CHAPITRE 2

GENERALITES SUR LES FONCTIONS

A) GENERALITES

Dans la nature nous pouvons constater des dépendances entre différentes grandeurs . Nous constatons , par exemple , que la densité de l'air dépend de la hauteur au-dessus du niveau de mer et que l'accélération d'une masse dépend de la force qui s'exerce sur elle . De même , dans un gaz idéal à volume constant , à différentes températures correspondent différentes pressions et , dans un circuit électrique à résistance constante , l'intensité du courant dépend directement de la différence de potentiel .

Dans le cas de telles dépendances on parle de *fonctions* et on essaie de décrire les relations afin de pouvoir faire des présages sur ces phénomènes physiques .

Comme dans beaucoup de problèmes physiques et techniques on retrouve les mêmes dépendances , il est utile d'analyser ces dépendances de façon générale , indépendamment des cas spécifiques . C'est à cette fin qu'on se sert du langage mathématique et qu'on désigne les grandeurs physiques par les symboles x , y , z , ...

Dans ce cours nous allons nous borner aux analyses de fonctions à 2 variables . Nous allons par exemple étudier la dépendance $y = a \cdot x^2$ et nous avons en même temps étudié

- *) la détermination de l'aire d'un disque $A = \pi \cdot r^2$ et
- *) la loi sur la chute libre $s = \frac{1}{2} g \cdot t^2$.

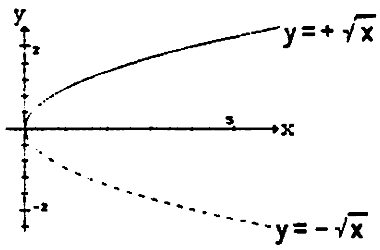
Définition de la *FONCTION* :

> Si à un ensemble de grandeurs x_i on peut faire correspondre , de manière univoque , un ensemble de grandeurs y_i , on dit que y est une fonction de x .
>
> L'ensemble des x_i est appelé le domaine de définition et l'ensemble des y_i est appelé l'ensemble des valeurs ou l'ensemble des images .

Il est de coutume (mais pas nécessaire) de désigner par x la valeur choisie aléatoirement et par y la valeur dépendante . La grandeur indépendante x est souvent appelée l'argument tandis que la grandeur dépendante porte le nom de valeur de la fonction . Comme x et y peuvent prendre différentes valeurs , on désigne x par variable indépendante et y par variable dépendante .

Fonctions univoques et multivoques

Comme d'après la définition la fonction a toujours une dépendance univoque , il arrive parfois qu'une apparente équation de fonction doit être décomposée en différentes parties qui forment à elles des équations de fonctions univoques .



L'équation de la parabole $y^2 = x$ est une fonction équivoque , car $y = \pm\sqrt{x}$ de sorte que l'on obtient 2 fonctions univoques :

$$y_1 = +\sqrt{x} \quad \text{et} \quad y_2 = -\sqrt{x}$$

Les deux fonctions correspondent aux deux branches de la parabole .

Domaine de définition

Le domaine de définition d'une fonction est l'ensemble de toutes les valeurs réelles de x qui permettent le calcul de valeurs réelles correspondentes de y .

Certaines fonctions ont un domaine de définition restreint à un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. La fonction racine carrée , par exemple , de même que toutes les fonctions racines , n'est pas définie pour des arguments négatifs , c.à.d. la fonction n'est définie que pour des valeurs $x \geq 0$; le domaine de définition est par conséquent $\mathbb{R}_+$.

Enumérons encore quelques autres exemples de fonctions à domaine de définition restreint :

Fonction logarithmique :	$y = \log x$	$x \geq 0$
Fonction cyclométrique :	$y = \arcsin x$	$-1 \leq x \leq +1$
Fonction rationnelle :	$y = \dfrac{x+5}{2x-3}$	$x \neq \dfrac{3}{2}$

Exercice : Déterminer dom f , avec $f(x) = \sqrt{\dfrac{2-3x}{x+1}}$

Ensemble des images ou domaine des images

L'ensemble des images est l'ensemble de toutes les valeurs réelles de y que l'on peut calculer à l'aide de l'équation de la fonction .

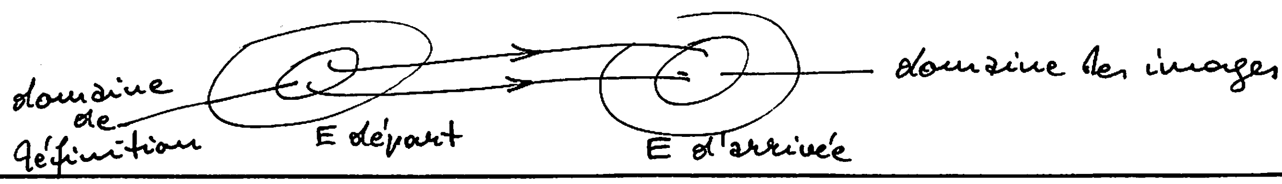
Le type de la fonction peut impliquer une restriction de l'ensemble des images , comme par exemple :

Fonction du second degré :	$y = x^2$	$y \geq 0$ (à cause du carré)
Fonction sinus :	$y = \sin x$	$-1 \leq y \leq +1$

Tableau des valeurs , équation de la fonction , graphe de la fonction

En principe , la relation existant entre les deux variables x et y peut être exprimée de manière toute à fait quelconque ; par exemple par un texte . Néanmoins cette méthode n'est que rarement utilisée en mathématique où on emploie essentiellement trois méthodes :

1) le tableau des valeurs : correspondance par indication de couples de valeurs
2) l'équation de la fonction : correspondance par instruction de calcul
3) le graphe de la fonction : correspondance par représentation graphique



1) Tableau des valeurs ou tableau des images

La donnée d'un tableau de couples de valeurs est la méthode la plus simple pour faire correspondre des valeurs y à des valeurs x données. Ces tableaux peuvent contenir des résultats de mesurations ou de calculs. Cette méthode est très utile pour les fonctions empiriques, c.à.d. les fonctions qui ne s'expriment pas à l'aide d'une équation, comme par exemple la température qui varie en fonction du temps.

Le désavantage de cette méthode réside dans le nombre limité de couples de valeurs que l'on peut mettre dans un tel tableau. En d'autres mots, il est pratiquement impossible de faire correspondre à toute valeur x une valeur y. A l'aide de différentes méthodes d'interpolation, il est toutefois possible de compléter les valeurs manquantes dans un tableau.

2) Equation de la fonction

Dans une équation d'une fonction, la correspondance des valeurs se fait à l'aide d'une formule mathématique en tant que instruction de calcul à suivre. A l'aide de cette formule, il est possible de faire correspondre à n'importe quelle valeur x son image y.

Exemple : L'équation $y = 2x + 3$ fait correspondre à toute valeur indépendante x une valeur dépendante y. Pour $x = 2$, nous obtenons $y = 2 \cdot 2 + 3 = 7$

Lorsqu'on établit une équation d'une fonction, il arrive de temps en temps que les 2 variables x et y se trouvent d'un même côté du signe " = ". Par exemple, l'équation de l'hyperbole équilatère est souvent sous la forme $x \cdot y = 1$. En principe, les 2 formes d'équation se valent :

a) Forme explicite : L'équation est résolue d'après la variable dépendante y. Le membre de gauche ne renferme que la variable dépendante ; le membre de droite peut renfermer outre la variable indépendante x des termes constants.
Forme générale : $y = f(x)$ Ex : $y = 3x$

b) Forme implicite : L'équation n'est pas résolue d'après une variable. Les 2 variables apparaissent dans le membre de gauche.
On ramène l'équation à la forme générale : $F(x, y) = 0$ Ex : $y - 3x = 0$

Dans beaucoup de cas, l'équation sous forme implicite peut être mise sous forme explicite. Cette transformation est notamment utilisée pour établir des tableaux de valeurs.

Exemple : L'équation $3x + y = 5$ est souvent transformée en $y = -3x + 5$ ..

Dans certains cas, cette transformation est impossible à réaliser. Le plus souvent c'est le cas dans un exemple où apparaissent plusieurs sortes de fonctions à l'intérieur d'une même équation.

Exemples : $y + \sin x \cdot \sin y + x^2 = 0$ Fonctions trigonométriques et algébriques
$x^2 + xy + y^x = e^x$ Fonctions exponentielles et algébriques

3) Graphe ou représentation graphique d'une fonction

La relation existant entre les différentes variables devient plus évidente , si l'on représente les couples de valeurs dans un système de coordonnées .

Sur l'axe horizontal , l'axe des abscisses , on reporte les valeurs de la variable indépendante x . Sur l'axe vertical , l'axe des ordonnées , on reporte les valeurs de la variable dépendante y . Les points ainsi obtenus sont reliés par la courbe de la fonction ou le graphe de la fonction . Entre le graphe de la fonction et l'équation de cette même fonction , il existe la connection suivante :

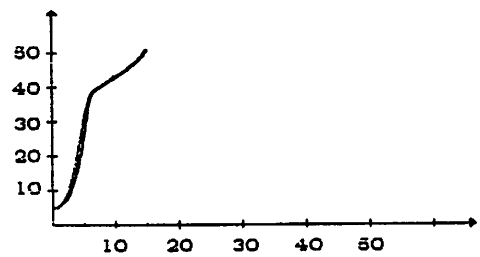
> Les coordonnées (abscisse et ordonnée) de chaque point de la courbe vérifient l'équation de la fonction . Inversément , à chaque couple de valeurs (x ; y) qui vérifie l'équation de la fonction correspond exactement un point du graphe .

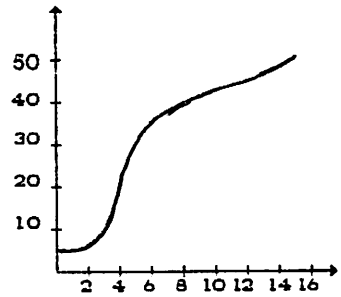
En technique , les valeurs numériques des variables x et y ont souvent des ordres de grandeurs bien différents . Par un choix judicieux des unités sur les axes , on arrive à tracer le graphe de sorte à ce que l'on puisse bien interpréter la représentation graphique de la fonction . A cet effet , il importe de choisir la graduation des axes de telle manière que les deux ensembles des valeurs x et y soient représentés par des segments d'une longueur sensiblement égale .

Exemple :

x	0	3	4	5	6	8	10	15
y	5	10	20	30	35	40	43	50

1) Les unités sur les axes sont mal choisies , car l'espace disponible est mal utilisé . Par conséquent , l'interprétation du graphique ne s'effectue que difficilement .





2) La même courbe de la fonction utilise beaucoup mieux l'espace disponible . Intuitivement , on pourrait croire à la représentation d'une autre fonction , mais la courbe n'a subi qu'une élongation dans le sens de l'axe des x .

B) FONCTIONS CARACTERISTIQUES

1) Fonctions algébriques

Définition d'une fonction algébrique

On appelle fonction algébrique , toute fonction dans laquelle la variable indépendante x n'apparait que dans les opérations de base : addition , soustraction
multiplication , division
puissance (en tant que base)
racine (en tant que radicande)

Parmi les fonctions algébriques , on distingue encore deux catégories de fonctions :

① Les fonctions rationnelles (sans racine)

a) Fonctions (rationnelles) entières ou fonctions polynômes (pas de division)

Exemples : $y = 2x + 3$

$y = x^2 - 4x + 7$

$y = -3x^5 + 4x^4 - 28x + 53$

b) Fonctions rationnelles

Exemples : $y = \frac{1}{x}$

$y = \frac{3x^2 - 4}{2x - 7}$

② Les fonctions irrationnelles

Exemples : $y = \sqrt{x}$

$y = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2 - x^2}}$

2) Fonctions transcendantes

Définition d'une fonction transcendante

On appelle fonction transcendante , toute fonction dans laquelle la variable indépendante x apparait comme exposant d'une puissance ou comme argument d'une fonction trigonométrique , cyclométrique ou logarithmique .

Exemples : $y = 3^x$

$y = \sin 2x$

$y = \arcsin \frac{x}{4}$

$y = \ln x$

C) APERCU DES DIFFERENTS TYPES DE FONCTIONS

1) Fonctions monotones

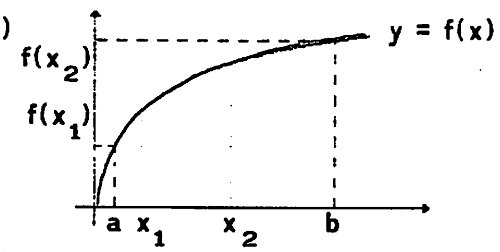
Définition d'une fonction monotone

Une fonction f est monotone , si pour des variations (positives) de x , la valeur de la fonction $y = f(x)$ varie toujours dans un même sens .

a) Fonctions croissantes

Parmi les fonctions croissantes , nous distinguons les fonctions strictement croissantes et les fonctions non - décroissantes sur un intervalle [ab] .

*)

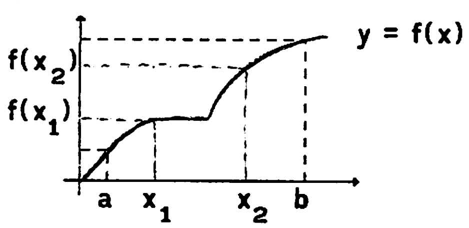


$\forall\, x_1 , x_2 \in [ab]$

$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

Cette fonction f est strictement croissante

*)



$\forall\, x_1 , x_2 \in [ab]$

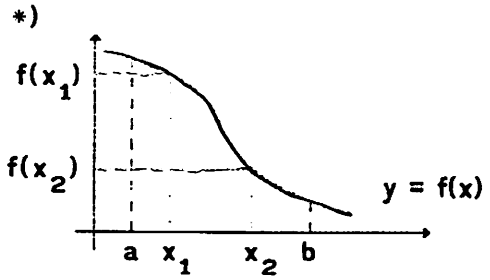
$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

Cette fonction est non-décroissante

b) Fonctions décroissantes

Parmi les fonctions décroissantes , nous distinguons les fonctions strictement décroissantes et les fonctions non-croissantes sur un intervalle [ab] .

*)

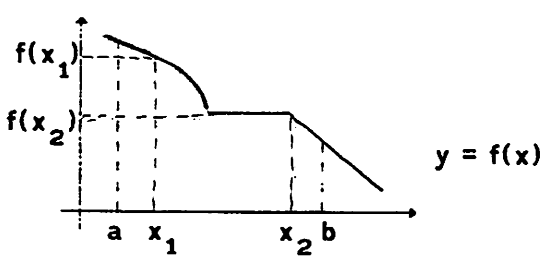


$\forall\, x_1 , x_2 \in [ab]$

$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

Cette fonction f est strictement décroissante

*)



$\forall\, x_1 , x_2 \in [ab]$

$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$

Cette fonction f est non-croissante

2) Fonctions symétriques

Parmi les fonctions symétriques , nous distinguons les fonctions paires , qui admettent (dans un repère orthogonal) l'axe des y comme axe de symétrie , et les fonctions impaires qui admettent l'origine comme centre de symétrie . A remarquer que certaines fonctions admettent soit un axe , soit un centre de symétrie , mais qu'elles ne sont pas à classer parmi les fonctions paires ou impaires .

a) Fonctions paires

Définition d'une fonction paire

f est une fonction paire $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \text{dom} f$, $(-x) \in \text{dom} f$ et $f(-x) = f(x)$

Une fonction algébrique est paire si elle ne renferme que des puissances à exposants pairs .

Exemples : $y = x^2$

$y = -3x^4 + 17x^2 - 8$

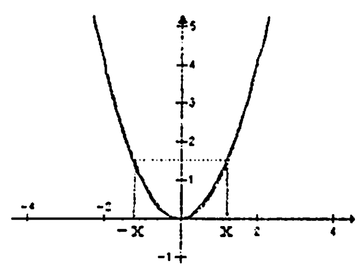
Démonstration par le calcul pour : $y = x^2$

$x = 1 \quad f(x) = 1^2 = 1$

$x = -1 \quad f(x) = (-1)^2 = 1$

$x = 3 \quad f(x) = 3^2 = 9$

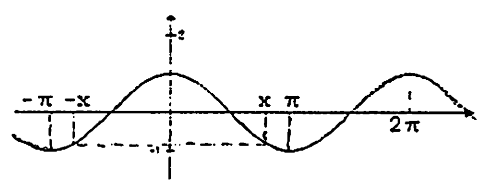
$x = -3 \quad f(x) = (-3)^2 = 9$



Sur le graphe de cette fonction , on peut constater que la courbe admet l'axe des y comme axe de symétrie .

La fonction $y = \cos x$ est un exemple d'une fonction transcendante paire .

$\forall x \in \mathbb{R} : \cos(-x) = \cos x$



b) Fonctions impaires

Définition d'une fonction impaire

f est une fonction impaire $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \text{dom} f$, $(-x) \in \text{dom} f$ et $f(-x) = -f(x)$

Une fonction algébrique entière est impaire si elle ne contient que des puissances à exposants impairs .

Exemples : $y = 2x^5 - 5x$

$y = \frac{1}{2} x^3$

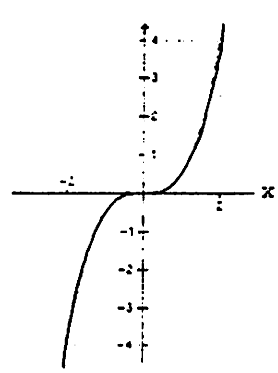
Démonstration par le calcul pour : $y = \frac{1}{2} x^3$

$x = 1 \quad f(x) = \frac{1}{2} 1^3 = \frac{1}{2}$

$x = -1 \quad f(x) = \frac{1}{2} (-1)^3 = -\frac{1}{2}$

$x = 2 \quad f(x) = \frac{1}{2} 2^3 = 4$

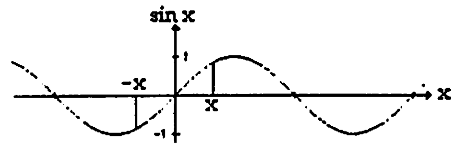
$x = -2 \quad f(x) = \frac{1}{2} (-2)^3 = -4$



Sur le graphe de cette fonction , on peut constater que la courbe admet l'origine comme centre de symétrie .

La fonction $y = \sin x$ est un exemple d'une fonction transcendante impaire.

$\forall\, x \in \mathbb{R} : \sin(-x) = -\sin x$

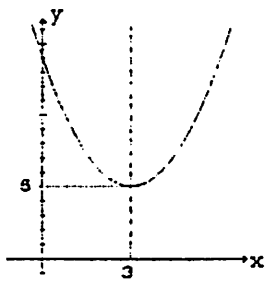


c) Fonctions mixtes

On dit qu'une fonction algébrique entière est une fonction mixte si elle renferme des puissances à exposants pairs et impairs.

Le graphe d'une telle fonction mixte ne présente ni une symétrie axiale d'axe (oy), ni une symétrie centrale de centre o.

Exemple : $y = x^2 - 6x + 14$



La représentation graphique de cette fonction est une parabole, c.à.d. une courbe qui contient un axe de symétrie. Cet axe de symétrie se situe sur la parallèle à (oy) qui passe par le sommet s de la parabole.

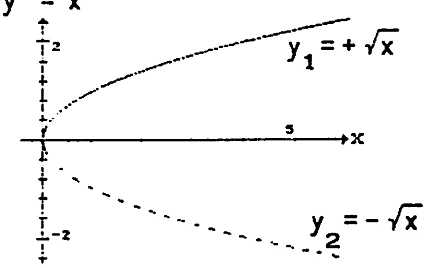
$s\left(-\dfrac{b}{2a} ; \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$ dans notre cas : $s(3;5)$

Dans le système d'axes auxilliaire, la parabole est donnée par l'équation $Y = X^2$ et est à considérer comme une fonction paire.

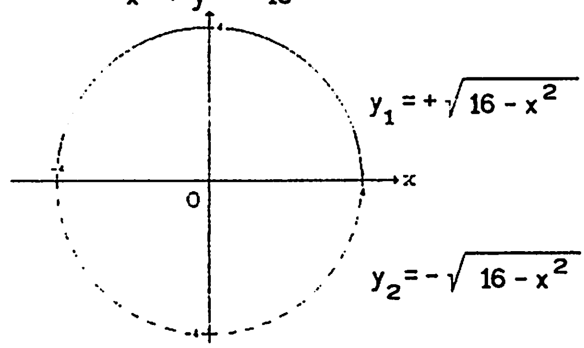
Remarque :

Après avoir constaté que certaines fonctions admettent comme axe de symétrie l'axe (oy), on pourrait se demander : Est-ce qu'il n'existe pas de fonction qui admette l'axe (ox) comme axe de symétrie ?

$y^2 = x$



$x^2 + y^2 = 16$



Même si ces 2 graphes semblent représenter des fonctions symétriques d'axe (ox), il n'en est rien. En effet, chacun des graphes est la représentation de 2 fonctions équivoques, qui ne sont pas symétriques par rapport à l'axe (ox).

$y^2 = x$ donne $y = \pm\sqrt{x}$

$y_1 = \sqrt{x}$ branche de parabole supérieure

$y_2 = -\sqrt{x}$ branche de parabole inférieure

$x^2 + y^2 = 16$ donne $y = \pm\sqrt{16 - x^2}$

$y_1 = \sqrt{16 - x^2}$ demi-cercle supérieur

$y_2 = -\sqrt{16 - x^2}$ demi-cercle inférieur

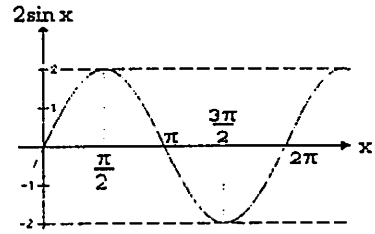
3) Fonctions bornées

Définition d'une fonction bornée

> Une fonction f est bornée , si pour des valeurs de x quelconques , la valeur de la fonction $y = f(x)$ est toujours contenue dans un certain intervalle .
>
> f est une fonction bornée $\Leftrightarrow$ $\forall\, x \in \text{dom}\, f$, $a \leq f(x) \leq b$

Parmi les fonctions bornées nous distinguons les fonctions bornées des 2 côtés et les fonctions qui ne sont bornées que d'un seul côté :

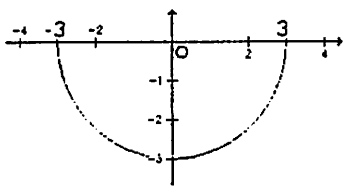
1) Fonctions bornées des 2 côtés :



Exemples : α) fonction sinus

$y = 2 \sin x$

$-2 \leq y \leq 2$



β) demi - cercle

$y = -\sqrt{9 - x^2}$

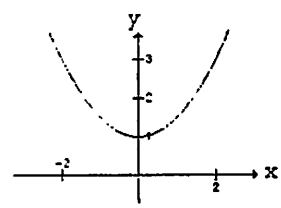
$-3 \leq y \leq 0$

2) Fonctions bornées d'un côté :

Exemples : α) Parabole

$y = \frac{1}{2} x^2 + 1$

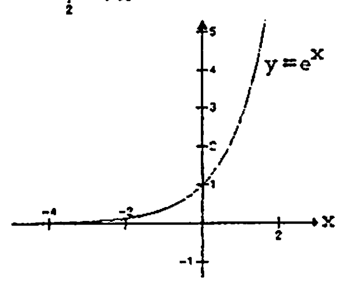
$1 \leq y < +\infty$



β) fonction exponentielle

$y = e^x$

$0 < y < +\infty$



4) Fonctions périodiques

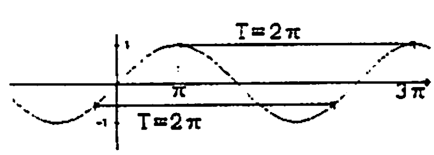
Définition d'une fonction périodique

> Une fonction f est périodique de période T , si pour des valeurs de x quelconques , la valeur de la fonction en $(x+T)$ est égale à la valeur de la fonction en x .
>
> f est une fonction périodique $\Leftrightarrow$ $\forall\, x \in \text{dom}\, f$, $f(x+T) = f(x)$

Les fonctions trigonométriques sont les exemples types de fonctions périodiques .

Exemple : $y = \sin x$

La période de la fonction $y = \sin x$ est $T = 2\pi$

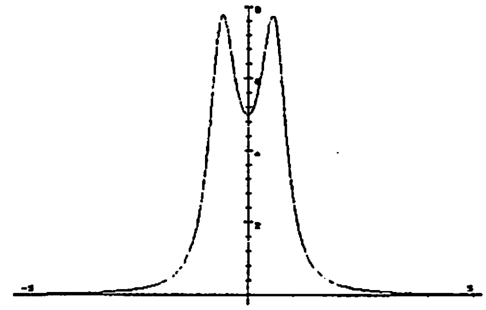


Pour qu'une fonction soit périodique , il faut que 2 conditions soient remplies :

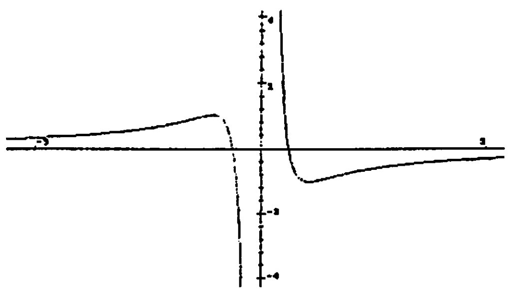
1) Il faut que $f(x+T) = f(x)$ et
2) Il faut que la tendance de variation en ces 2 points x et $(x+T)$ soit égale .

Exercices sur les fonctions paires , impaires , mixtes , périodiques et bornées

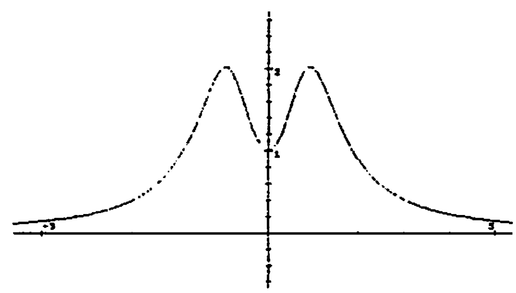
1) Déterminer si les fonctions suivantes sont paires , impaires ou mixtes



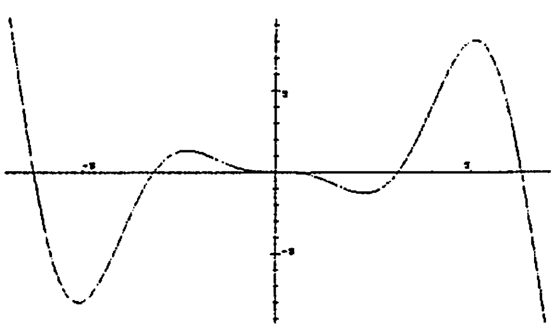
a) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 5}{4x^4 - 2x^2 + 1}$



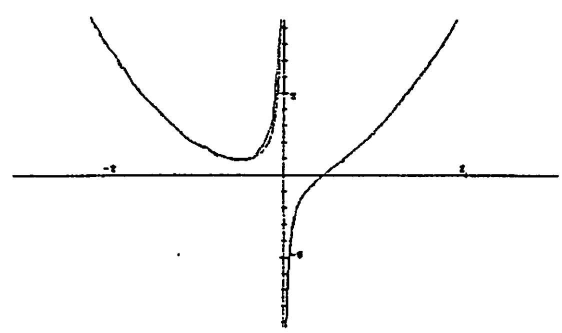
b) $f(x) = \dfrac{-5x^3 + 2x}{3x^4}$



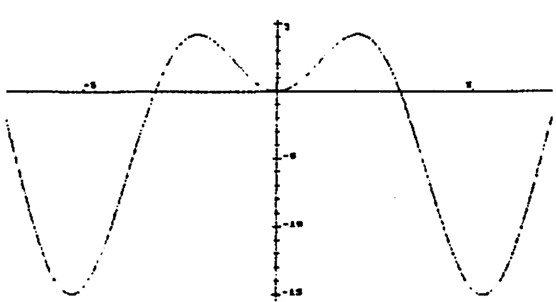
c) $f(x) = \dfrac{7x^3 + 3x}{2x^5 + 3x}$



d) $f(x) = \dfrac{-x^2 \cdot \sin x}{3}$



e) $f(x) = \dfrac{7x^3 + 2x^2 - 1}{3x}$



f) $f(x) = 2x \cdot \sin x + \frac{1}{4}x^2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

2) Quelles sont , parmi ces 6 fonctions , des fonctions bornées ?