FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMIQUES

Dans ce chapitre, nous n'allons pas étudier les fonctions exponentielles et logarithmiques dans tous les détails, mais nous allons nous limiter à rappeler que les représentations graphiques des différentes fonctions réagissent de la même manière que les fonctions algébriques et trigonométriques aux différents changements dans la donnée. Rappelons donc brièvement les causes et effets des changements:

- En additionnant une valeur constante c à l'équation de la fonction, la courbe subit une translation verticale de $\vec{c}$.

- En remplaçant x par $(x-\alpha)$, la courbe subit une translation horizontale de $\vec{\alpha}$.

- En multipliant la variable x par une valeur positive a ($a\neq1$), la pente de la courbe change:
  si $a>1$, la pente est plus accentuée,
  si $a<1$, la pente est moins accentuée.

- En remplaçant la variable x par (-x), la nouvelle courbe obtenue est symétrique par rapport à l'axe des y.

- En multipliant l'équation de la fonction par -1, la nouvelle courbe obtenue est symétrique par rapport à l'axe des x.

1) FONCTIONS EXPONENTIELLES

On appelle fonction exponentielle, toute fonction dans laquelle la variable indépendante x apparaît comme exposant d'une puissance.

L'équation d'une fonction exponentielle est notée: $f(x) = y = a^x$

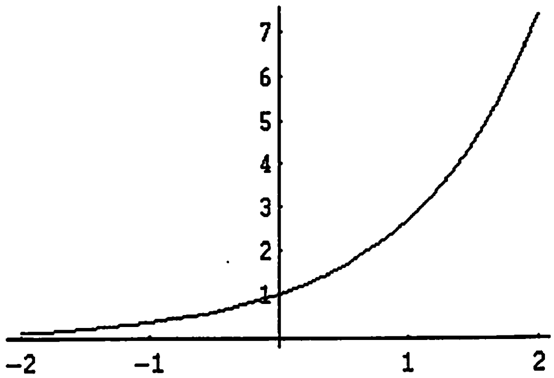
En tant que base a , on choisit le plus souvent les valeurs 2, 10 et dans les sciences surtout le nombre e=2,718... . La valeur e (comme la valeur π) n'est pas une valeur irrationnelle, mais elle s'obtient par le calcul des limites:

$$e = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 2,718281828453... \quad \text{nombre d'Euler}$$

(Leonhard EULER, mathématicien suisse (1707-1789))

Représentations graphiques des différentes fonctions exponentielles:

Comme la fonction exponentielle de base e est la plus importante pour les sciences (voir exemples d'illustration), nous allons essentiellement nous borner à l'étude de celle-ci.



$f(x) = y = e^x$

Dom f = R , Im f = R_+

Point caractéristique (fixe) à toute fonction exponentielle: (0,1)

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

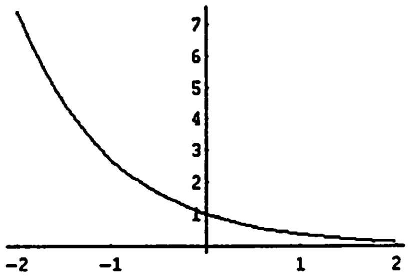
Dérivée de la fonction: $f(x) = y = e^x$:

En étudiant la pente de la courbe, on constate que la pente est positive mais quasiment nulle pour des valeurs en x très petites et qu'elle accroit de plus en plus dès que x devient positif. Or ceci correspond exactement au comportement de la fonction $f(x) = e^x$ elle-même, ce qui fait penser que la dérivée de la fonction $f(x) = y = e^x$ est donnée par

$$\boxed{f'(x) = y' = e^x}$$

Ceci sera contrôlé ultérieurement de manière algébrique.

Représentation graphique de $y = e^{-x}$:



Exercice 1: Construire les représentations graphiques des fonctions exponentielles suivantes:

1) $f(x) = e^x + 3$ 2) $f(x) = e^{(x+2)}$

3) $f(x) = e^{-x} - 1$ 4) $f(x) = 2e^x$

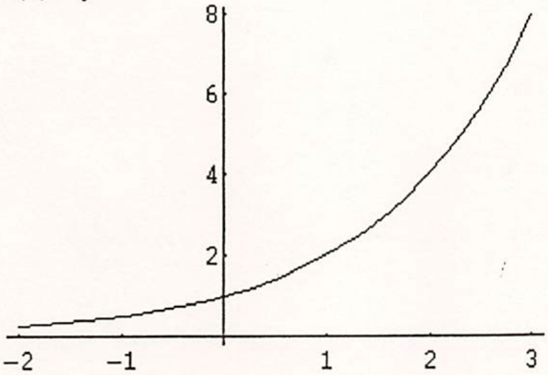
5) $f(x) = e^{2x}$ 6) $f(x) = \frac{e^{2x}}{2} + 1$

Exercice 2: Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse x = 0 pour

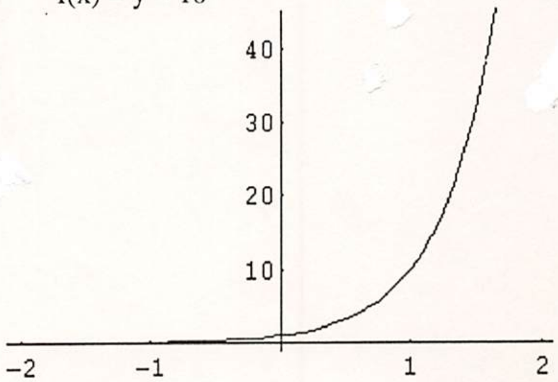
$$f(x) = y = e^x$$

Représentation graphiques d'autres fonctions exponentielles, à base 2 et 10:

$f(x) = y = 2^x$



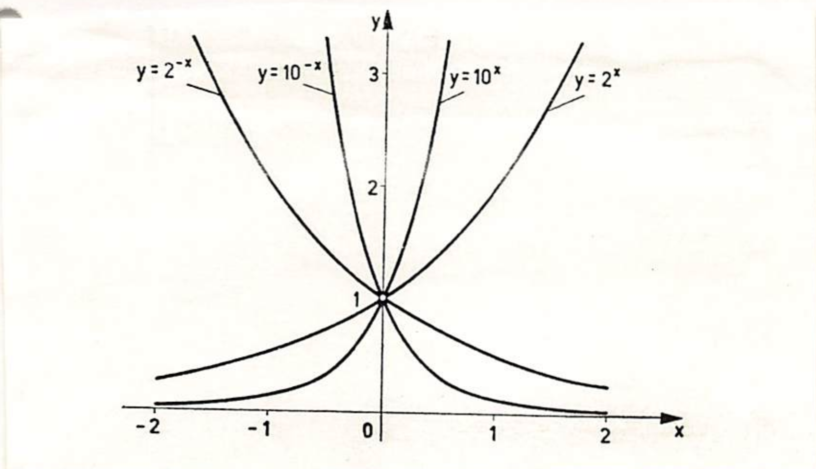
$f(x) = y = 10^x$

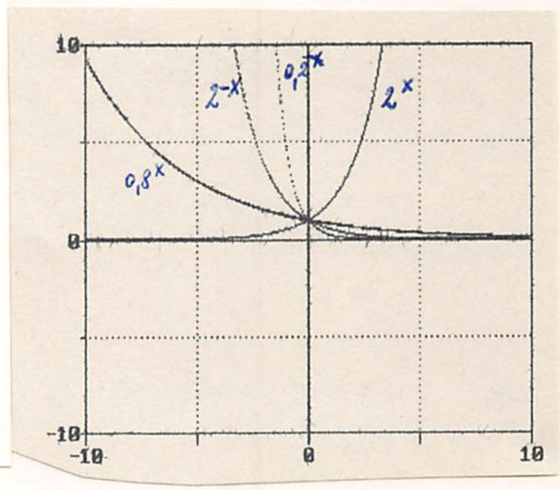


Remarques: 1) La représentation graphique d'une fonction de la sorte $f(x) = y = (-2)^x$ ne peut être tracée correctement, car comme l'exposant change constamment de parité, la valeur de la fonction change constamment de signe. Cette fonction n'est pas une fonction continue.

2) Comme les fonctions exponentielles sont des fonctions puissances particulières, les règles de calcul pour les puissances s'appliquent également aux expressions exponentielles:

$$\boxed{e^x \cdot e^y = e^{x+y} \qquad \left(e^x\right)^y = e^{x \cdot y} \qquad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}}$$





$0{,}8^x = \left(\frac{8}{10}\right)^x = \left(\frac{10}{8}\right)^{-x} = 1{,}25^{-x}$

$0{,}2^x = \left(\frac{2}{10}\right)^x = \left(\frac{10}{2}\right)^{-x} = 5^{-x}$

2) FONCTIONS LOGARITHMIQUES

On appelle fonction logarithmique, la fonction réciproque de la fonction exponentielle.

L'équation d'une fonction logarithmique est donnée par: $f(x) = y = \log x$

Parmi les fonctions logarithmiques, nous distinguons essentiellement:

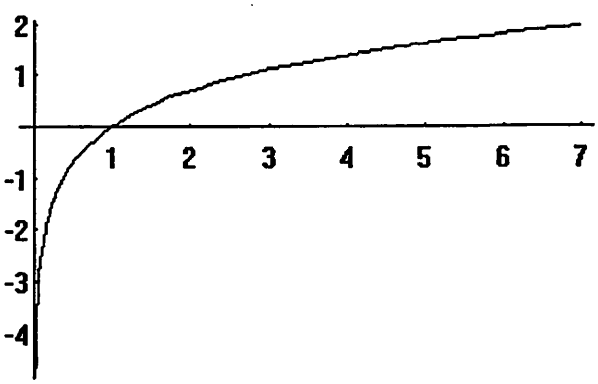
$\log_2 x = \mathrm{lb}\, x$: logarithme binaire $\quad \mathrm{lb}\, x = y \Leftrightarrow x = 2^y$
$\log_{10} x = \lg x$: logarithme décimal $\quad \lg x = y \Leftrightarrow x = 10^y$
$\log_e x = \ln x$: logarithme naturel ou népérien $\quad \ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$

(John Napier, mathématicien anglais, qui établit en 1614 les premières tables logarithmiques à base du nombre e)

La fonction $y = \ln x$ est celle qui est le plus souvent utilisée en sciences naturelles.

Représentation graphique de la fonction logarithmique $y = \ln x$

Ayant vu que la fonction exponentielle n'admet que des valeurs positives pour y, il est évident que la fonction réciproque n'admette que des valeurs positives pour x.



$f(x) = y = \ln x$

Dom $f = \mathbb{R}^*_+$ $\quad$ Im $f = \mathbb{R}$

Point caractéristique (fixe) à toute fonction logarithmique: (1,0)

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

Dérivée de la fonction: $f(x) = y = e^x$:

En étudiant la pente de la courbe, on constate que la courbe est quasiment verticale pour x très proche de 0, ce qui veut dire que la pente est infiniment grande. Elle diminue ensuite pour devenir quasiment nulle pour des valeurs de x très grandes. Elle ne devient cependant jamais négative.Une fonction dont la courbe a cette allure est la fonction $f(x) = y = \frac{1}{x}$ pour des valeurs en x positives, ce qui fait penser que la dérivée de la fonction $f(x) = y = \ln x$ est donnée par $f'(x) = y' = \frac{1}{x}$. Ceci sera contrôlé ultérieurement de manière algébrique.

Rappel des règles de calcul sur les logarithmes:

$$\log(a\cdot b)=\log a+\log b \qquad \log\frac{a}{b}=\log a-\log b \qquad \log a^r = r\cdot\log a$$

$$\log\sqrt{a}=\frac{1}{2}\cdot\log a \qquad \text{Transformation de base: } \log_b a=\frac{\ln a}{\ln b}$$

Exercice 1: Construire les représentations graphiques des fonctions logarithmiques suivantes en déterminant d'abord les domaines d'existences:

1) $f(x) = \ln(x-2)$ 2) $f(x) = \ln x - 2$ 3) $f(x) = \ln\sqrt{1-x}$ 4) $f(x) = \ln(-2x)$

Exercice 2: Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point $x = 1$ pour la fonction $f(x) = y = \ln(2-x)$

Exemples illustrant l'importance des fonctions exponentielles et logarithmiques dans les lois de la nature:

*) En classe de 9^e, lors de l'étude du mouvement uniformément accéléré, la formule de l'accélération était donnée par: $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}$. En chute libre, cette même formule était applicable en remplaçant a par $g=9{,}81\frac{m}{s^2}$. En utilisant cette formule, on a toutefois négligé la résistance de l'air, ceci dans le seul but de simplifier considérablement les calculs. La formule correcte est en effet beaucoup plus compliquée:

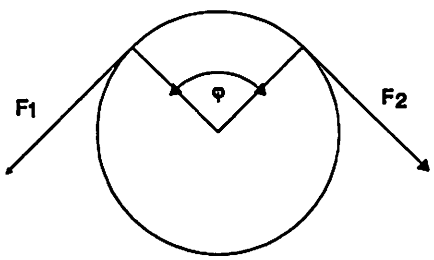
En négligeant la résistance de l'air:

$$v=g\cdot t \Leftrightarrow t=\frac{v}{g}$$

En tenant compte de la résistance de l'air:

$$t=\frac{v}{g}\cdot\ln\left[e^{\frac{gh}{v^2}}+\sqrt{e^{\frac{2gh}{v^2}}-1}\right]$$

*) Un cordon, tendu par les 2 forces F_1 et F_2 autour d'un cylindre en rotation, produit un frottement qui se calcule par: $P = F_1 - F_2$. Soit μ le coefficient de frottement et soit



$\alpha=2\pi\cdot\frac{\varphi^0}{360^0}$ l'arc de "resserrement",

alors: $F_1=F_2\cdot e^{\mu\alpha}$ et $P=F_2\left(e^{\mu\alpha}-1\right)$