Chapitre 3 : Les déterminants

1. Les déterminants d'ordre 2

Un **déterminant d'ordre 2** est un déterminant à 4 éléments (qui sont des nombres réels) répartis sur 2 lignes et 2 colonnes : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. Nous savons que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Exemple d'application

Résoudre le système à 2 équations à 2 inconnues par **la méthode de Cramer** ou **méthode des déterminants** : $\begin{cases} 15x - 4y = 0 \\ 8x + 3y = 16 \end{cases}$

Notons par **D le déterminant du système** (le déterminant des coefficients de x et de y) :

$$D = \begin{vmatrix} 15 & -4 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 15 \cdot 3 - 8 \cdot (-4) = 77$$

Notons par $\mathbf{N_x}$ respectivement $\mathbf{N_y}$ **le déterminant par rapport à x**, respectivement **par rapport à y** (les coefficients de x, resp. de y sont remplacés par les termes constants) :

$$N_x = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 16 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot 3 - 16 \cdot (-4) = 64$$

$$N_y = \begin{vmatrix} 15 & 0 \\ 8 & 16 \end{vmatrix} = 15 \cdot 16 - 8 \cdot 0 = 240$$

Alors nous avons : $x = \frac{N_x}{D} = \frac{64}{77}$ et $y = \frac{N_y}{D} = \frac{240}{77}$

et $S = \left\{ \left(\frac{64}{77} ; \frac{240}{77} \right) \right\}$

Remarque : Si D = 0 , alors il faut employer **la méthode de résolution par substitution** ou **la méthode de résolution par combinaison linéaire** (voir cours de 9^e et 10^e).

Exercice 1

Résoudre les systèmes suivants à l'aide de la méthode de Cramer:

1) $\begin{cases} 7x - 5y = 15 \\ 5x - 7y = -3 \end{cases}$ $D = -24$; $N_x = -120$; $N_y = -96$; $S = \{(5;4)\}$

2) $\begin{cases} 3x + 4y = -5 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases}$ $D = -17$; $N_x = -13$; $N_y = 31$; $S = \left\{ \left(\frac{13}{17} ; -\frac{31}{17} \right) \right\}$

2. Les déterminants d'ordre 3

Un **déterminant d'ordre 3** est un déterminant à 9 éléments répartis sur 3 lignes et 3 colonnes. Notons ces éléments par $\mathbf{a_{ij}}$ où $\mathbf{a_{ij}}$ représente l'élément de la **i^e^ ligne** et de la **j^e^ colonne** :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Pour calculer la valeur d'un déterminant d'ordre 3, nous employons **la règle de Sarrus** : nous recopions d'abord les deux premières colonnes derrière le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

(nous trouvons le même résultat en recopiant les deux premières lignes en-dessous du déterminant)

Exemple d'application:

Résoudre le système à 3 équations et à 3 inconnues : $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \\ 3x - y + 2z = 3 \end{cases}$

Par la méthode de Sarrus, nous trouvons :

$D = -6$; $N_x = -12$; $N_y = 6$; $N_z = 12$

donc : $x = 2$; $y = -1$; $z = -2$ et $S = \{(2 ; -1 ; -2)\}$

Exercice 2

Résoudre les systèmes suivants à l'aide de la méthode de Sarrus:

1) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 10 \\ 4x - 3y - 2z = -8 \\ x + 4y + 2z = 15 \end{cases}$ $D = 5$; $N_x = 5$; $N_y = 10$; $N_z = 15$ et $S = \{(1;2;3)\}$

2) $\begin{cases} x + 4y - 3z = -5 \\ 5x + z = 3 \\ 2x + 3y - 2z = 3 \end{cases}$ $D = -30$; $N_x = 6$; $N_y = 6$; $N_z = -120$ et $S = \left\{\left(-\frac{1}{5}; -\frac{1}{5}; 4\right)\right\}$

3) $\begin{cases} x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 1 \end{cases}$ $D = -2$; $N_x = -3$; $N_y = -5$; $N_z = -7$ et $S = \left\{\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right)\right\}$

3. Calcul de déterminants d'ordre supérieur à 2

La règle de Sarrus peut seulement être appliquée à des déterminants d'ordre 3. La méthode générale pour calculer un déterminant d'un ordre quelconque (supérieur à 2) est appelée **la méthode des mineurs** (die Minorantenmethode).

Prenons pour exemple un déterminant d'ordre 3 et biffons dans ce déterminant par exemple la 1re ligne et la 2e colonne : $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Les 4 éléments restants sont rassemblés dans un nouveau déterminant d'ordre 2 : $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

Si nous multiplions ce déterminant par le facteur $(-1)^{1+2}$, nous obtenons **le mineur A_{12}** :

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad ; \quad \text{de même:} \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad \text{etc.}$$

Nous admettons alors **le théorème de Laplace** :

Un déterminant est égal à la somme des produits des éléments d'une ligne (ou d'une colonne) par leur mineur.

Pour notre exemple :

$$\begin{aligned} A &= a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} && (1^{re}\,\text{ligne}) \\ &= a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32} && (2^{e}\,\text{colonne}) \\ &= a_{31} \cdot A_{31} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{33} \cdot A_{33} && (3^{e}\,\text{ligne}) \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Cette méthode est encore appelée **développement du déterminant suivant la ligne i ou suivant la colonne j**.

A l'aide de cette méthode, le calcul d'un déterminant d'ordre n est ramené à des calculs de n déterminants d'ordre n-1.