

La Mathématique dans l'Enseignement Technique

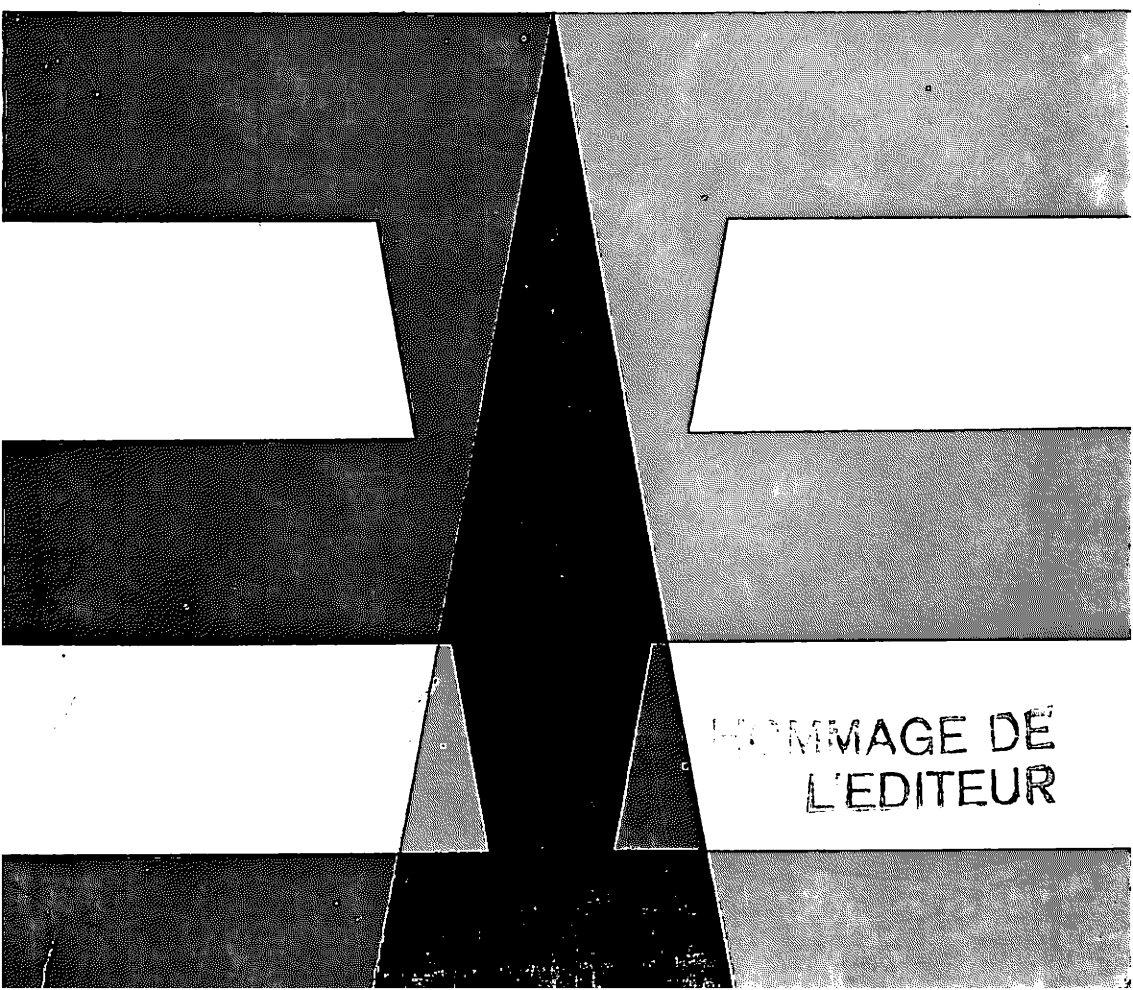
Tome II

Deuxième année

G. Bielen

A. Dewelf, H. América

Editions L'Elan, Liège



HOMMAGE DE
L'EDITEUR

Gilbert MAURER
23. am GEHR
HEIMDANGE (LUXBG)

LA MATHÉMATIQUE
DANS
L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE

LA MATHÉMATIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE

TOME II

G. BIELEN

AVEC LA COLLABORATION DE

A. DEWELF et H. AMÉRICA

DEUXIÈME ÉDITION



ÉDITIONS L'ÉLAN
6 RUE DE LA PAIX, LIÈGE

—
1974

AVANT-PROPOS

Le présent ouvrage contient la matière correspondant au programme de deuxième année des écoles techniques.

Il s'inspire des principes qui avaient été retenus lors de la composition du Tome I.

Les premiers chapitres ont été consacrés à la révision des notions essentielles sur les relations et leurs propriétés ; ceux-ci constitueront sans doute un précieux rappel à la disposition permanente des maîtres et des élèves.

Le grand nombre d'exercices proposés permettra au professeur d'établir un choix en fonction des caractéristiques propres à chaque classe. Les difficultés qu'ils présentent ont été spécialement étudiées en vue d'une adaptation parfaite au niveau des élèves de seconde année.

Nous tenons à remercier la maison d'éditions L'Élan du soin tout particulier apporté à l'impression et à la présentation de cet ouvrage.

En espérant, par la publication de ce manuel, servir la cause de l'enseignement technique, nous accueillerons favorablement toutes les remarques ou suggestions que nos collègues jugeraient bon de nous adresser ; nous en tiendrons compte lors d'une prochaine édition.

AVANT-PROPOS (à la 2^e édition)

Au moment où la deuxième édition de cet ouvrage est sur le point de sortir de presse, l'occasion nous est offerte de remercier nos collègues, professeurs du Technique, de la confiance qu'ils ont bien voulu nous accorder en adoptant ce manuel à l'intention de leurs élèves.

Nous avons apprécié les remarques très judicieuses qu'ils ont bien voulu nous adresser. Mais la loi du temps s'est imposée à nous ; seules les corrections dites « de forme » ont été apportées.

L'ouvrage continue donc à s'inspirer des principes qui avaient été retenus lors de la composition du tome I.

Les Auteurs.

CHAPITRE I

RELATIONS D'UN ENSEMBLE VERS UN ENSEMBLE

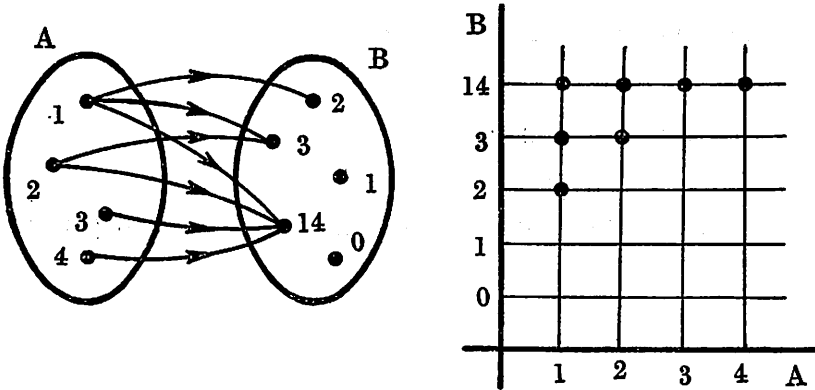
1. Relation $A \rightarrow B$

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{0, 1, 2, 3, 14\}$$

$$R_1 : A \rightarrow B \text{ « ... } < \text{ ... »} =$$

$$\{(1, 2), (1, 3), (1, 14), (2, 3), (2, 14), (3, 14), (4, 14)\}$$



Une relation est un ensemble de couples.

$$R : A \rightarrow B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ en } b \in B \text{ en } a R b\}$$

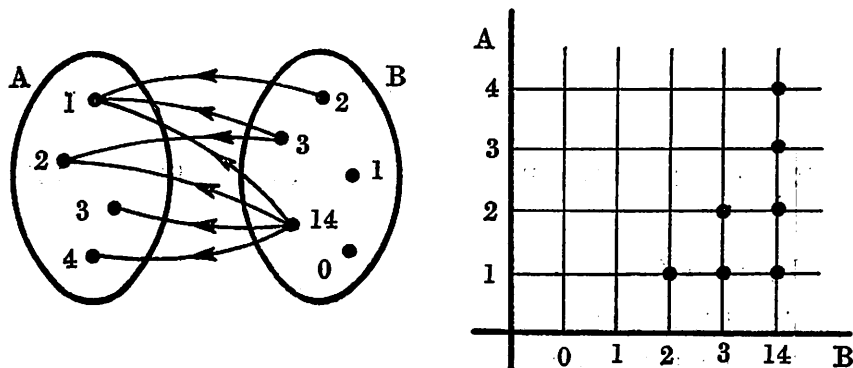
2. Relation réciproque

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{0, 1, 2, 3, 14\}$$

$$R_2 : B \rightarrow A \text{ « ... } > \text{ ... »} =$$

$$\{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (14, 1), (14, 2), (14, 3), (14, 4)\}$$



R_2 est la relation réciproque de R_1 , soit $R_2 = R_1^{-1}$

R_1 est la relation réciproque de R_2 , soit $R_1 = R_2^{-1}$

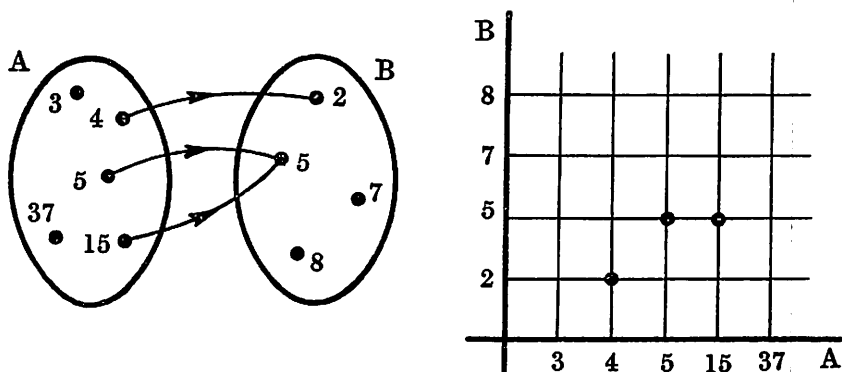
3. Relations particulières $A \rightarrow B$

1) Fonction

$$A = \{ 3, 4, 5, 15, 37 \}$$

$$B = \{ 2, 5, 7, 8 \}$$

$$R_3 : A \rightarrow B \text{ « ... est multiple de ... »} = \{ (4, 2), (5, 5), (15, 5) \}$$



De chaque élément de l'ensemble de départ A, part au plus une flèche (donc 1 ou pas du tout).

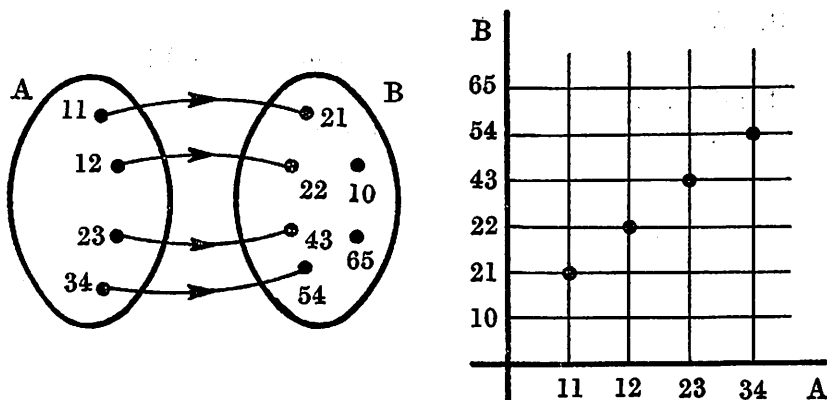
R_3 est une fonction de A vers B.

2) *Application*

$$A = \{ 11, 12, 23, 34 \}$$

$$B = \{ 10, 21, 22, 43, 54, 65 \}$$

$$R_4 : A \rightarrow B \text{ « ... se termine par le même chiffre que ... »} = \{(11, 21), (12, 22), (23, 43), (34, 54)\}$$



De chaque élément de l'ensemble de départ A , part une et une seule flèche.

R_4 est une application de A vers B .

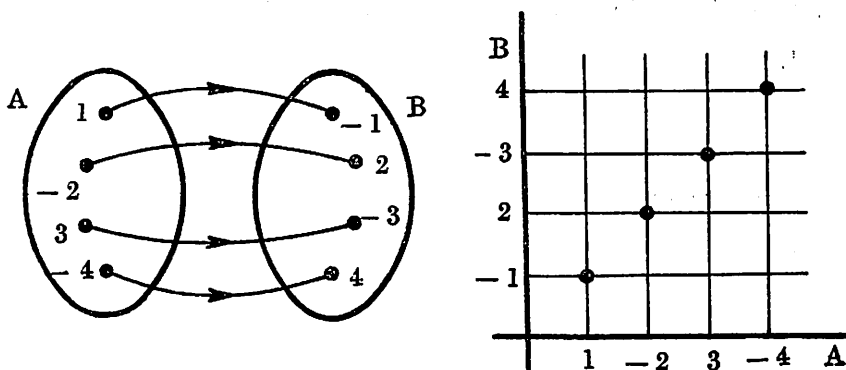
3) *Bijection*

$$A = \{ 1, -2, 3, -4 \}$$

$$B = \{ -1, 2, -3, 4 \}$$

$$R_5 : A \rightarrow B \text{ « ... est l'opposé de ... »} =$$

$$\{(1, -1), (-2, 2), (3, -3), (-4, 4)\}$$



De chaque élément de l'ensemble de départ A , part une et une seule flèche et chaque élément de l'ensemble d'arrivée est l'extrémité d'une et d'une seule flèche.

R_5 est une bijection de A dans B .

4. Composition de relations

$$A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

$$B = \{ 1, 2, 3, 14 \}$$

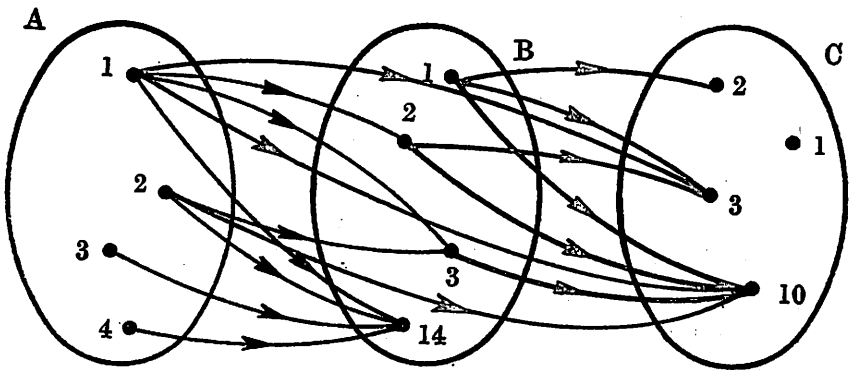
$$C = \{ 1, 2, 3, 10 \}$$

$$R_6 : A \rightarrow B \text{ „<”} =$$

$$\{ (1, 2), (1, 3), (1, 14), (2, 3), (2, 14), (3, 14), (4, 14) \}$$

$$R_7 : B \rightarrow C \text{ „<”} =$$

$$\{ (1, 2), (1, 3), (1, 10), (2, 3), (2, 10), (3, 10) \}$$



$$R_7 \circ R_6 : A \rightarrow C = \{ (1, 3), (1, 10), (2, 10) \}$$

$R_7 \circ R_6$ est la composée des relations R_6 et R_7

5. Propriétés de la composition de relations

1.

$$R_2 \circ R_1 \neq R_1 \circ R_2$$

La composition de deux relations n'est pas commutative.

2.

$$R_3 \circ (R_2 \circ R_1) = (R_3 \circ R_2) \circ R_1 = R_3 \circ R_2 \circ R_1$$

Nous pouvons déplacer arbitrairement les parenthèses ou même les supprimer.

La composition de deux relations est associative.

3. Réciproque de relations composées.

La relation réciproque de $R_7 \circ R_6$ est $(R_7 \circ R_6)^{-1}$

$$(R_7 \circ R_6)^{-1} = \{ (3, 1), (10, 1), (10, 2) \}$$

Examinons également

$$R_6^{-1} : B \rightarrow A \text{ « ... > ... »} =$$

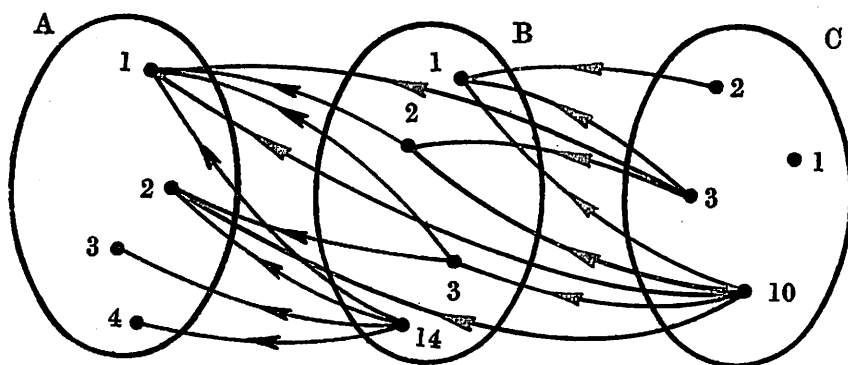
$$\{ (2, 1), (3, 1), (3, 2), (14, 1), (14, 2), (14, 3), (14, 4) \}$$

$$R_7^{-1} : C \rightarrow B \text{ « ... > ... »} =$$

$$\{ (2, 1), (3, 1), (10, 1), (3, 2), (10, 2), (10, 3) \}$$

et

$$R_6^{-1} \circ R_7^{-1} : C \rightarrow A = \{ (3, 1), (10, 1), (10, 2) \}$$



Donc :

$$(R_7 \circ R_6)^{-1} = R_6^{-1} \circ R_7^{-1}$$

La relation réciproque de la composée de deux relations est égale à la composée des relations réciproques des deux relations, prises dans l'ordre inverse.

6. Composition de fonctions, applications et bijections

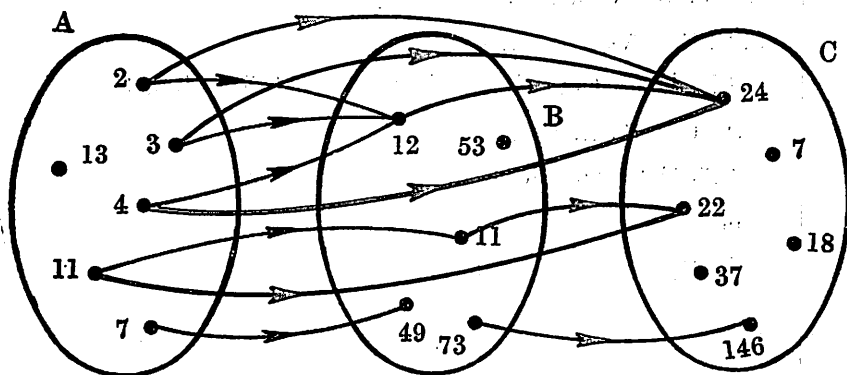
$$A = \{ 2, 3, 4, 7, 11, 13 \}$$

$$B = \{ 11, 12, 49, 53, 73 \}$$

$$C = \{ 7, 18, 22, 24, 37, 146 \}$$

$R_1 : A \rightarrow B$ « ... divise ... » =
 $\{(2, 12), (3, 12), (4, 12), (7, 49), (11, 11)\}$ est une fonction.

$R_2 : B \rightarrow C : x \rightarrow 2x$ =
 $\{(11, 22), (12, 24), (73, 146)\}$ est une fonction.



$R_2 \circ R_1 : A \rightarrow C = \{(2, 24), (3, 24), (4, 24), (11, 22)\}$ est une nouvelle fonction.

La composition d'applications et de bijections conduit à la même propriété.

La composée de deux fonctions est une fonction.
 La composée de deux applications est une application.
 La composée de deux bijections est une bijection.

7. Notations

1. Des fonctions sont représentées par $f, g, h, \dots$
2. $f : A \rightarrow B$ « ... a pour triple ... » s'écrit plus simplement
 $f : A \rightarrow B : x \rightarrow 3x$

Exemples :

$f : A \rightarrow B$ « ... est le triple de ... »

$$\Leftrightarrow f : A \rightarrow B : x \rightarrow \frac{x}{3}$$

$f : A \rightarrow B$ « ... est le double de ... »

$$\Leftrightarrow f : A \rightarrow B : x \rightarrow \frac{x}{2}$$

$$f : A \rightarrow B \text{ « ... est de 7 unités plus grand que ... »}$$

$$\Leftrightarrow f : A \rightarrow B : x \rightarrow x - 7$$

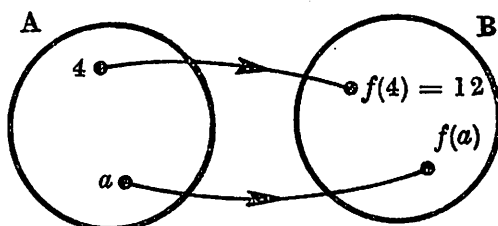
$$f : A \rightarrow B \text{ « ... est de 5 unités plus petit que ... »}$$

$$\Leftrightarrow f : A \rightarrow B : x \rightarrow x + 5$$

8. Image par une fonction

Exemple :

$$f : A \rightarrow B : x \rightarrow 3x$$



L'image de 4 par la fonction f est $f(4) = 12$,
en d'autres mots, 12 est la valeur de la fonction, pour $x = 4$.

D'une façon générale :

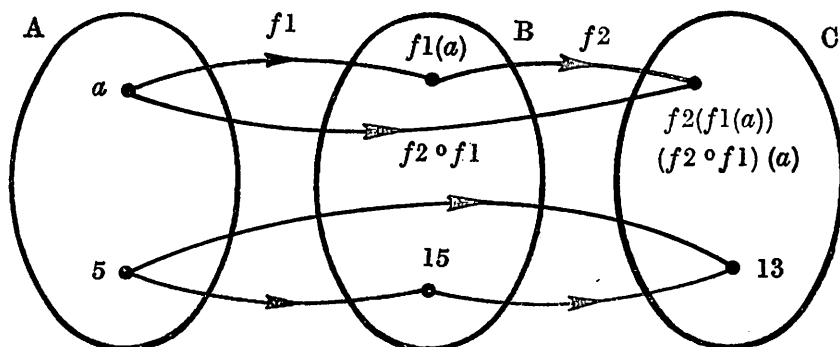
Lorsque a est un élément du domaine, l'image de a est représentée par $f(a)$.

9. Image par une fonction composée

Soit $f_1 : A \rightarrow B$

$f_2 : B \rightarrow C$

et $f_2 \circ f_1 : A \rightarrow C$



De la figure, on déduit que $f_2(f_1(a)) = (f_2 \circ f_1)(a)$.

Exemple :

$$f_1 : A \rightarrow B : x \rightarrow 3x$$

$$f_2 : B \rightarrow C : x \rightarrow x - 2$$

Si $a = 5$, nous obtenons : $f_1(5) = 15$

$$f_2(15) = 13$$

$$\text{Donc : } (f_2 \circ f_1)(5) = f_2(f_1(5))$$

$$= f_2(15)$$

$$= 13.$$

Exercices

1. $A = \{ 4, 6, 12, 15, 24 \}$

$$B = \{ 2, 3, 5, 6, 12 \}$$

Donnez les trois représentations des relations suivantes :

a) $R_1 : A \rightarrow B$ « ... est multiple de ... »

b) $R_2 : A \rightarrow B$ « ... est le double de ... »

c) $R_3 : A \rightarrow B$ « ... donne, après division par 4, le même reste que ... »

Donnez également les trois représentations des relations réciproques et énoncez les relations.

Définissez, dans chaque cas, le domaine et l'image.

2. $A = \{ 7, 9, 18, 21 \}$

$$B = \{ 10, 13, 21, 24 \}$$

$$R : A \rightarrow B = \{ (7, 10), (18, 21), (21, 24) \}$$

a) Énoncez la relation.

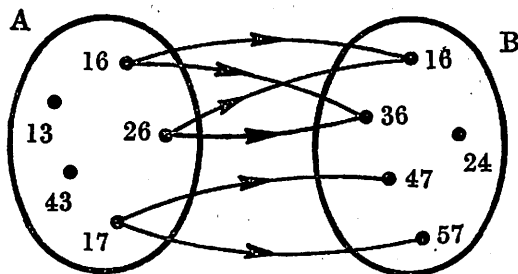
b) Écrivez la relation réciproque.

c) Énoncez la relation réciproque.

d) Dessinez le graphe et le réseau des deux relations.

3. $A = \{ 13, 16, 17, 26, 43 \}$

$B = \{ 16, 24, 36, 47, 57 \}$



Définissez en extension cette relation et dessinez le réseau.

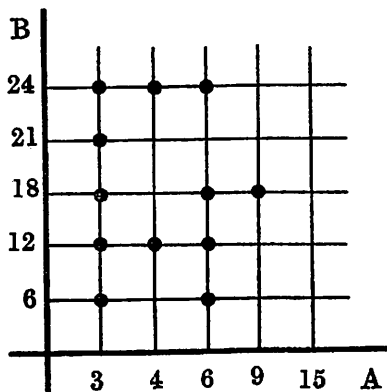
Énoncez la relation.

Donnez les trois représentations de la relation réciproque.

Énoncez la relation réciproque.

4. $A = \{ 3, 4, 6, 9, 15 \}$

$B = \{ 6, 12, 18, 21, 24 \}$



Définissez en extension cette relation et dessinez le graphe.

Énoncez la relation.

Donnez les trois représentations de la relation réciproque.

Énoncez la relation réciproque.

5. On donne une relation par énumération de ses couples.
Comment peut-on reconnaître une relation, une fonction, une application ou une bijection ?

Faites la distinction parmi les relations suivantes :

$$A = \{a, b, c, d\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$R_1 : A \rightarrow B = \{(a, 2), (b, 2), (c, 4), (d, 2)\}$$

$$R_2 : A \rightarrow B = \{(a, 2), (b, 1), (d, 2), (d, 3), (d, 4)\}$$

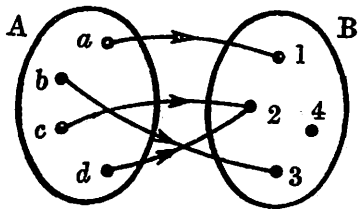
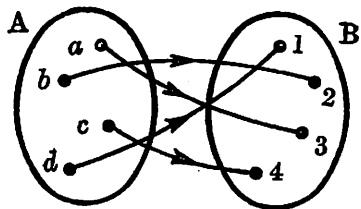
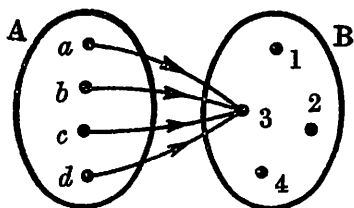
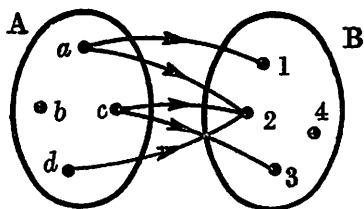
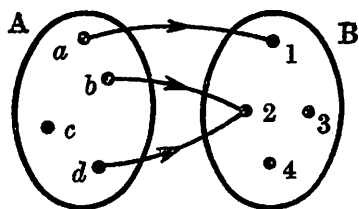
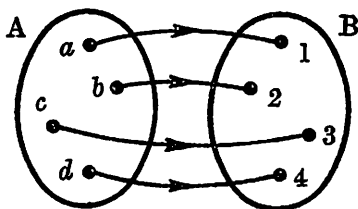
$$R_3 : A \rightarrow B = \{(a, 1), (b, 3), (c, 4), (d, 2)\}$$

$$R_4 : A \rightarrow B = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2), (d, 4)\}$$

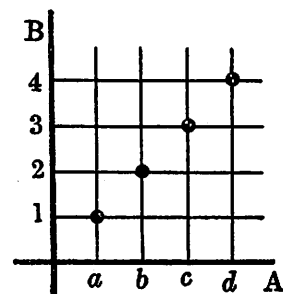
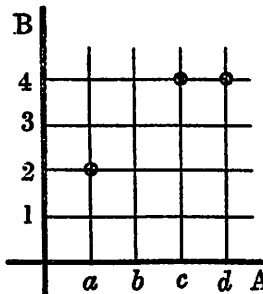
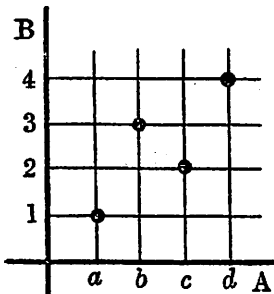
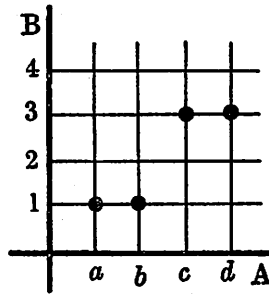
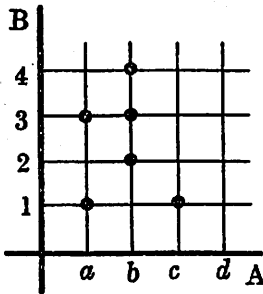
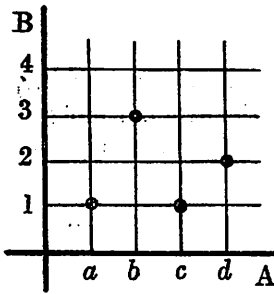
$$R_5 : A \rightarrow B = \{(a, 2), (b, 2), (d, 3)\}$$

Définissez, pour chaque cas, le domaine et l'image.

6. Que représentent les graphes suivants (relation, fonction, application, bijection) ?



7. Que représentent les réseaux suivants ?



8. $A = \{ 16, 25, 36, 49, 81, 121 \}$

$B = \{ 4, 5, 6, 7, 9, 11 \}$

Dessinez le graphe des relations suivantes :

$R_1 : A \rightarrow B$ « ... a la même somme des chiffres que ... »

$R_2 : A \rightarrow B$ « ... se termine par le même chiffre que ... »

$R_3 : A \rightarrow B$ « ... est le carré de ... »

$R_4 : A \rightarrow B$ « ... admettent pour somme un nombre pair ... »

Précisez ces relations et justifiez votre réponse.

9. $A = \{ 0, 2, 4, 5, 13, 17 \}$

$B = \{ 4, 5, 6, 8, 17 \}$

$C = \{ 17, 18, 20, 24, 25 \}$

$D = \{ 13, 16, 17, 20, 22 \}$

Exprimez des trois manières :

$R_1 : A \cap B \rightarrow C \cap D$ « ... divise ... »

$R_2 : A \cap B \rightarrow C \cup D$ « ... ont pour somme 30 »

$R_3 : A \cup B \rightarrow C \cap D$ « ... ont pour somme un nombre ≥ 25 »

$R_4 : A \cup B \rightarrow C \cup D$ « ... ont pour différence 0, 10, 20 ou 30 »

Précisez ces relations.

10. $A = \{ 6, 7, 12, 17, 23 \}$
 $B = \{ 5, 19, 21, 24, 34 \}$
 Trouvez $R_1 : A \rightarrow B$ « ... divise ... »
 $R_2 : A \rightarrow B$ « ... a la même somme des chiffres que ... »
 Les relations R_1 et R_2 sont-elles des fonctions ? Pourquoi ?
 Les relations R_1^{-1} et R_2^{-1} sont-elles aussi des fonctions ? Énoncez la relation.
 Complétez : La relation réciproque d'une fonction est ...
11. $A = \{ -5, -3, -2, 2, 5 \}$
 $B = \{ -5, -2, 1, 2, 3, 5 \}$
 Trouvez $R_1 : A \rightarrow B$ « ... a pour valeur absolue ... »
 $R_2 : A \rightarrow B$ « ... a pour opposé ... »
 Les relations R_1 et R_2 sont-elles des applications ? Pourquoi ?
 Les relations R_1^{-1} et R_2^{-1} sont-elles aussi des applications ? Énoncez la relation.
 Complétez : La relation réciproque d'une application est ...
 La relation réciproque d'une application est-elle une application ? Justifiez.
12. $A = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$
 $B = \{ 4, 6, 8, 10, 12 \}$
 Trouvez $R_1 : A \rightarrow B$ « ... est de deux unités plus petit que ... »
 $R_2 : A \rightarrow B$ « ... ont pour somme 14 »
 Les relations R_1 et R_2 sont-elles des bijections ? Pourquoi ?
 Les relations R_1^{-1} et R_2^{-1} sont-elles aussi des bijections ? Énoncez les relations.
 Complétez : La relation réciproque d'une bijection est ...
13. $A = \{ 3, -2, 5, -8, 9 \}$
 $B = \{ 1, 3, -2, 5, -8, 9, -10 \}$
 $C = \{ -2, 0, -5, 2, -11, 6, -13, 16 \}$
 Définissez en extension et dessinez $R_1 : A \rightarrow B$ « ... = ... »
 $R_2 : B \rightarrow C : x \rightarrow x - 3$
 Définissez en extension et dessinez $R_2 \circ R_1$.
 Précisez R_1 , R_2 et $R_2 \circ R_1$.
 Complétez : La composée de deux ... est ...
14. Supprimez les parenthèses.
 $(R_1 \circ R_2)^{-1} =$
 $(R_1^{-1} \circ R_2)^{-1} =$
 $(R_1 \circ R_2^{-1})^{-1} =$
 $(R_1^{-1} \circ R_2^{-1})^{-1} =$

15. $A = \{ 6, -12, 18, -24, -30 \}$

$B = \{ 3, -6, 9, -12, -15 \}$

$C = \{ 1, -2, 3, -4, -5 \}$

Définissez en extension et dessinez : $R_1 : A \rightarrow B : x \rightarrow \frac{x}{2}$

$R_2 : B \rightarrow C : x \rightarrow \frac{x}{3}$

Définissez en extension et dessinez $R_2 \circ R_1$.

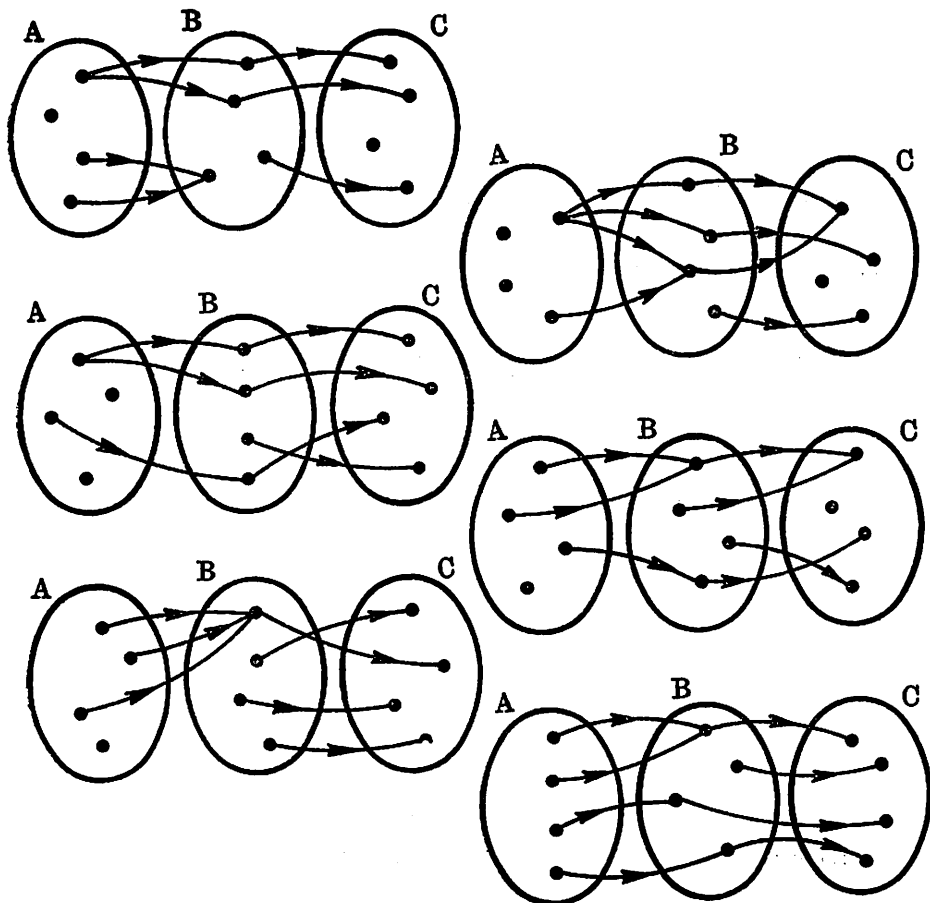
Précisez R_1 , R_2 et $R_2 \circ R_1$.

Complétez : La composée de deux ... est ...

16. Précisez $R_1 : A \rightarrow B$

et $R_2 : B \rightarrow C$

Dessinez $R_2 \circ R_1$ et précisez la composée.



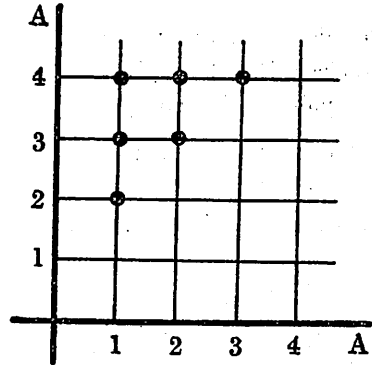
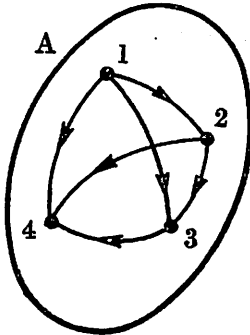
CHAPITRE II

RELATIONS DANS UN ENSEMBLE

1. Relation $A \rightarrow A$

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$R_1 : A \rightarrow A \ll \dots < \dots \gg = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$



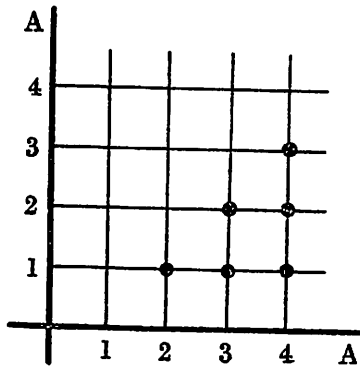
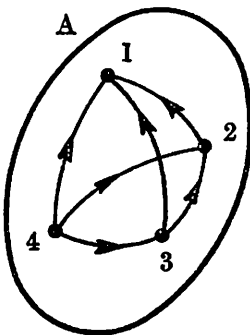
Une relation est un ensemble de couples.

$$R : A \rightarrow A = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ en } b \in A \text{ en } a R b \}$$

2. Relation réciproque

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$R_2 : A \rightarrow A \ll \dots > \dots \gg = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$



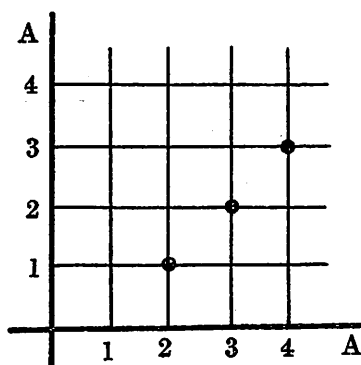
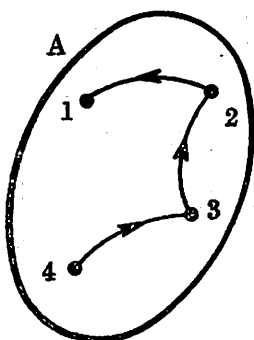
R_2 est la relation réciproque de R_1 , soit $R_2 = R_1^{-1}$.

R_1 est la relation réciproque de R_2 , soit $R_1 = R_2^{-1}$.

3. Relations particulières $A \rightarrow A$

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$R_3 : A \rightarrow A$ « ... est d'une unité plus grand que ... »
 $= \{(2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$

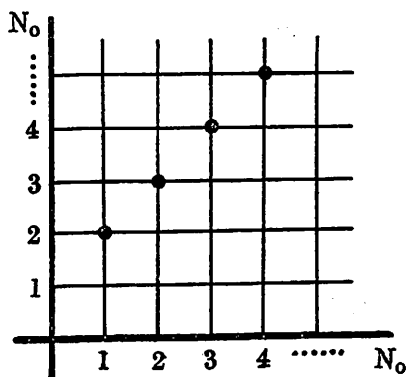
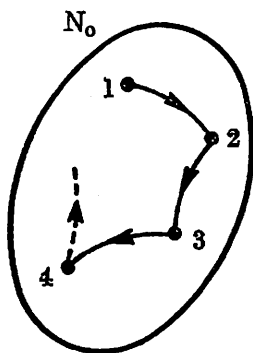


De chaque élément de l'ensemble de départ A , part au plus une flèche.

R_3 est une fonction dans A .

2. a) $N_0 = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

$R_4 : N_0 \rightarrow N_0$ « ... est d'une unité plus petit que ... »
 $= \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, \dots), \dots\}$



De chaque élément de l'ensemble de départ N_0 part une et une seule flèche.

R_4 est une application.

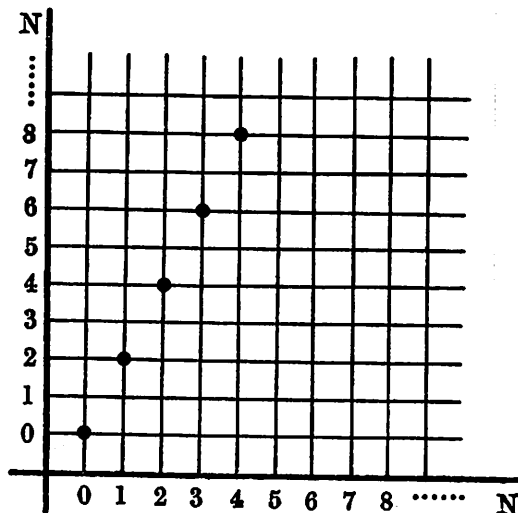
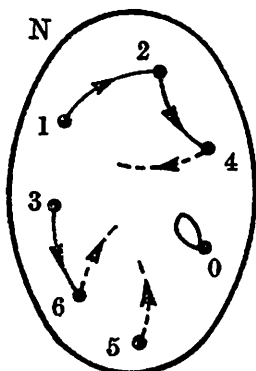
Une application $A \rightarrow A$ est une transformation de A .

R_4 est une transformation de N_0 .

b) $N = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$

$R_5 : N \rightarrow N$ « ... » pour double ... » =

$\{ (0, 0), (1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), \dots \}$



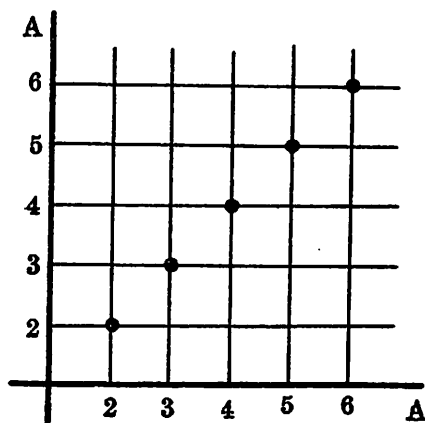
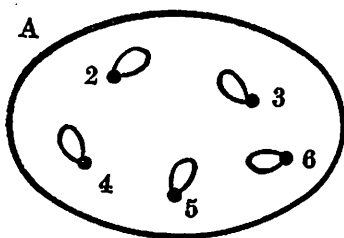
R_5 est une transformation de N .

Dans cette transformation, le nombre zéro est sa propre image.

Un point qui est sa propre image est appelé point fixe de la transformation.

c) $A = \{ 2, 3, 4, 5, 6 \}$

$R_6 : A \rightarrow A$ « ... » $\{ (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6) \}$

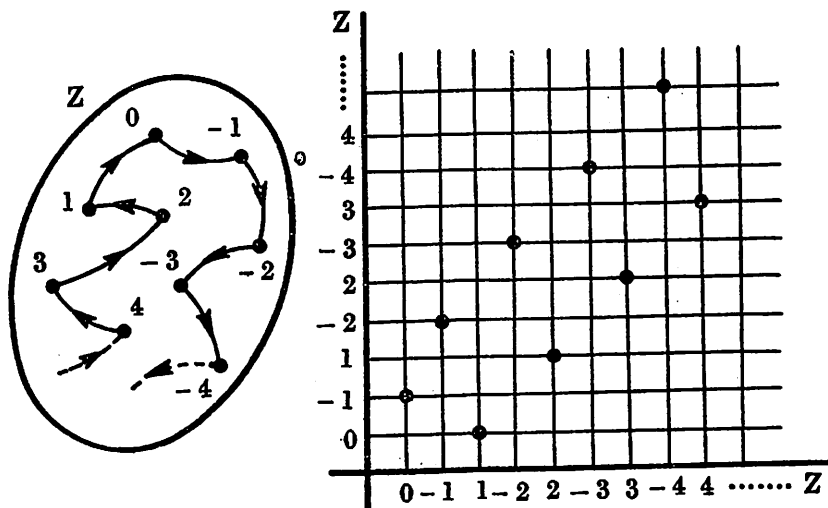


Dans cette transformation, chaque élément est sa propre image ; en d'autres mots : chaque élément est un point fixe.
Une telle transformation est appelée transformation identique : i .

$$3. Z = \{ 0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, \dots \}$$

$R_6 : Z \rightarrow Z$ « ... est d'une unité plus grand que ... »

$$\{(0, -1), (-1, -2), (1, 0), (-2, -3), (2, 1), (-3, -4), (3, 2), \dots\}$$

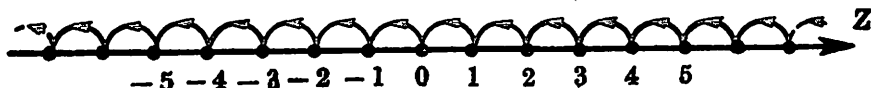


De chaque élément de l'ensemble de départ, part une et une seule flèche et chaque élément de l'ensemble d'arrivée est l'extrémité d'une et d'une seule flèche.

R_6 est une bijection.

Une bijection $A \rightarrow A$ est une permutation de A .

Sur un axe, sur lequel on a représenté les nombres entiers, cette permutation se présente de la façon suivante :

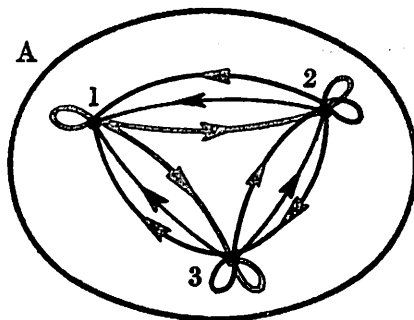


4. Composition de relations $A \rightarrow A$

$$A = \{ 1, 2, 3 \}$$

$$R_1 : A \rightarrow A \text{ « ... > ... »} = \{ (2, 1), (3, 1), (3, 2) \}$$

$$R_2 : A \rightarrow A \text{ « ... divise ... »} = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 3) \}$$



$$(1, 1) \circ (2, 1) = (2, 1)$$

$$(1, 1) \circ (3, 1) = (3, 1)$$

$$(1, 2) \circ (2, 1) = (2, 2)$$

$$(1, 2) \circ (3, 1) = (3, 2)$$

$$(1, 3) \circ (3, 1) = (3, 3)$$

$$(1, 3) \circ (2, 1) = (2, 3)$$

$$(2, 2) \circ (3, 2) = (3, 2)$$

$$R_2 \circ R_1 : A \rightarrow A = \{(2, 1), (3, 1), (2, 2), (3, 2), (3, 3), (2, 3)\}$$

$R_2 \circ R_1$ est la composée de R_1 et R_2 .

Exercices

1. $A = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$

Donnez les trois représentations de :

a) $R_1 : A \rightarrow A$ « ... divise ... »

b) $R_2 : A \rightarrow A$ « ... ont pour somme 12 »

c) $R_3 : A \rightarrow A$ « ... est la moitié de ... »

d) $R_4 : A \rightarrow A$ « ... ont pour différence — 4 »

Donnez les trois représentations des relations réciproques et énoncez ces relations.

2. $A = \{ 3, 5, 6, 8 \}$

$R : A \rightarrow A =$

$\{ (3, 3), (3, 5), (3, 6), (3, 8), (5, 5), (5, 6), (5, 8), (6, 6), (6, 8), (8, 8) \}$

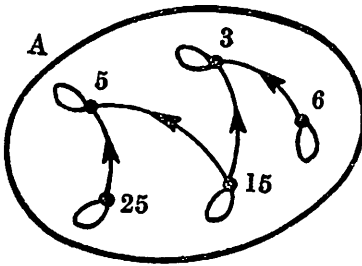
a) Énoncez la relation.

b) Définissez en extension, la relation réciproque.

c) Énoncez la relation réciproque.

d) Dessinez le graphe et le réseau de ces relations.

3. $A = \{ 3, 5, 6, 15, 25 \}$



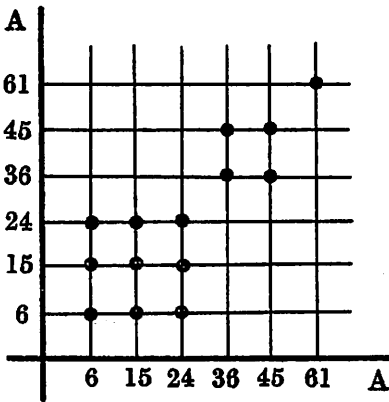
Définissez cette relation en extension et dessinez le réseau.

Énoncez la relation.

Représentez la relation réciproque de trois manières différentes.

Énoncez la relation réciproque.

4. $A = \{ 6, 15, 24, 36, 45, 61 \}$



Définissez cette relation en extension et dessinez le graphe.

Énoncez la relation.

Représentez la relation réciproque de trois manières différentes.

Énoncez la relation réciproque.

5. Une relation est donnée par énumération de ses couples.
Comment peut-on reconnaître une relation, une fonction, une transformation, une permutation?

Faites la distinction parmi les relations suivantes dans

$$A = \{ a, b, c, d, e \}$$

$$R_1 : A \rightarrow A = \{ (a, b), (b, a), (c, c), (d, e), (e, d) \}$$

$$R_2 : A \rightarrow A = \{ (b, a), (c, a), (d, a), (e, a) \}$$

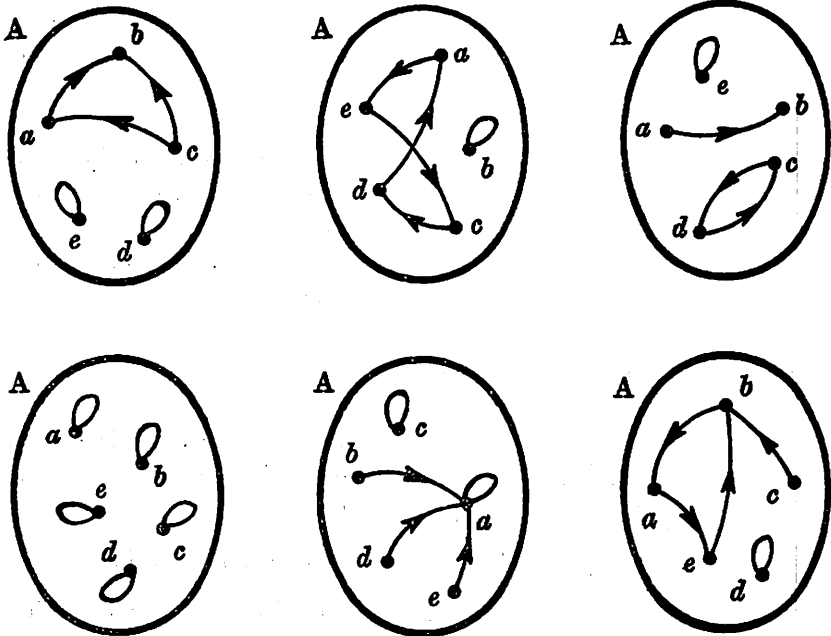
$$R_3 : A \rightarrow A = \{ (a, a), (a, b), (b, c), (c, c), (d, c) \}$$

$$R_4 : A \rightarrow A = \{ (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e) \}$$

$$R_5 : A \rightarrow A = \{ (a, a), (b, c), (c, c), (d, e), (e, d) \}$$

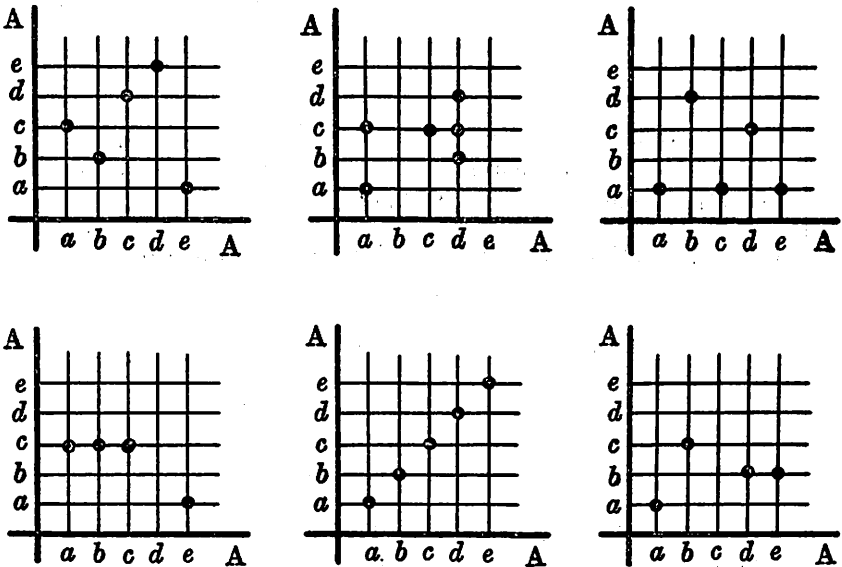
Définissez, pour chaque cas, le domaine et l'image. Y a-t-il des points fixes? Y a-t-il une transformation identique?

6. Quelles relations représentent les graphes suivants?



Y a-t-il des points fixes? Y a-t-il une transformation identique?

7. Quelles relations représentent les réseaux suivants?



Y a-t-il des points fixes? Y a-t-il une transformation identique?

8. $A = \{0, 1, -1, 2, -2\}$

Dessinez le graphe des relations suivantes, si $x \in A$ et $y \in A$.

$$R_1 : A \rightarrow A : x \rightarrow |x|$$

$$R_5 : A \rightarrow A : x \rightarrow x + 1$$

$$R_2 : A \rightarrow A : x + y = 0$$

$$R_6 : A \rightarrow A : xy = |2|$$

$$R_3 : A \rightarrow A : x \rightarrow -x$$

$$R_7 : A \rightarrow A : xy = 0$$

$$R_4 : A \rightarrow A : xy = 2$$

$$R_8 : A \rightarrow A : x - y = 2$$

Précisez ces relations.

9. Représentez les relations suivantes sur un axe et définissez-les.

	R_1 $x \rightarrow x + 3$	R_2 $x \rightarrow x - 1$	R_3 $x \rightarrow -x$	R_4 $x \rightarrow x $	R_5 $x \rightarrow x$
$N \rightarrow N$					
$N_0 \rightarrow N$					
$Z \rightarrow Z$					
$Z_0 \rightarrow Z_0$					

10. Représentez sur un axe :

$$R_1 : Z \rightarrow Z : x \rightarrow -x$$

$$R_2 : Z \rightarrow Z : x \rightarrow x + 2$$

Dessinez $R_2 \circ R_1$ et $R_1 \circ R_2$.

Précisez les relations R_1 , R_2 , $R_2 \circ R_1$ et $R_1 \circ R_2$.

Complétez : La composée de deux ... est ...

11. $f_1 : Z \rightarrow Z : x \rightarrow \frac{x}{3}$

$$f_2 : Z \rightarrow Z : x \rightarrow x + 6$$

Calculez $(f_2 \circ f_1)(x)$ et $(f_1 \circ f_2)(x)$ pour $x = -36, -9, 0, 18, 72$.

Pouvez-vous en déduire que la composition de relations n'est pas commutative?

Calculez les images pour $f_1 \circ f_1$ et $f_2 \circ f_2$.

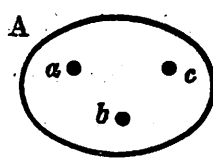
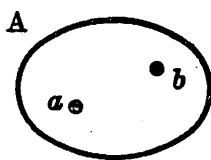
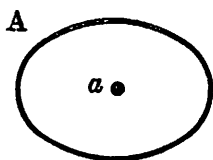
12. $Z = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$

Complétez les tableaux suivants :

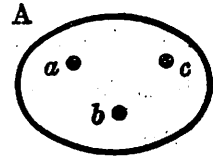
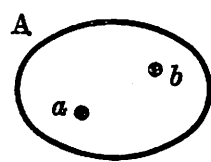
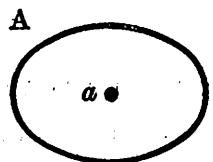
		relations pour $f : Z \rightarrow Z$			
x	$f(x)$	$x \rightarrow x + 2$	$x \rightarrow -3x + 1$	$x \rightarrow x - 7$	$x \rightarrow \frac{x}{2} + 4$
6	$f(6)$				
-2	$f(-2)$				
0	$f(0)$				
8	$f(8)$				
-10	$f(-10)$				

		image de					
x		$f_1 : x \rightarrow x + 1$	$f_2 : x \rightarrow x - 5$	$f_2 \circ f_1$	$f_2 \circ f_2$	$f_1 \circ f_2$	$f_1 \circ f_1$
-6							
0							
3							
-5							
a							

13. Dessinez toutes les transformations possibles. Combien en trouvez-vous ?



14. Dessinez toutes les permutations possibles. Combien en trouvez-vous ?



PROPRIÉTÉS DES RELATIONS DANS UN ENSEMBLE

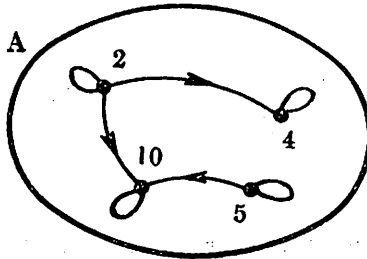
1. Propriétés

1. *Réflexivité*

$$A = \{ 2, 4, 5, 10 \}$$

$$R : A \rightarrow A \text{ « ... divise ... »} =$$

$$\{ (2, 2), (2, 4), (2, 10), (4, 4), (5, 5), (5, 10), (10, 10) \}$$



R contient tous les couples identiques.

R est réflexive.

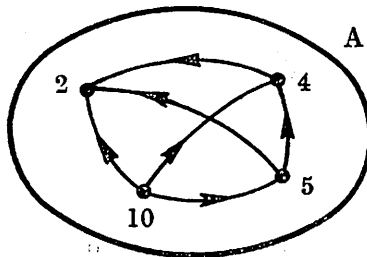
$$R : A \rightarrow A \text{ est réflexif} \Leftrightarrow (\forall a \in A \Rightarrow (a, a) \in R)$$

2. *Antiréflexivité*

$$A = \{ 2, 4, 5, 10 \}$$

$$R : A \rightarrow A \text{ « ... > ... »} =$$

$$\{ (4, 2), (5, 2), (5, 4), (10, 2), (10, 4), (10, 5) \}$$



R ne contient aucun couple identique.

R est antiréflexive.

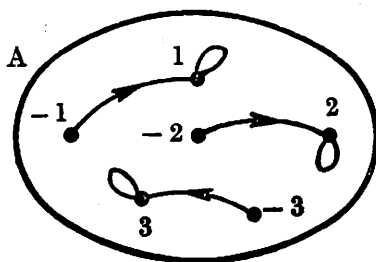
$$R : A \rightarrow A \text{ est antiréflexive} \Leftrightarrow (\forall a \in A \Rightarrow (a, a) \notin R)$$

Remarque :

Il existe évidemment des relations qui ne sont ni réflexives, ni antiréflexives.

$$A = \{ 1, -1, 2, -2, 3, -3 \}$$

$$R : A \rightarrow A \text{ « ... a pour valeur absolue ... »} = \{ (1, 1), (-1, 1), (2, 2), (-2, 2), (3, 3), (-3, 3) \}$$



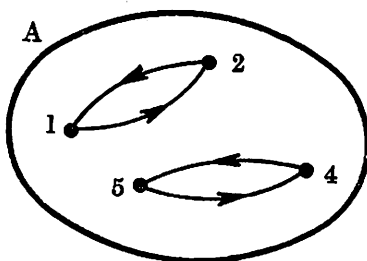
R n'est pas réflexive, car $(-1, -1) \notin R$
 $(-2, -2) \notin R$
 $(-3, -3) \notin R$

R n'est pas antiréflexive, car $(1, 1) \in R$
 $(2, 2) \in R$
 $(3, 3) \in R$

3. Symétrie

$$A = \{ 1, 2, 4, 5 \}$$

$$R : A \rightarrow A \text{ « ... ont pour différence un »} = \{ (1, 2), (2, 1), (4, 5), (5, 4) \}$$



Si un couple appartient à la relation R, le couple réciproque appartient également à la relation R.

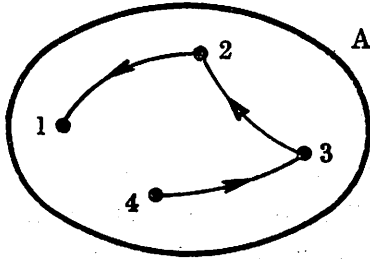
R est symétrique.

$$R : A \rightarrow A \text{ est symétrique} \Leftrightarrow (\forall a, b \in A \text{ et } (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R)$$

4. Antisymétrie

$$A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

$$R : A \rightarrow A \text{ « ... est d'une unité plus grand que ... »} = \{ (2, 1), (3, 2), (4, 3) \}$$



Si un couple appartient à R , son réciproque n'appartient pas à R .

R est antisymétrique.

$$R : A \rightarrow A \text{ est antisymétrique} \Leftrightarrow (\forall a, b \in A \text{ et } (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \notin R) \text{ si } a \neq b$$

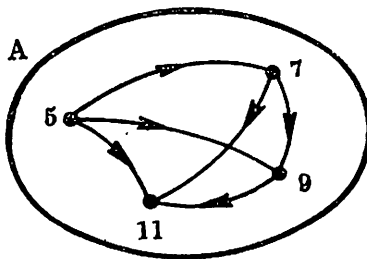
Remarques :

1. L'antisymétrie concerne toujours deux éléments *différents* ($a \neq b$). Cependant, un couple identique ne compromet pas l'antisymétrie.
2. Il existe des relations qui ne sont ni symétriques, ni antisymétriques.

5. Transitivité

$$A = \{ 5, 7, 9, 11 \}$$

$$R : A \rightarrow A \text{ « ... < ... »} = \{ (5, 7), (5, 9), (5, 11), (7, 9), (7, 11), (9, 11) \}$$



Si deux couples (a, b) et (b, c) appartiennent à la relation R , le couple (a, c) appartient également à la relation R .

R est transitive.

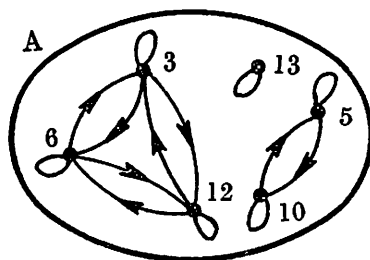
$$R : A \rightarrow A \text{ est transitive} \Leftrightarrow (\forall a, b, c \in A \text{ et } (a, b) \in R \text{ et } (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R)$$

2. Relation d'équivalence

$$A = \{ 3, 5, 6, 10, 12, 13 \}$$

$R : A \rightarrow A$ « ... divise ou est multiple de ... »

$$= \{ (3, 3), (3, 6), (3, 12), (5, 5), (5, 10), (6, 3), (6, 6), (6, 12), (10, 5), (10, 10), (12, 3), (12, 6), (12, 12), (13, 13) \}$$



Cette relation est :

- a) réflexive,
- b) symétrique,
- c) transitive.

Une relation dans A est une relation d'équivalence si et seulement si elle est à la fois réflexive, symétrique et transitive.

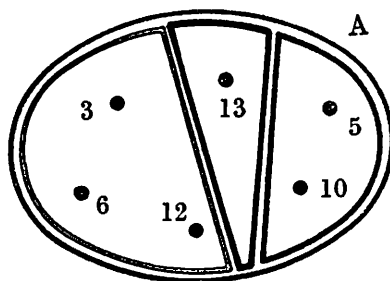
Remarque

Une relation d'équivalence fournit une partition.

Une partition implique la relation d'équivalence « ... appartient à la même classe que ... »

$$P = \{ \{ 3, 6, 12 \}, \{ 5, 10 \}, \{ 13 \} \}$$

$\{ 3, 6, 12 \}$, $\{ 5, 10 \}$ et $\{ 13 \}$ sont les classes d'équivalence.

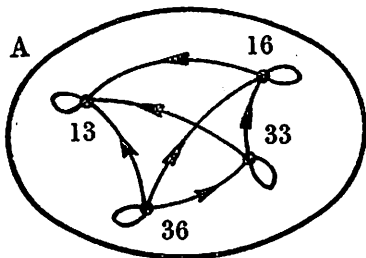


3. Relation d'ordre

1. Notion

$$A = \{ 13, 16, 33, 36 \}$$

$$R : A \rightarrow A \text{ « } \dots \geq \dots \text{ »} = \{(13, 13), (16, 13), (16, 16), (33, 13), (33, 16), (33, 33), (36, 13), (36, 16), (36, 33), (36, 36)\}$$



Cette relation est :

- a) réflexive,
- b) antisymétrique,
- c) transitive.

Une relation dans A est une relation d'ordre ou ordre, si et seulement si elle est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive.

2. Remarques

- a) Un ensemble A, pourvu d'une relation d'ordre R est appelé ensemble ordonné A, R.
- b) Lorsque, dans un ensemble ordonné, deux éléments sont reliés par une flèche, on dit que ces éléments sont comparables.
- c) Lorsque, dans un ensemble, deux éléments quelconques sont toujours reliés par une flèche, l'ordre est total et l'ensemble est totalement ordonné par cette relation.

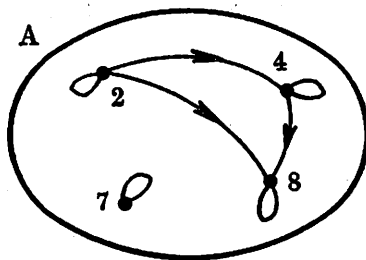
Une relation d'ordre, pour laquelle deux éléments quelconques ne sont pas toujours reliés par une flèche, est appelée ordre partiel.

Exemple

$$A = \{ 2, 4, 8, 7 \}$$

$$R : A \rightarrow A \text{ « ... divise ... »}$$

$$R = \{ (2, 2), (2, 4), (2, 8), (4, 4), (4, 8), (8, 8), (7, 7) \}$$

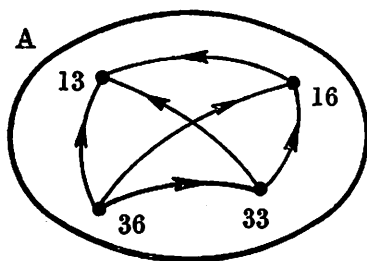


R est un ordre partiel.

d) La relation « ... > ... » dans l'ensemble $A = \{ 13, 16, 33, 36 \}$

$$\text{s'écrit } R : A \rightarrow A \text{ « ... > ... » =}$$

$$\{ (16, 13), (33, 13), (33, 16), (36, 13), (36, 16), (36, 33) \}$$



Cette relation est :

- a) antiréflexive,
- b) antisymétrique,
- c) transitive.

Elle est appelée un ordre strict.

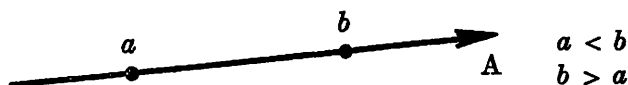
Un ordre strict peut être total ou partiel.

$$R \text{ est } \left\{ \begin{array}{l} \text{réflexive} \\ \text{antisymétrique} \\ \text{transitive} \end{array} \right\} \Rightarrow R \text{ est un ordre}$$

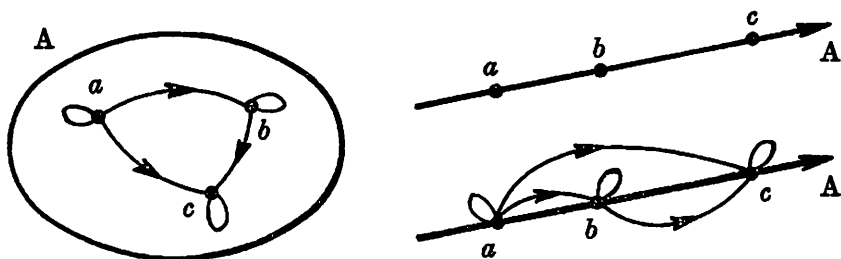
$$R \text{ est } \left\{ \begin{array}{l} \text{antiréflexive} \\ \text{antisymétrique} \\ \text{transitive} \end{array} \right\} \Rightarrow R \text{ est un ordre strict}$$

3. Ordre sur la droite

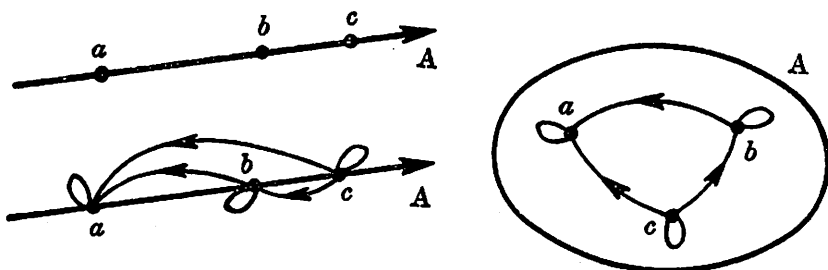
Pour orienter une droite, on indique le sens positif par une pointe de flèche.



a) La relation « $\dots \leq \dots$ » dans l'ensemble $A = \{a, b, c\}$ est un ordre total. Vérifiez.



b) La relation $R^{-1} : A \rightarrow A$ « $\dots \geq \dots$ » =
 $\{(a, a), (b, a), (b, b), (c, a), (c, b), (c, c)\}$ est également un ordre total.



Donc :

Sur toute droite, il existe deux ordres totaux, réciproques l'un de l'autre.

4. Ordre dans N et Z

Portons les éléments de l'ensemble Z sur une droite orientée.



Donc $R_1 : N \rightarrow N$ « ... $\leq$... » est un ordre total.

$R_1^{-1} : N \rightarrow N$ « ... $\geq$... » est un ordre total.

$R_2 : Z \rightarrow Z$ « ... $\leq$... » est un ordre total.

$R_2^{-1} : Z \rightarrow Z$ « ... $\geq$... » est un ordre total.

Remarque :

Dans un ensemble totalement ordonné, on peut écrire les éléments de telle manière qu'il existe une relation entre chaque élément et le suivant.

L'ensemble ordonné N peut s'écrire :

$$\{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$$

tel que	$0 < 1$	$1 < 2$	$2 < 3$	$3 < 4$	$4 < 5$	...
	$0 < 2$	$1 < 3$	$2 < 4$	$3 < 5$	...	
	$0 < 3$	$1 < 4$	$2 < 5$	...		
	$0 < 4$	$1 < 5$	...			
	$0 < 5$	...				
	...					

L'ensemble ordonné Z peut s'écrire :

$$\{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

Exercices

1. Quelles sont les propriétés des relations suivantes dans l'ensemble $A = \{ a, b, c, d, e \}$?

Y trouvez-vous des relations d'équivalence ? Si oui, écrivez les classes d'équivalence.

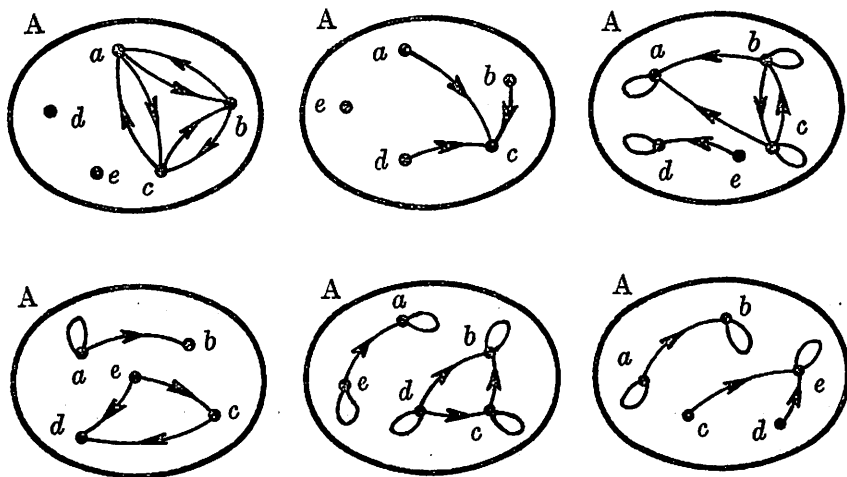
$$R_1 : A \rightarrow A = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (a, c), (c, a), (e, d), (d, e)\}$$

$$R_2 : A \rightarrow A = \{(a, d), (e, d), (e, a), (b, b), (b, c), (c, c), (c, b)\}$$

$$R_3 : A \rightarrow A = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}$$

$$R_4 : A \rightarrow A = \{(a, a), (b, a), (c, a), (d, a), (c, b), (d, e)\}$$

2. Même question pour :



3. Quelles sont les propriétés des relations suivantes ?

Y trouvez-vous des relations d'équivalence ? Si oui, écrivez les classes d'équivalence.

a. $A = \{2, 3, 4, 5\}$

$R : A \rightarrow A$ « ... n'est pas plus petit que ... »

b. $A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{9}{12} \right\}$

$R : A \rightarrow A$ « ... ont pour somme un »

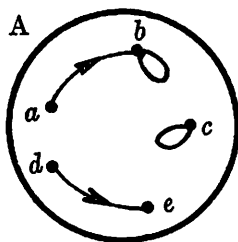
c. $A = \{3, 4, 6, 7, 8, 18\}$

$R : A \rightarrow A$ « ... divise ... »

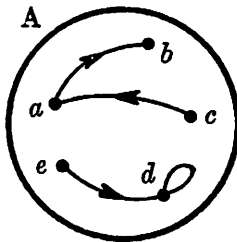
d. $A = \left\{ \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{2}{9} \right\}$

$R : A \rightarrow A$ « ... a le même dénominateur que ... »

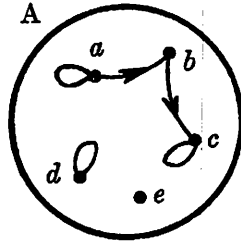
4. Ajoutez le moins possible de flèches pour que la relation ait les propriétés données.



réflexive, symétrique
et transitive

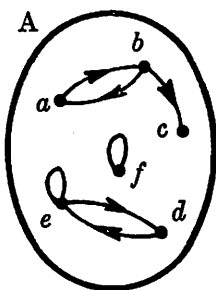


symétrique et
transitive

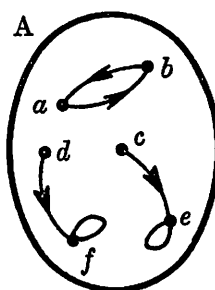


réflexive et
transitive

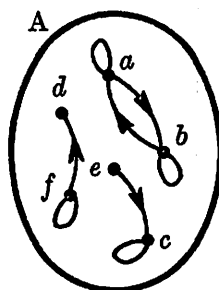
5. Supprimez le moins possible de flèches pour obtenir une relation ayant les propriétés données.



antiréflexive et
antisymétrique



antisymétrique et
transitive



antisymétrique et
transitive

6. Quels couples doit-on ajouter pour que les relations suivantes aient les propriétés données?

$$A = \{ a, b, c, d, e \}$$

$$R_1 : A \rightarrow A = \{ (a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (d, d) \}$$

transitive et symétrique.

$$R_2 : A \rightarrow A = \{ (a, b), (b, a), (c, d), (e, d) \}$$

réflexive et transitive.

$$R_3 : A \rightarrow A = \{ (a, a), (b, b) \}$$

réflexive, antisymétrique, symétrique et transitive.

7. Quelles sont les propriétés des relations suivantes?

$$R : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : x \rightarrow x^2$$

$$R : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \langle \dots = \dots \rangle$$

$$R : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \langle \dots > \dots \rangle$$

$$R : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} : x \rightarrow -x$$

$$R : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \langle \dots \leq \dots \rangle$$

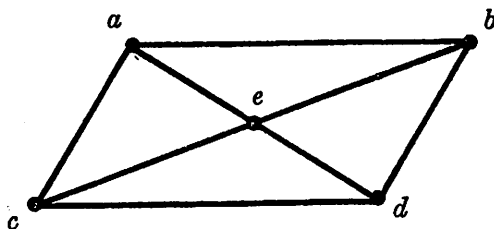
$$R : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \langle \dots \text{ ont pour somme } 4 \rangle$$

8. E est l'ensemble des segments de droite de la figure ci-dessous.

Ecrivez en extension : $R_1 : E \rightarrow E \langle \dots // \dots \rangle$

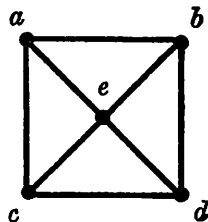
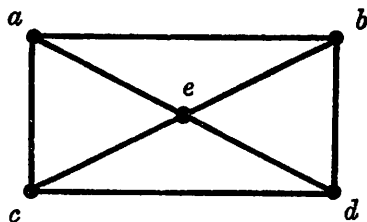
$$R_2 : E \rightarrow E \langle \dots \perp \dots \rangle$$

$$R_3 : E \rightarrow E \langle \dots = \dots \rangle$$



Quelles sont les propriétés de chacune des relations?

9. Même exercice pour :



10. Soient les ensembles : $\emptyset$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$
et $D = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$

Définissez et dessinez $R : D \rightarrow D \langle \dots \subset \dots \rangle$

Quelles sont les propriétés de R?

11. Les relations suivantes sont-elles des relations d'équivalence?
Si oui, donnez les classes d'équivalence.

a) $A = \{ 5, 7, 8, 9, 10, 13, 15 \}$

$R : A \rightarrow A$ « ... divisé par 5, donne le même reste que ... »

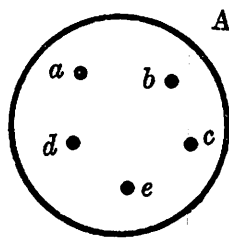
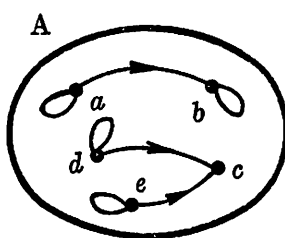
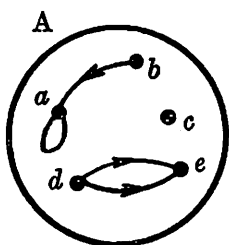
b) $B = \{ 14, 23, 32, 41, 167, 176, 671, 761 \}$

$R : B \rightarrow B$ « ... a une même somme des chiffres que ... »

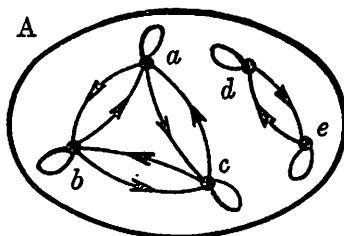
c) $C = \{ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \}$

$R : C \rightarrow C$ « ... est la valeur absolue de ... »

12. Ajoutez le moins possible de flèches pour que les relations suivantes deviennent des relations d'équivalence.



13. Pouvez-vous, tout en conservant une relation d'équivalence, supprimer deux flèches dans la relation d'équivalence suivante?



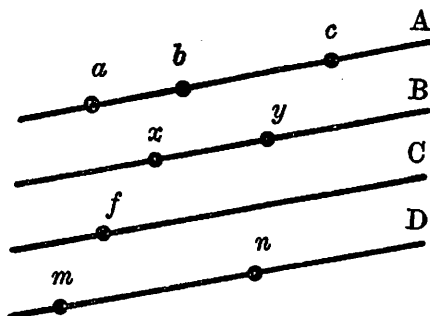
14. Examinez pour les points suivants de Π :

$R : \Pi \rightarrow \Pi$ « ... se trouve sur la même droite que ... »

Quelle relation obtenez-vous?

Quelles sont les classes de la partition?

Quelle est votre conclusion pour dir A, si vous considérez tous les points de Π ?



15. $A = \{ 2, 3, 5, 7 \}$

Dessinez et définissez $A \times A$. Le produit $A \times A$ est-il une relation d'équivalence? Si oui, écrivez les classes d'équivalence.

16. Dites si les relations suivantes sont des relations d'ordre. Précisez.

a) $A = \{ 4, 16, 64, 256 \}$

$R : A \rightarrow A$ « ... divise ... »

b) $B = \{ 2, 5, 10, 12, 20 \}$

$R : B \rightarrow B$ « ... est multiple de ... »

c) $C = \{ 2, 5, 13, 27, 123 \}$

$R : C \rightarrow C$ « ... comporte 1 chiffre en moins que ... »

d) $D = \{ 11, 22, 126, 413, 1212 \}$

$R : D \rightarrow D$ « ... contient plus de chiffres que ... »

e) $E = \{ -5, 0, 5, -3, 2, 7 \}$

$R : E \rightarrow E$ « ... est plus grand d'un multiple de 5 que ... »

f) $R : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ « ... < ... »

$R : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ « ... $\leq$... »

$R : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} : x \rightarrow x + 2$

$R : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} : x \rightarrow 2x$

g) $V = \{ \emptyset, \{ a \}, \{ b \}, \{ a, b \}, \{ a, b, c \} \}$

$R : E \rightarrow E$ « ... a un nombre cardinal plus petit que ... »

17. $A = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

Dessinez $R : A \rightarrow A =$
 $\{(5, 6), (5, 7), (5, 8), (5, 9), (6, 7), (6, 8), (6, 9), (7, 8), (7, 9), (8, 9)\}$

Dessinez également $R^{-1} : A \rightarrow A$.

Précisez la relation.

 R est-il un ordre? Et R^{-1} ?

18. $A = \{2, 3, 4, 6\}$

Dessinez :

 $R_1 : A \rightarrow A = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 4), (3, 6), (4, 4), (4, 6), (6, 6)\}$
 $R_2 : A \rightarrow A = \{(2, 2), (3, 3), (4, 4), (6, 6), (6, 2), (6, 3), (4, 2)\}$
 $R_3 : A \rightarrow A = \{(6, 4), (6, 3), (6, 2), (4, 3), (4, 2), (3, 2)\}$
 $R_4 : A \rightarrow A = \{(2, 6), (2, 4), (3, 6)\}$

Précisez les relations R_1, R_2, R_3 et R_4 ?

Définissez et dessinez $R_1^{-1}, R_2^{-1}, R_3^{-1}$ et R_4^{-1} . De quelles relations s'agit-il?

Comparez chaque relation à sa réciproque et complétez :

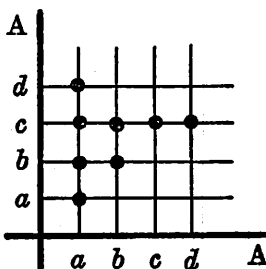
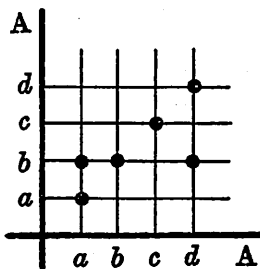
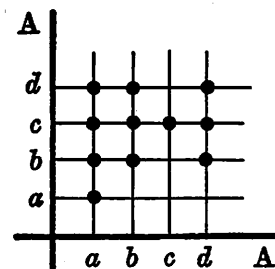
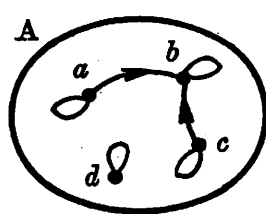
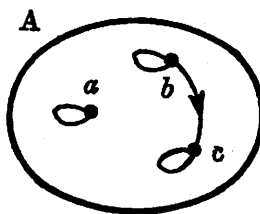
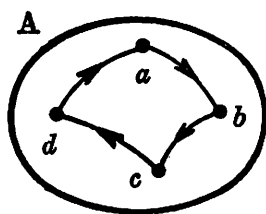
 R est un ordre strict $\Leftrightarrow R^{-1}$ est ...

 R est un ordre $\Leftrightarrow R^{-1}$ est ...

 R est un ordre total $\Leftrightarrow R^{-1}$ est ...

 R est un ordre partiel $\Leftrightarrow R^{-1}$ est ...

19. Dites si les relations suivantes sont des relations d'ordre.



20. $A = \{ 7, 9, 67, 126 \}$

 Ecrivez et dessinez : $R_1 : A \rightarrow A$ « ... $\leq$... »

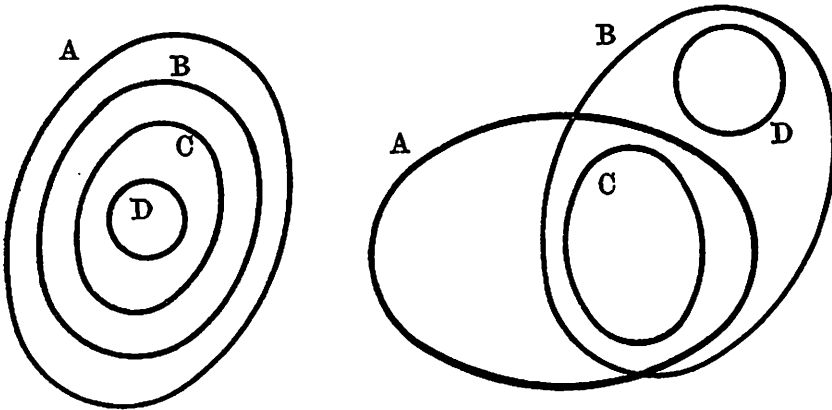
 $R_2 : A \rightarrow A$ « ... $<$... »

Précisez la relation.

21. $E = \{ A, B, C, D \}$

 Définissez : $R : E \rightarrow E$ « ... $\subset$... ».

La relation est-elle un ordre ? L'ordre est-il total ? Justifiez.



22. $A = \{ 5, 10, 15, 30 \}$

 Ecrivez et dessinez : $R_1 : A \rightarrow A$ « ... divise ... »

 $R_2 : A \rightarrow A$ « ... est multiple de ... »

De quelles relations s'agit-il ?

 Trouvez $R_1 \cap R_2$. Quelles est votre conclusion ?

23. $A = \{ 2, 3, 4, 6 \}$

 Ecrivez et dessinez $R_1 : A \rightarrow A$ « ... $<$... »

 $R_2 : A \rightarrow A$ « ... $>$... »

De quelles relations s'agit-il ?

 Trouvez $R_1 \cap R_2$. Quelle est votre conclusion ?

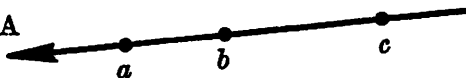
24. Examinez

 $R_1 : A \rightarrow A$ « ... $\leq$... »

 $R_2 : A \rightarrow A$ « ... $<$... » A
 $R_3 : A \rightarrow A$ « ... $\geq$... »

 $R_4 : A \rightarrow A$ « ... $>$... »

Quelles relations obtenez-vous ?

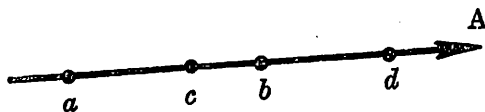


25. Donnez tous les ordres possibles dans l'ensemble $A = \{1, 2\}$
 Dessinez le graphe. Précisez les relations.

26. $E = \{[ad], [ac], [ab], [cb], [cd], [bd]\}$

Examinez $R : E \rightarrow E$ «... $\subset$...».

De quelle relation s'agit-il?



CHAPITRE IV

DIVISIBILITÉ

1. Division

La pratique de la division nous est suffisamment familière.

$$\begin{array}{r|l}
 24192 & 16 \\
 \hline
 16 & 1512 \\
 \hline
 81 & \\
 80 & \\
 \hline
 19 & \\
 16 & \\
 \hline
 32 & \\
 32 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

24 192 est le dividende (D)

16 est le diviseur (d)

1 512 est le quotient (q)

0 est le reste (r)

Le reste de la division étant nul, la division se fait exactement; d divise D .

$$24\,192 = 16 \times 1\,512$$

$$D = dq$$

$$D, d \in \mathbb{N} \Rightarrow D : d \in \mathbb{N}$$

$$\begin{array}{r|l}
 76429 & 24 \\
 \hline
 72 & 3184 \\
 \hline
 44 & \\
 24 & \\
 \hline
 202 & \\
 192 & \\
 \hline
 109 & \\
 96 & \\
 \hline
 13 &
 \end{array}$$

76 429 est le dividende (D)

24 est le diviseur (d)

3 184 est le quotient (q)

13 est le reste (r)

Le reste de la division étant $\neq 0$, d ne divise pas D .

$$76\,429 = 24 \times 3\,184 + 13$$

$$13 < 24$$

$$\begin{aligned}
 D &= dq + r \\
 r &< d
 \end{aligned}$$

$$D, d \in \mathbb{N} \Rightarrow D : d \notin \mathbb{N}$$

2. Divisibilité

Un nombre est divisible par un autre, si la division du premier par le second se fait *exactement*.

Exemple :

36 est divisible par 9 car $36 : 9 = 4$

9 est diviseur ou facteur ou sous-multiple de 36.

Notations :

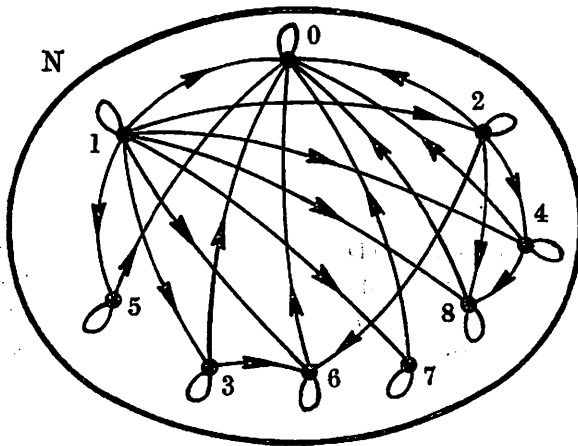
L'expression « 9 est un diviseur de 36 » ou « 9 divise 36 » s'écrit
 $9 \mid 36$

« 7 n'est pas diviseur de 36 » ou « 7 ne divise pas 36 » devient alors
 $7 \nmid 36$.

3. Relation « ... divise ... » dans $\mathbb{N}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$

$R : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ „} \mid \text{”} = \{ (0, 0), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (2, 0), (2, 2), (2, 4), \dots, (3, 0), (3, 3), (3, 6), \dots, (4, 0), (4, 4), (4, 8), \dots \}$



Cette relation est :

1. réflexive : $\forall a \in \mathbb{N} : a \mid a$

$0 \mid 0, 1 \mid 1, 2 \mid 2, 3 \mid 3, \dots$

2. antisymétrique : $\forall a, b \in \mathbb{N} : a \mid b \Rightarrow b \nmid a \text{ (si } a \neq b)$

$1 \mid 2 \Rightarrow 2 \nmid 1, 3 \mid 6 \Rightarrow 6 \nmid 3, \dots$

3. transitive : $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : \left. \begin{array}{l} a \mid b \\ b \mid c \end{array} \right\} \Rightarrow a \mid c$

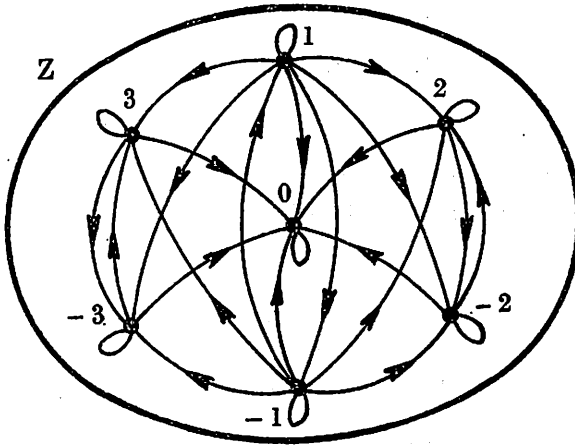
$2 \mid 4 \text{ et } 4 \mid 8 \Rightarrow 2 \mid 8, \dots$

$R : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ „} \mid \text{”}$ est un ordre partiel car les éléments ne sont pas tous comparables deux à deux.

4. Relation « ... | ... » dans $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

$$\mathbf{R} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, " = \{ \dots, (-3, -3), (-3, 0), (-3, 3), \dots, \\ (-2, -2), (-2, 0), (-2, 2), \dots, (-1, -3), (-1, -2), (-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), \dots \}$$



Cette relation est

1. réflexive : $-3 \mid -3, -2 \mid -2, -1 \mid -1, 0 \mid 0, \dots$
2. transitive : $-3 \mid 3 \text{ et } 3 \mid -3 \Rightarrow -3 \mid -3$
 $1 \mid 3 \text{ et } 3 \mid -3 \Rightarrow 1 \mid -3 \dots$

mais elle n'est

3. ni antisymétrique : $-3 \mid 3 \text{ et } 3 \mid -3, 2 \mid -2 \text{ et } -2 \mid 2, \dots$
4. ni symétrique : $1 \mid 3 \text{ et } 3 \nmid 1, 2 \mid 0 \text{ et } 0 \nmid 2, \dots$

$\mathbf{R} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ « ... | ... » n'est ni un ordre ni une équivalence.

5. Diviseurs d'un nombre

L'ensemble de tous les diviseurs de a

$$= \{ x \mid x \text{ divise } a \} = \{ x \mid x \in \mathbb{Z}_0 \text{ et } x \mid a \}$$

$$= \text{div } a$$

Exemples :

$$\text{div } 8 = \{ 1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8 \}$$

$$\text{div } 17 = \{ 1, -1, 17, -17 \}$$

$$\text{div } (-12) = \{ 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12, -12 \}$$

L'ensemble de tous les diviseurs positifs de a

$$= \{ x \mid x \in \mathbb{N}_0 \text{ et } x \mid a \}$$

$$= \text{div}^+ a$$

Exemples :

$$\text{div}^+ 8 = \{ 1, 2, 4, 8 \}$$

$$\text{div}^+ 17 = \{ 1, 17 \}$$

$$\text{div}^+ (-12) = \{ 1, 2, 3, 4, 6, 12 \}$$

Remarques :

1. Tout nombre naturel est toujours divisible par l'unité et par lui-même : $\forall a \in \mathbb{N} : 1 \in \text{div}^+ a$

$$a \in \text{div}^+ a$$

2. Un nombre naturel a est appelé nombre premier si et seulement si $\text{div}^+ a$ est une paire.

$$17 \text{ est un nombre premier, car } \text{div}^+ 17 = \{ 1, 17 \}$$

3. Un nombre naturel a n'est pas un nombre premier, ssi $\text{div}^+ a$ n'est pas une paire.

$$20 \text{ n'est pas un nombre premier, car } \text{div}^+ 20 = \{ 1, 2, 4, 5, 10, 20 \}$$

$$1 \text{ n'est pas un nombre premier, car } \text{div}^+ 1 = \{ 1 \}$$

4. Comment peut-on déterminer div et div^+ d'un nombre entier ?

a. *Le nombre entier est positif*

On divise successivement le nombre par les nombres naturels consécutifs jusqu'à ce que le quotient devienne inférieur au diviseur.

Diviseurs et quotients constituent l'ensemble des diviseurs du nombre.

Trouvez div 30 et div^+ 30.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 5 & \parallel & 6 \\ 30 & 15 & 10 & 6 & \parallel & 5 \end{array}$$

$$\text{div}^+ 30 = \{ 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 \}$$

$$\text{div} 30 = \{ 1, -1, 2, -2, 3, -3, 5, -5, 6, -6, 10, -10, 15, -15, 30, -30 \}$$

b. *Le nombre entier est négatif*

Deux nombres opposés admettent les mêmes diviseurs.

$$\text{div}^+(-30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

$$\text{div}(-30) = \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 5, -5, 6, -6, 10, -10, 15, -15, 30, -30\}$$

6. Multiples d'un nombre

Un multiple d'un nombre est le produit de ce nombre par un nombre entier.

L'ensemble des multiples de a

$$= \{x \mid x \text{ est multiple de } a\} = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ et } a \mid x\}$$

$$= a\mathbb{Z}$$

Exemple :

$$4\mathbb{Z} = \{0, 4, -4, 8, -8, 12, -12, \dots\}$$

D'importants sous-ensembles de $a\mathbb{Z}$ sont $a\mathbb{Z}_0$, $a\mathbb{N}$ et $a\mathbb{N}_0$.

Exemples :

$$4\mathbb{Z}_0 = \{4, -4, 8, -8, 12, -12, \dots\}$$

$$4\mathbb{N} = \{0, 4, 8, 12, 16, \dots\}$$

$$4\mathbb{N}_0 = \{4, 8, 12, 16, \dots\}$$

Exercices

1. Complétez par $\mid$ ou $\nmid$

1) $7 \dots 21$

4) $0 \dots 0$

7) $3 \dots 0$

2) $0 \dots 7$

5) $-5 \dots 10$

8) $18 \dots -42$

3) $-3 \dots 8$

6) $14 \dots 7$

9) $15 \dots -15$

10) $124 \dots 3\,224$

11) $-57 \dots -684$

12) $36 \dots 600$

2. Divisez et faites la preuve.

1) $30\,012 : 123$

3) $4\,723 : 72$

2) $1\,378 : 26$

4) $232\,277 : 573$

3. Quels sont les restes possibles de la division d'un nombre par 13?

4. Dans une division exacte le diviseur égale 27 et le quotient 217. Quel est le dividende ?
5. Dans une division exacte, le dividende égale 24 192 et le quotient 1 512. Quel est le diviseur ?
6. Dans une division, le diviseur égale 316, le quotient 19 et le reste 209. Quel est le dividende ?
7. Dans une division, le quotient égale 7 et le reste 5. Quel est le plus petit diviseur possible ? Quel est alors le dividende ?
8. On divise un nombre par 12 et par 15. Le quotient des deux divisions est le même, mais les restes sont respectivement 11 et 2. Quel est ce nombre ?
9. Définissez en extension les ensembles suivants :

1) $\text{div } 40$	5) $\text{div}^+ 0$	9) $\text{div } (-40)$
2) $\text{div } 16$	6) $\text{div}^+ 16$	10) $\text{div } (-8)$
3) $\text{div } 1$	7) $\text{div}^+ 21$	11) $\text{div}^+ (-16)$
4) $\text{div } 5$	8) $\text{div}^+ 9$	12) $\text{div}^+ (-180)$
10. Complétez par $=$, $\neq$, ou $\subset$.

1) $\text{div } 12 \dots \text{div } (-12)$	6) $\text{div}^+ 12 \dots \text{div}^+ (-12)$
2) $\text{div } 48 \dots \text{div } (-48)$	7) $\text{div}^+ 48 \dots \text{div}^+ (-48)$
3) $\text{div}^+ 12 \dots \text{div } 12$	8) $\text{div}^+ 48 \dots \text{div } (-48)$
4) $\text{div}^+ 12 \dots \text{div } 48$	9) $\text{div } 12 \dots \text{div } (-48)$
5) $\text{div } 12 \dots \text{div}^+ (-48)$	10) $\text{div } 48 \dots \text{div } 12$
11. Complétez :
 - 1) $\text{div } 12 \cap \text{div } 48 =$
 - 2) $\text{div } (-12) \cap \text{div } (-48) =$
 - 3) $\text{div}^+ (-12) \cap \text{div}^+ (-48) =$
 - 4) $\text{div}^+ 48 \cap \text{div}^+ (-48) =$
12. Donnez le plus grand et le plus petit diviseur de 15
 - 1) dans N
 - 2) dans Z
13. Donnez tous les nombres premiers < 120 .

14. Définissez en extension les ensembles suivants :

- | | | |
|-------------------------|------------------------|-----------------------|
| 1) $5 \mathbb{Z}$ | 4) $3 \mathbb{Z}_0$ | 7) $7 \mathbb{N}$ |
| 2) $7 \mathbb{Z}$ | 5) $4 \mathbb{Z}_0$ | 8) $8 \mathbb{N}$ |
| 3) $(-6) \mathbb{Z}$ | 6) $(-5) \mathbb{Z}_0$ | 9) $(-10) \mathbb{N}$ |
| 10) $6 \mathbb{N}_0$ | 13) $0 \mathbb{Z}$ | |
| 11) $12 \mathbb{N}_0$ | 14) $0 \mathbb{N}$ | |
| 12) $(-7) \mathbb{N}_0$ | 15) $1 \mathbb{Z}$ | |

15. Complétez par $=$, $\neq$ ou $\subset$.

- | | |
|--|---|
| 1) $4 \mathbb{Z} \dots (-4) \mathbb{Z}$ | 4) $12 \mathbb{N} \dots (-12) \mathbb{N}$ |
| 2) $(-12) \mathbb{Z} \dots 4 \mathbb{Z}$ | 5) $12 \mathbb{N} \dots (-4) \mathbb{N}$ |
| 3) $12 \mathbb{Z} \dots 4 \mathbb{Z}$ | 6) $(-12) \mathbb{N} \dots (-4) \mathbb{N}$ |

16. Complétez :

$$4 \mathbb{Z} \cap 12 \mathbb{Z} =$$

$$(-4) \mathbb{Z} \cap (-12) \mathbb{Z} =$$

$$(-4) \mathbb{N} \cap 4 \mathbb{N} =$$

17. $A = \{1\}$

$$B = \{x \mid x \text{ est un nombre premier}\}$$

$$C = \{y \mid y \text{ n'est pas un nombre premier}\}$$

L'ensemble $\{A, B, C\}$ est-il une partition de $\mathbb{N}$? Justifiez.

18. La somme de 3 nombres consécutifs égale 432. Quels sont ces nombres?

CHAPITRE V

CARACTÈRES DE DIVISIBILITÉ

1. Propriété

a) *Exemple*

$$\left. \begin{array}{l} 2 \mid 12 \\ 2 \mid 16 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \mid (12 + 16) \Rightarrow 2 \mid 28$$

b) *Généralisation*

$$\begin{array}{l} a \mid b \Rightarrow b = a \cdot q \\ a \mid c \Rightarrow c = a \cdot q' \\ \hline b + c = aq + aq' \\ \quad = a(q + q') \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Or, } q \in \mathbb{Z} \\ q' \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \Rightarrow q + q' \in \mathbb{Z}$$

distributivité de $\cdot$ par rapport
à $+$
l'addition dans $\mathbb{Z}$ est interne
et partout définie.

Donc : $a \mid (b + c)$

Un nombre divisant deux autres nombres, divise leur somme.

$$\left. \begin{array}{l} \forall a, b, c \in \mathbb{Z} : a \mid b \\ a \mid c \end{array} \right\} \Rightarrow a \mid (b + c)$$

2. Caractères de divisibilité

1. *Par 10, 100, 1 000, ...*

$$\begin{aligned} 2\,690 &= 269 \times 10 \\ &= \text{multiple de } 10 \\ &= \text{divisible par } 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\,400 &= 24 \times 100 \\ &= m\,100 \\ &= \text{divisible par } 100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 36\,000 &= 36 \times 1\,000 \\ &= m\,1\,000 \\ &= \text{divisible par } 1\,000 \end{aligned}$$

etc...

$$\begin{aligned} 3\,724 &= 3\,720 + 4 \\ &= m\,10 + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5\,331 &= 5\,300 + 31 \\ &= m\,100 + 31 \end{aligned}$$

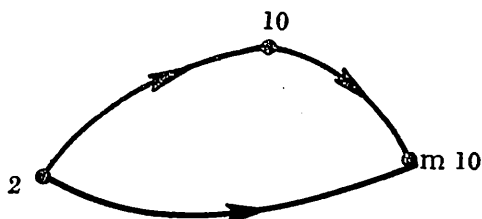
$$\begin{aligned} 67\,354 &= 67\,000 + 354 \\ &= m\,1\,000 + 354 \end{aligned}$$

Un nombre est divisible par 10, 100, 1 000, ... s'il est terminé par 1, 2, 3, ... zéros.

Le reste de la division d'un nombre par 10, 100, 1 000, ... est le nombre formé par le dernier, les deux derniers, les trois derniers... chiffres du dividende.

2. Par 2

La relation $R \ll \dots \mid \dots \gg$ est transitive.



Tout multiple de 10 est donc un multiple de 2.

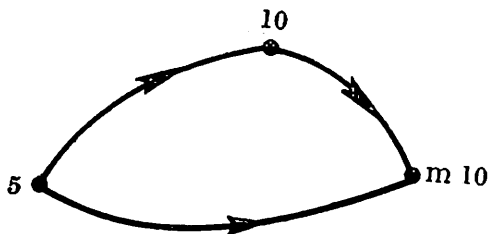
$$\begin{array}{rcl}
 7\ 264 & = & 7\ 260 + 4 \\
 & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{m\ 2 + m\ 2} & \\
 & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{m\ 2} &
 \end{array}
 \quad \Bigg| \quad
 \begin{array}{rcl}
 7\ 265 & = & 7\ 260 + 5 \\
 & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{m\ 2 + m\ 2 + 1} & \\
 & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{m\ 2 + 1} &
 \end{array}$$

Un nombre est divisible par 2, si le dernier chiffre à droite est 0 ou un nombre pair.

Le reste de la division d'un nombre par 2 est le même que celui que l'on obtient en divisant le dernier chiffre par 2.

3. Par 5

La relation $R \ll \dots \mid \dots \gg$ est transitive.



Tout $m\ 10$ est donc $m\ 5$.

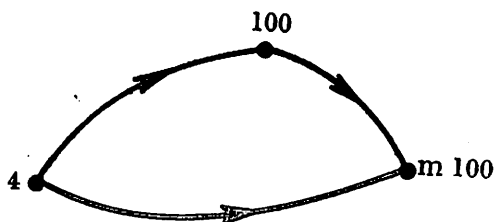
$$7\ 265 = 7\ 260 + \underbrace{5}_{\substack{\text{m } 5 + \text{m } 5 \\ \text{m } 5}}$$

$$7\ 267 = 7\ 260 + \underbrace{7}_{\substack{\text{m } 5 + \text{m } 5 + 2 \\ \text{m } 5 + 2}}$$

Un nombre est divisible par 5, si le dernier chiffre à droite est 0 ou 5.

Le reste de la division d'un nombre par 5 est le même que celui que l'on obtient en divisant le dernier chiffre par 5.

4. Par 4



Tout m 100 est donc m 4.

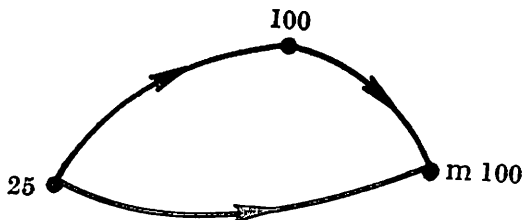
$$7\ 264 = 7\ 200 + \underbrace{64}_{\substack{\text{m } 4 + \text{m } 4 \\ \text{m } 4}}$$

$$7\ 267 = 7\ 200 + \underbrace{67}_{\substack{\text{m } 4 + \text{m } 4 + 3 \\ \text{m } 4 + 3}}$$

Un nombre est divisible par 4, si les deux derniers chiffres sont des zéros ou forment un nombre divisible par 4.

Le reste de la division d'un nombre par 4 est le même que celui que l'on obtient en divisant les deux derniers chiffres par 4.

5. Par 25



Tout m 100 est donc m 25.

$$7\ 275 = 7\ 200 + \underbrace{75}_{\substack{m\ 25 + m\ 25 \\ m\ 25}}$$

$$7\ 282 = 7\ 200 + \underbrace{82}_{\substack{m\ 25 + m\ 25 + 7 \\ m\ 25 + 7}}$$

Un nombre est divisible par 25, si les deux derniers chiffres sont des zéros ou forment un nombre divisible par 25.

Le reste de la division d'un nombre par 25 est le même que celui que l'on obtient en divisant les deux derniers chiffres par 25.

6. Par 9

$$\begin{aligned} 10 &= 9 + 1 = m\ 9 + 1 \\ 100 &= 99 + 1 = m\ 9 + 1 \\ 1\ 000 &= 999 + 1 = m\ 9 + 1 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Donc :

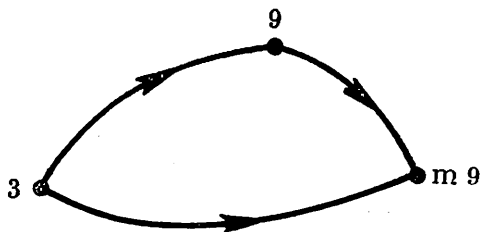
$$\begin{aligned} 3465 &= 3000 + 400 + 60 + 5 \\ &= 3 \times 1000 + 4 \times 100 + 6 \times 10 + 5 \\ &= 3(m\ 9 + 1) + 4(m\ 9 + 1) + 6(m\ 9 + 1) + 5 \\ &= m\ 9 + 3 + m\ 9 + 4 + m\ 9 + 6 + 5 \\ &= m\ 9 + (3 + 4 + 6 + 5) \\ &= m\ 9 + 18 \\ &= m\ 9 + m\ 9 \\ &= m\ 9. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3472 &= 3\ 000 + 400 + 70 + 2 \\ &= 3 \times 1\ 000 + 4 \times 100 + 7 \times 10 + 2 \\ &= 3(m\ 9 + 1) + 4(m\ 9 + 1) + 7(m\ 9 + 1) + 2 \\ &= m\ 9 + 3 + m\ 9 + 4 + m\ 9 + 7 + 2 \\ &= m\ 9 + (3 + 4 + 7 + 2) \\ &= m\ 9 + \underbrace{16}_{m\ 9 + 7} \\ &= m\ 9 + m\ 9 + 7 \\ &= m\ 9 + 7 \end{aligned}$$

Un nombre est divisible par 9, si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Le reste de la division par 9 d'un nombre est le même que celui que l'on obtient en divisant la somme de ses chiffres par 9.

7. Par 3



Donc :

$$\begin{aligned}
 3\ 465 &= m\ 3 + (3 + 4 + 6 + 5) \\
 &= m\ 3 + 18 \\
 &= m\ 3 + m\ 3 \\
 &= m\ 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3\ 467 &= m\ 3 + (3 + 4 + 6 + 7) \\
 &= m\ 3 + \underbrace{20}_{m\ 3 + 2} \\
 &= m\ 3 + m\ 3 + 2 \\
 &= m\ 3 + 2
 \end{aligned}$$

Un nombre est divisible par 3, si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Le reste de la division d'un nombre par 3 est le même que celui que l'on obtient en divisant la somme des chiffres par 3.

Exercices

1. a) Un nombre divisible par 2 se termine toujours par ...
 b) Un nombre divisible par 4 se termine toujours par ...
 c) Un nombre divisible par 5 se termine toujours par ...
 d) Un nombre divisible par 25 se termine toujours par ...
 e) Un nombre divisible par 2 et 5 se termine toujours par ...
 f) Un nombre divisible par 4 et 25 se termine toujours par ...
2. Vérifiez si les nombres suivants sont divisibles par 10, par 100, par 2, par 5, par 4, par 25, par 3, par 9? Trouvez les restes.

1) 7 224	6) 63 243 090
2) 1 645	7) 72 637 932
3) 360	8) 6 128 400
4) 9 450	9) 3 168 000
5) 3 000	10) 123 456 789

3. Quel est le plus petit nombre $\in \mathbb{N}_0$ qui soit simultanément divisible par 2, 3, 4, 5, 9 et 10?
4. Trouvez tous les nombres $\in \mathbb{N}$ et compris entre 340 et 361, divisibles simultanément par 2, 3 et 5.
5. Le nombre :

34 628 est-il divisible par 2, 3, 4?

75 060 est-il divisible par 2, 3, 5, 9, 10?

2 891 736 est-il divisible par 2, 3, 4, 5, 9?

6. Remplacez les points par des chiffres pour que le nombre

a) 7 64. soit divisible par 2

b) 3 2.2 soit divisible par 4

c) 63. soit divisible par 5

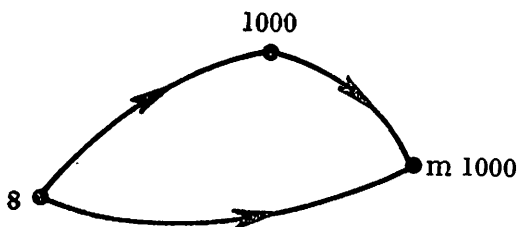
d) 3 2.5 soit divisible par 25

e) 36 4.2 soit divisible par 3 mais non par 9

f) 3 42. 481 soit divisible par 9

Donnez toutes les solutions possibles.

7. Trouvez le caractère de divisibilité par 8.



8. Même question pour 125.

9. Si

$$10 = 11 - 1 = m \, 11 - 1$$

$$100 = 99 + 1 = m \, 11 + 1$$

$$1 \, 000 = 1 \, 001 - 1 = m \, 11 - 1$$

$$10 \, 000 = 9 \, 999 + 1 = m \, 11 + 1$$

trouvez le caractère de divisibilité par 11.

10. Remplacez les points par des chiffres pour que le nombre

- a) 5 2.4 soit divisible par 2 et 3
- b) 72 84. soit divisible par 2 et 9
- c) 5 23. soit divisible par 4 et 3
- d) 98 3.5 soit divisible par 9 et 25
- e) 3 64. soit divisible par 5 et 9
- f) 43 .9. soit divisible par 2 et 3
- g) 24 .8. soit divisible par 4 et 9
- h) 71. 69. soit divisible par 3 et 5
- i) 13. 56. soit divisible par 4, 5 et 9.

Donnez toutes les solutions possibles.

11. $x = m 17 + 7$
 $y = m 17 + 13$

Quel est le reste de la division des nombres suivants par 17 ?

$$x$$

$$y$$

$$x + y$$

$$x - y.$$

CHAPITRE VI

PREUVE PAR NEUF

1. Addition

$$\begin{array}{r|l} 7 & 162 \\ + & 312 \\ + & 916 \\ \hline 8 & 390 \end{array} \left. \begin{array}{l} 7 \\ 6 \\ 7 \end{array} \right\} 2$$

Justification :

$$\begin{array}{r} 7162 = m9 + 7 \\ 312 = m9 + 6 \\ 916 = m9 + 7 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{somme} = m9 + 20 = m9 + m9 + 2 \\ = m9 + 2 \end{array}$$

$$8390 = m9 + 2$$

2. Soustraction

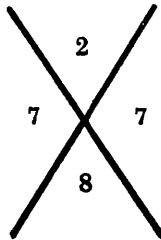
$$\begin{array}{r|l} 6 & 434 \\ - & 262 \\ \hline 6 & 172 \end{array} \left. \begin{array}{l} 8 \\ 1 \\ 7 \end{array} \right\} 8$$

Justification :

$$\begin{array}{r} 6434 = m9 + 8 \\ 262 = m9 + 1 \\ 6172 = m9 + 7 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{somme} = m9 + 8$$

3. Multiplication

$$\begin{array}{r} 317 \\ \times 53 \\ \hline 951 \\ 1585 \\ \hline 16801 \end{array}$$

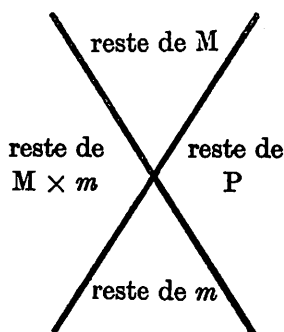


Justification

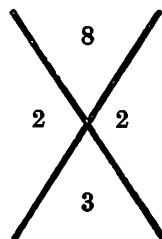
$$\begin{array}{rcl} M & = 317 & = m9 + 2 \\ m & = 53 & = m9 + 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} M \times m & = 317 \times 53 & = (m9 + 2)(m9 + 8) \\ & & = m9 + 16 \\ & & = m9 + 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} P & = 16\ 801 & = m9 + 7 \end{array}$$

Généralisation**4. Division**

$$\begin{array}{r|l} 72\ 164 & 26 \\ 52 & \\ \hline 201 & 2\ 775 \\ 182 & \\ \hline 196 & \\ 182 & \\ \hline 144 & \\ 130 & \\ \hline 14 & \end{array}$$



Justification

$$d = 26 = m \cdot 9 + 8$$

$$q = 2\,775 = m \cdot 9 + 3$$

$$dq = m \cdot 9 + (8 + 3)$$

$$= m \cdot 9 + 24$$

$$= m \cdot 9 + 6$$

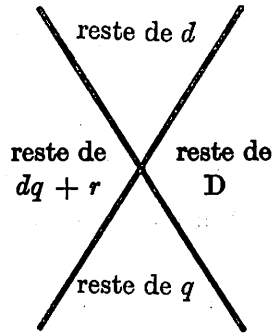
$$r = 14 = m \cdot 9 + 5$$

$$dq + r = m \cdot 9 + (6 + 5)$$

$$= m \cdot 9 + 11$$

$$= m \cdot 9 + 2$$

$$D = 72\,164 = m \cdot 9 + 2$$

Généralisation**Exercices**

Effectuez et faites la preuve par neuf :

1. a) $7\,296 + 4\,321 + 67\,210 + 1\,872 + 496$
 b) $4\,092 + 16\,946 + 3\,120 + 16 + 1\,280$
 c) $3\,120 + 1\,712 + 93\,612 + 216\,946 + 129$
2. a) $17\,924 - 1\,626$
 b) $287\,964 - 12\,365$
 c) $72\,549 - 3\,695$
3. a) $7\,329 \times 85$
 b) $31\,294 \times 71$
 c) $392\,468 \times 407\,369$
4. a) $1\,392 : 24$
 b) $920\,824 : 124$
 c) $23\,935\,415 : 2\,689$

CHAPITRE VII

PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR PLUS PETIT COMMUN MULTIPLE

1. Décomposition d'un nombre en facteurs premiers

Tout nombre peut s'écrire sous la forme d'un produit de nombres premiers.

$180 = 2 \times 90$	Pratiquement : 180	2
$= 2 \times 2 \times 45$		2
$= 2 \times 2 \times 3 \times 15$		3
$= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$		3
$= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$		5
		1
		$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

180 est décomposé en facteurs premiers.

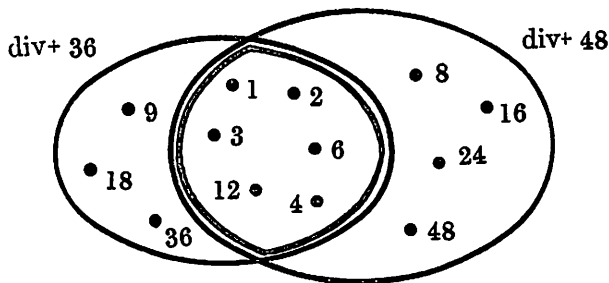
2. Plus grand commun diviseur (p. g. c. d.)

1. Notion

Exemple 1 :

$$\text{div}^+ 36 = \{ 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 \}$$

$$\text{div}^+ 48 = \{ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48 \}$$



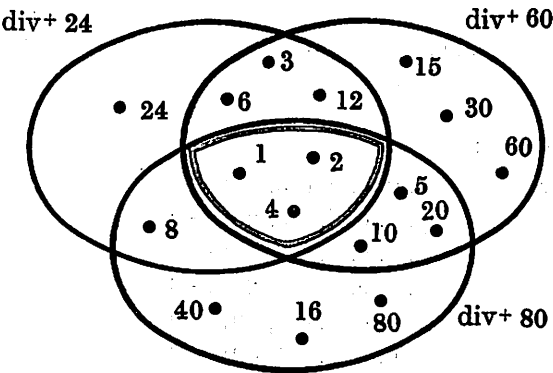
Les communs diviseurs de 36 et 48 sont

$$\text{div}^+ 36 \cap \text{div}^+ 48 = \text{div}^+ (36, 48) = \{ 1, 2, 3, 4, 6, 12 \} \text{ et } 12 \text{ est le plus grand des communs diviseurs.}$$

Nous écrivons : p. g. c. d. $(36, 48) = 12$.

Exemple 2 :

$\text{div}^+ 24 = \{ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 \}$
 $\text{div}^+ 60 = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 \}$
 $\text{div}^+ 80 = \{ 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80 \}$



Les communs diviseurs de 24, 60 et 80 sont
 $\text{div}^+ 24 \cap \text{div}^+ 60 \cap \text{div}^+ 80 = \text{div}^+ (24, 60, 80) = \{ 1, 2, 4 \}$
et 4 est le plus grand commun diviseur.
Nous écrivons : p. g. c. d. (24, 60, 80) = 4.

2. Détermination du p. g. c. d.

36	2	48	2	24	2	60	2	80	2
18	2	24	2	12	2	30	2	40	2
9	3	12	2	6	2	15	3	20	2
3	3	6	2	3	3	5	5	10	2
1		3	3	1		1		5	5
		1						1	
36 = 2 ² . 3 ²				24 = 2 ³ . 3					
48 = 2 ⁴ . 3				60 = 2 ² . 3 . 5					
p. g. c. d. (36, 48) =				80 = 2 ⁴ . 5					
2 ² . 3 = 12				p. g. c. d. (24, 60, 80) = 2 ² = 4					

Règle :

1. Décomposer chacun des nombres en ses facteurs premiers.
2. Effectuer le produit de tous les facteurs premiers communs, chacun étant affecté de son plus petit exposant.

Pour simplifier les écritures, on peut noter uniquement les facteurs communs.

36	48	2	24	60	80	2
18	24	2	12	30	40	2
9	12	3	6	15	20	
3	4					
p.g.c.d. (36, 48)						p.g.c.d. (24, 60, 80)
$= 2^2 \cdot 3 = 12$						$= 2^2 = 4$

Remarques :

1. Parce que $\text{p. g. c. d.} (3, 4) = 1$
 $\text{p. g. c. d.} (3, 25) = 1$
 $\text{p. g. c. d.} (3, 49) = 1$
 $\text{p. g. c. d.} (4, 25) = 1$
 $\text{p. g. c. d.} (4, 49) = 1$
 $\text{p. g. c. d.} (25, 49) = 1$

les nombres 3, 4, 25 et 49 sont dits nombres premiers entre eux deux à deux.

2. Parce que $\text{p. g. c. d.} (6, 15, 20) = 1$, les nombres 6, 15 et 20 ne sont pas premiers entre eux deux à deux, mais sont premiers dans leur ensemble.

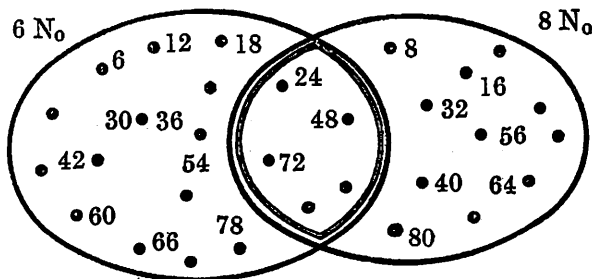
3. Plus petit commun multiple (p. p. c. m.)

1. Notion

Exemple 1 :

$$6N_0 = \{ 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, \dots \}$$

$$8N_0 = \{ 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, \dots \}$$



Les communs multiples de 6 et de 8 sont

$6N_0 \cap 8N_0 = \{ 24, 48, 72, \dots \}$ et 24 est le plus petit de ces communs multiples.

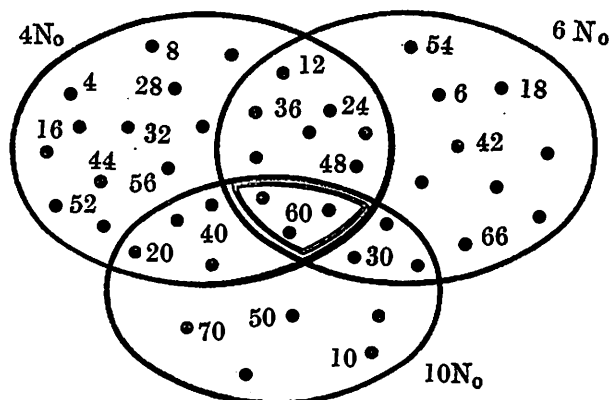
Nous écrivons : $\text{p. p. c. m.} (6, 8) = 24$.

Exemple 2 :

$$4 N_0 = \{ 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, \dots \}$$

$$6 N_0 = \{ 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, \dots \}$$

$$10 N_0 = \{ 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, \dots \}$$



Les communs multiples de 4, 6 et 10 sont

$4 N_0 \cap 6 N_0 \cap 10 N_0 = \{ 60, 120 \dots \}$ et 60 est le plus petit de ces communs multiples.

Nous écrivons : p. p. c. m. (4, 6, 10) = 60.

2. Détermination du p. p. c. m.

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \quad 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{array}$$

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$8 = 2^3$$

$$\text{p. p. c. m. } (6, 8) = 2^3 \cdot 3 = 24$$

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$$4 = 2^2$$

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$10 = 2 \cdot 5$$

$$\text{p. p. c. m. } (4, 6, 10) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

Règle :

1. Décomposer chacun des nombres en ses facteurs premiers.
2. Effectuer le produit de *tous* les facteurs premiers, chacun étant affecté de son plus grand exposant.

Pratiquement, on note les facteurs divisant au moins un des nombres.

6	8	2	4	6	10	2
3	4	2	2	3	5	2
1	2	2	1	1	1	3
	1	3				5
p. p. c. m. (6, 8) =			p. p. c. m. (4, 6, 10) =			
$2^3 \cdot 3 = 24$			$= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$			

Exercices

1. Décomposez mentalement en facteurs premiers :

- 1) 8 2) 10 3) 12 4) 18 5) 24 6) 36
7) 45 8) 56 9) 70 10) 82 11) 88 12) 100

2. Décomposez en facteurs premiers :

- 1) 172 2) 420 3) 560 4) 800 5) 840 6) 1 560
7) 1 8484 8) 200 9) 24 700 10) 19 800

3. Trouvez le p. g. c. d. de :

- 1) 320 et 560 6) 594, 1 260 et 3 960
2) 1 260 et 510 7) 224, 476, 532 et 3 948
3) 216 et 192 8) 126, 319, 576 et 12 948
4) 768 et 1 296 9) 9 672, 14 976 et 47 112
5) 648 et 1 116 10) 312, 415, 906, 1 301 et 104

4. Simplifiez :

- 1) $\frac{120}{144}$ 2) $\frac{56}{88}$ 3) $\frac{32}{49}$ 4) $\frac{84}{162}$ 5) $\frac{66}{174}$ 6) $\frac{54}{126}$

5. Trouvez le p. g. c. d. de (18, 45) ; puis celui de 90 ($= 18 \times 5$) et de 225 ($= 45 \times 5$).

Que constatez-vous ? Énoncez la propriété.

6. Le p. g. c. d. de (54, 117) = 9. Quel est celui de (162, 351) ?

7. Trouvez le p. g. c. d. de (48, 36) ; puis celui de 16 ($= 48 : 3$) et de 12 ($= 36 : 3$).

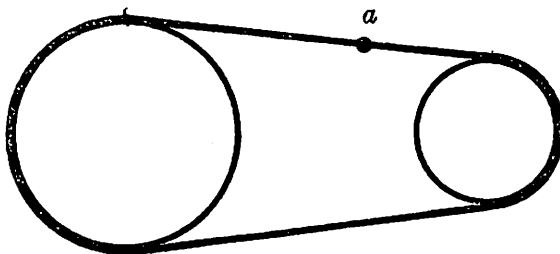
Énoncez la propriété.

8. Cherchez le p. g. c. d. de (24, 120, 168). Que constatez-vous ?
Énoncez la propriété.
9. Cherchez le p. g. c. d. de (58, 117). Comment appelle-t-on les nombres 58 et 117 ?
10. Cherchez le p. g. c. d. de (225, 525, 450) et divisez chacun des nombres par le p. g. c. d.
Cherchez le p. g. c. d. des quotients obtenus.
Énoncez la propriété.
11. Deux planches mesurent respectivement 4,28 et 6,12 m de long. Un menuisier les débite en morceaux les plus longs possible et d'égale longueur. La première planche laisse un reste de 8 cm et la seconde, de 17 cm. Quelle est la longueur des morceaux ? Combien de morceaux obtient-il ?
12. Dans une pièce d'étoffe de 4,20 m de long et de 1,40 m de large, un professeur de coupe veut tailler des coupons carrés mais ayant les plus grandes dimensions possibles et sans reste. Quelles sont les dimensions d'un coupon ? Quel est le nombre de coupons ?
13. Sur un circuit automobile, 3 voitures prennent le départ à 12 h. Leur vitesse respective est 120, 100 et 80 km à l'heure. A 14 h, elles passent simultanément à la ligne de départ pour la quatrième fois. Quelle est la longueur du circuit ?
14. Trouvez le p. p. c. m. de :

1) 84 et 96	6) 72, 60, et 36
2) 72 et 48	7) 140, 160, 400 et 420
3) 54 et 216	8) 216, 712, 314 et 820
4) 150 et 275	9) 126, 162, 216 et 432
5) 340 et 408	10) 2 427, 1 618 et 4 045
15. Réduisez les fractions suivantes au même dénominateur :

1) $\frac{5}{9}$ et $\frac{7}{12}$	3) $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{10}$ et $\frac{7}{15}$
2) $\frac{5}{6}$ et $\frac{13}{40}$	4) $\frac{5}{12}$, $\frac{3}{8}$ et $\frac{7}{10}$

16. Cherchez le p. p. c. m. de (24, 36), puis celui de 120 ($= 24 \times 5$) et de 180 ($= 36 \times 5$).
Quelle est votre conclusion ? Énoncez la propriété.
17. Cherchez le p. p. c. m. de (15, 25, 225). Quelle est votre conclusion ? Énoncez la propriété.
18. Trouvez le p. p. c. m. de (8, 10, 14) et divisez-le par chacun des nombres. Cherchez le p. g. c. d. des quotients ainsi trouvés. Énoncez la propriété.
19. Trouvez les nombres naturels inférieurs à 1 000 et divisibles simultanément par 27 et 36.
20. Cherchez le p. p. c. m. de (15, 45, 20, 40, 120).
Comment peut-on simplifier cette opération ?
21. Cherchez le p. g. c. d. et le p. p. c. m. des nombres 76 et 133. Comparez le produit du p. g. c. d. et du p. p. c. m. au produit des nombres. Énoncez la propriété.
22. Le produit de deux nombres est 8 019. Leur p. g. c. d. est 9. Quel est leur p. p. c. m. ?
23. Le chemin parcouru par un piéton est de 84 m à la minute en descente et 56 m en montée.
En partant à 13 h, quelle distance aura-t-il effectuée en descente, si sa rentrée est fixée à 19 h 15 ?
24. Deux poulies ont des périmètres respectifs de 96 cm et 56 cm. Quelle est la distance parcourue par un point a de la courroie au moment où les deux poulies ont accompli un nombre entier de tours ? Quel est le nombre de tours effectués par chacune des poulies ?



25. A 15 heures, trois coureurs prennent le départ sur un circuit. Le premier boucle le tour du circuit en 15 minutes, le deuxième en 18 minutes et le troisième en 20 minutes.

A quelle heure les trois coureurs passent-ils simultanément à la ligne de départ ? Quelles distances les coureurs ont-ils parcourues sachant que le circuit mesure 10 km ?

26. *Propriété.* Un nombre divisible par plusieurs nombres premiers entre eux deux à deux, est divisible par leur produit.

Exemples :

$$\begin{array}{l} 3 \mid 48 \\ 8 \mid 48 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 3 \mid 48 \\ 8 \mid 48 \end{array}} \right\} \Rightarrow (3 \times 8) \mid 48 \\ \Rightarrow 24 \mid 48$$

$$\begin{array}{l} 2 \mid 60 \\ 3 \mid 60 \\ 5 \mid 60 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 2 \mid 60 \\ 3 \mid 60 \\ 5 \mid 60 \end{array}} \right\} \Rightarrow (2 \times 3 \times 5) \mid 60 \\ \Rightarrow 30 \mid 60$$

Attention !

$2 \mid 18$ et $6 \mid 18$ n'implique pas $(2 \times 6) \mid 18$ ou $12 \mid 18$ parce que 2 et 6 ne sont pas premiers entre eux.

Et maintenant, complétez :

Un nombre est divisible par

- a) 10 s'il est divisible par ...
- b) 36 s'il est divisible par ...
- c) 75 s'il est divisible par ...
- d) 20 s'il est divisible par ...
- e) 12 s'il est divisible par ...
- f) 60 s'il est divisible par ...

27. Remplacez les points par des chiffres, pour que le nombre ainsi obtenu soit divisible

- a) par 18 1 7 . 2 .
- b) par 72 . 4 2 6 .
- c) par 36 5 . 6 . 2
- d) par 15 1 2 4 . .
- e) par 180 5 . 7 . .
- f) par 45 7 . 3 7 .

CHAPITRE VIII

GROUPES

1. Notion

Soit l'ensemble $Z = \{ \dots, -3, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$

et envisageons l'opération $+$ dans cet ensemble. On indiquera par $Z, +$ l'ensemble Z muni de cette opération $+$, et $Z, +$ s'appelle une structure.

Propriétés de $Z, +$:

1. L'addition dans Z est interne et partout définie :

$$\forall a, b \in Z : (a + b) \in Z$$

Dans $-7 + 4 = -3$, les nombres -7 , 4 et -3 sont des entiers.

2. L'addition dans Z est associative :

$$\forall a, b, c \in Z : (a+b)+c = a+(b+c) = a+b+c$$

$$-4 + (5 - 2) = (-4 + 5) - 2 = -4 + 5 - 2 = -1$$

3. L'addition dans Z comprend l'élément neutre 0 .

$$\forall a \in Z : a + 0 = a = 0 + a$$

$$-7 + 0 = -7 = 0 + (-7)$$

4. Pour l'opération $+$, chaque élément de Z a un élément symétrique ; en d'autres mots : à chaque élément $a \in Z$ correspond un deuxième élément $(-a) \in Z$ tel que la somme $a + (-a)$ égale l'élément neutre zéro.

$$-3 \text{ est l'élément symétrique de } 3 \text{ car } 3 + (-3) = 0$$

$$4 \text{ est l'élément symétrique de } -4 \text{ car } -4 + 4 = 0.$$

La structure $Z, +$, possédant ces quatre propriétés, est appelée groupe.

$Z, +$ est un groupe

2. Généralisation

Une structure $E, *$ (étoile) est un groupe si :

1. l'opération $*$ est interne et partout définie dans E
2. l'opération $*$ est associative
3. l'opération $*$ a un élément neutre $n \in E$
4. pour l'opération $*$, $a \in E$ a un élément symétrique $a' \in E$ tel que

$$a * a' = n = a' * a$$

En introduisant le quantificateur existentiel $\exists$ qui se lit : il existe, cette définition peut s'écrire par des symboles.

$E, *$ est un groupe $\Leftrightarrow$

1. $\forall a, b \in E : (a * b) \in E$
2. $\forall a, b, c \in E : (a * b) * c = a * (b * c) = a * b * c$
3. $\exists n \in E, \forall a \in E : a * n = a = n * a$
4. $\exists a' \in E, \forall a \in E : a * a' = n = a' * a$

Si, en plus, l'opération $*$ dans E est commutative, c'est-à-dire $\forall a, b \in E : a * b = b * a$, le groupe est dit commutatif.

Ainsi, $\mathbb{Z}, +$ est un groupe commutatif ou abélien.

3. Exemple

$E = \{m5, m5 + 1, m5 + 2, m5 + 3, m5 + 4\}$

Examinons la structure $E, +$ à l'aide du tableau suivant, qui est la table de l'opération $+$ dans l'ensemble E .

$+$	$m5$	$m5 + 1$	$m5 + 2$	$m5 + 3$	$m5 + 4$
$m5$	$m5$	$m5 + 1$	$m5 + 2$	$m5 + 3$	$m5 + 4$
$m5 + 1$	$m5 + 1$	$m5 + 2$	$m5 + 3$	$m5 + 4$	$m5$
$m5 + 2$	$m5 + 2$	$m5 + 3$	$m5 + 4$	$m5$	$m5 + 1$
$m5 + 3$	$m5 + 3$	$m5 + 4$	$m5$	$m5 + 1$	$m5 + 2$
$m5 + 4$	$m5 + 4$	$m5$	$m5 + 1$	$m5 + 2$	$m5 + 3$

1. L'addition dans E est interne et partout définie, car chacune des sommes $\in E$.

2. L'addition dans E est associative.

$$\text{Ex. : } (m5 + 3) + [(m5 + 2) + (m5 + 4)] = (m5 + 3) + (m5 + 1) \\ = m5 + 4$$

$$[(m5 + 3) + (m5 + 2)] + (m5 + 4) = m5 + (m5 + 4) \\ = m5 + 4$$

3. L'addition dans E comprend un élément neutre : $m5$.

$$\text{Ex. : } (m5 + 1) + m5 = m5 + 1 = m5 + (m5 + 1)$$

$$(m5 + 4) + m5 = m5 + 4 = m5 + (m5 + 4)$$

4. Chaque élément de E a un élément symétrique.

$m5$ a comme élément symétrique $m5$, car

$$m5 + m5 = m5 = m5 + m5$$

$m5 + 1$ a comme élément symétrique $m5 + 4$, car

$$(m5 + 1) + (m5 + 4) = m5 = (m5 + 4) + (m5 + 1)$$

$m5 + 2$ a comme élément symétrique $m5 + 3$ car

$$(m5 + 2) + (m5 + 3) = m5 = (m5 + 3) + (m5 + 2)$$

etc....

La structure $E, +$ est un groupe.

De plus, l'addition étant commutative, $E, +$ est donc un groupe commutatif.

Exercices

1. Complétez

structure	interne et partout définie	associative	élément neutre	élément sym.	groupe	commut.
$N, +$						
$N, -$						
$N, \times$						
$N, :$						
$N_0, +$						
$N_0, -$						
$N_0, \times$						
$N_0, :$						
$Z, +$						
$Z, -$						
$Z, \times$						
$Z, :$						
$Z_0, +$						
$Z_0, -$						
$Z_0, \times$						
$Z_0, :$						

2. Représentons l'ensemble de tous les nombres pairs par $2Z$.

$$2Z = \{x | x \text{ est un nombre pair}\} = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$$

Examinez à l'aide du tableau des opérations si $2Z, +$ et $2Z, \cdot$ sont des groupes.

3. Représentons l'ensemble de tous les nombres impairs par $2\mathbb{Z} + 1$.
 $2\mathbb{Z} + 1 = \{x | x \text{ est un nombre pair} + 1\} = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$

Examinez si $2\mathbb{Z} + 1$, $+$ et $2\mathbb{Z} + 1$, $\cdot$ sont des groupes.

4. Parmi les structures suivantes, lesquelles sont des groupes ?

$$\begin{aligned} &\{+, -\}, \times \\ &\{-2, -1, 0, 1, 2\}, + \\ &\{-2, -1, 1, 2\}, \times \end{aligned}$$

5. $A = \{a, b\}$

$$D = \{x | x \subset A\} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

Dressez les tables des opérations pour D , $\cup$ et D , $\cap$ et dites si ces structures sont des groupes.

6. $\{m5, m5 + 1, m5 + 2, m5 + 3, m5 + 4\}, \cdot$ est-il un groupe ?
7. $\{2, 4, 8, 16\}$, p. g. c. d. et $\{3, 6, 9, 18\}$, p. p. c. m. sont-ils des groupes ?
8. $\{\text{div } 12 \cap \text{div } 18\}, \cdot$ est-il un groupe ?

9. Pour un ensemble $E = \{a, b, c, d, e\}$, la table de l'opération $*$ se présente de la façon suivante :

$*$	a	b	c	d	e	
a	a	b	c	d	e	Complétez : $b * c = \dots$ $d * d = \dots$ $a * \dots = e$ $e * \dots = a$ $\dots * b = e$ $\dots * a = d$ $(a * b) * d =$ $a * (b * d) =$
b	b	d	a	e	c	
c	c	a	e	b	d	
d	d	e	b	c	a	
e	e	c	d	a	b	

$E, *$ est-il un groupe ? Le groupe est-il commutatif ?

10. $V = \{a, b, c, d, e, f\}$

$*$	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	a	e	f	c	d
c	c	f	a	e	d	b
d	d	e	f	a	b	c
e	e	d	b	c	f	a
f	f	c	d	b	a	e

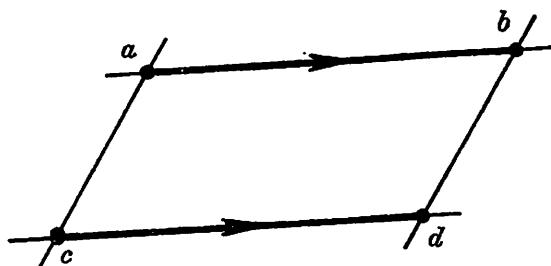
E, $*$ est-il un groupe? Le groupe est-il commutatif?

CHAPITRE IX

ÉQUIPOLLENCE

1. Rappel

Deux couples de points $(a, b) \in \Pi \times \Pi$ et $(c, d) \in \Pi \times \Pi$ sont équipollents, si, en les joignant, on obtient un parallélogramme.

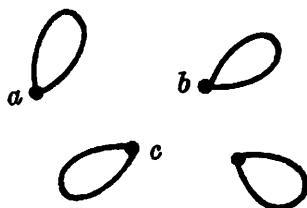


Nous écrivons :
 $(a, b) \uparrow (c, d)$

Remarques :

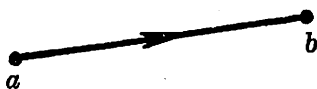
1. $(a, a) \uparrow (b, b) \uparrow (c, c) \uparrow \dots$

Des couples identiques sont toujours équipollents.

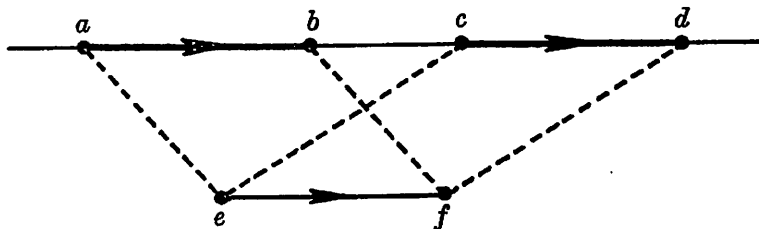


2. $(a, b) \uparrow (a, b)$

Tout couple est équipollent à lui-même.



3. Entre quatre points a, b, c, d d'une droite, existe la relation $(a, b) \uparrow (c, d)$ s'il existe deux points e et f tels que $abef$ et $efcd$ sont des parallélogrammes.



4. L'équipollence est :

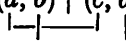
réflexive : $(a, b) \uparrow (a, b)$

symétrique : $(a, b) \uparrow (c, d) \Rightarrow (c, d) \uparrow (a, b)$

transitive : $\left. \begin{array}{l} (a, b) \uparrow (c, d) \\ (c, d) \uparrow (e, f) \end{array} \right\} \Rightarrow (a, b) \uparrow (e, f)$

La relation « ... est équipollent à ... » ou l'équipollence est une relation d'équivalence.

5. Croisement d'équipollence : $(a, b) \uparrow (c, d) \Rightarrow (a, c) \uparrow (b, d)$



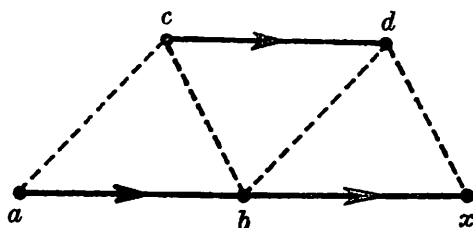
Equipollence réciproque : $(a, b) \uparrow (c, d) \Rightarrow (b, a) \uparrow (d, c)$

2. Constructions

1. On donne : le couple (a, b)

On demande : le point x tel que $(a, b) \uparrow (b, x)$

Construction :



1. construire un parallélogramme $abcd$

2. construire le parallélogramme $cdbx$

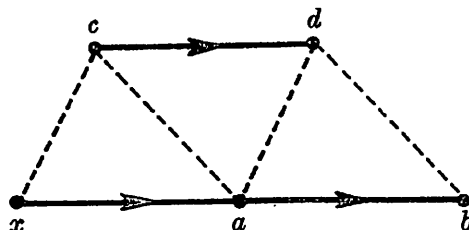
3. x est le point que l'on demande.

Démonstration : $\left. \begin{array}{l} (a, b) \uparrow (c, d) \\ (c, d) \uparrow (b, x) \end{array} \right\} \Rightarrow (a, b) \uparrow (b, x)$

2. On donne : le couple (a, b)

On demande : le point x tel que $(x, a) \uparrow (a, b)$

Construction :



1. construire un parallélogramme $abcd$

2. construire le parallélogramme $cdxa$

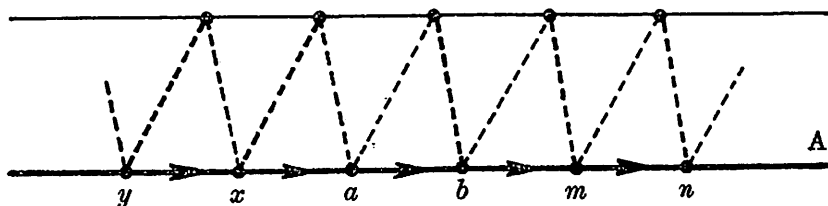
3. x est le point que l'on demande.

Démonstration !

3. On donne : le couple (a, b)

On demande : la construction de... $(y, x) \uparrow (x, a) \uparrow (a, b) \uparrow (b, m) \uparrow (m, n) \dots$

Construction :

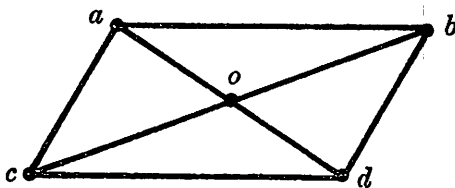
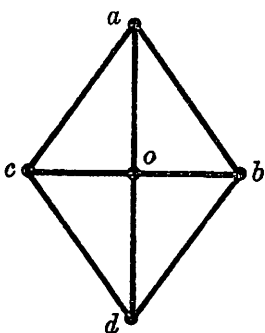


Démonstration !

Cette construction est appelée graduation de la droite A.

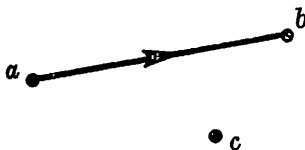
Exercices

1. Enumérez tous les couples équipollents dans les figures suivantes :



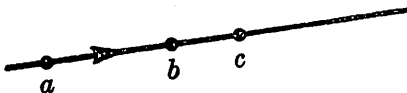
2. On donne le couple (a, b) et $c \notin ab$

On demande : 1. le point x tel que $(a, b) \uparrow (c, x)$
 2. le point y tel que $(a, b) \uparrow (y, c)$

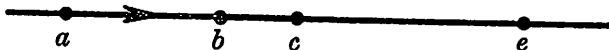


3. On donne le couple (a, b) et $c \in ab$

On demande : 1. le point x tel que $(a, b) \uparrow (c, x)$
 2. le point y tel que $(a, b) \uparrow (y, c)$



4. Construisez $(c, d) \uparrow (a, b) \uparrow (f, e)$.



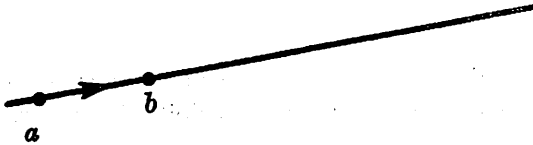
5. Construisez c, d et e tels que $(a, b) \uparrow (b, c) \uparrow (c, d) \uparrow (d, e)$

Démontrez que :

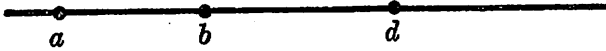
$$(a, c) \uparrow (b, d)$$

$$(e, c) \uparrow (d, b)$$

$$(a, d) \uparrow (b, e).$$



6. Construisez c, e , et f tels que : $(b, d) \uparrow (d, f)$
 $(a, b) \uparrow (c, d) \uparrow (e, f).$



Démontrez que :

$$(a, c) \uparrow (d, f)$$

$$(b, c) \uparrow (d, e)$$

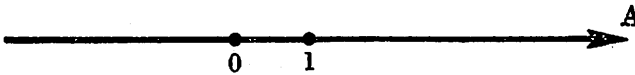
$$(a, d) \uparrow (c, f)$$

$$(f, b) \uparrow (e, a)$$

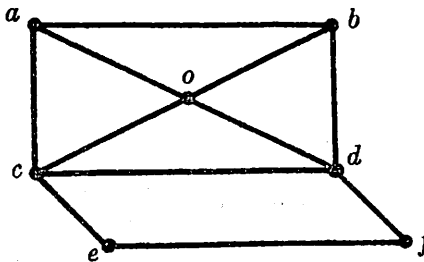
$$(b, d) \uparrow (c, e)$$

$$(d, c) \uparrow (b, a)$$

7. Graduez l'axe A. Numérotez les points trouvés. Qu'obtenez-vous ?



8. E est l'ensemble de tous les couples équipollents de la figure suivante. Dessinez le graphe de $R : E \rightarrow E$ « ... $\uparrow$... »
 Quelle relation obtenez-vous ?



CHAPITRE X

PROJECTION PARALLÈLE DE COUPLES ÉQUIPOLLENTS

Rappelons qu'un théorème énonce une propriété qui n'est pas évidente par elle-même et que l'on doit démontrer, c'est-à-dire en montrant la validité par raisonnement.

Théorème I

Les projections parallèles ($//D$) d'un couple (a, b) sur deux droites parallèles A et B sont des couples équipollents.

Hypothèse : (a, b)

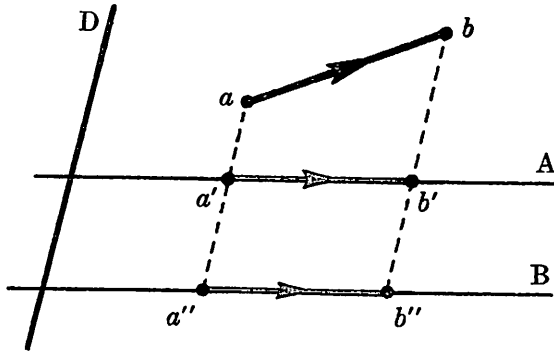
(a', b') projection de (a, b) sur A, $// D$

(a'', b'') projection de (a, b) sur B, $// D$.

$A // B$

Thèse : $(a', b') \uparrow (a'', b'')$

Démonstration :



$$A // B \Rightarrow a' b' // a'' b''$$

$$a' a'' // L$$

$$b' b'' // L$$

$$\left. \begin{array}{l} a' a'' // L \\ b' b'' // L \end{array} \right\} \Rightarrow a' a'' // b' b'' \quad \left. \begin{array}{l} A // B \Rightarrow a' b' // a'' b'' \\ a' a'' // b' b'' \end{array} \right\} \Rightarrow (a', b') \text{ est uni à } (a'', b'') \text{ par un parallélogramme} \Rightarrow (a', b') \uparrow (a'', b'')$$

Théorème II

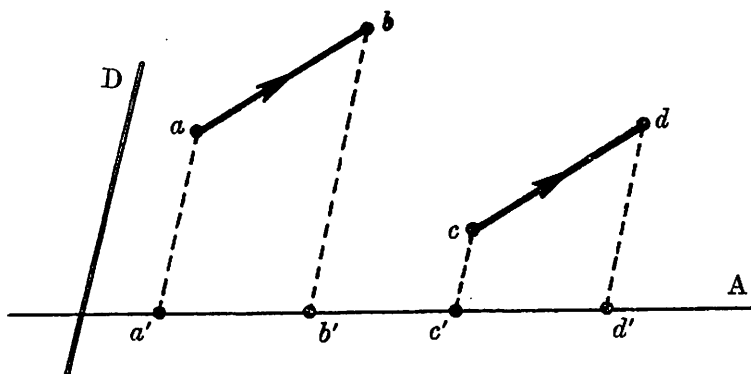
Les projections parallèles ($// D$) de couples équipollents (a, b) et (c, d) sur une droite A sont des couples équipollents.

Hypothèse : $(a, b) \uparrow (c, d)$

(a', b') projection de (a, b) sur A , $// D$

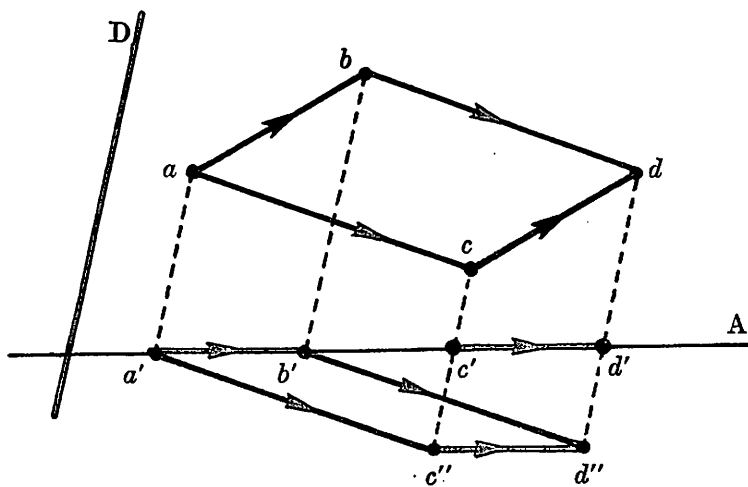
(c', d') projection de (c, d) sur A , $// D$.

Thèse : $(a', b') \uparrow (c', d')$



Démonstration :

Tracer $a'c'' // ac$ jusqu'au point de rencontre c'' avec cc' et $b'd'' // bd$ jusqu'au point de rencontre d'' avec dd' .



$$\begin{aligned} \text{On a } (a, c) \uparrow (a', c'') \\ (b, d) \uparrow (b', d'') \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Mais } (a, b) \uparrow (c, d)$$

$$\text{Donc } (a, c) \uparrow (b, d) \quad (2)$$

De (1) et (2) on déduit

$$(a', c'') \uparrow (b', d'')$$

$$\Rightarrow (a', b') \uparrow (c'', d'')$$

$$\Rightarrow a' b' \parallel c'' d'' \parallel c' d'$$

$$\Rightarrow (a', b') \uparrow (c'', d'') \} \Rightarrow (a', b') \uparrow (c', d')$$

$$\text{et } (c', d') \uparrow (c'', d'') \}$$

car $aca'c''$ et $bdb'd''$ sont des parallélogrammes.

hypothèse

croisement d'équipollence

l'équipollence est transitive

croisement d'équipollence

l'équipollence est transitive

Théorème III

Les projections parallèles ($\parallel D$) de couples équipollents (a, b) et (c, d) sur deux droites parallèles A et B, sont des couples équipollents.

Hypothèse : $(a, b) \uparrow (c, d)$

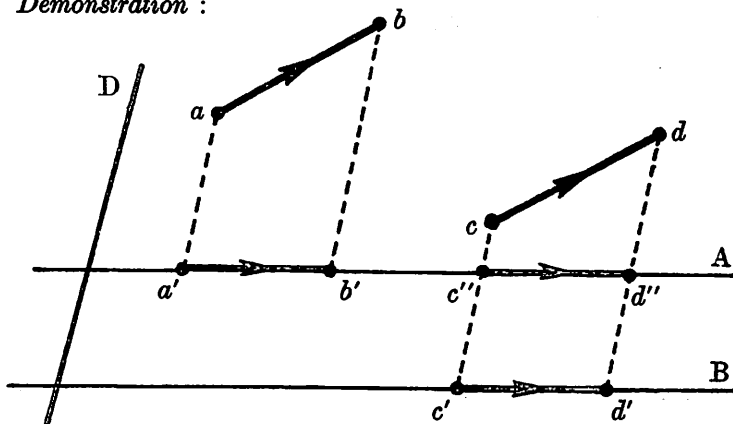
(a', b') projection de (a, b) sur A, $\parallel D$

(c', d') projection de (c, d) sur B, $\parallel D$

A $\parallel$ B

Thèse : $(a', b') \uparrow (c', d')$

Démonstration :



$$(a, b) \uparrow (c, d) \Rightarrow (a', b') \uparrow (c'', d'')$$

$$\Rightarrow (c', d') \uparrow (c'', d'')$$

$$\text{Donc } (a', b') \uparrow (c', d')$$

théorème II

théorème I

l'équipollence est transitive

Ces théorèmes nous permettent de conclure :

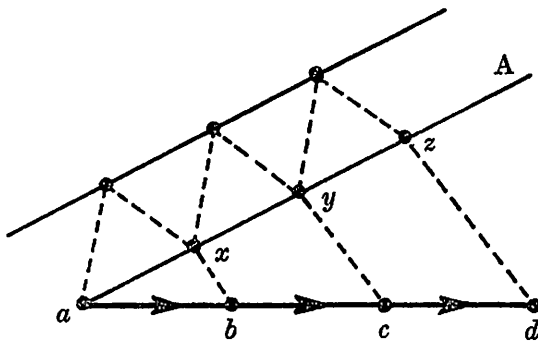
Les projections parallèles conservent l'équipollence

Construction

On donne : $[ad]$

On demande : déterminer b et c tels que $(a, b) \uparrow (b, c) \uparrow (c, d)$

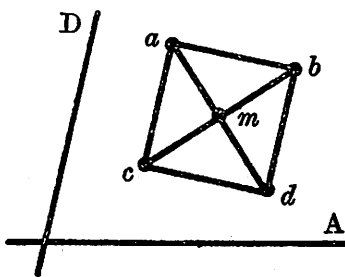
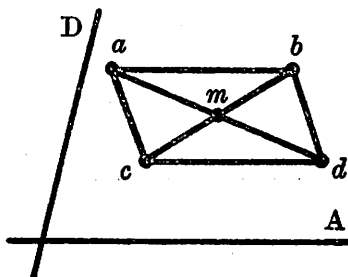
Construction :



1. par a , mener une droite A
2. sur A , construire $(a, x) \uparrow (x, y) \uparrow (y, z)$
3. joindre z à d
4. par x et y , mener des droites parallèles à zd
5. les intersections b et c de ces parallèles avec ad sont les points demandés. Justifiez.

Exercices

1. Projetez les figures suivantes sur A , parallèlement à D .



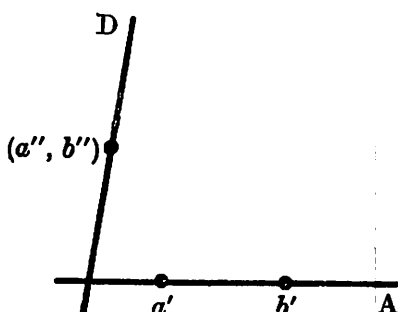
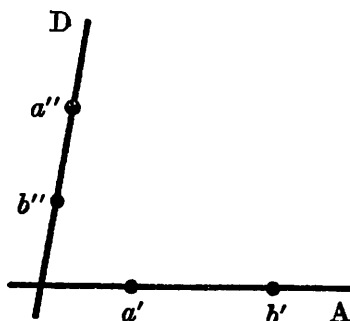
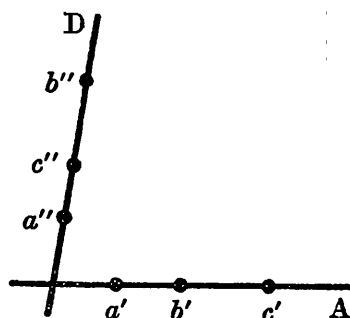
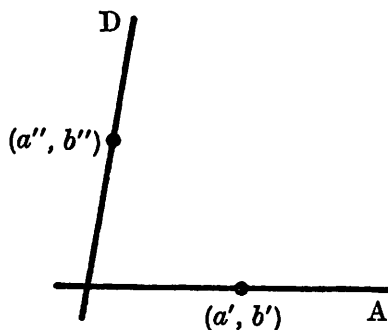
Enumérez tous les couples équipollents situés sur A .

2. Dans les figures suivantes,

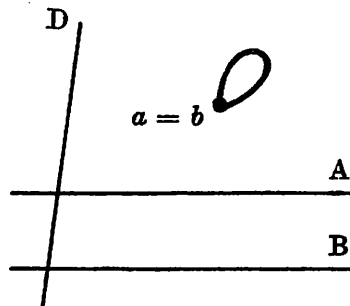
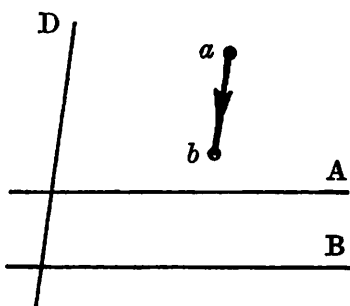
(a', b') , (a', c') , (b', c') sont les projections de (a, b) , (a, c) , (b, c) sur A , $\parallel D$.

(a'', b'') , (a'', c'') , (b'', c'') sont les projections de (a, b) , (a, c) , (b, c) sur D , $\parallel A$.

Dessinez les couples (a, b) , (a, c) et (b, c) .



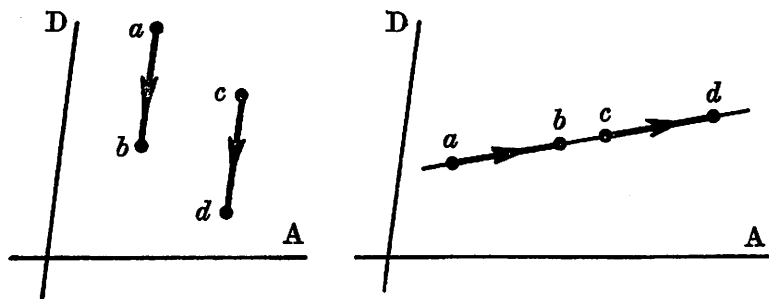
3. Démontrez le théorème I dans les cas suivants :



4. Les projections parallèles d'un couple (a, b) sur trois droites parallèles A , B et C , sont des couples équipollents.

Démontrez.

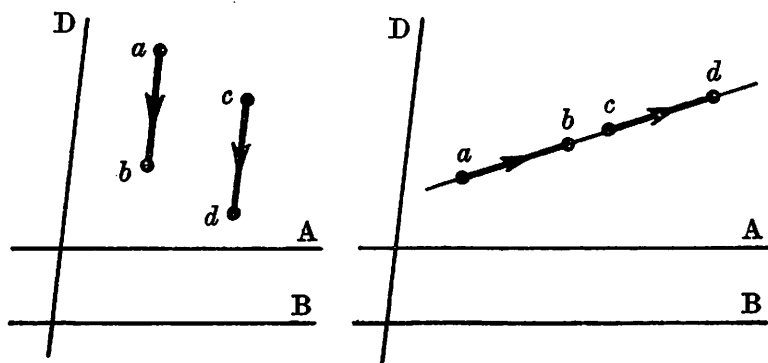
5. Démontrez le théorème II dans les cas suivants :



Dessinez un couple auxiliaire
 $(x, y) \uparrow (a, b) \uparrow (c, d)$.

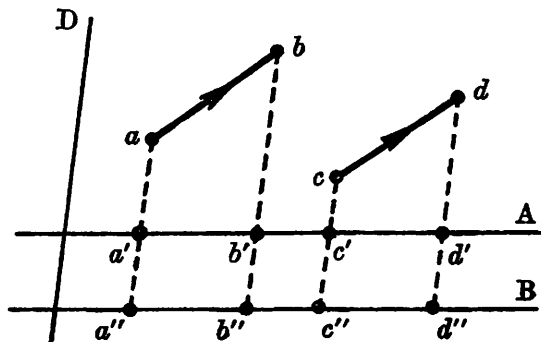
6. Les projections parallèles de couples équipollents (a, b) , (c, d) et (e, f) sur une droite A sont des couples équipollents.
 Démontrez.

7. Démontrez le théorème III dans les cas suivants :



8. On donne $(a, b) \uparrow (c, d)$.

Démontrez que $(a', b') \uparrow (a'', b'') \uparrow (c', d') \uparrow (c'', d'')$.



9. Les projections parallèles de couples équipollents (a, b) , (c, d) et (e, f) sur trois droites parallèles A, B et C sont des couples équipollents. Démontrez.

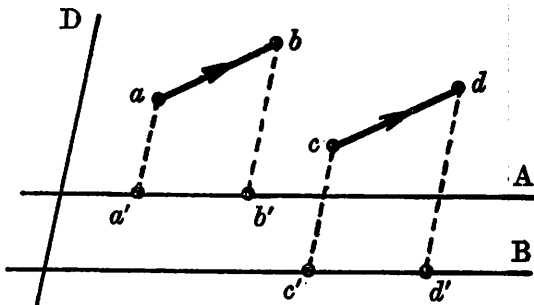
10. On donne

$$(a, b) \uparrow (c, d).$$

Démontrez que :

$$(a, c) \uparrow (b, d)$$

$$(a', c') \uparrow (b', d').$$

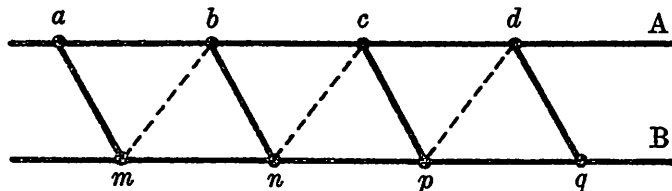


11. On donne : $A \parallel B$

$$(a, m) \parallel (b, n) \parallel (c, p) \parallel (d, q)$$

$$(b, m) \parallel (c, n) \parallel (d, p).$$

Démontrez que $(a, b) \uparrow (b, c) \uparrow (c, d) \uparrow (m, n) \uparrow (n, p) \uparrow (p, q)$.



12. Construisez c , d et e tels que $(a, c) \uparrow (c, d) \uparrow (d, e) \uparrow (e, b)$.



Quels sont les nombres correspondants aux points c , d et e ?

13. Graduez la droite A pour que $\dots \uparrow (n, m) \uparrow (m, a) \uparrow (a, b) \uparrow (b, c) \uparrow (c, d) \uparrow \dots$



Construisez les points x et y tels que $(a, x) \uparrow (x, y) \uparrow (y, b)$.

Quels sont les nombres qui correspondent à x et à y ?

Faites également la construction pour les autres couples.

Qu'obtenez-vous ?

CHAPITRE XI

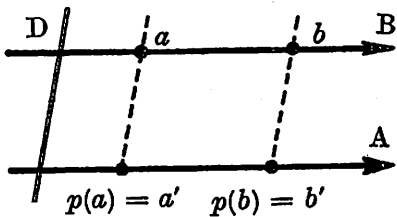
PROJECTION PARALLÈLE ET ORDRE

Projection d'un axe (droite orientée) sur un autre axe

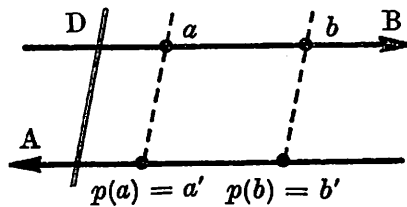
Soient A et B deux droites orientées coupant D.

Projetons B sur A, parallèlement à D. Les cas suivants peuvent se présenter :

1. $A \parallel B$

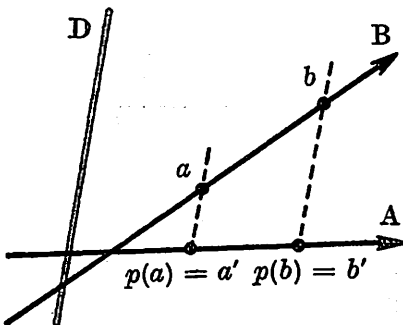


$a < b$ et $p(a) < p(b)$
 $\Rightarrow$ la projection de B sur A, $\parallel D$ est croissante.
 A et B sont de même sens.
 L'ordre est conservé.

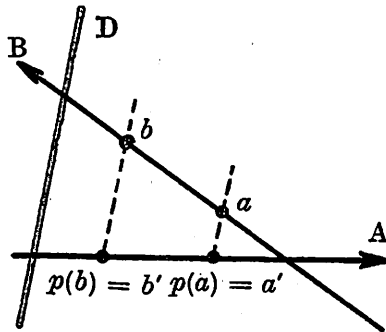


$a < b$ et $p(a) > p(b)$
 $\Rightarrow$ la projection de B sur A, $\parallel D$ est décroissante.
 A et B sont de sens opposés.
 L'ordre est inversé.

2. $A \nparallel B$



$a < b$ et $p(a) < p(b)$
 $\Rightarrow$ la projection est croissante.
 L'ordre est conservé.



$a < b$ et $p(a) > p(b)$
 $\Rightarrow$ la projection est décroissante.
 L'ordre est inversé.

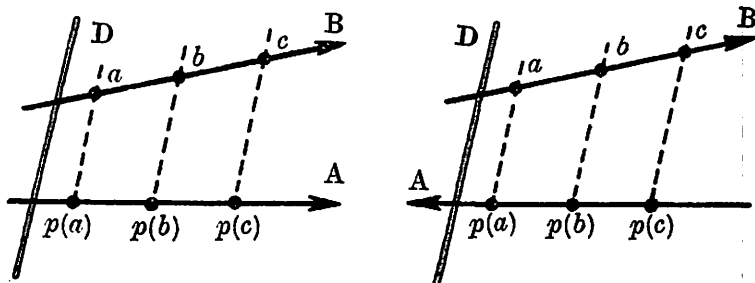
Conclusion :

La projection de l'axe B sur l'axe A, // D

conserve l'ordre (est croissante) ou
inverse l'ordre (est décroissante).

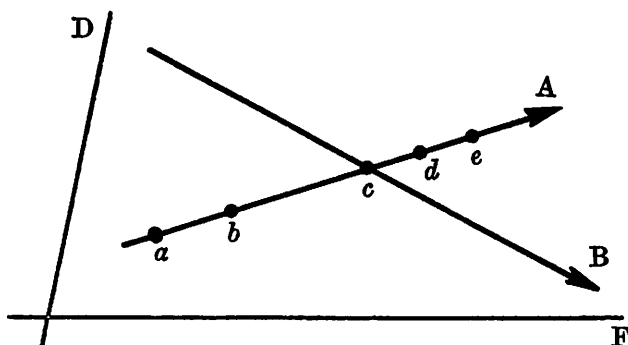
Corrolaire :

Lorsque b est situé entre a et c sur B, $p(b)$ obtenu par projection parallèle de B sur A se trouve entre $p(a)$ et $p(c)$.



Exercices

1.



Complétez : $a < b \dots c \dots d \dots e$

A) Projetez A sur B, // D et trouvez a', b', c', d', e' .

Complétez $a' \dots b' \dots c' \dots d' \dots e'$.

L'ordre est ... La projection est ...

B) Projetez A sur B, // F et trouvez a'', b'', c'', d'', e'' .

Complétez : $a'' \dots b'' \dots c'' \dots d'' \dots e''$.

L'ordre est ... La projection est ...

2. Complétez : $a \dots b \dots c \dots d$

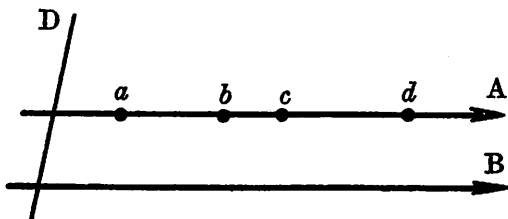
A) Projetez A sur B, $\parallel$ D et trouvez a', b', c', d' .

Complétez : $a' \dots b' \dots c' \dots d'$.

L'ordre est ...

La projection est ...

A et B ont ...



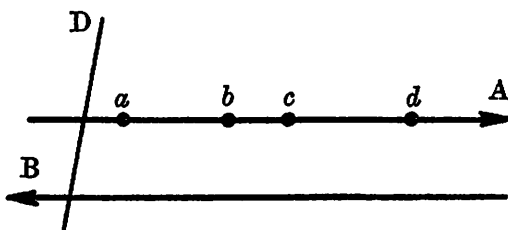
B) Projetez A sur B, $\parallel$ D et trouvez a', b', c', d' .

Complétez : $a' \dots b' \dots c' \dots d'$

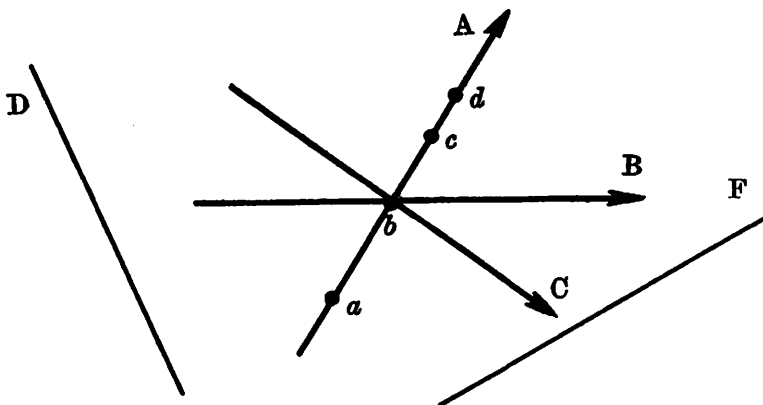
L'ordre est ...

La projection est ...

A et B ont ...



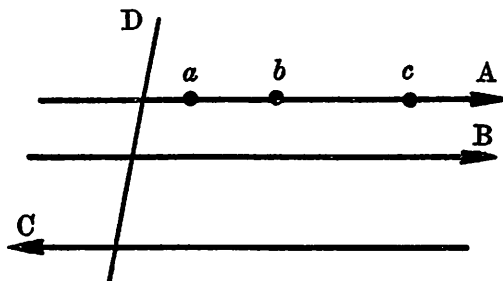
3.



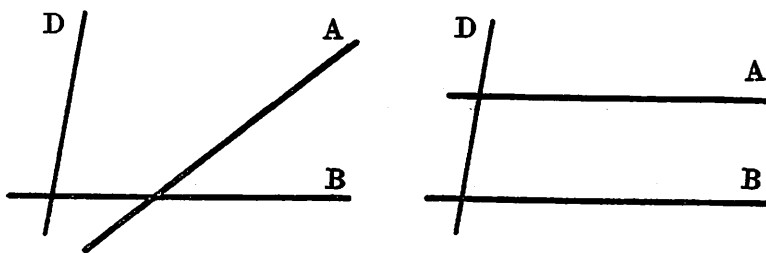
Projetez A sur B et C, $\parallel$ D et comparez l'ordre des projections à celui sur A.

Projetez A sur B et C, $\parallel$ F et comparez l'ordre des projections à celui sur A.

4. Projetez A sur B et C, // D et comparez l'ordre sur A à celui que l'on trouve sur les projections.



5. Orientez les droites A et B de manière qu'après projection de A sur B, // D
- l'ordre soit conservé
 - l'ordre soit inversé.



Représentez tous les cas possibles.

CHAPITRE XII

MILIEU D'UN SEGMENT

1. Milieu d'un couple



m est le milieu de (a, b)
 $\Leftrightarrow (a, m) \uparrow (m, b)$

2. Théorème

Si m est le milieu de (a, b) , alors m est le milieu de (b, a) .

Démonstration :

m est le milieu de (a, b)
 $\Rightarrow (a, m) \uparrow (m, b)$
 $\Rightarrow (m, a) \uparrow (b, m)$
 $\Rightarrow (b, m) \uparrow (m, a)$
 $\Rightarrow m$ est le milieu de (b, a)

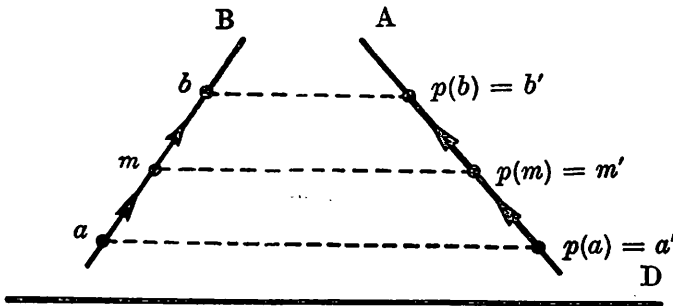
équipollence réciproque
 l'équipollence est symétrique

Corrolaire :

L'ordre des points a et b n'importe pas. Nous pouvons donc indifféremment parler du milieu du couple (a, b) ou du segment $[ab]$.

3. Théorème

La projection parallèle conserve le milieu d'un segment.



Hypothèse : $(a, m) \uparrow (m, b)$

$p(a) = a'$ est la projection de a sur A , $\parallel D$

$p(b) = b'$ est la projection de b sur A , $\parallel D$

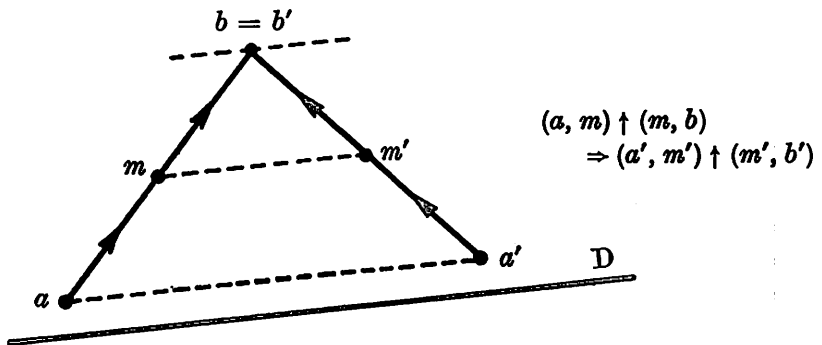
$p(m) = m'$ est la projection de m sur A , $\parallel D$.

Thèse : $(a', m') \uparrow (m', b')$ ou m' est le milieu de (a', b') .

Démonstration : $(a, m) \uparrow (m, b) \Rightarrow (a', m') \uparrow (m', b') \Rightarrow m'$ est le milieu de (a', b') car la projection parallèle conserve l'équipolence.

Remarque :

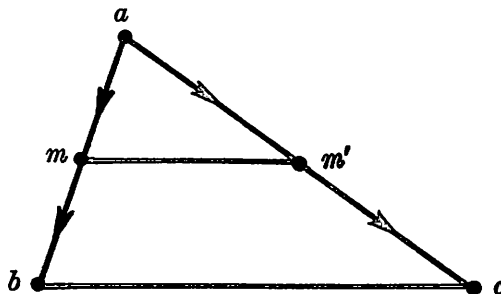
Le théorème reste valable pour $b = b'$.



Lorsqu'une droite, passant par le milieu d'un côté d'un triangle, est parallèle au deuxième côté, elle divise également le troisième côté en deux parties égales.

4. Théorème

Si m est le milieu de (a, b) et m' le milieu de (a, c) , alors $mm' \parallel bc$.

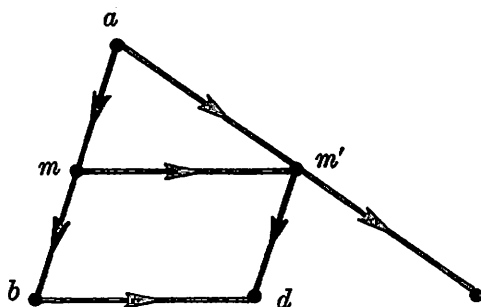


Hypothèse : $(a, m) \uparrow (m, b)$
 $(a, m') \uparrow (m, c)$

Thèse : $mm' \parallel bc$.

Démonstration :

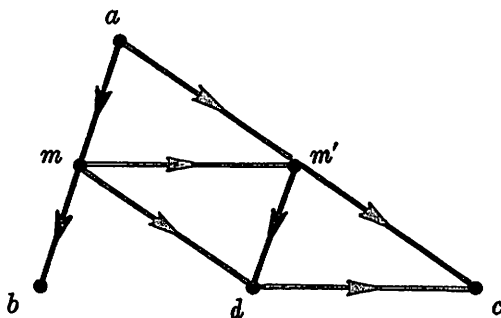
1. Construisez $(m', d) \uparrow (a, m)$.



Or $(a, m) \uparrow (m', d)$
 et $(a, m) \uparrow (m, b)$
 $\Rightarrow (m', d) \uparrow (m, b)$
 $\Rightarrow mm'bd$ est un parallélogramme
 $\Rightarrow mm' \parallel bd$

l'équipollence est symétrique
 donnée
 l'équipollence est transitive
 définition de couples équipollents

2. Tracez md .



Or $(a, m) \uparrow (m', d)$
 $\Rightarrow (a, m') \uparrow (m, d)$
 Mais $(a, m') \uparrow (m', c)$
 $\Rightarrow (m, d) \uparrow (m', c)$
 $\Rightarrow mm'dc$ est un parallélogramme
 $\Rightarrow mm' \parallel dc$

croisement d'équipollence
 donnée

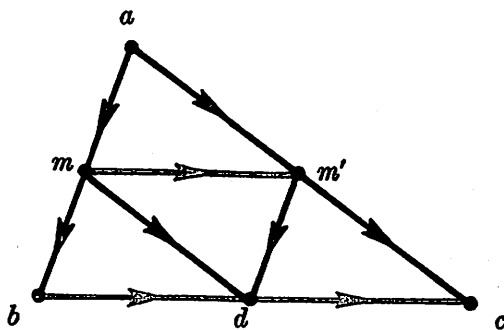
l'équipollence est transitive

définition de couples équipol-
 lents.

3. Combinez les 2 figures.

$$\left. \begin{array}{l} mm' \parallel bd \\ mm' \parallel dc \end{array} \right\} \Rightarrow mm' \parallel bc$$

car, en vertu de l'axiome d'Euclide, par d passe une et une seule droite parallèle à mm' .



Corrolaire :

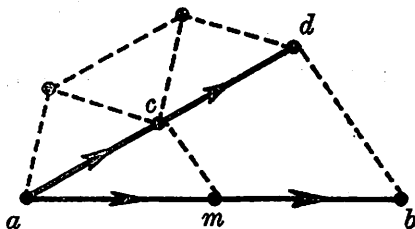
Le segment joignant les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté.

5. Construction

On donne : le segment $[ab]$

On demande : le milieu m de $[ab]$

Construction :



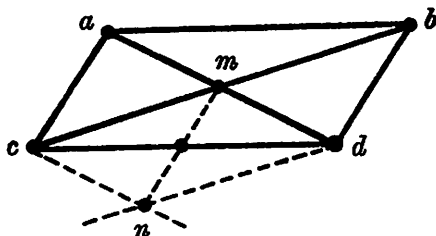
1. par a , tracer une droite quelconque
2. sur cette droite, prendre un point c et construire $(c, d) \uparrow (a, c)$
3. joindre d et b
4. par c , tracer $[cm] \parallel [db]$
5. m est le point demandé.

Démonstration : $(a, c) \uparrow (c, d) \Rightarrow (a, m) \uparrow (m, b)$ car les projections parallèles conservent le milieu d'un segment.

Exercices

1. On donne le couple (a, b) .
On demande : 1) Construire (b, c) tel que $(a, b) \uparrow (b, c)$.
2) Que représente b par rapport à a et c ?
2. On donne le couple (a, b) .
On demande de construire $(b, c), (c, d), (d, e)$ tels que $(a, b) \uparrow (b, c) \uparrow (c, d) \uparrow (d, e)$.
Complétez : c est le milieu de ...
 b est le milieu de ...
 e est le milieu de ...
3. Démontrez à l'aide des projections parallèles que les diagonales d'un parallélogramme se coupent mutuellement en leurs milieux.
4. Construisez un parallélogramme ayant $[ab]$ comme diagonale.
5. Des exercices 3 et 4, déduisez une deuxième méthode de construction du milieu d'un segment $[ab]$.

6. Si, par l'intersection m des diagonales d'un parallélogramme, on mène la droite $X \parallel ac \parallel bd$ et si $X \cap [cd] = \{p\}$, alors p est le milieu de $[cd]$. Démontrez.
7. De l'exercice 6, déduisez une troisième construction du milieu d'un segment $[ab]$.
8. Soit $(a, m) \uparrow (m, d)$
 $(c, m) \uparrow (m, b)$



Démontrez que $abcd$ est un parallélogramme.

Construction : Par c , mener une droite $\parallel ad$ et par d une droite $\parallel bc$.

$\Rightarrow mdcn$ est un parallélogramme.

Énoncez la propriété.

9. Dans un quadrilatère $abcd$, on a :

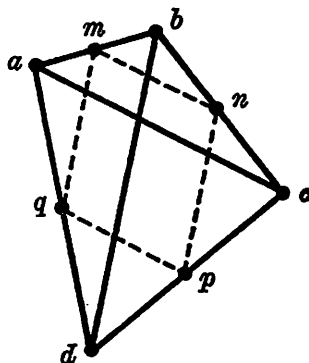
$$(a, m) \uparrow (m, b)$$

$$(b, n) \uparrow (n, c)$$

$$(c, p) \uparrow (p, d)$$

$$(d, q) \uparrow (q, a)$$

Démontrez que $mnpq$ est un parallélogramme.



10. On donne le parallélogramme $abcd$ et la droite $X \parallel ad$.

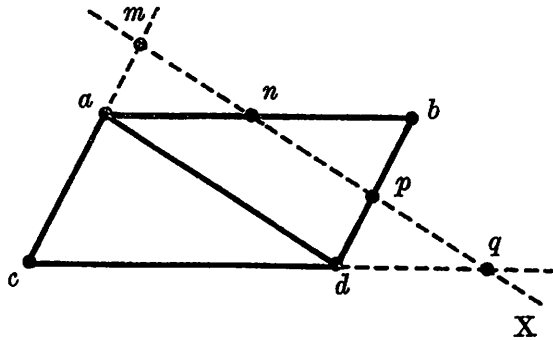
Démontrez que :

$$(a, m) \uparrow (d, p)$$

$$(a, n) \uparrow (d, q)$$

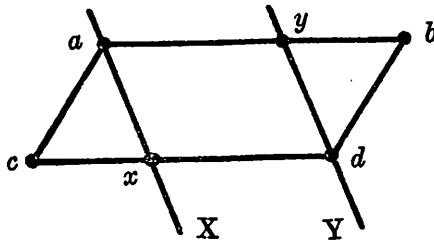
$$(m, n) \uparrow (p, q)$$

$$(m, p) \uparrow (n, q)$$



11. Si, dans le parallélogramme $abcd$ on a $X \parallel Y$, alors $[ad]$ et $[xy]$ se coupent en leurs milieux.

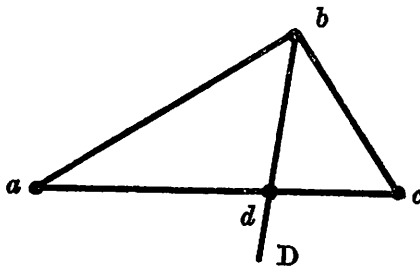
Démontrez.



12. Par le sommet b d'un triangle abc , mener une droite D coupant $[ac]$ en d .

Construire le milieu m de $[ab]$. Par m , tracer la droite $F \parallel D$ coupant $[ac]$ en p .

Démontrez que $(a, p) \uparrow (p, d)$.



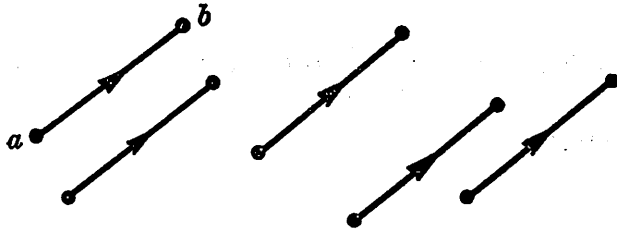
CHAPITRE XIII

TRANSLATION

1. Rappel

L'ensemble de tous les couples, équipollents à (a, b) est appelé translation ab .

$$\vec{ab} = \{ (x, y) \mid (x, y) \in \Pi \times \Pi \text{ et } (x, y) \uparrow (a, b) \}$$



Dans cette translation, (a, b) est le couple générateur de la translation et b est l'image de a par la translation ab .

Dans Π , tout couple donne lieu à une translation. Il existe donc une infinité de translations dans le plan Π :

$$t_1, t_2, t_3, t_4, \dots$$

L'ensemble de toutes ces translations est représenté par T .

$$T = \{ t_1, t_2, t_3, t_4, \dots \}$$

Remarques :

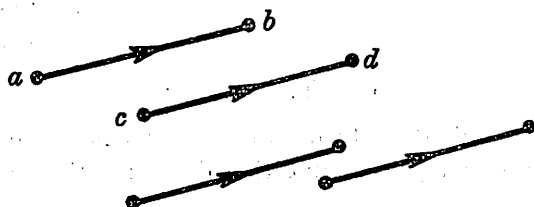
1. Si $a = b$, alors $\vec{aa}$ est appelé translation identique i .

$$i = \{ (x, x) \mid (x, x) \in \Pi \times \Pi \}$$



2. $(a, b) \uparrow (c, d) \Rightarrow \vec{ab} = \vec{cd}$, c'est-à-dire que deux couples équipollents déterminent la même translation.

$\vec{ab} = \vec{cd} \Rightarrow (a, b) \uparrow (c, d)$, c'est-à-dire que deux translations égales ont leurs couples générateurs équipollents.



Donc : $(a, b) \uparrow (c, d) \Leftrightarrow \vec{ab} = \vec{cd}$.

3. Toute translation est une permutation de Π .

4. La translation réciproque de $\vec{ab}$ est $(\vec{ab})^{-1}$ ou $\vec{ba}$

$$\vec{ba} = \{ (x, y) \mid (x, y) \in \Pi \times \Pi \text{ en } (x, y) \uparrow (b, a) \}$$

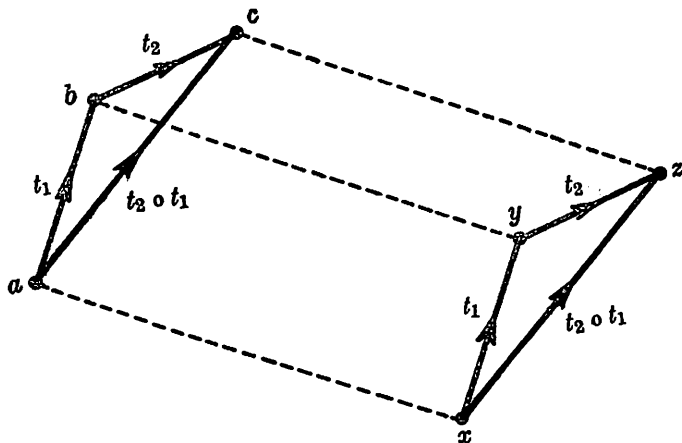
2. Composition de translations

1. Propriété I

Envisageons les translations t_1 et t_2 .

$$\vec{ab} = \vec{xy} = t_1 \in T$$

$$\vec{bc} = \vec{yz} = t_2 \in T$$



Démontrons que $\vec{ac} = \vec{xz} = t_2 \circ t_1$.

$(x, y) \uparrow (a, b)$ en $(y, z) \uparrow (b, c)$ $\Rightarrow (x, a) \uparrow (y, b)$ en $(y, b) \uparrow (z, c)$ $\Rightarrow (x, a) \uparrow (z, c)$ $\Rightarrow (x, z) \uparrow (a, c)$ $\Rightarrow \vec{xz} = \vec{ac}$	par définition de la translation croisement d'équipollence l'équipollence est transitive croisement d'équipollence des couples équipollents détermi- nent la même translation.
---	---

Donc : $\vec{xz} = \vec{ac} = t_2 \circ t_1 \in T$.

La composée de deux translations est une nouvelle translation ; en d'autres mots, la composition de translations est interne et partout définie dans T .

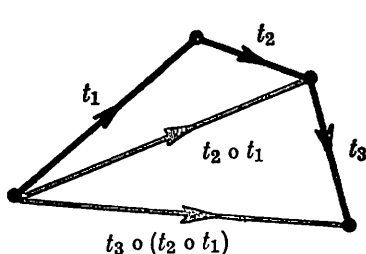
$$\forall t_1, t_2 \in T : t_2 \circ t_1 = t_3 \in T$$

2. Propriété II

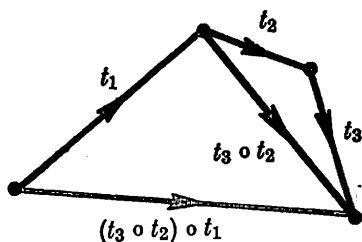
La composition de relations est une opération associative.

Or, toute translation est une relation.

Donc, la composition de translations est associative.



$$\underline{\underline{t_3 \circ (t_2 \circ t_1)}}$$



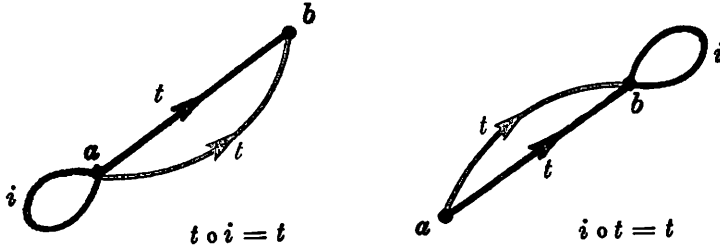
$$\underline{\underline{(t_3 \circ t_2) \circ t_1}}$$

Donc :

$$\forall t_1, t_2, t_3 \in T : t_3 \circ (t_2 \circ t_1) = (t_3 \circ t_2) \circ t_1 = t_3 \circ t_2 \circ t_1$$

3. Propriété III

Examinons la composition d'une translation t et de la translation identique i .



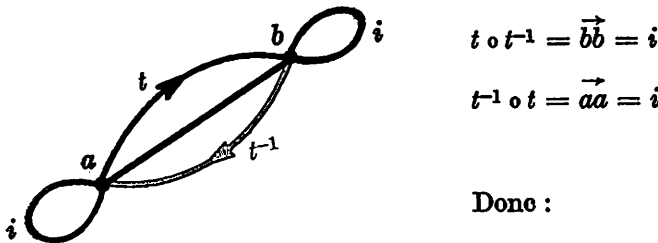
La translation identique i est l'élément neutre de la composition de translations.

$$\exists i \in T, \forall t \in T : t \circ i = t = i \circ t$$

4. Propriété IV

Soit b l'image de a par la translation t . L'image de b par la translation t^{-1} nous donne le point a .

Cette composition donne donc la translation identique i .



Donc :

$$\forall t \in T, \exists t^{-1} \in T : t^{-1} \circ t = i = t \circ t^{-1}$$

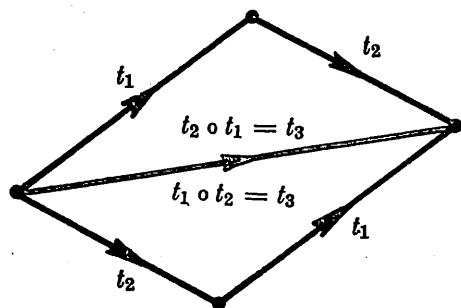
Toute translation $t \in T$ a un élément symétrique $t^{-1} \in T$ et la composée est l'élément neutre i .

Des quatre propriétés précédentes, on déduit que :

$$T, \circ \text{ est un groupe}$$

5. Propriété V

Bien que les compositions de relations ne soient pas toujours des opérations commutatives, la composition de translations est commutative.



Envisageons le groupe $T, \circ$.
Dans le triangle supérieur, on a
 $t_2 \circ t_1 = t_3$
et dans le triangle inférieur, on a
 $t_1 \circ t_2 = t_3$

Le groupe $T, \circ$ est commutatif.

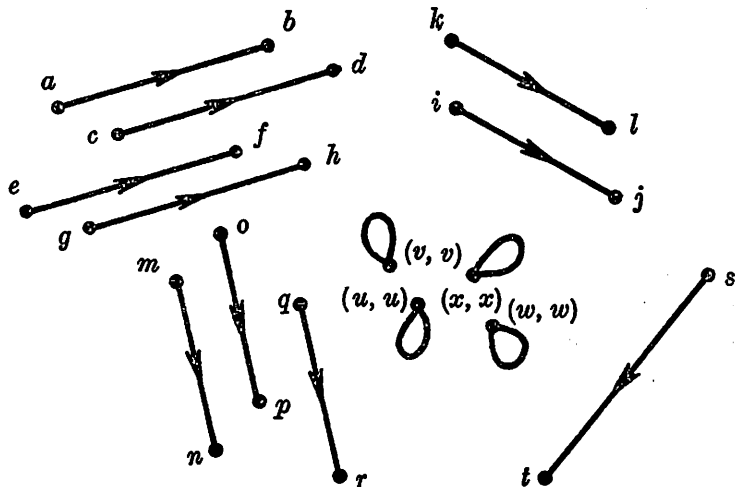
$$\forall t_1, t_2 \in T : t_2 \circ t_1 = t_1 \circ t_2$$

De cette propriété, nous concluons :

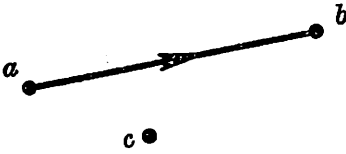
$T, \circ$ est un groupe commutatif

Exercices

1. Ecrivez la relation $R : \Pi \times \Pi \rightarrow \Pi \times \Pi$ « $\dots \uparrow \dots$ » pour les couples suivants et dessinez le graphe.
Quelle relation obtenez-vous ?

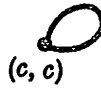


2. Dessinez l'image de c par la translation $\vec{ab}$.



3. Dessinez l'image de a par $\vec{cc}$.

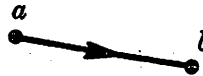
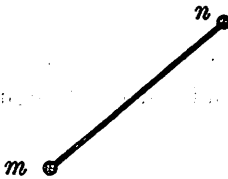
a



4. Dessinez l'image du segment $[mn]$

a) par $\vec{ab}$

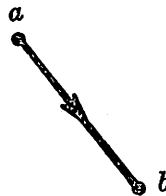
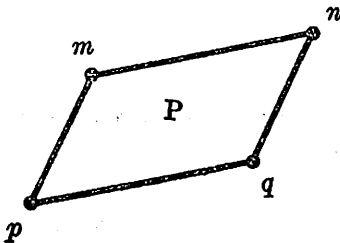
b) par $\vec{cc}$.



5. Dessinez l'image du parallélogramme P

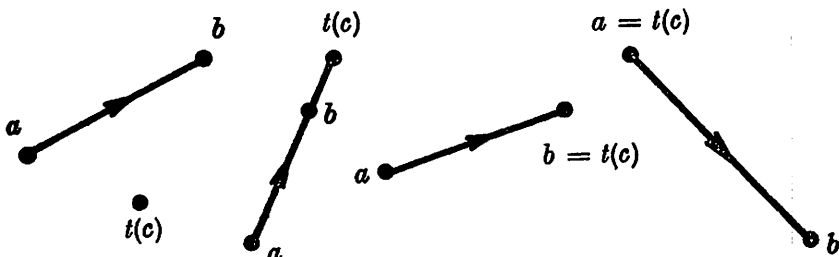
a) par $\vec{ab}$

b) par $\vec{cc}$.

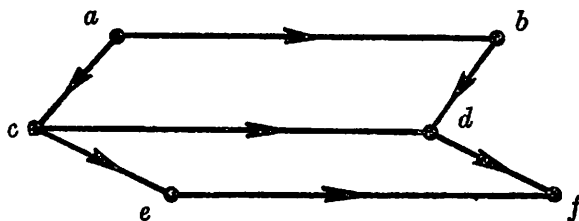


6. $t(c)$ est l'image de c par $\vec{ab}$.

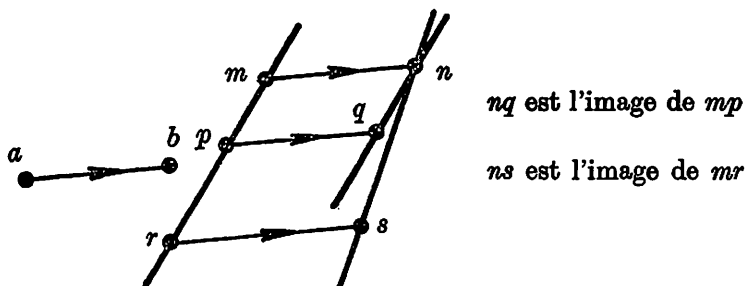
Trouvez le point c .



7. Combien de translations et lesquelles déterminent les couples de la figure suivante ?

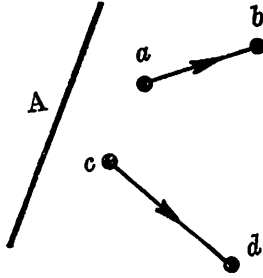


8. Démontrez que l'image d'une droite par $\vec{ab}$ est une droite parallèle à la droite donnée en montrant que la figure suivante est erronée.

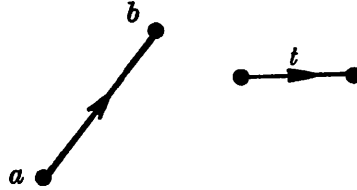


9. En vous basant sur l'exercice précédent, montrez que la translation ab conserve le parallélisme.
10. Montrez que l'image d'un parallélogramme par $\vec{ab}$ est un parallélogramme.

11. Dessinez l'image $t(A)$ de A par $\vec{ab}$ et l'image $t'(A)$ par $\vec{cd}$.
Montrez que $t(A) \parallel t'(A)$.



12. Démontrez que l'image d'un couple (a, b) par une translation t est un couple $(m, n) \uparrow (a, b)$.



13. Montrez qu'une translation conserve le milieu d'un couple.

14. Soit : $(a, b) \uparrow (c, d)$

$$(m, n) \in \vec{ab}$$

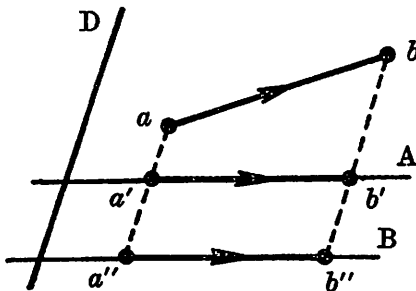
Démontrez que $(m, n) \in \vec{cd}$.

15. Projetez (a, b) sur A et B , $\parallel D$.

(a', b') et (a'', b'') déterminent-ils la même translation? Justifiez.

Quelle translation déterminent-ils lorsque $ab \parallel D$?

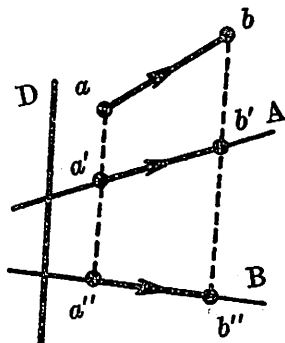
Dans quels cas (2 cas), le couple (a, b) et les deux projections déterminent-ils la même translation?



16. Projetez (a, b) sur A et B , $\parallel D$.

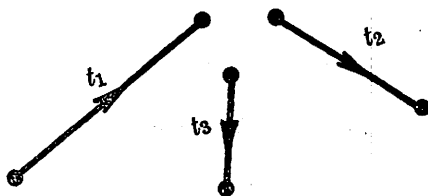
(a', b') et (a'', b'') déterminent-ils la même translation ? Justifiez.
Quelle translation déterminent-ils lorsque $ab \parallel D$?

Dans quels cas, le couple (a, b) et les deux projections déterminent-ils la même translation ?



17. Trouvez les composées de :

- | | |
|-----------------------|--|
| 1) $t_2 \circ t_1$ | 6) $t_1 \circ t_1^{-1}$ |
| 2) $t_3 \circ t_1$ | 7) $t_1^{-1} \circ t_2^{-1}$ |
| 3) $t_2 \circ t_3$ | 8) $t_2 \circ t_3 \circ t_1$ |
| 4) $i \circ t_1$ | 9) $t_3^{-1} \circ i \circ t_3 \circ i$ |
| 5) $t_2^{-1} \circ i$ | 10) $t_3^{-1} \circ t_2^{-1} \circ t_1^{-1}$ |



18. Simplifiez :

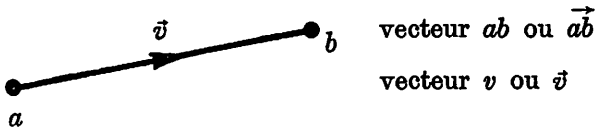
- | | |
|--|---|
| 1) $t_1 \circ t_2 \circ i$ | 5) $t_3 \circ i \circ t_2$ |
| 2) $t_1 \circ i$ | 6) $t_1 \circ t_2^{-1} \circ t_2 \circ i$ |
| 3) $t_1 \circ t_1^{-1} \circ t_2$ | 7) $i \circ i \circ t_1$ |
| 4) $t_1 \circ t_2 \circ t_1^{-1} \circ t_2^{-1}$ | 8) $t_1 \circ i \circ t_1^{-1} \circ i$ |

CHAPITRE XIV

VECTEURS

1. Notion

Un vecteur est une translation.



2. Convention

Translation

t

$\vec{ab}$

$\vec{aa} = i$

$t^{-1} = \vec{ba}$

$t_2 \circ t_1$ (composition)

T

Vecteur

$\vec{v}$

$\vec{ab}$

$\vec{aa} = \delta$ (vecteur nul)

$-\vec{v} = \vec{ba} = -\vec{ab}$

$\vec{v}_2 + \vec{v}_1$ (addition)

V

3. Propriété de V , $+$

A la composition de translations ($\in T$), correspond l'addition de vecteurs ($\in V$).

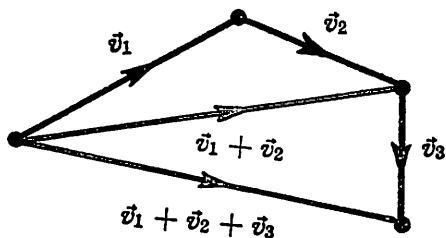
Puisque T , $\circ$ est un groupe commutatif et V , $+$ correspond à T , $\circ$, nous pouvons écrire :

V , $+$ est un groupe commutatif

4. Opérations sur les vecteurs

1. Addition

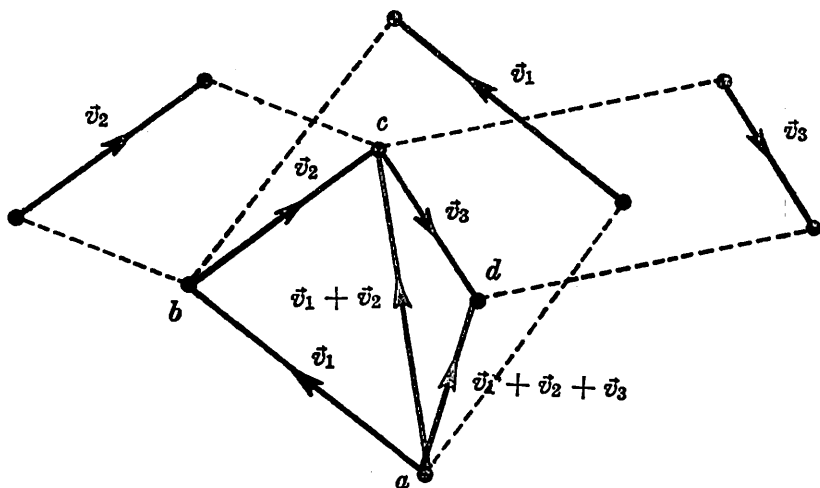
a) Vecteurs consécutifs (bout à bout)



b) Vecteurs quelconques

Soit $a \in \Pi$. Dessinez $\vec{ab} = \vec{v}_1$
 $\vec{bc} = \vec{v}_2$
 $\vec{cd} = \vec{v}_3$

et vous obtenez des vecteurs consécutifs.

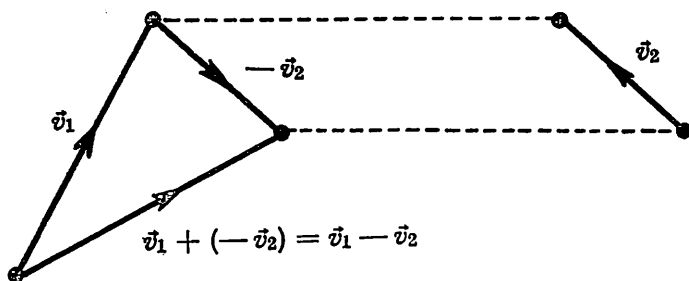


$$\vec{ad} = \vec{ab} + \vec{bc} + \vec{cd} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

2. Soustraction

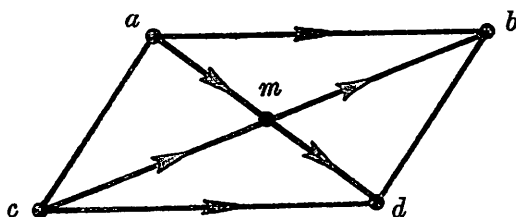
Pour soustraire un vecteur, on ajoute le vecteur opposé.

$$\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V : \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + (-\vec{v}_2)$$



5. Application au parallélogramme

1.



$abcd$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow (a, b) \uparrow (c, d)$.

(a, m) est la projection de (a, b) sur ad , $\parallel bc$

(m, d) est la projection de (c, d) sur ad , $\parallel bc$.

La projection parallèle conserve l'équipollence et donc

$(a, m) \uparrow (m, d) \Rightarrow m$ est le milieu de $[ad]$ (1)

(m, b) est la projection de (a, b) sur bc , $\parallel ad$.

(c, m) est la projection de (c, d) sur bc , $\parallel ad$.

Donc $(c, m) \uparrow (m, b) \Rightarrow m$ est le milieu de $[cb]$ (2)

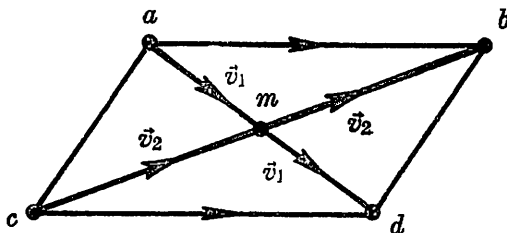
De (1) et (2) on déduit :

Les diagonales d'un parallélogramme se coupent mutuellement en leurs milieux.

2. $abcd$ est un quadrilatère et

$$(a, m) \uparrow (m, d) \Leftrightarrow \vec{am} = \vec{md} = \vec{v}_1 \text{ en}$$

$$(c, m) \uparrow (m, b) \Leftrightarrow \vec{cm} = \vec{mb} = \vec{v}_2$$

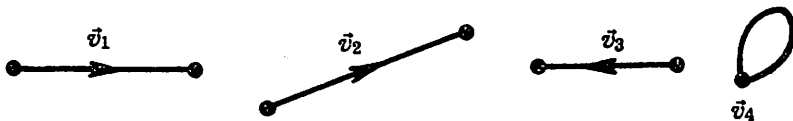


$$\left. \begin{array}{l} \text{Or } \vec{ab} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \\ \text{et } \vec{cd} = \vec{v}_2 + \vec{v}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{ab} = \vec{cd} \Rightarrow (a, b) \uparrow (c, d) \Rightarrow abcd \text{ est un parallélogramme.}$$

Si, dans un quadrilatère, les diagonales se coupent en leurs milieux, ce quadrilatère est un parallélogramme.

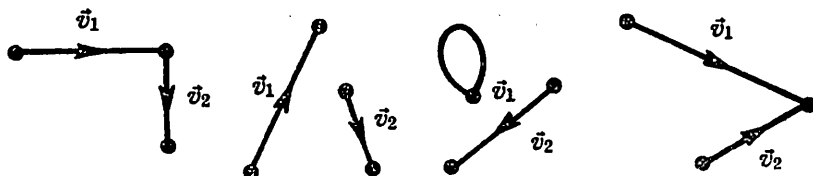
Exercices

1. Dessinez les vecteurs opposés.



2. Sur les vecteurs donnés, effectuez les opérations suivantes :

- 1) $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$
- 2) $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$
- 3) $-\vec{v}_1 + \vec{v}_2$
- 4) $-\vec{v}_1 - \vec{v}_2$

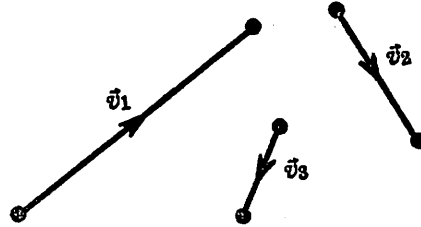


3. Montrez que l'addition de vecteurs est commutative.

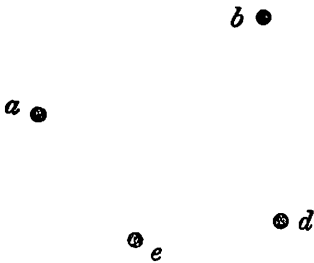
4. Montrez que l'addition de vecteurs est associative.

5. Construisez :

- 1) $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$
- 2) $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3$
- 3) $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \vec{v}_3$
- 4) $-\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3$
- 5) $-\vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \vec{v}_3$
- 6) $-\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$



6. Complétez :



1) $\vec{ac} + \vec{cd} =$

2) $\vec{ab} + \vec{bc} =$

3) $\vec{ad} + \vec{da} =$

4) $\vec{ac} + \vec{ce} =$

5) $\vec{ed} + \vec{dc} =$

6) $\vec{da} + \vec{ab} =$

7) $\vec{ac} + \vec{cd} + \vec{dc} =$

8) $\vec{ab} + \vec{bc} + \vec{cd} =$

9) $\vec{ca} + \vec{aa} + \vec{db} =$

10) $\vec{ab} + \vec{bc} + \vec{ca} =$

11) $\vec{ab} + \vec{bb} + \vec{bc} =$

12) $\vec{ac} + \vec{cd} + \vec{db} =$

13) $\vec{ab} + \vec{bd} + \vec{de} + \vec{ec} =$

14) $\vec{ca} + \vec{ab} + \vec{bd} + \vec{de} + \vec{ec} =$

15) $\vec{ab} - \vec{cb} =$

16) $\vec{ac} - \vec{dc} + \vec{de} =$

17) $\vec{ab} - \vec{cb} - \vec{dc} - \vec{ed} =$

18) $\vec{ac} - \vec{dc} + \vec{db} - \vec{eb} - \vec{ae} =$

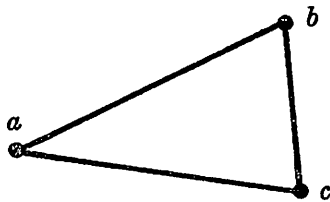
7. Complétez :

1) $\vec{ab} + \vec{bc} =$

2) $\vec{bc} + \vec{ca} =$

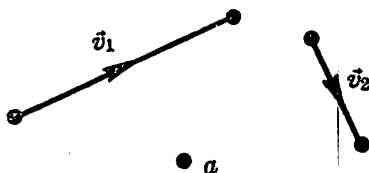
3) $\vec{ac} - \vec{bc} =$

4) $\vec{ab} + \vec{bc} - \vec{ac} =$

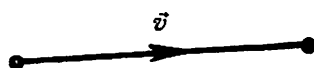


8. Dans chacune des opérations suivantes, dessinez le vecteur $\vec{v}$ ayant a pour origine :

- 1) $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$
- 2) $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$
- 3) $\vec{v} = -\vec{v}_1 + \vec{v}_2$
- 4) $\vec{v} = -\vec{v}_1 - \vec{v}_2$



9. Construisez : $-\vec{v}$ et $\vec{v} + (-\vec{v})$

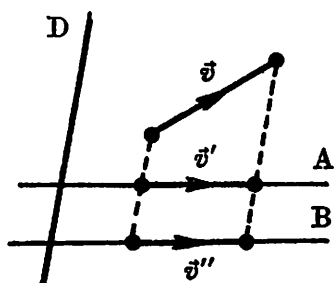


Complétez : la somme de 2 vecteurs opposés est ...

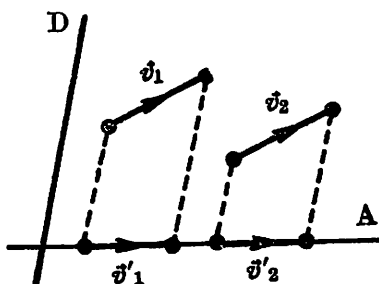
10. Simplifiez :

- 1) $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_2 - \vec{v}_1$
- 2) $\vec{v}_1 + \vec{v}_1 - \vec{v}_1 + \vec{v}_2$
- 3) $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_1$
- 4) $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_1 - \vec{v}_2$
- 5) $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_2 + \vec{v}_2 - \vec{v}_1 - \vec{v}_2$

11.



Démontrez que $\vec{v}' = \vec{v}''$



Démontrez que $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}'_1 = \vec{v}'_2$

12. On donne :

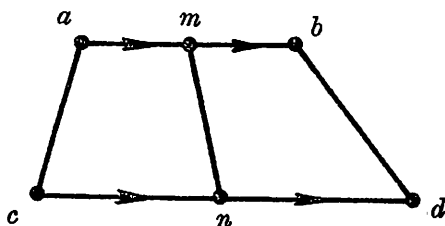
$$ab \parallel cd$$

$$(a, m) \uparrow (m, b)$$

$$(c, n) \uparrow (n, d)$$

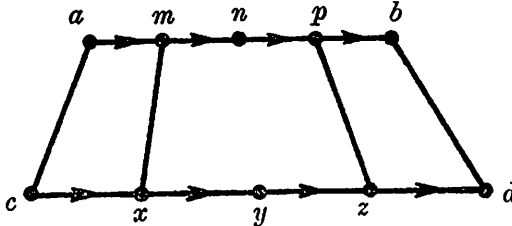
Démontrez :

$$\vec{ac} + \vec{bd} = 2 \vec{mn}$$



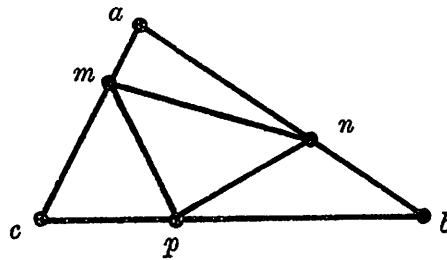
13. On donne : $(a, m) \uparrow (m, n) \uparrow (n, p) \uparrow (p, b)$
 $(c, x) \uparrow (x, y) \uparrow (y, z) \uparrow (z, d)$

Démontrez que $\vec{mx} + \vec{pz} = \vec{ac} + \vec{bd}$.



14. Démontrez que

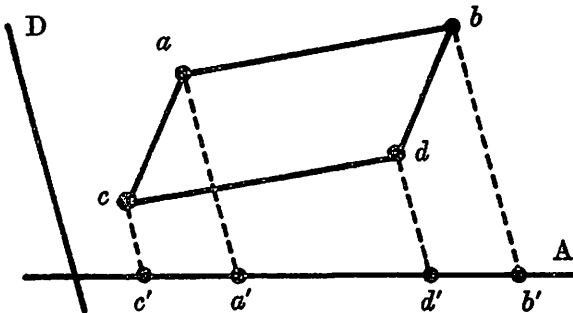
$$\vec{ab} + \vec{bc} + \vec{ca} = \vec{mn} + \vec{np} + \vec{pm}$$



15. On projette le parallélogramme sur A, // D.

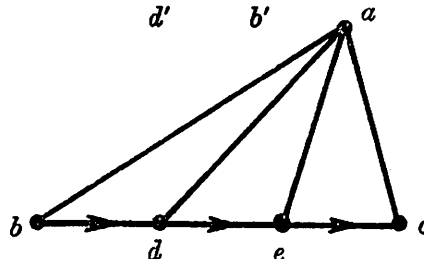
Démontrez :

1. $\vec{ca} + \vec{aa'} + \vec{a'c'} + \vec{c'c} = \vec{db} + \vec{bb'} + \vec{b'd'} + \vec{d'd}$
2. $\vec{c'c} + \vec{b'b} = \vec{a'a} + \vec{d'd}$.



16. Démontrez que

$$\vec{bd} = \vec{de} = \vec{ec} \Rightarrow \vec{ab} + \vec{ac} = \vec{ad} + \vec{ae}$$

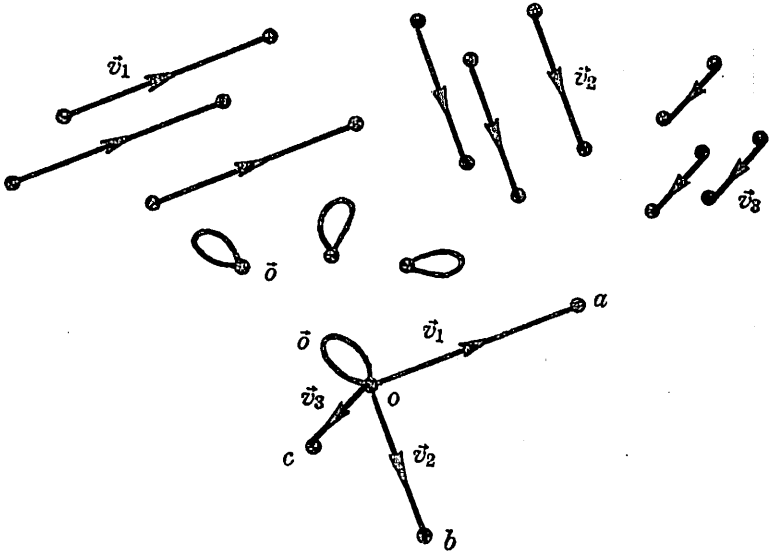


CHAPITRE XV

LE PLAN POINTÉ Π_0

1. Le plan pointé

Un vecteur est une translation se composant d'une infinité de couples équipollents.



Soit un point quelconque $o \in \Pi$. A chaque vecteur, appartient un seul couple ayant o pour origine.

Ce couple est appelé un vecteur lié.

Tout vecteur lié, ayant pour origine le point o , a une et une seule extrémité, par laquelle il est complètement déterminé.

C'est la raison pour laquelle on remplace souvent $\vec{o}\vec{a}$ par $\vec{a}$.

$$\vec{o}\vec{a} = \vec{a}$$

$$\vec{o}\vec{b} = \vec{b}$$

$$\vec{o}\vec{c} = \vec{c}$$

$$\vec{o}\vec{o} = \vec{o} \text{ enz...}$$

En choisissant une origine, tout point du plan Π peut être considéré comme un vecteur.

L'ensemble de tous ces vecteurs est appelé le plan pointé Π_0 .

Tout vecteur $\vec{v} \in V$ a un représentant $\vec{v} \in \Pi_0$ tel que $\Pi_0 = V$.

$V, +$ est un groupe commutatif,

donc :

$\Pi_0, +$ est un groupe commutatif

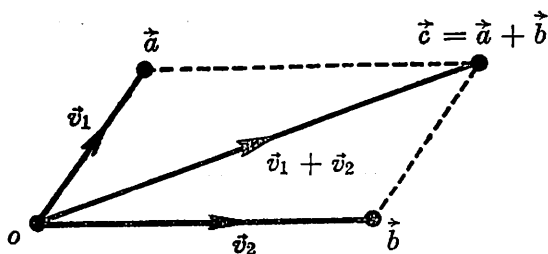
car :

1. $\forall \vec{a}, \vec{b} \in \Pi_0 : \vec{a} + \vec{b} \in \Pi_0$
2. $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \Pi_0 : \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
3. $\forall \vec{a} \in \Pi_0, \exists \vec{0} \in \Pi_0 : \vec{a} + \vec{0} = \vec{a} = \vec{0} + \vec{a}$
4. $\forall \vec{a} \in \Pi_0, \exists -\vec{a} \in \Pi_0 : \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0} = (-\vec{a}) + \vec{a}$.
5. $\forall \vec{a}, \vec{b} \in \Pi_0 : \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

2. Opérations

1. Addition

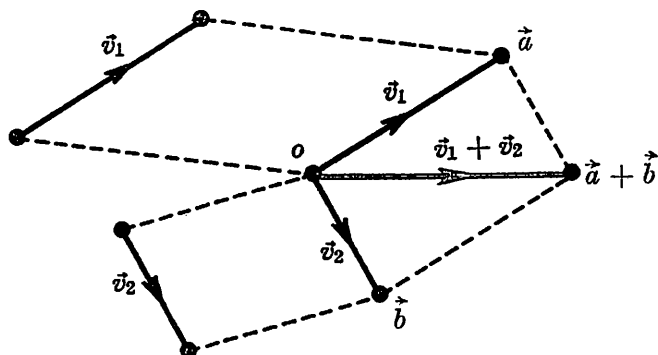
a) *vecteurs de même origine*



A partir de $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$, construisez un parallélogramme $oabc$.

$$\begin{aligned}
 \vec{a} + \vec{b} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 &= \vec{o}\vec{a} + \vec{o}\vec{b} \\
 &= \vec{o}\vec{a} + \vec{a}\vec{c} \\
 &= \vec{o}\vec{c} \\
 &= \vec{c}.
 \end{aligned}$$

b) vecteurs quelconques

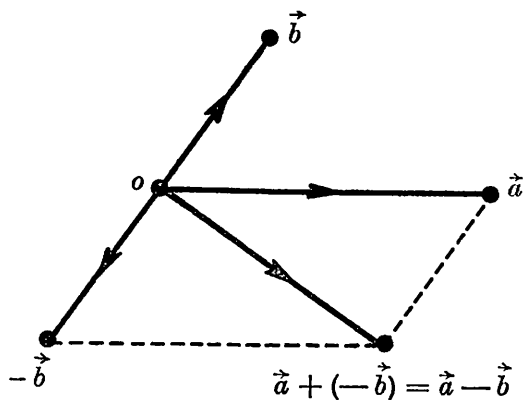


Soit un point $o \in \Pi$. Dessinez $\vec{a} = \vec{v}_1$
 $\vec{b} = \vec{v}_2$

Construisez $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{a} + \vec{b}$.

2. Soustraction

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



Exercices

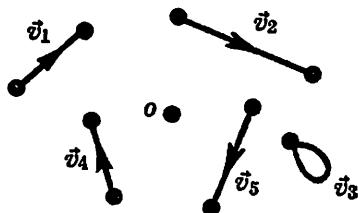
1. Dans Π_0 , dessinez les points

a, b, c, d, e tels que

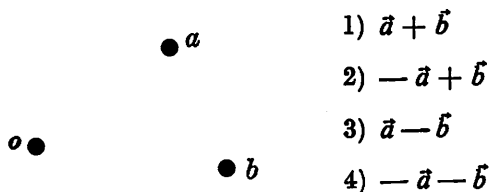
$$\vec{a} = \vec{v}_1, \quad \vec{b} = \vec{v}_2, \quad \vec{c} = \vec{v}_3,$$

$$\vec{d} = \vec{v}_4, \quad \vec{e} = \vec{v}_5$$

Comment appelez-vous les
 vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ et $\vec{e}$?

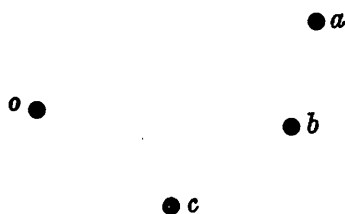


2. Construisez :

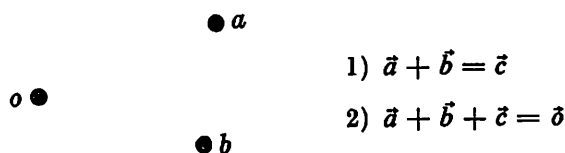


3. Construisez :

- 1) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ 6) $\vec{a} + \vec{c}$
 2) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ 7) $\vec{b} + \vec{c}$
 3) $-\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ 8) $\vec{b} + \vec{c}$
 4) $-\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ 9) $\vec{c} + \vec{a} + \vec{c}$
 5) $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ 10) $\vec{b} - \vec{b}$



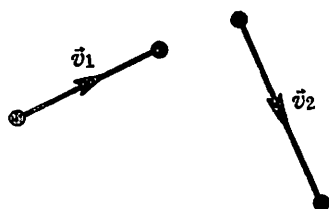
4. Construisez c telque



5. Dessinez $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ et $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$

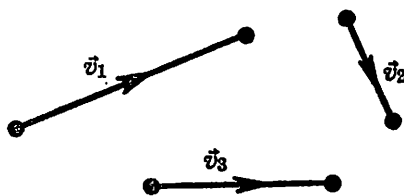
a) les vecteurs sont consécutifs

b) les vecteurs ont même origine.

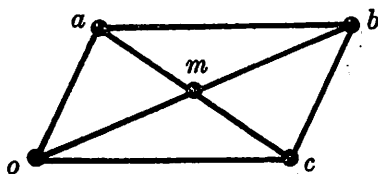


6. Dessinez de deux manières différentes :

- 1) $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$
 2) $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3$
 3) $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3$
 4) $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \vec{v}_3$



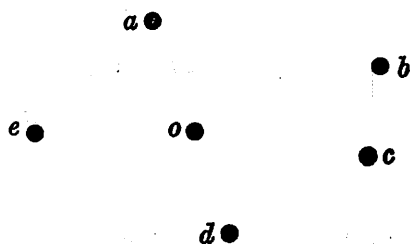
7. $aboc$ est un parallélogramme et o est l'origine de Π_0 . Complétez :



- 1) $\vec{a} + \vec{c} =$
- 2) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} =$
- 3) $\vec{a} + \vec{ab} =$
- 4) $\vec{a} + \vec{ac} - \vec{c} =$
- 5) $\vec{b} + \vec{bc} =$
- 6) $\vec{a} + \vec{am} =$
- 7) $\vec{a} + \vec{c} + \vec{bc} =$
- 8) $\vec{a} + \vec{ab} + \vec{bc} =$

8. Construisez :

- 1) m tel que $m = a + c$
- 2) n « $\vec{n} = \vec{b} + \vec{c} + \vec{e}$
- 3) p « $\vec{p} = \vec{c} - \vec{b}$
- 4) q « $\vec{q} = \vec{d} + \vec{a} + \vec{e}$
- 5) r « $\vec{r} = \vec{b} - \vec{c} + \vec{a}$
- 6) s « $\vec{s} = \vec{c} - \vec{e} + \vec{a}$

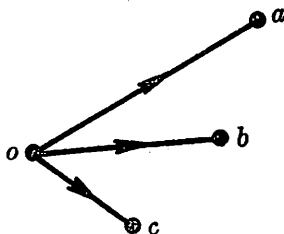


9. Simplifiez :

- 1) $\vec{a} - \vec{a}$
- 2) $\vec{a} + \vec{a}$
- 3) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{a} - \vec{b} - \vec{a}$
- 4) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{a}$
- 5) $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a} - \vec{a}$
- 6) $\vec{b} - \vec{a} + \vec{a} - \vec{b} + \vec{a}$

10. Démontrez que

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$



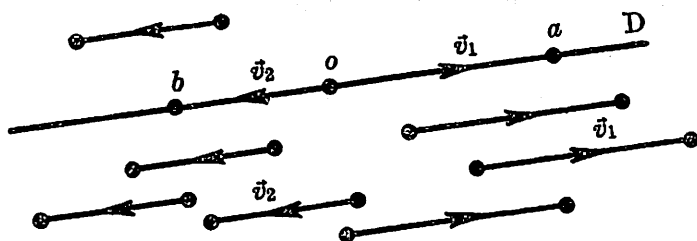
Énoncez la propriété.

CHAPITRE XVI

LA DROITE POINTÉE D_0

1. La droite pointée

Deux vecteurs $\vec{v}_1 = \vec{oa}$ et $\vec{v}_2 = \vec{ob}$ sont parallèles, si o , a et b sont alignés.



Tous les vecteurs liés, situés sur D et ayant o pour origine, forment un ensemble infini.

Tout vecteur de D , ayant o pour origine, a une et une seule extrémité en D , par laquelle il est complètement déterminé.

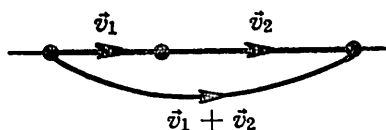
L'ensemble de tous ces vecteurs est appelé droite pointée D_0 .

Il est évident que $D_0 \subset \Pi_0$.

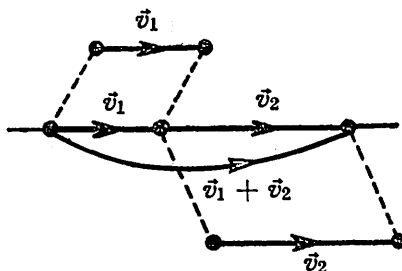
2. Opérations sur les vecteurs parallèles

1. Addition

vecteurs consécutifs

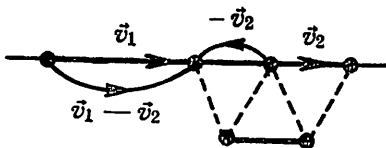


vecteurs quelconques

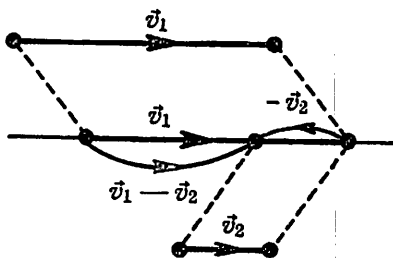


2. Soustraction

vecteurs consécutifs

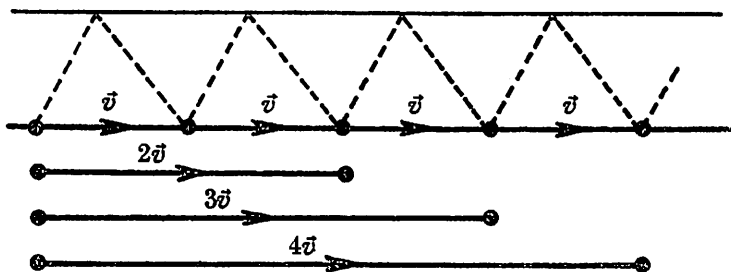


vecteurs quelconques



3. Produit d'un vecteur par un nombre

a) $4\vec{v} = \vec{v} + \vec{v} + \vec{v} + \vec{v}$

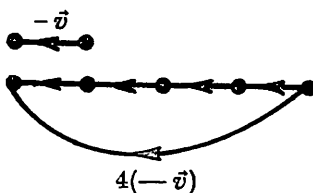
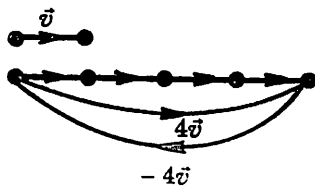


$$\forall \vec{v} \in V, \forall n \in \mathbb{N} : n\vec{v} = \underbrace{\vec{v} + \vec{v} + \vec{v} + \dots + \vec{v}}_{n \text{ termes}}$$

Remarque : $1\vec{v} = \vec{v}$

$$0\vec{v} = \vec{0}$$

b) $-4\vec{v} = -(4\vec{v}) = -(\vec{v} + \vec{v} + \vec{v} + \vec{v})$
 $= -\vec{v} - \vec{v} - \vec{v} - \vec{v}$
 $= (-\vec{v}) + (-\vec{v}) + (-\vec{v}) + (-\vec{v})$
 $= 4(-\vec{v})$



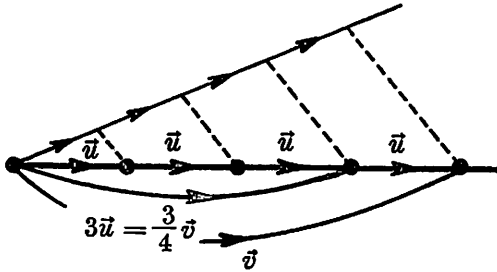
$$\forall \vec{v} \in V, \forall n \in \mathbb{N} : (-n)\vec{v} = n(-\vec{v})$$

Pour effectuer le produit d'un vecteur par un nombre négatif, on multiplie le vecteur opposé par l'opposé du nombre négatif.

$n\vec{v}$ est appelé multiple de $\vec{v}$ et n est le coefficient.

L'ensemble de tous les entiers, multiples de $\vec{v}$, est représenté par $Z\vec{v}$.

$$c) \frac{3}{4}\vec{v} = 3\left(\frac{1}{4}\vec{v}\right)$$



Divisez $\vec{v}$ en 4 couples équipollents.

Posez $\frac{1}{4}\vec{v} = \vec{u}$ et construisez $3\vec{u}$.

$$3\vec{u} = 3\left(\frac{1}{4}\vec{v}\right) = \frac{3}{4}\vec{v}$$

3. Propriétés de $D_0, +$

Les propriétés suivantes sont valables pour $D_0, +$, comme pour $\Pi_0, +$.

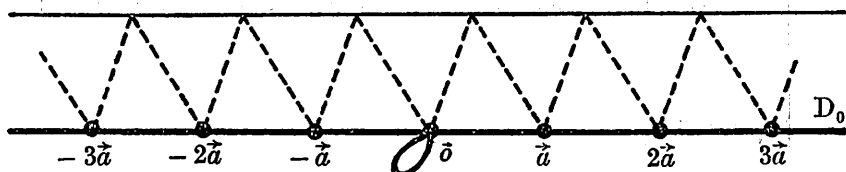
1. $\forall \vec{a}, \vec{b} \in D_0 : \vec{a} + \vec{b} \in D_0$
2. $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in D_0 : \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
3. $\forall \vec{a} \in D_0, \exists \vec{o} \in D_0 : \vec{a} + \vec{o} = \vec{a} = \vec{o} + \vec{a}$
4. $\forall \vec{a} \in D_0, \exists -\vec{a} \in D_0 : \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{o} = (-\vec{a}) + \vec{a}$
5. $\forall \vec{a}, \vec{b} \in D_0 : \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Il résulte de ces propriétés que $D_0, +$ est un groupe commutatif et puisque $D_0 \subset \Pi_0$, nous disons que

$D_0, +$ est un sous-groupe commutatif de $\Pi_0, +$

4. Graduation de la droite

Soient $\vec{o}$ et $\vec{a}$ sur D_0 .



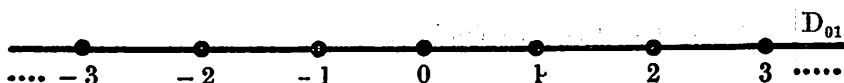
Notons 0 et 1 aux extrémités de ces vecteurs.

0 et 1 sont les abscisses de o et a .

Construisons ... $-3\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $-\vec{a}$, $\vec{o}$, $\vec{a}$, $2\vec{a}$, $3\vec{a}$, ... $\in D_0$.

Les abscisses des extrémités sont ... -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 ...

Nous obtenons la droite graduée D_{01} .



$\vec{a}$ est le vecteur unitaire.

$O1$ est le système de référence ou repère.

La graduation de la droite est complètement définie par les points o et a ayant respectivement pour abscisses 0 et 1.

Tout autre vecteur unitaire donne lieu à un autre système de référence et par conséquent, à une autre graduation.

Sur une droite, il existe donc une infinité de graduations.

Exercices

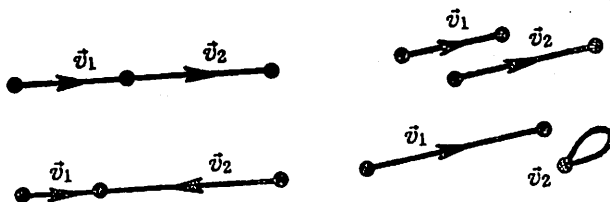
1. Construisez :

1) $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$

2) $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$

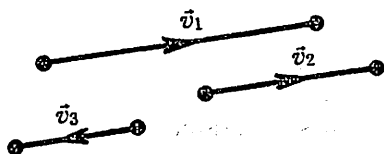
3) $-\vec{v}_1 + \vec{v}_2$

4) $-\vec{v}_1 - \vec{v}_2$



2. Construisez :

- 1) $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ 4) $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \vec{v}_3$
 2) $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ 5) $-\vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \vec{v}_3$
 3) $-\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ 6) $-\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3$



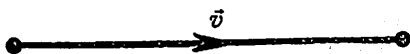
3. Construisez : $2\vec{v}$, $3\vec{v}$, $5\vec{v}$, $0\vec{v}$, $-2\vec{v}$, $-3\vec{v}$, $-5\vec{v}$.

- 1) $2\vec{v} + 3\vec{v} =$
 2) $5\vec{v} - 3\vec{v} =$
 3) $-\vec{v} - 3\vec{v} =$
 4) $2\vec{v} + 5\vec{v} - 3\vec{v} =$
 5) $3\vec{v} + \vec{v} =$



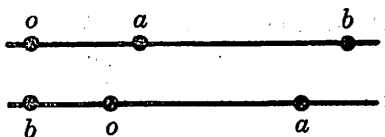
et complétez.

4. Construisez : $\frac{2}{3}\vec{v}$, $\frac{3}{4}\vec{v}$, $-\frac{5}{4}\vec{v}$, $-\frac{7}{3}\vec{v}$



5. Pour chacune des deux représentations, construisez :

- 1) $\vec{a} + \vec{b}$
 2) $\vec{a} - \vec{b}$
 3) $-\vec{a} + \vec{b}$
 4) $-\vec{a} - \vec{b}$

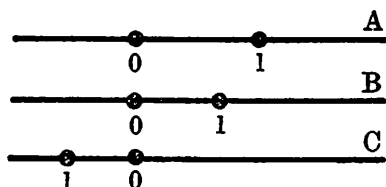


6. Construisez :

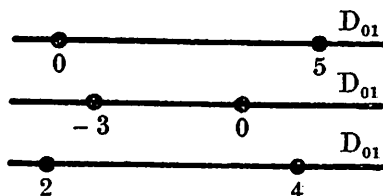
- 1) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
 2) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$
 3) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$



7. Graduez les droites A, B et C. Dessinez en rouge les vecteurs unitaires. Orientez les droites.



8. Pour chacun des cas ci-dessous, construisez le système de référence.



9. Sur D_{01} , trouvez les images de $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{4}$, $-\frac{5}{3}$ et $-\frac{1}{6}$.



10. A. On donne : $(a, m) \uparrow (m, b)$
 $(a, c) \uparrow (d, b)$
 Démontrez que $\vec{cm} = \vec{md}$

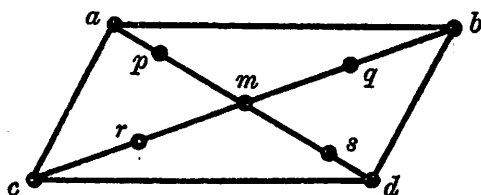


- B. On donne : $(a, m) \uparrow (m, b)$
 $(c, m) \uparrow (m, d)$
 Démontrez que $\vec{ac} = \vec{db}$

11. $abcd$ est un parallélogramme.

$$\vec{ap} = \vec{sd} \text{ et } \vec{cr} = \vec{qb}$$

Démontrez que $pqrs$ est un parallélogramme.



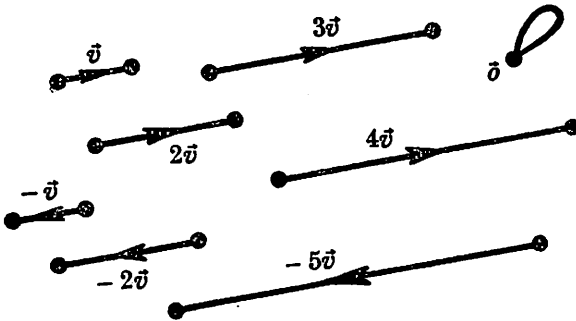
CHAPITRE XVII

LE GROUPE $Z\vec{v}$, + ESPACE VECTORIEL

1. L'ensemble $Z\vec{v}$

L'ensemble de tous les entiers, multiples de $\vec{v}$, est représenté par $Z\vec{v}$.

$$Z\vec{v} = \{ m\vec{v} \mid m \in \mathbb{Z} \text{ et } \vec{v} \in V \} = \{ \dots, -3\vec{v}, -2\vec{v}, -\vec{v}, \vec{0}, \vec{v}, 2\vec{v}, 3\vec{v}, \dots \}$$



Tous les éléments de $Z\vec{v}$ sont des vecteurs parallèles.

Il est évident que $Z\vec{v} \subset V$.

2. Propriétés de $Z\vec{v}$, +

1. $\forall m\vec{v}, n\vec{v} \in Z\vec{v} : m\vec{v} + n\vec{v} \in Z\vec{v}$
2. $\forall m\vec{v}, n\vec{v}, p\vec{v} \in Z\vec{v} : m\vec{v} + (n\vec{v} + p\vec{v}) = (m\vec{v} + n\vec{v}) + p\vec{v} = m\vec{v} + n\vec{v} + p\vec{v}$
3. $\forall m\vec{v} \in Z\vec{v}, \exists \vec{0} \in Z\vec{v} : m\vec{v} + \vec{0} = m\vec{v} = \vec{0} + m\vec{v}$
4. $\forall m\vec{v} \in Z\vec{v}, \exists (-m\vec{v}) \in Z\vec{v} : m\vec{v} + (-m\vec{v}) = \vec{0} = (-m\vec{v}) + m\vec{v}$
5. $\forall m\vec{v}, n\vec{v} \in Z\vec{v} : m\vec{v} + n\vec{v} = n\vec{v} + m\vec{v}$

De ces 5 propriétés et du fait que $Z\vec{v} \subset V$, on conclut :

$Z\vec{v}, +$ est un sous-groupe commutatif de $V, +$

3. Espace vectoriel

Considérons les ensembles V et Z .

Une opération sur des éléments appartenant à 2 ensembles différents est dite *externe*.

Examinons les propriétés du produit externe des éléments de V par les éléments de Z .

Propriété 1 : $\forall n \in Z \text{ et } \forall \vec{v} \in V : n\vec{v} \in V$

Propriété 2 : $\forall \vec{v} \in V : 1\vec{v} = \vec{v}$

Propriété 3 : $\forall m \in Z \text{ et } \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V : m(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$
 $\forall m, n \in Z \text{ en } \forall \vec{v} \in V : m\vec{v} + n\vec{v} = (m + n)\vec{v}$

Exemples :

$$\begin{aligned} 4(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) &= (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \\ &= \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \\ &= \vec{v}_1 + \vec{v}_1 + \vec{v}_1 + \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_2 + \vec{v}_2 + \vec{v}_2 \\ &= (\vec{v}_1 + \vec{v}_1 + \vec{v}_1 + \vec{v}_1) + (\vec{v}_2 + \vec{v}_2 + \vec{v}_2 + \vec{v}_2) \\ &= 4\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5\vec{v} - 2\vec{v} &= (\vec{v} + \vec{v} + \vec{v} + \vec{v} + \vec{v}) + (-\vec{v} - \vec{v}) \\ &= \vec{v} + \vec{v} + \vec{v} + \vec{v} + \vec{v} - \vec{v} - \vec{v} \\ &= \vec{v} + \vec{v} + \vec{v} \\ &= 3\vec{v} \\ &= (5 - 2)\vec{v} \end{aligned}$$

Propriété 4 : $\forall m, n \in Z, \forall \vec{v} \in V : m(n\vec{v}) = (mn)\vec{v}$

Exemple :

$$\begin{aligned} -3(2\vec{v}) &= 3(-2\vec{v}) = (-2\vec{v}) + (-2\vec{v}) + (-2\vec{v}) \\ &= (-\vec{v} - \vec{v}) + (-\vec{v} - \vec{v}) + (-\vec{v} - \vec{v}) \\ &= -\vec{v} - \vec{v} - \vec{v} - \vec{v} - \vec{v} - \vec{v} \\ &= 6(-\vec{v}) \\ &= -6\vec{v} \\ &= (-3 \cdot 2)\vec{v} \end{aligned}$$

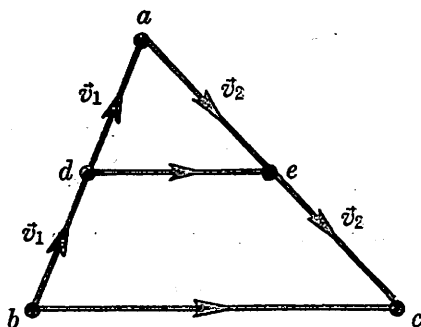
$V, +$ étant un groupe commutatif et les quatre propriétés précédentes étant valables dans le cas du produit de vecteurs par des entiers, on peut dire

$Z, V, +$ est un espace vectoriel

4. Application au triangle

$$\begin{aligned}
 d \text{ est le milieu de } [ba] &\Leftrightarrow (b, d) \uparrow (d, a) \\
 &\Leftrightarrow \vec{bd} = \vec{da} = \vec{v}_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e \text{ est le milieu de } [ac] &\Leftrightarrow (a, e) \uparrow (e, c) \\
 &\Leftrightarrow \vec{ae} = \vec{ec} = \vec{v}_2
 \end{aligned}$$



$$\text{Or, } \vec{de} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

$$\vec{bc} = \vec{ba} + \vec{ac} = 2\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 = 2(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$$

$$\text{Donc } \vec{bc} = 2\vec{de} \text{ ou } \vec{de} = \frac{1}{2}\vec{bc}$$

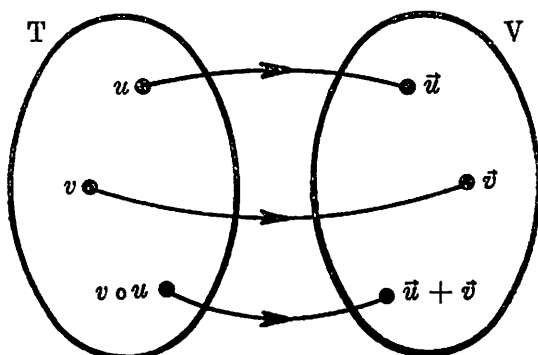
Sachant déjà que $de \parallel bc$, nous pouvons conclure :

Le segment joignant les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième et en vaut la moitié.

$$\vec{de} = \frac{1}{2}\vec{bc}$$

5. Isomorphisme

Considérons le groupe des translations $T, \circ$ et le groupe des vecteurs $V, +$



Représentons une bijection de l'ensemble T vers l'ensemble V .

$$\begin{aligned} u &\rightarrow \vec{u} \\ v &\rightarrow \vec{v} \\ v \circ u &\rightarrow \vec{u} + \vec{v} \\ \text{etc...} \end{aligned}$$

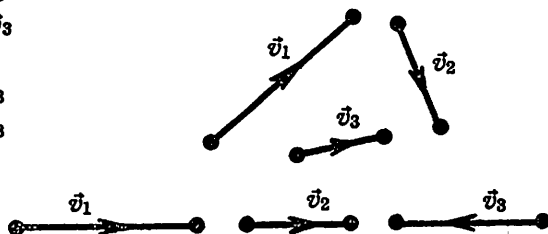
La composée de deux éléments de T ayant pour image la somme des images de ces éléments dans V , les groupes $T, \circ$ et $V, +$ sont dits isomorphes.

On dit qu'il existe un isomorphisme entre les deux groupes.

Exercices

1. Construisez :

- 1) $2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + 3\vec{v}_3$
- 2) $3\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 - 3\vec{v}_3$
- 3) $-\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - 2\vec{v}_3$
- 4) $4\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3$



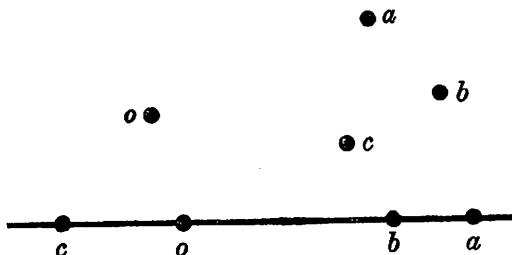
2. Construisez :

1) $2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$

2) $3\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c}$

3) $-\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$

4) $-2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$



3. Vérifiez la propriété $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$ dans les exemples

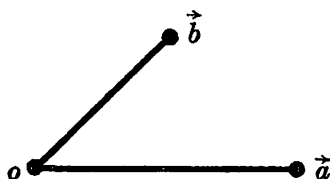
$3(\vec{a} + \vec{b}) = 3\vec{a} + 3\vec{b}$

$2(\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a} - 2\vec{b}$

$-2(\vec{a} + \vec{b}) = -2\vec{a} - 2\vec{b}$

a) à l'aide de la figure

b) sans la figure.

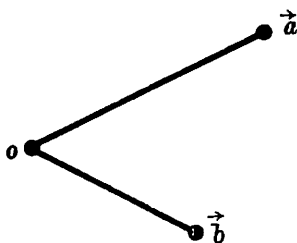


4. Vérifiez a) à l'aide de la figure

b) sans la figure

$2(\vec{a} + 3\vec{b}) = 2\vec{a} + 6\vec{b}$

$3(-2\vec{a} + \vec{b}) = -6\vec{a} + 3\vec{b}$



5. Vérifiez la propriété $m\vec{a} + n\vec{a} = (m + n)\vec{a}$ dans les exemples

$3\vec{a} + 4\vec{a} = 7\vec{a}$

$7\vec{a} - 5\vec{a} = 2\vec{a}$

$-2\vec{a} - 3\vec{a} = -5\vec{a}$

a) à l'aide de la figure

b) sans la figure.



6. En tenant compte de la distributivité

$m(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$ en $m\vec{v} + n\vec{v} = (m + n)\vec{v}$,

établissez la formule de $(m + n)(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$.

7. Vérifiez la propriété $n(m\vec{a}) = (nm)\vec{a}$ dans les exemples

$$3(4\vec{a}) = 12\vec{a}$$

$$-2(3\vec{a}) = -6\vec{a}$$

$$-3(-2\vec{a}) = 6\vec{a}$$



a) à l'aide de la figure

b) sans la figure.

8. L'ensemble de tous les entiers multiples de $\vec{a}$ est représenté par $\mathbb{Z}\vec{a}$.

Montrez que $\mathbb{Z}\vec{a}, +$ est un sous-groupe commutatif de $D_0, +$.

9. Effectuez et simplifiez :

1) $(2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2) - (\vec{v}_1 - 4\vec{v}_2)$

2) $(2\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2 + 5\vec{v}_1) - 4\vec{v}_2$

3) $2(3\vec{v}_1 - 4\vec{v}_2) + 5(-2\vec{v}_1 + 5\vec{v}_2)$

4) $3\vec{v}_1 - 3(-2\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2 + 3\vec{v}_1 - 6\vec{v}_2)$

5) $-(3\vec{a} + 2\vec{b}) - 3\vec{b} + (2\vec{a} + 3\vec{b})$

6) $(10\vec{a} - 3\vec{b}) - (3\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{a})$

7) $2\vec{a} - 3(2\vec{a} + 5\vec{b} - 7\vec{a} - 3\vec{b})$

8) $-4(3\vec{a} - 2\vec{b}) - 7(2\vec{a} - 3\vec{b}) - 10\vec{b}$

10. Les structures suivantes sont-elles isomorphes ?

$V, +$ et $\Pi_0, +$

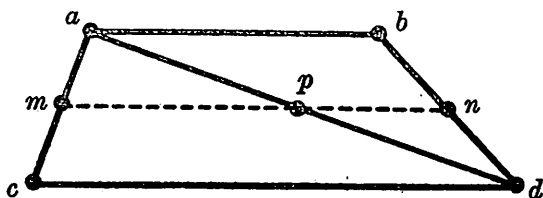
$T, \circ$ et $V, +$

$\Pi_0, +$ et $T, \circ$

$\mathbb{Z}\vec{v}, +$ et $D_0, +$

11. Dans le trapèze $abcd$, sachant que $(a, m) \uparrow (m, c)$ et $(b, n) \uparrow (n, d)$, démontrez que : $mn \parallel ab \parallel cd$

$$\vec{mn} = \frac{1}{2}(\vec{ab} + \vec{cd})$$



12. On donne : $\vec{am} = \vec{mb}$

$$\vec{an} = \vec{nc}$$

$$\vec{bp} = \vec{pc}$$

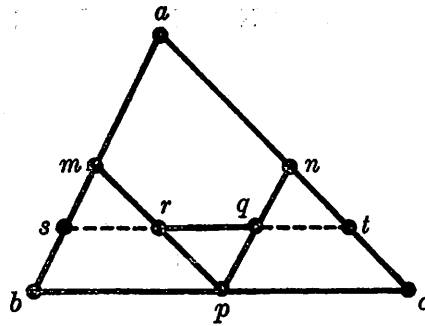
$$\vec{mr} = \vec{rp}$$

$$\vec{nq} = \vec{qp}$$

Démontrez que :

$$\vec{rq} = \frac{1}{4} \vec{bc}$$

$$\vec{sr} = \vec{rq} = \vec{qt} = \frac{1}{2} \vec{mn}$$



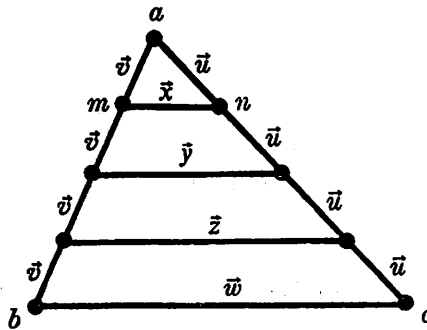
13. Complétez et démontrez :

1. $\vec{w} = \dots \vec{x}$

2. $\vec{z} = \dots \vec{x}$

3. $\vec{y} = \dots \vec{x}$

4. $mn \parallel bc$

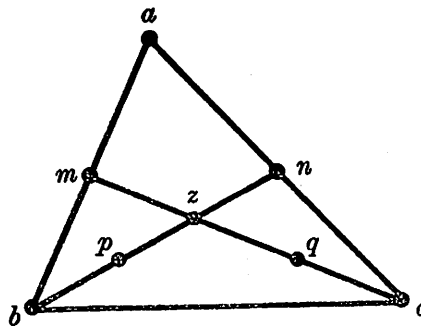


14. On donne : $\vec{am} = \vec{mb}$

$$\vec{an} = \vec{nc}$$

$$\vec{bp} = \vec{pz}$$

$$\vec{cq} = \vec{qz}$$



Démontrez : $\vec{mn} = \vec{pq}$

$$\vec{mz} = \vec{zq} = \vec{qc}$$

$$\vec{bp} = \vec{pz} = \vec{zn}$$

CHAPITRE XVIII

EXTENSION DE LA NOTION DE NOMBRE

1. Opérations internes et partout définies

Dans $N = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$

1. L'addition est interne
et partout définie

$$7 + 2 = 9 \in N$$

2. La soustraction est interne,
mais non partout définie

$$5 - 2 = 3 \in N$$

$$3 - 7 = ? \notin N$$

3. La multiplication est interne
et partout définie

$$3 \times 5 = 15 \in N$$

$$0 \times 4 = 0 \in N$$

4. La division est interne,
mais non partout définie

$$6 : 3 = 2 \in N$$

$$2 : 7 = ? \notin N$$

Dans N , aucune opération
ne donne lieu à un groupe.

Dans $Z = \{ \dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$

1. L'addition est interne
et partout définie

$$(+5) + (-2) = +3 \in Z$$

$$(-3) + (-6) = -9 \in Z$$

2. La soustraction est interne
et partout définie

$$(-7) - (-2) = -7 + 2 = -5 \in Z$$

$$(+3) - (+7) = 3 - 7 = -4 \in Z$$

3. La multiplication est interne
et partout définie

$$(-7)(+3) = -21 \in Z$$

$$(-4)(-5) = 20 \in Z$$

4. La division est interne,
mais non partout définie

$$(-8) : (-2) = 4 \in Z$$

$$7 : (-3) = ? \notin Z$$

Dans Z , l'addition forme le
groupe $Z, +$.

Remarquez qu'en introduisant les nombres négatifs, la soustraction devient interne et partout définie dans Z .

Etudions maintenant un nouvel ensemble de nombres, dans lequel la division devient interne et partout définie.

2. L'ensemble Q' des fractions

Des divisions telles que :

$$(-1) : (+5)$$

$$(-3) : (-12)$$

$$(+5) : (+2)$$

$$(+3) : (-7)$$

n'admettent pas de quotient dans $\mathbb{Z}$ et nous les représentons de la façon suivante :

$$(-1) : (+5) = \frac{-1}{+5}$$

$$(-3) : (-12) = \frac{-3}{-12}$$

$$(+5) : (+2) = \frac{+5}{+2}$$

$$(+3) : (-7) = \frac{+3}{-7}$$

Et même les divisions :

$$(-8) : (+4) = -2$$

$$(-12) : (-3) = +4$$

$$(+15) : (+5) = +3$$

$$(+20) : (-10) = -2$$

admettant des quotients entiers, peuvent s'écrire de la même façon :

$$(-8) : (+4) = \frac{-8}{+4}$$

$$(-12) : (-3) = \frac{-12}{-3}$$

$$(+15) : (+5) = \frac{+15}{+5}$$

$$(+20) : (-10) = \frac{+20}{-10}$$

Les résultats obtenus sont les éléments d'un nouvel ensemble infini de nombres : celui des fractions rationnelles : $\mathbb{Q}'$.

$$\mathbb{Q}' = \left\{ \frac{-1}{+5}, \frac{-3}{-12}, \frac{+5}{+2}, \frac{+3}{-7}, \frac{-8}{+4}, \frac{-3}{-12}, \frac{+15}{+5}, \frac{+20}{-10}, \dots \right\}$$

Remarques :

1) $\frac{-1}{+5}$ est une fraction de numérateur -1 et de dénominateur $+5$.

$\frac{a}{b}$ est une fraction de numérateur a et de dénominateur b .

Numérateur et dénominateur sont les termes de la fraction.

2) La division par 0 n'a pas de sens.

Des fractions telles que $\frac{8}{0}$, $\frac{-4}{0}$, $\frac{a}{0}$, ... n'appartiennent pas aux fractions rationnelles.

Le dénominateur ne pouvant jamais être nul, nous écrivons :

Dus :

$$\mathbb{Q}' = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ en } b \in \mathbb{Z}_0 \right\}$$

3. Ecriture simplifiée d'une fraction

Les fractions étant des quotients d'entiers, la règle des signes reste valable :

$$+ : + = +$$

$$- : - = +$$

$$+ : - = -$$

$$- : + = -$$

et nous avons $(-1) : (+5) = \frac{-1}{+5} = -\frac{1}{5}$

$$(-3) : (-12) = \frac{-3}{-12} = +\frac{3}{12} = \frac{3}{12}$$

$$(+5) : (+2) = \frac{+5}{+2} = +\frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

$$(+3) : (-7) = \frac{+3}{-7} = -\frac{3}{7}$$

En général :

$\frac{-a}{-b}$	$=$	$\frac{+a}{+b}$	$=$	$+$	$\frac{a}{b}$	$=$	$\frac{a}{b}$
$\frac{+a}{-b}$	$=$	$\frac{-a}{+b}$	$=$	$-$	$\frac{a}{b}$		

Une fraction reste égale à elle-même, si l'on change simultanément les signes de ses termes.

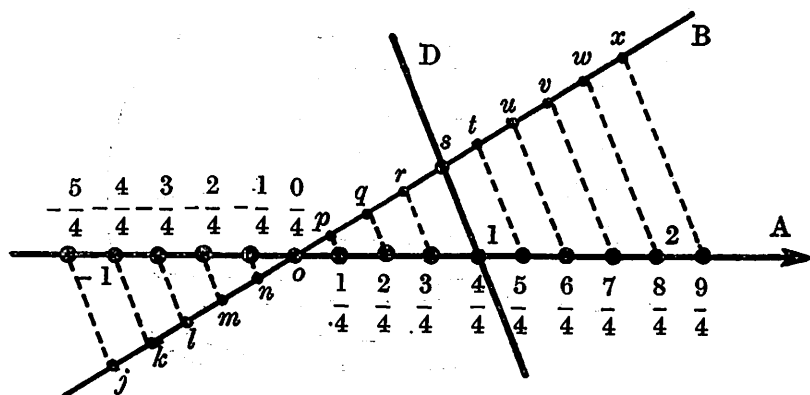
Toute fraction peut donc s'écrire avec dénominateur positif

$$\frac{+5}{-7} = \frac{-5}{+7} = -\frac{5}{7}$$

4. Représentation sur un axe

Sur l'axe A, nous pouvons représenter les entiers ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

Comment pouvons-nous trouver les images des fractions de dénominateur 4 ?



Par le point o , menons une droite quelconque B et, sur la droite, construisons ... $\uparrow (l, m) \uparrow (m, n) \uparrow (n, o) \uparrow (o, p) \uparrow (p, q) \uparrow \dots$

Menons la droite D passant par l'image 1 et par l'extrémité s du quatrième couple.

Projetons les couples de B sur A, // D. Les couples que l'on obtient sur A sont tous équipollents.

Les extrémités de ces couples sont les images des fractions de dénominateur 4.

Toute fraction est appelée abscisse de son image.

Exercices

1. Ecrivez les divisions suivantes sous forme de fractions rationnelles avec dénominateur positif :

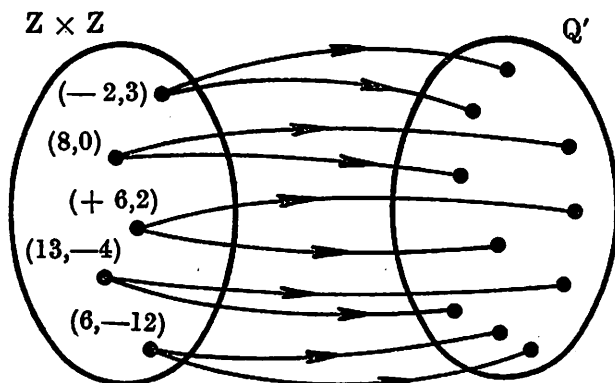
- | | | |
|-------------------|-------------------|--------------------|
| 1) $(-13) : (+2)$ | 5) $0 : (-7)$ | 9) $0 : (+3)$ |
| 2) $(+24) : (-3)$ | 6) $(+2) : (-9)$ | 10) $(-5) : (+1)$ |
| 3) $(-18) : (-6)$ | 7) $(-1) : (-5)$ | 11) $(+2) : (+13)$ |
| 4) $(+5) : 0$ | 8) $(+11) : (-1)$ | 12) $(-3) : (-7)$ |

2. Comparez :

$$\begin{array}{cc} \frac{-5}{+3} & \text{en} & \frac{+5}{-3} \\ \frac{+12}{-17} & \text{en} & \frac{-12}{+17} \end{array} \quad \begin{array}{cc} \frac{-3}{-7} & \text{en} & \frac{+3}{+7} \\ \frac{+18}{+5} & \text{en} & \frac{-18}{-5} \end{array}$$

Énoncez la propriété.

3. Complétez le graphe de la relation $R : Z \times Z \rightarrow Q' \ll \dots \text{ont pour quotient} \dots \gg$



4. $A = \left\{ \frac{-2}{5}, \frac{-2}{3}, \frac{-7}{-5}, 7, \frac{+5}{-3}, \frac{7}{-5} \right\}$

Rendez les dénominateurs positifs.

Définissez et dessinez $R_1 : A \rightarrow A \ll \dots \text{a le même dénominateur que} \dots \gg$

$R_2 : A \rightarrow A \ll \dots \text{a le même numérateur que} \dots \gg$

Quelles relations obtenez-vous ?

5. Représentez, sur un axe, les fractions situées entre -2 et $+2$,

- a) ayant pour dénominateur 2
- b) ayant pour dénominateur 5
- c) ayant pour dénominateur 7
- d) ayant pour dénominateur 8.

6. Représentez, sur un axe, les fractions de dénominateur 1. Quelle est votre conclusion ?

7. Représentez, sur un axe, les fractions $\frac{3}{0}$ et $\frac{-2}{0}$. Quelle est votre conclusion ?

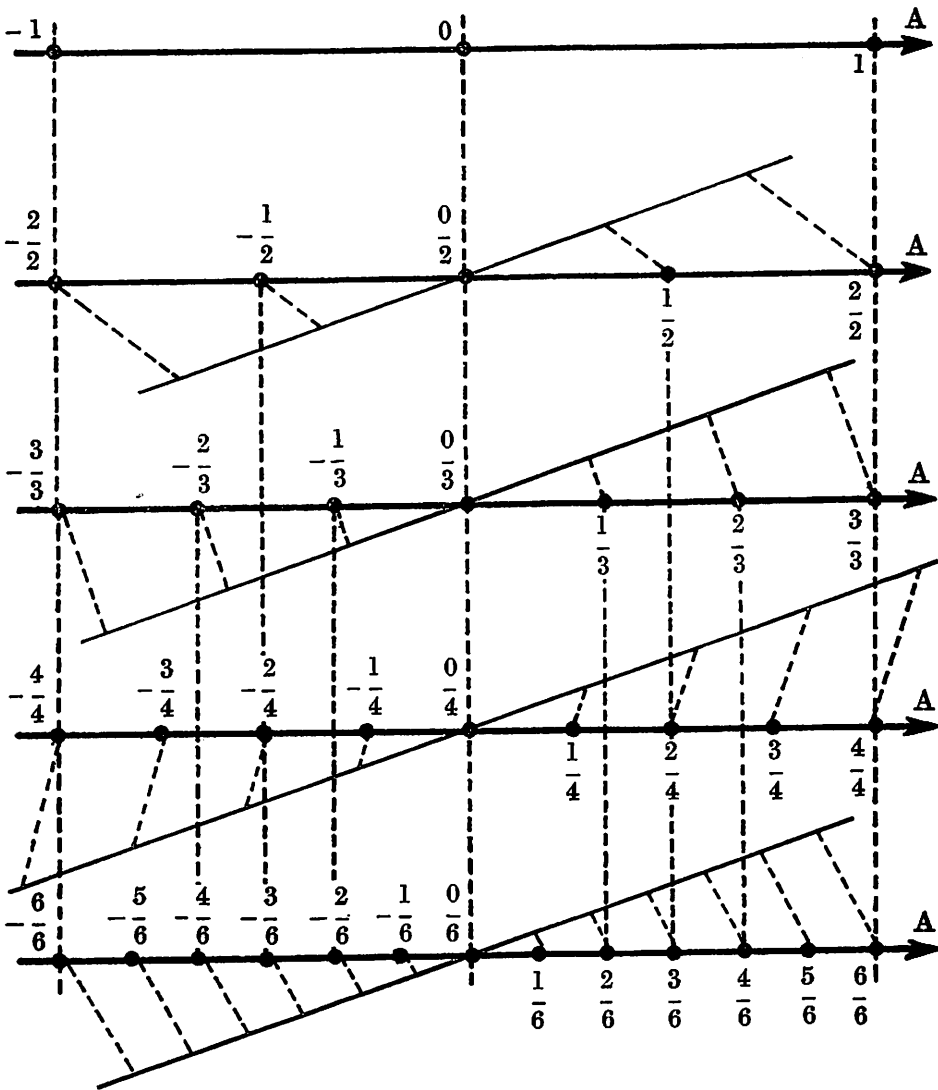
CHAPITRE XIX

FRACTIONS ÉGALES

1. Notion

Sur un axe, représentons les images

- des nombres entiers
- des fractions de dénominateur 2
- des fractions de dénominateur 3
- des fractions de dénominateur 4
- des fractions de dénominateur 6.



Des fractions sont dites égales, si, sur un axe, elles ont la même image.

De la figure, nous déduisons :

$$-1 = -\frac{2}{2} = -\frac{3}{3} = -\frac{4}{4} = -\frac{6}{6} = \dots$$

$$-\frac{1}{2} = -\frac{2}{4} = -\frac{3}{6} = \dots$$

$$-\frac{2}{3} = -\frac{4}{6} = \dots$$

$$-\frac{1}{3} = -\frac{2}{6} = \dots$$

$$0 = \frac{0}{2} = \frac{0}{3} = \frac{0}{4} = \frac{0}{6} = \dots$$

etc...

2. Propriété

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \dots \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \dots = \frac{1 \times m}{2 \times m}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \dots \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \dots = \frac{1 \times m}{3 \times m}$$

$$-\frac{2}{3} = -\frac{4}{6} = \dots \Rightarrow -\frac{2}{3} = -\frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \dots = -\frac{2 \times m}{3 \times m}$$

En général :

$$\forall a \in \mathbb{Z} \text{ et } \forall b, m \in \mathbb{Z}_0 : \frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}$$

3. Conséquences

$$\text{A) } \frac{a \cdot m}{b \cdot m} = \frac{a}{b}$$

La valeur d'une fraction n'est pas modifiée, si l'on divise les deux termes de la fraction par un même nombre.

$$\frac{12}{27} = \frac{12 : 3}{27 : 3} = \frac{4}{9}$$

$$-\frac{24}{32} = -\frac{24 : 4}{32 : 4} = -\frac{6}{8}$$

Application :

Simplifier une fraction, c'est la remplacer par une fraction égale, mais ayant des termes plus petits.

$$-\frac{50}{75} = -\frac{50 : 5}{75 : 5} = -\frac{10}{15}$$

Réduire une fraction à sa *plus simple expression*, c'est la simplifier jusqu'à ce que les termes de la fraction deviennent premiers entre eux.

$$\frac{180}{378} = \frac{180 : 2}{378 : 2} = \frac{90}{189} = \frac{90 : 3}{189 : 3} = \frac{30}{63} = \frac{30 : 3}{63 : 3} = \frac{10}{21}$$

ou, plus simplement :

nous divisons les deux termes de la fraction par leur p. g. c. d.
p. g. c. d. (180, 378) = 18, donc

$$\frac{180}{378} = \frac{180 : 18}{378 : 18} = \frac{10}{21}$$

$$\text{B) } \frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}$$

La valeur d'une fraction n'est pas modifiée, si l'on multiplie les deux termes de la fraction par un même nombre.

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15}$$

$$-\frac{4}{7} = -\frac{4(-3)}{7(-3)} = -\frac{-12}{-21} = -\frac{12}{21}$$

Application :

Réduire des fractions au même dénominateur consiste à les remplacer par des fractions égales chacune à chacune ayant le même dénominateur.

$$a) -\frac{5}{7} \text{ et } \frac{3}{4}$$

$$\text{p. p. c. m. } (7, 4) = 28$$

$$-\frac{5}{7} = -\frac{5 \times 4}{7 \times 4} = -\frac{20}{28}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 7}{4 \times 7} = \frac{21}{28}$$

$$b) -7, \frac{5}{12} \text{ et } -\frac{3}{8} \text{ ou } -\frac{7}{1}, \frac{5}{12} \text{ et } -\frac{3}{8}$$

$$\text{p. p. c. m. } (1, 12, 8) = 24$$

$$-\frac{7}{1} = -\frac{7 \times 24}{1 \times 24} = -\frac{168}{24}$$

$$\frac{5}{12} = \frac{5 \times 2}{12 \times 2} = \frac{10}{24}$$

$$-\frac{3}{8} = -\frac{3 \times 3}{8 \times 3} = -\frac{9}{24}$$

$$c) \frac{18}{27}, -\frac{8}{32} \text{ et } \frac{15}{35}$$

Réduisons d'abord les fractions à leur plus simple expression :

$$\frac{2}{3}, -\frac{1}{4} \text{ et } \frac{3}{7}$$

$$\text{p. p. c. m. } (3, 4, 7) = 84$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 28}{3 \times 28} = \frac{56}{84}$$

$$-\frac{1}{4} = -\frac{1 \times 21}{4 \times 21} = -\frac{21}{84}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{3 \times 12}{7 \times 12} = \frac{36}{84}$$

Exercices

1. Ecrivez les quotients sous la forme la plus simple :

- | | |
|------------------|--------------------|
| 1) $15 : (-3)$ | 5) $88 : (-154)$ |
| 2) $50 : (-200)$ | 6) $-650 : (-975)$ |
| 3) $-42 : (-30)$ | 7) $-725 : 875$ |
| 4) $63 : 216$ | 8) $-1300 : 1196$ |

2. Réduisez les fractions suivantes à leur plus simple expression :

a) $-\frac{54}{108}, \frac{25}{35}, -\frac{72}{108}, \frac{-420}{2970}, \frac{-210}{360}, \frac{128}{80}$

b) $\frac{96}{144}, -\frac{18}{54}, -\frac{975}{650}, -\frac{42}{56}, \frac{189}{210}, \frac{650}{598}$

3. Complétez :

a) $\frac{2}{5} = \frac{\quad}{30} = \frac{14}{\quad} = \frac{\quad}{75} = \frac{38}{\quad} = \frac{\quad}{225} = \frac{124}{\quad}$

b) $-\frac{3}{7} = -\frac{39}{\quad} = -\frac{\quad}{63} = -\frac{57}{\quad} = -\frac{\quad}{98} = -\frac{147}{\quad} = -\frac{\quad}{224}$

c) $-\frac{32}{48} = -\frac{\quad}{69} = -\frac{48}{\quad} = -\frac{\quad}{300} = -\frac{546}{\quad}$

d) $\frac{24}{64} = \frac{135}{\quad} = \frac{\quad}{48} = \frac{369}{\quad} = \frac{\quad}{136}$

4. Complétez par $=$ ou $\neq$:

a) $-\frac{30}{42} \dots -\frac{45}{63}$

e) $-\frac{39}{51} \dots -\frac{42}{57}$

b) $\frac{63}{81} \dots \frac{105}{135}$

f) $\frac{27}{36} \dots \frac{75}{100}$

c) $-\frac{18}{26} \dots -\frac{45}{65} \dots -\frac{117}{169}$

d) $\frac{9}{21} \dots \frac{14}{28} \dots \frac{105}{245}$

$$5. A = \left\{ -\frac{5}{7}, -\frac{15}{21}, \frac{3}{5}, \frac{15}{25}, -\frac{20}{28}, \frac{5}{12}, \frac{15}{36} \right\}$$

Définissez et dessinez $R : A \rightarrow A$ « ... = ... ».

Quelle relation obtenez-vous ?

$$6. A = \left\{ \frac{3}{5}, -\frac{2}{7}, \frac{5}{-7}, \frac{-2}{5}, \frac{-5}{-7}, -\frac{3}{8} \right\}$$

Rendez les dénominateurs positifs.

Ecrivez et dessinez $R : A \rightarrow A$ « ... a le même dénominateur que... ».

Quelle relation obtenez-vous ?

7. Réduisez les fractions suivantes au même dénominateur :

A) 1) $\frac{3}{8}$ et $-\frac{5}{12}$

7) $-\frac{2}{3}, \frac{7}{4}$ et $-\frac{5}{7}$

2) $-\frac{3}{5}$ et $-\frac{2}{7}$

8) $\frac{5}{8}, -\frac{1}{6}$ et $\frac{4}{15}$

3) $-\frac{7}{20}$ et $-\frac{8}{30}$

9) $\frac{3}{5}, -\frac{7}{9}$ et $-\frac{8}{15}$

4) $-\frac{7}{12}$ et $\frac{3}{14}$

10) $-\frac{4}{5}, \frac{5}{12}$ et $-\frac{7}{15}$

5) $-\frac{7}{25}, -\frac{4}{5}, \frac{7}{10}$ et $-\frac{7}{20}$

6) $-\frac{3}{5}, \frac{7}{24}, -\frac{13}{16}$ et $\frac{15}{48}$

B) 1) $-\frac{5}{12}$ et $\frac{21}{45}$

4) $\frac{18}{21}, \frac{10}{28}$ et $-\frac{16}{42}$

2) $-\frac{12}{15}$ et $-\frac{6}{21}$

5) $\frac{3}{6}, -\frac{3}{9}$ et $\frac{5}{35}$

3) $-\frac{10}{16}$ et $\frac{27}{36}$

6) $\frac{9}{12}, -\frac{25}{30}, -\frac{4}{14}$ et $-\frac{48}{60}$

8. Trouvez la fraction égale à $\frac{12}{17}$ et dont la somme des termes égale 145.

9. Déterminez la fraction égale à $\frac{28}{49}$ et dont la somme des termes égale 99.

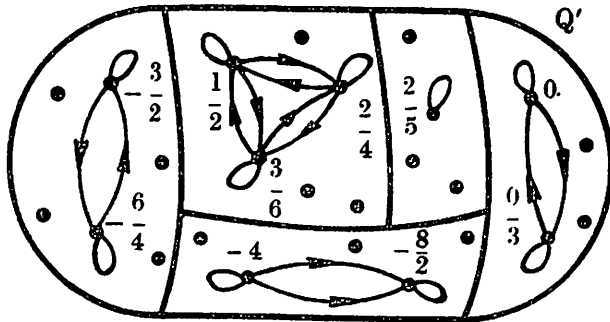
CHAPITRE XX

LES NOMBRES RATIONNELS

1. La relation $R : Q' \rightarrow Q' \text{ « } \dots = \dots \text{ »}$

$$Q' = \left\{ \dots, -\frac{3}{2}, -\frac{6}{4}, \dots, \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \dots, -4, -\frac{8}{2}, \dots, \frac{2}{5}, \dots, \frac{0}{3}, 0, \dots \right\}$$

$R : Q' \rightarrow Q' \text{ « } \dots = \dots \text{ »}$, étant réflexive, symétrique et transitive, est par conséquent une relation d'équivalence.



Dans Q' , cette relation d'équivalence fournit une partition. Chaque classe de la partition est composée de fractions égales, représentant toutes le même nombre.

Un tel nombre est appelé nombre rationnel.

Un nombre rationnel est une classe de fractions égales et est représenté par une fraction déterminée, représentante de la classe.

Le représentant sera, de préférence, l'expression la plus simple. L'ensemble de tous les nombres rationnels se représente par Q , dans lequel est inclus l'ensemble Q' .

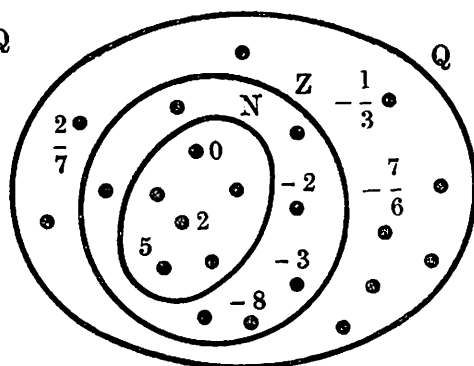
2. Quelques parties de Q

$$1. \quad 3 = \frac{3}{1}, \quad -7 = -\frac{7}{1}, \quad 0 = \frac{0}{1}, \dots$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Donc } \forall a \in \mathbb{Z} : a = \frac{a}{1} \\ \text{Mais } \frac{a}{1} \in \mathbb{Q} \end{array} \right\} \rightarrow a \in \mathbb{Q}$$

Les nombres entiers étant des éléments de $\mathbb{Q}$, on a $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

$$\left. \begin{array}{l} 2. \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$



$$3. \mathbb{Q}_0 = \{x \mid x \text{ est un nombre rationnel } \neq 0\}$$

$$\mathbb{Q}^+ = \{y \mid y = 0 \text{ ou un nombre rationnel positif}\}$$

$$\mathbb{Q}^- = \{z \mid z = 0 \text{ ou un nombre rationnel négatif}\}$$

$$\mathbb{Q}_0^+ = \{u \mid u \text{ est un nombre rationnel positif}\}$$

$$\mathbb{Q}_0^- = \{v \mid v \text{ est un nombre rationnel négatif}\}$$

3. Valeur absolue

La valeur absolue d'un nombre rationnel est le nombre obtenu en supprimant le signe du nombre rationnel.

$$\text{La valeur absolue de } +\frac{3}{8} = \left| +\frac{3}{8} \right| = \frac{3}{8}$$

$$\text{La valeur absolue de } -\frac{5}{12} = \left| -\frac{5}{12} \right| = \frac{5}{12}$$

4. Nombres rationnels opposés

Deux nombres rationnels de même valeur absolue mais de signes contraires sont dits opposés.

$$-\frac{2}{7} \text{ en } \frac{2}{7} \qquad \frac{4}{9} \text{ en } -\frac{4}{9}$$

5. Nombres inverses

Pour obtenir l'inverse d'un nombre rationnel, il suffit d'intervertir le numérateur et le dénominateur.

$$-\frac{5}{7} \text{ est l'inverse de } -\frac{7}{5} \text{ ou } \left(-\frac{7}{5}\right)^{-1} = -\frac{5}{7}$$

$$-\frac{7}{5} \text{ est l'inverse de } -\frac{5}{7} \text{ ou } \left(-\frac{5}{7}\right)^{-1} = -\frac{7}{5}$$

$$-\frac{5}{7} \text{ et } -\frac{7}{5} \text{ sont des nombres inverses.}$$

$$\text{Il en est de même pour 4 et } \frac{1}{4} \text{ et nous avons } (4)^{-1} = \frac{1}{4} \text{ et } \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 4$$

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}}$$

Attention !

Puisque $0 = \frac{0}{1}$, l'inverse de 0 serait $\frac{1}{0}$; mais comme $\frac{1}{0}$ n'a pas de sens, 0 n'a pas d'inverse.

6. Ordre dans Q

a) Tout nombre rationnel positif est plus grand que 0.

$$7 > 0 \quad \frac{4}{9} > 0 \quad \frac{1}{8} > 0$$

Tout nombre rationnel négatif est plus petit que 0.

$$-7 < 0 \quad -\frac{4}{9} < 0 \quad -\frac{1}{8} < 0$$

b) Tout nombre rationnel positif est plus grand que tout nombre rationnel négatif.

$$\frac{3}{4} > -\frac{7}{8} \quad 2 > -\frac{24}{3}$$

c) Pour comparer deux nombres rationnels positifs ou deux nombres rationnels négatifs, nous les réduisons d'abord au même dénominateur.

1° De deux nombres rationnels positifs, le plus grand est celui qui a le plus grand numérateur.

Ex. $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{5}$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{3} = \frac{10}{15} \\ \frac{3}{5} = \frac{9}{15} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{10}{15} > \frac{9}{15} \Rightarrow \frac{2}{3} > \frac{3}{5}$$

2° De deux nombres rationnels négatifs, le plus grand est celui qui a le plus petit numérateur.

Ex. $-\frac{1}{3}$ et $-\frac{2}{5}$

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{1}{3} = -\frac{5}{15} \\ -\frac{2}{5} = -\frac{6}{15} \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{5}{15} > -\frac{6}{15} \Rightarrow -\frac{1}{3} > -\frac{2}{5}$$

Exercices

1. Simplifiez :

$$A = \left\{ -\frac{6}{16}, \frac{5}{9}, \frac{45}{81}, \frac{30}{54}, \frac{34}{51}, \frac{-28}{49}, -\frac{36}{63}, \frac{-60}{105}, -\frac{35}{63} \right\}$$

2. Ecrivez plus simplement :

a) $\left| -\frac{5}{7} \right|, \left| \frac{+3}{-5} \right|, \left| \frac{-2}{-7} \right|, \left| +\frac{3}{17} \right|, +\left(\frac{-5}{3} \right), +\left(\frac{+7}{8} \right), -\left(-\frac{3}{2} \right),$

b) $-\left(+\frac{5}{6} \right), +\left(\frac{+3}{+17} \right), +\left(\frac{-6}{+11} \right), +\left(\frac{+1}{-10} \right), +\left(\frac{-7}{-12} \right), -\left(\frac{+2}{+11} \right),$

c) $-\left(\frac{-8}{13} \right), -\left(\frac{+12}{-5} \right), -\left(\frac{-13}{-12} \right), \left(\frac{3}{8} \right)^{-1}, \left(-\frac{7}{2} \right)^{-1}, 5^{-1},$

d) $(-9)^{-1}, \left(-\frac{3}{5} \right)^{-1}, \left(\frac{6}{-11} \right)^{-1}, \left(\frac{-12}{+17} \right)^{-1}, \left(\frac{+13}{-19} \right)^{-1}.$

3. Quel est l'inverse de l'inverse d'un nombre rationnel? Donnez un exemple.

4. Vérifiez l'égalité des expressions suivantes :

$$\left(-\frac{3}{7}\right)^{-1} = \left(\frac{-3}{7}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{-7}\right)^{-1} = \frac{7}{-3} = \frac{-7}{3} = -\frac{7}{3}$$

L'inversion dans un nombre rationnel n'influence pas ...

5. Complétez :

	expression la plus simple	valeur absolue	opposé	inverse
$-\frac{2}{3}$				
$+\frac{8}{-4}$				
$-\frac{5}{-6}$				
$+\frac{1}{-5}$				
$\frac{0}{-3}$				
$-\frac{11}{-1}$				

6. Complétez :

	opposé	inverse	opposé de l'inverse	inverse de l'opposé
$-\frac{2}{7}$				
$\frac{8}{3}$				
$-\frac{3}{8}$				
$\frac{1}{3}$				
$-\frac{13}{1}$				
$\frac{1}{9}$				
$\frac{5}{5}$				

$$7. A = \left\{ -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{11}{3}, -\frac{11}{3} \right\}$$

Définissez et dessinez : $R : A \rightarrow A : x \rightarrow -x$.

$$B = \left\{ -\frac{3}{8}, -\frac{8}{3}, 1, \frac{5}{11}, \frac{11}{5}, \frac{4}{9} \right\}$$

Ecrivez et dessinez : $R : B \rightarrow B : x \rightarrow \frac{1}{x}$.

$$C = \left\{ -\frac{3}{7}, \frac{3}{7}, \frac{5}{12}, -\frac{8}{7}, \frac{8}{7}, -\frac{2}{9} \right\}$$

Définissez et dessinez $R : C \rightarrow C$ « ... a la même valeur absolue que ... ».

Donnez les propriétés de chacune des relations.

8. Rangez

a) en ordre de grandeur croissante : $-\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{5}{2}, -2, 1, \frac{4}{5}$

b) en ordre de grandeur décroissante : $\frac{7}{12}, -\frac{8}{3}, -\frac{7}{12}, -1, \frac{3}{15}, \frac{5}{4}$

$$9. A = \left\{ -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{2} \right\}$$

Définissez et dessinez $R : A \rightarrow A$ « ... $\leq$... ».

$$B = \left\{ -\frac{3}{5}, -\frac{7}{10}, -\frac{13}{20}, -\frac{10}{15} \right\}$$

Définissez et dessinez $R : B \rightarrow B$ « ... $<$... ».

$$C = \left\{ \frac{5}{9}, \frac{7}{12}, \frac{8}{15}, \frac{11}{18} \right\}$$

Définissez et dessinez $R : C \rightarrow C$ « ... $\geq$... ».

$$D = \left\{ -\frac{3}{7}, \frac{5}{21}, \frac{3}{14}, -\frac{16}{35} \right\}$$

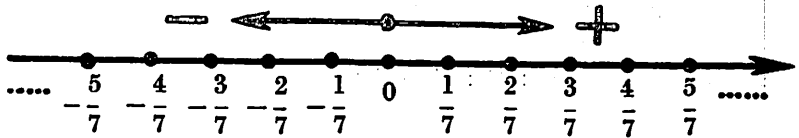
Définissez et dessinez $R : D \rightarrow D$ « ... $>$... ».

Quelles relations obtenez-vous ?

ADDITION DES NOMBRES RATIONNELS

1. Notion

Considérons l'axe des nombres rationnels de dénominateur 7.



Un déplacement vers la droite est symbolisé par le signe +, un déplacement vers la gauche par le signe -.

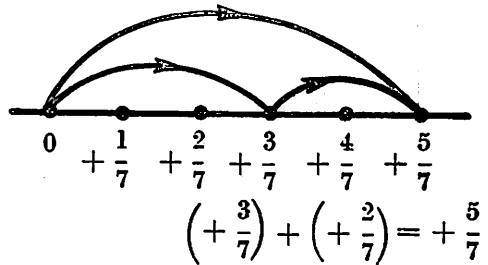
Le résultat de deux déplacements est la somme de deux nombres rationnels.

a) $\frac{3}{7}$ à droite : $+\frac{3}{7}$

$\frac{2}{7}$ à droite : $+\frac{2}{7}$

résultat :

$\frac{5}{7}$ à droite : $+\frac{5}{7}$

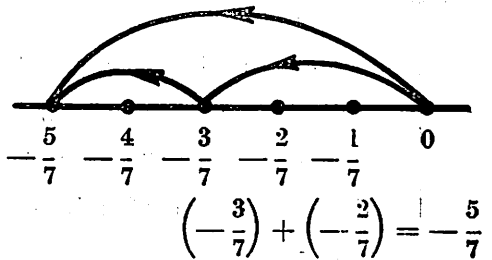


b) $\frac{3}{7}$ à gauche : $-\frac{3}{7}$

$\frac{2}{7}$ à gauche : $-\frac{2}{7}$

résultat :

$\frac{5}{7}$ à gauche : $-\frac{5}{7}$

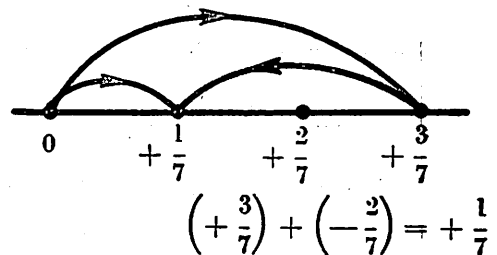


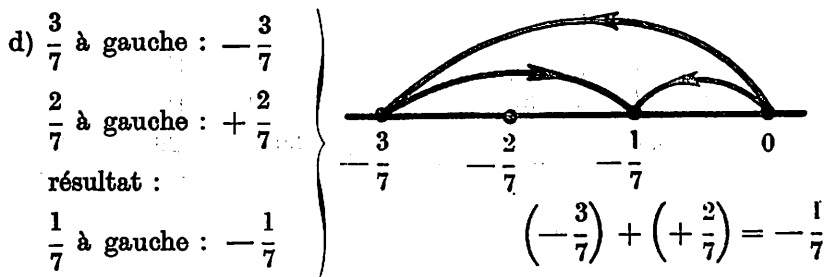
c) $\frac{3}{7}$ à droite : $+\frac{3}{7}$

$\frac{2}{7}$ à gauche : $-\frac{2}{7}$

résultat :

$\frac{1}{7}$ à droite : $+\frac{1}{7}$





Nous pouvons écrire :

$$\left(+\frac{3}{7}\right) + \left(+\frac{2}{7}\right) = \frac{5}{7} \Rightarrow \left(\frac{+3}{7}\right) + \left(\frac{+2}{7}\right) = \frac{(+3) + (+2)}{7} = \frac{+5}{7} = +\frac{5}{7}$$

$$\left(-\frac{3}{7}\right) + \left(-\frac{2}{7}\right) = -\frac{5}{7} \Rightarrow \left(\frac{-3}{7}\right) + \left(\frac{-2}{7}\right) = \frac{(-3) + (-2)}{7} = \frac{-5}{7} = -\frac{5}{7}$$

$$\left(+\frac{3}{7}\right) + \left(-\frac{2}{7}\right) = \left(\frac{+3}{7}\right) + \left(\frac{-2}{7}\right) = \frac{(+3) + (-2)}{7} = \frac{+1}{7} = +\frac{1}{7}$$

$$\left(-\frac{3}{7}\right) + \left(+\frac{2}{7}\right) = \left(\frac{-3}{7}\right) + \left(\frac{+2}{7}\right) = \frac{(-3) + (+2)}{7} = \frac{-1}{7} = -\frac{1}{7}$$

De ce qui précède, nous déduisons la règle de l'addition.

A. Addition de deux nombres rationnels de même dénominateur

1. Affecter le numérateur du signe.
2. Conserver le dénominateur commun et additionner les numérateurs.
3. Si possible, simplifier.

B. Addition de deux nombres rationnels quelconques

1. Réduire les nombres au même dénominateur.
2. Appliquer la règle précédente.

Exemples :

$$\left(+\frac{3}{4}\right) + \left(+\frac{2}{3}\right) = \left(+\frac{9}{12}\right) + \left(+\frac{8}{12}\right) = \frac{17}{12}$$

$$\left(+\frac{4}{5}\right) + (-6) = \left(+\frac{4}{5}\right) + \left(-\frac{30}{5}\right) = \frac{-26}{5} = -\frac{26}{5}.$$

Conséquence :

$$\left(+\frac{6}{11}\right) + \left(-\frac{6}{11}\right) = 0$$

$$\left(-\frac{4}{5}\right) + \left(+\frac{4}{5}\right) = 0$$

La somme de deux nombres rationnels opposés est nulle.

2. Propriétés

L'addition dans $\mathbb{Q}$ est :

1) interne et partout définie

$$\left(-\frac{2}{3}\right) + \left(+\frac{3}{5}\right) = \left(-\frac{10}{15}\right) + \left(+\frac{9}{15}\right) = -\frac{1}{15} \in \mathbb{Q}$$

2) commutative

$$\left(-\frac{3}{4}\right) + \left(+\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{9}{12}\right) + \left(+\frac{8}{12}\right) = -\frac{1}{12}$$

$$\left(+\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) = \left(+\frac{8}{12}\right) + \left(-\frac{9}{12}\right) = -\frac{1}{12}$$

3) associative

$$\left[\left(+\frac{2}{9}\right) + \left(-\frac{4}{9}\right)\right] + \left(-\frac{5}{9}\right) = \left(-\frac{2}{9}\right) + \left(-\frac{5}{9}\right) = -\frac{7}{9}$$

$$\left(+\frac{2}{9}\right) + \left[\left(-\frac{4}{9}\right) + \left(-\frac{5}{9}\right)\right] = \left(+\frac{2}{9}\right) + \left(-\frac{9}{9}\right) = -\frac{7}{9}$$

4) pourvue de l'élément neutre 0

$$\left(+\frac{3}{5}\right) + 0 = +\frac{3}{5} = 0 + \left(+\frac{3}{5}\right)$$

$$\left(-\frac{2}{7}\right) + 0 = -\frac{2}{7} = 0 + \left(-\frac{2}{7}\right)$$

Chaque élément $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ a un élément symétrique $-\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ (son opposé) tel que $\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = 0 =$ l'élément neutre.

$$\left(-\frac{3}{8}\right) + \left(+\frac{3}{8}\right) = 0 = \left(+\frac{3}{8}\right) + \left(-\frac{3}{8}\right)$$

$\mathbb{Q}, +$ est un groupe commutatif

$$\begin{aligned} & \left(+\frac{5}{12}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) + (-2) + \left(+\frac{5}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) = \\ & \underbrace{\left(+\frac{5}{12}\right) + \left(-\frac{9}{12}\right) + \left(-\frac{24}{12}\right) + \left(+\frac{30}{12}\right) + \left(-\frac{4}{12}\right)}_{-\frac{4}{12}} \\ & \underbrace{\hspace{1.5cm} -\frac{28}{12}}_{\hspace{1.5cm} +\frac{2}{12}} \\ & \hspace{3.5cm} \underbrace{\hspace{1.5cm} -\frac{2}{12} = -\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
 \left(+\frac{5}{12}\right) + \left(-\frac{9}{12}\right) + \left(-\frac{24}{12}\right) + \left(+\frac{30}{12}\right) + \left(-\frac{4}{12}\right) &= \\
 \underbrace{\left(+\frac{5}{12}\right) + \left(+\frac{30}{12}\right)}_{\left(+\frac{35}{12}\right)} + \underbrace{\left(-\frac{9}{12}\right) + \left(-\frac{24}{12}\right) + \left(-\frac{4}{12}\right)}_{\left(-\frac{37}{12}\right)} &= \\
 \underbrace{\left(+\frac{35}{12}\right) + \left(-\frac{37}{12}\right)}_{-\frac{2}{12}} &= -\frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

4. Mode opératoire

Dans une somme, nous supprimons le signe opérationnel et nous obtenons :

$$\left(+\frac{1}{3}\right) + \left(+\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{4}{12} + \frac{9}{12} = \frac{13}{12}$$

$$\left(+\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{5}{8}\right) = \frac{1}{2} - \frac{5}{8} = \frac{4}{8} - \frac{5}{8} = -\frac{1}{8}$$

$$\left(-\frac{2}{5}\right) + \left(+\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{5} + \frac{2}{3} = -\frac{6}{15} + \frac{10}{15} = \frac{4}{15}$$

$$\left(-\frac{4}{7}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{7} - \frac{1}{3} = -\frac{12}{21} - \frac{7}{21} = -\frac{19}{21}$$

$$\left(+\frac{9}{11}\right) + \left(-\frac{3}{11}\right) + \left(+\frac{2}{11}\right) + \left(-\frac{5}{11}\right) = \frac{9}{11} - \frac{3}{11} + \frac{2}{11} - \frac{5}{11} = \frac{3}{11}$$

Exercices

1. Ecrivez les éléments symétriques des nombres suivants dans le groupe $\mathbb{Q}$, +

$$-\frac{2}{7}, \quad +\frac{8}{17}, \quad -\frac{19}{3}, \quad +\frac{17}{32}, \quad -\frac{7}{128}, \quad \frac{a}{b}, \quad -\frac{x}{y}.$$

2. Effectuez :

- 1) $\left(-\frac{5}{24}\right) + \left(-\frac{13}{24}\right)$ 6) $\left(-\frac{11}{6}\right) + \left(+\frac{2}{6}\right) + \left(-\frac{5}{6}\right)$
- 2) $\left(+\frac{3}{16}\right) + \left(-\frac{7}{16}\right)$ 7) $\left(+\frac{12}{124}\right) + \left(-\frac{117}{124}\right) + \left(-\frac{29}{124}\right)$
- 3) $\left(+\frac{3}{17}\right) + \left(-\frac{3}{17}\right)$ 8) $\left(+\frac{2}{15}\right) + \left(-\frac{4}{15}\right) + \left(-\frac{8}{15}\right) + \left(-\frac{7}{15}\right)$
- 4) $\left(-\frac{7}{12}\right) + \left(+\frac{3}{12}\right)$ 9) $\left(-\frac{3}{38}\right) + \left(-\frac{17}{38}\right) + \left(+\frac{43}{38}\right) + \left(-\frac{4}{38}\right)$
- 5) $\left(+\frac{5}{13}\right) + \left(+\frac{21}{13}\right)$ 10) $\left(-\frac{2}{19}\right) + \left(-\frac{7}{19}\right) + \left(+\frac{17}{19}\right) + \left(-\frac{18}{19}\right) + \left(+\frac{5}{19}\right)$

3. Effectuez :

- 1) $\left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{2}{9}\right)$ 5) $\left(-\frac{17}{36}\right) + \left(-\frac{11}{8}\right) + \left(-\frac{12}{15}\right)$
- 2) $\left(+\frac{3}{20}\right) + \left(-\frac{7}{30}\right)$ 6) $\left(-\frac{4}{5}\right) + \left(+\frac{3}{20}\right) + (-7)$
- 3) $\left(-\frac{17}{15}\right) + \left(+\frac{5}{18}\right)$ 7) $\left(-\frac{4}{5}\right) + \left(-\frac{8}{9}\right) + \left(+\frac{7}{15}\right)$
- 4) $\left(+\frac{4}{9}\right) + \left(+\frac{5}{6}\right)$ 8) $\left(-\frac{9}{14}\right) + \left(+\frac{25}{63}\right) + \left(-\frac{13}{21}\right)$
- 9) $\left(+\frac{1}{2}\right) + (+4) + \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{7}{10}\right)$
- 10) $\left(+\frac{7}{10}\right) + \left(-\frac{7}{24}\right) + \left(-\frac{13}{32}\right) + \left(-\frac{17}{48}\right)$
- 11) $\left(-\frac{3}{7}\right) + \left(+\frac{17}{21}\right) + \left(-\frac{9}{14}\right) + \left(-\frac{15}{7}\right)$
- 12) $\left(-\frac{13}{11}\right) + \left(+\frac{7}{33}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(+\frac{4}{7}\right) + \left(-\frac{10}{21}\right)$
- 13) $\left(-\frac{12}{10}\right) + \left(+\frac{8}{15}\right) + \left(-\frac{7}{4}\right) + (-3) + \left(-\frac{3}{8}\right)$

4. Effectuez :

$$1) -\frac{5}{12} + \frac{5}{18}$$

$$6) \frac{9}{14} - \frac{7}{10} - \frac{10}{7} + \frac{27}{35}$$

$$2) -\frac{3}{4} - \frac{5}{16}$$

$$7) \frac{3}{8} - \frac{25}{6} + \frac{7}{12} - \frac{4}{15}$$

$$3) -\frac{7}{24} + \frac{11}{15} - \frac{3}{5}$$

$$8) -\frac{1}{4} + \frac{5}{6} - \frac{5}{7} - 3$$

$$4) -\frac{7}{20} - \frac{17}{25} + \frac{7}{8}$$

$$9) \frac{17}{42} + \frac{5}{8} - \frac{17}{24} - \frac{13}{14} + \frac{16}{7}$$

$$5) -2 - \frac{13}{18} + \frac{9}{24}$$

$$10) -\frac{14}{15} + \frac{7}{9} - \frac{11}{8} + 5 - \frac{1}{6}$$

5. Quel est le nombre qui est de $\frac{7}{33}$ plus grand que $-\frac{17}{44}$?

Quel est le nombre qui est de $-\frac{13}{12}$ plus grand que $-\frac{6}{16}$?

CHAPITRE XXII

SOUSTRACTION DES NOMBRES RATIONNELS

1. Notion

Nous savons que : $-(+a) = +(-a)$
 $-(-a) = +(+a)$

et nous pouvons écrire :

$$\left(+\frac{5}{7}\right) - \left(+\frac{3}{7}\right) = \left(+\frac{5}{7}\right) + \left(-\frac{3}{7}\right) = \frac{5}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2}{7}$$

$$\left(+\frac{5}{7}\right) - \left(-\frac{3}{7}\right) = \left(+\frac{5}{7}\right) + \left(+\frac{3}{7}\right) = \frac{5}{7} + \frac{3}{7} = \frac{8}{7}$$

$$\left(-\frac{5}{7}\right) - \left(+\frac{3}{7}\right) = \left(-\frac{5}{7}\right) + \left(-\frac{3}{7}\right) = -\frac{5}{7} - \frac{3}{7} = -\frac{8}{7}$$

$$\left(-\frac{5}{7}\right) - \left(-\frac{3}{7}\right) = \left(-\frac{5}{7}\right) + \left(+\frac{3}{7}\right) = -\frac{5}{7} + \frac{3}{7} = -\frac{2}{7}$$

Pour soustraire un nombre rationnel, on ajoute le nombre opposé.

$$\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q} : \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \left(-\frac{c}{d}\right)$$

2. Propriétés

La soustraction dans $\mathbb{Q}$ est :

1) interne et partout définie

$$\begin{aligned} \left(-\frac{3}{5}\right) - \left(+\frac{2}{3}\right) &= \left(-\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) = \\ &= -\frac{3}{5} - \frac{2}{3} = -\frac{9}{15} - \frac{10}{15} = -\frac{19}{15} \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(+\frac{1}{2}\right) - \left(+\frac{1}{6}\right) &= \left(+\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right) = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

2) non commutative

$$\begin{array}{l|l}
 \left(-\frac{3}{4}\right) - \left(+\frac{1}{3}\right) = & \left(+\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{3}{4}\right) = \\
 \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) = & \left(+\frac{1}{3}\right) + \left(+\frac{3}{4}\right) = \\
 -\frac{3}{4} - \frac{1}{3} = & \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \\
 -\frac{9}{12} - \frac{4}{12} = & \frac{4}{12} + \frac{9}{12} = \\
 -\frac{13}{12} & \frac{13}{12}
 \end{array}$$

3. Emploi simultané de + et -

1. *Polynôme*

$$\begin{aligned}
 & \left(+\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{3}{4}\right) + (-2) + \left(+\frac{5}{6}\right) - \left(+\frac{1}{12}\right) = \\
 & \left(+\frac{2}{3}\right) + \left(+\frac{3}{4}\right) + (-2) + \left(+\frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{1}{12}\right) = \\
 & \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - 2 + \frac{5}{6} - \frac{1}{12} = \\
 & \frac{8}{12} + \frac{9}{12} - \frac{24}{12} + \frac{10}{12} - \frac{1}{12} = \\
 & \frac{2}{12} = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

ou plus simplement :

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - 2 + \frac{5}{6} - \frac{1}{12} = \\
 & \frac{8}{12} + \frac{9}{12} - \frac{24}{12} + \frac{10}{12} - \frac{1}{12} = \\
 & \frac{2}{12} = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

2. Addition d'un polynôme

$$\frac{2}{13} + \left(\frac{5}{13} - \frac{7}{13} + \frac{1}{13} - \frac{2}{13} \right) = \frac{2}{13} + \left(-\frac{3}{13} \right) = \frac{2}{13} - \frac{3}{13} = -\frac{1}{13}$$

$$\text{ou} \quad = \frac{2}{13} + \frac{5}{13} - \frac{7}{13} + \frac{1}{13} - \frac{2}{13} = -\frac{1}{13}$$

3. Soustraction d'un polynôme

$$\frac{2}{13} - \left(\frac{5}{13} - \frac{7}{13} + \frac{1}{13} - \frac{2}{13} \right) = \frac{2}{13} - \left(-\frac{3}{13} \right) = \frac{2}{13} + \frac{3}{13} = \frac{5}{13}$$

$$\text{ou} \quad = \frac{2}{13} - \frac{5}{13} + \frac{7}{13} - \frac{1}{13} + \frac{2}{13} = \frac{5}{13}$$

Conclusion :

1. On peut supprimer ou introduire des parenthèses qui sont précédées du signe +.
2. On peut supprimer ou introduire des parenthèses qui sont précédées du signe — à condition de changer tous les signes que les parenthèses renferment.

4. Nombre fractionnaire

1. Notion

Un nombre fractionnaire est la somme d'un nombre naturel et d'une fraction rationnelle.

$$4\frac{3}{5} = 4 + \frac{3}{5}$$

$$-4\frac{3}{5} = -\left(4\frac{3}{5}\right) = -\left(4 + \frac{3}{5}\right) = -4 - \frac{3}{5}$$

2. Transformations

$$\frac{25}{3} = \frac{24}{3} + \frac{1}{3} = 8 + \frac{1}{3} = 8\frac{1}{3}$$

$$-\frac{27}{5} = -\frac{25}{5} - \frac{2}{5} = -5 - \frac{2}{5} = -\left(5 + \frac{2}{5}\right) = -5\frac{2}{5}$$

$$5\frac{2}{13} = \frac{(5 \times 13) + 2}{13} = \frac{65 + 2}{13} = \frac{67}{13}$$

$$-6\frac{5}{7} = -\left(6\frac{5}{7}\right) = -\frac{(6 \times 7) + 5}{7} = -\frac{42 + 5}{7} = -\frac{47}{7}$$

3. *Addition et soustraction*

Transformer les nombres fractionnaires en fractions et appliquer les règles habituelles.

$$5\frac{2}{3} + 3\frac{5}{6} = \frac{17}{3} + \frac{23}{6} = \frac{34}{6} + \frac{23}{6} = \frac{57}{6} = 9\frac{3}{6} = 9\frac{1}{2}$$

$$13\frac{1}{3} - 8\frac{5}{9} = \frac{40}{3} - \frac{77}{9} = \frac{120}{9} - \frac{77}{9} = \frac{43}{9} = 4\frac{7}{9}$$

$$-7\frac{2}{5} - 3\frac{4}{15} = -\frac{37}{5} - \frac{49}{15} = -\frac{111}{15} - \frac{49}{15} = -\frac{160}{15} =$$

$$-10\frac{10}{15} = -10\frac{2}{3}$$

$$3\frac{7}{10} - 5\frac{2}{5} = \frac{37}{10} - \frac{27}{5} = \frac{37}{10} - \frac{54}{10} = -\frac{17}{10} = -1\frac{7}{10}$$

Exercices

1. Effectuez :

1) $\left(-\frac{5}{12}\right) - \left(+\frac{7}{12}\right)$

4) $\left(+\frac{9}{5}\right) - \left(+\frac{5}{9}\right)$

2) $\left(+\frac{3}{8}\right) - \left(-\frac{17}{8}\right)$

5) $\left(-\frac{7}{24}\right) - \left(-\frac{5}{36}\right)$

3) $\left(-\frac{5}{16}\right) - \left(-\frac{13}{16}\right)$

6) $(-5) - \left(+\frac{7}{8}\right)$

7) $\left(+\frac{5}{8}\right) - \left(-\frac{5}{12}\right)$

8) $\left(+\frac{8}{15}\right) - \left(-\frac{13}{25}\right)$

9) $\left(-\frac{15}{8}\right) - \left(-\frac{7}{24}\right)$

2. Effectuez de deux manières différentes :

$$1) \left(-\frac{4}{9}\right) + \left(-\frac{5}{27}\right) - \left(+\frac{13}{18}\right)$$

$$2) \left(+\frac{3}{4}\right) - \left(-\frac{7}{6}\right) - \left(-\frac{12}{15}\right)$$

$$3) \left(-\frac{10}{7}\right) + \left(+\frac{8}{21}\right) - \left(-\frac{15}{14}\right)$$

$$4) \left(+\frac{7}{8}\right) - \left(-\frac{11}{18}\right) - \left(+\frac{9}{12}\right) - \left(-\frac{5}{24}\right)$$

$$5) (-5) + \left(-\frac{7}{3}\right) - \left(+\frac{9}{12}\right) - \left(-\frac{4}{9}\right)$$

$$6) \left(-\frac{3}{7}\right) + \left(+\frac{9}{14}\right) - \left(-\frac{16}{21}\right) - \left(+\frac{3}{5}\right)$$

$$7) \left(-\frac{21}{50}\right) - \left(+\frac{8}{25}\right) + \left(+\frac{16}{25}\right) + \left(-\frac{13}{10}\right) - \left(-\frac{2}{5}\right)$$

$$8) \left(-\frac{16}{9}\right) - \left(+\frac{5}{6}\right) - \left(-\frac{13}{18}\right) + \left(-\frac{23}{36}\right) - (-3)$$

3. Calculez :

$$1) \quad m + n + p$$

$$2) \quad m - n + p$$

$$3) \quad -m - n - p$$

$$4) \quad -m + n - p$$

$$\text{pour } m = -\frac{2}{3} \qquad n = \frac{3}{5} \qquad p = -\frac{2}{7}$$

$$m = \frac{2}{7} \qquad n = -\frac{4}{5} \qquad p = -2$$

$$m = -\frac{3}{4} \qquad n = -\frac{3}{5} \qquad p = -\frac{7}{10}$$

4. Effectuez de deux manières différentes :

$$1) \frac{4}{5} + \left(-\frac{13}{6} - \frac{7}{3}\right)$$

$$5) \frac{5}{6} + \left(-\frac{2}{3} + \frac{5}{12} - \frac{7}{4}\right)$$

$$2) -\frac{7}{8} - \left(\frac{5}{12} - \frac{11}{36}\right)$$

$$6) -\frac{7}{16} + \left(\frac{5}{8} - \frac{3}{32} - \frac{9}{4}\right)$$

$$3) -\frac{3}{7} - \left(-\frac{9}{7} - \frac{5}{14}\right)$$

$$7) \frac{5}{13} + \left(-\frac{3}{26} - \frac{17}{13} - \frac{12}{39}\right)$$

$$4) \frac{13}{17} - \left(\frac{5}{17} + \frac{3}{17} - \frac{12}{17}\right)$$

$$8) -\frac{2}{5} - \left(-\frac{3}{8} + \frac{7}{10} - \frac{9}{4}\right)$$

5. Effectuez de deux manières différentes :

$$1) \left(\frac{7}{12} - \frac{3}{10}\right) + \left(-\frac{7}{5} - \frac{5}{3}\right) - \frac{1}{6}$$

$$2) \left(-\frac{2}{3} + \frac{7}{8}\right) - \left(-\frac{5}{4} + \frac{7}{12} - 2\right)$$

$$3) \left(-\frac{2}{7} + \frac{5}{3}\right) - \left(\frac{5}{18} - \frac{4}{21}\right) + \left(-\frac{17}{42} + \frac{5}{6}\right)$$

$$4) -\left(-1 + \frac{7}{3}\right) - \left(\frac{2}{5} - \frac{16}{45} - \frac{8}{9}\right) - \left(-3 + \frac{2}{15}\right)$$

$$5) \left(2 - \frac{5}{9} - \frac{3}{5}\right) - \left(-\frac{5}{6} + \frac{7}{18} - \frac{8}{15}\right)$$

$$6) -\frac{7}{10} - \left(-\frac{3}{2} + \frac{7}{15}\right) + \left(-\frac{3}{4} - \frac{8}{5}\right)$$

6. Effectuez de deux manières différentes :

$$1) \left(-2 - \frac{3}{5}\right) - \left[-\left(-\frac{9}{16} + \frac{11}{24}\right) - \left(\frac{5}{12} - \frac{3}{8}\right)\right]$$

$$2) -\frac{5}{12} + \left[-\frac{2}{3} - \left(-4 + \frac{7}{12} - \frac{1}{15}\right) + \frac{7}{8}\right]$$

$$3) \left[\left(-\frac{5}{8} + \frac{1}{6}\right) - \left(-\frac{5}{2} - \frac{11}{18}\right)\right] - \left[\left(-\frac{4}{9} + \frac{5}{6}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{7}{12}\right)\right]$$

7. Transformez en nombres fractionnaires :

$$\frac{27}{8}, \quad -\frac{37}{4}, \quad -\frac{243}{17}, \quad \frac{65}{12}, \quad -\frac{37}{19}.$$

8. Transformez en fractions :

$$5\frac{2}{7}, \quad -9\frac{5}{12}, \quad -3\frac{7}{22}, \quad 12\frac{3}{10}, \quad -10\frac{9}{10}.$$

9. Effectuez :

$$1) 12\frac{3}{4} + 7\frac{1}{3}$$

$$6) -5\frac{1}{6} - 9\frac{4}{9} + 6\frac{5}{12}$$

$$2) 15\frac{3}{5} - 12\frac{7}{15}$$

$$7) 7\frac{1}{12} - 20\frac{3}{4} + 2\frac{7}{8}$$

$$3) -3\frac{5}{8} + 7\frac{11}{12}$$

$$8) 7\frac{2}{5} - 3\frac{1}{3} - 5\frac{3}{10}$$

$$4) 19\frac{7}{8} - 12\frac{3}{8}$$

$$9) -17\frac{2}{3} + 6\frac{3}{4} - 8\frac{1}{2} - 3\frac{7}{12}$$

$$5) 5\frac{5}{11} - 17\frac{9}{11}$$

$$10) 5 - 2\frac{7}{10} - \frac{8}{15} - 16\frac{1}{4} - 4\frac{3}{8}$$

10. Effectuez de deux manières différentes :

$$1) \left(5\frac{3}{8} - 7\frac{1}{2}\right) - \left(2\frac{5}{7} + 5\frac{3}{5}\right)$$

$$2) 7\frac{1}{4} + \left(3\frac{1}{2} - 7\frac{1}{4}\right) - \left(-3\frac{2}{5} + 3\frac{7}{10}\right)$$

$$3) \left[5\frac{4}{9} - \left(3\frac{5}{6} - 5\frac{2}{3}\right)\right] - \left[-\left(4\frac{1}{2} - 6\frac{1}{3}\right) - 8\frac{5}{12}\right]$$

11. Quel nombre devez-vous soustraire de $- \frac{8}{27}$ pour obtenir $- \frac{4}{15}$?

Quel nombre devez-vous ajouter à $- 3\frac{7}{24}$ pour obtenir $- 5\frac{5}{18}$?

CHAPITRE XXIII

MULTIPLICATION DES NOMBRES RATIONNELS

1. Notion

Le produit de deux nombres rationnels s'obtient en multipliant les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Attention aux signes !

$$\begin{aligned} \left(+\frac{2}{3}\right) \left(+\frac{4}{5}\right) &= +\frac{8}{15} & (-4) \left(-\frac{3}{5}\right) &= \left(-\frac{4}{1}\right) \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{12}{5} \\ \left(+\frac{2}{3}\right) \left(-\frac{4}{5}\right) &= -\frac{8}{15} & \left(+\frac{2}{7}\right) (-3) &= \left(+\frac{2}{7}\right) \left(-\frac{3}{1}\right) = -\frac{6}{7} \\ \left(-\frac{2}{3}\right) \left(+\frac{4}{5}\right) &= -\frac{8}{15} & \left(+\frac{10}{27}\right) \left(-\frac{36}{35}\right) &= -\frac{\overset{2}{\cancel{10}} \times \overset{4}{\cancel{36}}}{\underset{3}{\cancel{27}} \times \underset{7}{\cancel{35}}} = -\frac{8}{21} \\ \left(-\frac{2}{3}\right) \left(-\frac{4}{5}\right) &= +\frac{8}{15} & \left(-\frac{4}{8}\right) \left(-\frac{6}{14}\right) &= \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{7}\right) = \frac{3}{14} \end{aligned}$$

Conséquence :

$$\begin{aligned} \left(+\frac{6}{11}\right) \left(+\frac{11}{6}\right) &= 1 \\ \left(-\frac{1}{3}\right) (-3) &= 1 \end{aligned}$$

Le produit de deux nombres inverses égale 1.

2. Propriétés

A. La multiplication dans $\mathbb{Q}$ est :

1) interne et partout définie

$$\left(-\frac{3}{7}\right) \left(+\frac{2}{5}\right) = -\frac{6}{35} \in \mathbb{Q}$$

2) commutative

$$\left(-\frac{2}{7}\right) \left(-\frac{5}{3}\right) = \left(-\frac{5}{3}\right) \left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{10}{21}$$

3) associative

$$\left[\left(-\frac{1}{3} \right) \left(+\frac{2}{5} \right) \right] \left(-\frac{4}{7} \right) = \left(-\frac{2}{15} \right) \left(-\frac{4}{7} \right) = \frac{8}{105}$$

$$\left(-\frac{1}{3} \right) \left[\left(+\frac{2}{5} \right) \left(-\frac{4}{7} \right) \right] = \left(-\frac{1}{3} \right) \left(-\frac{8}{35} \right) = \frac{8}{105}$$

4) pourvue de l'élément neutre 1

$$\left(-\frac{2}{3} \right) \cdot 1 = -\frac{2}{3} = 1 \cdot \left(-\frac{2}{3} \right)$$

$$\left(+\frac{3}{7} \right) \cdot 1 = +\frac{3}{7} = 1 \cdot \left(+\frac{3}{7} \right)$$

5) pourvue de l'élément absorbant 0

$$\left(+\frac{2}{3} \right) \cdot 0 = 0 = 0 \cdot \left(+\frac{2}{3} \right)$$

$$\left(-\frac{3}{7} \right) \cdot 0 = 0 = 0 \cdot \left(-\frac{3}{7} \right)$$

B. 1. La multiplication dans $\mathbb{Q}_0$ jouit des propriétés 1, 2, 3 et 4.

2. Chaque élément $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_0$ a un élément symétrique (son inverse) tel que

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1 = \text{l'élément neutre.}$$

$$\left(-\frac{3}{8} \right) \left(-\frac{8}{3} \right) = 1 = \left(-\frac{8}{3} \right) \left(-\frac{3}{8} \right)$$

$$(+6) \cdot \frac{1}{6} = 1 = \frac{1}{6} \cdot (+6)$$

Conclusion :

$\mathbb{Q}_0, \cdot$ est un groupe commutatif

3. Produit de plusieurs nombres

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\left(-\frac{3}{4}\right)\left(+\frac{1}{2}\right)}_{-\frac{3}{8}} \cdot (-11) \cdot \underbrace{\left(+\frac{3}{7}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)}_{+\frac{33}{8}} = -\frac{3 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 1}{4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 5} = -\frac{99}{280} \\
 & \quad \quad \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{+\frac{99}{56}} \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{-\frac{99}{280}}
 \end{aligned}$$

Nombre impair de signes $- \Rightarrow -$

Nombre pair de signes $- \Rightarrow +$

4. Emploi simultané de $+$ et $\cdot$.

$$1. \quad \boxed{\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q} : \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} + \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}}$$

La multiplication est distributive par rapport à l'addition.

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{4}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{12}{20} + \frac{15}{20}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{3}{20}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{40} \text{ of} \\
 &= \frac{3}{5} \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{10} + \frac{3}{8} = -\frac{12}{40} + \frac{15}{40} = \frac{3}{40}
 \end{aligned}$$

2.

$$\boxed{\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \frac{g}{h} \in \mathbb{Q} : \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \left(\frac{e}{f} + \frac{g}{h}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} + \frac{a}{b} \cdot \frac{g}{h} + \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} + \frac{c}{d} \cdot \frac{g}{h}}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{6}\right) \\
&= \left(\frac{10}{4} - \frac{1}{4}\right) \left(\frac{2}{6} + \frac{5}{6}\right) = \frac{9}{4} \cdot \frac{7}{6} = \frac{63}{24} = \frac{21}{8} = 2\frac{5}{8} \text{ ou } \\
&= \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{6} + \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{5}{6} \\
&= \frac{5}{6} + \frac{25}{12} - \frac{1}{12} - \frac{5}{24} \\
&= \frac{20}{24} + \frac{50}{24} - \frac{2}{24} - \frac{5}{24} \\
&= \frac{63}{24} = \frac{21}{8} = 2\frac{5}{8}
\end{aligned}$$

5. Produit de nombres fractionnaires

Transformer les nombres fractionnaires en fractions et appliquer les règles habituelles.

$$\left(-2\frac{2}{7}\right) \left(5\frac{1}{4}\right) = -\frac{16}{7} \cdot \frac{21}{4} = -\frac{\overset{4}{16} \times \overset{3}{21}}{\underset{1}{7} \times \underset{1}{4}} = -\frac{12}{1} = -12$$

Exercices

1. $\mathbb{Q}_0$ est-il un groupe? Expliquez.
2. Ecrivez les éléments symétriques des nombres suivants dans le groupe $\mathbb{Q}_0$.

$$-\frac{2}{7}, \quad \frac{3}{17}, \quad -\frac{19}{3}, \quad -5, \quad \frac{1}{9}, \quad 4, \quad -\frac{1}{13}, \quad \frac{a}{b}, \quad 3\frac{5}{12}.$$

3. Effectuez :

$$\begin{array}{lll}
1) \left(-\frac{2}{5}\right) \times 3 & 3) \left(-\frac{7}{9}\right) \times \left(-\frac{9}{7}\right) & 5) \left(+\frac{7}{4}\right) \times \left(-\frac{16}{5}\right) \\
2) \left(-\frac{5}{8}\right) \times (-12) & 4) \left(+\frac{5}{3}\right) \times \left(-\frac{3}{5}\right) & 6) \left(-\frac{12}{15}\right) \times \left(-\frac{12}{15}\right)
\end{array}$$

$$7) 4 \times \left(-\frac{3}{7}\right) \quad 9) \left(-\frac{8}{35}\right) \times \left(-\frac{21}{20}\right) \quad 11) \left(-\frac{36}{49}\right) \times \left(-\frac{21}{96}\right)$$

$$8) (-6) \times \left(+\frac{13}{24}\right) \quad 10) \left(-\frac{5}{9}\right) \times \left(+\frac{9}{25}\right) \quad 12) \left(-\frac{25}{48}\right) \times \left(+\frac{36}{55}\right)$$

$$13) \left(-\frac{5}{14}\right) \left(-\frac{9}{10}\right) \left(-\frac{7}{15}\right) \left(+\frac{25}{21}\right)$$

$$14) (-3) \left(+\frac{5}{11}\right) (-22) \left(+\frac{3}{10}\right) \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$15) \left(+\frac{8}{9}\right) \left(-\frac{12}{25}\right) \left(-\frac{15}{4}\right) \left(-\frac{14}{39}\right) \left(-\frac{26}{21}\right)$$

4. Calculez m , n , p si

$$1) m = -\frac{2}{3} \quad n = \frac{3}{5} \quad p = -\frac{7}{2}$$

$$2) m = \frac{2}{7} \quad n = -\frac{4}{5} \quad p = -2$$

$$3) m = -\frac{3}{4} \quad n = -\frac{5}{3} \quad p = -\frac{7}{10}$$

5. Effectuez de deux manières différentes :

$$1) \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{4}\right) \left(-\frac{3}{7}\right) \quad 6) \left(-\frac{7}{6}\right) \left(-\frac{2}{3} + \frac{4}{7} - \frac{8}{21}\right)$$

$$2) \left(-\frac{6}{7} - \frac{11}{12}\right) \left(+\frac{14}{3}\right) \quad 7) \left(\frac{5}{7} + \frac{3}{2}\right) \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right)$$

$$3) \left(+\frac{5}{12}\right) \left(-\frac{12}{25} + \frac{4}{15}\right) \quad 8) \left(2 - \frac{8}{3}\right) \left(\frac{5}{6} - \frac{3}{4}\right)$$

$$4) \left(-\frac{5}{9}\right) \left(-\frac{9}{3} - \frac{3}{5}\right) \quad 9) \left(-\frac{3}{4} + \frac{2}{5}\right) \left(-\frac{7}{10} - \frac{3}{2} + \frac{4}{5}\right)$$

$$5) \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{12} - \frac{7}{8}\right) \left(-\frac{6}{13}\right) \quad 10) \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) \left(-\frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{1}{4}\right)$$

6. Effectuez :

$$1) \left(-12\frac{3}{4}\right) \times 2$$

$$5) \left(6\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) \left(-5\frac{1}{2} + 4\frac{2}{5}\right)$$

$$2) (-3) \times \left(-5\frac{2}{7}\right)$$

$$6) \left(-1\frac{7}{12} + 3\right) \left(-2 - 3\frac{2}{3}\right)$$

$$3) \left(-2\frac{5}{6}\right) \times \left(-5\frac{3}{10}\right)$$

$$7) \left(-12\frac{4}{5} + 7\frac{1}{3}\right) \left(-9\frac{1}{4} + 3\frac{3}{8}\right)$$

$$4) \left(+5\frac{1}{7}\right) \times \left(-2\frac{5}{12}\right)$$

$$8) \left(-3\frac{2}{5} - 2\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{3}{4} - 5\frac{1}{2}\right)$$

7. Calculez :

$$1) \frac{9}{64} \text{ de } -160$$

$$2) \frac{2}{5} \text{ de } -\frac{25}{36}$$

$$3) \frac{5}{12} \text{ des } \frac{42}{70} \text{ de } -312$$

$$4) \frac{4}{7} \text{ des } \frac{3}{8} \text{ de } \frac{49}{54}$$

CHAPITRE XXIV

DIVISION DES NOMBRES RATIONNELS

1. Notion

Le quotient de deux nombres rationnels est le nombre par lequel il faut multiplier le diviseur pour obtenir le dividende.

$$a : b = c \Rightarrow b \cdot c = a$$

$$\left(+\frac{5}{7}\right) : \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{15}{14} \quad \text{car} \quad \left(-\frac{2}{3}\right) \left(-\frac{15}{14}\right) = +\frac{5}{7}$$

$$\left(+\frac{5}{7}\right) : \left(+\frac{2}{3}\right) = +\frac{15}{14} \quad \text{car} \quad \left(+\frac{2}{3}\right) \left(+\frac{15}{14}\right) = +\frac{5}{7}$$

$$\left(-\frac{5}{7}\right) : \left(+\frac{2}{3}\right) = -\frac{15}{14} \quad \text{car} \quad \left(+\frac{2}{3}\right) \left(-\frac{15}{14}\right) = -\frac{5}{7}$$

$$\left(-\frac{5}{7}\right) : \left(-\frac{2}{3}\right) = +\frac{15}{14} \quad \text{car} \quad \left(-\frac{2}{3}\right) \left(+\frac{15}{14}\right) = -\frac{5}{7}$$

Il en résulte :

$$\left(+\frac{5}{7}\right) : \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{15}{14} = \left(+\frac{5}{7}\right) \left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$\left(+\frac{5}{7}\right) : \left(+\frac{2}{3}\right) = +\frac{15}{14} = \left(+\frac{5}{7}\right) \left(+\frac{3}{2}\right)$$

$$\left(-\frac{5}{7}\right) : \left(+\frac{2}{3}\right) = -\frac{15}{14} = \left(-\frac{5}{7}\right) \left(+\frac{3}{2}\right)$$

$$\left(-\frac{5}{7}\right) : \left(-\frac{2}{3}\right) = +\frac{15}{14} = \left(-\frac{5}{7}\right) \left(-\frac{3}{2}\right)$$

Pour diviser deux nombres rationnels, on multiplie le dividende par l'inverse du diviseur.

$$\forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ et } \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}_0 : \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Exemples :

$$\left(-\frac{3}{7}\right) : \left(+\frac{5}{8}\right) = \left(-\frac{3}{7}\right) \left(+\frac{8}{5}\right) = -\frac{24}{35}$$

$$\left(-\frac{3}{5}\right) : (-4) = \left(-\frac{3}{5}\right) \left(-\frac{1}{4}\right) = +\frac{3}{20}$$

$$\left(-\frac{8}{5}\right) : (+4) = \left(-\frac{8}{5}\right) \left(+\frac{1}{4}\right) = -\frac{8}{20} = -\frac{2}{5}$$

2. Propriétés

$$1. \forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ en } \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}_0 : \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \in \mathbb{Q}$$

La division dans $\mathbb{Q}_0$ est interne et partout définie.

$$\left(-\frac{2}{7}\right) : \left(+\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{2}{7}\right) \left(+\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{21} \in \mathbb{Q}.$$

$$2. \forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}_0 : \frac{a}{b} : \frac{c}{d} \neq \frac{c}{d} : \frac{a}{b}$$

La division dans $\mathbb{Q}_0$ n'est pas commutative.

$$\begin{array}{l|l} \left(+\frac{3}{7}\right) : \left(-\frac{5}{2}\right) & \left(-\frac{5}{2}\right) : \left(+\frac{3}{7}\right) \\ = \left(+\frac{3}{7}\right) \left(-\frac{2}{5}\right) & = \left(-\frac{5}{2}\right) \left(+\frac{7}{3}\right) \\ = -\frac{6}{35} & = -\frac{35}{6} \end{array}$$

3. Division des nombres fractionnaires

Transformer les nombres fractionnaires en fractions et appliquer la règle habituelle.

$$\left(-5\frac{2}{3}\right) : \left(+4\frac{2}{7}\right) = -\frac{17}{3} : \frac{30}{7} = -\frac{17}{3} \cdot \frac{7}{30} = -\frac{119}{90} = -1\frac{29}{90}$$

4. Fractions composées

Le quotient $(-5) : (+2)$ peut s'écrire $\frac{-5}{+2}$

Le quotient des nombres rationnels $-\frac{2}{7}$ et $+\frac{3}{4}$ peut s'écrire de la même manière et nous obtenons la fraction composée :

$$\frac{-\frac{2}{7}}{+\frac{3}{4}}$$

Pour transformer une fraction composée en une fraction simple, on effectue la division.

$$\frac{-\frac{2}{7}}{+\frac{3}{4}} = \left(-\frac{2}{7}\right) : \left(+\frac{3}{4}\right) = -\frac{2}{7} : \frac{3}{4} = -\frac{2}{7} \cdot \frac{4}{3} = -\frac{8}{21}$$

Exercices

1. Effectuez :

1) $\left(-\frac{5}{12}\right) : (-2)$

6) $\left(-\frac{3}{7}\right) : \left(-\frac{2}{5}\right)$

2) $\left(-\frac{4}{5}\right) : (+10)$

7) $\left(+\frac{23}{5}\right) : \left(-\frac{46}{35}\right)$

3) $(-8) : \left(+\frac{4}{5}\right)$

8) $\left(-\frac{6}{11}\right) : \left(-\frac{9}{22}\right)$

4) $(+12) : \left(-\frac{3}{7}\right)$

9) $\left(-\frac{2}{7}\right) : \left(+\frac{15}{14}\right)$

5) $\left(-\frac{3}{8}\right) : \left(-\frac{3}{8}\right)$

10) $\left(-\frac{12}{13}\right) : \left(+\frac{12}{13}\right)$

2. Effectuez :

$$1) \left(-\frac{1}{6} + \frac{3}{4}\right) : \left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$2) \left(-\frac{5}{7} + \frac{5}{3} - \frac{5}{6}\right) : \left(-\frac{7}{15} + \frac{3}{10}\right)$$

$$3) \left(-\frac{35}{24}\right) : \left(-\frac{7}{8} + \frac{3}{6}\right)$$

$$4) \left(-\frac{3}{7} - \frac{2}{5}\right) : \left(-\frac{2}{7} - \frac{1}{5}\right)$$

3. Effectuez :

$$1) 5\frac{1}{4} : \left(-\frac{7}{12}\right)$$

$$6) \left(5\frac{1}{3} - 3\frac{2}{5}\right) : \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$2) -4 : 2\frac{4}{7}$$

$$7) \left(-3\frac{5}{7} + 2\frac{12}{35}\right) : \left(-\frac{5}{14}\right)$$

$$3) -2\frac{1}{2} : \frac{25}{26}$$

$$8) -3\frac{1}{5} : \left(5\frac{2}{5} - 2\frac{1}{4}\right)$$

$$4) -3\frac{6}{7} : (-9)$$

$$9) \left(2\frac{1}{2} + 5\frac{5}{6}\right) : \left(-1\frac{3}{4} - 3\frac{1}{6}\right)$$

$$5) -8\frac{2}{7} : \left(-6\frac{1}{4}\right)$$

$$10) \left(5\frac{3}{8} - 4\frac{2}{5}\right) : \left(-2 + 5\frac{2}{3}\right)$$

4. Transformez en fractions simples :

$$\frac{-\frac{5}{8}}{-\frac{25}{6}}, \frac{\frac{14}{25}}{-\frac{7}{5}}, \frac{\frac{12}{13}}{-4}, \frac{-12}{\frac{8}{13}}, \frac{-3\frac{2}{3}}{\frac{6}{11}}, \frac{3\frac{1}{5}}{-\frac{9}{4}}, \frac{-4\frac{1}{5}}{-7\frac{1}{4}}$$

5. Effectuez :

$$1) -\frac{\frac{4}{7}}{\frac{1}{4}} + \frac{\frac{3}{7}}{-2\frac{2}{3}}$$

$$5) \frac{5\frac{5}{6} - 1 + \frac{3}{2}}{\frac{3}{4} - \frac{5}{2} + 2} - \frac{1\frac{3}{7} - \frac{3}{5}}{\frac{1}{4} + \frac{4}{7}}$$

$$2) \quad \frac{-4\frac{2}{5}}{\frac{25}{28}} - \frac{\frac{6}{5}}{\frac{12}{13}}$$

$$3) \quad \frac{11\frac{2}{3}}{\frac{2}{5}} \times \frac{-\frac{4}{11}}{\frac{8}{9}}$$

$$4) \quad \frac{4\frac{1}{8}}{-1\frac{10}{14}} : \frac{-\frac{5}{12}}{\frac{15}{16}}$$

$$6) \quad \frac{\frac{3}{2} + 2 - \frac{5}{12}}{\frac{1}{3} - \frac{5}{8} - \frac{7}{2}} \times \frac{-\frac{7}{5} + \frac{5}{4} - \frac{3}{8}}{\frac{5}{6} - \frac{3}{10} - \frac{1}{2}}$$

$$7) \quad \frac{-\frac{3}{8} + \frac{5}{12}}{\frac{7}{12} - \frac{4}{9}} + \frac{-\frac{9}{16} \times \frac{14}{15}}{\frac{15}{26} : \left(-\frac{5}{13}\right)}$$

$$8) \quad \frac{\frac{12}{25} \times \left(\frac{5}{6} - \frac{3}{8}\right)}{-\frac{1}{4} + \frac{3}{5}} : \frac{-\frac{5}{9} - \frac{7}{3}}{\left(-\frac{7}{12} + \frac{4}{15}\right) : \frac{9}{20}}$$

CHAPITRE XXV

ÉLEVATION AUX PUISSANCES DES NOMBRES RATIONNELLS

1. Notion

Nous savons déjà que

$$a^3 = a \cdot a \cdot a$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \dots}_{n \text{ facteurs}}$$

a est la base et n est l'exposant.

De la même façon, nous pouvons écrire :

$$(+2)^6 = (+2)(+2)(+2)(+2)(+2)(+2) = 64$$

$$(+3)^5 = (+3)(+3)(+3)(+3)(+3) = 243$$

$$(-6)^3 = (-6)(-6)(-6) = -216$$

$$(-5)^4 = (-5)(-5)(-5)(-5) = 625$$

$$\left(+\frac{2}{3}\right)^4 = \left(+\frac{2}{3}\right)\left(+\frac{2}{3}\right)\left(+\frac{2}{3}\right)\left(+\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{81}$$

$$\left(+\frac{3}{4}\right)^3 = \left(+\frac{3}{4}\right)\left(+\frac{3}{4}\right)\left(+\frac{3}{4}\right) = \frac{27}{64}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{81}$$

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = \left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{27}{64}$$

$\forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} : \left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \dots}_{n \text{ facteurs}}$
--

Règle des signes :

1. Quand l'exposant est pair, la puissance est toujours positive.
2. Quand l'exposant est impair, la puissance a le signe de la base.

2. Conventions

$$1. \forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : \left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}$$

$$(-5)^1 = -5, \quad \left(\frac{5}{7}\right)^1 = \frac{5}{7}, \quad \left(-\frac{3}{8}\right)^1 = -\frac{3}{8}, \quad p^1 = p$$

$$2. \forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$$

$$(-5)^0 = 1, \quad \left(\frac{5}{7}\right)^0 = 1, \quad \left(-\frac{3}{8}\right)^0 = 1, \quad p^0 = 1$$

3. Propriétés

L'élévation aux puissances dans $\mathbb{Q}$:

1) est interne et partout définie.

$$\forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} : \left(\frac{a}{b}\right)^n \in \mathbb{Q}$$

$$(-3)^2 = 9 \in \mathbb{Q}$$

$$(-5)^3 = -125 \in \mathbb{Q}$$

$$\left(\frac{2}{7}\right)^3 = \frac{8}{343} \in \mathbb{Q}$$

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^3 = -\frac{1}{64} \in \mathbb{Q}$$

La puissance d'un nombre rationnel est un nombre rationnel.

2) n'est pas commutative.

$$2^3 \neq 3^2$$

4. Opérations sur les puissances

De la même façon que dans N , nous avons dans Q :

$$\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q \text{ en } \forall m, n \in N :$$

$$\begin{array}{l} 1. \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \\ 2. \left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n} \\ 3. \left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n} \quad m \geq n \\ 4. \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^m \\ 5. \left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m \cdot n} \end{array}$$

Exemples :

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{16}{625}$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)^8 = \frac{p^8}{q^8}$$

$$(-3)^2 \cdot (-3)^3 = (-3)^{2+3} = (-3)^5 = -243$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^7 = \frac{128}{2187}$$

$$p^2 \cdot p^5 \cdot p^3 = p^{10}$$

$$(-2)^7 : (-2)^2 = (-2)^{7-2} = (-2)^5 = -32$$

$$\left(-\frac{1}{5}\right)^{12} : \left(-\frac{1}{5}\right)^9 = \left(-\frac{1}{5}\right)^3 = -\frac{1}{125}$$

$$p^6 : p = p^5$$

$$\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^4 = \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{1}{16} \cdot \frac{81}{256} = \frac{81}{4096}$$

$$(3a)^2 = 3^2 a^2 = 9a^2$$

$$\left(-\frac{5}{2}p\right)^3 = \left(-\frac{5}{2}\right)^3 p^3 = -\frac{125}{8}p^3$$

$$(5^7)^2 = 5^{7 \times 2} = 5^{14}$$

$$\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^2\right]^3 = \left(-\frac{3}{5}\right)^6 = \frac{729}{15625}$$

$$(a^5)^3 = a^{15}$$

$$(3^m)^2 = 3^{2m}$$

5. Puissance de nombres fractionnaires

Transformer les nombres fractionnaires en fractions et appliquer les règles habituelles.

$$\left(2\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{7}{3}\right)^3 = \frac{243}{27}$$

$$\left(-1\frac{4}{5}\right)^2 = \left(-\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{81}{25}$$

Exercices

1. Calculez :

- | | | | | |
|-------------|----------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|
| 1) $(-4)^3$ | 5) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$ | 9) $(-a)^8$ | 13) $\left(-\frac{p}{q}\right)^3$ | 17) $\left(+\frac{4}{5}\right)^3$ |
| 2) $(-5)^3$ | 6) $\left(-\frac{1}{7}\right)^2$ | 10) $(-b)^7$ | 14) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$ | 18) $\left(-2\frac{1}{5}\right)^2$ |
| 3) $(+7)^2$ | 7) $\left(-\frac{3}{8}\right)^3$ | 11) $(+b)^{10}$ | 15) $(-7)^0$ | 19) $(-10)^4$ |
| 4) $(+3)^4$ | 8) $(+a)^0$ | 12) $\left(\frac{a}{b}\right)^5$ | 16) $(-1)^{125}$ | 20) $\left(-2\frac{1}{3}\right)^3$ |

2. Effectuez :

$$1) \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right)^3$$

$$3) \left(5\frac{1}{4} - 4\frac{2}{3}\right)^2$$

$$2) \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8}\right)^3$$

$$4) \left(-2\frac{1}{3} + 3\frac{2}{5}\right)^2$$

3. Démontrez :

$$1) 5^3 \cdot 5^4 = 5^7$$

$$5) (3a^2b)^5 = 3^5 a^{10} b^5$$

$$2) 7^6 : 7^2 = 7^4$$

$$6) \left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a^4}{b^4}$$

$$3) (ab)^3 = a^3 b^3$$

$$4) (5^2)^4 = 5^8$$

$$7) \left(\frac{3a^2b}{xy^3}\right)^3 = \frac{3^3 a^6 b^3}{x^3 y^9}$$

4. Effectuez :

$$a) (-2)^2 \cdot (-2)^4$$

$$b) (-a^2)^3$$

$$c) \left(-\frac{4}{5}\right)^7 : \left(-\frac{4}{5}\right)^5$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2$$

$$(-a^2)^4$$

$$(-3)^8 : (-3)^4$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^5 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^7$$

$$(-a^3)^3$$

$$\left(-\frac{a}{b}\right)^9 : \left(-\frac{a}{b}\right)^4$$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^8 \cdot \left(-\frac{x}{y}\right)^6$$

$$(-a^3)^4$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{12} : \left(\frac{x}{y}\right)$$

$$d) \left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^2$$

$$e) (-3a^2b^3c)^3$$

$$f) \left(\frac{3a^2bc}{2xy}\right)^3$$

$$\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^3$$

$$\left(-\frac{2}{5}xy^2z^5\right)^2$$

$$\left(-\frac{ab^2c^5}{2mn^2}\right)^5$$

$$(a^5)^6$$

$$\left(-\frac{1}{3}xy\right)^5$$

$$(x^2)^5$$

$$\left(\frac{2}{3}a^2b^3cd^5\right)^4$$

$$\left(-\frac{5ab^2c^3}{7m^4n^5p^6}\right)^2$$

5. Effectuez :

1) $x^4 \cdot x^2 \cdot x^3$

2) $(a^4 \cdot a \cdot a^3) : (a^2 \cdot a^3)$

3) $(a^2)^3 \cdot (a^3)^4$

4) $(a^3)^m : a^2$

5) $(-a)^3(-a)^6 : (-a)^7$

6) $(a^3)^6 : (a^5)^3$

7) $[(a^4)^7 : (a^2)^3] \cdot (a^5)^3$

8) $[(a^3)^m : (a^2)^m] \cdot a^2$

CHAPITRE XXVI

NOMBRES DÉCIMAUX

1. Notion

- A. Une fraction est décimale quand son dénominateur est une puissance de 10.

$$\frac{3}{10}, \quad -\frac{31}{100}, \quad \frac{5737}{1000}$$

- B. Un nombre décimal est une deuxième écriture d'une fraction décimale.

$$\begin{aligned}\frac{3}{10} &= 0,3 \\ -\frac{31}{100} &= -0,31 \\ \frac{5\,737}{1\,000} &= 5,737\end{aligned}$$

2. Conversions

- A. *D'une fraction décimale en un nombre décimal.*

Ecrire le numérateur et laisser, après la virgule, autant de chiffres qu'il y a de zéros au dénominateur.

On écrit $\frac{5\,737}{1\,000} = 5,737$

ce qui se lit : 5 unités 737 millièmes.

- B. *D'un nombre décimal en une fraction décimale.*

Ecrire le nombre comme numérateur en omettant la virgule. Le dénominateur sera formé par le chiffre 1 suivi d'autant de zéros qu'il y avait de décimales.

$$\underbrace{37,246}_3 = \frac{37\,246}{\underbrace{1\,000}_3}$$

3. Propriété

$$\text{Puisque } \frac{24}{10} = \frac{240}{100} = \frac{2\,400}{1\,000} = \dots$$

$$\text{on a aussi } 2,4 = 2,40 = 2,400 = \dots$$

On peut ajouter ou supprimer des zéros à droite d'un nombre décimal sans changer la valeur de celui-ci.

4. Nombres décimaux et ordre

- A. De deux nombres décimaux, le plus grand est celui qui a la plus grande partie entière.

$$5,21 > 3,422 \quad \text{car} \quad 5 > 3$$

$$2,134 > -5,17 \quad \text{car} \quad 2 > -5$$

$$-3,5 > -7,328 \quad \text{car} \quad -3 > -7$$

- B. Si les parties entières de deux nombres sont égales, on les affecte d'un même nombre de décimales et on supprime la virgule.

Le plus grand nombre entier correspond au plus grand nombre décimal.

$$16,24 > 16,175 \quad \text{car} \quad 16\,240 > 16\,175$$

$$-1,71 > -1,9 \quad \text{car} \quad -171 > -190$$

5. Opérations

$$1. (+ 5,2779) + (- 7,5747) = 5,2779 - 7,5747 = - 2,2968$$

$$- 7,5747$$

$$+ 5,2779$$

$$- 2,2968$$

$$2. (- 2,53) - (+ 5,6425) + (- 0,437) =$$

$$- 2,53 - 5,6425 - 0,437 = - 8,6095$$

$$- 2,53$$

$$- 5,6425$$

$$- 0,437$$

$$- 8,6095$$

3. $(-3,242) \times (+17,31) = -56,11902$

3,242 $\xrightarrow{\hspace{1cm}}$ 3 décimales
17,31 $\xrightarrow{\hspace{1cm}}$ 2 décimales

3242
9 726
22 694
32 42

56,11902 $\xrightarrow{\hspace{1cm}}$ 3 + 2 = 5 décimales

4. $(+312,8) : (-6,214) = (+312,800) : (-6,214) =$
 $312800 : (-6214) = -50,337$

312800
31070

21000
18642

23580
18642

49380
43498

5882

6214

50,337

— 50 est le quotient à l'unité près

— 50,3 est le quotient à 0,1 ou $\frac{1}{10}$ près

— 50,33 est le quotient à 0,01 ou $\frac{1}{100}$ près

— 50,337 est le quotient à 0,001 ou $\frac{1}{1000}$ près

etc....

Exercices

1. Convertissez en nombres décimaux :

a) $-\frac{523}{10}$ b) $\frac{77}{1\,000}$ c) $-\frac{2\,324}{100}$ d) $\frac{5}{10\,000}$ e) $-\frac{35}{10}$ f) $\frac{3}{100}$

g) $\frac{38\,517}{100}$ h) $-\frac{855}{100\,000}$ i) $\frac{372\,445}{10\,000}$ j) $-\frac{13}{1\,000\,000}$

2. Convertissez en fractions décimales :

83,727	— 5,32	0,85	— 0,00236	853,7
— 0,050023	7,1315	— 1 263,88	0,003	— 25,006

3. Rangez

a. par ordre de grandeur croissante :

1) 15,275	18,372	15,263	18,375
— 7,242	15,272	— 7,243	— 7,238
2) — 3,7481	— 37,481	— 0,37481	— 374,81
— 0,037481	— 37 481	— 3 748,1	— 374 810

b. par ordre de grandeur décroissante :

1) 0,742	0,74	— 3,242	5,643	— 3,243
— 3,2421	5,642	5,6	— 3,25	5,64
2) 13,214	132,14	1,3214	0,013214	
0,13214	13 214	132 140	1 321,4	

4. Additionnez :

- 1) $(- 23,742) + (+ 117,526)$
- 2) $(+ 0,17) + (+ 3,1418)$
- 3) $(- 13,1423) + (- 18,042)$
- 4) $(+ 9,24) + (- 17,1715)$
- 5) $(+ 25,142) + (- 3,27) + (+ 0,8517)$
- 6) $(- 3,8776) + (- 15,7) + (- 0,172)$
- 7) $(- 512) + (+ 178,1502) + (- 19,302) + (+ 23,007)$
- 8) $(+ 0,74321) + (+ 17,8203) + (+ 0,0017) + (+ 38,0203)$

5. Soustrayez :

- | | |
|--------------------------------|----------------------|
| 1) $(+ 15,842) - (+ 3,147)$ | 5) $(+ 8,82312) - 1$ |
| 2) $(- 128,703) - (+ 15,0008)$ | 6) $1 - 13,7422$ |
| 3) $(- 8,17) - (- 0,0283)$ | 7) $(+ 0,1703) - 1$ |
| 4) $(+ 17,512) - (- 18,93)$ | 8) $1 - 0,16047$ |

6. Effectuez :

- 1) $(- 123,7) + (- 7,832) - (- 6,1207) - (+ 5,18)$
- 2) $(+ 28,7325) - (- 28,503) + (- 18,32) - (- 18,37)$
- 3) $(+ 0,108) - (- 7,1214) - (+ 8,2205) - (- 13,0701)$
- 4) $(- 25,008) + (- 112,73) - (- 13,813) - (+ 108,9037)$

7. Effectuez :

- 1) $(+ 5,832) \times (-7,13)$ 3) $(+ 0,19037) \times (+ 5,17)$
 2) $(- 19,803) \times (- 213,51)$ 4) $(- 3134,12) \times (+ 18,15)$

8. Effectuez les divisions et indiquez les quotients à 1, 0,1, 0,01, 0,001 près.

		à 1 près	à 0,1 près	à 0,01 près	à 0,001 près
1) $(+ 357) : (+ 38)$	=				
2) $(- 725,83) : (+ 17)$	=				
3) $(- 9\ 133) : (- 33,47)$	=				
4) $(+ 253,17) : (- 23,31)$	=				
5) $(+ 5,17) : (- 33,723)$	=				
6) $(- 12,573) : (- 4,21)$	=				

CHAPITRE XXVII

CONVERSION D'UN NOMBRE RATIONNEL EN UN NOMBRE DÉCIMAL

1. Notion

Diviser le numérateur par le dénominateur.

$\frac{23}{16}$	$\frac{23}{16}$	$\frac{16}{16}$
	16	1,4375
	70	
	64	
	60	
	48	
	120	
	112	
	80	
	80	
	0	

$$\frac{23}{16} = 1,4375$$

La division se fait exactement.

Le nombre rationnel $\frac{23}{16}$ est égal au nombre décimal 1,4375.

$\frac{23}{18}$	$\frac{23}{18}$	$\frac{18}{18}$
	18	1,2777...
	50	
	36	
	140	
	126	
	140	
	126	
	140	
	126	
	14 ...	

$$\frac{23}{18} = 1,2777...$$

La division ne se fait pas exactement.

Le nombre rationnel $\frac{23}{18}$ est irréductible à un nombre décimal. 1,2777... est appelé développement décimal périodique illimité.

2. Conversion

1. *Le dénominateur du nombre rationnel est exclusivement composé des facteurs 2 et 5.*

Puisque $2 \cdot 5 = 10$, un tel nombre rationnel peut toujours s'écrire sous la forme d'une fraction décimale dont le dénominateur égale $(2 \cdot 5)^n = 10^n$.

$$\frac{23}{16} = \frac{23}{2^4} = \frac{23 \cdot 5^4}{2^4 \cdot 5^4} = \frac{23 \times 625}{(2 \cdot 5)^4} = \frac{14\,375}{10^4} = \frac{14\,375}{10\,000} = 1,4375$$

$$\frac{7}{2} = \frac{7 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{35}{10} = 3,5$$

$$\frac{43}{40} = \frac{43}{2^3 \cdot 5} = \frac{43 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{43 \cdot 25}{(2 \cdot 5)^3} = \frac{1\,075}{1\,000} = 1,075$$

$$-\frac{31}{25} = -\frac{31}{5^2} = -\frac{31 \cdot 2^2}{5^2 \cdot 2^2} = -\frac{31 \cdot 4}{(5 \cdot 2)^2} = -\frac{124}{100} = -1,24$$

$$-\frac{21}{35} = -\frac{3}{5} = -\frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = -\frac{6}{10} = -0,6$$

Règle :

1. Simplifier le nombre rationnel.
2. Multiplier les deux termes de la fraction par la plus petite puissance de 2 ou 5 donnant un dénominateur $(2 \cdot 5)^n = 10^n$.
3. Chercher le numérateur et placer la virgule.

2. Le dénominateur comporte d'autres facteurs.

$\frac{17}{33}$	$\frac{170}{165}$	$\frac{33}{0,515151\dots}$	$\frac{115}{88}$	$\frac{115}{88}$	$\frac{88}{1,3068181\dots}$
	50			270	
	33			264	
	170			600	
	165			528	
	50			720	
	33			704	
	170			160	
	165			88	
	50			720	
	33			704	
	17...			160	
				88	
				72...	

0,515151... est un développement décimal périodique simple dont la période est 51.

1,3068181... est un développement décimal périodique mixte. 306 est la partie irrégulière ou non périodique, 81 est la période.

Remarques :

1. On peut considérer le nombre $3,25 = 3,25000\dots$ comme un développement décimal périodique mixte, dont la partie non périodique est 25 et la période 0.
2. $16 = 16,000\dots$ est un développement décimal périodique simple.

Conclusion :

Tout nombre rationnel donne lieu à un développement décimal périodique.

Exercices

1. Ecrivez la forme décimale des expressions suivantes sans effectuer la division :

$$\frac{37}{20} \quad - \quad \frac{7}{50} \quad \frac{13}{25} \quad - \quad \frac{38}{125} \quad \frac{117}{500} \quad - \quad \frac{17}{40} \quad \frac{381}{80}$$

2. Montrez, sans effectuer la division, que les nombres rationnels suivants sont tous réductibles à des nombres décimaux :

a) $\frac{7}{20} \quad - \quad \frac{23}{50} \quad \frac{127}{40} \quad - \quad \frac{321}{160} \quad \frac{1\,737}{640} \quad - \quad \frac{632}{25} \quad \frac{749}{32}$

b) $\frac{549}{120} \quad - \quad \frac{339}{375} \quad \frac{301}{112} \quad - \quad \frac{1\,067}{3\,520} \quad \frac{669}{960} \quad \frac{1\,771}{616} \quad - \quad \frac{3\,861}{6\,600}$

3. Convertissez les fractions de l'exercice n° 2 en nombres décimaux.

4. Montrez, sans effectuer la division, que les nombres rationnels suivants ne sont pas réductibles à des nombres décimaux, mais qu'ils donnent lieu à des développements décimaux périodiques :

a) $\frac{512}{37} \quad \frac{15}{56} \quad \frac{732}{11} \quad \frac{9\,247}{330} \quad \frac{29}{36} \quad \frac{52}{27} \quad \frac{662}{45} \quad \frac{913}{505} \quad \frac{937}{144}$

$$\frac{67}{108} \quad \frac{344}{275} \quad \frac{832}{33}$$

b) $\frac{7\,292}{404} \quad \frac{520}{240} \quad \frac{426}{88} \quad \frac{93}{555} \quad \frac{4\,305}{4\,620} \quad \frac{564}{324}$

5. Cherchez le développement décimal périodique des fractions données au n° 4 et déterminez, pour chaque expression, la partie irrégulière et la période.

6. Donnez les caractères de divisibilité du numérateur pour que les fractions suivantes soient réductibles à des nombres décimaux :

$$\frac{a}{240} \quad \frac{b}{168} \quad \frac{c}{800} \quad \frac{d}{528} \quad \frac{e}{10\,500} \quad \frac{f}{2\,520}$$

7. Précisez les expressions suivantes. Donnez la période et la partie irrégulière éventuelle.

- | | | |
|------------------|---------------------|----------------------|
| 1) — 3,272272... | 6) 5,24000... | 11) — 3,060060606... |
| 2) — 23,7 | 7) — 3,242124212... | 12) 5,3373737... |
| 3) 5,000... | 8) 18 | 13) 16,237200... |
| 4) 0,214222... | 9) 0,33333... | 14) 8,135 |
| 5) — 17,000... | 10) 5,2700700 | 15) — 31,0707707... |

8. Même exercice pour :

- | | | |
|------------------|------------------|-----------------|
| 1) 0,5347 | 6) 2,134 | 11) 0,0606 |
| 2) 0,534777... | 7) 2,13434... | 12) 0,600606... |
| 3) 0,534747... | 8) 2,134134... | 13) 0,600600... |
| 4) 0,5347347... | 9) 2,13444... | 14) 0,06060... |
| 5) 0,53475347... | 10) 2,0134134... | 15) 0,00666 |

CHAPITRE XXVIII

GÉNÉRATRICE D'UN DÉVELOPPEMENT DÉCIMAL PÉRIODIQUE

1. Nombre décimal

$$0,224 = \frac{224}{1000} = \frac{28}{125}$$

$$-7,34 = -\frac{734}{100} = -\frac{367}{50} = -7\frac{17}{50}$$

2. Développement décimal périodique simple

$$0,143143... = a$$

$$1000a = 143,143143...$$

$$-a = 0,143143...$$

$$999a = 143,000000...$$

$$999a = 143 \Rightarrow a = \frac{143}{999}$$

$$0,121212... = a$$

$$100a = 12,1212...$$

$$-a = 0,1212...$$

$$99a = 12,0000...$$

$$99a = 12 \Rightarrow a = \frac{12}{99}$$

3. Développement décimal périodique mixte

$$0,3424242... = a$$

$$1000a = 342,4242...$$

$$-10a = 3,4242...$$

$$990a = 339,0000...$$

$$990a = 339 \Rightarrow a = \frac{339}{990} = \frac{113}{330}$$

$$0,16343434... = a$$

$$10000a = 1634,3434...$$

$$-100a = 16,3434...$$

$$9900a = 1618,0000...$$

$$9900a = 1618 \Rightarrow a = \frac{1618}{9900} = \frac{809}{4950}$$

Remarque :

$$5,143143... = 5 + 0,143143...$$

$$= 5 + \frac{143}{999}$$

$$= 5\frac{143}{999}$$

Conclusion :

Tout développement décimal périodique est un nombre rationnel, appelé génératrice du développement.

Exercices

1. Ecrivez sous la forme de fraction rationnelle :

— 0,3142 0,27 8,843 — 0,155 8,44

5,25 — 32,518 — 8,15 19,72 — 1,375

2. Énoncez la règle permettant de convertir un développement décimal périodique simple en une fraction rationnelle.
3. Énoncez la règle permettant de convertir un développement décimal périodique mixte en une fraction rationnelle.
4. Trouvez les génératrices des développements décimaux périodiques suivants :

A. 1) 0,6363...

2) 0,317317...

3) 0,24392439...

4) 0,777...

5) 0,1919...

6) 6,3939...

7) 22,336336...

8) 7,212212...

9) 2,216216...

10) 1,72147214...

B. 1) 0,154545...

2) 0,3153153...

3) 0,4327444...

4) 0,15642364236...

5) 5,02666...

6) 12,373636...

7) 3,5131818...

8) 1,2123123...

CHAPITRE XXIX

LES NOMBRES RÉELS

1. Notion

Rappelons que :

1. Tout nombre rationnel donne lieu à un développement décimal périodique.
2. Tout développement décimal périodique admet une génératrice.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels renferme donc tous les développements décimaux périodiques.

Cependant, il existe aussi des développements décimaux non périodiques :

3,14159265358...

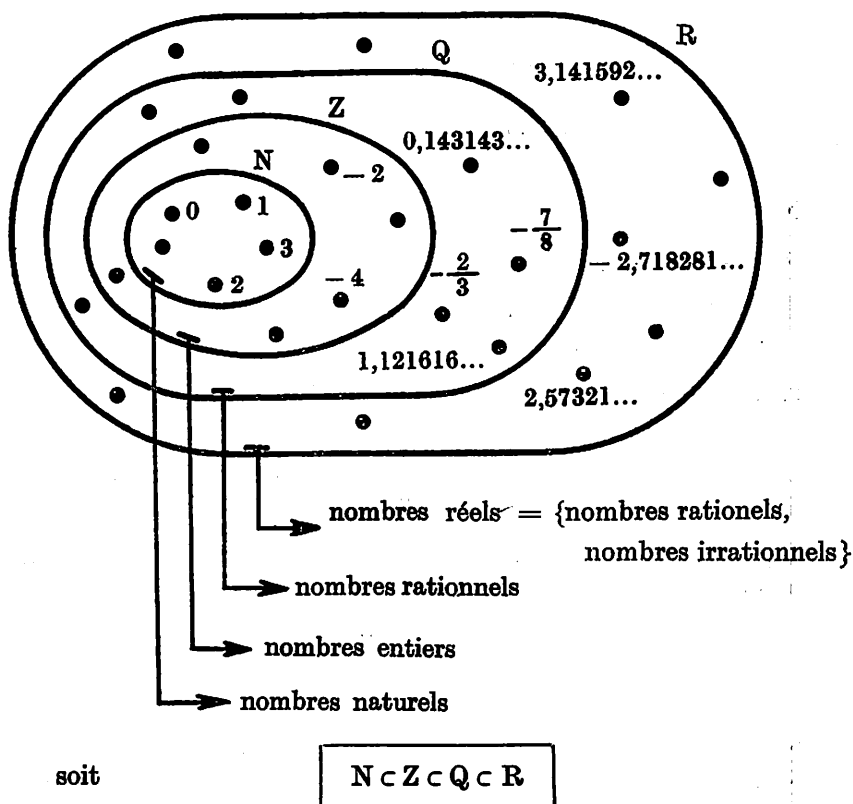
2,7182818284...

2,57321789...

N'ayant pas de génératrice, ceux-ci n'appartiennent pas à $\mathbb{Q}$. Nous les appellerons les nombres irrationnels. Tous les nombres rationnels et irrationnels constituent l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

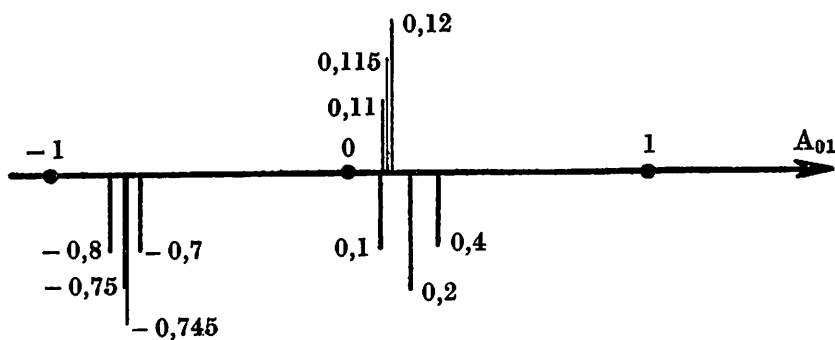
Tous les nombres que nous avons étudiés jusqu'à présent, sont des éléments de $\mathbb{R}$.

Le diagramme de Venn le résume clairement.



2. Représentation des nombres réels sur un axe

On peut démontrer que tout nombre réel a une et une seule image sur l'axe A_{01} et qu'à chaque point de l'axe A_{01} , correspond un et un seul nombre réel, qui est l'abscisse de ce point.



Exercices

1. Dessinez le diagramme de Venn des ensembles N , Z , Q et R et indiquez correctement les nombres suivants :

$$3 \quad -\frac{2}{7} \quad 5,14 \quad -18 \quad 7,1232343454... \quad -5,2376376...$$

$$52 \quad -123 \quad -7,3 \quad 0,2727... \quad 0 \quad \frac{12}{17} \quad -13,702853721...$$

$$-15 \quad \frac{7}{18} \quad 3,24000... \quad -5,000...$$

2. Même exercice pour :

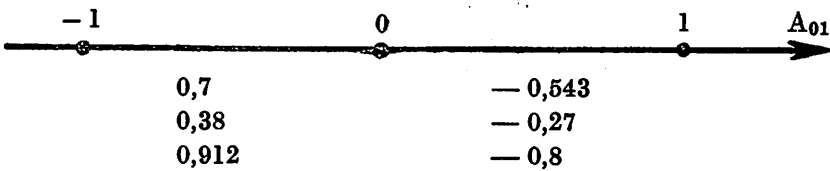
$$-\frac{27}{3} \quad \frac{5}{15} \quad \frac{17}{27} \quad -\frac{35}{11} \quad \frac{18}{3} \quad -\frac{13}{8} \quad -\frac{134}{50}$$

$$-7,15263748... \quad \frac{144}{12} \quad -\frac{0}{23} \quad 0,12131415...$$

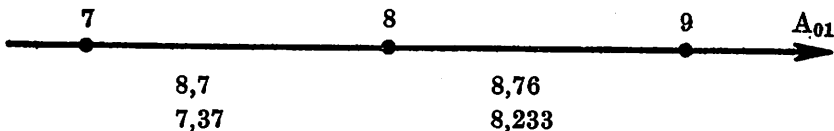
$$-\frac{56}{512} \quad -\frac{135}{15} \quad -\frac{33}{16} \quad 0,712$$

3. Dessinez avec la plus grande précision possible, les images sur l'axe A_{01} .

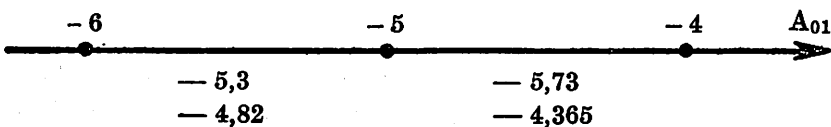
a)



b)



c)



CHAPITRE XXX

MODES OPÉRATOIRES — VALEUR NUMÉRIQUE

1. Mode opératoire pour une expression non fractionnaire et sans parenthèses

Lorsque diverses opérations sont à effectuer, nous adoptons toujours l'ordre suivant :

1. élévations aux puissances
2. multiplications
3. divisions
4. additions et soustractions

Exemple :

$$\begin{aligned} & 3 \cdot 2^3 - \frac{6}{5} - \frac{2}{3} : \frac{5}{7} \\ &= 3 \cdot 4 - \frac{6}{5} - \frac{2}{3} : \frac{5}{7} \\ &= 12 - \frac{6}{5} - \frac{2}{3} : \frac{5}{7} \\ &= 12 - \frac{6}{5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} \\ &= 12 - \frac{6}{5} - \frac{14}{15} \\ &= \frac{180}{15} - \frac{18}{15} - \frac{14}{15} \\ &= \frac{148}{15} = 9 \frac{13}{15} \end{aligned}$$

Pour intervertir l'ordre des opérations, nous devons introduire des parenthèses ou faire appel aux expressions fractionnaires.

2. Mode opératoire pour une expression fractionnaire ou avec parenthèses

A. Une expression entre parenthèses est à effectuer avant toute autre opération.

Exemples :

$$\begin{aligned} 1. \quad & \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{4}\right) \left(-\frac{5}{7} - \frac{2}{3}\right) \\ &= \left(\frac{8}{12} - \frac{15}{12}\right) \left(-\frac{15}{21} - \frac{14}{21}\right) \\ &= \left(-\frac{7}{12}\right) \left(-\frac{29}{21}\right) \\ &= \frac{29}{36} \end{aligned}$$

$$2. \quad \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{8}{12} - \frac{9}{12}\right)^2 = \left(-\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{144}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad & -\frac{7}{12} - \left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} + \frac{1}{3}\right)^2 \\ &= -\frac{7}{12} - \left(-\frac{10}{12} + \frac{1}{3}\right)^2 \\ &= -\frac{7}{12} - \left(-\frac{10}{12} + \frac{4}{12}\right)^2 \\ &= -\frac{7}{12} - \left(-\frac{6}{12}\right)^2 \\ &= -\frac{7}{12} - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= -\frac{7}{12} - \frac{1}{4} \\ &= -\frac{7}{12} - \frac{3}{12} = -\frac{10}{12} = -\frac{5}{6} \end{aligned}$$

B. Dans une fraction, nous effectuons les opérations relatives aux deux termes de la fraction avant la division.

Exemples :

$$1. \frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{5} - \frac{5}{2}}{\left(\frac{5}{-6}\right) \cdot \frac{7}{2}} = \frac{\frac{20}{30} + \frac{18}{30} - \frac{75}{30}}{-\frac{35}{12}} = \frac{-\frac{37}{30}}{-\frac{35}{12}} = \left(-\frac{37}{30}\right) \left(-\frac{12}{35}\right) = \frac{74}{175}$$

$$2. \frac{6 + \frac{2}{5} \left(-\frac{10}{7}\right)}{3 \cdot \frac{2}{21}} = \frac{6 - \frac{4}{7}}{\frac{2}{7}} = \frac{\frac{42}{7} - \frac{4}{7}}{\frac{2}{7}} = \frac{\frac{38}{7}}{\frac{2}{7}} = \frac{38}{7} \cdot \frac{7}{2} = 19$$

3. Valeur numérique d'une expression littérale

La valeur numérique d'une expression littérale est le nombre que l'on obtient en effectuant les opérations indiquées, après avoir remplacé les lettres par les nombres donnés.

Exemples :

$$1. a + b - c \text{ pour } a = 2, b = -4, c = -1 \\ 2 + (-4) - (-1) = 2 - 4 + 1 = -1.$$

$$2. a : b + cd^2 \text{ pour } a = -10, b = 2, c = \frac{3}{2}, d = 4 \\ (-10) : 2 + \frac{3}{2} \cdot 4^2 = (-10) : 2 + \frac{3}{2} \cdot 16 = (-10) : 2 + 24 \\ = -5 + 24 = 19.$$

$$3. 5a^2 - 8ab : c \text{ pour } a = -2, b = 3, c = 4 \\ 5(-2)^2 - 8(-2) \cdot 3 : 4 = 5 \cdot 4 - 8(-2) \cdot 3 : 4 = \\ = 20 + 48 : 4 = 20 + 12 = 32.$$

$$4. (2a)^3 - 2a^3 \text{ pour } a = -2 \\ [2(-2)]^3 - 2(-2)^3 = (-4)^3 - 2(-2)^3 = -64 - 2(-8) = \\ = -64 + 16 = -48.$$

$$5. \frac{a^2 + b^2}{a + b} \text{ pour } a = -5, b = 3 \\ \frac{(-5)^2 + 3^2}{-5 + 3} = \frac{25 + 9}{-2} = \frac{34}{-2} = -17.$$

$$6. I = \frac{E}{R} \text{ pour } E = 220, R = 16$$

$$I = \frac{220}{16} = 13,75.$$

$$7. D = \frac{b \times h}{2} \text{ pour } b = 23, h = 7,3$$

$$D = \frac{23 \times 7,3}{2} = \frac{167,9}{2} = 83,95.$$

$$8. s = \frac{1}{2}gt^2 \text{ pour } g = 9,81, t = 4$$

$$s = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 4^2 = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 16 = 78,48.$$

$$9. s = v_0t + \frac{1}{2}at^2 \text{ pour } v_0 = 5, a = 4, t = 3$$

$$s = 5 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3^2 = 5 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 9 = 15 + 18 = 33.$$

4. Remarque

Toutes les opérations que nous venons d'effectuer sur les nombres rationnels peuvent être ramenées à des additions et à des multiplications.

$$a - b = a + (-b)$$

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b}$$

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \dots$$

$\mathbb{Q}, +, \cdot$ est le champ des nombres rationnels

si 1. $\mathbb{Q}, +$ est un groupe commutatif

2. $\mathbb{Q}_0, \cdot$ est un groupe

3. la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

$\mathbb{Q}_0, \cdot$ étant un groupe commutatif,

$\mathbb{Q}, +, \cdot$ est un champ commutatif

Exercices

1. Effectuez :

A. $3 - 8 : 2^2 - 5(-4)$

$2^3 : 4 - 6 : 2 + 3 \cdot 4 + 2^3$

$8^2 : 2 - 7 \times 3 + 18 : 3 + 4^2$

$3(-14) : (-21) + (-3)^2(-9) - 7$

B. $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{9} - \frac{2}{7} \left(-\frac{3}{8}\right) \cdot \left(-\frac{21}{10}\right) + \frac{3}{8} : \left(-\frac{6}{5}\right)$

$\frac{3}{2} \left(-\frac{14}{15}\right) : \left(-\frac{21}{35}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \left(-\frac{18}{3}\right) - \frac{7}{5}$

$-5,372 - 7,24 \times (-3,18) - 4,213$

C. $\left(5 - \frac{7}{3} + \frac{5}{2}\right) : \frac{13}{24} - \frac{45}{39} \left(-3 + \frac{3}{5} - \frac{7}{15}\right)$

$\left(\frac{5}{6} - \frac{7}{18}\right) \left(-\frac{2}{5} - \frac{4}{15}\right) + \frac{2}{9} : \left(\frac{7}{5} + \frac{10}{21}\right)$

$(5,2 \times 3,7 - 1,8^2) : [(4,5 - 6,9)^2 + 8,4 : 2,4]$

D. $\frac{5}{18} \times (-3) : \frac{35}{24} - \frac{6}{13}$

$\frac{28}{75} : \left(-\frac{14}{15}\right) \times \frac{5}{4} - \frac{4}{39}$

$\frac{15}{6} : \left(-\frac{3}{8}\right) - \frac{27}{15} \times \left(-\frac{5}{3}\right)$

$\left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{25}{18}\right) + \frac{16}{3} : \left(-\frac{8}{15}\right)$

$-5,12 \times 3,46 + 1,62^2$

$6,38^2 - (-25,4172) : (-3,54)$

$(-5,12 + 3,14 \times 2,3) \times (11,352 : 5,16 - 7,34)$

$3,6^2 - 5,2 \times 3,4$

E. $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^2 - \frac{3}{4}\right] \times \frac{7}{5} + \frac{3}{8} : \left(-\frac{5}{4}\right)$

$\left(\frac{2}{5}\right)^2 - \left[\frac{3}{4} \times \frac{7}{5} + \frac{3}{8} : \left(-\frac{5}{4}\right)\right]$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{4} \times \frac{7}{5} + \frac{3}{8}\right) : \left(-\frac{5}{4}\right)$$

$$\left(\frac{3}{5} - \frac{5}{6}\right) \times \left(-\frac{2}{15} + \frac{3}{10}\right) - \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{4}{5} - \frac{4}{9}\right)$$

$$\left[\frac{3}{5} - \frac{5}{6} \times \left(-\frac{2}{15} + \frac{3}{10}\right) - \left(-\frac{2}{3}\right)\right] \times \left(\frac{4}{5} - \frac{4}{9}\right)$$

2. Calculez la valeur numérique de :

1) $(5a + 3b) \cdot 3c$ pour $a = -2$, $b = 5$, $c = 3$

2) $(2a - 3b)(5c + 2ab)$ pour $a = -5$, $b = -3$, $c = -1$

3) $2a^2 + 3ab - 7b^2$ pour $a = -7$, $b = -3$

4) $(x^2 - xy + y^2)(x + y)$ pour $x = -3$, $y = 5$

5) $[a(b+c) - b(a-c)](ab-c)$ pour $a = 3$, $b = -3$, $c = -4$

6) $5a^2bc - 3ab$ pour $a = -2$, $b = 4$, $c = 5$

7) $(a-b)^2 + (b+c)^2$ pour $a = -1, 2$, $b = 0, 4$, $c = 3, 7$

8) $(2a^2 - b)^2 \cdot c$ pour $a = \frac{3}{4}$, $b = -\frac{5}{12}$, $c = \frac{8}{9}$

3. Calculez la valeur numérique des expressions suivantes pour

$$a = \frac{3}{4}, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad c = \frac{2}{3}, \quad d = -\frac{1}{6}$$

1) $\frac{5a + 3bc}{2ab - d^2}$

4) $\frac{5(a + 3c)b}{2b(a - d^2)}$

2) $\frac{(5a + 3)bc}{2(ab - d^2)}$

5) $\frac{5(a + 3b)c}{2(ab - d^2)}$

3) $\frac{(5a + 3b)c}{(2ab - d)^2}$

6) $\frac{(5a + 3c)b}{2b(a - d)^2}$

4. Vérifiez les égalités suivantes pour $a = \frac{1}{2}$ et $b = -1$:

1) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

2) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

3) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

5. Calculez :

$$1) v = v_0 + at \quad \text{si } v_0 = 5, t = 7, a = 0,23$$

$$2) e = \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{si } g = 9,81, t = 4$$

$$3) I = \frac{E}{Ri + Ru} \quad \text{si } Ri = 0,5, Ru = 20, E = 164$$

$$4) R = \rho \frac{l}{s} \quad \text{si } \rho = 0,0175, l = 200, s = 3$$

$$5) R = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{si } R_1 = 10,8, R_2 = 13,2$$

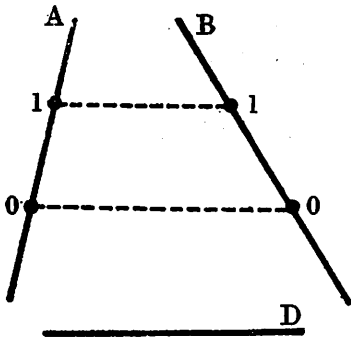
$$6) t_1 = \frac{5}{9}(t_2 - 32) \quad \text{si } t_2 = 45$$

$$7) I = \frac{nE}{nRi + Ru} \quad \text{si } n = 4, Ru = 3,2, Ri = 0,4, E = 1,5.$$

CHAPITRE XXXI

THÉORÈME DE THALÈS

1. Projection parallèle du repère de A_{01} sur B

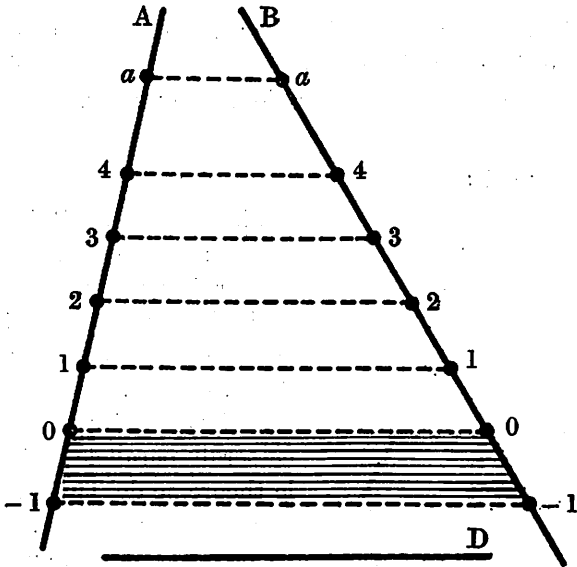


Dessignons le repère $(0, 1)$ sur la droite A et projetons ce repère sur B, $// D$.

Les projections de 0 et de 1 sont également notées 0 et 1.

Ainsi, nous avons appliqué le repère de A_{01} sur B et nous écrivons : $p : A_{01} \rightarrow B_{01}$.

2. Théorème de Thalès



Projetons la droite graduée A_{01} sur B , $// D$ de telle façon que
 $p : A_{01} \rightarrow B_{01}$

Dessignons ensuite les images de 2, 3, 4,...

Sur A_{01} , on a $\dots \uparrow (0, 1) \uparrow (1, 2) \uparrow (2, 3) \uparrow (3, 4) \uparrow \dots$

Tous les couples projetés sur B sont équipollents, puisque la projection parallèle conserve l'équipollence.

Ces couples déterminent donc la graduation de B de telle façon que

l'image de 2 a également 2 pour abscisse

l'image de 3 a également 3 pour abscisse

et

l'image de a a également a pour abscisse.

Conclusion :

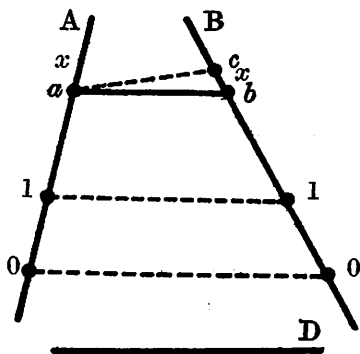
Si la projection p applique le repère de A_{01} sur B ,
 alors un point de A d'abscisse a a pour image un point
 de B de même abscisse ; en d'autres mots :

$p : A_{01} \rightarrow B_{01}$ conserve l'abscisse.

Remarque :

En subdivisant les graduations sur A_{01} , on peut démontrer que cette propriété est également valable pour des points ayant pour abscisses des nombres rationnels et réels.

3. Réciproque du théorème



Projetons A_{01} sur B de telle façon que $p : A_{01} \rightarrow B_{01}$.

Construisons sur A le point a d'abscisse x et sur B le point b , également d'abscisse x .

Alors, $ab // D$.

Car, si ab n'était pas parallèle à D , ac serait parallèle à D et, d'après le théorème de Thalès, le point c aurait x pour abscisse.

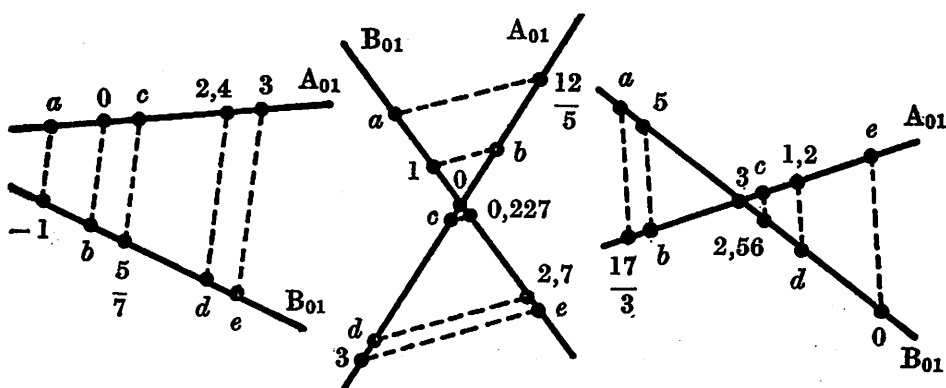
Or, sur B_{01} , il existe un seul point d'abscisse x et on a donc $c = b$.

Conclusion :

Si la projection applique le repère de A_{01} sur B , alors toute droite qui passe par deux points de même abscisse, est parallèle à la direction de la projection.

Exercices

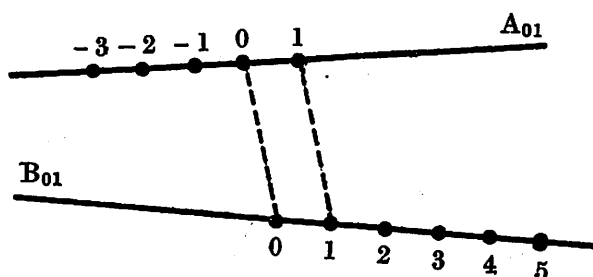
1. Si $p : A_{01} \rightarrow B_{01}$, trouvez les abscisses des points a, b, c, d et e .



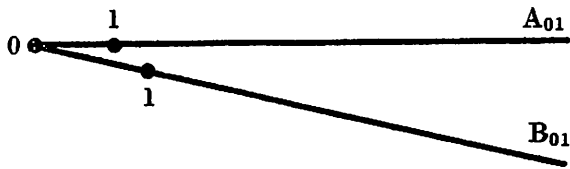
2. On donne : $(-3, -2) \uparrow (-2, -1) \uparrow (-1, 0) \uparrow (0, 1) \uparrow \dots$ sur A_{01}
 $(0, 1) \uparrow (1, 2) \uparrow (2, 3) \uparrow (3, 4) \uparrow (4, 5) \uparrow \dots$ sur B_{01}

On demande : 1) sur A_{01} , les points d'abscisses 3 et 5

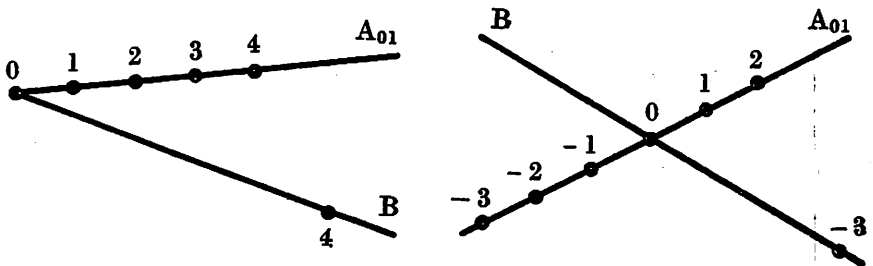
2) sur B_{01} , les points d'abscisses -1 et -3 .



3. Graduez les droites A et B en vous basant, pour la première, sur l'équipollence et pour la seconde, sur le théorème de Thalès.

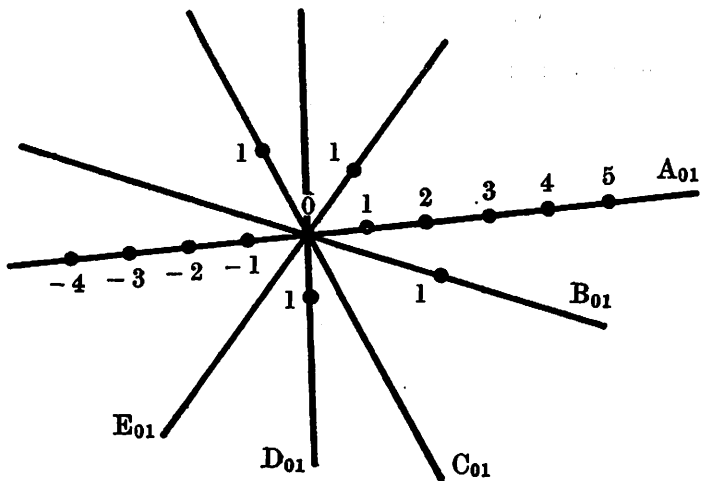


4. Graduez la droite B en vous appuyant sur le théorème de Thalès. Dessinez en rouge le vecteur unitaire.



5. Déterminez

sur B, les points d'abscisses -3 et -2
 sur C, les points d'abscisses 2 et -3
 sur D, les points d'abscisses 4 et -1
 sur E, les points d'abscisses -4 et 2 .



6. On donne :

un parallélogramme $abcd$;

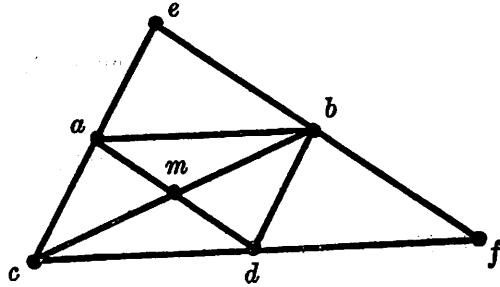
ef passant par b , est
parallèle à ad ;

$\vec{ca}$ est le vecteur unitaire
sur ce ;

$\vec{cm}$ est le vecteur unitaire
sur cb ;

$\vec{cd}$ est le vecteur unitaire sur cf .

On demande les abscisses de b , e et f .

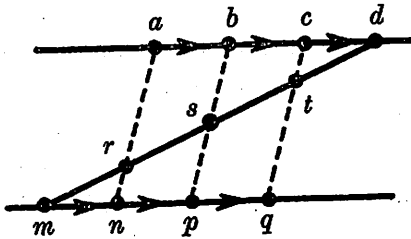


7. On donne

Démontrez que

$(a, b) \uparrow (b, c) \uparrow (c, d) \uparrow (m, n) \uparrow (n, p) \uparrow (p, q)$.

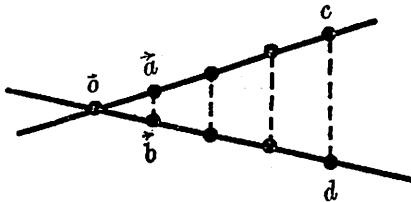
$(m, r) \uparrow (r, s) \uparrow (s, t) \uparrow (t, d)$.



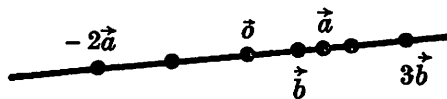
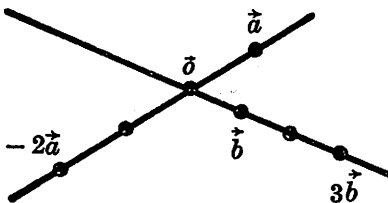
8. $\vec{a}$ et $\vec{b}$ appartiennent au plan pointé Π_0 .

Le point c a pour abscisse 4 et $cd \parallel ab$.

Déterminez les vecteurs c et d .



9. Dessinez les vecteurs $3a$ et $-2b$.



CHAPITRE XXXII

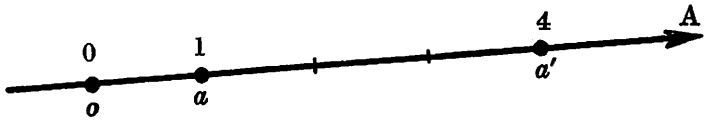
HOMOTHÉTIE

1. Notion

Soient un point fixe $o \in \Pi$ et un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}$.

Un autre point $a \in \Pi$ détermine avec o la droite oa ou A .

Nous orientons A en prenant $o < a$.



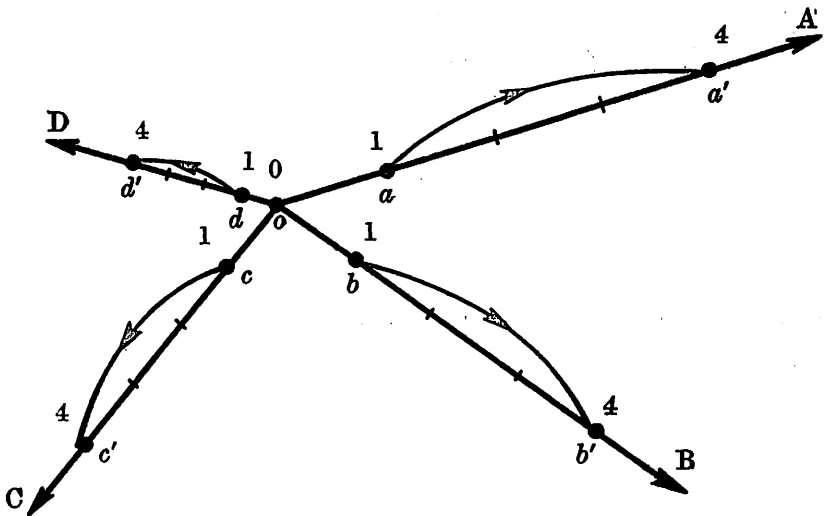
Soit 0 l'abscisse du point o et 1 celle du point a . $\vec{oa}$ est alors le vecteur unitaire et $(0,1)$ le repère.

Sur A , construisez le point a' d'abscisse 4.

Un autre point $b \in \Pi$ détermine avec o la droite ob ou B .

Soit 1 l'abscisse du point b . Construisez b' d'abscisse 4.

Nous pouvons répéter la même opération avec tous les points $\in \Pi$.



L'ensemble infini $\{(a, a'), (b, b'), (c, c'), (d, d') \dots\}$ est une relation entre les points de Π , appelée

homothétie de centre o et de rapport 4.

Nous écrivons : $h(o, 4) : \Pi \rightarrow \Pi = \{(a, a'), (b, b'), (c, c'), (d, d') \dots\}$

De la figure, on déduit aisément que :

$$\vec{oa'} = 4 \vec{oa}$$

$$\vec{ob'} = 4 \vec{ob}$$

$$\vec{oc'} = 4 \vec{oc}$$

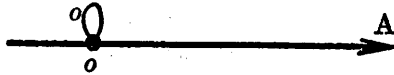
$$\vec{od'} = 4 \vec{od} \dots$$

2. Remarques

1. De chaque point de Π part une et une seule flèche et en chaque point de Π arrive une et une seule flèche.

Une homothétie est donc une permutation de Π .

2. $\vec{o\vec{o}} = 4 \vec{o\vec{o}}$; donc $(o, o) \in h(o, 4)$



Le centre o de l'homothétie est sa propre image.

o est donc le *point fixe* de la permutation.

3. Généralisation

L'homothétie de centre $o \in \Pi$ et de rapport $r \in \mathbb{R}$ s'écrit : $h(o, r)$

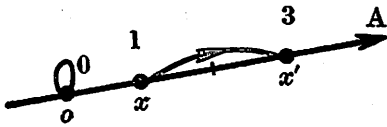


x' ou $h(x)$ est l'image de x par l'homothétie $h(o, r)$, soit

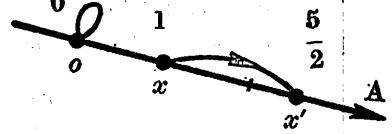
$$h(o, r) : \Pi \rightarrow \Pi : x \rightarrow x' \text{ et } \vec{ox'} = r \cdot \vec{ox}.$$

4. Cas particuliers

1. $h(o, 3)$



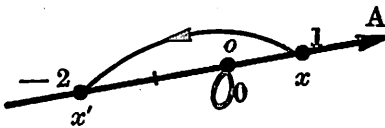
$h\left(o, \frac{5}{2}\right)$



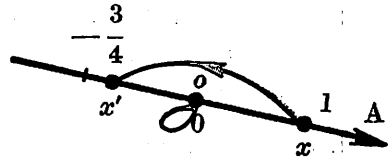
Si $r > 0$, x et x' se situent du même côté de o .

$h(o, r)$ est dite homothétie *positive*.

2. $h(o, -2)$



$h\left(o, -\frac{3}{4}\right)$



Si $r < 0$, x et x' se situent de part et d'autre de o .

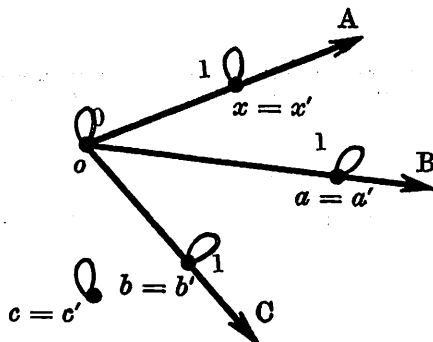
$h(o, r)$ est dite homothétie *négative*.

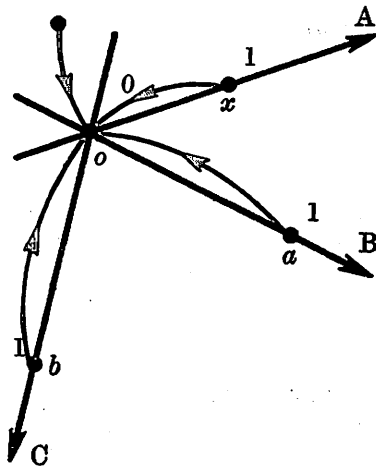
3. $h(o, 1)$

Puisque $\vec{ox'} = 1 \cdot \vec{ox}$, on aura $x = x'$, ce qui est valable pour tous les points de Π .

Chaque point de Π est sa propre image par l'homothétie $h(o, 1)$.

$h(o, 1)$ est la *transformation identique* de Π , soit $h(o, 1) = i$.



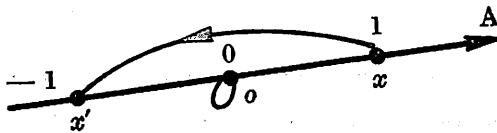
4. $h(o, 0)$


Pour $\vec{o}\vec{x}' = 0 \cdot \vec{o}\vec{x}$, on aura $x' = o$, ce qui est valable pour tous les points de Π .

Tout point de Π a le point o pour image par l'homothétie de centre o et de rapport nul.

$h(o, 0)$ est une transformation constante, c'est-à-dire une transformation où tous les points ont la même image.

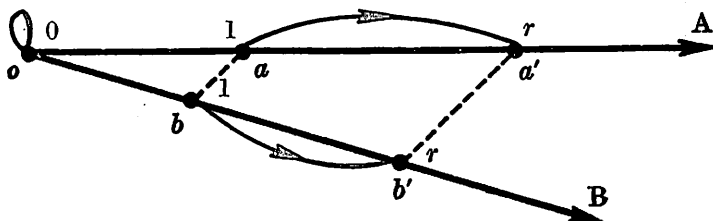
L'homothétie $h(o, 0)$ n'est donc pas une permutation.

 5. $h(o, -1)$


Pour $\vec{o}\vec{x}' = -1 \cdot \vec{o}\vec{x} = -\vec{o}\vec{x}$, les points x et x' sont symétriques par rapport à o .

o est le milieu de $[xx']$.

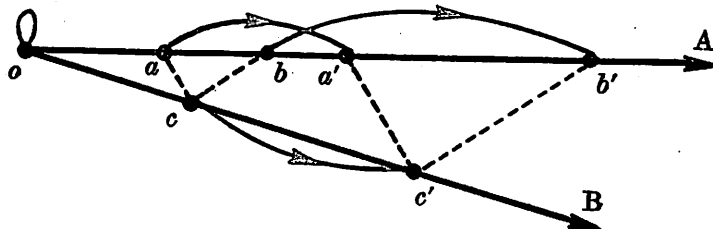
$h(o, -1)$ est la symétrie centrale S_o , de centre o .

5. Image d'une partie de Π par une homothétieA. D'un couple (a, b) 1. $o \notin ab$ 

Sur A_{o1} , l'abscisse de $a' = r$ } $\Rightarrow ab \parallel a'b'$
 Sur B_{o1} , l'abscisse de $b' = r$ } (théorème de Thalès)

Conséquence :

$o, (a, a') \in h(o, r)$ et b étant déterminés, on trouve b' par projection parallèle de a' sur B , $\parallel ab$.

2. $o \in ab$ 

Construisez a' de telle façon que $(aa') \in h(o, r)$.

Par o , tracez une droite quelconque B . Soit un point c sur cette droite.

Construisez c' par projection parallèle de a' sur B , $\parallel ac$.

Construisez b' par projection parallèle de c' sur A , $\parallel cb$.

$a'b'$ est l'image de (a, b) par l'homothétie $h(o, r)$.

L'image d'un couple (a, b) par une homothétie est un couple (a', b') parallèle à (a, b) .

B. D'une droite A

 1. $o \in A$

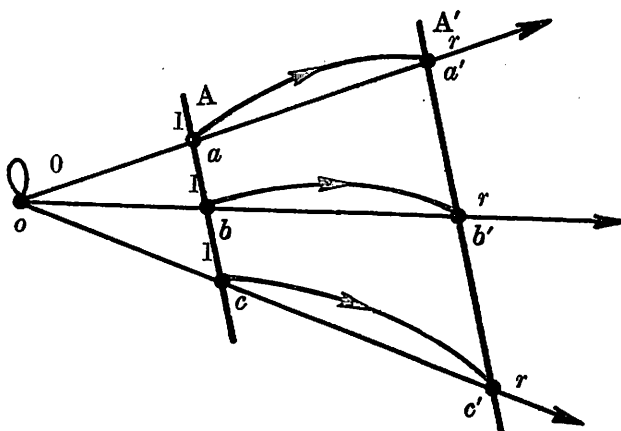

$$o \in A \Rightarrow o' \in A$$

$$a \in A \Rightarrow a' \in A$$

$$b \in A \Rightarrow b' \in A$$

etc...

L'image de la droite A par une homothétie est la droite A elle-même, soit $h(A) = A$.

 2. $o \notin A$


Soient deux points a et $b \in A$ et construisez a' et b'

$$\left. \begin{array}{l} (a, a') \in h(o, r) \\ (b, b') \in h(o, r) \end{array} \right\} \Rightarrow a' b' \parallel ab \parallel A$$

Soit un troisième point $c \in A$ et construisez c'

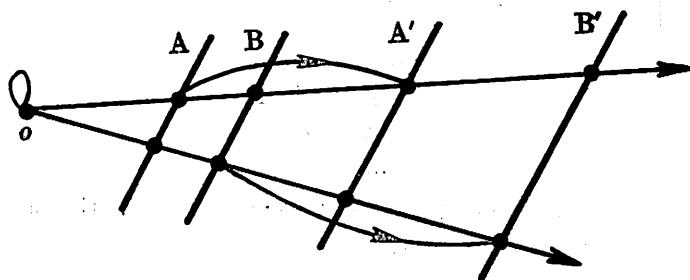
$$\left. \begin{array}{l} (a, a') \in h(o, r) \\ (c, c') \in h(o, r) \end{array} \right\} \Rightarrow a' c' \parallel ac \parallel A$$

Par a' , on ne peut faire passer qu'une seule droite $\parallel A$;
 $a' b'$ et $a' c'$ sont donc confondus.

L'image d'une droite A par une homothétie est une droite $A' \parallel A$.

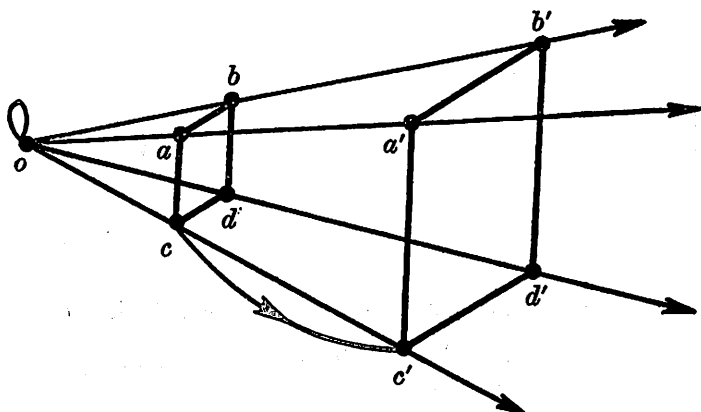
Conséquences :

1. Les images de deux droites parallèles par une homothétie sont deux droites parallèles.



$$A \parallel B \Rightarrow A' \parallel B'$$

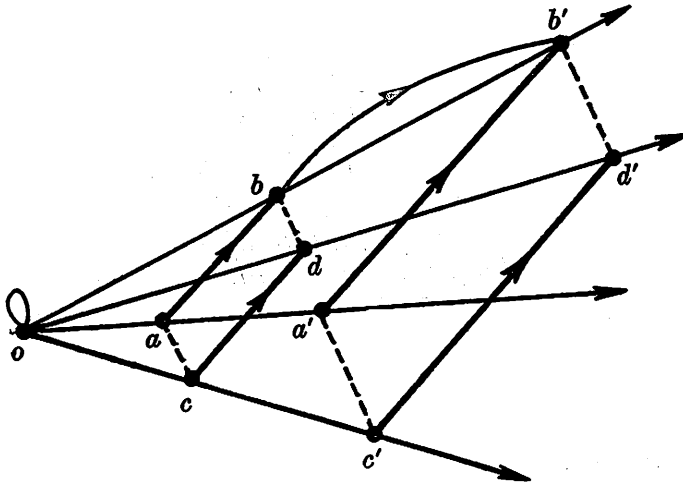
2. L'image d'un parallélogramme par une homothétie est un parallélogramme.



$abcd$ est un parallélogramme

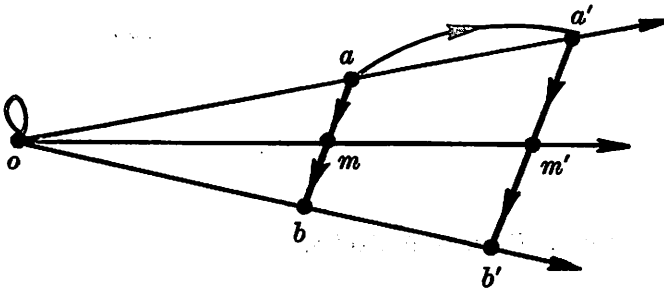
$\Leftrightarrow a'b'c'd'$ est un parallélogramme.

3. L'homothétie conserve l'équipollence.



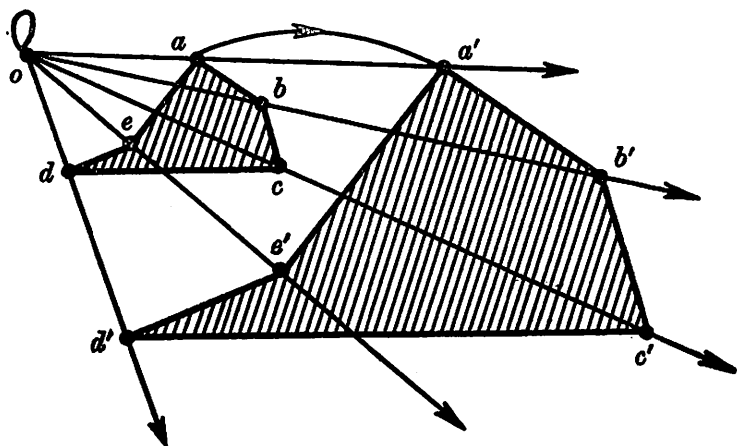
$$(a, b) \uparrow (c, d) \Rightarrow (a', b') \uparrow (c', d')$$

4. L'homothétie conserve le milieu.

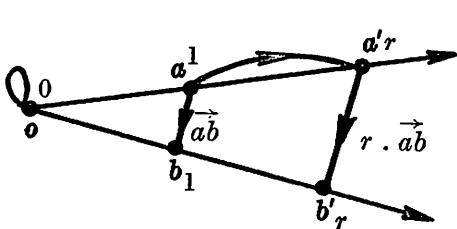


$$(a, m) \uparrow (m, b) \Rightarrow (a', m') \uparrow (m', b')$$

C. D'une figure quelconque



D. D'un vecteur



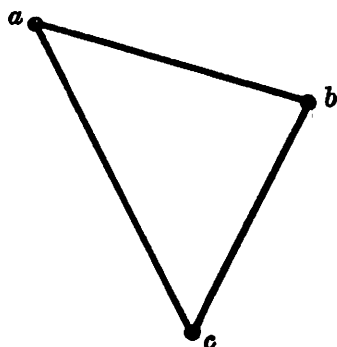
$$\begin{aligned}
 \vec{a'b'} &= \vec{a'o} + \vec{ob'} \\
 &= -\vec{oa'} + \vec{ob'} \\
 &= -r.\vec{oa} + r.\vec{ob} \\
 &= r(-\vec{oa} + \vec{ob}) \\
 &= r(\vec{ao} + \vec{ob}) \\
 &= r.\vec{ab}
 \end{aligned}$$

L'image d'un vecteur par l'homothétie $h(o, r)$
est le vecteur $r.\vec{ab}$

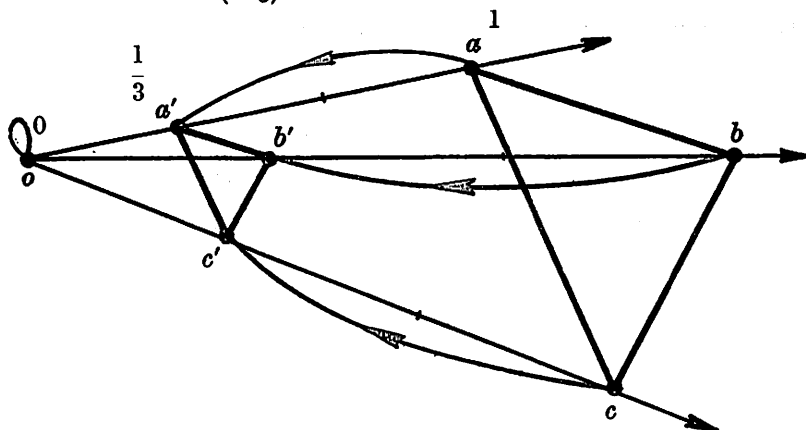
6. Application : Figures à l'échelle

Dessinez le triangle abc

à l'échelle $\frac{1}{3}$.

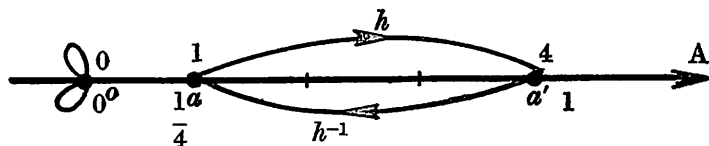


Nous choisissons un point o dans le plan et nous appliquons l'homothétie $h\left(o, \frac{1}{3}\right)$ au triangle abc .



7. Réciproque d'une homothétie

Soit $h(o, 4)$.



L'abscisse de $a = 1$; celle de $a' = 4$, car $(a, a') \in h(o, 4)$.

Quelle est la relation réciproque de $h(o, 4)$?

Changeons le sens de la flèche.

L'abscisse de $a' = 1$; celle de $a = \frac{1}{4}$; donc $(a', a) \in h\left(o, \frac{1}{4}\right)$.

Nous obtenons $h\left(o, \frac{1}{4}\right)$ qui est l'homothétie réciproque de $h(o, 4)$.

Conclusion :

Toute homothétie h a une réciproque h^{-1} de même centre, mais de rapport inverse.

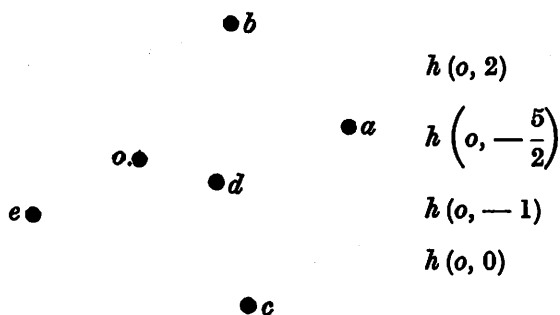
Remarque :

L'homothétie réciproque de $h(o, 0)$ n'est ni une transformation, ni une homothétie.



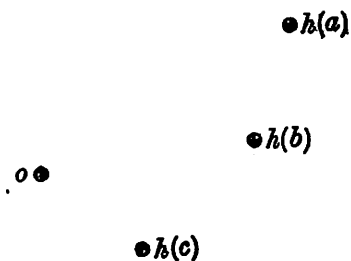
Exercices

1. Dessinez les homothéties suivantes :

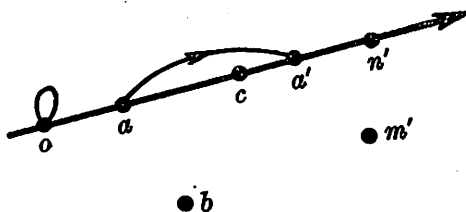


2. $h(a)$, $h(b)$ et $h(c)$ sont les images de a , b et c par l'homothétie $h(o, 3)$.

Déterminez les points a , b et c .

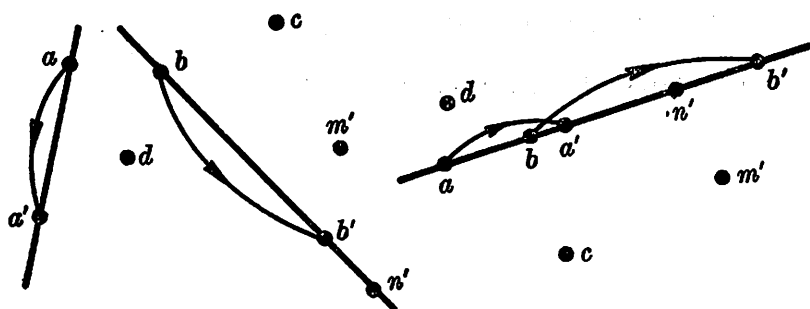


3. Trouvez les images de b et c par $h(o, r)$ si $(a, a') \in h$.



Déterminez aussi les points m et n , si (m, m') et $(n, n') \in h$.

4. Trouvez les images de c et d par $h(o, r)$ si (a, a') et $(b, b') \in h$.

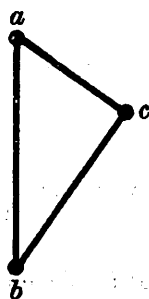
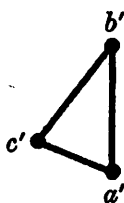
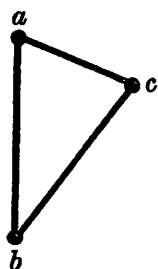


Déterminez aussi les points m et n si (m, m') et $(n, n') \in h$.

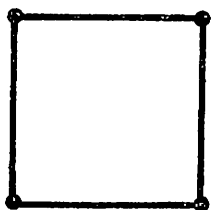
5. Complétez : Une homothétie est totalement déterminée par

1. ...
2. ...
3. ...

6. Dans chacun des deux cas, $a' b' c'$ est l'image de abc par une homothétie. Déterminez le centre o de cette homothétie.

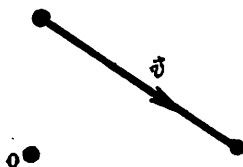


7. Par $h(o, r)$, le grand carré est l'image du petit. Trouvez les deux centres possibles.



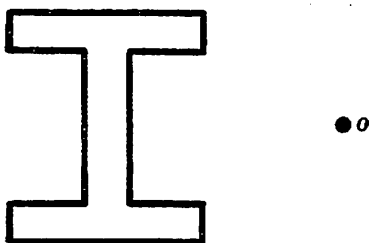
8. Le vecteur v détermine la translation t . Dessinez les images $\bar{v}'$ et $\bar{v}''$ de $\bar{v}$ par les homothéties $h(o, 2)$ et $h\left(o, -\frac{2}{3}\right)$.

Quelle translation déterminent $\bar{v}'$ et $\bar{v}''$?



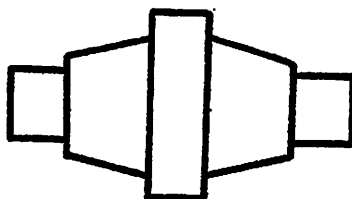
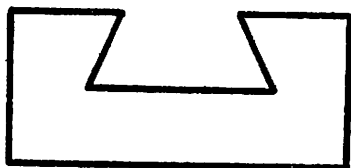
9. L'image par homothétie d'une figure, peut-elle être un point ? Justifiez.

10. Dessinez l'image de la figure ci-dessous pour $h(o, 2)$ et $h(o, -1)$.



11. Dessinez : a) l'échelle $\frac{1}{3}$

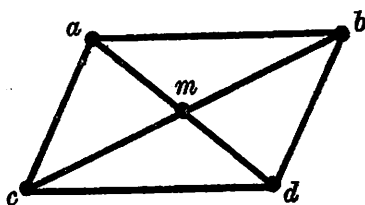
b) à l'échelle $\frac{1}{4}$.



12. Dessinez l'image du parallélogramme $abcd$ par l'homothétie $h(m, -1)$.

Que constatez-vous ?

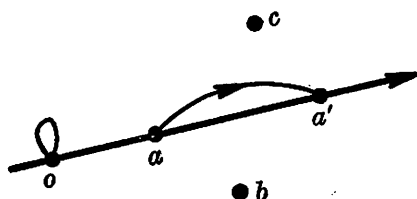
Comment peut-on appeler m ?



13. On donne $(a, a') \in h(o, r)$.

On demande :

- les images de a et b par h^{-1}
- le point dont c est l'image par h^{-1} .



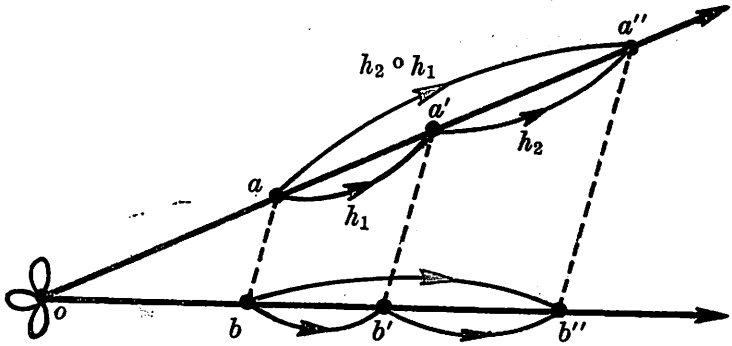
CHAPITRE XXXIII

COMPOSITION D'HOMOTHÉTIES

1. Notion

H_o est l'ensemble de toutes les homothéties de centre o .

H_o^0 est l'ensemble de toutes les homothéties de centre o , excepté $h(o, 0)$.



Appliquez l'homothétie h_1 aux points a et b .

$$\left. \begin{array}{l} (a, a') \in h_1 \\ (b, b') \in h_1 \end{array} \right\} \Rightarrow ab \parallel a'b' \text{ ————— }$$

Appliquez l'homothétie h_2 aux points a' et b' .

$$\left. \begin{array}{l} (a', a'') \in h_2 \\ (b', b'') \in h_2 \end{array} \right\} \Rightarrow a'b' \parallel a''b'' \text{ ————— }$$

$\Rightarrow ab \parallel a''b'' \Rightarrow$
 abscisse de a''
 = abscisse de b''
 (Théorème de
 Thalès)

(a, a'') et (b, b'') appartiennent donc à l'homothétie $h_3 = h_2 \circ h_1$ de centre o .

La composée de deux homothéties de même centre est une homothétie de même centre.

La composition d'homothéties est interne et partout définie dans H_o .

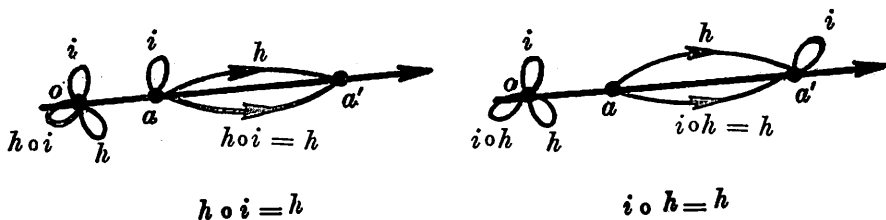
$$\forall h_1, h_2 \in H_o : h_2 \circ h_1 = h_3 \in H_o$$

2. Structure de $H_o^0, \circ$

1. La composition est interne et partout définie dans H_o .
2. La composition est associative dans H_o , puisque la composition de relations est associative.

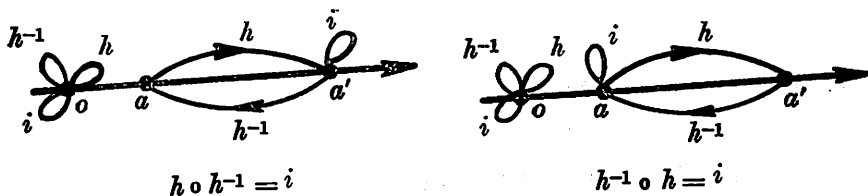
$$\forall h_1, h_2, h_3 \in H_o : h_3 \circ (h_2 \circ h_1) = (h_3 \circ h_2) \circ h_1 = h_3 \circ h_2 \circ h_1$$

3. Il existe un élément neutre pour la composition dans H_o : la transformation identique $i = h(o, 1)$.



$$\forall h \in H_o : h \circ i = h = i \circ h$$

4. Chaque élément $h \in H_o^0$ a, pour la composition, un élément symétrique $h^{-1} \in H_o^0$ (l'homothétie réciproque).



$$\exists h^{-1} \in H_o^0, \forall h \in H_o^0 : h^{-1} \circ h = i = h \circ h^{-1}$$

Remarque :

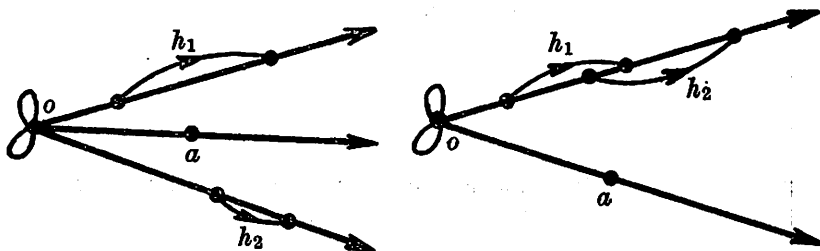
Cette dernière propriété n'est valable que dans H_o^0 car la réciproque de l'homothétie $h(o, 0)$ n'est pas une homothétie.

Conclusion :

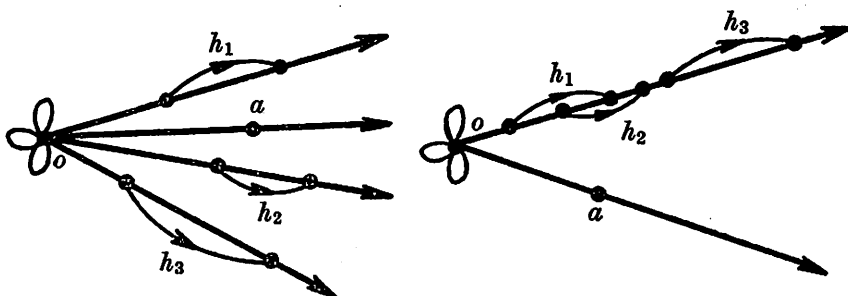
$H_o^0, \circ$ is een groep

Exercices

1. Dessinez l'image de a par $h_2 \circ h_1$, $h_1 \circ h_2$, $h_2^{-1} \circ h_1$, $h_2 \circ h_1^{-1}$.

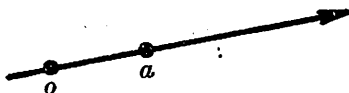


2. Dessinez l'image de a par $h_3 \circ h_2 \circ h_1$, $h_1 \circ h_2^{-1} \circ h_3$, $h_3^{-1} \circ h_2 \circ h_1$.



3. On donne : $h_1(o, 2)$
 $h_2(o, 3)$.

Dessinez l'image de a par $h_2 \circ h_1$.



Complétez :

- Le rapport de $h_2 \circ h_1$ est ... des rapports de h_1 et h_2 , soit $h_2(o, r') \circ h_1(o, r) = h_3(o, \dots)$
- La composée de deux homothéties positives est une homothétie ...

c) La composée de deux homothéties négatives est une homothétie ...

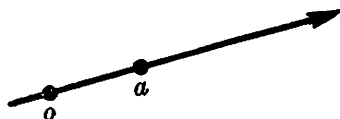
d) La composée d'une homothétie positive et d'une homothétie négative est une homothétie...

4. H_o , $\circ$ est-il un groupe? Justifiez.

5. On donne : $h_1(o, 2)$

$h_2(o, -3)$.

Dessinez l'image de a par $h_2 \circ h_1$ et $h_1 \circ h_2$.



Quelle propriété avez-vous découverte? H_o^0 , $\circ$ est un groupe ...

6. H_o^+ est l'ensemble de toutes les homothéties positives de centre o .
 H_o^+ , $\circ$ est-il un groupe?

7. H_o^- , $\circ$ est-il un groupe?

CHAPITRE XXXIV

PROPRIÉTÉS DES GROUPES

1. Propriété I

A. Dans une structure quelconque $E, *$

Exemples :

1. Dans le groupe $Z, +$	Dans la structure $Z, -$	Dans le groupe $T, \circ$
$7 = 7$	$5 = 5$	$t_1 = t_1$
$+ 4 \quad + 4$	$- 8 \quad - 8$	$\circ t_2 \quad \circ t_2$
$7 + 4 = 7 + 4$	$5 - 8 = 5 - 8$	$t_1 \circ t_2 = t_1 \circ t_2$

Nous avons effectué une opération à droite.

2. Dans la structure $Z, .$	Dans le groupe $Q_0, .$	Dans la structure $N, .$
$7 = 7$	$-\frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$	$2 = 2$
$\times 3 \quad \times 3$	$\times \frac{1}{5} \quad \times \frac{1}{5}$	$\times 0 \quad \times 0$
$3 \times 7 = 3 \times 7$	$\frac{1}{5} \left(-\frac{2}{3} \right) = \frac{1}{5} \left(-\frac{2}{3} \right)$	$0 \times 2 = 0 \times 2$

Nous avons effectué une opération à gauche.

En général :

$$\forall a, b, c \in V, * : \begin{aligned} a = b &\Rightarrow a * c = b * c \\ a = b &\Rightarrow c * a = c * b \end{aligned}$$

B. Dans un groupe G , $*$ seulement, la réciproque est toujours vraie.

Exemples :

Dans le groupe $\mathbb{Z}, +$	Dans le groupe $\mathbb{V}, +$	Dans la structure $\mathbb{Z}, \cdot$
$\frac{-7+4}{\Rightarrow -7} = \frac{-7+4}{\Rightarrow -7}$	$\frac{\vec{v}_1+\vec{v}_2}{\Rightarrow \vec{v}_1} = \frac{\vec{v}_1+\vec{v}_2}{\Rightarrow \vec{v}_1}$	$\frac{-8 \times 0}{\Rightarrow -8} = \frac{10 \times 0}{\Rightarrow 10}$
$\frac{4-6}{\Rightarrow -6} = \frac{4-6}{\Rightarrow -6}$	$\frac{\vec{v}_1+\vec{v}_2}{\vec{v}_2} = \frac{\vec{v}_1+\vec{v}_2}{\vec{v}_2}$	$\frac{(-5) \times 3}{\Rightarrow 3} = \frac{(-5) \times 3}{\Rightarrow 3}$

En général :

$$\forall a, b, c \in G, * : a * c = b * c \Rightarrow a = b$$

$$c * a = c * b \Rightarrow a = b$$

Cette propriété est appelée la simplification d'une équation dans un groupe.

En résumé :

$\forall a, b, c \in G, * :$ $a = b \Leftrightarrow a * c = b * c$ $a = b \Leftrightarrow c * a = c * b$
--

2. Propriété II

Un groupe a un et un seul élément neutre, représenté par n .

Nous avons donc :

$$a * n = a = n * a$$

Pour le groupe $\mathbb{Z}, +$ on a $n = 0$, car $(-3) + 0 = -3 = 0 + (-3)$

3. Propriété III

Chaque élément a d'un groupe a un et un seul élément symétrique, représenté par a' .

Nous avons donc :

$$a * a' = n = a' * a$$

Pour le groupe $\mathbb{Z}, +$ l'élément symétrique d'un nombre est l'opposé de ce nombre, car $(-3) + (+3) = 0 = n$

$$(+4) + (-4) = 0 = n.$$

Tableau synoptique des éléments neutres et symétriques dans les groupes connus

groupe	l'élément neutre est	l'élément symétrique de		
$\mathbb{Z}, +$	0	a	est	$-a$
$\mathbb{Q}, +$	0	$\frac{a}{b}$	est	$-\frac{a}{b}$
$\mathbb{Q}_0, \times$	1	$\frac{a}{b}$	est	$\frac{b}{a}$
$\mathbb{T}, \circ$	i	t	est	t^{-1}
$\mathbb{V}, +$	$\vec{o}$	$\vec{v}$	est	$-\vec{v}$
$\mathbb{D}_0, +$	$\vec{o}$	$\vec{d}$	est	$-\vec{d}$
$\mathbb{P}_0, +$	$\vec{o}$	$\vec{d}$	est	$-\vec{d}$
$\mathbb{Z}\vec{v}, +$	$\vec{o}$	$m\vec{v}$	est	$-m\vec{v}$
$\mathbb{H}_0^0, \circ$	i	h	est	h^{-1}

4. Propriété IV

Exemples :

1. Dans la structure $\mathbb{N}, +$

$$\begin{array}{ll}
 x + 3 = 7 & x + 5 = 1 \\
 x = 7 - 3 & x = 1 - 5 \\
 x = 4 & x = -4 \\
 E = \{4\} & E = \emptyset
 \end{array}$$

$\Rightarrow$ 1 ou pas de solution.

2. Dans la structure $\mathbb{N}, .$

$$\begin{array}{llll}
 3x = 9 & 2x = 5 & 2x = -6 & 0x = 0 \\
 x = 3 & x = \frac{5}{2} & x = -3 & E = \mathbb{N} \\
 E = \{3\} & E = \emptyset & E = \emptyset &
 \end{array}$$

$\Rightarrow$ 1 solution, pas de solution ou une infinité de solutions.

3. Dans la structure $\mathbb{Z}, .$

$$\begin{array}{llll}
 3x = 9 & 2x = -6 & 2x = 5 & 0x = 0 \\
 x = 3 & x = -3 & x = \frac{5}{2} & E = \mathbb{Z} \\
 E = \{3\} & E = \{-3\} & E = \emptyset &
 \end{array}$$

$\Rightarrow$ 1 solution, pas de solution ou une infinité de solutions.

4. Dans le groupe $\mathbb{Z}$, $+$

$$\begin{array}{ll} x + 3 = 7 & x + 5 = 1 \\ x = 7 - 3 & x = 1 - 5 \\ x = 4 & x = -4 \\ E = \{4\} & E = \{-4\} \end{array}$$

$\Rightarrow 1$ solution.

5. Dans le groupe $\mathbb{Q}$, $+$

$$\begin{array}{lll} x + 3 = 7 & x + 5 = 1 & \frac{3}{4} + x = \frac{1}{4} \\ x = 7 - 3 & x = 1 - 5 & x = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \\ x = 4 & x = -4 & x = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \\ E = \{4\} & E = \{-4\} & E = \left\{-\frac{1}{2}\right\} \end{array}$$

$\Rightarrow 1$ solution.

6. Dans le groupe $\mathbb{Q}_0$, $\cdot$

$$\begin{array}{lll} 3x = 9 & 2x = -6 & 2x = 5 \\ x = 3 & x = -3 & x = \frac{5}{2} \\ E = \{3\} & E = \{-3\} & E = \left\{\frac{5}{2}\right\} \end{array}$$

$\Rightarrow 1$ solution.

Conclusion :

C'est seulement dans un groupe que les équations de la forme $a * x = b$ et $x * a = b$ admettent une et une seule solution.

En général :

Considérons les équations $a * x = b$ et $x * a = b$ dans le groupe $G, *$

1. $a * x = b$

Avec a' nous effectuons l'opération $*$ à gauche :

$$a' * a * x = a' * b$$

Puisque $G, *$ est un groupe, l'opération $*$ est associative :

$$(a' * a) * x = a' * b$$

Mais $a' * a = n$

donc $n * x = a' * b$

Et puisque $n * x = x$, on a

$$x = a' * b$$

$$2. \quad x * a = b \Rightarrow x * a * a' = b * a'$$

$$x * (a * a') = b * a'$$

$$x * n = b * a'$$

$$x = b * a'$$

Conclusion :

Dans un groupe $G, *$

les équations $a * x = b$ et $x * a = b$

admettent chacune une et une seule solution :

$$x = a' * b \text{ et } x = b * a'$$

5. Applications pratiques

1. Résolution d'une équation dans $\mathbb{Z}, +$

$$2 + x - 6 = 9$$

$$x - 6 = -2 + 9 \quad \text{opération } + \text{ à gauche avec } -2$$

$$x = -2 + 9 + 6 \quad \text{opération } + \text{ à droite avec } 6$$

$$x = 13$$

$$E = \{13\}$$

2. Résolution d'une équation dans $\mathbb{Q}_0, .$

$$5x = 7$$

$$x = \frac{1}{5} \times 7 \quad \text{opération } . \text{ à gauche avec } \frac{1}{5}$$

$$x = \frac{7}{5}$$

$$V = \left\{ \frac{7}{5} \right\}$$

$\mathbb{Z}$, $+$ et $\mathbb{Q}_0$, $\cdot$ étant des groupes commutatifs, il n'est pas nécessaire de distinguer les opérations à droite ou à gauche. Pratiquement, on procède de la façon suivante :

$$\begin{aligned} 1 + 3x + 2 &= 8 \\ 3x &= 8 - 1 - 2 \\ 3x &= 5 \\ x &= \frac{5}{3} \\ E &= \left\{ \frac{5}{3} \right\} \end{aligned}$$

Exercices

1. Démontrez que dans un groupe $G, *$

$$\begin{aligned} c * a = c * b &\Rightarrow a = b \\ a * c = b * c &\Rightarrow a = b \end{aligned}$$

2. Démontrez que dans un groupe $G, *$

$$a = b \Leftrightarrow p * a * q = p * b * q$$

3. Simplifiez : $(a')'$.

4. Si $a * b = n = b * a$, comment appelez-vous a et b dans le groupe $G, *$?

5. Quand peut-on dire que $a * a = a$ dans un groupe $G, *$?

6. Dans un groupe $G, *$, simplifiez :

- 1) $a * a' * a$
- 2) $a * b * b' * a'$
- 3) $a * a' * b' * b * c$
- 4) $a * b' * a' * b$
- 5) $a' * b * c * b' * c * a$
- 6) $a * b * a' * b' * c'$

7. Dans un groupe commutatif $G, *$, simplifiez :

- 1) $a' * b * c = a' * d * c$
- 2) $a * b * c = a * b * c'$
- 3) $a * b' * c = b * b' * c' * a$
- 4) $a * b * c' = b * c' * a * d$

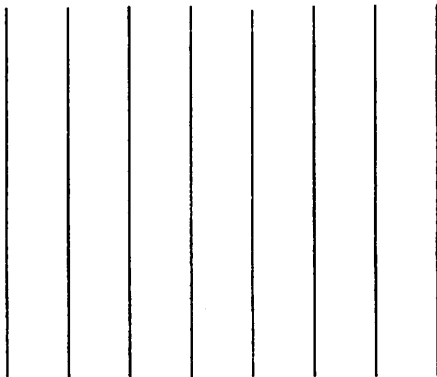
8. Dans un groupe $G, *$, résolvez :

- 1) $a * x = b$ 4) $a * b * x = c$ 7) $a * b' * x = a * b'$
- 2) $x * a = a$ 5) $b * x * c = a$ 8) $a * b * x * c' = a * c'$
- 3) $x * a = n$ 6) $n * a * x = b$ 9) $a * b' * x * c * d' = b' * c * d'$

9. Complétez le tableau par les ensembles des solutions des équations suivantes :

équation	N	Z	Z_0	Z^+	Z^-	Q	Q^+	Q^-
1) $x + 2 = 7$								
2) $x - 3 = 8$								
3) $x + 9 = 3$								
4) $x - 4 = -5$								
5) $x + 7 = 7$								
6) $3x = 7$								
7) $5x = -20$								
8) $-7x = -14$								
9) $2x = -5$								
10) $0x = 0$								
11) $0x = 5$								
12) $2x - 2 = 3x + 6$								
13) $2(x - 3) = 5(2 - x)$								
14) $2x + 5 = 5(x + 1)$								
15) $7x - 2 = 3x + 4$								
16) $8x - 5 = 2x - 35$								
17) $0,2x = 7,5$								
18) $3,6x = -0,18$								
19) $5x = 2x - 3,27$								
20) $\frac{x}{2} = 3$								
21) $\frac{x}{5} = -2$								

$$\begin{aligned}
 22) \quad & \frac{2x}{7} = \frac{3}{7} \\
 23) \quad & \frac{5x}{2} = 0 \\
 24) \quad & \frac{3x}{2} = -\frac{5}{2} \\
 25) \quad & \frac{2x}{5} = \frac{7}{5} \\
 26) \quad & -\frac{7x}{4} = \frac{5}{3}
 \end{aligned}$$

10. Résolvez dans $\mathbb{Z}$, +

$$\begin{aligned}
 1) \quad & -5 + x = 7 \\
 2) \quad & x + 3 = 5 \\
 3) \quad & 6 - x = 15 \\
 4) \quad & -2 - x = -5 \\
 5) \quad & 3 - 7 + x = 2 \\
 6) \quad & 17 + x - 13 = 6 \\
 7) \quad & -15 - x + 2 = -13 \\
 8) \quad & 15 - 12 + x = 13 - 3 \\
 9) \quad & 6 + x - 2 = 17 + 2 \\
 10) \quad & -8 - 4 - x = 16 - 5 \\
 11) \quad & -17 + x - 3 + 4 = 15 + 3 \\
 12) \quad & x - 8 + 5 - 19 = -23 + 8 \\
 13) \quad & 29 - x + 13 - 15 = -5 + 16 \\
 14) \quad & 3x + 5 = 2x - 3 \\
 15) \quad & 5 - 2x = 7 - 3x \\
 16) \quad & 7x - 12 = 2x + 4x - 4 \\
 17) \quad & 5x - 8x - 3 = 3 - 4x \\
 18) \quad & x + a - b = c \\
 19) \quad & -a + x - b = -a + c \\
 20) \quad & a - x + b = a + b + c \\
 21) \quad & x + a - b = c - b + a
 \end{aligned}$$

11. $E = \{a, b, c, d\}$ a) E , * est-il un groupe?b) Simplifiez dans E , *

$$b * c * a \quad a * d * b * c$$

$$d * c * a \quad c * b * c * a$$

$$d * b * d \quad c * a * a * b$$

c) Résolvez dans E , *

$$a * x = d \quad a * x * b = c$$

$$x * c = b \quad a * d * x * b = a * c$$

$$b * x = b \quad c * x * d = d * b$$

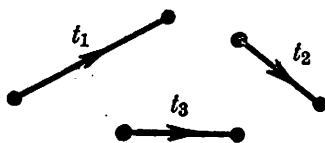
*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

12. Simplifiez :

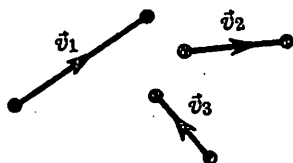
- a) Dans $T, \circ$: $t_1 \circ i \circ t_1^{-1} \circ t_2^{-1} \circ i \circ t_2$
- b) Dans $V, +$: $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3 - \vec{v}_1 - \vec{v}_3$
- c) Dans $\Pi_0, +$: $\vec{a} - \vec{b} + \vec{b} - \vec{c} - \vec{a} + \vec{c} - \vec{d}$
- d) Dans $H_o^0, \circ$: $h_1 \circ h_1^{-1} \circ h_2^{-1} \circ h_2$

13. Résolvez et construisez :

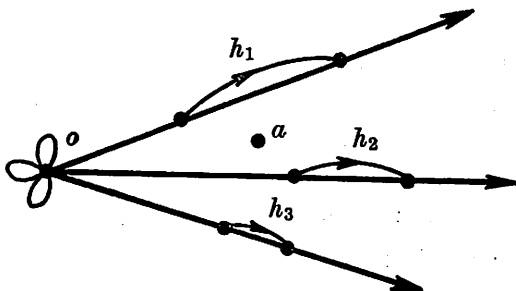
- a) Dans $T, \circ$: $t_1 \circ x = t_2$
 $t_1 \circ t_2 \circ x = t_3$



- b) Dans $V, +$: $\vec{v}_1 + \vec{x} = \vec{v}_3$
 $\vec{v}_1 + \vec{x} - \vec{v}_2 = \vec{v}_3 + \vec{o}$



- c) Dans $H_o^0, \circ$: $h_1 \circ x = h_2$
 $h_1 \circ x \circ h^{-1} = h_3 \circ h_2^{-1}$



CHAPITRE XXXV

ÉQUATIONS ET PROBLÈMES

1. Résolution d'une équation

A. De ce qui précède, nous déduisons aisément que :

1. On peut faire passer un terme d'une équation dans l'autre membre, à condition de changer son signe.
2. On peut multiplier ou diviser les deux membres d'une équation par un même nombre ($\neq 0$).

B. Résolution d'une équation

$$2 \left(\frac{x}{3} + 1 \right) = \frac{2}{5} \left(x - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2}$$

1. Supprimons les parenthèses :

$$\frac{2}{3}x + 2 = \frac{2}{5}x - \frac{2}{15} + \frac{1}{2}$$

2. Réduisons les termes au même dénominateur :

$$\frac{20}{30}x + \frac{60}{30} = \frac{12}{30}x - \frac{4}{30} + \frac{15}{30}$$

3. Chassons le dénominateur en multipliant les deux membres par celui-ci :

$$20x + 60 = 12x - 4 + 15$$

4. Faisons passer les termes en x dans le premier membre, les termes indépendants de x dans le second :

$$20x - 12x = -4 + 15 - 60$$

5. Réduisons :

$$8x = -49$$

6. Divisons :

$$x = -\frac{49}{8}$$

$$E = \left\{ -\frac{49}{8} \right\}$$

7. Vérifions :

1^{er} membre :

$$2 \left(\frac{-\frac{49}{8}}{3} + 1 \right) = 2 \left(-\frac{49}{24} + 1 \right) = 2 \left(-\frac{25}{24} \right) = -\frac{25}{12}$$

2^e membre :

$$\frac{2}{5} \left(-\frac{49}{8} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} = \frac{2}{5} \left(-\frac{147}{24} - \frac{8}{24} \right) + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2}{5} \left(-\frac{155}{24} \right) + \frac{1}{2} = -\frac{31}{12} + \frac{6}{12} = -\frac{25}{12}$$

C. *Application : La transformation de formules*

1. On donne : $S = \frac{b \cdot h}{2}$

On demande : b et h

Résolution : $S = \frac{b \cdot h}{2}$

$$\frac{2S}{2} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$2S = b \cdot h \Rightarrow b = \frac{2S}{h}$$

$$\Rightarrow h = \frac{2S}{b}$$

2. On donne : $e = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

On demande : a

Résolution : $e = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

$$\frac{2e}{2} = \frac{2v_0 t}{2} + \frac{a t^2}{2}$$

$$\begin{aligned}
 2e &= 2v_0 t + at^2 \\
 at^2 &= 2e - 2v_0 t \\
 a &= \frac{2e - 2v_0 t}{t^2}
 \end{aligned}$$

2. Résolution d'un problème

Pour placer une mise à la terre, un électricien utilise les $\frac{3}{8}$ d'une bobine de fil de cuivre. Ensuite, il a encore besoin des $\frac{4}{5}$ du reste. Combien de m de fil de cuivre y avait-il sur la bobine, si, après le travail, il lui reste encore 10 m de fil ?

Résolution :

1. Choix de l'inconnue :

il y avait x m de fil sur la bobine.

2. Mise en équation :

$$\frac{3}{8}x + \frac{4}{5}\left(x - \frac{3}{8}x\right) + 10 = x$$

3. Résolution de l'équation :

$$\begin{aligned}
 \frac{3}{8}x + \frac{4}{5}x - \frac{12}{40}x + 10 &= x \\
 \frac{15}{40}x + \frac{32}{40}x - \frac{12}{40}x + \frac{400}{40} &= \frac{40}{40}x \\
 15x + 32x - 12x + 400 &= 40x \\
 15x + 32x - 12x - 40x &= -400 \\
 -5x &= -400 \\
 x &= 80 \\
 V &= \{ 80 \}
 \end{aligned}$$

4. Réponse : il y avait 80 m de fil sur la bobine.

5. Preuve : $\frac{3}{8} \cdot 80 \text{ m} = 30 \text{ m}$

$$\text{reste : } 80 \text{ m} - 30 \text{ m} = 50 \text{ m}$$

$$\frac{4}{5} \cdot 50 \text{ m} = 40 \text{ m}$$

$$30 \text{ m} + 40 \text{ m} + 10 \text{ m} = 80 \text{ m}.$$

Exercices

1. Résolvez dans Q :

A. 1) $3x - 14 = 5(3x + 4)$

2) $4(5 - 7x) = 33 - 2x$

3) $8(3x - 1) = 5(13 - x)$

4) $5(3x - 1) - 12 = 4(2x - 2)$

5) $-5(2x + 3) = 2(7 - 3x) - 7$

6) $17 - 2(5 - 3x) = 43 + 4(2x - 7)$

7) $19x - 6(3x - 5) = 21 - 2(7x + 8)$

8) $3(7x - 2) + 2(10 - x) = 3(x + 32) - 18$

9) $5(2 - x) - 3(5 + 7x) = 7(3x - 1) - 2(6 - x)$

10) $3x + 2(17x - 12) = 5(2x - 3) - 7(3 - 2x)$

B. 1) $\frac{x}{5} = \frac{3}{5}$

6) $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} + \frac{x}{8} = \frac{5}{6}$

2) $\frac{7x}{4} + 3 = 5$

7) $\frac{7x}{2} + 6 = \frac{4x}{5} - 3$

3) $\frac{5x}{3} - 2 = \frac{3x}{5}$

8) $5 - \frac{2x}{3} = \frac{3x}{5} - \frac{7}{10}$

4) $\frac{x}{2} + 5 = \frac{x}{3} - 3$

9) $8 + \frac{6x}{5} = \frac{4}{3} - 14x + \frac{8}{5}$

5) $\frac{x}{4} - \frac{3}{5} = \frac{x}{2} + \frac{7}{10}$

10) $\frac{2x}{3} - \frac{5x}{6} + 1 = \frac{7x}{4} - \frac{2x}{5} - 5$

C. 1) $\frac{3x - 2}{7} = \frac{x + 5}{7}$

2) $\frac{x + 5}{5} = \frac{x - 3}{7}$

3) $\frac{x - 1}{6} + \frac{x + 1}{4} - 2 = 0$

4) $\frac{2 - 7x}{2} + 3 = \frac{x - 10}{3} - \frac{x + 32}{2}$

5) $\frac{5x - 4}{7} - 14 = \frac{15 - x}{2} - \frac{3x + 4}{4}$

$$6) \frac{2}{5}(5x - 3) = \frac{4}{7}(3x - 4)$$

$$7) \frac{3}{5}(x - 2) + 3 = \frac{2}{3}(x + 3) + \frac{1}{2}$$

$$8) \frac{5t}{3} - 7 \frac{3t - 4}{4} = \frac{9t}{2} - \frac{2(4t - 3)}{3}$$

$$9) \frac{1}{3} \left(\frac{2r}{5} - 4 \right) = \frac{2}{5} \left(4r - \frac{2}{3} \right)$$

$$10) \frac{3}{4} \left(1 - \frac{2y}{5} \right) = \frac{3}{5} \left(1 - \frac{y}{8} \right) + \frac{3y}{10}$$

2. Complétez :

A. $\frac{n_2}{n_1} = \frac{d_1}{d_2}$	n_1	n_2	d_1	d_2
	180	—	52	39
	—	50	12,5	11,5
	156	130	—	6,6
	400	500	22,5	—

B. $R = \rho \frac{l}{s}$	R	ρ	l	s
	—	0,0175	400	5
	135	0,45	—	4,16
	35	0,148	336	—
	120	—	448	1,568

C. $T = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$	S	B	b	h
	—	22,38	15,49	8,25
	840	—	31,4	25
	17,58	6,32	—	4
	100,98	32,16	27,24	—

$D. I = \frac{E}{Ri + Ru}$	I	E	Ri	Ru
	—	11,2	0,4	6
	15	—	0,12	7,6
	24	210	—	8,5
	0,3	1,5	0,5	—

$E. s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$	s	v_0	a	t
	—	13	0,44	4
	400	—	0,2	2,5
	303	20	—	12

3. Transformez les expressions suivantes et trouvez :

$$h \text{ dans } S = \frac{b \cdot h}{2l}$$

$$m \text{ dans } pV = mRT$$

$$R \text{ dans } I = \frac{E}{R}$$

$$a \text{ dans } e = v_0 t - \frac{1}{2} at^2$$

$$h \text{ dans } I = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

$$T \text{ dans } t = \frac{5}{9} (T - 32)$$

$$a \text{ dans } v = v_0 + at$$

$$R_2 \text{ dans } \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$n \text{ dans } v = \frac{2\pi r n}{60}$$

$$R_1 \text{ dans } P = \frac{R_1 - R_2}{2R_1} \cdot L$$

4. En diminuant la longueur d'un rectangle de 15 m et en ajoutant 15 m à sa largeur, on forme un carré. Déterminez les dimensions du rectangle, sachant que sa longueur est égale à quatre fois sa largeur.
5. A l'occasion de la Saint-Nicolas, un professeur distribue des friandises aux élèves de sa classe. S'il en donne 5 à chacun, il lui en restera 20. Par contre, s'il en donne 6, un élève n'en recevra pas. De combien d'élèves se compose cette classe et combien de friandises le professeur a-t-il distribuées ?

6. La collection de points Artis de Jean en compte 80 de plus que celle de Pierre. Si Jean en donnait 20 à Pierre, il aurait encore le double des points de ce dernier. Combien de points ont-ils chacun ?
7. Sur un terrain de football, on compte 17 293 spectateurs. Une place debout coûte 40 F et une tribune assise 80 F. Le trésorier enregistre une recette de 785 320 F. Combien de spectateurs y avait-il dans les tribunes ?
8. Dans la classe de 2^e A, 10 élèves sont âgés de 12 ans, 6 de 13 ans et 2 de 14 ans. Le professeur a 37 ans. Dans combien d'années le total des âges des élèves sera-t-il égal à 8 fois l'âge du professeur ?
9. Le quotient de deux nombres égale 7 et le reste 42. Si leur différence égale 726, quels sont ces deux nombres ?
10. On prend un nombre de deux chiffres. La somme de ses chiffres égale 14. En inversant l'ordre des chiffres, on obtient un nombre inférieur de 36 unités au nombre initial. Quel est ce nombre ?
11. La somme du tiers, du quart et du sixième d'un nombre égale 75. Quel est ce nombre ?
12. Quel est le nombre dont le quart augmenté de 120, égale les $\frac{2}{3}$ augmentés de 90 ?
13. Partagez 372 en deux parties de telle façon que les $\frac{5}{6}$ de la première égalent les $\frac{3}{4}$ de la seconde, augmentés de 63.
14. Un joueur perd les $\frac{3}{7}$ de son argent. Ensuite, il gagne les $\frac{7}{12}$ de ce qu'il lui reste. Sachant qu'il a maintenant 133 F, quel était son avoir initial ?

15. D'une planche, un menuisier coupe $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{5}$ de la longueur initiale.
Il lui reste 0,4 m de plus que la moitié. Quelle était la longueur initiale de la planche?
16. Partagez la somme de 150 F entre deux personnes de telle façon que le $\frac{1}{3}$ de la seconde partie soit de 15 F supérieure au $\frac{1}{4}$ de la première.
17. La somme du tiers, du quart et du cinquième d'un nombre égale la moitié de ce nombre, augmentée de 34. Quel est ce nombre?
18. Un élève dispose d'un certain temps pour exécuter un travail.
Il consacre $\frac{1}{5}$ de ce temps à la réalisation d'un croquis, $\frac{1}{10}$ à la préparation du travail, $\frac{4}{7}$ à la fabrication de la pièce et $\frac{1}{10}$ à la finition. Quel temps lui avait été accordé, si, à la fin du travail, il lui reste encore deux minutes?
19. Une directrice d'école envisage l'achat de 20 machines à coudre. En discutant le prix, le vendeur lui accorde une ristourne de 20 % au lieu de 15 %. Sachant qu'elle débourse ainsi 4 500 F en moins, quel est le prix d'une machine à coudre?
20. La somme de deux nombres égale 525. En diminuant de 36 les $\frac{5}{7}$ du premier et en ajoutant 45 aux $\frac{3}{5}$ du second, on trouverait une somme de 356. Quels sont ces nombres?
21. La somme de quatre nombres naturels consécutifs égale 1 690. Trouvez ces nombres.
22. On vend $\frac{1}{4}$ d'une bobine de fil à 9 F le m, $\frac{1}{5}$ de la bobine plus

30 m à 8 F le m et le reste à 7 F le m. Si la vente rapporte 1 570 F, combien de m de fil contenait la bobine?

23. Un nombre est composé de 3 chiffres. La somme de ses chiffres égale 11. Le chiffre des dizaines égale les $\frac{2}{3}$ du chiffre des unités. En inversant l'ordre des chiffres, le nombre augmente de 495. Quel est ce nombre?

24. On a un rectangle ABCD. On prolonge le côté AB de 2 cm jusqu'à E, et le côté DC de 3 cm jusqu'à F. On a alors $AE = CF$. Quelle est la longueur du côté AD?

25. On a un rectangle ABCD. On prolonge le côté AB de 2 cm jusqu'à E, et le côté DC de 3 cm jusqu'à F. On a alors $AE = CF$. Quelle est la longueur du côté AD?

26. On a un rectangle ABCD. On prolonge le côté AB de 2 cm jusqu'à E, et le côté DC de 3 cm jusqu'à F. On a alors $AE = CF$. Quelle est la longueur du côté AD?

27. On a un rectangle ABCD. On prolonge le côté AB de 2 cm jusqu'à E, et le côté DC de 3 cm jusqu'à F. On a alors $AE = CF$. Quelle est la longueur du côté AD?

28. On a un rectangle ABCD. On prolonge le côté AB de 2 cm jusqu'à E, et le côté DC de 3 cm jusqu'à F. On a alors $AE = CF$. Quelle est la longueur du côté AD?

29. On a un rectangle ABCD. On prolonge le côté AB de 2 cm jusqu'à E, et le côté DC de 3 cm jusqu'à F. On a alors $AE = CF$. Quelle est la longueur du côté AD?

30. On a un rectangle ABCD. On prolonge le côté AB de 2 cm jusqu'à E, et le côté DC de 3 cm jusqu'à F. On a alors $AE = CF$. Quelle est la longueur du côté AD?

31. On a un rectangle ABCD. On prolonge le côté AB de 2 cm jusqu'à E, et le côté DC de 3 cm jusqu'à F. On a alors $AE = CF$. Quelle est la longueur du côté AD?

32. On a un rectangle ABCD. On prolonge le côté AB de 2 cm jusqu'à E, et le côté DC de 3 cm jusqu'à F. On a alors $AE = CF$. Quelle est la longueur du côté AD?

33. On a un rectangle ABCD. On prolonge le côté AB de 2 cm jusqu'à E, et le côté DC de 3 cm jusqu'à F. On a alors $AE = CF$. Quelle est la longueur du côté AD?

CHAPITRE XXXVI

PROPORTIONS

1. Notion

Sachant que la partition, résultant de la relation d'équivalence dans l'ensemble Q' des fractions rationnelles fournit des classes constituées par des fractions égales, toute égalité de deux fractions sera appelée proportion.

$$\begin{array}{l} \text{Si } \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q' \text{ et } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \\ \text{alors } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ est une proportion} \end{array}$$

ce qui se lit : a est à b comme c est à d.

2. Notations

$\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont les fractions rationnelles

a, b, c, d sont les termes

a, d sont les extrêmes

b, c sont les moyens

a, c sont les antécédents

b, d sont les conséquents

de la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

3. Propriété fondamentale

En appliquant la propriété des fractions égales aux proportions, nous pouvons écrire :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \frac{c \cdot b}{d \cdot b} \Rightarrow a \cdot d = c \cdot b$$

Dans une proportion, le produit des extrêmes égale le produit des moyens.

Réciproque :

Quatre nombres a, b, c, d forment une proportion si le produit des extrêmes égale le produit des moyens.

Conclusion :

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{Q}_0 : \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Conséquence :

Dans toute proportion, on peut intervertir l'ordre des extrêmes, intervertir l'ordre des moyens, renverser les fractions.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \\ \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \\ \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \\ \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \\ \frac{c}{a} = \frac{d}{b} \\ \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \end{array} \right.$$

4. Quatrième proportionnelle

Dans la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$,

x est la quatrième proportionnelle.

La quatrième proportionnelle à trois nombres donnés est le quatrième terme d'une proportion dont les premiers termes sont les nombres donnés.

De la propriété fondamentale, nous déduisons :

$$a \cdot x = b \cdot c \Rightarrow x = \frac{b \cdot c}{a}$$

Exemple : Calculer la quatrième proportionnelle aux nombres :

1) 5, 7, 15

$$\frac{5}{7} = \frac{15}{x} \Rightarrow x = \frac{7 \times 15}{5} = 21$$

2) 8, 3, 7

$$\frac{8}{3} = \frac{7}{x} \Rightarrow x = \frac{21}{8}$$

5. Moyenne proportionnelle

Une proportion, dans laquelle les moyens sont égaux, peut s'écrire :

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

Le terme moyen d'une telle proportion est appelé moyenne proportionnelle.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow b^2 = a \cdot c$$

Exemple : $\frac{2}{4} = \frac{4}{8} \Rightarrow 4^2 = 2 \times 8$

Exercices

1. Ecrivez les égalités suivantes sous forme de proportions :

$$2 \times 10 = 5 \times 4$$

$$56 \times 3 = 8 \times 21$$

$$23,4 \times 8,4 = 1,2 \times 163,8$$

2. Calculez la quatrième proportionnelle aux nombres :

a) 9, 7 et 35

b) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{7}$ et $\frac{4}{9}$

3. Calculez la moyenne proportionnelle aux nombres :

3 et 7; $\frac{4}{25}$ et $2\frac{1}{4}$

4. Calculez la valeur de x dans les proportions suivantes :

1) $\frac{18}{4} = \frac{27}{x}$

5) $\frac{21 + x}{9} = \frac{51}{17}$

2) $\frac{1,6}{6,4} = \frac{x}{9,2}$

6) $\frac{6}{17 + x} = \frac{5}{27 - x}$

3) $\frac{21}{x} = \frac{28}{96}$

7) $\frac{64 - x}{13} = \frac{48 + x}{15}$

4) $\frac{x}{56} = \frac{20}{35}$

8) $\frac{9 + x}{3 + x} = \frac{9 + 2x}{2x}$

CHAPITRE XXXVII

INÉQUATIONS

1. Notion

$3 + 4 > 5$ est une affirmation vraie. C'est une inégalité.

Mais écrire $3 + ? > 5$ revient à poser la question : « Quel nombre faut-il ajouter à 3 pour que leur somme soit plus grande que 5 ? »

Remplaçons ? par x et nous obtenons

$$3 + x > 5$$

Maintenant, la question s'énonce : « Par quel nombre doit-on remplacer x pour que l'expression $3 + x > 5$ soit vraie ? »

Une telle expression est appelée inéquation.

$$\underbrace{3 + x}_{1^{\text{er}} \text{ membre}} > \underbrace{5}_{2^{\text{e}} \text{ membre}}$$

2. Résolution d'inéquations

Dans $3 + x > 5$, x est l'inconnue.

L'ensemble $E = \{x \mid x > 2\}$ des valeurs de x pour lesquelles l'inéquation est satisfaite, est appelé ensemble des solutions ou des racines de l'inéquation.

Chercher E , c'est résoudre l'inéquation.

La résolution d'une inéquation est basée sur les propriétés suivantes.

3. Propriétés

1.	$-5 < -2$	$\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$
	$-5 + 3 ? -2 + 3$	$\frac{3}{4} - \frac{1}{5} ? \frac{2}{3} - \frac{1}{5}$
	$-2 < 1$	$\frac{11}{20} ? \frac{7}{15}$
		$\frac{33}{60} > \frac{28}{60}$

On peut ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité sans en changer le sens.

$\forall a, b, c \in \mathbb{Q} :$

$$\begin{array}{l} a > b \Leftrightarrow a + c > b + c \\ a < b \Leftrightarrow a + c < b + c \end{array}$$

Conséquence :

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ a + b > c \\ a + b - b > c - b \\ a > c - b \uparrow \end{array}$$

On peut faire passer un terme d'un membre dans l'autre, à condition de changer son signe.

$$\begin{array}{ll} 2. & 8 > 6 \\ 8 \times 3 & ? 6 \times 3 \\ 24 & > 18 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 8 > 6 \\ 8 : 2 & ? 6 : 2 \\ 4 & > 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} -\frac{2}{3} < \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} < \frac{1}{2} \\ \left(-\frac{2}{3}\right) \left(-\frac{1}{4}\right) & ? \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \\ \frac{1}{6} & > -\frac{1}{8} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \left(-\frac{2}{3}\right) : \left(-\frac{1}{4}\right) & ? \frac{1}{2} : \left(-\frac{1}{4}\right) \\ \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{4}{1}\right) & ? \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{4}{1}\right) \\ \frac{8}{3} & > -\frac{4}{2} \\ \frac{8}{3} & > -2 \end{array}$$

Si on multiplie ou si on divise les deux membres d'une inégalité par un nombre positif, on obtient une inégalité de même sens.

On obtient une inégalité de sens inverse, si on les multiplie ou si on les divise par un nombre négatif.

$\forall a, b, c \in \mathbb{Q} :$

$\begin{aligned} a > b &\Leftrightarrow ac > bc \text{ si } c > 0 \\ a > b &\Leftrightarrow ac < bc \text{ si } c < 0 \end{aligned}$
--

Conséquence :

$$a > b \Leftrightarrow -a < -b$$

$$a < b \Leftrightarrow -a > -b$$

Si on change les signes des termes d'une inégalité, il faut aussi changer le sens de l'inégalité, car cela revient à multiplier les deux membres par (-1) .

4. Méthode de résolution

Exemple 1.

$$8 + 4(2x - 1) > 5(3x + 5)$$

$$8 + 8x - 4 > 15x + 25$$

$$8x - 15x > 25 - 8 + 4$$

$$-7x > 21$$

$$x < -3$$

$$E = \{ x \mid x < -3 \}$$



Exemple 2.

$$\frac{1}{4}(2x - 5) + 3 \leq \frac{1}{2}(3x - 0,5) + 1$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{5}{4} + 3 \leq \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} + 1$$

$$\frac{2x}{4} - \frac{5}{4} + \frac{12}{4} \leq \frac{6x}{4} - \frac{1}{4} + \frac{4}{4}$$

$$2x - 5 + 12 \leq 6x - 1 + 4$$

$$2x - 6x \leq -1 + 4 + 5 - 12$$

$$-4x \leq -4$$

$$x \geq 1$$

$$E = \{ x \mid x \geq 1 \}$$



Exercices

Résolvez :

- A. 1) $x + 3 < 8$ 6) $4x < 12$ 11) $5x \geq -8$
 2) $x - 1 \geq 4$ 7) $2x \leq 2$ 12) $-3x \leq 7$
 3) $x + 6 < 9$ 8) $-3x \leq 12$ 13) $2x < -9$
 4) $x - 4 \geq 7$ 9) $-2x \geq -8$ 14) $-3x < -16$
 5) $3 + x < -6$ 10) $-4x < -16$ 15) $-\frac{1}{2}x > -4$

- B. 1) $5x - 1 < 9$ 6) $4x + 2 < 6(x - 4)$
 2) $3x - 1 \geq 4x$ 7) $5x - 2 - (3x + 1) \geq 7(x - 1)$
 3) $7x + 4 < -24$ 8) $2 \leq 7 - 3(x - 4) + 2x$
 4) $3x + 2 \leq 5x + 4$ 9) $(3x - 2) - 2(5x - 6) < 7$
 5) $5x - 2 + 4x > 4$ 10) $2 - (4x - 1) > 4(5x - 2) + 6$

- C. 1) $x + 4 < \frac{x}{2} - 1$
 2) $2 - 5x < \frac{x}{3} + 2$
 3) $\frac{4x}{5} - 2 < \frac{3x}{10} + 6$
 4) $\frac{5x}{4} - 2 + \frac{x}{3} \leq \frac{4}{5} - 3x + \frac{1}{4}$
 5) $\frac{2x}{5} - 6 + \frac{4x}{2} - 1 < 7 + \frac{1}{2}(4x - 3) + \frac{1}{2}$
 6) $0,2x + \frac{1}{2} + 1,5x < \frac{x}{2} - 0,4 + 1,25x$
 7) $2\left(\frac{3x}{7} - 2\right) - 3\left(\frac{5x}{4} + 5\right) < 2$
 8) $\frac{3}{4}\left(\frac{2x}{5} - 4\right) < 3 + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{3} - 6\right)$
 9) $\frac{1}{2}(x - 1) \geq 1 - \frac{4}{5}\left(\frac{3x}{2} - 1\right)$
 10) $\frac{1}{4}(0,25x - 5) \geq 7 - \frac{3}{8}(0,5x - 2)$

CHAPITRE XXXVIII

PERPENDICULARITÉ

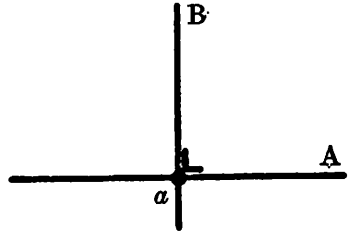
1. Perpendiculaire

$A \perp B$ ou $B \perp A$

A est la perpendiculaire sur
B en a .

B est la perpendiculaire sur
A en a .

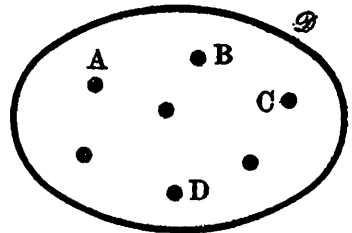
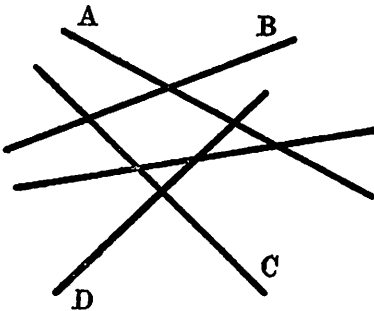
a est le pied de la perpendiculaire.



2. Direction

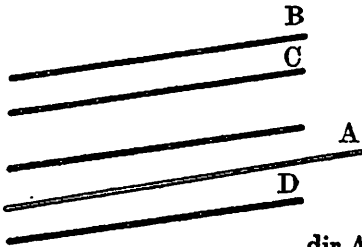
1. $\mathcal{D}$ est l'ensemble infini de toutes les droites de Π .

$$\mathcal{D} = \{ X \mid X \text{ est une droite de } \Pi \}$$

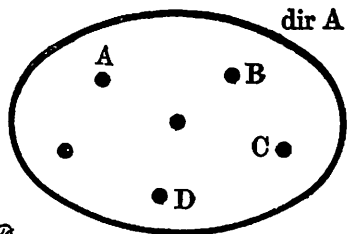


2. $\text{dir } A$ est l'ensemble infini de toutes les droites parallèles à A.

$$\text{dir } A = \{ y \mid y \in \mathcal{D} \text{ et } y \parallel A \}$$



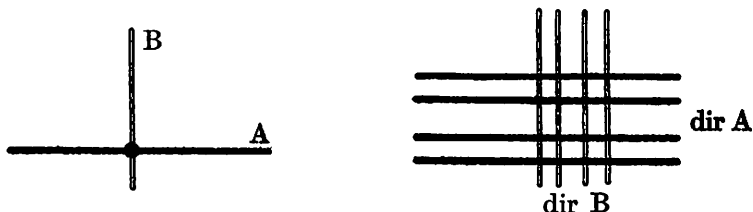
$$\text{dir } A \subset \mathcal{D}$$



3. Chaque direction est une partition de Π (axiome d'Euclide).

3. Perpendicularité de dir A et dir B

$$1. A \perp B \Leftrightarrow \text{dir } A \perp \text{dir } B$$



$$A \perp B \Leftrightarrow A \perp \text{dir } B \Leftrightarrow B \perp \text{dir } A$$

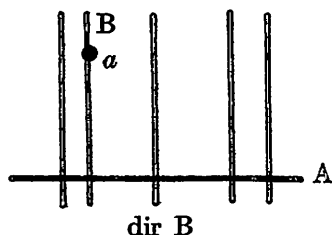
$$A \perp B \Leftrightarrow \text{dir } A \perp B \Leftrightarrow \text{dir } B \perp A$$

2. A une dir A correspond une et une seule dir B $\perp$ dir A.

4. Théorèmes

1. Par un point, on peut faire passer une perpendiculaire à une droite donnée, et une seule.

Par $a \in \Pi$, on peut mener une et une seule droite $B \perp A \in \mathcal{D}$



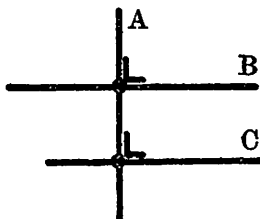
car il existe une seule dir B $\perp$ A,

dir B est une partition de Π

et par a passe une seule droite $\in$ dir B et $\perp$ A.

2. Lorsqu'une droite est perpendiculaire à une deuxième, elle est perpendiculaire à toute droite parallèle à celle-ci.

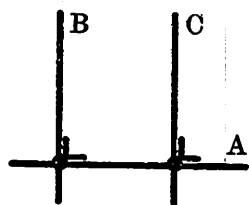
$$\left. \begin{array}{l} A \perp B \\ B \parallel C \end{array} \right\} \Rightarrow A \perp C$$



$$\left. \begin{array}{l} \text{car } B \parallel C \Rightarrow \text{dir } B = \text{dir } C \\ A \perp B \Rightarrow A \perp \text{dir } B \end{array} \right\} \Rightarrow A \perp \text{dir } C \Rightarrow A \perp C$$

3. Deux droites perpendiculaires à une même troisième, sont parallèles entre elles.

$$\left. \begin{array}{l} B \perp A \\ C \perp A \end{array} \right\} \Rightarrow B \parallel C$$



$$\left. \begin{array}{l} \text{car } B \perp A \Rightarrow \text{dir } B \perp \text{dir } A \\ C \perp A \Rightarrow \text{dir } C \perp \text{dir } A \end{array} \right\} \Rightarrow \text{dir } B = \text{dir } C \Rightarrow B \parallel C$$

5. Composition des relations « ... $\perp$... » et « ... $\parallel$... »

$\left. \begin{array}{l} A \parallel B \\ B \parallel C \end{array} \right\} \Rightarrow A \parallel C$		$\parallel \circ \parallel \Rightarrow \parallel$
$\left. \begin{array}{l} A \perp B \\ B \parallel C \end{array} \right\} \Rightarrow A \perp C$		$\parallel \circ \perp \Rightarrow \perp$
$\left. \begin{array}{l} A \parallel B \\ B \perp C \end{array} \right\} \Rightarrow A \perp C$		$\perp \circ \parallel \Rightarrow \perp$
$\left. \begin{array}{l} A \perp B \\ B \perp C \end{array} \right\} \Rightarrow A \parallel C$		$\perp \circ \perp \Rightarrow \parallel$

6. Angle droit

Un angle droit est un angle dont les côtés appartiennent à des directions perpendiculaires entre elles.

$$\begin{aligned} d = 1 \text{ dr.} & \Leftrightarrow \text{dir } A \perp \text{rich } B \\ & \Leftrightarrow A \perp B \\ & \Leftrightarrow B \perp A \end{aligned}$$



Exercices

1. Quelles sont les propriétés des relations suivantes ?

$$R_1 : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} : \langle \dots // \dots \rangle$$

$$R_2 : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} : \langle \dots \perp \dots \rangle$$

2. A l'aide d'une règle et d'une équerre, construisez cinq droites parallèles. Sur quelle propriété vous basez-vous ?

3. Vrai ou faux ?

$$A // B \Rightarrow \text{dir } A \cap \text{dir } B = \text{dir } A = \text{dir } B$$

$$A \nparallel B \Rightarrow \text{dir } A \cap \text{dir } B = \emptyset$$

4. Montrez que $\left. \begin{array}{l} A // B \\ C \perp A \\ D \perp B \end{array} \right\} \Rightarrow C // D$

Énoncez la propriété.

5. Tout parallélogramme dont un angle est droit est un rectangle. Démontrez.

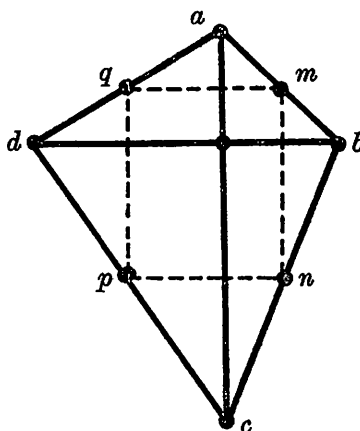
6. Tout trapèze dont un angle est droit a un deuxième angle droit. Démontrez.

7. On donne :

$$ac \perp bd$$

m, n, p, q milieux de $[ab], [bc], [cd], [da]$.

Démontrez que $mnpq$ est un rectangle.



8. Complétez et démontrez :

$$\begin{array}{ll}
 A // B // C \Rightarrow A \dots C & A \perp B \perp C \perp D \Rightarrow A \dots D \\
 A // B \perp C \Rightarrow A \dots C & A // B // C \perp D \Rightarrow A \dots D \\
 A \perp B // C \Rightarrow A \dots C & A // B \perp C // D \Rightarrow A \dots D \\
 A \perp B \perp C \Rightarrow A \dots C & A \perp B // C \perp D \Rightarrow A \dots D \\
 & A \perp B \perp C // D \Rightarrow A \dots D \\
 & A // B \perp C \perp D \Rightarrow A \dots D
 \end{array}$$

9. Complétez le tableau par $\perp$ ou $//$:

$A \perp B // C$				$A \perp B \perp C // D$					$A \perp B // C \perp D // E$					
	A	B	C		A	B	C	D		A	B	C	D	E
A				A					A					
B				B					B					
C				C					C					
				D					D					
									E					

SYMÉTRIE ORTHOGONALE

1. Notion

Soient une droite $A \in \mathcal{D}$ et un point $a \in \Pi$.

Par a , menez la droite $B \perp A$.

$$A \cap B = \{ b \}$$

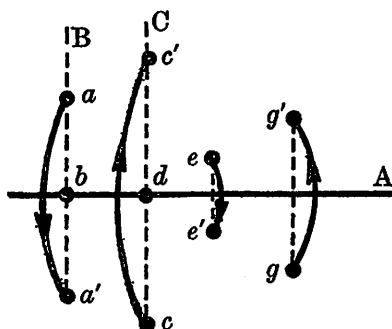
Construisez a' de telle façon que $(a, b) \uparrow (b, a')$

Soit un autre point $c \in \Pi$.

Par c , menez la droite $C \perp A$.

$$A \cap C = \{ d \}$$

Construisez c' de telle façon que $(c, d) \uparrow (d, c')$



On peut répéter la même construction pour tous les points de Π . L'ensemble infini $\{ (a, a'), (c, c'), (e, e'), (g, g') \dots \}$ étant une relation entre les points de Π est appelé

symétrie orthogonale d'axe A .

Nous écrivons $S_A : \Pi \rightarrow \Pi = \{ (a, a'), (c, c'), (e, e'), (g, g') \dots \}$

A est l'axe de symétrie.

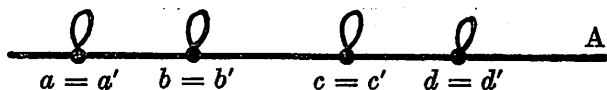
a' est l'image de a .

2. Étude approfondie

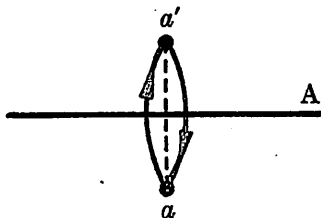
1. Dans la symétrie orthogonale, de chaque point de Π , il part une et une seule flèche et en chaque point de Π , il arrive une et une seule flèche.

La symétrie orthogonale est une permutation de Π .

2. Si $a \in A$, on a $a' = a$ et tous les points de A sont des points fixes de la permutation.



3. Si a' est l'image de a , réciproquement a est aussi l'image de a' .



La réciproque d'une symétrie S_A est la même symétrie, soit of

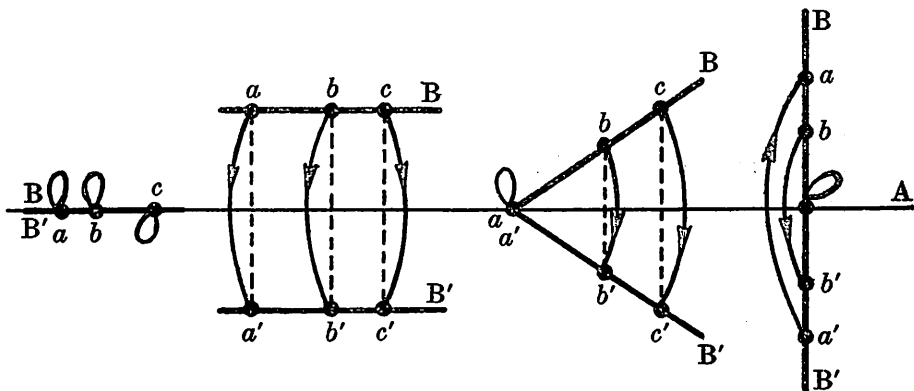
$$S_A^{-1} = S_A$$

4. A est la médiatrice de $[aa']$ car $aa' \perp A$ et $(a, b) \uparrow (b, a')$.
 A est donc la médiatrice de $[aa']$ si a et a' sont symétriques l'un de l'autre par S_A .

3. Image d'une partie de Π par symétrie orthogonale

A. D'une droite

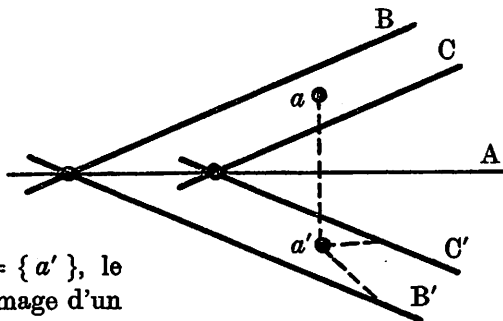
L'image d'une droite par symétrie orthogonale est une droite.



Nous admettons cette propriété sans démonstration.

B. De deux droites parallèles

Les images de deux droites parallèles par symétrie orthogonale sont deux droites parallèles.



$$B \parallel C \Rightarrow B' \parallel C'$$

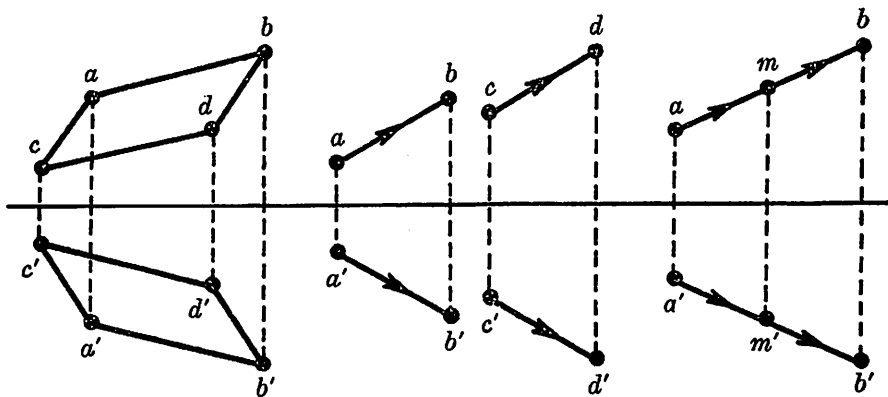
car, si $B' \cap C' = \{a'\}$, le point a' serait l'image d'un

point de B et d'un point de C.

Ceci est impossible, car a' est l'image d'un seul point a de Π et $B \cap C = \emptyset$.

Donc $B' \cap C' = \emptyset$, soit $B' \parallel C'$.

Conséquences :



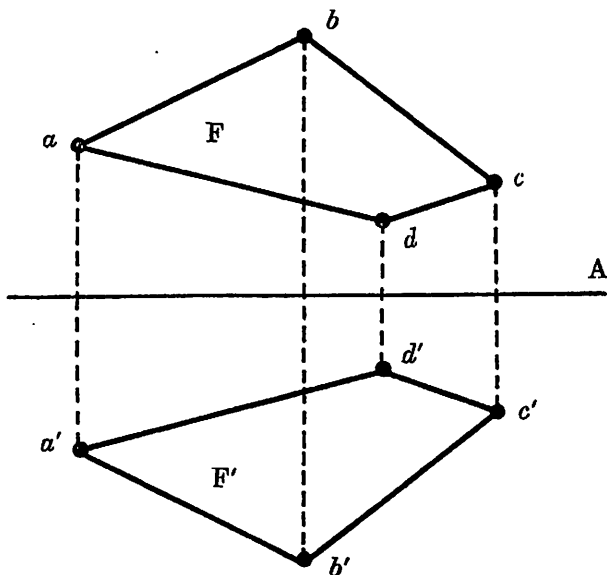
$$\begin{aligned} ab \parallel cd &\Rightarrow a'b' \parallel c'd' \\ ac \parallel bd &\Rightarrow a'c' \parallel b'd' \end{aligned}$$

$$(a, b) \uparrow (c, d) \Rightarrow (a', b') \uparrow (c', d')$$

$$\begin{aligned} (a, m) \uparrow (m, b) &\Rightarrow \\ (a', m') \uparrow (m', b') \end{aligned}$$

1. L'image d'un parallélogramme par symétrie orthogonale est un parallélogramme.
2. La symétrie orthogonale conserve l'équipollence.
3. La symétrie orthogonale conserve le milieu.

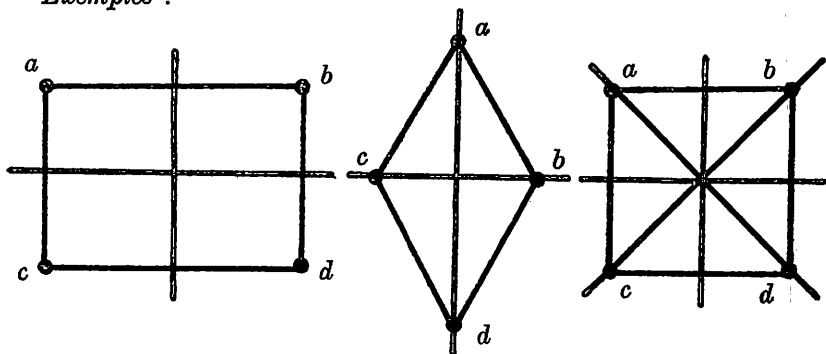
C. D'une figure quelconque

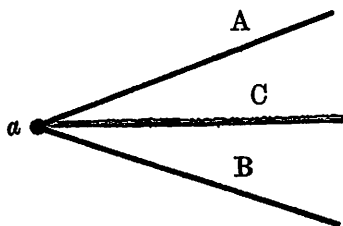
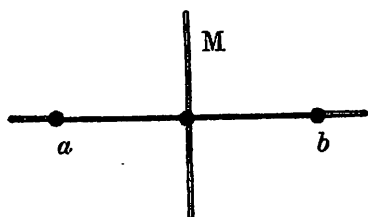


4. Axes de symétrie d'une figure

Lorsque, par symétrie par rapport à une droite A, une figure est sa propre image, cette droite A est appelée axe de symétrie de la figure.

Exemples :





Un segment $[ab]$ a deux axes de symétrie :

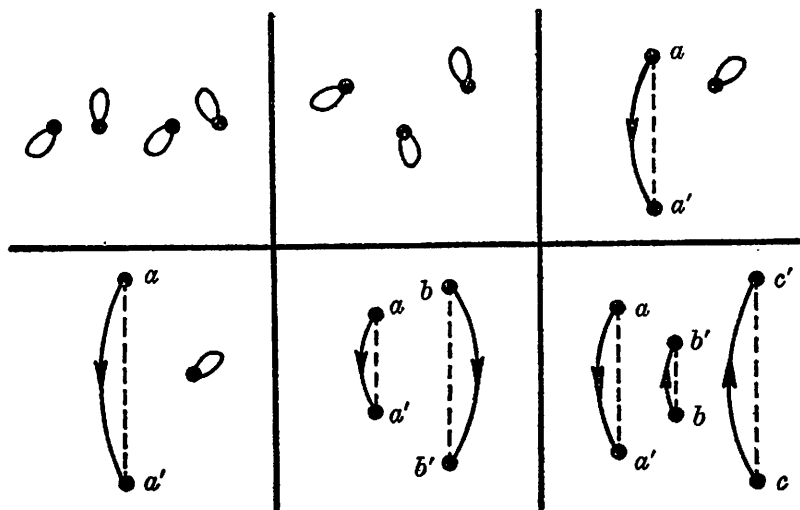
1. la médiatrice M de $[ab]$
2. la droite ab .

Un angle a un axe de symétrie, qui est la bissectrice de l'angle.

$[ac]$ est la bissectrice de $\angle$, si $[aA]$ a comme image $[aB]$ par rapport à $[aC]$.

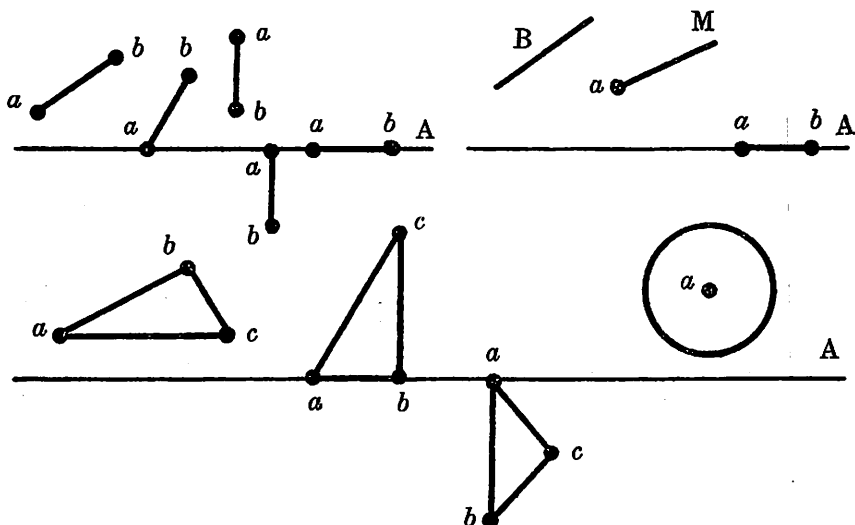
Exercices

1. Examinez si les couples suivants appartiennent à une même symétrie.



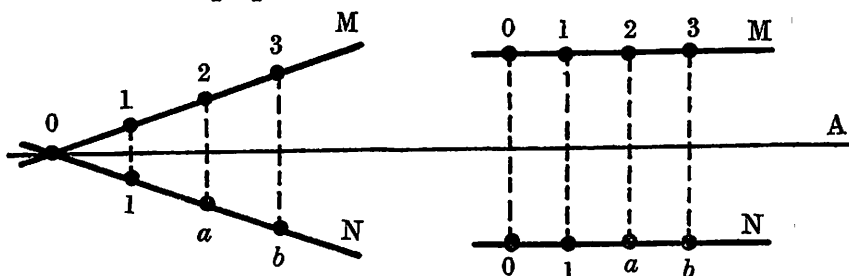
2. Montrez que l'image par symétrie d'un parallélogramme est un nouveau parallélogramme.

3. Dessinez les images par S_A de :

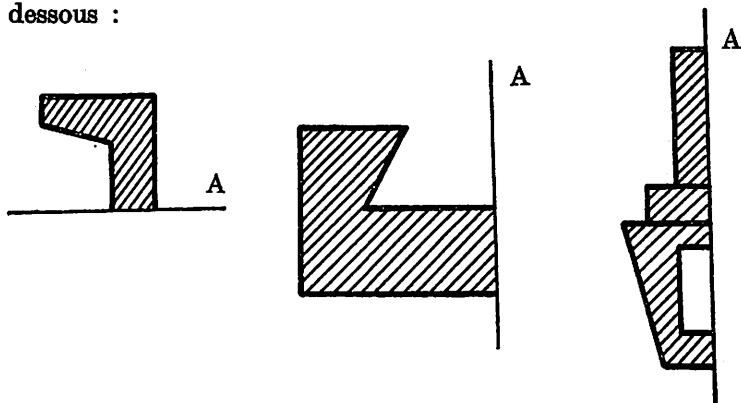


4. Quelles sont les abscisses de a et de b si $S_A(M) = N$?

Énoncez la propriété.



5. Sachant que A est l'axe de symétrie, complétez les figures ci-dessous :



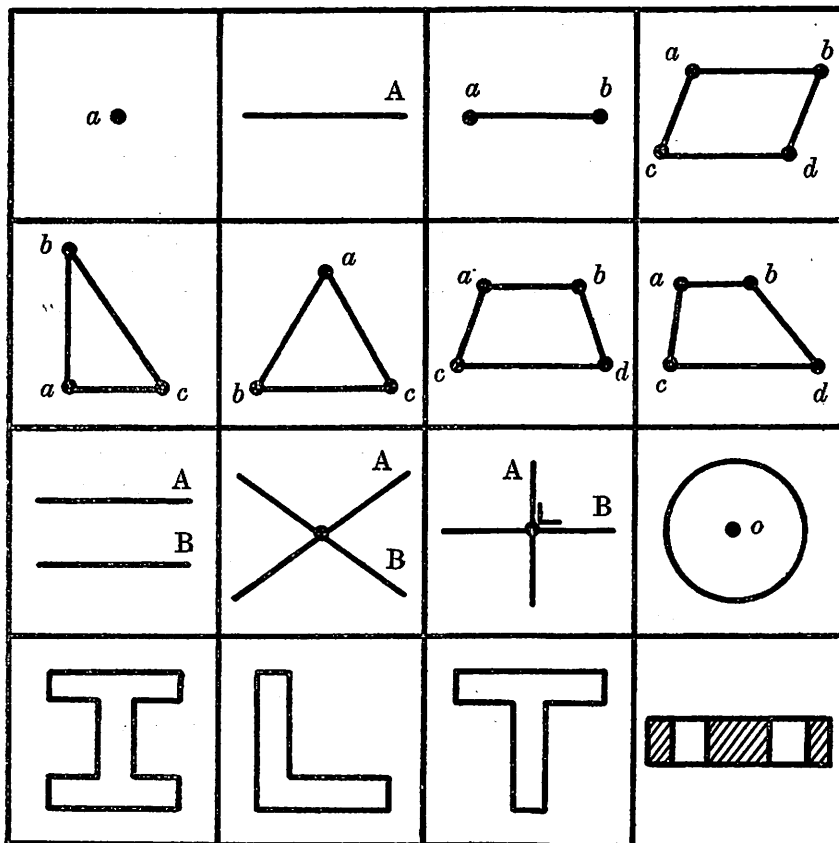
6. On donne : $M \cap N = \{a\}$

M' et N' : images de M et N par S_A .

$M' \cap N' = \{a'\}$

Démontrez que a' est l'image de a par S_A .

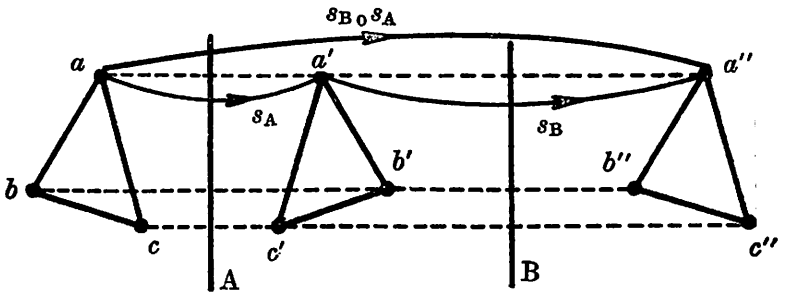
7. Dessinez tous les axes de symétrie des figures suivantes :



CHAPITRE XXXX

COMPOSITION DE SYMÉTRIES

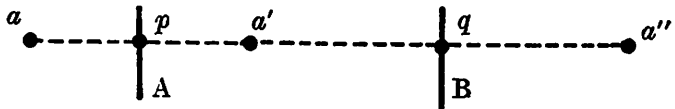
1. Composition de S_A et S_B , si $A \parallel B$



$$S_B \circ S_A = \vec{aa''}$$

La composée de deux symétries d'axes parallèles est une translation.

Reprenons la figure pour le point a :



$$\begin{aligned} \vec{aa''} &= \vec{aa'} + \vec{a'a''} \\ &= 2\vec{pa'} + 2\vec{a'q} \\ &= 2(\vec{pa'} + \vec{a'q}) \\ &= 2\vec{pq} \end{aligned}$$

donc $\vec{aa''} = 2\vec{pq}$

De la même façon, nous trouvons :

$$\vec{bb''} = 2 \vec{pq}$$

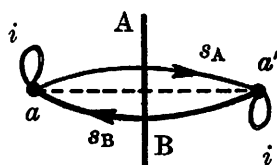
$$\vec{cc''} = 2 \vec{pq}$$

.....

et donc $\vec{aa''} = \vec{bb''} = \vec{cc''} = \dots = \vec{pq} = t$

Conséquences :

1. Toute translation peut être considérée comme la composée de deux symétries d'axes parallèles.
2. Composition de S_A et de S_B , si $A = B$.

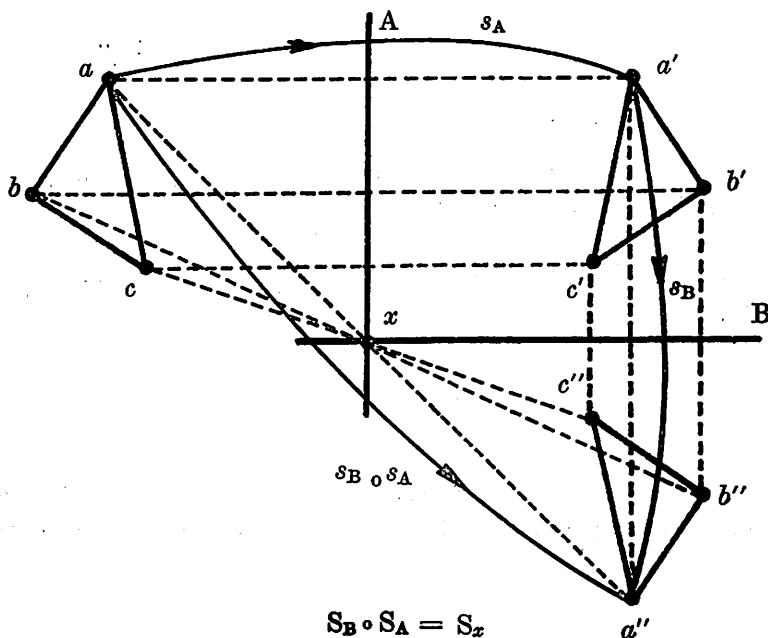


$$S_B \circ S_A = \vec{aa} = i$$

$$S_A \circ S_B = \vec{a'a'} = i$$

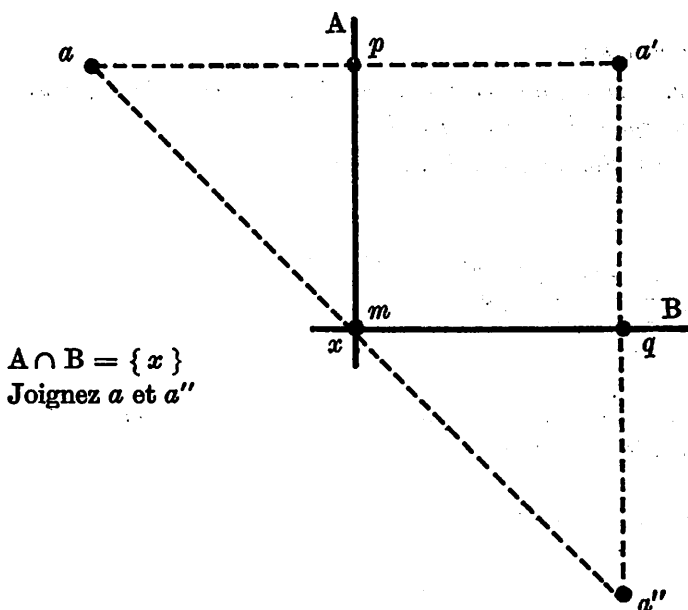
La composée de deux symétries à axes confondus est la transformation identique i .

2. Composition de S_A et S_B , si $A \perp B$



La composée de deux symétries d'axes rectangulaires est une symétrie centrale de centre x si $A \cap B = \{x\}$.

Reprenons la figure pour le point a :



Dans le triangle $aa'a''$,

p est le milieu de $[aa']$
 $A \parallel aa''$ et A passe par p

q est le milieu de $[a'a'']$
 $B \parallel aa''$ et B passe par q

Donc

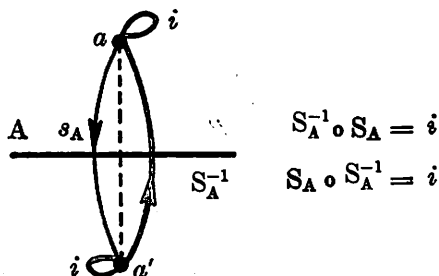
$$\left. \begin{array}{l} m \in A \\ m \in B \end{array} \right\} \Rightarrow A \cap B = \{m\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{mais } A \cap B = \{x\} \end{array} \right\} \Rightarrow m = x$$

Le point d'intersection x de A et de B est donc le milieu de $[aa'']$ et par conséquent, a'' est l'image de a par la symétrie centrale S_x .

Conséquence :

Une symétrie centrale peut toujours être considérée comme une composée de deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires.

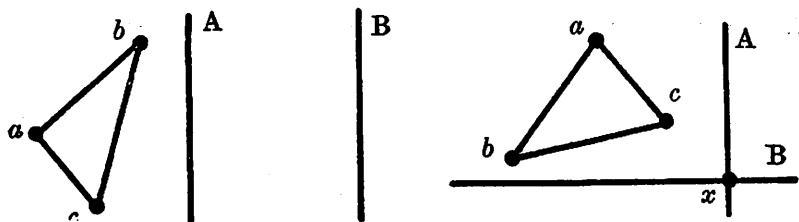
3. Composition de S_A et S_A^{-1}



La composée d'une symétrie orthogonale et de sa réciproque est la transformation identique i .

Exercices

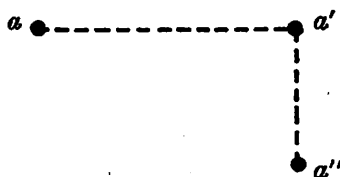
1. Dessinez l'image de abc par $S_B \circ S_A$.



2. $S_B \circ S_A(a) = a''$ et $A \parallel B$
 $a' = S_A(a)$ et $a'' = S_B(a')$
 Dessinez les axes A et B.

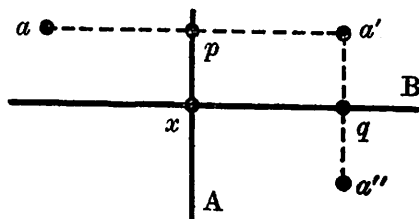


3. $S_B \circ S_A(a) = a''$ et $A \perp B$
 $a' = S_A(a)$ et $a'' = S_B(a')$
 Dessinez les axes A et B.
 Comment appelez-vous x si
 $A \cap B = \{x\}$?



4. La composée de deux symétries d'axes rectangulaires est une symétrie centrale de centre x , si $A \cap B = \{x\}$.

Montrez-le en vous basant sur l'équipollence.



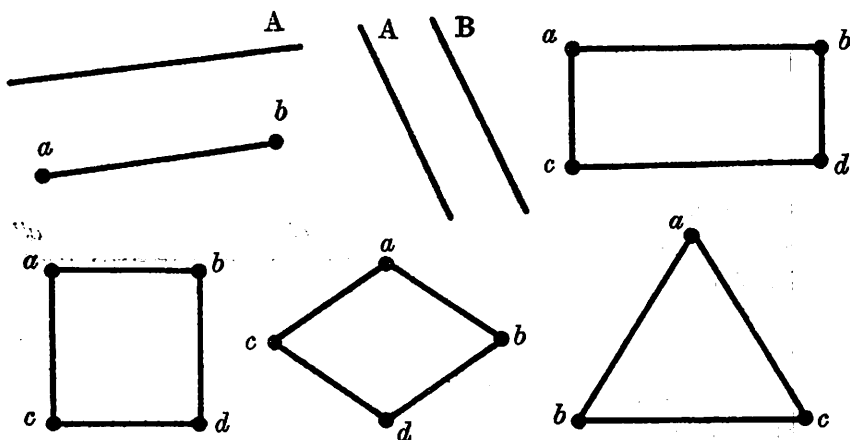
Indication : Démontrez que $(a, x) \uparrow (x, a'')$ en utilisant (p, q) .

5. A l'aide d'une figure, examinez si la composition de symétries d'axes perpendiculaires est commutative.

6. Si, par symétrie centrale par rapport à un point x , une figure est sa propre image, le point x est le centre de symétrie de cette figure.

Montrez que dans un parallélogramme, l'intersection des diagonales est le centre de symétrie.

7. Trouvez les centres de symétrie des figures suivantes :



8. Quelle est l'image d'un vecteur v par la symétrie centrale S_x ?

CHAPITRE XXXXI

ISOMÉTRIE

1. Notion

Toute symétrie orthogonale et toute composition d'un nombre fini de symétries orthogonales est une isométrie.

L'ensemble de toutes les isométries est représenté par I .

$$I = \{ x \mid x \text{ est une isométrie} \}$$

Nous en déduisons que :

1. Toute translation est une isométrie ($S_B \circ S_A$ avec $A \parallel B$).
2. Toute symétrie centrale est une isométrie ($S_B \circ S_A$ avec $A \perp B$).
3. La transformation identique est une isométrie ($S_A \circ S_A$).
4. Toute isométrie est une permutation de Π , car la composée de permutations est une permutation.

2. Réciproque d'une isométrie

$$\begin{array}{lcl} \text{Si } i_1 = S_A \circ S_B \in I, \text{ alors } i_1^{-1} = (S_A \circ S_B)^{-1} & \left| \begin{array}{l} (R_2 \circ R_1)^{-1} \\ = R_1^{-1} \circ R_2^{-1} \\ = R_2^{-1} \circ R_1^{-1} \end{array} \right. & \\ = S_B^{-1} \circ S_A^{-1} & & \\ = S_B \circ S_A \in I & \left| \begin{array}{l} S_B = S_B^{-1}; S_A = S_A^{-1} \end{array} \right. & \end{array}$$

Donc $i_1 \in I \Rightarrow i_1^{-1} \in I$.

La réciproque d'une isométrie est une isométrie.

3. Structure $I, \circ$

1. Une isométrie est une composée d'un nombre fini de symétries orthogonales. La composée d'isométries est donc une composée d'un nombre fini de symétries orthogonales et est, par conséquent, une isométrie.

$$i_1 = S_C \circ S_B \circ S_A \in I$$

$$i_2 = S_E \circ S_D \in I$$

$$i_2 \circ i_1 = (S_E \circ S_D) \circ (S_C \circ S_B \circ S_A) = S_E \circ S_D \circ S_C \circ S_B \circ S_A \in I.$$

La composition d'isométries est interne et partout définie.

$$\forall i_1, i_2 \in I : i_2 \circ i_1 = i_3 \in I$$

2. La composition de relations est toujours associative; la composition d'isométries est donc également associative.

$$\forall i_1, i_2, i_3 \in I : i_3 \circ (i_2 \circ i_1) = (i_3 \circ i_2) \circ i_1 = i_3 \circ i_2 \circ i_1$$

3. La transformation identique i est l'élément neutre pour la composition d'isométries.

$$\forall i_1 \in I : i_1 \circ i = i_1 = i \circ i_1$$

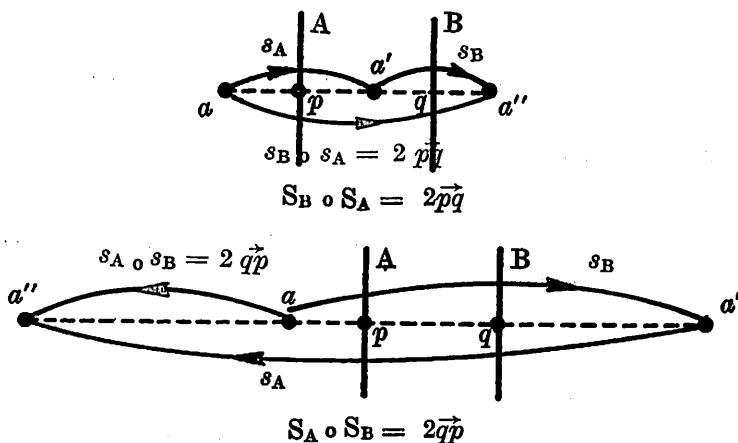
4. La composée d'une isométrie i_1 et de sa réciproque i^{-1} égale i . Tout élément $i_1 \in I$ a un élément symétrique $i^{-1} \in I$ de telle manière que leur composée est l'élément neutre i .

$$\exists i_1^{-1} \in I, \forall i_1 \in I : i_1 \circ i_1^{-1} = i = i_1^{-1} \circ i_1$$

Conclusion :

$$I, \circ \text{ est un groupe}$$

5. Examinons si la composition d'isométries est commutative. Soit la composée de S_A et S_B , si $A \parallel B$.



Donc :

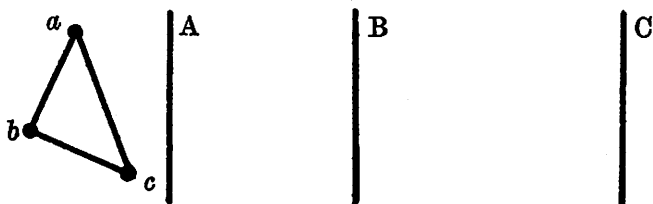
$$S_B \circ S_A \neq S_A \circ S_B$$

La composition de symétries d'axes parallèles n'est pas commutative, donc :

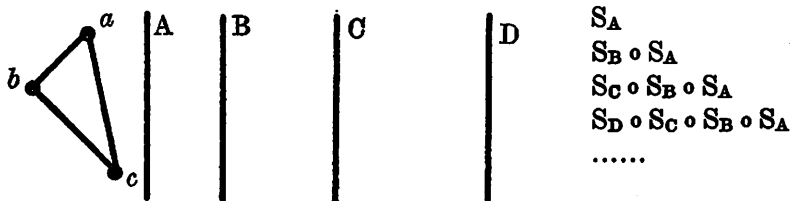
$I, \circ$ est un groupe non commutatif

Exercices

- Expliquez : a) Une translation est une isométrie.
b) Une symétrie centrale est une isométrie.
c) La transformation identique est une isométrie.
d) Une isométrie est une permutation de Π .
- Montrez que l'image d'une droite par une isométrie est une droite.
- Simplifiez : $S_A \circ S_A \circ S_A$
 $S_B \circ S_B \circ S_B \circ S_B \circ S_B$
- Dessinez l'image de abc par $S_C \circ S_B \circ S_A$.



5. $A \parallel B \parallel C \parallel D \parallel E \parallel \dots$ Dessinez l'image de abc par :



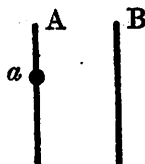
S_A
 $S_B \circ S_A$
 $S_C \circ S_B \circ S_A$
 $S_D \circ S_C \circ S_B \circ S_A$

Quand une telle isométrie est-elle une symétrie, quand est-elle une translation ?

6. Montrez qu'une isométrie conserve le parallélisme, l'équipol-
lence et le milieu.

7. On donne : $A \parallel B$ et $a \in A$.

Démontrez que $S_B \circ S_A \neq S_A \circ S_B$.

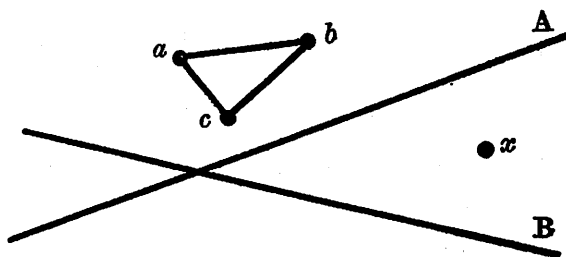


8. Dessinez l'image de abc par :

1. $S_B \circ S_x \circ S_A$

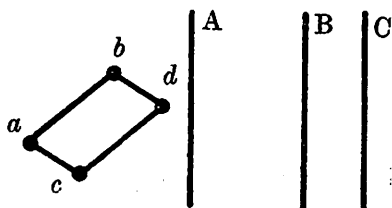
2. $S_x \circ S_B \circ S_A$

3. $S_A \circ S_B \circ S_x$

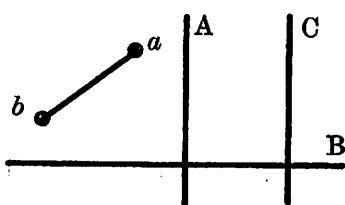


9. Pour chacune des figures données, dessinez l'image par
 $S_C \circ S_B \circ S_A$

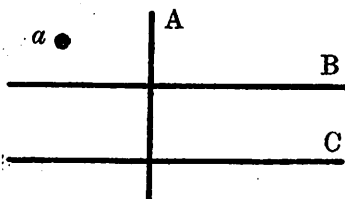
a)



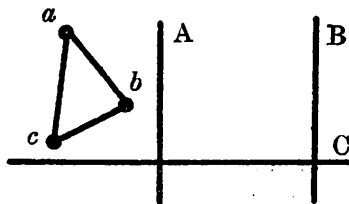
b)



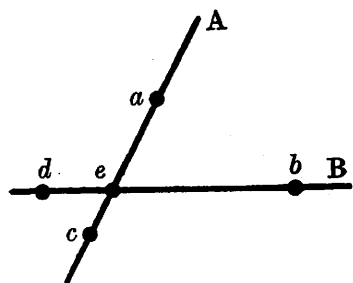
c)



d)



10. Dessinez l'image de a , b , c , d et e par :



$$S_B \circ S_A$$

$$S_B \circ S_B$$

$$S_A \circ S_B$$

$$S_A \circ S_A$$

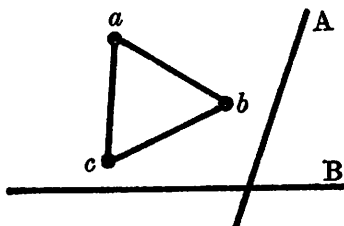
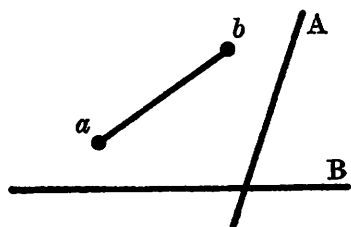
11. Dessinez l'image de $[ab]$ et de abc par :

$$S_B \circ S_A$$

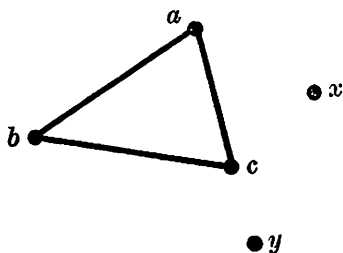
$$S_B \circ S_B$$

$$S_A \circ S_B$$

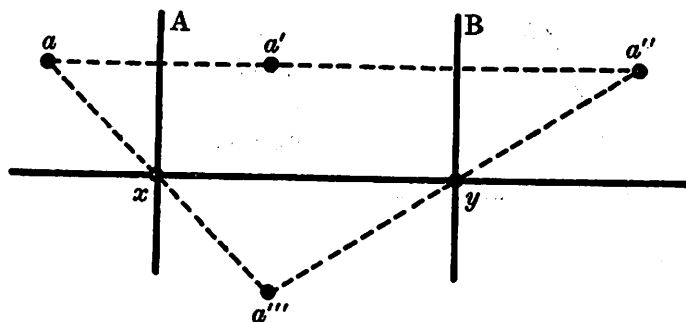
$$S_A \circ S_A$$



12. Dessinez l'image de abc par $S_y \circ S_x$. Montrez que $S_y \circ S_x$ est une translation et mesurez le vecteur de translation.



13. Montrez que $S_B \circ S_A = S_y \circ S_x$.



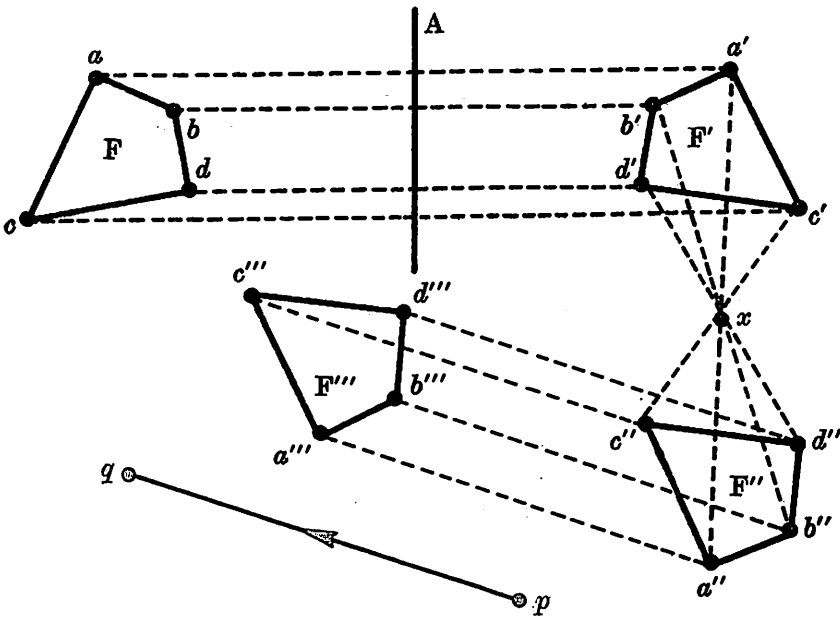
FIGURES ISOMÉTRIQUES OU CONGRUENTES

1. Notion

Une figure F est isométrique (ou congruente) à une figure F' , ssi il existe une isométrie qui applique F sur F' .
On écrit : $F \text{ iso } F'$.

Soit un quadrilatère $abcd$. Cherchons successivement :

1. S_A (symétrie orthogonale d'axe A)
2. S_x (symétrie centrale de centre x)
3. $\vec{pq}$ (translation déterminée par (p, q)).



La symétrie orthogonale S_A applique F sur $F' \Rightarrow F$ est congruent à F' , soit F iso F' ;

la symétrie centrale S_x applique F' sur $F'' \Rightarrow F'$ est congruent à F'' , soit F' iso F'' ;

la translation pq applique F'' sur $F''' \Rightarrow F''$ est congruent à F''' , soit F'' iso F'''

car S_A , S_x et $\vec{pq}$ sont des isométries.

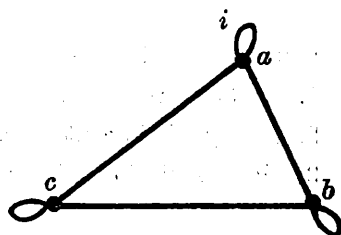
2. La relation « ...iso ... » dans l'ensemble des figures de Π

Cette relation est :

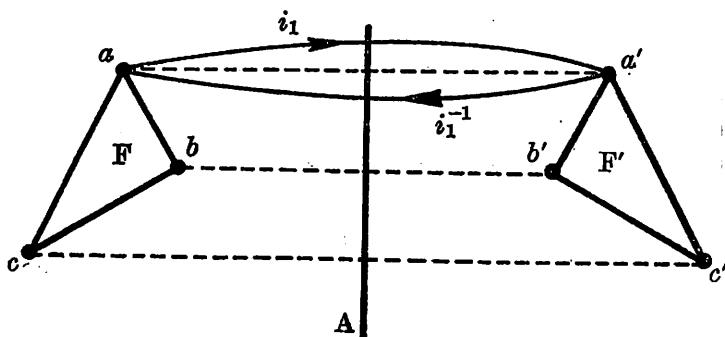
1. réflexive

Pour toute figure F , la transformation identique $i \in I$ applique F sur F :

F iso F

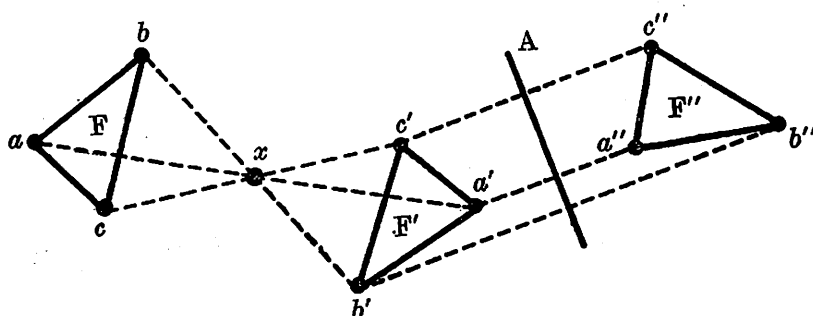


2. symétrique



Si $i_1 \in I$ applique F sur F' , $i_1^{-1} \in I$ peut appliquer F' sur F :

F iso $F' \Leftrightarrow F'$ iso F

3) *transitive*

$S_x \in I$ applique F sur F' $\Leftrightarrow F$ iso F'

$S_A \in I$ applique F' sur F'' $\Leftrightarrow F'$ iso F''

$S_A \circ S_x \in I$ applique F sur F'' $\Leftrightarrow F$ iso F'' , car la composition d'isométries est interne et partout définie.

$$\left. \begin{array}{l} F \text{ iso } F' \\ F' \text{ iso } F'' \end{array} \right\} \Rightarrow F \text{ iso } F''$$

Conclusion :

« ... iso ... » est une relation d'équivalence

Les classes de la partition qui en résultent sont appelées les classes de congruence.

Exercices

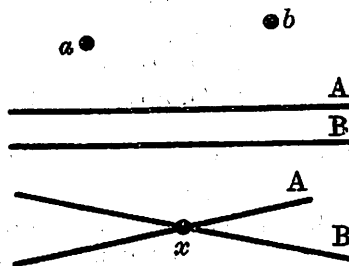
1. Montrez que :

a) a iso b

b) A iso B

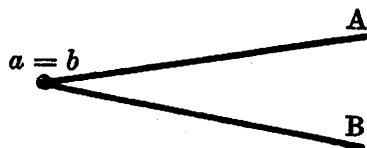
1. $A \cap B = \emptyset$

2. $A \cap B = \{x\}$

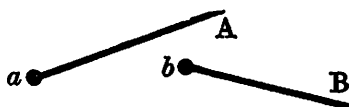


c) $[aA \text{ iso } bB$

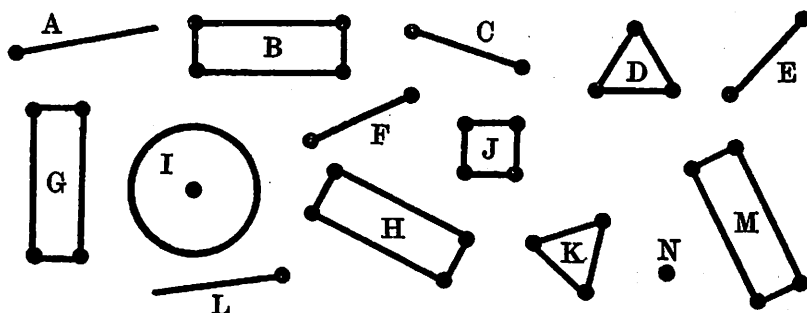
1. $a = b$



2. $a \neq b$



2. U est l'ensemble des figures suivantes :



$U = \{ A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N \}$

a) Ecrivez la relation $R : U \rightarrow U$ « ... est congruente à ... »

b) Dessinez le graphe et le réseau.

c) Quelles sont les propriétés de cette relation ?

d) Précisez la relation.

e) Ecrivez la partition.

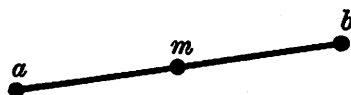
f) Comment appelez-vous les classes de la partition ?

3. On donne $(a, m) \uparrow (m, b)$

Démontrez que :

1. $(a, m) \text{ iso } (m, f)$

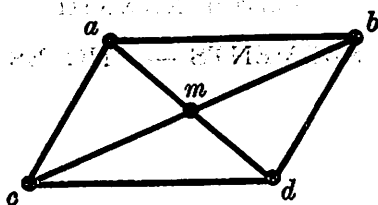
2. $(a, m) \text{ iso } (b, m)$



4. a. Des couples équipollents sont-ils toujours isométriques ? Expliquez.

b. Des couples non équipollents peuvent-ils être isométriques ? Expliquez à l'aide d'une figure.

5. Dans la figure ci-dessous, quels sont les triangles isométriques? Justifiez votre réponse.



6. On donne :

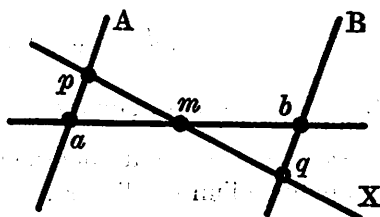
$$(a, m) \uparrow (m, b)$$

A passe par a

B passe par b

$A \parallel B$

X est une droite quelconque passant par m.



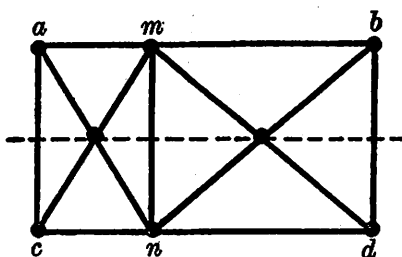
Démontrez : 1) $[ap] \text{ iso } [bp]$

2) $map \text{ iso } mbq$.

7. On donne : un rectangle $abcd$

$$(a, m) \uparrow (c, n)$$

Démontrez que : $anb \text{ iso } cmd$.



CHAPITRE XXXXIII

SEGMENTS — ANGLES

1. Segment

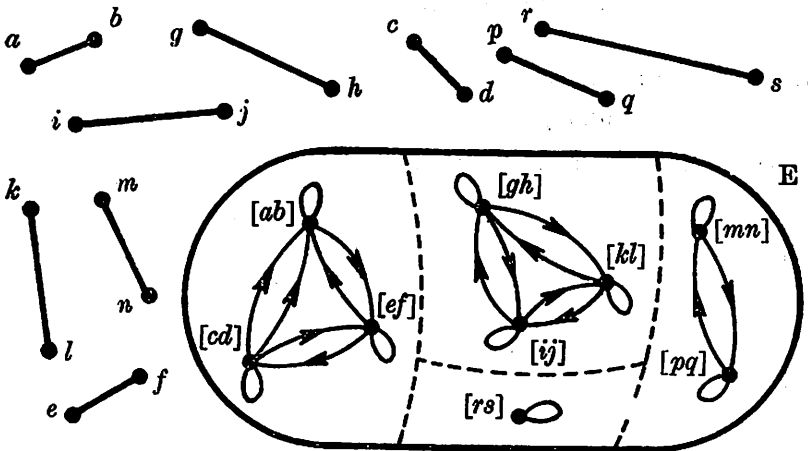


$$[ab] = \{x \mid x \in A \text{ en } a \leq x \leq b\}$$

2. Segments congruents

Des segments sont congruents, s'il existe une isométrie qui les applique l'un sur l'autre.

Considérons la relation d'équivalence $R : E \rightarrow E$ « ... est congruent à ... » dans l'ensemble des segments suivants :



Cette relation partage l'ensemble E en classes de congruence. Dans l'ensemble infini de tous les segments de Π , il existe une classe d'un nombre infini de segments.

Tous les segments congruents à $[ab]$ constituent une classe de congruence dont $[ab]$ est un représentant.

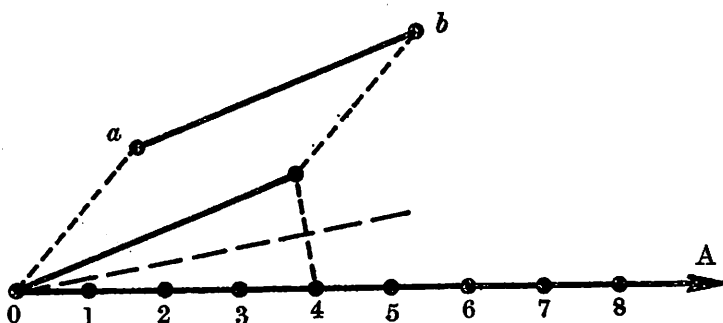
Nous écrivons $[ab]$ iso $[cd]$ iso $[ef]$ iso ...

Tous les segments de cette classe égalent $[ab]$ et sont égaux entre eux. Nous écrivons : $[ab] = [cd] = [ef] = \dots$

3. Mesure d'un segment

Mesurer $[ab]$ veut dire le *comparer* à une droite graduée A_{01} .

Par une isométrie, nous appliquons $[ab]$ sur A_{01} de manière que 0 soit l'image de a . L'abscisse de l'image de b nous donne la mesure ou la longueur de $[ab]$.



La longueur de $[ab] = |ab| = 4$.

Pratiquement, nous mesurons un segment à l'aide d'une règle graduée.

4. Distance

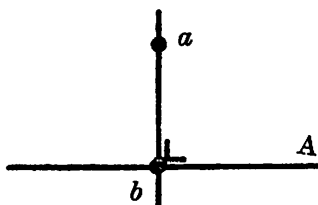
A. La distance d'un point a à un point b est la longueur du segment $[ab] = |ab|$.



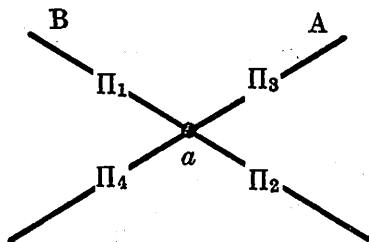
B. La distance d'un point a à une droite A est la distance de a au pied b de la perpendiculaire abaissée par a sur A .

La distance de a à A égale

$|ab|$ si $ab \perp A$.



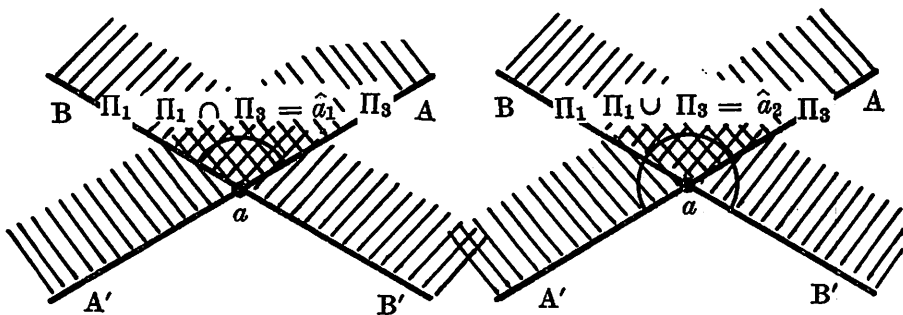
5. Angle



La droite A partage Π en deux demi-plans Π_1 et Π_2 .

La droite B partage Π en Π_3 et Π_4 .

Considérons Π_1 et Π_3 .



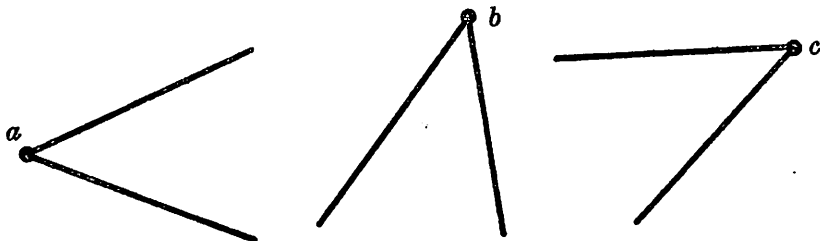
$\Pi_1 \cap \Pi_3$ et $\Pi_1 \cup \Pi_3$ sont des angles ou secteurs angulaires.

Représentation :

$$\begin{aligned} A\hat{a}B &= \hat{a}_1 \\ B'\hat{a}A' &= \hat{a}_2 \end{aligned}$$

6. Angles congruents

Des angles sont congruents (isométriques), si on peut les appliquer les uns sur les autres par une isométrie.



Tous les angles isométriques à $\hat{a}$ forment une classe de congruence dont $\hat{a}$ est un représentant.

Nous écrivons $\hat{a}$ iso $\hat{b}$ iso $\hat{c}$ iso ...

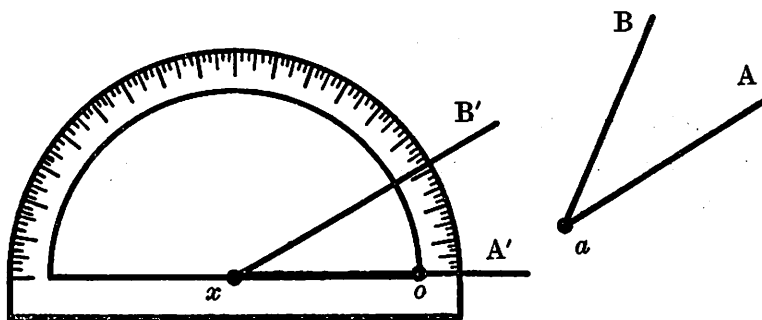
Tous les angles de cette classe égalent $\hat{a}$ et sont égaux entre eux.

Nous écrivons : $\hat{a} = \hat{b} = \hat{c} = \dots$

7. Mesure d'un angle

Par une isométrie, nous appliquons $\hat{a}$ sur le rapporteur de telle façon que $[xo]$ soit l'image de $[aA]$.

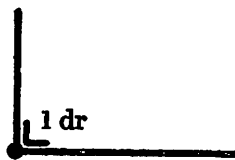
L'image $[xB']$ de $[aB]$ nous donne la mesure de $\hat{a}$.



La mesure de $\hat{a} = |\hat{a}| = 30^\circ 10'$.

En pratique, on place le rapporteur sur l'angle à mesurer.

L'unité d'angle est l'angle droit.



$$1 \text{ angle droit} = 1 \text{ dr} = 90 \text{ degrés} = 90^\circ$$

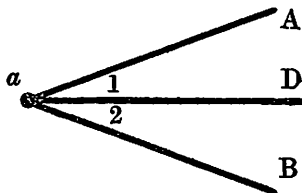
$$1^\circ = 60 \text{ minutes} = 60'$$

$$1' = 60 \text{ secondes} = 60''$$

Exemple : $42^\circ 15' 40''$

8. Bissectrice d'un angle

L'axe de symétrie de l'angle a est la bissectrice $[aD$.



De cette symétrie, nous déduisons :

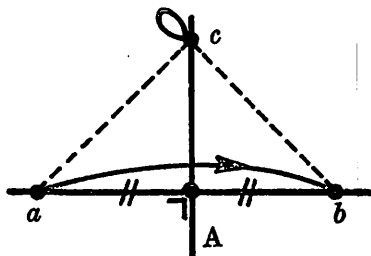
$$\left. \begin{array}{l} S_D(\hat{a}_1) = \hat{a}_2 \\ S_D(\hat{a}_2) = \hat{a}_1 \end{array} \right\} \Rightarrow |\hat{a}_1| = |\hat{a}_2|$$

La bissectrice partage un angle en deux angles égaux.

9. Propriété de la médiatrice

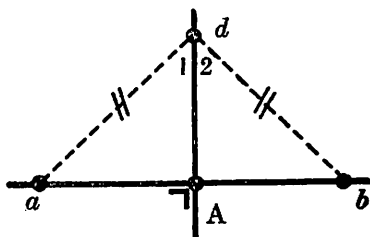
Tout point c de la médiatrice A de $[ab]$ est équidistant de a et de b .

$$\begin{array}{l} S_A[ca] = [cb] \\ \Rightarrow [ca] \text{ iso } [cb] \\ \Rightarrow |ca| = |cb| \end{array}$$



Réciproque :

Tout point d , équidistant de a et de b , est situé sur la médiatrice A de $[ab]$.



Construisez la bissectrice A de $\hat{d}$ -

A est l'axe de symétrie de $\hat{d}$

$$\Rightarrow S_A[da] = [db].$$

Or, nous savons que $|da| = |db|$,
dès lors

$$S_A(a) = b$$

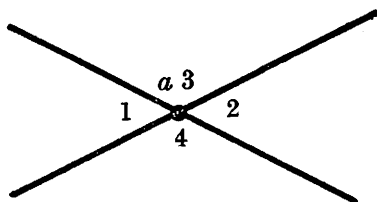
$\Rightarrow A$ est la médiatrice de $[ab]$

$\Rightarrow d$ est situé sur la médiatrice.

Conclusion :

La médiatrice d'un segment $[ab]$ est l'ensemble de tous les points équidistants de a et de b .

10. Angles opposés



Deux angles sont dits opposés par le sommet lorsque les demi-droites qui les forment sont opposées.

$\hat{a}_1$ et $\hat{a}_2$ sont des angles opposés ainsi que $\hat{a}_3$ et $\hat{a}_4$.

Deux angles opposés sont symétriques par rapport à leur sommet commun.

Donc : $S_a(\hat{a}_1) = \hat{a}_2 \Rightarrow |\hat{a}_1| = |\hat{a}_2|$

$S_a(\hat{a}_3) = \hat{a}_4 \Rightarrow |\hat{a}_3| = |\hat{a}_4|$

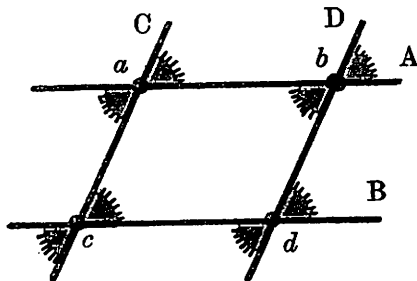
Conclusion :

Deux angles opposés sont égaux.

11. Angles dont les côtés sont parallèles, deux à deux

$A \parallel B$

$C \parallel D$



On peut reporter tous les angles en rouge l'un sur l'autre par translation ou par symétrie centrale.

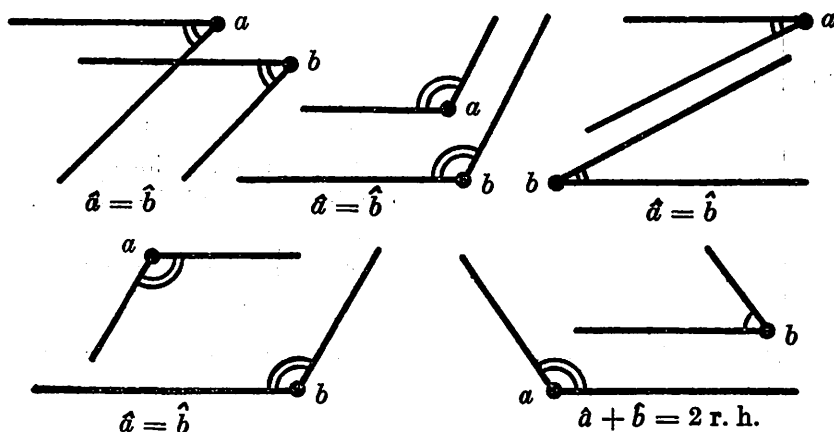
Ils sont tous isométriques ou égaux.

Il en est de même pour tous les angles non hachurés.

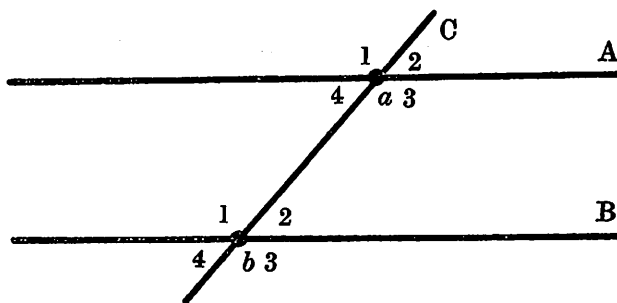
Conclusion :

Deux angles sont égaux ou supplémentaires, si les côtés de l'un sont parallèles aux côtés de l'autre, chacun à chacun.

Ils sont égaux s'ils sont aigus ou obtus tous les deux; ils sont supplémentaires si l'un est aigu, l'autre obtus.



12. Application : Deux droites parallèles, coupées par une même troisième



$\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{b}_3, \hat{b}_4$ sont des angles extérieurs.

$\hat{a}_3, \hat{a}_4, \hat{b}_1, \hat{b}_2$ sont des angles intérieurs.

$\hat{a}_3$ et $\hat{b}_1$, $\hat{a}_4$ et $\hat{b}_2$ sont des angles alternes internes.

$\hat{a}_1$ et $\hat{b}_3$, $\hat{a}_2$ et $\hat{b}_4$ sont des angles alternes externes.

$\hat{a}_3$ et $\hat{b}_2$, $\hat{a}_4$ et $\hat{b}_1$ sont des angles intérieurs d'un même côté.

$\hat{a}_1$ et $\hat{b}_4$, $\hat{a}_3$ et $\hat{b}_3$ sont des angles extérieurs d'un même côté.

$\hat{a}_1$ et $\hat{b}_1$, $\hat{a}_2$ et $\hat{b}_2$, $\hat{a}_3$ et $\hat{b}_3$, $\hat{a}_4$ et $\hat{b}_4$ sont des angles correspondants.

Propriétés :

Lorsque deux droites parallèles sont coupées par une même troisième :

1. deux angles alternes internes sont égaux

$$\hat{a}_3 = \hat{b}_1 \text{ et } \hat{a}_4 = \hat{b}_2$$

2. deux angles alternes externes sont égaux

$$\hat{a}_1 = \hat{b}_3 \text{ et } \hat{a}_2 = \hat{b}_4$$

3. deux angles correspondants sont égaux

$$\hat{a}_1 = \hat{b}_1, \hat{a}_2 = \hat{b}_2, \hat{a}_3 = \hat{b}_3 \text{ et } \hat{a}_4 = \hat{b}_4$$

4. deux angles intérieurs d'un même côté sont supplémentaires

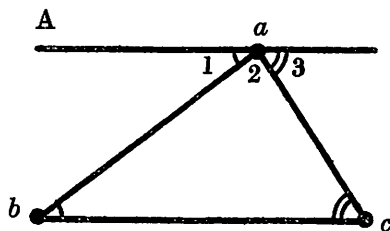
$$\hat{a}_3 + \hat{b}_2 = 180^\circ \text{ et } \hat{a}_4 + \hat{b}_1 = 180^\circ$$

5. deux angles extérieurs d'un même côté sont supplémentaires

$$\hat{a}_1 + \hat{b}_4 = 180^\circ \text{ et } \hat{a}_2 + \hat{b}_3 = 180^\circ$$

Remarque :

La réciproque de chacune de ces propriétés est vraie.
Énoncez les réciproques des cinq théorèmes.

13. Somme des angles dans un triangle

Par a , menons $A \parallel bc$.

$$\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 = 180^\circ$$

$$\text{Or, } \hat{a}_1 = \hat{b}$$

$$\hat{a}_3 = \hat{c}$$

angles alternes internes

angles alternes internes

donc :

$$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180^\circ$$

La somme des angles d'un triangle égale 180° .

Exercices

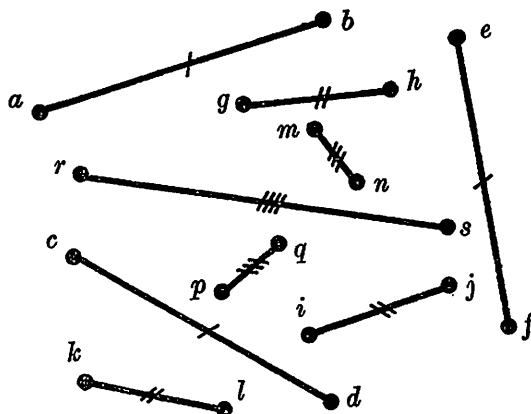
1. Ecrivez la relation $R : E \rightarrow E$ « ... iso ... » dans l'ensemble E des segments donnés.

Dessinez le graphe et le réseau.

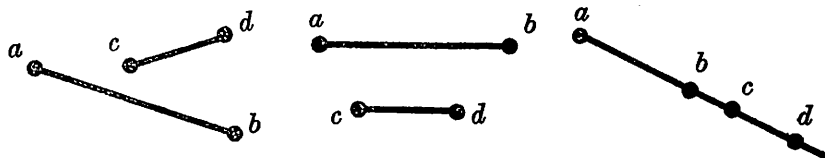
Précisez la relation.

Ecrivez la partition.

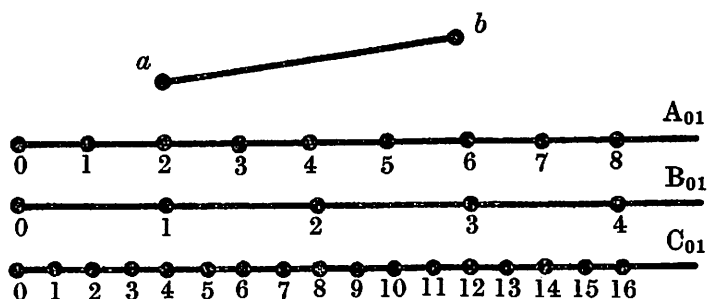
Comment appelez-vous les classes de la partition ?



2. Construisez par isométrie $[ab] + [cd]$ et $[ab] - [cd]$.



3. Mesurez $[ab]$ en utilisant successivement A_{01} , B_{01} , C_{01} .
Quelle est votre conclusion ?



4. Dessinez deux droites parallèles. Comment pouvez-vous déterminer leur distance ?

Complétez : La distance de deux droites parallèles est

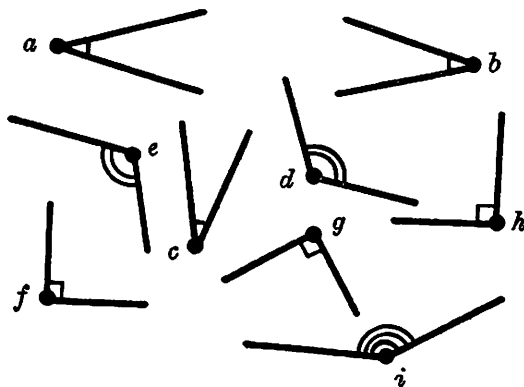
.....

5. Ecrivez la relation $R : E \rightarrow E$ « ... iso ... » dans l'ensemble des figures données.

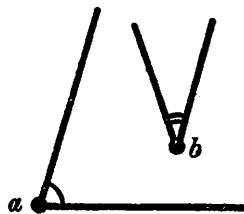
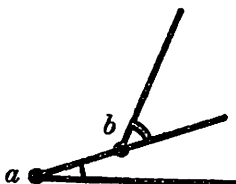
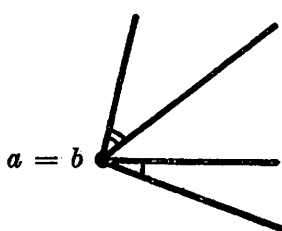
Dessinez le graphe et le réseau.

Précisez la relation.

Ecrivez la partition.



6. Par isométrie, construisez $\hat{a} + \hat{b}$ et $\hat{a} - \hat{b}$ dans les trois cas suivants :



7. Calculez :

$$\begin{array}{r} 1) \quad 25^{\circ} 18' 20'' \\ + 27^{\circ} 26' 56'' \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2) \quad 17^{\circ} 22' 16'' \\ + 34^{\circ} 17' 46'' \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3) \quad 27^{\circ} 36' 38'' \\ + 74^{\circ} 23' 36'' \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4) \quad 47^{\circ} 18' 20'' \\ - 26^{\circ} 9' 16'' \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5) \quad 34^{\circ} 47' 18'' \\ - 16^{\circ} 17' 26'' \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6) \quad 180^{\circ} \\ - 27^{\circ} 13' 37'' \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7) \quad 15^{\circ} 12' 16'' \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8) \quad 34^{\circ} 17' 20'' \\ \times 5 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9) \quad 20^{\circ} 19' 36'' \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$$

$$10) \quad 43^{\circ} \times \frac{2}{5}$$

$$11) \quad 42^{\circ} 56' \times \frac{3}{7}$$

$$12) \quad 54^{\circ} 37' 43'' \times \frac{3}{10}$$

$$13) \quad 27^{\circ} 18' 9'' : 3$$

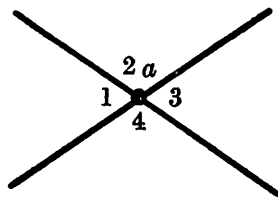
$$14) \quad 44^{\circ} 16' 12'' : 5$$

$$15) \quad 28^{\circ} 16' 45'' : \frac{4}{5}$$

8. $|\hat{a}_1| = 72^{\circ} 27' 45''$

Complétez :

$$\begin{array}{l} |\hat{a}_2| = \dots \\ |\hat{a}_3| = \dots \\ |\hat{a}_4| = \dots \end{array}$$



9. Quel est le complément de :

$$28^{\circ}$$

$$52^{\circ} 16'$$

$$72^{\circ} 54' 16''$$

10. Quel est le supplément de :

52°

$57^\circ 22' 46''$

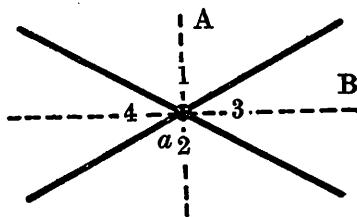
$153^\circ 19' 52''$

11. Trouvez le complément et le supplément de l'angle de $17^\circ 35' 26''$.
Calculez leur différence.

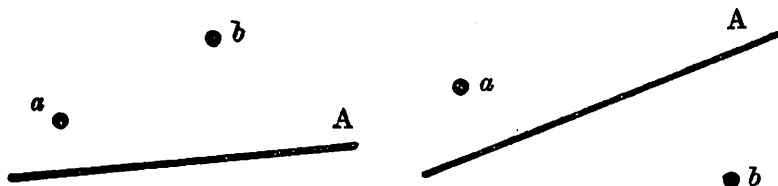
Énoncez la propriété et démontrez-la.

12. Dessinez deux angles opposés $\hat{a}_1$ et $\hat{a}_2$. Construisez les bissectrices. Montrez que ces bissectrices sont dans le prolongement l'une de l'autre.

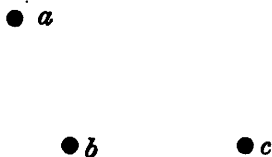
13. A est la bissectrice de $\hat{a}_1$ et $\hat{a}_2$.
B est la bissectrice de $\hat{a}_3$ et $\hat{a}_4$.
Montrez que $A \perp B$.



14. Par construction, trouvez un point de A équidistant de a et de b.



15. Par construction, trouvez un point équidistant de a, de b et de c.



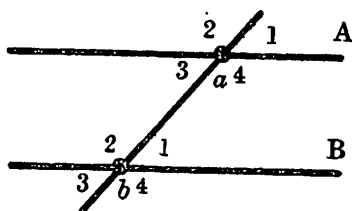
16. Quel angle est égal à son complément ?

Quel angle est égal à son supplément ?

17. Quel angle est le quintuple de son complément ?

18. Quel est l'angle dont le supplément égale six fois le complément ?

19. La différence de deux angles supplémentaires égale 48° . Trouvez ces angles.
20. La somme de trois angles égale $132^\circ 17' 29''$. Trouvez la somme de leurs compléments et celle de leurs suppléments.
21. Trouvez le supplément du complément de $39^\circ 40' 26''$.
Trouvez le complément du supplément de $123^\circ 17' 40''$.
22. Trouvez tous les angles de la figure ci-dessous, sachant que $A \parallel B$ et $|\hat{b}_3| = 50^\circ 57' 32''$.

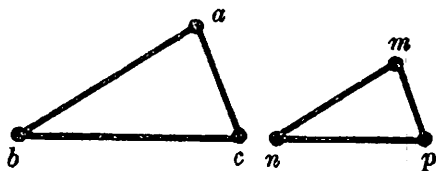


23. Deux droites parallèles sont coupées par une même troisième. La différence de deux angles extérieurs d'un même côté égale 20° . Calculez les huit angles de cette figure.

24. On donne : $|\hat{a}| = |\hat{m}|$
 $|\hat{b}| = |\hat{n}|$

Démontrez que $|\hat{c}| = |\hat{p}|$

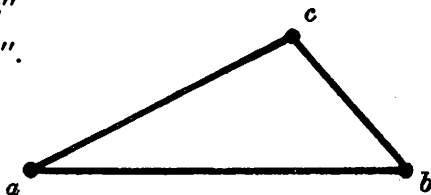
Énoncez la propriété.



25. Démontrez que : 1. Dans un triangle, on a au plus un angle obtus.
2. Dans un triangle, on a au plus un angle droit.

26. On donne : $|\hat{a}| = 27^\circ 17' 38''$
 $|\hat{b}| = 48^\circ 25' 47''$.

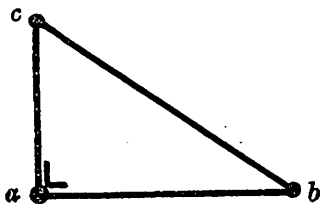
Trouvez $|\hat{c}|$.



27. On donne : $|a| = 90^\circ$

$$|\hat{b}| = 35^\circ 25' 32''.$$

Déterminez $|\hat{c}|$ de deux manières différentes.

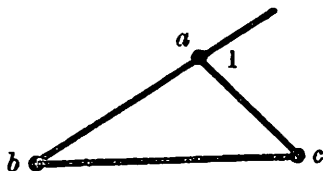


28. Un angle formé par un côté et le prolongement d'un deuxième côté d'un triangle est appelé angle extérieur au triangle.

$\hat{a}_1$ est un angle extérieur à abc .

Montrez que $|\hat{a}_1| = |\hat{b}| + |\hat{c}|$

Énoncez la propriété.



29. Sachant que : $|\hat{a}_1| = 65^\circ$

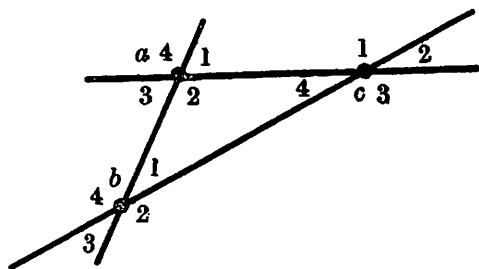
$$|\hat{b}_1| = 37^\circ$$

Calculez :

$$|\hat{a}_2|, |\hat{a}_3|, |\hat{a}_4|$$

$$|\hat{b}_2|, |\hat{b}_3|, |\hat{b}_4|$$

$$|\hat{c}_1|, |\hat{c}_2|, |\hat{c}_3|, |\hat{c}_4|$$

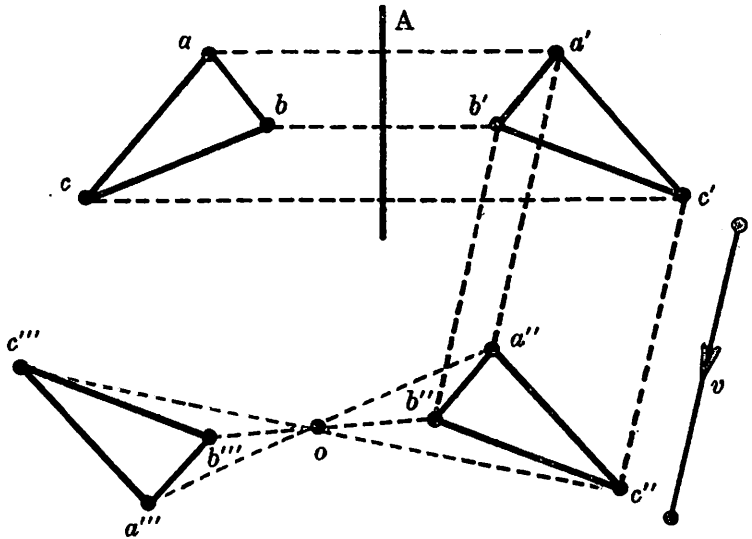


CHAPITRE XXXIV

CONGRUENCE OU ISOMÉTRIE DE TRIANGLES BISSECTRICE

1. Triangles isométriques ou congruents

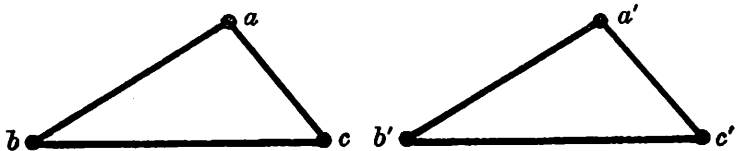
- A. Deux triangles sont isométriques ou congruents si et seulement si il existe une isométrie qui applique l'un sur l'autre.



$$abc \text{ iso } a'b'c' \text{ iso } a''b''c'' \text{ iso } a'''b'''c'''.$$

- B. Dans deux triangles isométriques, les six éléments (les trois angles et les trois côtés) sont égaux chacun à chacun, et réciproquement.

$$abc \text{ iso } a'b'c' \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |\hat{a}| = |\hat{a}'|; |\hat{b}| = |\hat{b}'|; |\hat{c}| = |\hat{c}'| \\ |ab| = |a'b'|; |bc| = |b'c'|; |ca| = |c'a'| \end{array} \right.$$

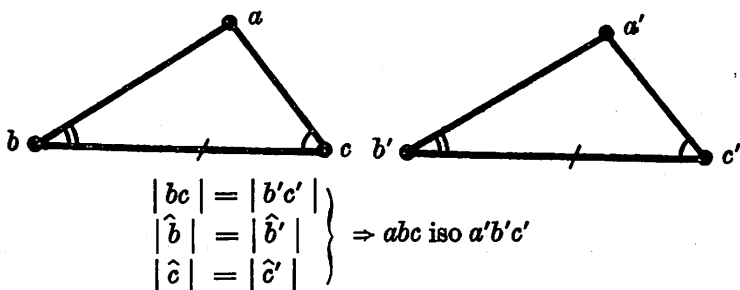


C. On peut démontrer que deux triangles sont isométriques, lorsque trois éléments *judicieusement choisis* sont égaux chacun à chacun.

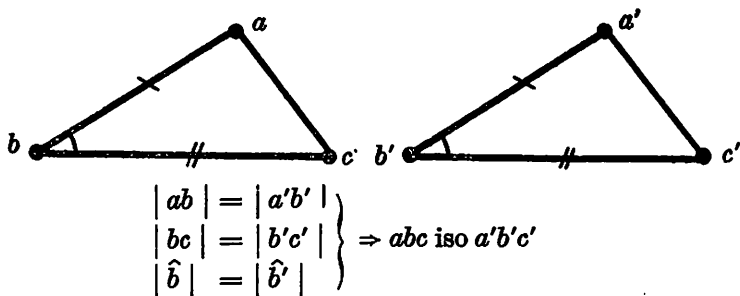
2. Cas d'isométrie des triangles quelconques

Deux triangles sont isométriques :

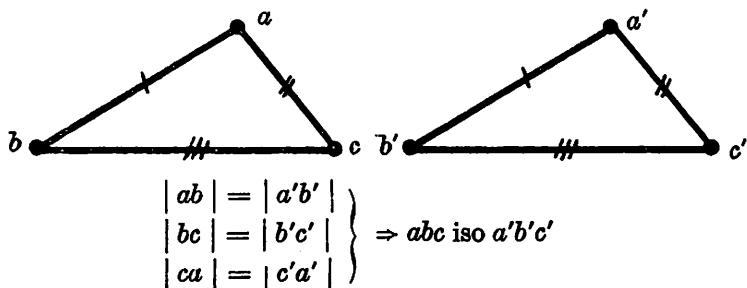
1^o lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.



2^o lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.



3^o lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.



Résumé :

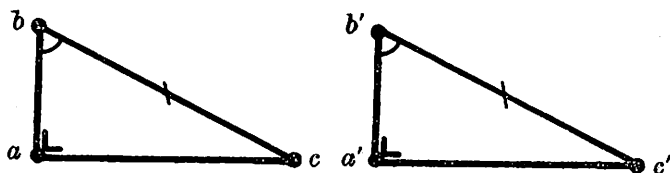
1 ^{er} cas	1 côté et 2 angles adjacents	→	3 conditions
2 ^e cas	2 côtés et l'angle compris	→	3 conditions
3 ^e cas	3 côtés	→	3 conditions

3. Cas d'isométrie des triangles rectangles

Deux triangles rectangles sont isométriques :

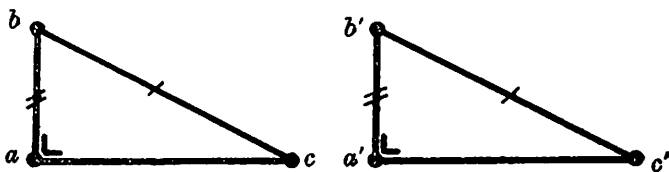
1^o dans les trois cas précédents.

2^o lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal.



$$\left. \begin{array}{l} |\hat{a}| = |\hat{a}'| = 90^\circ \\ |bc| = |b'c'| \\ |\hat{b}| = |\hat{b}'| \end{array} \right\} \Rightarrow abc \text{ iso } a'b'c'$$

3^o lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un côté égal.



$$\left. \begin{array}{l} |\hat{a}| = |\hat{a}'| = 90^\circ \\ |bc| = |b'c'| \\ |ab| = |a'b'| \end{array} \right\} \Rightarrow abc \text{ iso } a'b'c'$$

4. Propriété de la bissectrice

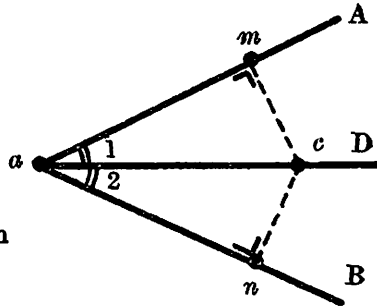
Tout point c de la bissectrice D de $\widehat{A\hat{a}B}$ est équidistant de A et de B .

On donne : $|\hat{a}_1| = |\hat{a}_2|$
 $c \in D$
 $cm \perp A$
 $cn \perp B$

Démontrons que $|cm| = |cn|$

Démonstration : acm iso acn car

- | | |
|---------------------------------------|-------------|
| 1. $ \hat{a}_1 = \hat{a}_2 $ | donnée |
| 2. $ ac = ac $ | côté commun |
| 3. $ \hat{m} = \hat{n} = 90^\circ$ | donnée |
| $\Rightarrow cm = cn $ | |



Réciproque :

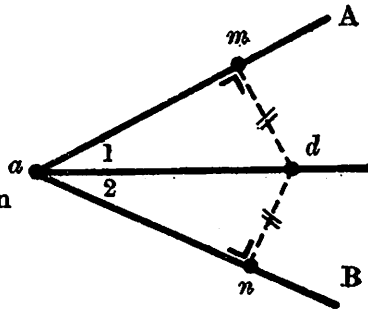
Tout point équidistant de A et de B , appartient à la bissectrice de $\widehat{A\hat{a}B}$.

On donne : $dm \perp A$
 $dn \perp B$
 $|dm| = |dn|$

Démontrons que $[ad]$ est la bissectrice de $\widehat{A\hat{a}B}$.

Démonstration : adm iso adn car

- | | |
|--|-------------|
| 1. $ dm = dn $ | donnée |
| 2. $ ad = ad $ | côté commun |
| 3. $ \hat{m} = \hat{n} = 90^\circ$ | donnée |
| $\Rightarrow \hat{a}_1 = \hat{a}_2 $ | |
| $\Rightarrow [ad]$ est la bissectrice de $\widehat{A\hat{a}B}$. | |

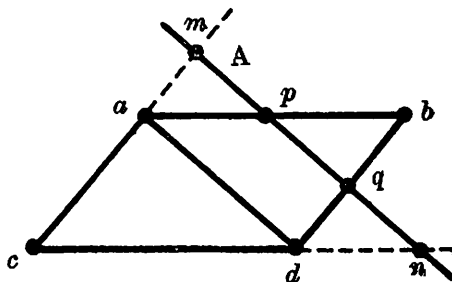


Conclusion :

La bissectrice d'un angle est l'ensemble de tous les points équidistants des côtés de cet angle.

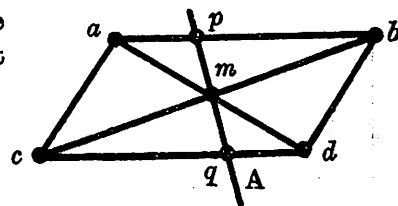
Exercices

1. Démontrez que dans un parallélogramme, deux côtés opposés sont égaux.
2. $abcd$ est un parallélogramme et $A \parallel ad$.
Montrez que amp iso dqn .



3. $abcd$ est un parallélogramme et A est une droite passant par m .

Démontrez que $|pm| = |mq|$

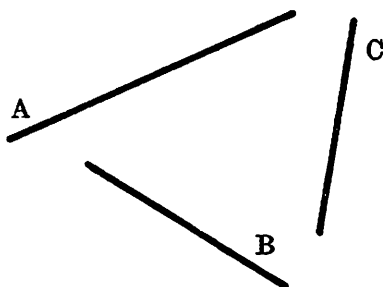


- 4.

On donne : $|bm| = |mc|$
 $|am| = |md|$

Démontrez que $|ac| = |bd|$

5. Construisez la bissectrice d'un angle. Justifiez vos constructions.
6. Trouvez un point de C équidistant de A et de B.



7. Démontrez que $(a,b) \uparrow (c,d) \Rightarrow |ab| = |cd|$

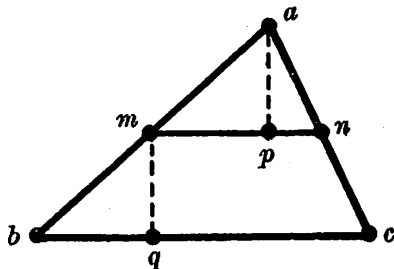
La réciproque est-elle vraie? Justifiez.

8. Dans le triangle : $[mn]$ joint les milieux de ab et ac , $\parallel bc$

$$ap \perp mn$$

$$mq \perp bc$$

Démontrez que $|ap| = |mq|$

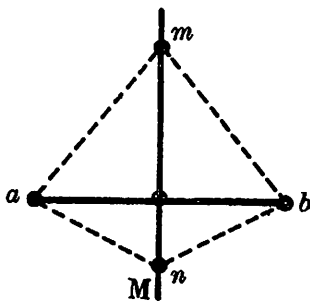


9. On donne : M est la médiatrice de $[ab]$

$$m \in M$$

$$n \in M$$

Démontrez que $|m \hat{b} n| = |m \hat{a} n|$



10. Dans un parallélogramme $abcd$:

$$[am] \perp [bc]$$

$$[dn] \perp [bc]$$

Démontrez que $|am| = |dn|$

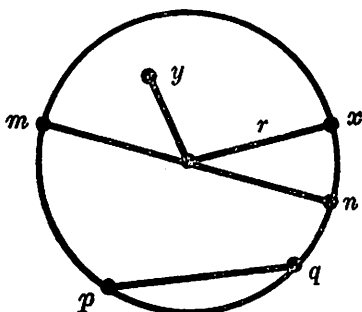
CHAPITRE XXXXV

QUELQUES FIGURES GÉOMÉTRIQUES

1. Circonférence

Une circonférence est l'ensemble de tous les points $x \in \Pi$ équidistants d'un point donné $o \in \Pi$.

$$C(o, r) = \{x \mid x \in \Pi \text{ en } [ox] = r\}$$



o est le centre

$[ox]$ est le rayon

$[mn]$ est le diamètre

$[pq]$ est une corde

La partie de Π intérieure à la circonférence est appelée disque.

$$\text{Disque}(o, r) = \{y \mid y \in \Pi \text{ et } [oy] < r\}$$

2. Triangle

Un triangle est la figure que l'on obtient en joignant deux à deux trois points de Π non alignés.

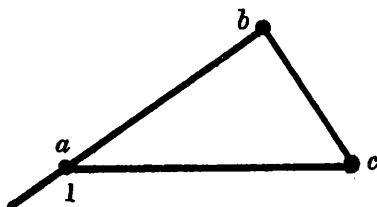
Dans le triangle abc :

a, b et c sont les sommets

$\hat{a}, \hat{b}$ et $\hat{c}$ sont les angles

$[ab], [bc]$ et $[ca]$ sont les côtés

$\hat{a}_1$ est un angle extérieur.



Propriétés :

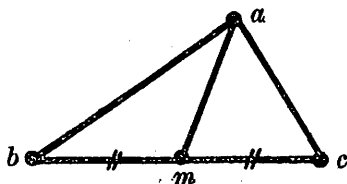
$$\begin{aligned} |\hat{a}| + |\hat{b}| + |\hat{c}| &= 2\,dr = 180^\circ \\ |\hat{a}_1| &= |\hat{b}| + |\hat{c}| \end{aligned}$$

3. Les quatre droites remarquables d'un triangle

1. On appelle médiane d'un triangle, le segment de droite qui joint un sommet au milieu du côté opposé.

$[am]$ est une médiane $\Leftrightarrow |bm| = |mc|$.

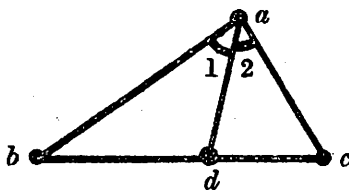
Un triangle a trois médianes.



2. La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui, issue du sommet, divise cet angle en deux parties égales.

$[ad]$ est la bissectrice de $\hat{a}$ $\Leftrightarrow |\hat{a}_1| = |\hat{a}_2|$.

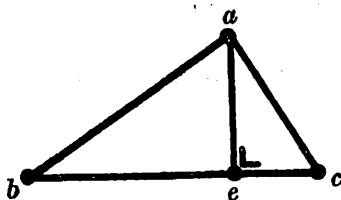
Un triangle a trois bissectrices.



3. On appelle hauteur d'un triangle, le segment de la perpendiculaire abaissée d'un sommet sur le côté opposé.

$[ae]$ est une hauteur $\Leftrightarrow [ae] \perp [bc]$.

Un triangle a trois hauteurs.

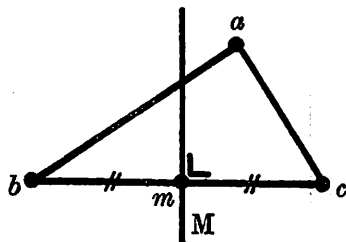


4. Une médiatrice est la droite perpendiculaire au milieu d'un côté.

M est la médiatrice de $[bc]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |bm| = |mc| \\ M \perp bc \end{cases}$$

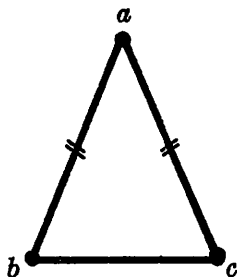
Un triangle a trois médiatrices.



4. Triangles particuliers

A. Triangle isocèle

Un triangle est isocèle, si deux côtés sont isométriques.



$$|ab| = |ac| \Leftrightarrow abc \text{ est isocèle}$$

$[ab]$, $[ac]$ et $[bc]$ sont les côtés

$[bc]$ est la base

$\hat{a}$ est l'angle au sommet

a est le sommet

$\hat{b}$ et $\hat{c}$ sont les angles à la base.

Propriétés :

1. Construire la bissectrice D de $\hat{a} \Rightarrow |\hat{a}_1| = |\hat{a}_2|$

$$\Rightarrow S_D([ab]) = [ac] \text{ et } S_D([ac]) = [ab]$$

$$\text{Or, } [ab] = [ac]$$

$$\Rightarrow S_D(b) = c \text{ et } S_D(c) = b$$

$\Rightarrow$ D est l'axe de symétrie de $[bc]$ et de abc .

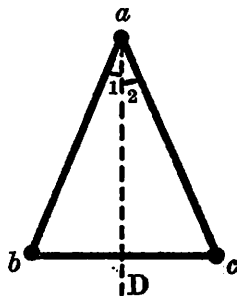
Donc :

D est la bissectrice de $\hat{a}$

D est la médiatrice à $[bc]$

D est la médiane par rapport à $[bc]$

D est la hauteur par rapport à $[bc]$



Les quatre droites remarquables coïncident.

2. Par suite de la symétrie, on peut dire que $|\hat{b}| = |\hat{c}|$.

Dans un triangle isocèle, les angles à la base sont égaux.

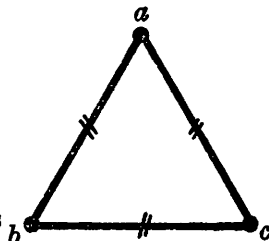
B. Triangle équilatéral

Un triangle est équilatéral, si ses trois côtés sont isométriques.

$$|ab| = |bc| = |ca| \Leftrightarrow abc \text{ est équilatéral.}$$

Propriété : $|\hat{a}| = |\hat{b}| = |\hat{c}|$

Dans un triangle équilatéral, les trois angles sont égaux.



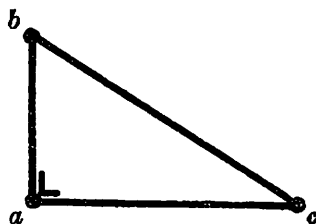
C. Triangle rectangle

Un triangle est dit rectangle, si un angle est droit.

$$\hat{a} = 1 \text{ dr} = 90^\circ \Rightarrow abc \text{ est un triangle rectangle}$$

$[ab]$ et $[ac]$ sont les cathètes

$[bc]$ est l'hypoténuse.

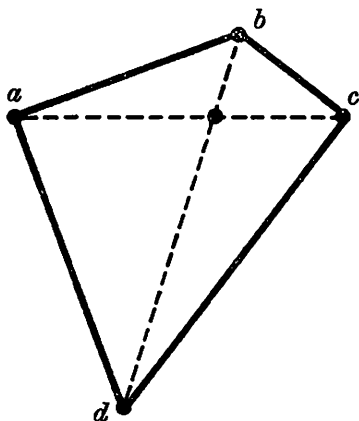


$$\text{Propriété : } |\hat{b}| + |\hat{c}| = 1 \text{ dr} = 90^\circ$$

Dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires.

5. Quadrilatère

Un quadrilatère est la figure que l'on obtient en joignant quatre points de Π , non situés, trois par trois, en ligne droite.



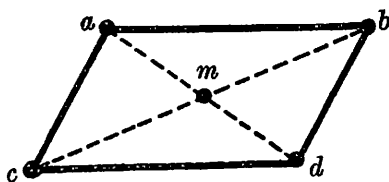
quadrilatère $abcd$
 $[ac]$ et $[bd]$ sont les diagonales.

6. Quadrilatères particuliers

A. Parallélogramme

Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés sont parallèles deux à deux.

$$\left. \begin{array}{l} ab \parallel cd \\ ac \parallel bd \end{array} \right\} \Leftrightarrow abcd \text{ est un parallélogramme.}$$



Propriétés :

1. Dans un parallélogramme, deux angles opposés sont égaux.

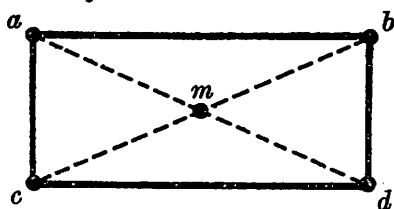
$$|\hat{a}| = |\hat{d}| \quad \text{et} \quad |\hat{c}| = |\hat{b}|$$

2. Dans un parallélogramme, deux côtés opposés sont égaux.

$$|ab| = |cd| \quad \text{et} \quad |ac| = |bd|$$

3. Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leurs milieux.

$$|am| = |md| \quad \text{et} \quad |cm| = |mb|$$

B. *Rectangle*


Un rectangle est un quadrilatère dont les quatre angles sont égaux.

$$|\hat{a}| = |\hat{b}| = |\hat{c}| = |\hat{d}| \\ \Leftrightarrow abcd \text{ est un rectangle.}$$

Propriétés :

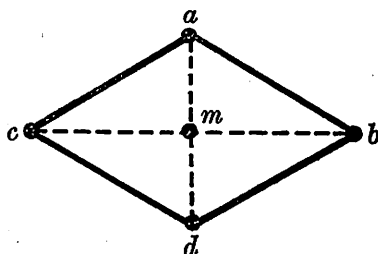
1. Un rectangle est un parallélogramme.
2. Dans un rectangle, les diagonales sont égales.

$$|ad| = |cb|$$

 C. *Losange*

Un losange est un quadrilatère, dont les quatre côtés sont égaux.

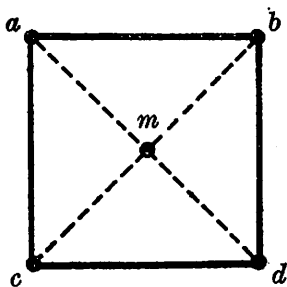
$$|ab| = |bd| = |dc| = |ca| \\ \Leftrightarrow abcd \text{ est un losange.}$$



Propriétés :

1. Un losange est un parallélogramme.
2. Dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires entre elles.

$$[ad] \perp [cb]$$

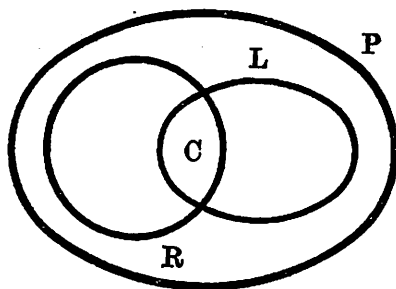
 D. *Carré*


Un carré est un quadrilatère ayant les quatre côtés et les quatre angles égaux.

$$\left. \begin{array}{l} |\hat{a}| = |\hat{b}| = |\hat{c}| = |\hat{d}| \\ |ab| = |bd| = |dc| = |ca| \end{array} \right\} \Rightarrow abcd \text{ est un carré.}$$

Propriétés :

1. Un carré est un parallélogramme.
2. Un carré est un rectangle.
3. Un carré est un losange.



Résumé :

$P = \{ x \mid x \text{ est un parallélogramme} \}$

$R = \{ y \mid y \text{ est un rectangle} \}$

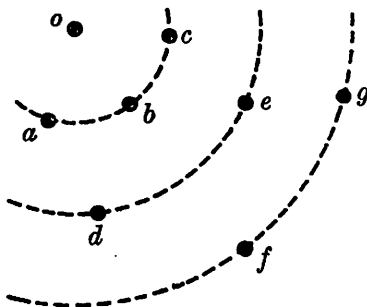
$L = \{ z \mid z \text{ est un losange} \}$

$C = \{ v \mid v \text{ est un carré} \}$

Exercices

1. $E = \{ o, a, b, c, d, e, f, g \}$

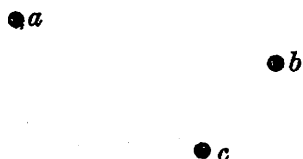
- a. Ecrivez et dessinez $R : E \rightarrow E$ « ... est à la même distance du point o que ... »
- b. Quelle est cette relation ?
- c. Quelles sont les classes de la partition ?



2. Où se trouvent les centres de toutes les circonférences passant par a et par b ?



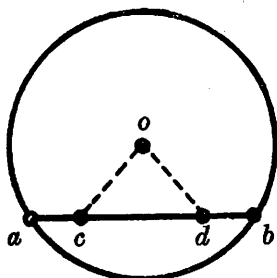
3. Construisez la circonférence qui passe par a , b et c .



4. Dans un cercle, la perpendiculaire abaissée du centre sur une corde, est médiatrice de celle-ci. Démontrez.

5. Démontrez que

$$|ac| = |bd| \Rightarrow |oc| = |od|$$



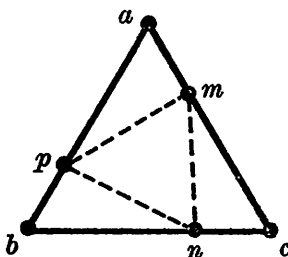
6. Un triangle est isocèle, lorsqu'il a deux angles égaux. Démontrez.
7. Démontrez que, dans un triangle équilatéral, les angles sont égaux. Énoncez et démontrez la réciproque de cette propriété.
8. Calculez en degrés, la valeur d'un angle dans un triangle équilatéral.
9. Situez les axes de symétrie dans un triangle équilatéral.
10. Si, dans un triangle, une hauteur coupe le côté opposé en son milieu, ce triangle est isocèle. Démontrez.

11. On donne : abc est équilatéral

$$m \in [ac], n \in [cb], p \in [ba]$$

$$|am| = |cn| = |bp|$$

Démontrez que mnp est équilatéral.



12. Calculez les angles à la base d'un triangle isocèle, l'angle au sommet étant de $23^\circ 47' 42''$.
13. Démontrez que le triangle abc est rectangle, si $|\hat{a}| - |\hat{c}| = |\hat{b}|$.
14. Calculez la somme des angles d'un quadrilatère quelconque.

15. Montrez que, dans un rectangle, les quatre angles sont droits.
16. Dans un triangle rectangle, la médiane relative à l'hypoténuse égale la moitié de celle-ci. Démontrez.
17. Une diagonale divise un parallélogramme en deux triangles isométriques. Démontrez.
18. Démontrez que, dans un losange, les diagonales se coupent perpendiculairement.
19. Démontrez que, dans un rectangle, les diagonales sont égales.
20. Lorsque, dans un quadrilatère, deux côtés sont égaux et parallèles, ce quadrilatère est un parallélogramme. Démontrez.
21. Énoncez et démontrez les réciproques des trois propriétés du parallélogramme.

CHAPITRE XXXXVI

MONÔMES — FONCTIONS DE MONÔMES

1. Monôme

Un monôme est un produit de plusieurs facteurs.

Le monôme

$$4 \times x \times x \times y \times (-y) \times x \times \left(-\frac{2}{9}\right)$$

peut s'écrire plus simplement :

$$\frac{8}{9} x^3 y^2$$

$\frac{8}{9}$ est le coefficient

$x^3 y^2$ est la partie littérale.

2. Autres exemples

$7a^2$ est un monôme ayant pour coefficient 7
et pour partie littérale a^2

x est un monôme ayant pour coefficient 1
et pour partie littérale x

$-y$ est un monôme ayant pour coefficient -1
et pour partie littérale y

4 est un monôme ayant pour coefficient 4
et une partie littérale de puissance zéro, égale à 1.

3. Monômes semblables

Des monômes sont semblables, s'ils possèdent la même partie littérale.

$3a^2b$, $-7a^2b$, $\frac{3}{4}a^2b$ et $0,5a^2b$ sont semblables.

$3a^2b$, $-7a^3$ et $\frac{3}{4}ab$ ne sont pas semblables.

4. Degré d'un monôme

A. *Le degré d'un monôme par rapport à une lettre est l'exposant de cette lettre dans le monôme.*

— $5x^2$ est du 2^e degré par rapport à x ,

$7y$ est du 1^{er} degré par rapport à y .

$2x^3y^2$ est du 3^e degré par rapport à x et du 2^e degré par rapport à y .

Dans $6a^0 = 6$, 6 est du degré zéro par rapport à a .

B. *Le degré d'un monôme par rapport à deux ou plusieurs lettres est la somme des exposants de ces lettres.*

$3x^3y^2z$ est du cinquième degré par rapport à x et y , du quatrième degré par rapport à x et z , du troisième degré par rapport à y et z et du sixième degré par rapport à x , y et z .

C. *Le degré d'un monôme est la somme de tous ses exposants.*

$7x^2y^3z$ est du sixième degré.

5. Fonctions de monômes

Des fonctions telles que $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} : x \rightarrow x^2$

$$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} : x \rightarrow -3x^2$$

$$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} : x \rightarrow \frac{2}{7}x^3$$

sont des fonctions de monômes parce que les images x^2 , $-3x^2$

et $\frac{2}{7}x^3$ sont des monômes. En général, nous écrirons :

$$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} : x \rightarrow f(x)$$

Remarque :

Une fonction telle que $f: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} : (x, y) \rightarrow 3xy^2$ est une fonction de monôme à deux lettres. En général, nous écrirons :

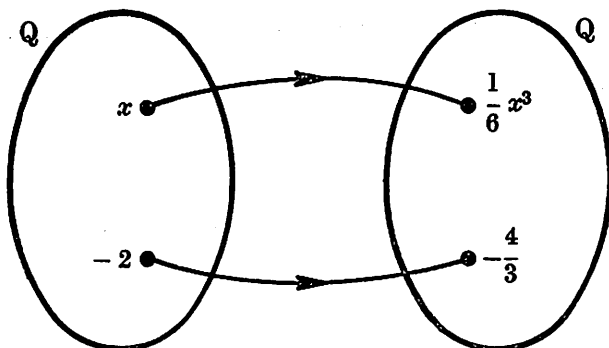
$$f: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} : (x, y) \rightarrow f(x, y)$$

Exemples :

1. Calculez l'image de -2 par la fonction

$$f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} : x \rightarrow \frac{1}{6} x^3$$

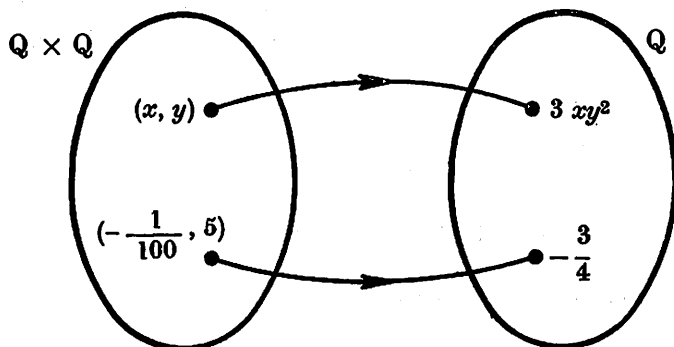
$$f(-2) = \frac{1}{6}(-2)^3 = \frac{1}{6}(-8) = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$$



2. Calculez l'image de $(-\frac{1}{100}, 5)$ par la fonction

$$f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} : (x, y) \rightarrow 3xy^2$$

$$f\left(-\frac{1}{100}, 5\right) = 3\left(-\frac{1}{100}\right) \cdot 5^2 = 3\left(-\frac{1}{100}\right) \cdot 25 = -\frac{75}{100} = -\frac{3}{4}$$



6. Opérations sur les monômes

A. Somme de monômes semblables

$$15x + 7x = (15 + 7)x = 22x$$

$$2x^2y + (-8x^2y) + 3x^2y =$$

$$2x^2y - 8x^2y + 3x^2y = (2 - 8 + 3)x^2y = -3x^2y.$$

- Règle* : 1. Additionner les coefficients.
2. Conserver la partie littérale.

$$\begin{aligned}\text{Exemples : } 3x^2 - 7x^2 &= -4x^2 \\ 5xy - 3xy + 2xy &= 4xy.\end{aligned}$$

B. Différence de monômes semblables

Pour soustraire un monôme, on ajoute son opposé.

Exemples :

$$\begin{aligned}15x - (-4x) &= 15x + 4x = 19x. \\ -3x^2y - (+7x^2y) &= -3x^2y - 7x^2y = -10x^2y.\end{aligned}$$

L'addition et la soustraction de monômes semblables sont appelées réduction de monômes semblables.

C. Produit

$$\begin{aligned}(-3x^3y)(2xy^2) &= -3 \cdot x^3 \cdot y \cdot 2 \cdot x \cdot y^2 \\ &= -3 \cdot 2 \cdot x^3 \cdot x \cdot y \cdot y^2 \\ &= -6x^4y^3\end{aligned}$$

- Règle* : 1. Effectuer le produit des coefficients.
2. Ecrire les lettres qui figurent dans les monômes en affectant chacune d'elles d'un exposant égal à la somme de ses exposants dans les monômes.

Exemples :

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{3}x^2y^3\right)(-6xy^3) &= -4x^3y^6 \\ (-5xyz^4)(-2x^2z)(7xy^3z^2) &= 70x^4y^4z^7\end{aligned}$$

D. Élévation aux puissances

$$\begin{aligned}(-2xy^2)^3 &= (-2)^3 \cdot x^3 \cdot (y^2)^3 \\ &= -8x^3y^6\end{aligned}$$

- Règle* : 1. Elever le coefficient à la puissance indiquée.
2. Effectuer le produit de chacun des exposants par la puissance indiquée.

Exemples :

$$\left(-\frac{1}{4}x^3y^2z\right)^3 = -\frac{1}{64}x^9y^6z^3$$

$$\left(-\frac{2}{3}a^4b^2c\right)^2 = \frac{4}{9}a^8b^4c^2$$

Exercices

1. Simplifiez les monômes suivants :

$$x \times 3 \times (-2) \times \left(-\frac{1}{4}\right) \times y \times x \times (-x) \times y \times z$$

$$2a \times 3b \times (-6) \times \left(-\frac{1}{12}a\right) \times a \times b \times 3a^2 \times b \times (-1)$$

$$(-2xy) \times (-3x) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times x^4 \times y$$

2. Déterminez le degré de :

$$3x^2yz^4 \text{ en } -6x^4y^2z^3$$

a) par rapport à x

e) par rapport à x et z

b) par rapport à y

f) par rapport à y et z

c) par rapport à z

g) par rapport à x, y et z .

d) par rapport à x et y

3. Calculez l'image de $-4, -2, 0, 1, \frac{3}{4}, \frac{6}{11}$ par

$$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}: x \rightarrow 2x$$

$$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}: x \rightarrow 3x^2$$

$$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}: x \rightarrow 2x^4$$

$$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}: x \rightarrow -\frac{3}{4}x^2$$

Dessinez les graphes.

4. Calculez l'image de $(1, 2), \left(-3, -\frac{1}{2}\right)$ et $\left(-\frac{3}{4}, 2\right)$ par

$$f: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}: (x, y) \rightarrow 2xy$$

$$f: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}: (x, y) \rightarrow -3x^2y$$

$$f: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}: (x, y) \rightarrow -\frac{1}{4}x^2y^2$$

Dessinez les graphes.

5. Additionnez :

1) $3x^2, 4x^2, -5x^2, -7x^2, -6x^2$ en $14x^2$

2) $5a^2b, -4a^2b, -6a^2b, 7a^2b$ en $-8a^2b$.

3) $\frac{1}{3}x^2y^3, -\frac{1}{2}x^2y^3, -4x^2y^3, \frac{5}{6}x^2y^3$ en $5x^2y^3$.

4) $\frac{3}{8}x^3y^2z, -\frac{1}{3}x^3y^2z, \frac{5}{12}x^3y^2z$ en $-7x^3y^2z$.

5) $-\frac{1}{2}abc, \frac{1}{3}abc, \frac{4}{5}abc, -\frac{3}{8}abc$ en $-\frac{2}{5}abc$.

6. Soustrayez :

1) $5x$ de $3x$

5) $3a^2b$ de $-5a^2b$

2) $-2x$ de $4x$

6) $6a^2$ de $-7a^2$

3) $3x$ de $-7x$

7) $3abc$ de $6abc$

4) $-5x$ de $-6x$

8) $-2xy^2$ de $-3xy^2$

7. Effectuez :

1) $3x^2 + (-4x^2) + 5x^2 + (-6x^2) + (-7x^2) + (-4x^2)$

2) $\frac{1}{2}abc - \left(-\frac{1}{3}abc\right) + \frac{1}{5}abc - \left(-\frac{1}{6}abc\right)$

3) $\frac{2}{5}x^2y - \left(+\frac{3}{4}x^2y\right) + \left(-\frac{1}{8}x^2y\right) - \left(-\frac{1}{4}x^2y\right)$

4) $-3a^2b^2c + (-7a^2b^2c) - \frac{7}{8}a^2b^2c + \frac{3}{4}a^2b^2c$

8. Effectuez :

1) $3x \cdot 2x$

5) $2x^2 \cdot 3x^2y$

2) $(-4x)(-5x)$

6) $(-3x^2) \cdot 2xy$

3) $7x \cdot (-3x)$

7) $\left(-\frac{1}{2}xy\right)\left(-\frac{1}{3}x^3y^2z\right)$

4) $(-2x)8x$

8) $\left(-\frac{3}{4}a^2b^2c^3\right)\left(-\frac{1}{3}a^3b^3c^2\right)$

9) $(-5abc^4)(-2a^2b) \cdot 7ab^4c^5$

10) $\left(-\frac{1}{2}a^3b^2\right)\left(-\frac{1}{4}ab\right)\left(-\frac{3}{4}a^3b^2cd\right)\left(-4abc\right)$

9. Effectuez :

1) $(2a)^3$

6) $(-2a^3b^4c^2)^3$

2) $(4a^2b)^2$

7) $\left(-\frac{3}{4}a^3b\right)^4$

3) $(-2sr^2)^2$

8) $(\pi D^2)^3$

4) $\left(-\frac{1}{2}pq\right)^3$

9) $\left(\frac{1}{2}gt^2\right)^2$

5) $(-7x^3y^2z)^3$

10) $(I \cdot R)^3$

CHAPITRE XXXXVII

POLYNÔMES — FONCTIONS DE POLYNÔMES

1. Notion

Un polynôme est une somme dont les termes sont des monômes.

$3x^3 + 5x^3$ est un binôme; $3x^3$ et $5x^3$ sont les termes.

$3x^2y - 4xy + 5x$ est un trinôme; $3x^2y$, $-4xy$ et $5x$ sont les termes.

$3a + 2b - c + 2d$ est un polynôme.

2. Réduction des termes semblables d'un polynôme

Réduire les termes semblables d'un polynôme, c'est les remplacer par leur somme effectuée.

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 7xy - 5x^2 + 3y^2 + 8x^2 - 3xy + 5y^2 = \\ \hline 6x^2 + 4xy + 8y^2 \end{array}$$

3. Polynôme ordonné

Un polynôme doit toujours être ordonné par rapport aux puissances d'une lettre.

Exemple 1 : $4x^4 - 3x^2 + x - 1 + 2x^3$

ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x , s'écrit :

$$4x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x - 1$$

ordonné par rapport aux puissances croissantes de x , s'écrit :

$$-1 + x - 3x^2 + 2x^3 + 4x^4$$

Exemple 2 : $5x^3y + 8xy^3 - 3x^2 - 7y^2$

ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x , s'écrit :

$$5x^3y - 3x^2 + 8xy^3 - 7y^2$$

ordonné par rapport aux puissances croissantes de x , s'écrit :

$$-7y^2 + 8xy^3 - 3x^2 + 5x^3y$$

ordonné par rapport aux puissances décroissantes de y , s'écrit :

$$8xy^3 - 7y^2 + 5x^3y - 3x^2$$

ordonné par rapport aux puissances croissantes de y , s'écrit :

$$-3x^2 + 5x^3y - 7y^2 + 8xy^3$$

Généralement, un polynôme est ordonné par rapport aux puissances décroissantes d'une lettre. On réduit les termes semblables et on ordonne le polynôme simultanément.

$$\begin{aligned} & \underline{\underline{5y^3}} - \underline{\underline{7y}} + \underline{\underline{8y^3}} - \underline{\underline{2}} + \underline{\underline{7y^2}} - \underline{\underline{3y}} + \underline{\underline{5}} + \underline{\underline{5y^4}} - \underline{\underline{3y^2}} - \underline{\underline{7}} - \underline{\underline{6y^3}} \\ &= 5y^4 + 2y^3 + 9y^2 - 10y - 4 \end{aligned}$$

4. Degré d'un polynôme

Le degré d'un polynôme par rapport à une lettre, est donné par le plus fort exposant de cette lettre.

$8x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 2x - 7$ est du quatrième degré en x .

$5x^3y^2 - 3x^2 - 7y^4$ est du troisième degré en x , du quatrième degré en y et du cinquième degré en x et y .

5. Polynômes complets

$5x^3 - 3x^2 + 7x - 2$ est un polynôme complet, parce qu'il renferme toutes les puissances de x , depuis la plus élevée jusque x^0 .

$3x^3 - 7x + 13$ est un polynôme incomplet.

$5x^3 + 3x^2y^2 + 7x + 2y^3$ est un polynôme complet par rapport à x , mais incomplet par rapport à y .

6. Fonctions de polynômes

Des fonctions telles que :

$$f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} : x \rightarrow x + 5$$

$$f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} : x \rightarrow 3x^2 - 7x + 2$$

$$f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} : x \rightarrow 5x^4 - 7x^2 + 3$$

$$f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} : (x, y) \rightarrow 3x^2y - 2xy + y^2$$

sont des fonctions de polynômes, parce que les images $x + 5$, $3x^2y - xy + y^2 \dots$ sont des polynômes. D'une façon générale, nous écrirons :

$$f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} : x \rightarrow f(x)$$

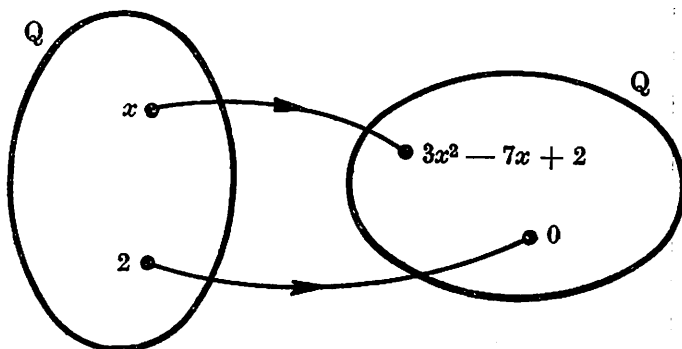
$$f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} : (x, y) \rightarrow f(x, y)$$

Exemples :

1. Calculez l'image de 2 par la fonction

$$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} : x \rightarrow 3x^2 - 7x + 2$$

$$f(2) = 3 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 2 = 3 \cdot 4 - 7 \cdot 2 + 2 = 12 - 14 + 2 = 0$$



2. Calculez l'image de $\left(\frac{1}{2}, -4\right)$ par la fonction

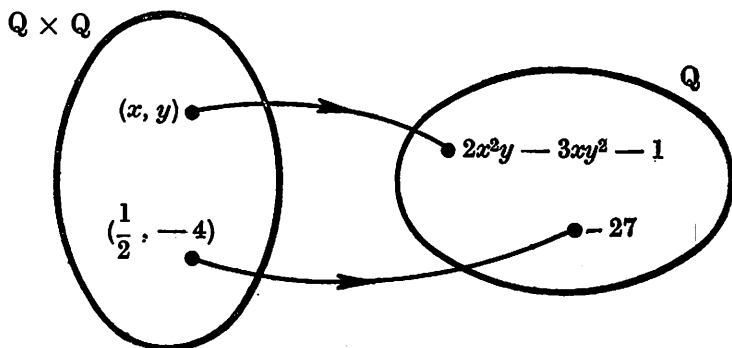
$$f: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} : (x, y) \rightarrow 2x^2y - 3xy^2 - 1$$

$$f\left(\frac{1}{2}, -4\right) = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (-4) - 3 \left(\frac{1}{2}\right) (-4)^2 - 1$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{4} (-4) - 3 \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 16 - 1$$

$$= -2 - 24 - 1$$

$$= -27.$$



7. Opérations sur les polynômes

A. Addition

Pour additionner des polynômes, on les écrit l'un à la suite de l'autre en conservant les signes des différents termes.

Exemple 1 :

$$\begin{aligned} (5x^2 - 3xy + 2y^2) + (-3x^2 + 2xy - 7y^2) + (6x^2 - 4xy + 6y^2) \\ = 5x^2 - 3xy + 2y^2 - 3x^2 + 2xy - 7y^2 + 6x^2 - 4xy + 6y^2 \\ = 8x^2 - 5xy + y^2 \end{aligned}$$

Disposition pratique : Après avoir ordonné les polynômes, on les écrit les uns en-dessous des autres, en plaçant les termes semblables dans la même colonne. Il suffit alors d'effectuer les opérations indiquées.

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 3xy + 2y^2 \\ - 3x^2 + 2xy - 7y^2 \\ 6x^2 - 4xy + 6y^2 \\ \hline 8x^2 - 5xy + y^2 \end{array}$$

Exemple 2 :

$$\begin{array}{r} (3x^3 - 7x^2 + 2x) + (5x^2 - 7x + 2) + (x^3 - 5x + 7) \\ 3x^3 - 7x^2 + 2x \\ \quad 5x^2 - 7x + 2 \\ \quad \quad x^3 \quad \quad - 5x + 7 \\ \hline 4x^3 - 2x^2 - 10x + 9 \end{array}$$

B. Soustraction

Pour soustraire un polynôme d'un autre polynôme, on les additionne, en changeant les signes des termes du polynôme à soustraire.

$$\begin{aligned} (5x^2 - 3x + 7) - (8x^2 + 5x - 2) \\ = (5x^2 - 3x + 7) + (-8x^2 - 5x + 2) \\ = 5x^2 - 3x + 7 - 8x^2 - 5x + 2 \\ = -3x^2 - 8x + 9 \end{aligned}$$

C. *Multiplication*1. *Produit d'un polynôme par un monôme*

$$\begin{aligned}
 (6x^2 - 3x + 2)(-2x) &= 6x^2(-2x) - 3x(-2x) + 2(-2x) \\
 &= -12x^3 + 6x^2 - 4x \\
 5xy(3x^2 - 7xy + y^2) &= 5xy \cdot 3x^2 + 5xy(-7xy) + 5xy \cdot y^2 \\
 &= 15x^3y - 35x^2y^2 + 5xy^3
 \end{aligned}$$

Règle : a) Multiplier chaque terme du polynôme par le monôme.

b) Faire la somme des résultats obtenus.

2. *Produit de deux polynômes*

$$\begin{aligned}
 (2x - 3)(5x + 2) &= 2x \cdot 5x + 2x \cdot 2 - 3 \cdot 5x - 3 \cdot 2 \\
 &= 10x^2 + 4x - 15x - 6 \\
 &= 10x^2 - 11x - 6
 \end{aligned}$$

Règle : a) Multiplier le multiplicande successivement par chaque terme du multiplicateur.

b) Additionner les produits partiels en réduisant les termes semblables.

Disposition pratique : Nous ordonnons les deux polynômes et nous disposons les calculs comme suit :

$$\begin{array}{r}
 \text{I.} \quad M = 2x - 3 \\
 \quad \quad 5x + 2 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 M \times 5x = 10x^2 - 15x \\
 M \times 2 = \quad \quad + 4x - 6 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$10x^2 - 11x - 6$$

$$\begin{array}{r}
 \text{II. } (-7x + 2 + 3x^3)(5x + 3x^2 - 3) \\
 \quad \quad 3x^3 \quad \quad - 7x + 2 \\
 \quad \quad \quad \quad 3x^2 + 5x - 3 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 9x^5 \quad \quad - 21x^3 + 6x^2 \\
 15x^4 \quad \quad - 35x^2 + 10x \\
 \quad \quad - 9x^3 \quad \quad + 21x - 6 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$9x^5 + 15x^4 - 30x^3 - 29x^2 + 31x - 6$$

Exercices

1. Réduisez les termes semblables et ordonnez :

a) par rapport aux puissances décroissantes de a

b) par rapport aux puissances croissantes de a .

$$1) 5a^2 - 7a + 8a^3 - 2 + 7a^2 - 3a + 5 + 5a^4 - 3a^2 - 7 - 6a^3$$

$$2) 3a^2b + 5ab^2 - 7a^3 - 4 - \frac{1}{2}ab^2 - 2ab^2 - a^2b + 7$$

$$3) \frac{1}{3}a^4 - \frac{2}{3}ab^3 + a^2b^2 - 7 - 3a^2b^2$$

$$4) a^5 - a^4b - 3a^3b^2 + 2a^2b^3 - 3ab^4 + 3a^3b^2 + b^5$$

Y a-t-il des polynômes complets ?

2. Les coefficients d'un polynôme complet, ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x , sont respectivement

$$3, \quad \frac{1}{2}, \quad -4, \quad 6, \quad 7$$

Ecrivez ce polynôme. De quel degré est-il ?

3. De quel degré les polynômes suivants sont-ils

a) par rapport à x ? b) par rapport à y ? c) par rapport à x et y ?

$$3x^2y + 4x^4 + 6xy^3 - 2xy + 4$$

$$5x^4 - 3x^3y^2 - 2xy + 7x^2y^3 - 4x^4 + 7xy - 3$$

4. Calculez l'image de $-3, -2, 0, \frac{1}{2}, -\frac{3}{4}$ par

$$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} : x \rightarrow 2x^2 + 1$$

$$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} : x \rightarrow 4x^2 + 3x - 1$$

$$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} : x \rightarrow \frac{1}{4}x^3 - 2x^2 + \frac{3}{8}x - 4$$

Dessinez les graphes.

5. Calculez l'image de $(-1, -3)$, $\left(\frac{1}{2}, -3\right)$, $\left(-\frac{5}{6}, 2\right)$ par

$$f: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} : (x, y) \rightarrow 2x^2y - 3xy^2$$

$$f: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} : (x, y) \rightarrow 3x^2y - 4x^3 + 2xy^2 + y^3$$

$$f: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} : (a, b) \rightarrow a^2b - 3a^3b + 4$$

Dessinez les graphes.

6. Additionnez :

1) $4x^2 + 3x - 5$ et $6x^2 - 5x - 1$

2) $2x^2y + 4x^3 - 2xy^2 - y^3$ et $7xy^2 - 4y^3 + 4x^2y - 4x^3$

3) $7a^2b + 7a^3 - b^3$, $3ab^2 + 2a^3 - 2a^2b + b^3$ et $4b^3 - 2a^2b - 4a^3 + 3ab^2$

4) $4a^3 - 2a^2b + 4ab^2$, $-3a^3 + 2a^2b - 2b^3$, $a^3 + 4b^3$ et $-3a^2b - 2ab^2 - 3b^3$

5) $\frac{1}{4}x^3 - \frac{2}{5}x^2y + 7xy^2$, $\frac{1}{2}y^3 - x^2y$, $-\frac{1}{5}xy^2 + y^3 - x^3$ et $\frac{1}{4}x^2y + \frac{2}{5}y^3$

7. Soustrayez :

1) $3x^2 - 4x + 5$ de $5x^2 - 7x - 1$

2) $7m^2n - 4mn^2 + 5m^3 - 2n^3$ de $2mn^2 + 5n^3 + 2m^2n - m^3$

3) $\frac{3}{4}p^2q + \frac{1}{3}pq^2 - \frac{3}{8}p^3$ de $\frac{1}{2}p^2q - \frac{3}{4}p^3$

4) $7a^3b - 4ab^3 + 7a^4 - 2$ de $3a^3b - 2a^4 + b^4 - 1$

5) $\frac{1}{6}a^4b - \frac{1}{8}a$ de $2a^4b + a^2 + \frac{1}{4}a - 1$

8. Effectuez :

$$\begin{aligned} & (3x^2 - 4x + 1) - (7x^2 + 4 - x) + (3x - 1) - (2x - 4 + 7x^2) \\ & - [(3x^2 - 7x + 1) - (2x + 4)] - [(7x - 3) + (x^2 - 6x - 5)] \\ & \quad + (2x + 1) \\ & [(3a^2b - 4ab^2 + b^3) - (a^3 + 2a^2b - ab^2 + 3b^3)] - (4a^2b - 7ab^2 \\ & \quad + b^3) \end{aligned}$$

9. Effectuez :

1) $3a(a + b)$

5) $2p(p^2 + q)$

2) $x(3x + 2)$

6) $3ab(a^2b^2 - 1)$

3) $9x(2x + 3)$

7) $-7xy(4x^2y + 3xy^2 + x^3)$

4) $7x^2y(4x + 1)$

8) $(4x^2y - 7xy^2 + 6x^3)(-4x^2y^2)$

10. Effectuez :

$$3a(a+b) - 7(a^2 + 2ab) - ab(a+2b) - 4(a^2 + 2ab + b^2)$$

$$\frac{1}{4}xy(x+y) - \frac{1}{2}x(xy+y^2) - 4(x^2y + 2xy^2 + 6)$$

11. Calculez :

$$1) (1 + 2x + 3x^2)(1 + x)$$

$$2) (4x^3 - 2x^2 + 1 - 4x)(2 - x + 2x^2)$$

$$3) (7a^5 - 3a^2b^3 + 5ab^4 - 6b^5)(3a^2 - 5ab - 2b^2)$$

$$4) (a^4 + a^2 + 1)(a^4 - a^2 + 1)$$

$$5) \left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{4}xy - \frac{2}{5}y^2 \right) (x^2 - 2xy + \frac{1}{2}y^2)$$

$$6) (3a^5 - 2a^4 + 7a^3 - 2a^2 - a + 1)(2a^3 - a^2 + a - 4)$$

$$7) \left(\frac{1}{4}x^2y + \frac{3}{5}xy^2 - 4x^2 + y^2 \right) (3x + 2y)$$

$$8) (2x^2 + 3x + 1)(4x - 1)(7x^2 + 1 - 4x)(x - 2)$$

$$9) \left(\frac{1}{2}x^2y + 4x^3 - 2xy^2 + \frac{1}{3}y^3 \right) (2x^3 - x^2y - y^3)$$

$$\left(4x^2y + \frac{2}{5}xy^2 - 4x^3 + \frac{1}{2}y^3 \right)$$

CHAPITRE XXXXVIII

PRODUITS REMARQUABLES

1. Produit de deux binômes conjugués

Deux binômes sont dits conjugués, s'ils diffèrent l'un de l'autre par le signe de l'un des deux termes.

Termes égaux : a et a

Termes opposés : b et $-b$ $(a + b)(a - b) = ?$

$$a + b$$

$$a - b$$

$$a^2 + ab$$

$$-ab - b^2$$

$$a^2$$

$$-b^2$$

$$\forall a, b \in \mathbb{Q} :$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Règle : Le produit de deux binômes conjugués est égal à la différence des carrés des termes égaux et des termes opposés.

Exemples :

$$(a + 3)(a - 3) = a^2 - 9$$

$$(4a^2 + 5b)(4a^2 - 5b) = 16a^4 - 25b^2$$

$$(-4x + 2y)(-4x - 2y) = 16x^2 - 4y^2$$

$$(3ab + 1)(-3ab + 1) = 1 - 9a^2b^2$$

$$19 \times 21 = (20 - 1)(20 + 1) = 400 - 1 = 399$$

2. Carré d'un binôme

$$(a + b)^2 = ?$$

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$

$$a + b$$

$$a + b$$

$$a^2 + ab$$

$$+ab + b^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2$$

$$\forall a, b \in \mathbb{Q} :$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Règle : Le carré d'un binôme est un trinôme renfermant :

1. le carré du premier terme
2. le double produit des deux termes
3. le carré du second terme.

Exemples :

$$(3x + 7)^2 = 9x^2 + 42x + 49$$

$$(2a - b)^2 = 4a^2 - 4ab + b^2$$

$$(-2a - 3)^2 = 4a^2 + 12a + 9$$

$$(-5x + 2y)^2 = 25x^2 - 20xy + 4y^2$$

$$41^2 = (40 + 1)^2 = 1600 + 80 + 1 = 1681$$

$$28^2 = (30 - 2)^2 = 900 - 120 + 4 = 784$$

3. Cube d'un binôme

$$(a + b)^3 = ?$$

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b)^2 (a + b) \\ &= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline\end{array}$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\forall a, b \in \mathbb{Q} :$$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Règle : Le cube d'un binôme est un quadrinôme renfermant :

1. le cube du premier terme
2. le triple produit du carré du premier par le second
3. le triple produit du premier par le carré du second
4. le cube du second terme.

Exemples :

$$(3a + 2)^3 = 27a^3 + 54a^2 + 36a + 8$$

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$(-2a + 1)^3 = -8a^3 + 12a^2 - 6a + 1$$

$$(-x - 2y)^3 = -x^3 - 6x^2y - 12xy^2 - 8y^3$$

4. Carré d'un polynôme

$$(a + b + c)^2 = ? \quad (a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) \\ = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Q} :$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Règle : Le carré d'un polynôme est un polynôme, composé de :

1. la somme des carrés de ses différents termes
2. la somme des doubles produits des termes pris deux à deux.

Exemples :

$$(3a - 2b + 5c)^2 = 9a^2 + 4b^2 + 25c^2 - 12ab + 30ac - 20bc$$

$$(x - y + z + 2p)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 4p^2 - 2xy + 2xz + 4xp - 2yz - 4yp + 4zp.$$

5. Produit de deux binômes du premier degré en x

Terme commun : $+x$

Termes inégaux : $+a$ et $+b$

$$(x + a)(x + b) = ?$$

$$x + a$$

$$x + b$$

$$x^2 + ax$$

$$+bx + ab$$

$$x^2 + (a+b)x + ab$$

$$\forall x, a, b \in \mathbb{Q} :$$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

Règle : Le produit de deux binômes du premier degré en x est un trinôme, composé :

1. du carré du terme commun
2. du produit de la somme des termes inégaux par le terme commun
3. du produit des termes inégaux.

Exemples :

$$(a+2)(a+3) = a^2 + (2+3)a + 2 \cdot 3 = a^2 + 5a + 6$$

$$(3x^2-5)(3x^2-2) = 9x^4 + (-5-2) \cdot 3x^2 + (-5)(-2) \\ = 9x^4 - 21x^2 + 10$$

$$(5a+8b)(5a-3b) = 25a^2 + (8b-3b) \cdot 5a + 8b(-3b) \\ = 25a^2 + 25ab - 24b^2$$

$$(-2x+3a)(-2x-a) = 4x^2 + (3a-a)(-2x) + 3a(-a) \\ = 4x^2 - 4ax - 3a^2$$

Exercices

I. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

1. Calculez :

$$1) (2a+1)(2a-1) \qquad 6) \left(\frac{2}{3}a+4\right)\left(\frac{2}{3}a-4\right)$$

$$2) (3x-4)(3x+4) \qquad 7) \left(2-\frac{1}{4}b\right)\left(2+\frac{1}{4}b\right)$$

$$3) (2x+y)(2x-y) \qquad 8) \left(3a+\frac{2}{5}b\right)\left(3a-\frac{2}{5}b\right)$$

$$4) (4ab+c)(4ab-c) \qquad 9) \left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{5}y\right)\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}y\right)$$

$$5) (3x^2y+z)(3x^2y-z) \qquad 10) \left(\frac{3}{2}xy-\frac{4}{5}xz\right)\left(\frac{3}{2}xy+\frac{4}{5}xz\right)$$

2. Calculez :

$$1) (-a+b)(-a-b) \qquad 5) (-2x+5)(2x+5)$$

$$2) (2a-4)(-2a-4) \qquad 6) (-2xy+3z^2)(-2xy-3z^2)$$

$$3) (x-7)(7+x) \qquad 7) (-2a-3b)(2a-3b)$$

$$4) (x+y)(-x+y) \qquad 8) \left(-\frac{1}{4}x-\frac{1}{5}y\right)\left(\frac{1}{5}y-\frac{1}{4}x\right)$$

3. Calculez :

$$1) (x+1)(x-1)(x^2+1)$$

$$2) (2a-b)(2a+b)(4a^2+b^2)$$

$$3) (a^4b^4+1)(ab-1)(ab+1)(a^2b^2+1)$$

4. Calculez :

1) 28×32

3) 27×33

5) 78×82

2) 19×21

4) 42×38

6) 67×73

5. Trouvez les binômes conjugués dont le produit est donné par :

1) $a^2 - b^2$

5) $-\frac{1}{9}x^4 + \frac{1}{4}$

2) $4x^2 - 9y^2$

6) $\frac{50}{72}x^2 - 1$

3) $25 - 16x^2$

7) $1 - \frac{2}{8}x^2y^4$

4) $-\frac{25}{36}x^2y^2 + \frac{1}{4}$

8) $-16 + \frac{4}{9}x^4y^4z^2$

II.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

1. Calculez :

1) $(x + y)^2$

5) $(3a + b)^2$

9) $(3a - 2b)^2$

13) $(a^2 - b^2)^2$

2) $(p + q)^2$

6) $(a + 4b)^2$

10) $(3x + 8y)^2$

14) $(x^3 - 2y^2)^2$

3) $(a - b)^2$

7) $(x - 2y)^2$

11) $(9x - 5y)^2$

15) $(7c^2 - 5x^2)^2$

4) $(x - y)^2$

8) $(7x - 4)^2$

12) $(3a + 10b)^2$

16) $(3abc - 4xy)^2$

17) $(a^2b^2c - 7x)^2$

21) $(-2a + 4bc)^2$

18) $(-a + 3b)^2$

22) $(-3c - 4d)^2$

19) $(-4c + 5d)^2$

23) $(5abc^2 - 4xy^2z)^2$

20) $(-5x - 16y^2)^2$

24) $(-10a^2b - 4ab^2)^2$

2. Calculez :

1) 21^2 , 2) 32^2 , 3) 11^2 , 4) 18^2 , 5) 29^2 , 6) 52^2 , 7) 89^2 , 8) 91^2 .

3. Trouvez les binômes ayant pour carrés les trinômes suivants :

1) $4a^2 - 4ab + b^2$

4) $x^2 + 10x + 25$

2) $16x^2y^2 + 24xy + 9$

5) $25a^2 - 70ab + 49b^2$

3) $9 - 12x + 4x^2$

6) $16 - 104x^2y^2 + 169x^4y^4$

4. Complétez :

- | | |
|---|---|
| 1) $x^2 + 2xy + \dots = (\dots)^2$ | 6) $a^6 + \dots + b^6 = (\dots)^2$ |
| 2) $16x^2 + \dots + 9y^2 = (\dots)^2$ | 7) $144x^2 + \dots + 9y^2z^2 = (\dots)^2$ |
| 3) $\dots + 18ab + 9b^2 = (\dots)^2$ | 8) $9x^2y^2 - \dots + 16z^2 = (\dots)^2$ |
| 4) $a^2b^2 + 6ab + \dots = (\dots)^2$ | 9) $\dots - 18xy + 9y^2 = (\dots)^2$ |
| 5) $49r^2 + 70p^2r + \dots = (\dots)^2$ | 10) $25x^2y^2 + 70x^2y + \dots = (\dots)^2$ |

III.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

1. Calculez :

- | | |
|------------------|--|
| 1) $(x + 1)^3$ | 6) $(-2a - 3b)^3$ |
| 2) $(2x - y)^3$ | 7) $(a - 2xyz)^3$ |
| 3) $(2a - 3b)^3$ | 8) $(-2a + 4xy)^3$ |
| 4) $(5x + 2y)^3$ | 9) $(vt - sq)^3$ |
| 5) $(abc + 1)^3$ | 10) $\left(\frac{1}{2}pq - \frac{3}{4}sr\right)^3$ |

2. Calculez :

$$(a + 2)(a - 2)(a^2 - 4)^2$$

$$(2x + 3y)^2(2x - 3y)^2(4x^2 - 9y^2)$$

3. Trouvez les binômes ayant pour cubes les polynômes suivants :

- 1) $8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$
- 2) $64x^3 + 48x^2y + 12xy^2 + y^3$
- 3) $-\frac{1}{27}a^3 - \frac{1}{6}a^2 - \frac{1}{4}a - \frac{1}{8}$
- 4) $-27 + 27ab - 9a^2b^2 + a^3b^3$

IV.

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

1. Calculez :

- | | |
|----------------------|------------------------|
| 1) $(a + b - c)^2$ | 3) $(3a - 2b + c)^2$ |
| 2) $(2a + 3b + c)^2$ | 4) $(6pq + 3xy - d)^2$ |

- 5) $(3x + 4y + z)^2$ 8) $(-4p + 6q - 6z + x)^2$
 6) $(abc + a + c + d)^2$ 9) $(v + w + x + y + z)^2$
 7) $(3xy - 2yz - 4z)^2$ 10) $(3x + 2y - 3z - 2u + 3v + w)^2$

2. Trouvez les polynômes ayant pour carrés les polynômes suivants :

- 1) $4a^2 + 9b^2 + c^2 + 12ab - 4ac - 6bc$
 2) $9x^2y^2 + 4x^2 + 1 - 12x^2y - 6xy + 4x$
 3) $9u^2 + 4v^2 + w^2 + 25x^2 + y^2 + 12uv - 6uw - 30ux + 6uy$
 $- 4vw - 20vx + 4vy + 10wx - 2wy - 10xy.$

V.

$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

1. Calculez :

- 1) $(a + 1)(a + 4)$ 6) $(2x - 5)(2x - 4)$
 2) $(a - 2)(a - 4)$ 7) $(3a + 5)(3a - 6)$
 3) $(x - 3)(x + 4)$ 8) $(2ab + 1)(2ab - 4)$
 4) $(a + 2)(a - 5)$ 9) $(6xy + 4)(6xy - 5)$
 5) $(x + 3)(x - 7)$ 10) $(4abc + 3)(4abc - 5)$

2. Calculez :

- 1) $(2x^3 - 2a)(2x^3 + 4a)$ 6) $(7 - x)(5 - x)$
 2) $(4x + 5y)(4x - 2y)$ 7) $(3 + 2a)(3 + 6a)$
 3) $(16 + x^2)(16 - 2x^2)$ 8) $(5a - 4b + 2c)(5a - 4b - c)$
 4) $(5x - 4y)(5x - 2y)$ 9) $(3x - 2y + z)(3x - 2y - 5z)$
 5) $(2x - 3a)(2x + 5a)$ 10) $(2a + 3b - c)(3b - c + 4a)$

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre I : Relations d'un ensemble vers un ensemble	
Relation $A \rightarrow B$	7
Relation réciproque	7
Relations particulières $A \rightarrow B$	8
Composition de relations	10
Propriétés de la composition de relations	10
Composition de fonctions, applications, bijections	11
Notations	12
Image par une fonction	13
Image par une fonction composée	13
Exercices	14
Chapitre II : Relations dans un ensemble	
Relation $A \rightarrow A$	20
Relation réciproque	20
Relations particulières $A \rightarrow A$	21
Composition de relations $A \rightarrow A$	23
Exercices	24
Chapitre III : Propriétés des relations dans un ensemble	
Propriétés	29
Relation d'équivalence	32
Relation d'ordre	33
Exercices	36
Chapitre IV : Divisibilité	
Division	45
Divisibilité	45
Relation « ... divise ... » dans N	46
Relation « » dans Z	47
Diviseurs d'un nombre	47
Multiples d'un nombre	49
Exercices	49
Chapitre V : Caractères de divisibilité	
Propriété	52
Caractères de divisibilité	52
Exercices	56
Chapitre VI : Preuve par neuf	
Addition	59
Soustraction	59
Multiplication	59
Division	60
Exercices	61

Chapitre VII : P.G.C.D. — P.P.C.M.

Décomposition d'un nombre en facteurs premiers	62
Plus grand commun diviseur	62
Plus petit commun multiple	64
Exercices	66

Chapitre VIII : Groupes

Notion	70
Généralisation	70
Exemple	71
Exercices	72

Chapitre IX : Equipollence

Rappel	75
Constructions	76
Exercices	78

Chapitre X : Projection parallèle de couples équipollents

Théorème I	80
Théorème II	81
Théorème III	82
Exercices	83

Chapitre XI : Projection parallèle et ordre

Projection d'un axe sur un autre axe	87
Exercices	88

Chapitre XII : Milieu d'un segment

Milieu d'un couple	91
Théorème	91
Théorème	91
Théorème	92
Construction	94
Exercices	95

Chapitre XIII : Translation

Rappel	98
Composition de translations	99
Exercices	102

Chapitre XIV : Vecteurs

Notions	107
Convention	107
Propriété de V , + ...	107
Opérations sur les vecteurs	108
Application au parallélogramme	109
Exercices	110

Chapitre XV : Le plan pointé Π_0

Le plan pointé	114
Opérations	115
Exercices	116

Chapitre XVI : La droite pointée D_0

La droite pointée	120
Opérations sur les vecteurs parallèles	119
Propriétés de $D_0, +$	121
Graduation de la droite	122
Exercices	122

Chapitre XVII : Le groupe $Z\vec{v}$, $+$, $-$ Espace vectoriel

L'ensemble $Z\vec{v}$	125
Propriétés de $Z\vec{v}, +$	125
Espace vectoriel	126
Application au triangle	127
Isomorphisme	127
Exercices	127

Chapitre XVIII : Extension de la notion de nombre

Opérations internes et partout définies	132
L'ensemble Q' des fractions	132
Ecriture simplifiée d'une fraction	134
Représentation sur un axe	135
Exercices	135

Chapitre XIX : Fractions égales

Notion	137
Propriété	138
Conséquences	138
Exercices	141

Chapitre XX : Les nombres rationnels

La relation $R : Q' \rightarrow Q' \text{ « } \dots = \dots \text{ »}$	144
Quelques parties de Q	144
Valeur absolue	145
Nombres rationnels opposés	145
Nombres inverses	146
Ordre dans Q	146
Exercices	147

Chapitre XXI : Addition des nombres rationnels

Notion	150
Propriétés	152
Somme de plusieurs nombres	153
Mode opératoire	154
Exercices	154

Chapitre XXII : Soustraction des nombres rationnels

Notion	157
Propriétés	157
Emploi simultané de $+$ et $-$	158
Nombre fractionnaire	159
Exercices	160

Chapitre XXIII : Multiplication des nombres rationnels

Notion	164
Propriétés	164
Produit de plusieurs nombres	166
Emploi simultané de + et	166
Produit de nombres fractionnaires	167
Exercices	167

Chapitre XXIV : Division des nombres rationnels

Notion	170
Propriétés	171
Division des nombres fractionnaires	171
Fractions composées	172
Exercices	172

Chapitre XXV : Puissances des nombres rationnels

Notion	175
Conventions	176
Propriétés	176
Opérations sur les puissances	177
Puissance de nombres fractionnaires	178
Exercices	178

Chapitre XXVI : Nombres décimaux

Notion	181
Conversions	181
Propriété	182
Nombres décimaux et ordre	182
Opérations	182
Exercices	183

Chapitre XXVII : Conversion d'un nombre rationnel en un nombre décimal

Notion	186
Conversion	186
Exercices	189

Chapitre XXVIII : Génératrice d'un développement décimal périodique

Nombre décimal	191
Développement décimal périodique simple	191
Développement décimal périodique mixte	191
Exercices	192

Chapitre XXIX : Les nombres réels

Notion	193
Représentation des nombres réels sur un axe	194
Exercices	195

Chapitre XXX : Modes opératoires — Valeur numérique

Mode opératoire pour une expression non fractionnaire et sans parenthèses	196
Mode opératoire pour une expression fractionnaire ou avec parenthèses	197
Valeur numérique d'une expression littérale	198
Remarque	199
Exercices	200

Chapitre XXXI : Théorème de Thalès

Projection parallèle du repère de A sur B	203
Théorème de Thalès	203
Réciproque du théorème	204
Exercices	205

Chapitre XXXII : Homothétie

Notion	208
Remarque	209
Généralisation	209
Cas particuliers	210
Image d'une partie de Π par une homothétie	212
Application : figures à l'échelle	216
Réciproque d'une homothétie	217
Exercices	218

Chapitre XXXIII : Composition d'homothéties

Notion	222
Structure de H^0_o	223
Exercices	224

Chapitre XXXIV : Propriétés des groupes

Propriété I	226
Propriété II	227
Propriété III	227
Propriété IV	228
Applications pratiques	230
Exercices	231

Chapitre XXXV : Equations et problèmes

Résolution d'une équation	235
Résolution d'un problème	237
Exercices	238

Chapitre XXXVI : Proportions

Notion	244
Notations	244
Propriété fondamentale	244
Quatrième proportionnelle	245
Moyenne proportionnelle	246
Exercices	246

Chapitre XXXVII : Inéquations

Notion	248
Résolution d'inéquations	248
Propriétés	248
Méthode de résolution	250
Exercices	251

Chapitre XXXVIII : Perpendicularité

Perpendiculaire	252
Direction	252
Perpendicularité de dir A et dir B	253
Théorèmes	253
Composition des relations « ... // ... » et « ... $\perp$... »	254
Angle droit	254
Exercices	255

Chapitre XXXIX : Symétrie orthogonale

Notion	257
Etude approfondie	257
Image d'une partie de Π par symétrie orthogonale	258
Axes de symétrie d'une figure	260
Exercices	261

Chapitre XXXX : Composition de symétries

Composition de S_A et S_B , si $A // B$	264
Composition de S_A et S_B , si $A \perp B$	265
Composition de S_A et S_A^{-1}	267
Exercices	267

Chapitre XXXXI : Isométrie

Notion	269
Réciproque d'une isométrie	269
Structure I, o	269
Exercices	271

Chapitre XXXXII : Figures isométriques ou congruentes

Notion	275
La relation « ... iso ... » dans l'ensemble des figures de Π	276
Exercices	277

Chapitre XXXXIII : Segments — Angles

Segment	280
Segments congruents	280
Mesure d'un segment	281
Distance	281
Angle	282
Angles congruents	282
Mesure d'un angle	283
Bissectrice d'un angle	284
Propriété de la médiatrice	284
Angles opposés	285

Angles dont les cotés sont parallèles deux à deux	285
Application : Deux droites parallèles, coupées par une même troisième	286
Somme des angles dans un triangle	287
Exercices	288
Chapitre XXXXIV : Congruence ou Isométrie de triangles — Bissectrice	
Triangles isométriques ou congruents	294
Cas d'isométrie des triangles quelconques	295
Cas d'isométrie des triangles rectangles	296
Propriété de la bissectrice	297
Exercices	298
Chapitre XXXXV : Quelques figures géométriques	
Circonférence	300
Triangle	300
Les quatre droites remarquables d'un triangle	301
Triangles particuliers	302
Quadrilatère	304
Quadrilatères particuliers	304
Exercices	306
Chapitre XXXXVI : Monômes — Fonctions de monômes	
Monôme	309
Autres exemples	309
Monômes semblables	309
Degré d'un monôme	310
Fonctions de monômes	310
Opérations sur les monômes	311
Exercices	313
Chapitre XXXXVII : Polynômes — Fonctions de polynômes	
Notion	316
Réduction des termes semblables d'un polynôme	316
Polynôme ordonné	316
Degré d'un polynôme	317
Polynômes complets	317
Fonctions de polynômes	317
Opérations sur les polynômes	319
Exercices	321
Chapitre XXXXVIII : Produits remarquables	
Produit de deux binômes conjugués	324
Carré d'un binôme	324
Cube d'un binôme	325
Carré d'un polynôme	326
Produit de deux binômes du premier degré en x	326
Exercices	327
Table des matières	331

D / 1974 / 0080 / 5

IMPRIMERIE GEORGE MICHELS, S. A., 6, RUE DE LA PAIX, 4000 LIÈGE

OUVRAGES DE MATHÉMATIQUE

des EDITIONS L'ELAN, Liège

**1. — LA MATHÉMATIQUE DANS
L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE**

par G. BIELEN

en collaboration avec A. DEWELF et H. AMERICA

2. — Id., TOME DU PROFESSEUR

**3. — LA MATHÉMATIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT
TECHNIQUE SECONDAIRE SUPÉRIEUR**

par G. BIELEN, A. DEWELF et V. SCHODTS

**4. — MATHÉMATIQUE MODERNE
POUR L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE**

Collection DEGREZ et JOUSTEN