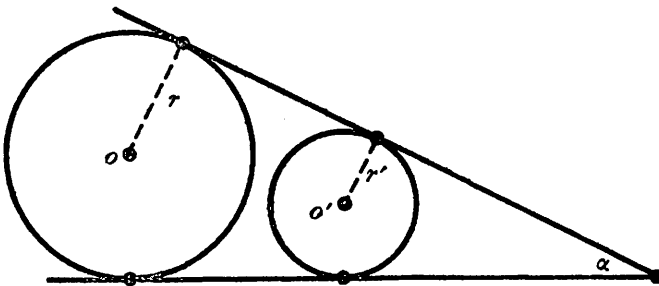
Calculez $|oa|$ et le rayon de l'arc.



38. $x = 36^\circ$

$$r = 17 \text{ mm}$$

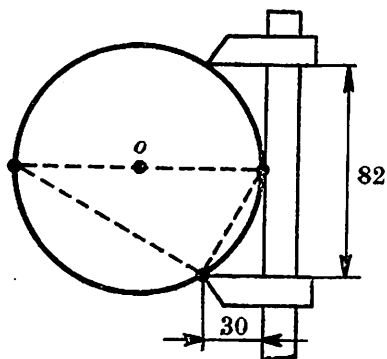
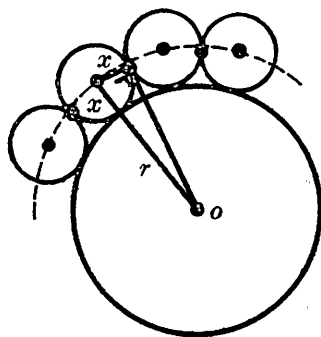
$$r' = 9 \text{ mm}$$



Calculez $|oo'|$ et $|ab|$.

39. Un roulement à billes est composé de 25 billes.

Sachant que le diamètre de l'axe mesure 7 cm, quel est le diamètre des billes ?

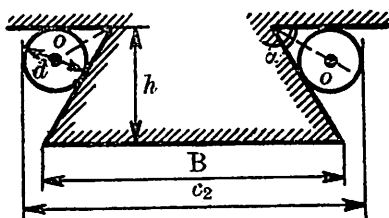
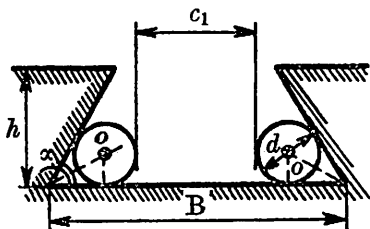


40. Le diamètre d'un axe n'étant pas mesurable à l'aide d'un vernier, déterminez-le au moyen des données de la figure.

41. Démontrez dans les assemblages en queue d'aronde suivants que :

$$c_1 = B - d \left(1 + \cotg \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$c_2 = B - 2 h \cotg \alpha + d \left(1 + \cotg \frac{\alpha}{2} \right)$$



Calculez c_1 et c_2 à moins de 0,001 près, sachant que :

$$B = 60 \text{ mm}$$

$$h = 20 \text{ mm}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

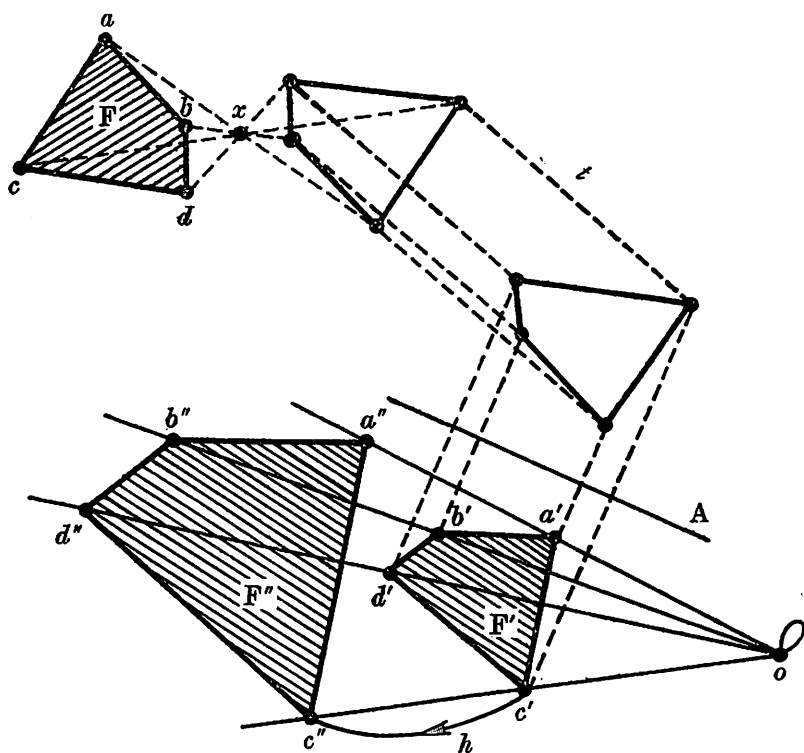
$$d = 12 \text{ mm.}$$

CHAPITRE XXXVII

SIMILITUDE

1. Notion

Considérons l'isométrie $S_A \circ t \circ S_x$ appliquant F sur F' et l'homothétie $h(o, 2)$ appliquant F' sur F'' .



F'' est l'image de F par la composée d'une isométrie $S_A \circ t \circ S_x$ et une homothétie $h(o, 2)$.

Cette composée $h(o, 2) \circ S_A \circ t \circ S_x$ est appelée similitude.

F et F'' sont semblables, soit $F \sim F''$.

Toute composée d'isométries et d'homothéties est une similitude.

2. Etude approfondie

$$1. i = h(o, 1) \in H_o^0$$

$$S_A \circ t \circ S_x \in I$$

$$S_A \circ t \circ S_x = S_A \circ t \circ S_x \circ i = S_A \circ t \circ S_x \circ h(o, 1)$$

Toute isométrie est une similitude.

$$2. i = S_A \circ S_A \in I$$

$$h(o, r) \in H_o^0$$

$$h(o, r) = h(o, r) \circ i = h(o, r) \circ S_A \circ S_A$$

Toute homothétie est une similitude.

$$3. i \text{ est une isométrie } (S_A \circ S_A) \text{ et une homothétie } (h(o, 1)).$$

La transformation identique i est une similitude.

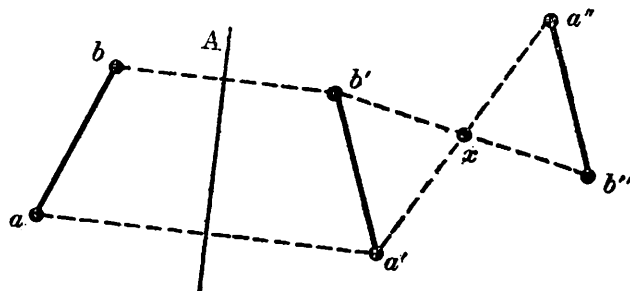
$$4. \text{ Toute isométrie } \in I \text{ est une permutation de } \Pi \text{ et toute homothétie } \in H_o^0 \text{ est une permutation de } \Pi. \text{ La composée de permutations est une nouvelle permutation.}$$

Toute similitude est une permutation de Π .

3. Rapport de similitude

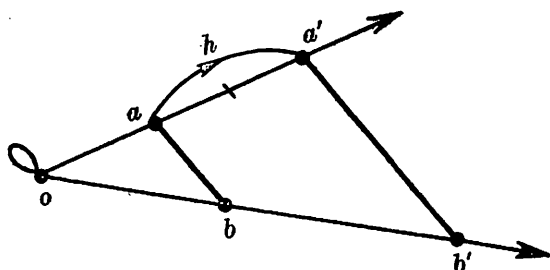
$$1. \text{ L'image d'un segment } [ab] \text{ par une isométrie est un segment égal } [a'b'].$$

$$|ab| = |a'b'| = |a''b''| = \dots$$



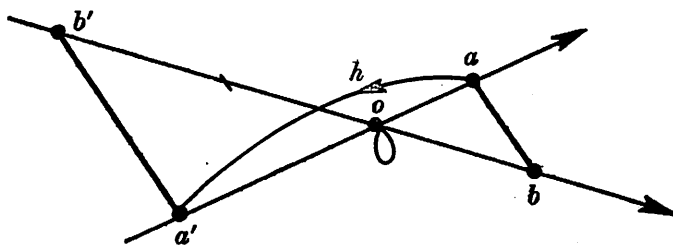
2. Une homothétie peut modifier la longueur de segments.

Par $h(o, 3)$ un segment est multiplié par 3.



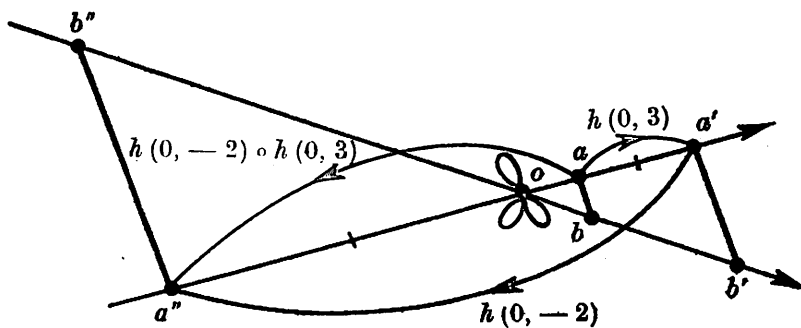
$$|a'b'| = 3 |ab|$$

Par $h(o, -2)$ un segment est multiplié par $|-2| = 2$.



$$|a'b'| = |-2| \cdot |ab| = 2 |ab|$$

Par $h(o, -2) \circ h(o, 3)$ un segment est multiplié par $|3| \cdot |-2| = 3 \cdot 2 = 6$.



$$|a''b''| = 6 |ab|$$

Le produit des valeurs absolues des rapports des homothéties figurant dans une similitude, est appelé rapport de similitude k .

Remarques :

1. Toute similitude composée uniquement d'isométries a un rapport de similitude $k = 1$.
Dans ce cas, les figures sont congruentes.
Des figures congruentes sont toujours semblables.
2. Si, dans une similitude, se présente une seule homothétie $h(o, r) \in H_o^0$, le rapport $k = r$.

4. Figures semblables

Considérons la similitude $s = h(o, 2) \circ t \circ S_x \circ h(o, 3)$.

$$k = 2 \cdot 3 = 6$$

$$a' b' c' d' \sim abcd$$

$$\text{Donc } |a'b'| = 6 |ab| \Rightarrow \frac{|a'b'|}{|ab|} = 6$$

$$|b'd'| = 6 |bd| \Rightarrow \frac{|b'd'|}{|bd|} = 6$$

$$|d'c'| = 6 |dc| \Rightarrow \frac{|d'c'|}{|dc|} = 6$$

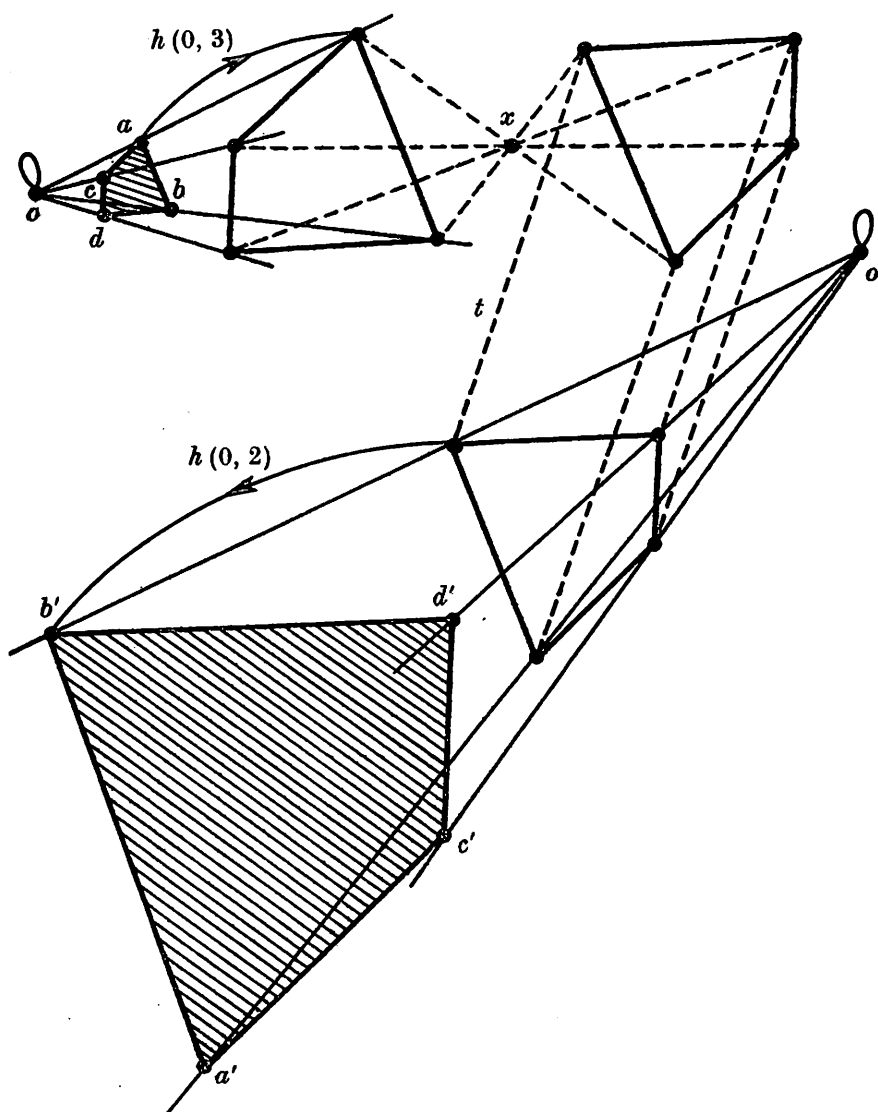
$$|c'a'| = 6 |ca| \Rightarrow \frac{|c'a'|}{|ca|} = 6$$

$$\text{ou } \frac{|a'b'|}{|ab|} = \frac{|b'd'|}{|bd|} = \frac{|d'c'|}{|dc|} = \frac{|c'a'|}{|ca|} = 6$$

La valeur des angles n'est pas modifiée par une similitude. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} |\hat{a}| &= |\hat{a}'| \\ |\hat{b}| &= |\hat{b}'| \\ |\hat{c}| &= |\hat{c}'| \\ |\hat{d}| &= |\hat{d}'| \end{aligned}$$

Deux polygones semblables ont leurs angles égaux chacun à chacun et les côtés homologues proportionnels. *Et réciproquement.*



5. Le groupe des similitudes

L'ensemble de toutes les similitudes sera représenté par $\mathcal{S}$.

Examinons la structure $\mathcal{S}, o$.

- $$1. \left. \begin{array}{l} s_1 \in \mathcal{S} \Rightarrow s_1 \text{ est une composée} \\ \text{d'isométries et d'homothéties} \\ s_2 \in \mathcal{S} \Rightarrow s_2 \text{ est une composée} \\ \text{d'isométries et d'homothéties} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} s_2 \circ s_1 \text{ est une composée} \\ \text{d'isométries et d'homothéties} \\ \Rightarrow s_2 \circ s_1 \in \mathcal{S}. \end{array} \right.$$

$$\forall s_1, s_2 \in \mathcal{S} : s_2 \circ s_1 \in \mathcal{S}$$

La composition de similitudes est interne et partout définie.

2. La composition de relations étant toujours associative, il en est de même pour la composition de similitudes.

$$\forall s_1, s_2, s_3 \in \mathcal{S} : s_3 \circ (s_2 \circ s_1) = (s_3 \circ s_2) \circ s_1 = s_3 \circ s_2 \circ s_1$$

3. La transformation identique i est l'élément neutre pour la composition de similitudes.

$$\forall s \in \mathcal{S}, \exists i \in \mathcal{S} : s \circ i = s = i \circ s$$

4. a) *La réciproque d'une similitude est une nouvelle similitude.*

$$s = h \circ i_1 \in \mathcal{S} \Rightarrow s^{-1} = (h \circ i_1)^{-1} = i_1^{-1} \circ h^{-1}$$

$$\left. \begin{array}{l} i_1^{-1} \in \mathcal{I} \\ h^{-1} \in H_0^0 \end{array} \right\} \Rightarrow i_1^{-1} \circ h^{-1} = s^{-1} \in \mathcal{S}$$

- b) *La composition d'une similitude s et de sa réciproque s^{-1} égale i .*

$$s = h \circ i_1 \Rightarrow s^{-1} = i_1^{-1} \circ h^{-1}$$

$$\begin{array}{l|l} s \circ s^{-1} = (h \circ i_1) \circ (i_1^{-1} \circ h^{-1}) & s^{-1} \circ s = (i_1^{-1} \circ h^{-1}) \circ (h \circ i_1) \\ = h \circ i_1 \circ i_1^{-1} \circ h^{-1} & = i_1^{-1} \circ h^{-1} \circ h \circ i_1 \\ = h \circ (i_1 \circ i_1^{-1}) \circ h^{-1} & = i_1^{-1} \circ (h^{-1} \circ h) \circ i_1 \\ = h \circ i \circ h^{-1} & = i_1^{-1} \circ i \circ i_1 \\ = h \circ h^{-1} & = i_1^{-1} \circ i_1 \\ = i & = i \end{array}$$

Tout élément $s \in \mathcal{S}$ a un élément symétrique $s^{-1} \in \mathcal{S}$ tel que leur composée égale l'élément neutre i .

$$\forall s \in \mathcal{S}, \exists s^{-1} \in \mathcal{S} : s \circ s^{-1} = i = s^{-1} \circ s$$

Conclusion :

$\mathcal{S}, \circ$ est un groupe

La composition d'isométries ($\in \mathcal{S}$) n'étant pas commutative, nous écrivons :

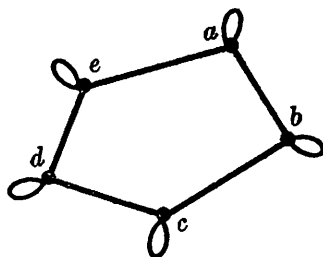
$\mathcal{S}, \circ$ est un groupe non commutatif

6. La relation « $\dots \sim \dots$ » dans l'ensemble des figures de Π

Cette relation est :

1. réflexive

Toute figure F peut être sa propre image par la transformation identique i , qui est une similitude.

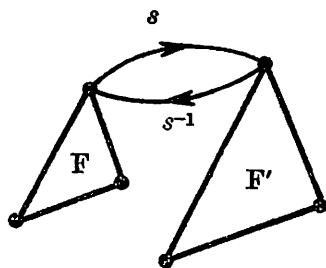


$$F \sim F$$

2. symétrique

F' est l'image de F par $s \in \mathcal{S} \Rightarrow$

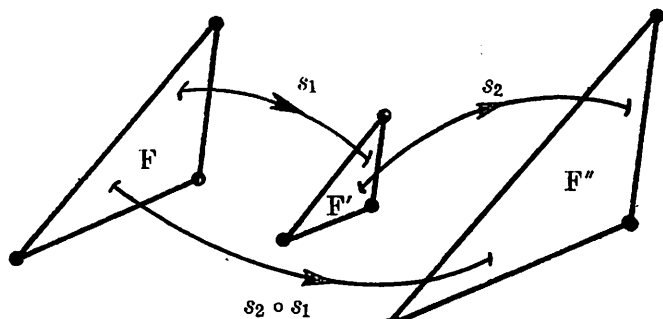
F est l'image de F' par $s^{-1} \in \mathcal{S}$



$$F \sim F' \Rightarrow F' \sim F$$

3. transitive

F' est l'image de F par $s_1 \in \mathcal{S}$
 F'' est l'image de F' par $s_2 \in \mathcal{S}$

$$\left. \begin{array}{l} F' \text{ est l'image de } F \text{ par } s_1 \in \mathcal{S} \\ F'' \text{ est l'image de } F' \text{ par } s_2 \in \mathcal{S} \end{array} \right\} \Rightarrow F \text{ s'applique sur } F'' \text{ par } s_2 \circ s_1 \in \mathcal{S}.$$


$$\left. \begin{array}{l} F \sim F' \\ F' \sim F'' \end{array} \right\} \Rightarrow F \sim F''$$

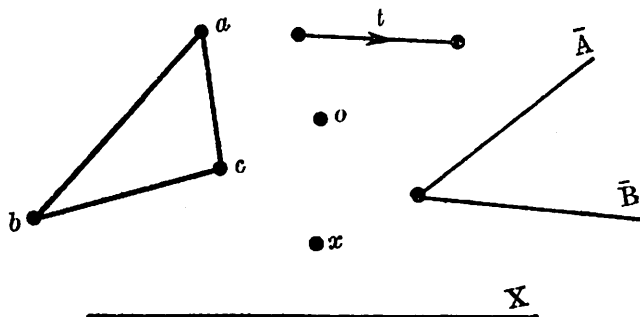
Conclusion :

« ... $\sim$... » est une relation d'équivalence

Chaque classe d'équivalence comporte des figures semblables entre elles.

Exercices

1. Dessinez l'image de abc par les similitudes :



$$s_1 = t \circ h(o, 2)$$

$$s_2 = h(o, -2) \circ S_x$$

$$s_3 = S_x \circ h(x, 3)$$

$$s_4 = \text{rot}(\bar{A}, \bar{B}) \circ h\left(o, \frac{1}{2}\right)$$

$$s_1 = S_x \circ t$$

$$s_1^{-1}$$

$$s_4^{-1}$$

2. Quel est le rapport de similitude de :

a) $s_1 = S_A \circ h(o, -3) \circ t \circ h\left(o, \frac{2}{3}\right)$?

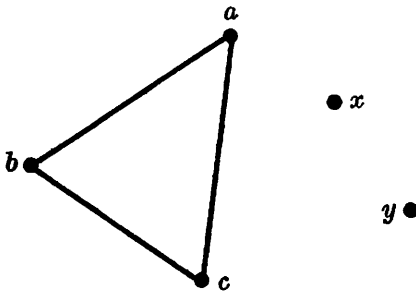
b) $s_2 = h\left(x, \frac{1}{2}\right) \circ h(y, 5) \circ h(z, -3)$?

c) $s_3 = h\left(o, \frac{3}{2}\right) \circ S_x \circ t \circ h\left(o, -\frac{1}{3}\right) \circ h(o, 5)$?

Et de s_1^{-1} , s_2^{-1} , s_3^{-1} ?

3. Dessinez $h_1(x, 2) \circ h_2(y, 2)$ et $h_2(y, 2) \circ h_1(x, 2)$ de abc .

Quelle est votre conclusion ?



4. a) Démontrez que l'image d'une droite par une similitude est une droite.

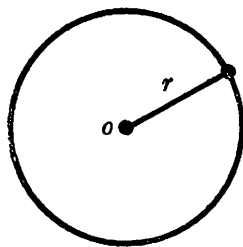
b) Démontrez que l'image d'un segment par une similitude est un segment.

5. Démontrez que :

- a) Les images de deux droites parallèles par une similitude sont deux droites parallèles.
- b) L'image d'un parallélogramme par une similitude est un parallélogramme.
- c) La similitude conserve l'équipollence.
- d) La similitude conserve le milieu.

6. Les segments $[ab]$ et $[cd]$ sont entre eux comme 2 est à 7. Appliquez l'homothétie $h(o, 5)$. Quel est le rapport des nouveaux segments ?

7. Appliquez l'homothétie $h(o, 2)$ au cercle $C(o, r)$. Quels sont le centre et le rayon du cercle obtenu ?

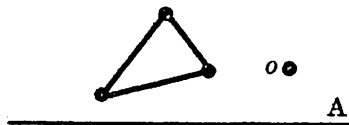
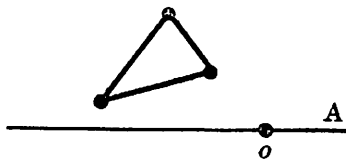


8. On donne : $s_1 = h(o, 3) \circ S_A$
 $s_2 = S_A \circ h(o, 3)$

A l'aide des figures, démontrez :

a) $o \in A \Rightarrow s_1 = s_2$

b) $o \notin A \Rightarrow s_1 \neq s_2$



9. Les côtés du triangle abc sont $|ab| = 15 \text{ cm}$, $|bc| = 20 \text{ cm}$ et $|ca| = 20 \text{ cm}$.

$a'b'c' \sim abc$ et le rapport de similitude égale $\frac{2}{5}$. Calculez les côtés de $a'b'c'$.

10. Le triangle abc avec $|ab| = 3$ m, $|bc| = 4$ m et $|ac| = 5$ m est appliqué sur $a'b'c'$ par la similitude

$$s = t \circ h(o, -2) \circ S_x \circ t \circ h\left(o, -\frac{3}{4}\right).$$

Calculez les côtés de $a'b'c'$.

11. Le triangle abc est appliqué sur $a'b'c'$ par

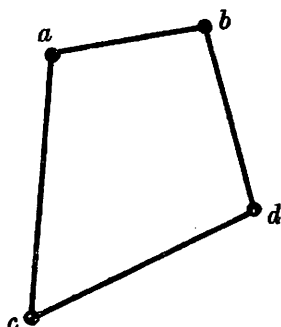
$$s = t \circ h\left(o, -\frac{2}{3}\right) \circ S_A \circ h\left(x, \frac{6}{5}\right)$$

$$|a'b'| = 12 \text{ cm}, \quad |b'c'| = 24 \text{ cm} \text{ et } |a'c'| = 16 \text{ cm}.$$

Calculez les côtés de abc .

12. On donne :
- $$\begin{aligned} |ab| &= 5 \text{ cm} \\ |bd| &= 7 \text{ cm} \\ |dc| &= 8 \text{ cm} \\ |ca| &= 9 \text{ cm} \\ abcd &\sim a'b'c'd' \\ |a'b'| &= 15 \text{ cm} \end{aligned}$$

On demande : $|b'd'|$, $|d'c'|$ et $|c'a'|$



13. Démontrez que les périmètres de deux triangles semblables sont entre eux comme deux côtés homologues.

14. On donne le triangle abc .

$$\begin{aligned} |ab| &= 5 \text{ m} \\ |bc| &= 11 \text{ m} \\ |ca| &= 7 \text{ m} \\ a'b'c' &\sim abc \\ |a'b'| + |b'c'| &= 32 \text{ m} \end{aligned}$$

On demande : $|a'b'|$, $|b'c'|$ et $|c'a'|$

15. On donne le triangle abc .

$$\begin{aligned} |ab| &= 5 \text{ m} \\ |bc| &= 11 \text{ m} \\ |ca| &= 7 \text{ m} \\ a'b'c' &\sim abc \\ |b'c'| - |a'c'| &= 16 \text{ m} \end{aligned}$$

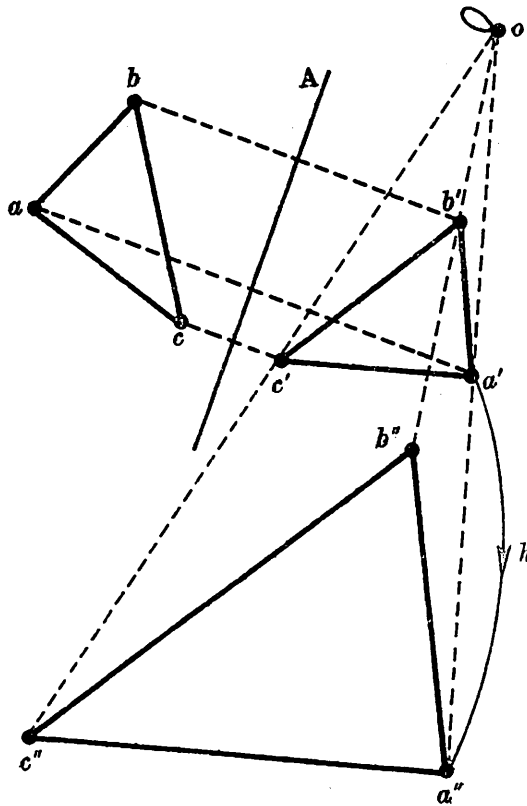
On demande : $|a'b'|$, $|b'c'|$ et $|c'a'|$

CHAPITRE XXXVIII

SIMILITUDE DE TRIANGLES

1. Triangles semblables

1. Deux triangles sont semblables si on peut les appliquer l'un sur l'autre par une similitude.



$$abc \sim a'b'c' \sim a''b''c''$$

2. Deux triangles semblables ont les angles égaux et les côtés homologues proportionnels. *Et réciproquement.*

$$abc \sim a'b'c' \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |a| = |a'|; |b| = |b'|; |c| = |c'| \\ \frac{|a'b'|}{|ab|} = \frac{|b'c'|}{|bc|} = \frac{|c'a'|}{|ca|} = k \end{array} \right.$$

Mais sachant que :

$$\left. \begin{array}{l} |a| = |a'| \\ |b| = |b'| \end{array} \right\} \Rightarrow |c| = |c'|$$

les cinq conditions peuvent se ramener à quatre.

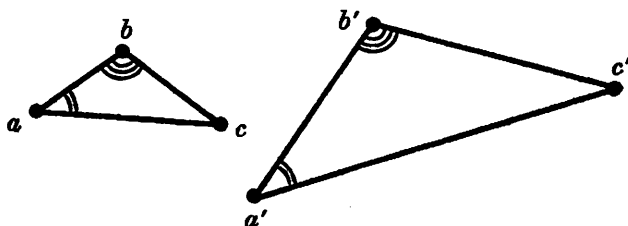
Dans les théorèmes suivants nous allons démontrer que deux de ces conditions, judicieusement choisies, suffisent pour conclure à la similitude de deux triangles.

2. Cas de similitude de triangles

Théorème I

Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun.

$$\left. \begin{array}{l} |a| = |a'| \\ |b| = |b'| \end{array} \right\} \Rightarrow abc \sim a'b'c'$$



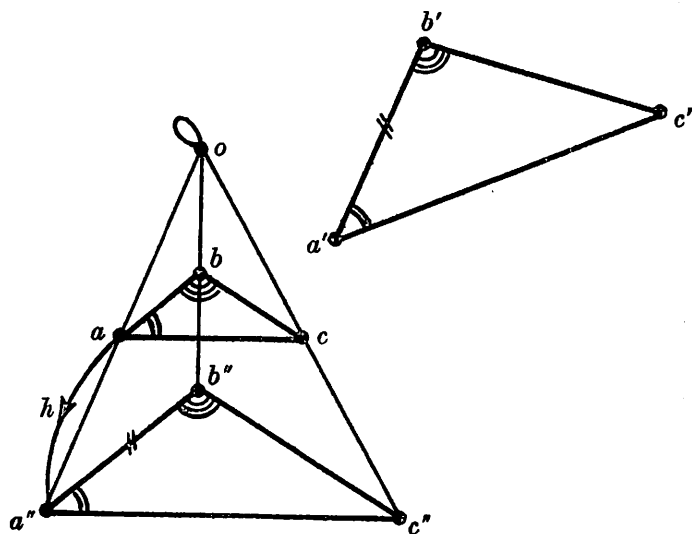
Démonstration :

Soit $\frac{|a'b'|}{|ab|} = k$. Appliquons à abc , l'homothétie $h(o, k)$ et on trouve $a''b''c''$ tel que

$$1. \quad |\hat{a}| = |\hat{a}''| \quad \text{mais} \quad |\hat{a}| = |\hat{a}'| \\ \Rightarrow |\hat{a}'| = |\hat{a}''|$$

$$2. \quad |\hat{b}| = |\hat{b}''| \quad \text{mais} \quad |\hat{b}| = |\hat{b}'| \\ \Rightarrow |\hat{b}'| = |\hat{b}''|$$

$$3. \quad |a''b''| = k \cdot |ab| \quad \text{mais} \quad |a'b'| = k \cdot |ab| \\ \Rightarrow |a'b'| = |a''b''|$$

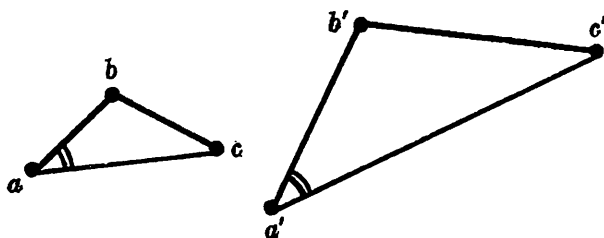


$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow a'b'c' \text{ iso } a''b''c'' \\ \Rightarrow a'b'c' \sim a''b''c'' \\ \text{mais } abc \sim a''b''c'' \end{array} \right\} \Rightarrow abc \sim a'b'c' \text{ (transitivité)}$$

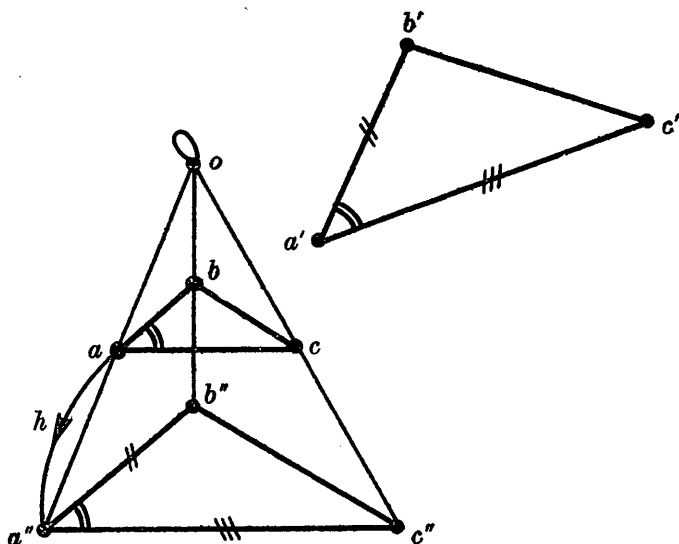
Théorème II

Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont un angle égal compris entre côtés proportionnels.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{|a'b'|}{|ab|} = \frac{|a'c'|}{|ac|} \\ |\hat{a}| = |\hat{a}'| \end{array} \right\} \Rightarrow abc \sim a'b'c'$$



Démonstration :



$$\frac{|a'b'|}{|ab|} = \frac{|a'c'|}{|ac|} = k \Rightarrow \begin{cases} |a'b'| = k \cdot |ab| \\ |a'c'| = k \cdot |ac| \end{cases}$$

Appliquons à abc , l'homothétie $h(o, k)$ et on trouve $a''b''c''$ tel que :

1. $|\hat{a}| = |\hat{a}''|$ mais $|\hat{a}| = |\hat{a}'|$
 $\Rightarrow |\hat{a}'| = |\hat{a}''|$
2. $|a''b''| = k \cdot |ab|$ mais $|a'b'| = k \cdot |ab|$
 $\Rightarrow |a'b'| = |a''b''|$
3. $|a''b''| = k \cdot |ac|$ mais $|a'c'| = k \cdot |ac|$
 $\Rightarrow |a'c'| = |a''c''|$

$$\Rightarrow a'b'c' \text{ iso } a''b''c''$$

$$\Rightarrow a'b'c' \sim a''b''c''$$

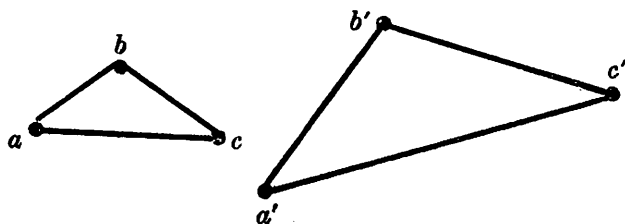
$$\text{mais } abc \sim a''b''c''$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow a'b'c' \sim a''b''c'' \\ \text{mais } abc \sim a''b''c'' \end{array} \right\} \Rightarrow abc \sim a'b'c'$$

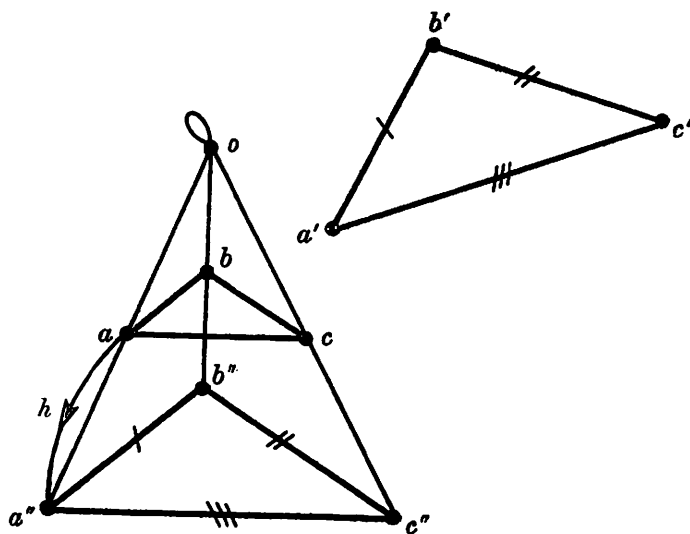
Théorème III

Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont les trois côtés proportionnels.

$$\frac{|a'b'|}{|ab|} = \frac{|b'c'|}{|bc|} = \frac{|c'a'|}{|ca|} \Rightarrow abc \sim a'b'c'$$



Démonstration:



$$\frac{|a'b'|}{|ab|} = \frac{|b'c'|}{|bc|} = \frac{|c'a'|}{|ca|} = k \Rightarrow \begin{cases} |a'b'| = k \cdot |ab| \\ |b'c'| = k \cdot |bc| \\ |c'a'| = k \cdot |ca| \end{cases}$$

Appliquons à abc , l'homothétie $h(o, k)$ et on trouve $a''b''c''$ tel que

$$1. |a''b''| = k \cdot |ab| \quad \text{mais} \quad |a'b'| = k \cdot |ab|$$

$$\Rightarrow |a'b'| = |a''b''|$$

$$2. |b''c''| = k \cdot |bc| \quad \text{mais} \quad |b'c'| = k \cdot |bc|$$

$$\Rightarrow |b'c'| = |b''c''|$$

$$3. |c''a''| = k \cdot |ca| \quad \text{mais} \quad |c'a'| = k \cdot |ca|$$

$$\Rightarrow |c'a'| = |c''a''|$$

$$\Rightarrow a'b'c' \text{ iso } a''b''c''$$

$$\Rightarrow a'b'c' \sim a''b''c''$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{mais } abc \sim a''b''c'' \end{array} \right\} \Rightarrow abc \sim a'b'c'$$

Exercices

- Deux triangles rectangles sont semblables :
 - quand ils ont un angle aigu égal;
 - quand ils ont les deux côtés de l'angle droit proportionnels;
 - quand ils ont un côté de l'angle droit et l'hypoténuse proportionnels.

Démontrez.

- Deux triangles isocèles sont semblables quand ils ont même angle au sommet ou deux angles à la base égaux. Démontrez.

- Des triangles équilatéraux sont toujours semblables. Démontrez.

- Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont leurs côtés parallèles chacun à chacun. Démontrez.

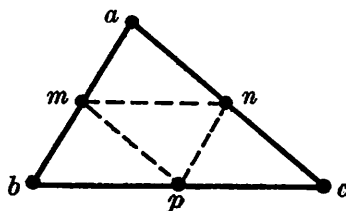
- Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun. Démontrez.

- On donne : m milieu de $[ab]$

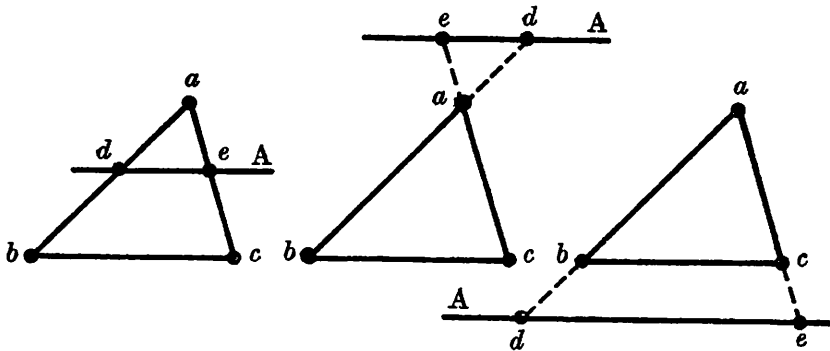
n milieu de $[ac]$

p milieu de $[bc]$

Démontrez que $abc \sim mnp$



7. Une droite parallèle à un côté d'un triangle détermine avec les deux autres côtés un triangle semblable au premier.
Démontrez.



8. Une droite, parallèle à un côté d'un triangle, divise les deux autres côtés en segments proportionnels entre eux et aux côtés.
Démontrez.

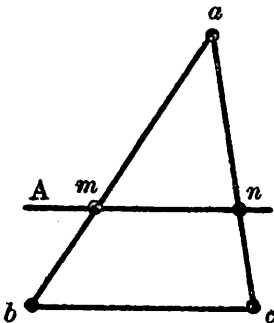
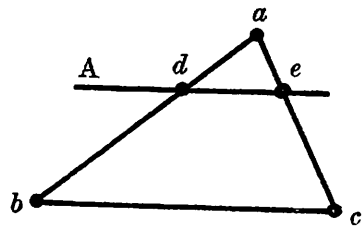
9. $A \parallel bc$

$$d \in ab \text{ tel que } \left| \frac{ad}{db} \right| = \frac{3}{5}$$

$$|ab| = 32 \text{ cm}$$

$$|ac| = 24 \text{ cm}$$

Calculez $|ae|$ et $|ec|$.



10. $A \parallel bc$

$$|am| = 15 \text{ cm}$$

$$|mb| = 6 \text{ cm}$$

$$|an| = 12 \text{ cm}$$

Calculez $|nc|$.

11. On donne : $ab \parallel cd$

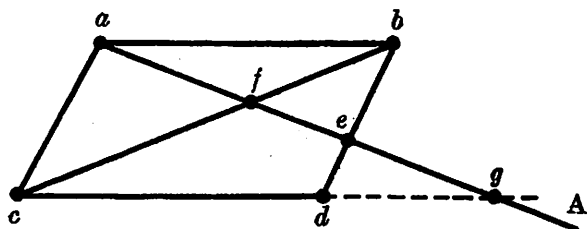
$$ac \parallel bd$$

A droite par a

$$A \cap bd = \{e\}$$

$$A \cap bc = \{f\}$$

$$A \cap cd = \{g\}$$



Démontrez que :

$$\frac{|fe|}{|af|} = \frac{|af|}{|fg|}.$$

12. On donne : $\hat{a}$

$$x \in B$$

$$x \in C \text{ et } C \perp A$$

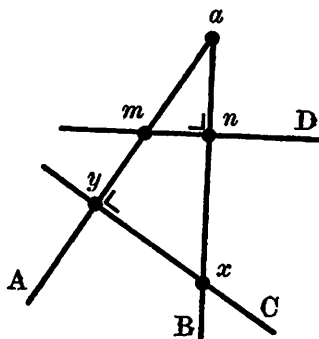
$$m \in A$$

$$m \in D \text{ et } D \perp B$$

$$C \cap A = \{y\}$$

$$D \cap B = \{n\}.$$

Démontrez que $ayx \sim amn$.



13. On donne : A, B et C trois droites par x

$$D \text{ droite telle que : } A \cap D = \{a\}$$

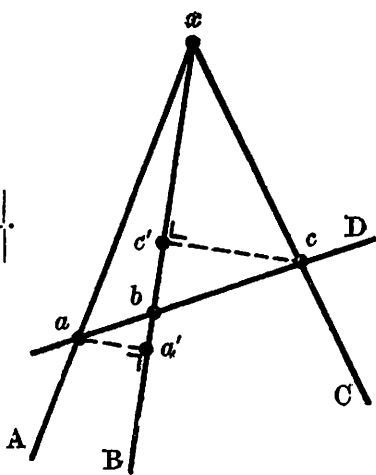
$$B \cap D = \{b\}$$

$$C \cap D = \{c\}.$$

Tracez : $aa' \perp B$

$$cc' \perp B.$$

Démontrez que $\frac{|aa'|}{|ab|} = \frac{|cc'|}{|bc|}.$



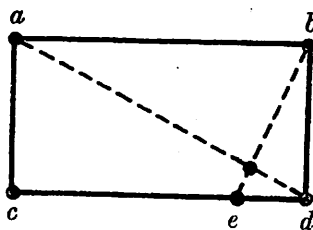
14. Dans tout triangle rectangle :

- 1) Chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypoténuse et sa projection sur l'hypoténuse.
- 2) La hauteur correspondant à l'hypoténuse est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

Démontrez.

15. On donne :

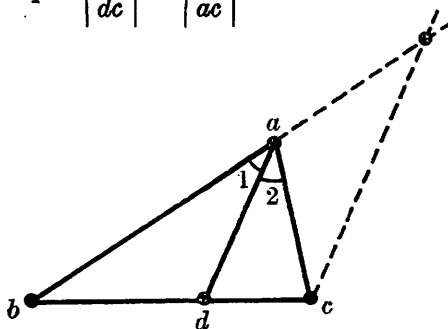
$$\begin{aligned} |a| &= |b| = |c| = |d| \\ |ab| &= 2 |bd| \\ |ed| &= \frac{1}{4} |cd|. \end{aligned}$$



Démontrez que $ad \perp be$.

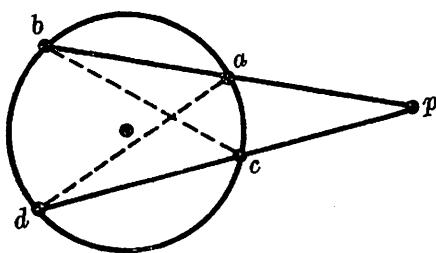
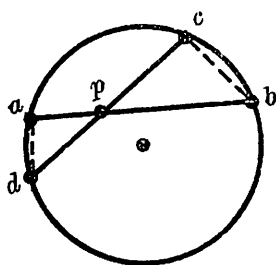
16. Dans tout triangle, la bissectrice d'un angle divise le côté opposé en deux segments proportionnels aux côtés adjacents.

Démontrez que $\frac{|bd|}{|dc|} = \frac{|ab|}{|ac|}$.

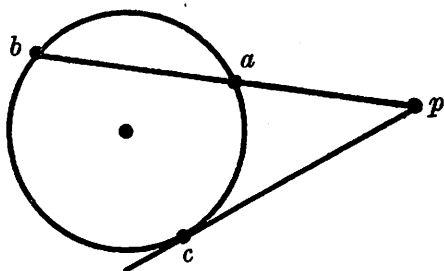


17. Si d'un point pris dans le plan d'un cercle, on mène deux sécantes à un cercle, le produit des distances de ce point aux deux points d'intersection de chaque sécante avec le cercle est constant.

Démontrez que $|ap| \cdot |pb| = |dp| \cdot |pc|$.



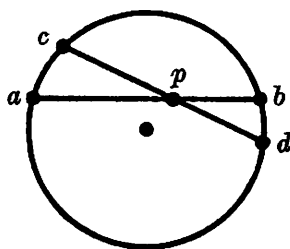
18. Si par un point extérieur à un cercle, on mène une tangente et une sécante, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure.



Démontrez que $|pc|^2 = |pa| \cdot |pb|$

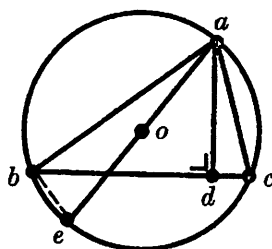
19. On donne : $|ab| = 54 \text{ cm}$
 $|cd| = 46 \text{ cm}$
 $|pb| = 12 \text{ cm}.$

On demande : $|pc|$ et $|dp|$.



20. On donne : $ad \perp bc$
 $[ae]$ diamètre.

Démontrez que $|ab| \cdot |ac| = |ae| \cdot |ad|$.



Énoncez la propriété.

21. Un phare se trouve à 18 m d'un mur. Un poteau de 3 m projette sur le mur une ombre de 9 m. Trouvez la distance du phare au poteau.

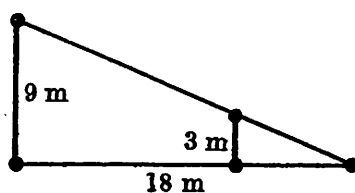


TABLE DES MATIÈRES

Chapitre I : Vecteurs

Vecteur	7
Le plan pointé Π_0	7
La droite pointée D_0	8
Projection parallèle et somme de vecteurs	9
Ordre sur D_0	9
Addition et ordre sur D_0	11
Exercices	12

Chapitre II : Homothétie

Homothétie $h(o, r)$	17
Cas particuliers	17
Image d'un vecteur par une homothétie	18
Projection parallèle et produit d'un vecteur par un nombre réel	20
Homothétie et somme de vecteurs	20
Composition d'homothéties	21
Exercices	23

Chapitre III : Addition et soustraction des nombres réels

Rappel	28
Addition des nombres réels	29
Soustraction des nombres réels	31
Application	32
Exercices	32

Chapitre IV : Multiplication et division des nombres réels

Multiplication des nombres réels	35
Emploi simultané de $+$ et $.$	38
Résumé	39
Le champ ordonné $R, +, ., \leq$	40
Application	40
Signe de $\frac{1}{r}$ ou r^{-1}	41
Division des nombres réels	42
Exercices	42

Chapitre V : Systèmes d'inéquations

Notion	46
Exemples	46
Exercices	48

Chapitre VI : Fractions réelles — Proportions

I. Fractions réelles	50
Notion	50
Propriétés des fractions réelles	50
Opérations sur les fractions réelles	52
II. Proportions	54
Notion	54
Propriétés des proportions	55
Quatrième proportionnelle	55
Proportion continue	55
Moyenne proportionnelle	56
Troisième proportionnelle	56
Exercices	56

Chapitre VII : Elévation aux puissances des nombres réels

Exposants naturels ($\in \mathbb{N}$)	61
Opérations sur les exposants naturels	62
Exposants entiers ($\in \mathbb{Z}$)	63
Opérations sur les exposants entiers	64
Application	65
Elévation aux puissances et ordre dans $\mathbb{R}^+$	66
Exercices	66

Chapitre VIII : Racines carrées

Notion	70
Exemples	70
Racines carrées positives des carrés parfaits jusque 100	70
Racine carrée positive d'un nombre entier	71
Racine carrée positive d'un nombre naturel	71
Preuve de l'extraction de la racine carrée	74
Exercices	75
Table	78

Chapitre IX : Propriétés des racines carrées dans $\mathbb{R}^+$

Opérations

Propriétés	83
Opérations sur les racines carrées dans $\mathbb{R}^+$	86
Exercices	91

Chapitre X : Racine carrée d'une fraction

Racine carrée d'un nombre décimal

Racine carrée d'une fraction	96
Racine carrée d'un nombre fractionnaire à moins d'une unité près	97
Racine carrée à moins de $\frac{1}{n}$ près	97

Racine carrée d'un nombre décimal	100
Racine carrée à moins de 0,1; 0,01; 0,001... près	101
Exercices	102
Chapitre XI : Valeurs approchées	
Valeurs approchées d'un nombre réel	105
Valeurs approchées d'une somme	106
Valeurs approchées d'une différence	107
Valeurs approchées d'un produit	107
Valeurs approchées d'un quotient	108
Exercices	109
Chapitre XII : L'espace vectoriel $R, \Pi_0, +$	
$\Pi_0, +$ est un groupe commutatif	112
Multiplication scalaire dans Π	112
L'espace vectoriel $R, \Pi_0, +$	115
Calcul dans l'espace vectoriel $R, \Pi_0, +$	115
Sous-vectoriel $R, D_0, +$	117
Exercices	118
Chapitre XIII : Bases et coordonnées	
Base du vectoriel $R, \Pi_0, +$	122
Coordonnée d'un vecteur	123
Coordonnée d'un point	124
Base orthogonale et orthonormée	125
Exercices	126
Chapitre XIV : L'espace vectoriel $R, R^3, +$	
Structure R^3 — Propriétés	131
Multiplication scalaire dans R^3 — Propriétés	134
Exercices	137
Chapitre XV : Isométries	
Symétrie orthogonale	140
Composition de symétries orthogonales	144
Isométrie	145
Figures isométriques ou congruentes	145
Exercices	146
Chapitre XVI : Déplacements	
Notion	153
Structures I^+, o	153
Construction	155
Figures directement congruentes	157
Exercices	157

Chapitre XVII : Retournements

Notion	161
Structure I^-, o	161
Construction	161
Symétrie glissée. Figures directement congruentes	163
Exercices	163

Chapitre XVIII : Rotations

Notion	167
Etude approfondie	168
Conséquences	169
Rotation réciproque	170
Structure Ro, o	170
Synthèse	173
Exercices	173

Chapitre XIX : Angles orientés

Angle orienté	180
Angles directement congruents	181
Valeur d'un angle orienté	182
Mesure d'un angle	182
Angle orienté et rotation	184
Le groupe des angles	185
Exercices	185

Chapitre XX : Produit scalaire de vecteurs

Produit scalaire de deux vecteurs $\vec{a}, \vec{b} \in D_o$	191
Produit scalaire de deux vecteurs $\vec{a}, \vec{b} \in \Pi_o$	192
Vecteurs perpendiculaires	193
Exercices	195

Chapitre XXI : Espace vectoriel euclidien

Propriétés du produit scalaire	200
L'espace vectoriel euclidien	204
Norme d'un vecteur	204
Exercices	205

Chapitre XXII : Théorème de Pythagore

Théorème	208
Réciproque	209
Application	210
Exercices	211

Chapitre XXIII : Goniométrie

Cercle goniométrique	215
Cosinus	217
Sinus	219
Relation entre $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$	220

Tangente d'un angle	220
Cotangente d'un angle	222
Relation entre $\operatorname{tg} \alpha$ et $\operatorname{cotg} \alpha$	222
Nombres goniométriques d'angles opposés	222
Nombres goniométriques d'angles complémentaires	223
Tables des nombres goniométriques	224
Exercices	225

Chapitre XXIV : Résolution des triangles rectangles

Notion	229
Relations dans un triangle rectangle	229
Résolution de triangles rectangles	232
Applications	236
Exercices	238

Chapitre XXV : Fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

Fonctions dans un ensemble A	245
Fonction dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels	245
Graphique cartésien d'une fonction	246
Graphiques empiriques	250
Exercices	251

Chapitre XXVI : Equations d'une droite

Equation vectorielle d'une droite	257
Equations paramétriques d'une droite	260
Equation cartésienne d'une droite	262
Equation cartésienne de droites particulières	264
Autre forme de l'équation cartésienne	266
Construction de la droite $rx + sy + t = 0$	267
Exercices	269

Chapitre XXVII : Monômes

Notion	275
Monômes semblables	275
Fonction de monôme	275
Opérations sur les monômes	276
Exercices	277

Chapitre XXVIII : Polynômes

Notion	281
Réduction - Polynômes ordonnés	281
Polynômes complets	281
Fonction de polynôme	282
Opérations sur les polynômes	282
Mise en évidence	285
Exercices	285

Chapitre XXIX : Identités remarquables

Identités remarquables	291
Exercices	292

Chapitre XXX : Division d'un polynôme par le binôme $x - a$

I. Méthode générale	298
Division exacte	298
La division ne s'effectue pas exactement	301
II. Méthode de Horner	302
Reste de la division	302
Caractère de divisibilité par $x - a$	302
Loi de formation du quotient	303
Exercices	307

Chapitre XXXI : Décomposition en facteurs

Notion	310
Mise en évidence des facteurs communs	310
Décomposition d'un binôme, différence de deux carrés	310
Décomposition d'un trinôme, carré parfait d'un binôme	311
Décomposition du trinôme $x^2 + (a + b)x + ab$	312
Décomposition d'un quadrinôme, cube parfait d'un binôme	312
Décomposition d'un polynôme, carré parfait d'un polynôme	313
Décomposition par groupements, par décomposition ou par addition et soustraction	314
Décomposition par division par $x - a$	315
Exercices	317

**Chapitre XXXII : Plus grand commun diviseur
Plus petit commun multiple**

P. g. c. d.	322
P. p. c. m.	322
Exercices	323

Chapitre XXXIII : Formes fractionnaires

Notion	324
Simplification	324
Réduction au même dénominateur	324
Opérations	326
Exercices	328

Chapitre XXXIV : Systèmes de deux équations à deux inconnues

Notion	336
Résolution par combinaison linéaire	337
Résolution par substitution	338
Résolution graphique	340

Problèmes à deux inconnues	341
Exercices	342

Chapitre XXXV : Le cercle

Cercle	347
Cercle par trois points	347
Symétrie	349
Exercices	351

Chapitre XXXVI : Tangente — Cercle et angles

Tangente — Théorèmes	356
Angle au centre	358
Angle inscrit — Théorèmes	358
Exercices	363

Chapitre XXXVII : Similitude

Notion	375
Etude approfondie	376
Rapport de similitude	376
Figures semblables	378
Le groupe des similitudes	379
La relation «... est semblable à ...»	381
Exercices	382

Chapitre XXXVIII : Similitude de triangles

Triangles semblables	386
Cas de similitude	387
Exercices	391

Table des matières	397
------------------------------	-----

1940

1940

1941

1942

1943

1944

1945

1946

1947

1948

1949

1950

1951

1952

1953

1954

1955

1956

1957

1958

1959

1960

1961

1962

1963

1964

1965

1966

1967

1968

1969

1970

1971

1972

1973

1974

1975

1976

1977

1978

1979

1980

1981

1982

1983

1984

1985

IMPRIMERIE GEORGE MICHIELS, S. A., 6, RUE DE LA PAIX, 4000 LIÈGE

OUVRAGES DE MATHÉMATIQUE

des EDITIONS L'ELAN, Liège

1. — **LA MATHÉMATIQUE DANS
L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE**
par G. BIELEN
en collaboration avec A. DEWELF et H. AMERICA
2. — **Id., TOME DU PROFESSEUR**
3. — **LA MATHÉMATIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT
TECHNIQUE SECONDAIRE SUPÉRIEUR**
par G. BIELEN, A. DEWELF et V. SCHODTS
4. — **MATHÉMATIQUE MODERNE
POUR L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE**
Collection DEGREG et JOUSTEN