CHAPITRE 3

REPRESENTATION DE FONCTIONS ALGEBRIQUES

A) FONCTIONS POLYNOMES

1) Fonctions linéaires

Une fonction linéaire ou affine est une fonction entière du 1^er^ degré et son équation se note :

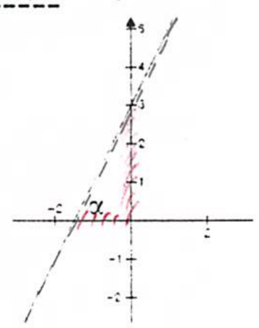
$f(x) = y = ax + b$ ou encore $f(x) = y = mx + h$ avec :

$a = m$ la pente, le coefficient angulaire, coefficient directeur ou taux d'accroissement
En plus $a = m = \tan\alpha$ où α est l'angle formé par la droite et l'axe (ox) orienté positivement

$b = h$ l'ordonnée à l'origine

Le domaine de définition d'une fonction linéaire est toujours $\mathbb{R}$.
La représentation graphique d'une fonction linéaire est toujours une droite.

Exemple : $y = 2x + 3$



$\tan\alpha = \dfrac{3}{1{,}5} = 2 = a = m$

$3 = b = h$

$\operatorname{dom} f = \operatorname{im} f = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

Autres exemples :

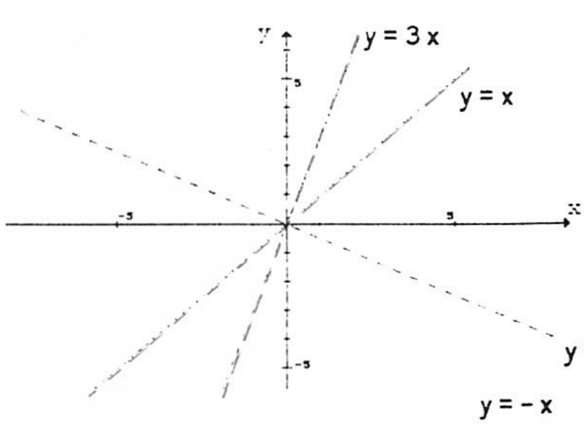
+) loi d'Ohm : $U = R \cdot I$

ou $I = \dfrac{1}{R} \cdot U$

+) mouvement uniforme : $s = v \cdot t$

+) loi de Kirchhoff : $R = \dfrac{\rho}{A} \cdot l$

a) Influence du coefficient a



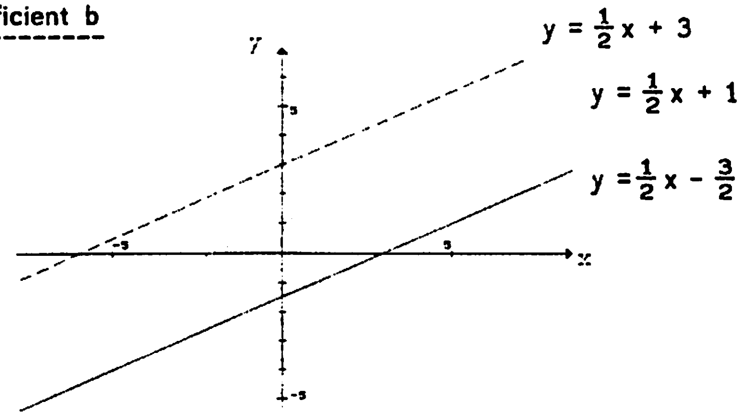
+) Si a est positif, la fonction linéaire ou affine est une fonction monotone croissante.

+) Si a = 0, la fonction est constante.

+) Si a est négatif, la fonction linéaire ou affine est une fonction monotone décroissante.

Le signe de a détermine le sens de variation de la fonction .
La valeur absolue $|a|$ nous indique que la pente est plus ou moins accentuée .

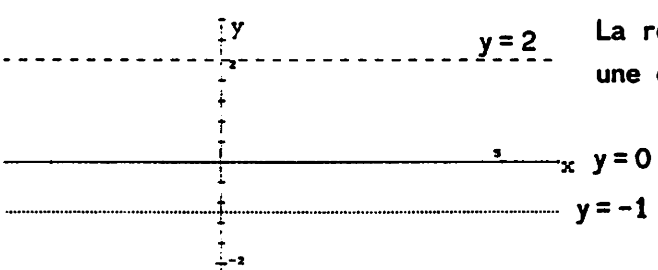
b) Influence du coefficient b



La variation de b entraine un déplacement vertical de la droite .

c) Quelques fonctions linéaires particulières

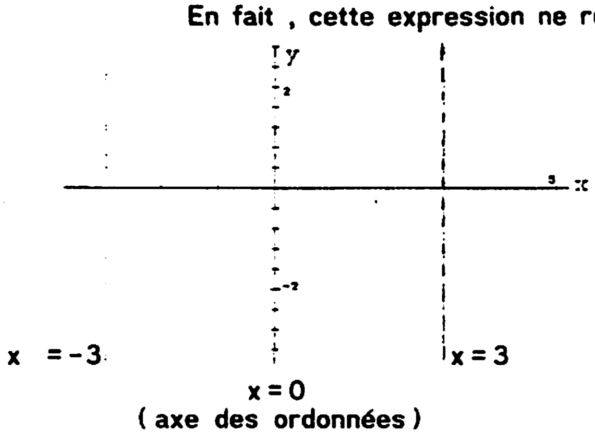
① a = 0 : y = b (fonction constante)



La représentation graphique de cette fonction est une droite horizontale .

② x = constante

En fait , cette expression ne représente pas une fonction , car pour une valeur de x on trouve une infinité d'images .



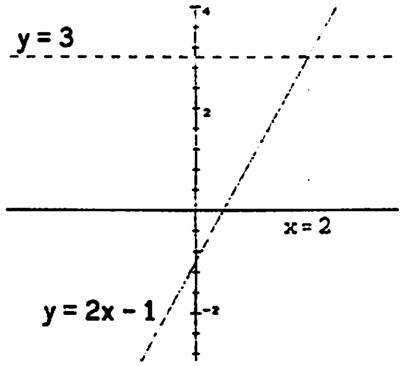
Néanmoins , la représentation graphique de cette expression est également une droite . Il s'agit d'une droite verticale , donc parallèle à l'axe des y .

d) Interprétation graphique des équations linéaires (et affines)

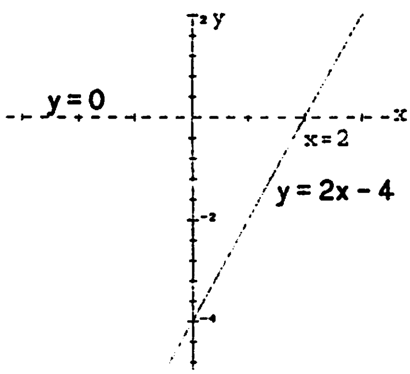
Exemple : L'équation linéaire $2x - 1 = 3$, dont la résolution algébrique

$$2x = 3 + 1 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{2} \Leftrightarrow x = 2$$

est bien connue , peut être résolue de 2 manières par la représentation graphique :



1) Chaque membre de l'équation de départ $2x - 1 = 3$ constitue une fonction et l'abscisse du point d'intersection des représentations de ces 2 fonctions $y_1 = 2x - 1$ et $y_2 = 3$ nous livre la solution de l'équation donnée .



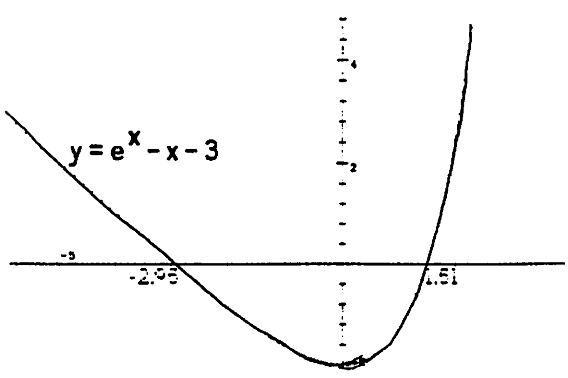
2) Par une opération algébrique , on transforme d'abord l'équation de sorte à ce que le deuxième membre soit nul : $2x - 1 = 3 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0$

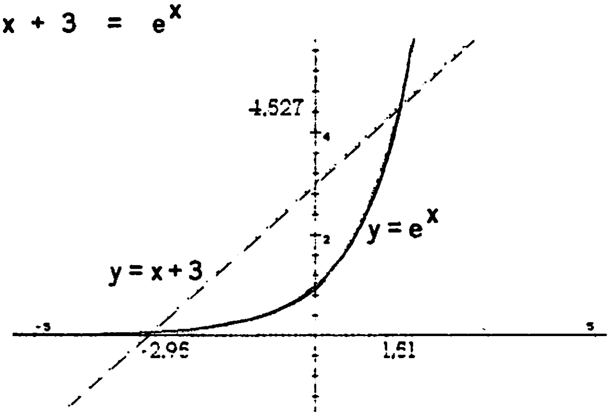
   La solution graphique de cette équation est donnée par l'abscisse du point d'intersection de la représentation graphique de cette nouvelle fonction $y_1 = 2x - 4$ avec l'axe des x donné par l'équation $y_2 = 0$.

Remarque :

Cette méthode est celle que l'on utilise souvent au moment où la fonction donnée est composée d'une somme ou d'une différence d'une fonction algébrique et d'une fonction transcendante , comme p. ex. :

$$x + 3 - e^x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 3 = e^x$$





Les solutions exactes de cette équation peuvent être calculées par la méthode d'approximation de Newton (que l'on verra en classe de 13^{me}) : $x_1 = -2{,}95$ et $x_2 = 1{,}51$

2) Fonctions quadratiques

Une fonction quadratique est une fonction entière du 2^{nd} degré et son équation se note :

$$f(x) = y = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$$

Le domaine de définition d'une fonction quadratique (comme de toute fonction polynôme) est $\mathbb{R}$. La représentation d'une équation du second degré est toujours une parabole .

Parmi toutes les paraboles , celles d'équation $y = a \cdot x^2$ ont la particularité que leur sommet se trouve à l'origine du système d'axes : $s(0;0)$.
Pour représenter graphiquement une parabole , il faut absolument connaitre le sommet de la parabole , donné par ses coordonnées : $s\left(\frac{-b}{2a} ; \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

Pour arriver à ces coordonnées , il faut décomposer l'équation initiale de la façon suivante :

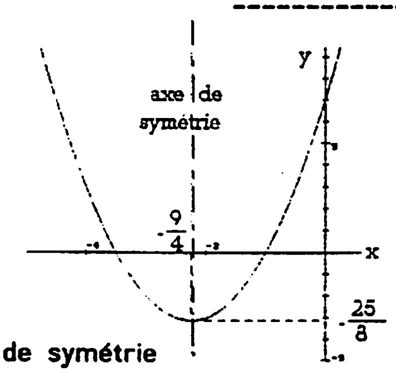
$$y = ax^2 + bx + c \iff y = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$\iff y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

$$\iff y - \left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right) = a\left[x - \left(\frac{-b}{2a}\right)\right]^2$$

En posant : $Y = y - \left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ et $X = x - \left(\frac{-b}{2a}\right)$ nous trouvons l'équation d'une parabole standard : $Y = a \cdot X^2$ dont le sommet se trouve à l'origine o' du système d'axes auxiliaires (o'X) et (o'Y) . Pour trouver les coordonnées du sommet de cette parabole dans le système d'axes initial de centre o et d'axes (ox) et (oy) , il nous faut poser :

$X = 0 \iff \underline{x = \frac{-b}{2a}}$ et $Y = 0 \iff \underline{y = \frac{4ac - b^2}{4a}}$



Exemple : $f(x) = 2x^2 + 9x + 7$

Sommet de la parabole :

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-9}{4} \qquad y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-25}{8}$$

$$s\left(\frac{-9}{4} ; \frac{-25}{8}\right)$$

Nous constatons que la parabole admet un axe de symétrie en $x = \frac{-9}{4}$, abscisse du sommet de la parabole .

Exemples concrets : α) Chute libre : $s = \frac{1}{2}gt^2$ si $v_0 = 0$

$s = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$ si $v_0 \neq 0$

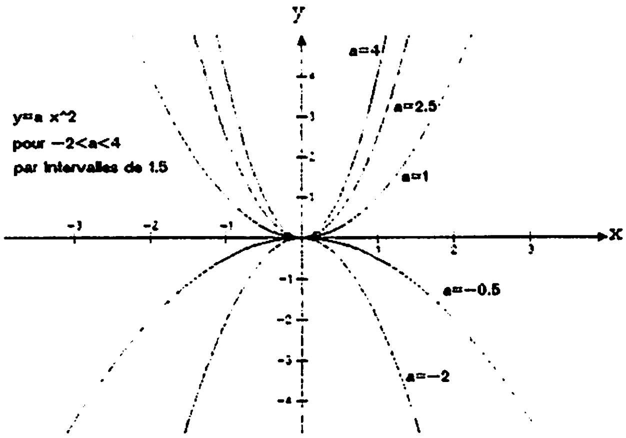
β) Puissance électrique : $P = \frac{U^2}{R} = \frac{1}{R} \cdot U^2$

γ) Aire d'un disque : $A = \pi \cdot r^2 = \frac{\pi}{4} \cdot d^2$

δ) Aire d'une boule : $A = 4\pi r^2$

E potentiel = $\frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$

a) Influence du coefficient a



$$f(x) = a \cdot x^2$$

Comme pour la fonction du 1^{er} degré , nous constatons que la valeur absolue $|a|$ nous indique que la pente est plus ou moins accentuée . $|a|$ influence directement la largeur de la parabole .

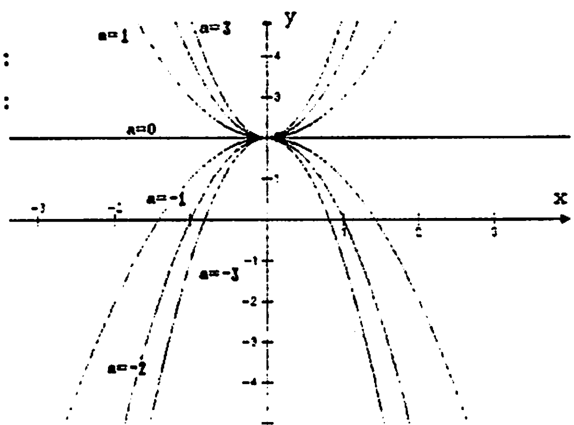
*) Si $|a| = 1$, largeur normale de la parabole
*) Si $|a| < 1$, parabole plus large
*) Si $|a| > 1$, parabole plus étroite

Le signe de a nous renseigne sur la concavité de la parabole :

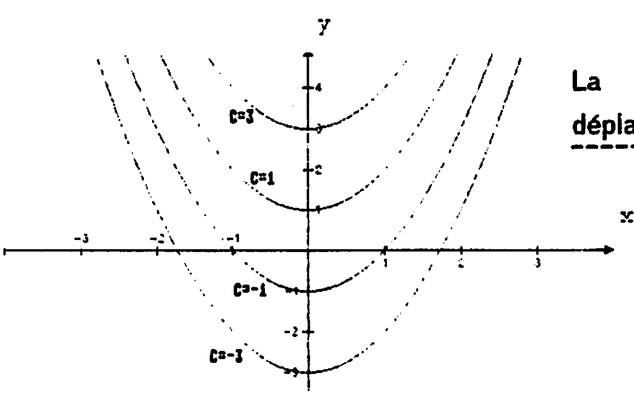
*) Si $a > 0$, concavité vers le haut
*) Si $a < 0$, concavité vers le bas

Dans cet exemple , nous avons la fonction : $y = a x^2 + 2$, a prenant cette fois les valeurs : -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3

Le sommet est donné par le point (0 ; 2)



b) Influence du coefficient c

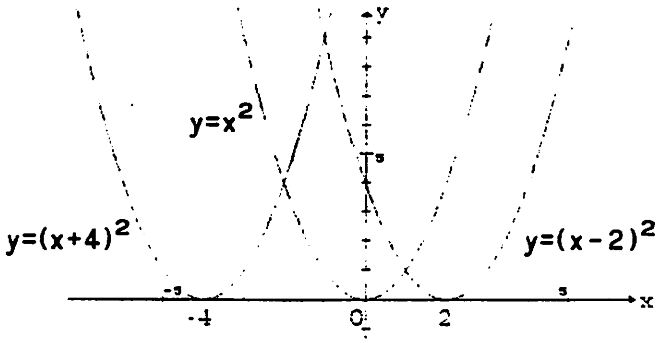


La variation du terme constant c entraine un déplacement vertical de la courbe de c unités .

Le sommet de la parabole est donné par : s(0 ; c)

c) Déplacement horizontal de la courbe

Pour déplacer horizontalement la courbe d'une fonction (quelconque) de α unités , il suffit de remplacer x par $(x - \alpha)$ dans l'équation de la fonction .



Nous constatons que le sommet de la parabole subit un déplacement horizontal de α unités .

Le sommet est donné par : $s (\alpha ; 0)$

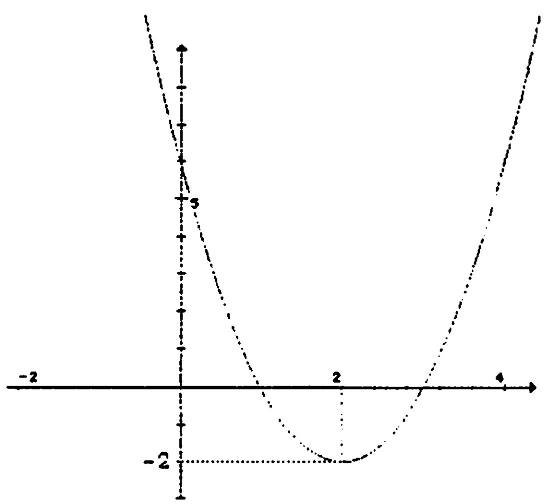
En développant l'expression de $f(x) = (x-2)^2 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 4x + 4$, on trouve une expression analogue à l'expression générale $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Inversément , tout polynôme du 2nd degré $f(x) = y = ax^2 + bx + c$ se laisse réduire à l'équation : $\underline{Y = a \cdot X^2}$ en posant $X = x - \frac{-b}{2a}$ et $Y = y - \frac{4ac - b^2}{4a}$

$$\Leftrightarrow \underline{x = X + \frac{-b}{2a}} \quad \text{et} \quad \underline{y = Y + \frac{4ac - b^2}{4a}}$$

Exemple :

$f(x) = y = 2x^2 - 8x + 6$



$\frac{-b}{2a} = 2 \quad ; \quad \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-16}{8} = -2$

(abscisse et ordonnée du sommet)

En remplaçant : $x = X + 2$ et $y = Y - 2$ l'équation devient :

$Y - 2 = 2\left(X + 2\right)^2 - 8\left(X + 2\right) + 6$

$Y = 2(X^2 + 4X + 4) - 8X - 16 + 6 + 2$

$Y = 2X^2 + 8X + 8 - 8X - 8$

$\underline{Y = 2X^2}$

On pourrait également écrire l'équation de cette fonction sous la forme :

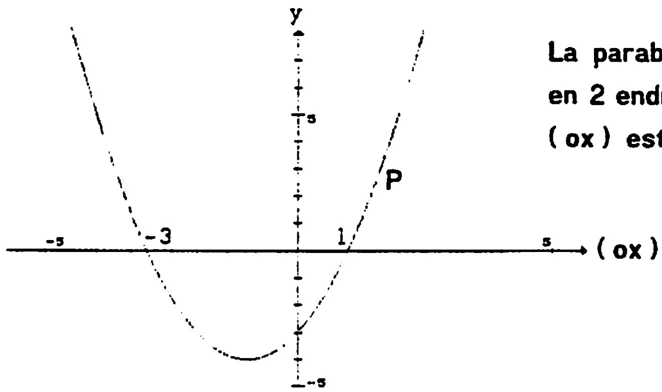
$f(x) = 2x^2 - 8x + 6 = 2(x-2)^2 - 2$

a) Equations admettant 2 racines réelles distinctes :

Il y a deux moyens d'interpréter une équation du second degré comme par exemple :

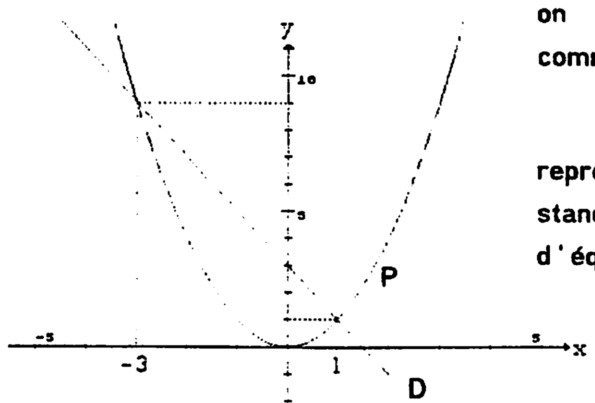
$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

1) La solution de l'équation $x^2 + 2x - 3 = 0$ est à considérer comme intersection d'une fonction du second degré $f_1(x) = x^2 + 2x - 3$ et de la fonction constante $f_2(x) = 0$ représentées respectivement par une parabole (de sommet $s(-1;-4)$) et l'axe (ox) .



La parabole coupe (latin: secare) l'axe des x en 2 endroits : $x = -3$ et $x = 1$. On dit que l'axe (ox) est une sécante à la parabole .

2) En transformant l'équation : $x^2 + 2x - 3 = 0 \iff x^2 = -2x + 3$,



on peut également interpréter cette solution comme intersection des fonctions

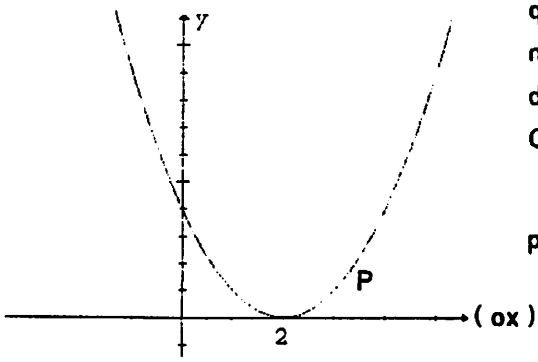
$$f_3(x) = x^2 \quad \text{et} \quad f_4(x) = -2x + 3$$

représentées respectivement par la parabole standard d'équation $y = x^2$ et la droite d'équation $y = -2x + 3$.

Cette équation admettant 2 racines réelles distinctes ($\Delta = 16 > 0$) $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$, nous constatons que ces <u>2 racines correspondent aux abscisses des points d'intersection des 2 fonctions</u> , aussi bien dans le cas 1) que dans le cas 2) .

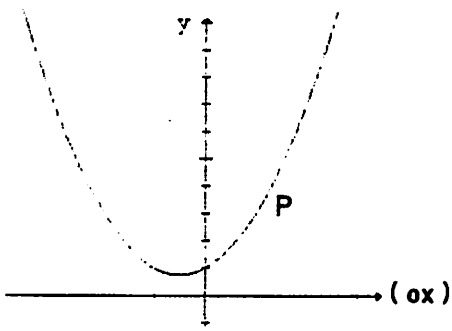
b) Equations admettant une racine double :

L'équation $x^2 - 4x + 4 = 0$ n'admettant qu'une racine double ($\Delta = 0$) , nous constatons que la parabole représentative de cette fonction ne fait que toucher (latin : tangere) l'axe des des abscisses qu'au seul point d'abscisse $x = 2$. On dit que (ox) est tangent à la parabole .



La racine double correspond à l'abscisse du point de tangence .

c) Equation n'admettant pas de racine réelle :



L'équation $x^2 + x + 1 = 0$ n'admettant pas de racine réelle ($\Delta < 0$) , nous remarquons que la parabole représentative n'admet ni de point de tangence , ni de point d' intersection avec (ox) .

Etant donné qu'une parabole ne peut couper l'axe des abscisses (ox) qu'au plus 2 fois , nous pouvons retenir :

Une équation du second degré admet au plus 2 racines réelles distinctes . Une fonction du second degré a au plus 2 zéros de la fonction .

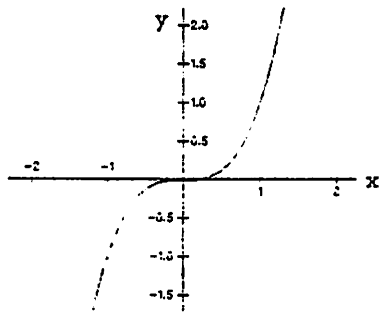
3) Fonctions cubiques

Une fonction cubique est une fonction entière du 3^{me} degré et son équation se note :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad (a \neq 0)$$

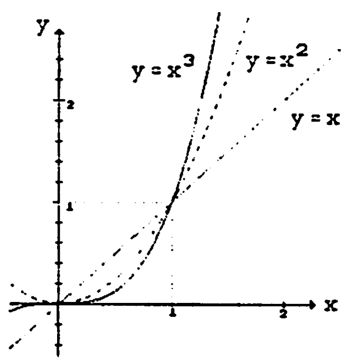
Comme il s'agit d'une fonction polynôme , le domaine de définition est **R** . L'ensemble des images est également **R** .

<u>Exemple</u> : $f(x) = y = x^3$



De même que pour les fonctions du 2^{nd} degré , la valeur absolue $|a|$ nous indique que la pente de la courbe est plus ou moins accentuée , le changement du terme constant entraine un déplacement vertical de la courbe et pour obtenir un déplacement horizontal de α unités , il faut remplacer x par $(x - \alpha)$.

<u>Comparaison de $y = x$, $y = x^2$ et $y = x^3$ sur l'intervalle $[0, 2]$</u>



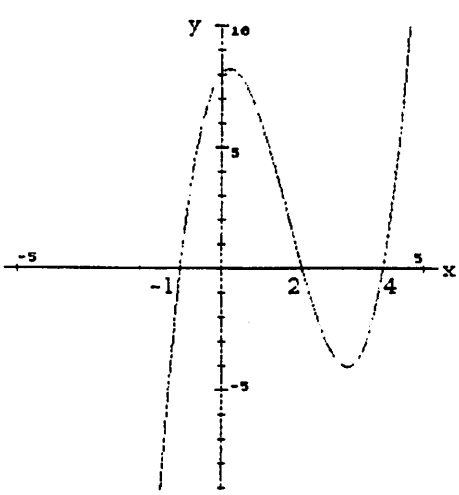
Nous constatons que dans l'intervalle $[0, 1]$, la courbe de $y = x$ est supérieure à celle de $y = x^2$ et encore à celle de $y = x^3$: $x > x^2 > x^3$.

A partir du point d'intersection $x = 1$, les courbes sont disposées de manière contraire : $x^3 > x^2 > x$

<u>Interprétations graphiques des équations du troisième degré</u>

<u>Exemple</u> : $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8 \quad \Rightarrow \quad x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$

La représentation graphique de cette fonction , qui est plus caractéristique pour une fonction cubique que celle de la fonction $f(x) = x^3$, nous permet de constater qu'une fonction cubique peut avoir 3 racines ou zéros de la fonction .



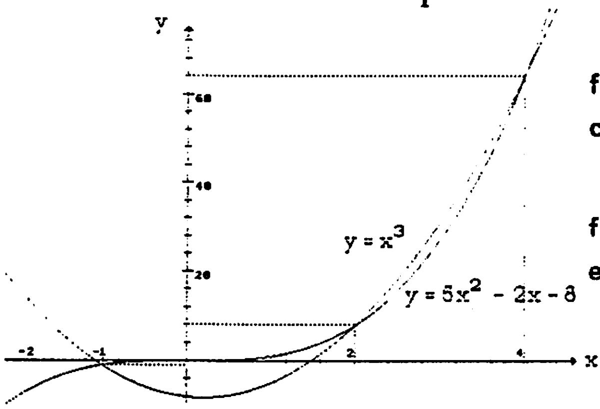
Il s'agit de : $x_0 = -1$; $x_1 = 2$ et $x_2 = 4$

Si on translatait la courbe verticalement , en variant le coefficient constant d , on pourrait constater :

Toute fonction cubique admet au plus 3 racines réelles distinctes .

On peut également constater qu'elle admet au moins une racine réelle .

Au lieu d'interpréter l'équation $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$ comme intersection de l'axe (ox) avec la courbe représentative de la fonction f(x) , nous pouvons également transformer l'équation : $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 5x^2 - 2x - 8$ et l'interpréter comme intersection de la fonction $f_1(x) = x^3$ et de la fonction $f_2(x) = 5x^2 - 2x - 8$.



En effet , la représentation de la fonction $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$ nécessite une étude complète de cette fonction (programme de 13ᵉ) .

Par contre , les représentations des 2 fonctions f_1 et f_2 ne présente aucune difficulté majeure et peut se faire en quelques minutes .

Remarque : Si les racines de la fonction cubique sont données par des nombres entiers , positifs ou négatifs , la résolution graphique d'une équation du 3ᵐᵉ degré est très utile . Mais si les racines ne sont pas des nombres entiers , cette méthode ne peut servir qu'à approximer les zéros de la fonction .

Pour obtenir les résultats corrects , il faut les déterminer algébriquement , encore que la méthode que nous allons indiquer ne fonctionne pas toujours . En effet , elle suppose que la fonction cubique ait au moins une racine entière .

Recherche des racines d'une fonction cubique

Théorème : Le produit de toutes les racines d'un polynôme du n-ième degré est :

*) $-\dfrac{\text{terme constant}}{a}$, si n est impair

*) $+\dfrac{\text{terme constant}}{a}$, si n est pair

Expliquons l'énoncé de ce théorème à l'aide de quelques exemples :

1) $f(x) = 5x - 5$ → racine unique : $x = 1$

$n = 1$ → $-\dfrac{-5}{5} = 1$

2) $f(x) = 7x^2 - 49x - 126$ → 2 racines : $x = -2$ et $x = 9$

$n = 2$ → $+\dfrac{-126}{7} = -18 = (-2)\cdot 9$

3) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$ → 3 racines : $x = -1$, $x = 2$ et $x = 4$

$n = 3$ → $-\dfrac{8}{1} = -8 = (-1)\cdot 2\cdot 4$

De ce théorème , nous pouvons conclure que les racines réelles d'une fonction (cubique ou autre) sont à rechercher parmi les diviseurs du terme constant (au signe près) .

Exemple : $f(x) = 6x^4 + 13x^3 - 13x - 6 \longrightarrow \text{Div } 6 = \{\pm 1 ; \pm 2 ; \pm 3 ; \pm 6\}$

Comme par racine ou zéro d'une fonction on entend la valeur de x qui annulle la fonction , remplaçons x successivement par les diviseurs de 6 :

$f(1) = 6 + 13 - 13 - 6 = 0 \rightarrow x = 1$ est racine de f

$f(-1) = 6 - 13 + 13 - 6 = 0 \rightarrow x = -1$ est racine de f

$f(2) = 96 + 104 - 26 - 6 \neq 0 \rightarrow x = 2$ n'est pas racine de f

Au moment d'avoir trouvé une racine x_o de la fonction , nous allons diviser l'équation de la fonction par le binôme : $x - x_o$:

$$\frac{f(x)}{x - x_o} = q(x) \Leftrightarrow f(x) = (x - x_o) \cdot q(x)$$

$$\text{avec} \quad \text{degré}(q(x)) = \text{degré}(f(x)) - 1$$

En recommançant le même procédé avec la nouvelle fonction $q(x)$, obtenue par division , il est possible de réduire le degré jusqu'à 2 , où nous pouvons alors utiliser la formule de résolution d'une équation du second degré .

Division d'un polynôme par un binôme

Règle :

1) On ordonne le dividende et le diviseur d'après les puissances décroissantes .
2) On divise le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur , on obtient le premier terme du quotient .
3) On multiplie le diviseur par le terme trouvé et on retranche le produit du dividende .
4) On divise le premier terme du premier reste partiel par le premier terme du diviseur et on obtient le deuxième terme du quotient .
5) On multiplie le diviseur par le deuxième terme du quotient et on retranche le produit du premier reste partiel .
6) Les termes suivants du quotient s'obtiennent par le même procédé .

Exemple : $f(x) = x^3 + 9x^2 + 11x - 21 \longrightarrow \text{Div } 21 = \{\pm 1 ; \pm 3 ; \pm 7 ; \pm 21\}$

$f(1) = 1 + 9 + 11 - 21 = 0 \rightarrow f(x)$ divisible par $(x - 1)$

Dividende $\rightarrow$	$x^3 + 9x^2 + 11x - 21$	: $(x-1)$	=	$x^2 + 10x + 21$
$-x^2(x-1) \rightarrow$	$-x^3 + x^2$	Diviseur		Quotient
Premier reste partiel $\rightarrow$	$10x^2 + 11x$			
	$-10x^2 + 10x$			
Deuxième reste partiel $\rightarrow$	$21x - 21$			
	$-21x + 21$			
	..			

Exercice : Résoudre l'équation : $6x^4 + 13x^3 - 13x - 6 = 0$ (exemple en haut de la page)

Exercices sur les représentations graphiques et résolution d'équations

Exercice 1 : Soient les 2 fonctions f et g données par leurs équations respectives :

$$f(x) = x^3 - 4x \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - 4$$

a) Représenter les 2 fonctions dans un même repère orthonormé .

b) Utiliser le graphique pour résoudre l'équation : $f(x) = g(x)$

----- ----- ----- ----- ----- -----

Exercice 2 : Soient les 2 fonctions f et g données par leurs équations respectives :

$$f(x) = x^3 \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - 2x + 2$$

a) Représenter les 2 fonctions dans un même repère orthonormé .

b) Utiliser le graphique pour résoudre l'équation : $f(x) = g(x)$

----- ----- ----- ----- ----- -----

Exercice 3 : Soient les 2 fonctions f et g données par leurs équations respectives :

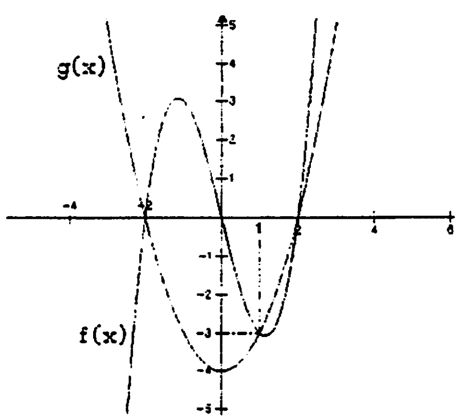
$$f(x) = x^3 \quad \text{et} \quad g(x) = -x^2 + \frac{5}{2}x + 1$$

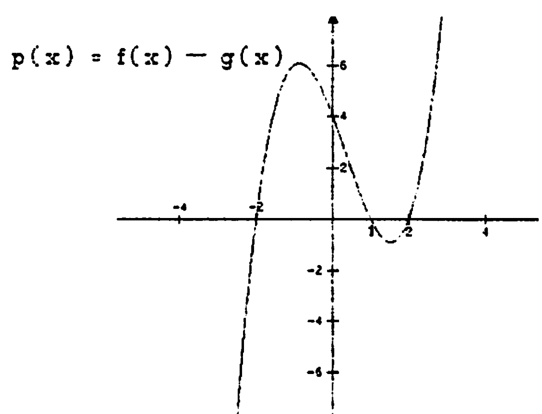
a) Représenter les 2 fonctions dans un même repère orthonormé .

b) Utiliser le graphique pour résoudre l'équation : $f(x) = g(x)$

Résolutions graphiques et algébriques des exercices

Exercice 1 :





Il s'agit dans ce cas de 2 représentations graphiques différentes de la même équation à résoudre : $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$

a) Dans la représentation à gauche , nous avons l'équation : $f(x) = g(x)$ où : $f(x) = x^3 - 4x$ et $g(x) = x^2 - 4$

b) Dans la représentation à droite , nous avons directement l'équation : $p(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$ avec $p(x) = f(x) - g(x)$

Dans les 2 cas nous trouvons comme solutions les 3 valeurs : −2 ; 1 ; 2 . Dans le premier cas , il s'agit des points d'intersection des 2 courbes en question , dans le deuxième cas , il s'agit des points d'intersection de la courbe avec l'axe des x .