Développement de fonctions en série entière

Objectifs:

Ecrire une fonction sous forme de polynôme croissant:
$f(x) = ax^0 + bx^1 + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots$

1. Introduction

1.1. exemple d'introduction

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ définie sur l'intervalle $|x| < 1$

Si l'on effectue la division :

$$\begin{array}{llll|l}
1 & & & & (1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \\
\underline{-1} & \underline{-x} & & & \\
 & -x & & & \\
 & \underline{+x} & \underline{+x^2} & & \\
 & & x^2 & & \\
 & & \underline{-x^2} & \underline{-x^3} & \\
 & & & -x^3 \text{ etc} &
\end{array}$$

alors f(x) peut s'écrire encore sous la forme

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x^1 + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^n$$

développement en série

Si la série comporte un nombre limité de termes, on parle de développement limité.

Vérifions pour $x = \dfrac{1}{2}$ $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\dfrac{2+1}{2}} = \dfrac{2}{3} = 0{,}66666666$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \ldots$$

pour 2 termes : $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$

pour 3 termes : $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$

pour 4 termes : $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{5}{8} = 0{,}625$

pour 5 termes : $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{11}{16} = 0{,}6875$

pour 10 termes : $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} - \ldots = \dfrac{341}{512} = 0{,}666015625$

Si on prend un nombre suffisant de termes, on approche la valeur exacte avec une précision souhaitée.

Représentation graphique des différentes approximations:

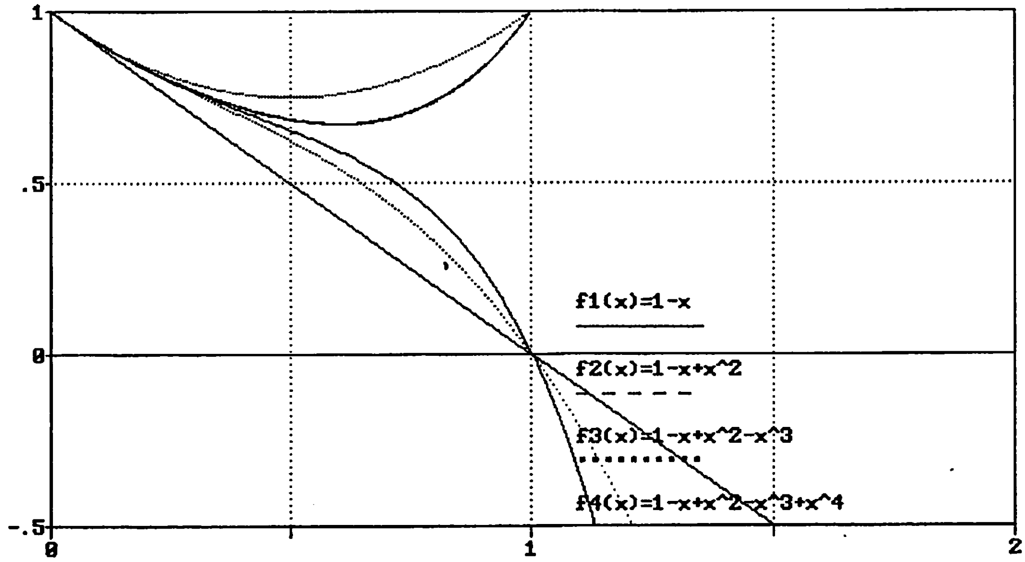
$f_1(x) = 1 - x$

$f_2(x) = 1 - x + x^2$

$f_3(x) = 1 - x + x^2 - x^3$

$f_4(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$

$f_5(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5$



1.2. Exemple à faire : $f(x) = \frac{1}{1-x}$ **définie sur l'intervalle** $|x| < 1$

2. Méthode générale :

2.1. exemple 1 : Soit le polynôme $f(x) = ax + b$

Au point x_0, la valeur du polynôme est : $f(x_0) = a x_0 + b$

au point x_1, $f(x_1) = a x_1 + b$ or $x_1 - x_0 = h \Rightarrow x_1 = x_0 + h$

$$\Rightarrow f(x_0 + h) = a(x_0 + h) + b = a x_0 + b + a h = f(x_0) + a h$$

2.2. Faisons de même pour $f(x) = a x^2 + b x + c$

au pt x_0 : $f(x_0) = a(x_0)^2 + b x_0 + c$

au pt x_1 : $f(x_1) = a(x_1)^2 + b x_1 + c$

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= a(x_0 + h)^2 + b(x_0 + h) + c \\ &= a(x_0^2 + 2 h x_0 + h^2) + b x_0 + b h + c \\ &= a x_0^2 + 2 a h x_0 + a h^2 + b x_0 + b h + c \\ &= (a x_0^2 + b x_0 + c) + (2 a x_0 + b) h + a h^2 \end{aligned}$$

$$= f(x_0) + f'(x_0) h + \frac{f''(x_0) h^2}{2!}$$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

dérivée $\frac{\text{première}}{1!}$ $\frac{\text{seconde}}{2!}$

2.3. exemple 3 :

Faire le même exercixe pour $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$

On trouvera de même:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + \frac{f''(x_0)\,h^2}{2\,!} + \frac{f'''(x_0)\,h^3}{3\,!}$$

Aussi peut-on l'écrire sous la formule de sommation :

$$\boxed{f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k\,!} \bullet h^k}$$

3. Généralisation :

3.1. Cette forme de développement est appelée série de Taylor.

Il présume que la fonction soit définie et dérivable en ce point.

3.2. On trouve la forme du développement selon la série de Mac-Laurin,

en posant $x_0 = 0$ et $h = x$ ce qui donne :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k\,!} \bullet x^k}$$

4. Exemples:

4.1. $f(x) = 7\,x^5 - 13\,x^4 + 2\,x^3 - 17\,x^2 + x - 17$

En appliquant la formule de Mac-Laurin, on obtient :

$f(x)$	=	$7\,x^5 - 13\,x^4 + 2\,x^3 - 17\,x^2 + x - 17$	$f(0)$	=	-17
$f'(x)$	=	$35\,x^4 - 52\,x^3 + 6\,x^2 - 34\,x + 1$	$f'(0)$	=	1
$f^2(x)$	=	$140\,x^3 - 156\,x^2 + 12\,x - 34$	$f^2(0)$	=	-34
$f^3(x)$	=	$420\,x^2 - 312\,x + 12$	$f^3(0)$	=	12
$f^4(x)$	=	$840\,x - 312$	$f^4(0)$	=	-312
$f^5(x)$	=	840	$f^5(0)$	=	840
$f^6(x)$	=	0	$f^6(0)$	=	0

$$f(x) = -17 + \frac{1}{1!}\,x + \frac{-34}{2!}\,x^2 + \frac{12}{3!}\,x^3 + \frac{-312}{4!}\,x^4 + \frac{840}{5!}\,x^5$$

$$= -17 + x + \frac{-34}{2}\,x^2 + \frac{12}{6}\,x^3 + \frac{-312}{24}\,x^4 + \frac{840}{120}\,x^5$$

$$= -17 + x - 17\,x^2 + 2\,x^3 - 13\,x^4 + 7\,x^5$$

La forme retrouvée est le polynôme initial.

4.2. Faire l'exemple suivant : $f(x) = x^7 + 5\,x^4 - 3\,x^2 + 6$

Développer au point $a = -2$ selon la série de Taylor transformée

en posant $x = a$ et $h = x$, ce qui donne la forme:

$$f(a + x) = f(a) + f'(a)\,x + \frac{f''(a)\,x^2}{2\,!} + \frac{f'''(a)\,x^3}{3\,!} + \ldots$$

et faire le développement selon Mac-Laurin.

Selon Mac-Laurin :

$f(x)$	=	$x^7 + 5x^4 - 3x^2 + 6$	$f(0)$	=	6
$f'(x)$	=	$7x^6 + 20x^3 - 6x$	$f'(0)$	=	0
$f''(x)$	=	$42x^5 + 60x^2 - 6$	$f''(0)$	=	-6
$f^{(3)}(x)$	=	$210x^4 + 120x$	$f^{(3)}(0)$	=	0
$f^{(4)}(x)$	=	$840x^3 + 120$	$f^{(4)}(0)$	=	120
$f^{(5)}(x)$	=	$2520x^2$	$f^{(5)}(0)$	=	0
$f^{(6)}(x)$	=	$5040x$	$f^{(6)}(0)$	=	0
$f^{(7)}(x)$	=	5040	$f^{(7)}(0)$	=	5040

$$f(x) = 6 + \frac{-6}{2!}x^2 + \frac{120}{4!}x^4 + \frac{5040}{7!}x^7 + \ldots$$

$$= 6 + \frac{-6}{2}x^2 + \frac{120}{24}x^4 + \frac{5040}{5040}x^7 \ldots$$

$$= 6 - 3x^2 + 5x^4 + x^7 \ldots$$

Selon Taylor, au voisinage de a = -2 :

$$f(-2+x) = f(-2) + f'(-2)\,x + \frac{f''(-2)\,x^2}{2\,!} + \frac{f'''(-2)\,x^3}{3\,!} + \frac{f''''(-2)\,x^4}{4\,!} + \ldots$$

$f(x)$	=	$x^7 + 5x^4 - 3x^2 + 6$	$f(-2)$	=	-54
$f'(x)$	=	$7x^6 + 20x^3 - 6x$	$f'(-2)$	=	300
$f''(x)$	=	$42x^5 + 60x^2 - 6$	$f''(-2)$	=	-1110
$f^{(3)}(x)$	=	$210x^4 + 120x$	$f^{(3)}(-2)$	=	3120
$f^{(4)}(x)$	=	$840x^3 + 120$	$f^{(4)}(-2)$	=	-6600
$f^{(5)}(x)$	=	$2520x^2$	$f^{(5)}(-2)$	=	10080
$f^{(6)}(x)$	=	$5040x$	$f^{(6)}(-2)$	=	-10080
$f^{(7)}(x)$	=	5040	$f^{(7)}(-2)$	=	5040

$$f(-2+x) = -54 + 300x - \frac{1110}{2}x^2 + \frac{3120}{6}x^3 - \frac{6600}{24}x^4 + \frac{10080}{120}x^5 - \frac{10080}{720}x^6 + \frac{5040}{5040}x^7 \ldots$$

$$= -54 + 300x - 555x^2 + 520x^3 - 275x^4 + 84x^5 - 14x^6 + x^7 \ldots$$

Le développement selon Taylor ou Mac-Laurin permet de remplacer une fonction donnée par une série de termes, dont le nombre est fixée par la précision que l'on veut obtenir.

Le développement selon Mac-Laurin est plus simple à utiliser, par conséquent, il est le plus souvent employé.

4.3. Selon Mac-Laurin $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$

$f(0)$	=	$\sqrt[3]{1+0}$	=	1	$a_0 =$	1	
$f'(0)$	=	$\frac{1}{3}\bullet(1+0)^{\frac{-2}{3}}$	=	$\frac{1}{3}$	$a_1 =$	$\frac{1}{3}$	
$f''(0)$	=	$-\frac{2}{9}\bullet(1+0)^{\frac{-5}{3}}$	=	$-\frac{2}{9}$	$a_2 =$	$-\frac{2}{9\cdot 2!}$	$= -\frac{1\cdot 2}{3\cdot 6}$
$f^{(3)}(0)$	=	$\frac{10}{27}(1+0)^{\frac{-8}{3}}$	=	$\frac{10}{27}$	$a_3 =$	$\frac{10}{27\cdot 3!}$	$= \frac{1\cdot 2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}$

$f^{(4)}(0) = -\frac{80}{81}(1+0)^{-\frac{11}{3}} = -\frac{80}{81} \qquad a_4 = -\frac{80}{81\cdot 4!} = -\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}$

donc $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1\cdot 2}{3\cdot 6}x^2 + \frac{1\cdot 2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}x^3 - \frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}x^4 + \ldots$

4.4. $\sqrt[3]{17} =$ valeur = 2,5712815906659

Utiliser le développement limité du 4.3. : $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2$

Si on prend $\sqrt[3]{1+16} = 1 + \frac{1}{3}.16 - \frac{1}{9}.256 = 1 + 5{,}3 - 28{,}4 = -22{,}1$ **?!**

Le résultat est manifestement faux! Il faudra transformer l'expression. Car le résultat sera d'autant plus exact que la valeur de x est petite; par conséquent on multipliera le radicand [R = 17] avec une puissance de trois [=K] de manière que ce produit approche le plus près une autre puissance de 3.[=L]. La différence [=D] entre les deux puissances sera aussi petite que possible:

$$R \bullet K^3 = L^3 + D$$

$$R \bullet K^3 = L^3\left(1+\frac{D}{L^3}\right)$$

$$R = \frac{L^3}{K^3}\left(1+\frac{D}{L^3}\right)$$

$$\sqrt[3]{R} = \frac{L}{K}\sqrt[3]{\left(1+\frac{D}{L^3}\right)}$$

Choisissons K = 7; L = 18

$$\sqrt[3]{17} = \frac{18}{7}\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{18^3}\right)}$$

(car $17 \cdot 7^3 = 18^3 - 1$ D = 1)

$$\sqrt[3]{17} \approx \frac{18}{7}\left(1-\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2\right)$$

introduisons $x \cong \frac{1}{18^3}$

$$\sqrt[3]{17} \cong \frac{18}{7}\left[1-\frac{1}{3}\bullet\frac{1}{18^3}-\frac{1}{9}\bullet\left(\frac{1}{18^3}\right)^2\right]$$

$$\cong \frac{18}{7}\,(1-5{,}7155921\cdot 10^{-5} - 3{,}267\cdot 10^{-9})$$

$\cong$ 2,571281590659 résultat analogue à $\sqrt[3]{17}$

4.5. Exemple à faire selon Mac-Laurin : $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$

4.6. Développer selon Mac-Laurin : $f(x) = \frac{1}{\sqrt[2]{1-x^2}}$

f(0)	=	$\frac{1}{\sqrt[2]{1-x^2}}$	=	1
f'(0)	=	$x\cdot\left(1-x^2\right)^{\frac{-3}{2}}$	=	0
f''(0)	=	$\left(1-x^2\right)^{\frac{-3}{2}}+3x^2\left(1-x^2\right)^{\frac{-5}{2}}$	=	1
$f^{(3)}(0)$	=	$9x\left(1-x^2\right)^{\frac{-5}{2}}+15x^3\left(1-x^2\right)^{\frac{-7}{2}}$	=	0
$f^{(4)}(0)$	=	$9\left(1-x^2\right)^{\frac{-5}{2}}+90x^2\left(1-x^2\right)^{\frac{-7}{2}}+105x^4\left(1-x^2\right)^{\frac{-9}{2}}$	=	9

donc $\frac{1}{\sqrt[2]{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \ldots$

4.7. Binôme de Newton

Nous avons vu les formules suivantes :

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm \mathbf{2}\, a\, b + b^2$
$(a \pm b)^3 = a^3 - \mathbf{3}\, a^2 b + \mathbf{3}\, a\, b^2 - b^3$
$(a \pm b)^4 = a^4 \ldots.$

Existe-t-il une règle générale selon laquelle on peut trouver ce développement?

Etablissons à partir de la forme de Taylor, le développement du binôme de Newton.

$f(x) = x^n$
$f(x+h) = (x+h)^n$

$$= f(x) + f'(x)\,h + \frac{f''(x)\,h^2}{2\,!} + \frac{f'''(x)\,h^3}{3\,!} + \ldots$$

$f(x) = x^n$
$f'(x) = n\,x^{n-1}$
$f''(x) = n\,(n-1)\,x^{n-2}$
$f'''(x) = n\,(n-1)\,(n-2)\,x^{n-3}$

$$\boxed{f(x+h) = x^n + n\,x^{n-1}\,h + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2\,!}\,h^2 + \ldots}$$

or, les coefficients peuvent s'écrire encore de la forme

$$\frac{n}{1!} = \rightarrow \binom{n}{1}$$

$$\frac{n(n-1)}{2\,!} = \rightarrow \binom{n}{2}$$

$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\,!} = \quad \rightarrow \quad \binom{n}{3}$. on obtient par conséquent :

$$(a \pm b)^n = a^n \pm \binom{n}{1} a^{n-1}\, b \pm \binom{n}{2} a^{n-2}\, b^2 \pm \binom{n}{3} a^{n-3}\, b^2 \;\ldots$$

Exemple : Développer le binôme du quatrième degré suivant cette formule : $(a \pm b)^4$

Les coefficients du développement à exposants entiers s'obtiennent encore par la méthode du triangle de Pascal :

						1						
				1		2		1				
			1		3		3		1			
		1		4		6		4		1		
	1		5		10		10		5		1	
1		6		15		20		15		6		1

Le binôme de Newton peut encore s'écrire : $\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k}$

Développer en série la fonction $f(x) = \sqrt{1+x}$ selon la formule du binôme de Newton.

5. Développements particuliers : (selon Mac-Laurin)

5.1. e^x

f(x)	=	e^x	f(0)	=	1
f'(x)	=	e^x	f'(0)	=	1
f''(x)	=	e^x	f''(0)	=	1
f'''(x)	=	e^x	f'''(0)	=	1

$$\boxed{e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots}$$

Quel sera le changement de signe si l'on prend e^{-x} ?

Exemple : Calculer la valeur de e avec une précision de 5 positions.

5.2. Ln x

(x)	=	Ln x	f(0)	=	$-\infty$
(x)	=	$\frac{1}{x}$	f'(0)	=	$+\infty$
f''(x)	=	$-\frac{1}{x^2}$	f''(0)	=	$-\infty$

Cette série ne converge pas , elle est divergente; par conséquent le Ln x ne peut pas être développé en série entière limitée !

Par contre, Ln (1+x) ou Ln (1-x) peuvent être développés mais seulement sur $|x|<1$.

5.3. Sin x

f(x)	=	sin x	f(0)	=	0
f'(x)	=	cos x	f'(0)	=	1
f''(x)	=	- sin x	f''(0)	=	0
f'''(x)	=	- cos x	f'''(0)	=	-1

$$\boxed{\sin x = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots}$$

5.4. Cos x

f(x)	=	cos x	f(0)	=	1
f'(x)	=	cos x	f'(0)	=	0
f''(x)	=	cos x	f''(0)	=	-1
f'''(x)	=	cos x	f'''(0)	=	0

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots}$$

Déterminer la valeur de sin 10° avec une précision de 5 positions.
[Il faut utiliser comme unités d'arguments, les RADIANS !]

5.5. Tan x

f(x)	=	tan x	f(0)	=	0
f'(x)	=	cos tan x	f'(0)	=	1
f''(x)	=	2 sin x cos x	f''(0)	=	0
f'''(x)	=	2 cos x + 6 sin x cos x	f'''(0)	=	2

etc

$$\boxed{\tan x = \frac{x^1}{1!} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{16x^5}{5!} + \frac{272x^7}{7!} + \cdots}$$

5.6. Cot x

$$\boxed{\cot = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} - \cdots}$$

On remarque que les coefficients des différents termes diminuent rapidement.

6. Applications des développements : ⇒ Limites Dérivées Intégrales

Les développements servent souvent à déterminer la valeur approchée d'une expression mathématique qui n'est pas facile à travailler du point de vue algébrique.

6.1. e^x

$$y = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$y' = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$ donc la même expression !

6.2. Sin x

$$y = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$y' = \frac{1}{1!} - \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \cdots = \cos x$$

6.3. Cos x

$$y = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

$$y' = -\frac{2x}{2!} + \frac{4x^3}{4!} - \frac{6x^5}{6!} + \frac{8x^7}{8!} - \cdots = -\left(\frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) = -\sin x$$

6.4. $\frac{\sin x}{x}$

$$y = \frac{x^1}{x} - \frac{x^3}{3!x} + \frac{x^5}{5!x} - \frac{x^7}{7!x} + \cdots = \qquad 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} \ldots$$

$$y' = 0 - \frac{2x}{3!} + \frac{4x^3}{5!} - \frac{6x^5}{7!} + \cdots$$

6.5. Limite de $y = \frac{\sin x}{x}$ si x tend vers 0

Reprenons le résultat du 6.4.

$$y = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} \qquad \text{alors} \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

6.6. Limite de $y = \frac{\cos x - 1}{x}$ si x tend vers 0

6.7. Limite de $y = \frac{\tan x}{x}$ si x tend vers 0

6.8. Démontrer que la série $y = 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{5}{16} + \cdots$ diverge

On se base sur la fonction $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et on calcule sa limite [cf. 4.6]

6.9. Calculer $\sqrt[2]{2}$

6.10. Calculer $\sqrt[3]{2}$ etc...

6.11. Démontrer que $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

7. Vérifier les développements sur DERIVE

les graphes sur MATHEASS

8. Exemples d'approfondissement

8.1. Division d'un binôme

Construisons un exemple: multiplions les deux polynômes $(2x^3 +3x^2 -x +2) \cdot (3x-2)$

$2x^3 \cdot 3x - 2x^3 \cdot 2 + 3x^2 \cdot 3x - 3x^2 \cdot 2 - x \cdot 3x + x \cdot 2 + 2 \cdot 3x - 2 \cdot 2 =$

$6x^4 - 4x^3 + 9x^3 - 6x^2 - 3x^2 + 2x +6x -4 =$

$6x^4 + 5x^3 - 9x^2 + 8x -4$

Divisons maintenant ce résultat trouvé par le binôme $(3x-2)$

$$
\begin{array}{lllll|llll}
6x^4 & +5x^3 & -9x^2 & +8x & -4 & 3x & -2 & & \\
\cline{6-9}
\underline{-6x^4} & \underline{+4x^3} & & & & 2x^3 & +3x^2 & -x & +2 \\
 & +9x^3 & -9x^2 & & & & & & \\
 & \underline{-9x^3} & \underline{+6x^2} & & & & & & \\
 & & -3x^2 & +8x & & & & & \\
 & & \underline{+3x^2} & \underline{-2x} & & & & & \\
 & & & +6x & -4 & & & & \\
 & & & -6x & +4 & & & & \\
 & & & - & - & & & &
\end{array}
$$

Il faut appliquer un changement de signe : + fois + donne + retranché donne -

$+ 2x^3$ fois $+ 3x$ donne $+ 6x^4$ retranché donne $-6x^4$

Nous avons ordonné les puissances de x selon l'ordre décroissant des puissances de x.
Mais nous pouvons également disposer les termes selon les puissances croissantes de x.
Effectuons la division d'après cette méthode.

$$
\begin{array}{lllll|llll}
-4 & +8x & -9x^2 & +5x^3 & +6x^4 & -2 & +3x & & \\
\cline{6-9}
\underline{+4} & \underline{-6x} & & & & +2 & -x & +3x^2 & +2x^3 \\
 & 2x & -9x^2 & & & & & & \\
 & \underline{-2x} & \underline{3x^2} & & & & & & \\
 & & -6x^2 & +5x^3 & & & & & \\
 & & +6x^2 & \underline{-9x^3} & & & & & \\
 & & & -4x^3 & +6x^4 & & & & \\
 & & & +4x^3 & +6x^4 & & & & \\
 & & & - & - & & & &
\end{array}
$$

Si la division ne tombe pas exacte, on continue

$$
\begin{array}{llllll|llllll}
-4 & +8x & -8x^2 & +4x^3 & +6x^4 & & 2 & -3x & & & & \\
\cline{7-12}
\underline{+4} & \underline{-6x} & & & & & -2 & +x & -\frac{5}{2}x^2 & -\frac{7}{4}x^3 & +\frac{3}{8}x^4 & \text{etc...} \\
 & 2x & -8x^2 & & & & & & & & & \\
 & \underline{-2x} & \underline{+3x^2} & & & & & & & & & \\
 & & -5x^2 & +4x^3 & & & & & & & & \\
 & & \underline{+5x^2} & \underline{-\frac{15}{2}x^3} & & & & & & & & \\
 & & & -\frac{7}{2}x^3 & +6x^4 & & & & & & & \\
 & & & \underline{+\frac{7}{2}x^3} & \underline{-\frac{21}{4}x^4} & & & & & & & \\
 & & & & +\frac{3}{4}x^4 & & & & & & & \\
 & & & & -\frac{3}{4}x^4 & +\frac{9}{8}x^5 & \text{etc...} & & & & &
\end{array}
$$

Effectuons la division suivante :

$$
\begin{array}{llllll|llll}
1 & & & & & & 1 & -x^2 & & \\
\cline{7-10}
-1 & +x^2 & & & & & 1 & +x^2 & +x^4 & +x^6 \quad \text{etc..} \\
\cline{1-2}
 & +x^2 & & & & & & & & \\
 & -x^2 & +x^4 & & & & & & & \\
\cline{2-3}
 & & +x^4 & & & & & & & \\
 & & -x^4 & +x^6 & & & & & & \\
\cline{3-4}
 & & & +x^6 & & & & & & \\
 & & & -x^6 & +x^8 & & & & & \\
\cline{4-5}
 & & & & +x^8 & \ldots & & & & \\
\end{array}
$$

8.2. Valeur d'une expression

On obtient la valeur d'une expression algébrique en introduisant les valeurs données :

Pour $a = -2$ et $b = \frac{2}{3}$

1) $2\cdot a\cdot b = 2\ (-2)\ \frac{2}{3} = -\frac{8}{3}$

2) $\frac{2a^2b}{3} = \frac{2\left(-2^2\right)\frac{2}{3}}{3} = \frac{2\cdot 4\cdot 2}{3\cdot 3} = \frac{16}{9}$

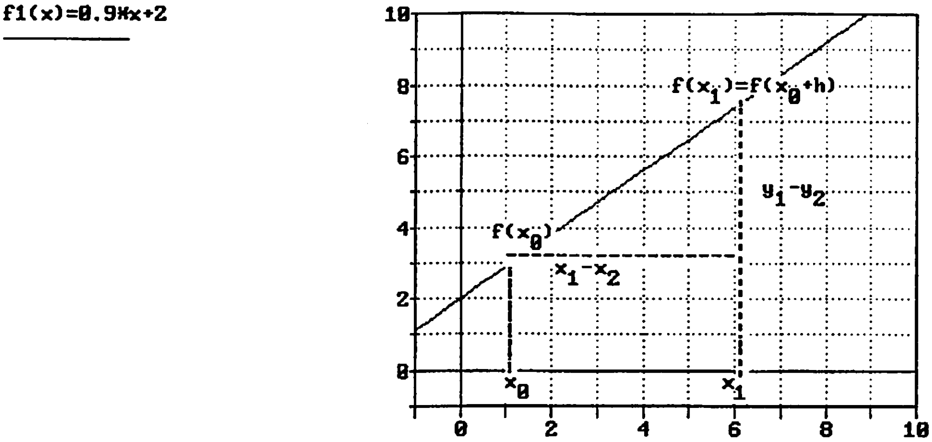
3) $\frac{(2\cdot a)^2 b}{3} = \frac{(2\cdot(-2))^2\frac{2}{3}}{3} = -\frac{4\cdot 4\cdot 2}{3\cdot 3} = -\frac{32}{9}$

4) $\frac{2a^{-2}b}{3} = \frac{2b}{3\cdot a^2} = \frac{2\cdot\frac{2}{3}}{3\cdot(-2)^2} = \frac{4}{3\cdot 3\cdot 4} = \frac{1}{9}$

5) $\left(\frac{2a^{-2}b}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2b}{3\cdot a^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a}\left(\frac{2b}{3\cdot}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{(-2)}\sqrt{\frac{2\cdot\frac{2}{3}}{3}} = \frac{1}{(-2)}\sqrt{\frac{4}{9}} = -\frac{2}{2\cdot 3} = -\frac{1}{3}$

6) $\left(\frac{2a^{-2}b}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{3\cdot a^2}{2\cdot b}\right)^{\frac{1}{2}} = a\cdot\left(\frac{3}{2\cdot b}\right)^{\frac{1}{2}} = -2\cdot\sqrt{\frac{3}{2\cdot\frac{2}{3}}} = -2\cdot\sqrt{\frac{3}{2\cdot\frac{2}{3}}} = -2\cdot\sqrt{\frac{9}{4}} = -2\cdot\frac{3}{2} = -3$

8.3. Graphe de y= ax+b



y est fonction de x : y = f(x)

h est la différence $x_1 - x_0$

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_1) - f(x_0)\\ &= f(x_0 + h) - f(x_0)\end{aligned}$$

a est le coefficient angulaire de la droite ou appelé encore la pente de la droite.

a est le rapport $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ dans notre cas $a = \frac{9}{10}$

b est l'ordonnée à l'origine, est le point sur l'axe des y par lequel passe la droite : pt (0;2)

L'équation de cette droite est : $y = 0{,}9\,x + 2$

$$= \frac{9}{10}x + 2$$

8.4. Sommation

Si m élèves de notre classe, repérés à l'aide d'un indice j (j=1,2,..,m) consomment chacun x_j litres de boisson par an, nous pouvons étudier la consommation totale de boisson, soit $x_1+x_2+x._3..+x_m$. Afin de condenser et de simplifier la notation, le signe $\sum$ (somme) est introduit.

$$\sum_{j=1}^{3} x_j = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\sum_{j=4}^{6} x_j = x_4 + x_5 + x_6$$

$$\sum_{j=4}^{4} x_j = x_4$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_j = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots x_m$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_j (x^{j-1} +j) = 2 a_1 +a_2 (x+2) + a_3 (x^2+3) + \ldots +a_m (x^{m-1}\ m)$$

Exemples:

$$\sum_{j=1}^{4} a_j\, b_{j+2} (x^{j-1}\ y^j -2^j *j) \qquad = \quad ?$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{j+1} [(j+1)\, x^{j-1} \cdot y^{j}]^{j-1} \quad = \quad ?$$

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_i x_j = a_1 x_1 + a_2 x_1 + a_3 x_1 + \ldots + a_1 x_2 + a_2 x_2 + \ldots\ldots + a_n x_m$$

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} j \cdot a_i \cdot x_j^i = \qquad ?$$

8.5. Dérivées

8.6. Factorielle

8.7. Exposants

9. Mode d'emploi du logiciel DERIVE