<u>ÉPREUVE ÉCRITE</u>

<u>Ministère de l'Éducation Nationale, de la Formation Professionnelle et des Sports</u>

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES TECHNIQUES
Division technique générale

BRANCHE: Mathématiques I

DATE: 27. 5. 2002 DURÉE: 2h15min

I. 1) Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

2) Soit $\alpha > 0$. Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0$.

II. Soit la fonction *f* définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$ et soit C_f la courbe représentative de *f*.

1) Déterminer le domaine de définition de *f*.
2) Etudier si *f* est dérivable en 0. Que peut-on en déduire pour C_f ?
3) Démontrer que C_f admet une asymptote oblique en $-\infty$ dont on déterminera une équation.

III. Résoudre dans **R**:

1) $2\ln(3x-2) - \ln x \geq \ln(2-x)$
2) $2^x - 3 \cdot 2^{1-x} = 5$

IV. Soit la fonction *f* définie par $f(x) = \frac{\ln\sqrt{2x}}{x}$. Déterminer le domaine de définition de *f*, les limites aux bornes du domaine et la dérivée de *f*.

V. Soit la fonction *f* définie par $f(x)=1-2x+\dfrac{e^x}{1-e^x}$ et soit C_f la courbe représentative de *f*.

1) Déterminer le domaine de définition de *f*, les limites aux bornes du domaine et les éventuelles asymptotes parallèles aux axes.
2) Démontrer que C_f admet une asymptote oblique en $+\infty$ et une asymptote oblique en $-\infty$ dont on déterminera chaque fois une équation.
3) Calculer $f'(x)$. En déduire le tableau de variation de *f*.
4) Construire C_f dans un repère orthonormé.

VI. Etudier la limite de la suite (u_n) définie par:

1) $u_n=\dfrac{n^3+3^n}{4^n-n^2}$
2) $u_n=\dfrac{e^{2n}}{\ln n}$
3) $u_n=\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$

Répartition des points: 10(7+3) + 9(1+3+5) + 10(6+4) + 5 + 21(6+3+9+3) + 5(2+2+1)

Examen de fin d'études secondaires techniques 2002
Division technique générale

Corrigé de l'épreuve de mathématiques I (27.05.2002)

I. 1) question de cours (livre p.120)
2) question de cours (livre p.170)

II. $f(x)=\sqrt{x^2+x}-x$

1) Condition: $x^2+x\geq 0 \Leftrightarrow x(x+1)\geq 0$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathrm{Dom}\, f =]-\infty;-1]\cup[0;+\infty[$

2) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+x-x^2}{x\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\underbrace{\sqrt{x^2+x}+x}_{\to 0^+}}=+\infty$$

Donc: f n'est pas dérivable en 0 et C_f admet une tangente verticale en 0.

3) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}{x}=-2$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)+2x]=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=-\frac{1}{2}$$

Donc: C_f admet une asymptote oblique d'équation $y=-2x-\frac{1}{2}$ au voisinage de $-\infty$.

III. 1) $2\ln(3x-2)-\ln x\geq \ln(2-x)$

Conditions: $3x-2>0\Leftrightarrow x>\frac{2}{3}$; $x>0$; $2-x>0\Leftrightarrow x<2$

Domaine d'existence: $D=\left]\frac{2}{3};2\right[$

On obtient: $\ln(3x-2)^2 \geq \ln x + \ln(2-x) \Leftrightarrow \ln(3x-2)^2 \geq \ln[x(2-x)]$

$\Leftrightarrow (3x-2)^2 \geq x(2-x) \Leftrightarrow 9x^2 - 12x + 4 \geq 2x - x^2 \Leftrightarrow 10x^2 - 14x + 4 \geq 0$

$\Leftrightarrow 5x^2 - 7x + 2 \geq 0$

$\Delta = 49 - 40 = 9$; $x_1 = \dfrac{7+3}{10} = \dfrac{10}{10} = 1$; $x_2 = \dfrac{7-3}{10} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$

x	$-\infty$		$\frac{2}{5}$		1		$+\infty$
$5x^2 - 7x + 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc: $x \in \left]-\infty; \dfrac{2}{5}\right] \cup [1; +\infty[$

$S = [1; 2[$

2) $2^x - 3 \cdot 2^{1-x} = 5 \Leftrightarrow 2^x - \dfrac{6}{2^x} = 5 \Leftrightarrow 2^{2x} - 5 \cdot 2^x - 6 = 0$

Posons $X = 2^x$ $(X > 0)$.

On obtient: $X^2 - 5X - 6 = 0 \Leftrightarrow (X+1)(X-6) = 0$

$X = -1 \Leftrightarrow 2^x = -1$, impossible

$X = 6 \Leftrightarrow 2^x = 6 \Leftrightarrow x \ln 2 = \ln 6 \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln 6}{\ln 2}$

$S = \left\{\dfrac{\ln 6}{\ln 2}\right\}$

IV. $f(x) = \dfrac{\ln\sqrt{2x}}{x}$

Condition: $x > 0$

Dom $f = \mathbf{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbf{R}_+^*$: $f(x) = \dfrac{\frac{1}{2}\ln 2x}{x} = \dfrac{\ln 2x}{2x}$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\underbrace{\frac{1}{2x}}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\ln 2x}_{\to -\infty} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln 2x}{2x} = \lim_{X\to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0 \text{ (en posant } X = 2x\text{)}$$

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*: f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2}{2x} \cdot x - \ln 2x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln 2x}{2x^2}$$

V. $f(x)=1-2x+\frac{e^x}{1-e^x}$

1) Condition: $1-e^x \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$

Dom $f=\mathbf{R}^*$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1-2x+\frac{e^x}{1-e^x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1-2x+\frac{e^x}{\underbrace{e^x\left(\underbrace{e^{-x}}_{\to 0}-1\right)}_{\to -1}}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(1-2x+\frac{\overbrace{e^x}^{\to 0}}{\underbrace{1-\underbrace{e^x}_{\to 0}}_{\to 0}}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(1-2x+\frac{\overbrace{e^x}^{\to 1}}{\underbrace{1-e^x}_{\to 0^-}}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(1-2x+\frac{\overbrace{e^x}^{\to 1}}{\underbrace{1-e^x}_{\to 0^+}}\right)=+\infty$$

Donc: C_f admet une asymptote verticale d'équation $x=0$.

2) $$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-2x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{e^x}{\underbrace{1-e^x}_{\to -1}}\right)=0$$

Donc: C_f admet une asymptote oblique d'équation $y=-2x$ au voisinage de $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-2x+1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{1-e^x}=0$$

Donc: C_f admet une asymptote oblique d'équation $y=-2x+1$ au voisinage de $-\infty$.

3) $\forall x\in\mathbf{R}^*$: $f'(x)=-2+\frac{e^x\left(1-e^x\right)-e^x\left(-e^x\right)}{\left(1-e^x\right)^2}=-2+\frac{e^x-e^{2x}+e^{2x}}{\left(1-e^x\right)^2}$

$$=\frac{-2\left(1-2e^x+e^{2x}\right)+e^x}{\left(1-e^x\right)^2}=\frac{-2+4e^x-2e^{2x}+e^x}{\left(1-e^x\right)^2}=\frac{-2e^{2x}+5e^x-2}{\left(1-e^x\right)^2}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -2e^{2x}+5e^x-2=0 \ \left(x\in\mathbf{R}^*\right)$

Posons $X = e^x \quad (X > 0)$.

On obtient: $-2X^2 + 5X - 2 = 0$

$\Delta = 25 - 16 = 9$; $X_1 = \dfrac{-5+3}{-4} = \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{1}{2}$; $X_2 = \dfrac{-5-3}{-4} = \dfrac{-8}{-4} = 2$

$X = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow e^x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\ln 2$

$X = 2 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

Tableau de variation:

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\downarrow$	$2+2\ln 2$	$\uparrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\uparrow$	$-1-2\ln 2$	$\downarrow$	$-\infty$

$$f(-\ln 2) = 1 + 2\ln 2 + \frac{e^{-\ln 2}}{1 - e^{-\ln 2}} = 1 + 2\ln 2 + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 + 2\ln 2 + 1 = 2 + 2\ln 2 \approx 3{,}39$$

$$f(\ln 2) = 1 - 2\ln 2 + \frac{e^{\ln 2}}{1 - e^{\ln 2}} = 1 - 2\ln 2 + \frac{2}{-1} = 1 - 2\ln 2 - 2 = -1 - 2\ln 2 \approx -2{,}39$$

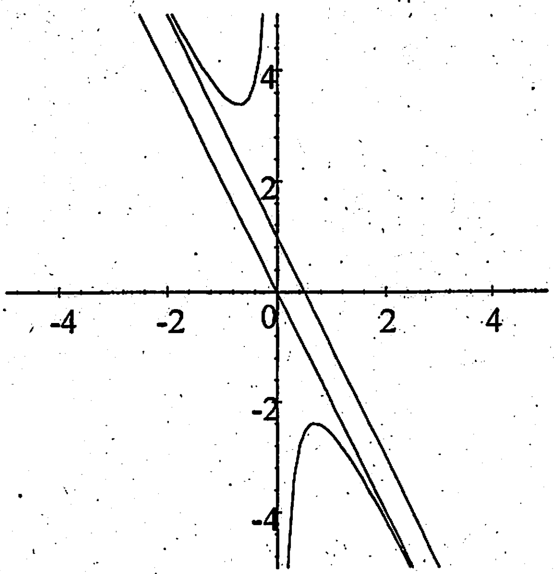
4) Représentation graphique:
voir page suivante

VI. 1) $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3 + 3^n}{4^n - n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n\left(\overbrace{\frac{n^3}{3^n}}^{\to 0} + 1\right)}{4^n\left(1 - \underbrace{\frac{n^2}{4^n}}_{\to 0}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

2) $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{2n}}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty} \left(2\cdot\frac{e^{2n}}{2n}\cdot\frac{n}{\ln n}\right) = +\infty, \text{ car } \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{2n}}{2n} = \lim_{p\to+\infty} \frac{e^p}{p} = +\infty$$

(en posant $p = 2n$) et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\underbrace{\frac{\ln n}{n}}_{\to 0^+}} = +\infty$

3) $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{\overbrace{n\ln\frac{n}{e}}^{\to+\infty}} = +\infty$$


4
2
-4
-2
0
2
4
-2
-4