Application du calcul des dérivées
Résolution d'une équation par la méthode de Newton

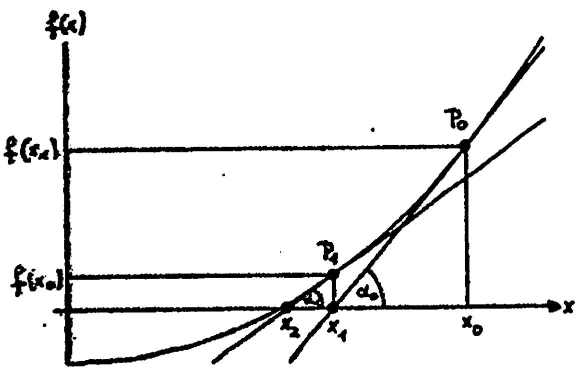
Problème: Étant donné une équation algébrique ou transcendante en x donnée par $f(x) = 0$, il est souvent impossible de donner une expression explicite de ses solutions. Même pour une fonction f simple (un polynôme de degré quatre ou cinq, par exemple), il peut arriver qu'on ne puisse calculer les solutions de l'équation que par approximation. Tout d'abord, il faut étudier l'existence et le nombre des solutions. La méthode de Newton permet ensuite de construire en plusieurs étapes (→ procédé itératif) des suites (x_i) qui convergent vers les solutions cherchées: si (x_i) converge vers la solution $\bar{x}$, un terme x_i d'indice assez grand peut donner une approximation très précise de $\bar{x}$. Cette méthode peut s'appliquer dans de très nombreux cas.

Exemple: Pour quelle valeur de x, l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet-elle une solution?

voir page 3 cahier

En pratique, la recherche de $\bar{x}$ ne consiste pas en la détermination exacte d'un nombre comme on l'a fait lors de la résolution de l'équation du second degré, où la solution était donnée par la formule bien connue: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Il convient plutôt de trouver un nombre x_0 plus ou moins proche de la solution, soit au moyen d'un graphique, soit par un tableau des valeurs de la fonction et d'utiliser ensuite le procédé itératif de Newton qui sert à améliorer la solution approchée jusqu'à la précision recherchée.

Pour expliquer le procédé, nous nous servons du graphique suivant:



Soit $P_0(x_0;y_0)$ le point de la courbe qui sert de point de départ du procédé itératif. L'idée du procédé se base sur le principe de la linéarisation de la fonction f en x_0, c.-à-d., nous allons remplacer la fonction f en x_0 par une droite, ici la tangente à la courbe, en x_0 et rechercher x_1, abscisse du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des x. D'après le graphique:

$$\tan\alpha_0 = f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \Rightarrow f'(x_0)\cdot(x_0 - x_1) = f(x_0)$$

$$\Rightarrow \Leftrightarrow x_0 - x_1 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \;!$$

Pour $x_0 = 2$, nous trouvons $x_1 = 1{,}66667$, solution de l'équation de la tangente $y = 9x - 15 = 0$.

Nous constatons que cette valeur x_1 trouvée est déjà beaucoup plus proche de la solution exacte que la valeur de départ x_0. Nous pouvons répéter ce procédé en linéarisant $y = f(x)$ au point d'abscisse x_1 pour obtenir ensuite :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

En remplaçant $x_1 = 1{,}66667$, nous trouvons la valeur $x_2 = 1{,}54861$.

Nous pouvons ainsi répéter ce procédé jusqu'à ce que la valeur obtenue pour x_i ne change pratiquement plus. En généralisant, on obtient donc la

<u>Formule d'itération de Newton:</u>

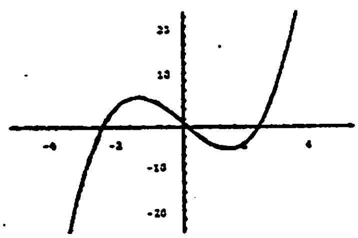
$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad \text{avec } i = 1,\ 2,\ 3,\ 4\ ,\ \ldots}$$

<u>Exercice:</u> Démontrer que la valeur de la racine vaut $\bar{x} = 1{,}53209$

<u>Remarques</u>:

1) Comme expliqué plus haut, cette formule ne sert pas à calculer de manière précise une solution exacte de l'équation donnée, mais elle sert à améliorer une solution approchée trouvée par une autre méthode.
2) Le procédé itératif est convergent vers la valeur $\bar{x}$, si la suite des valeurs approchées $x_0, x_1, x_2, \ldots$ converge vers la valeur $\bar{x}$. En pratique, on calcule pour chaque x_i son ordonnée sur la courbe $f(x_i)$ et on contrôle que la suite $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots$ converge vers la valeur 0.
3) Afin que le procédé converge, il ne faut pas choisir le point de départ trop proche ni d'un point extremum, ni d'un point d'inflexion et il ne faut pas non plus qu'un point extremum ou d'inflexion ne se trouve entre le point de départ P_0 et le zéro de la fonction.(voir exemple 3)
4) Afin de trouver une valeur de départ x_0 adéquate, nous pouvons soit tracer la courbe de la fonction donnée (par ordinateur ou calculatrice) (exemple 1), soit calculer à l'aide de la calculatrice quelques valeurs de f(x) comme indiqué dans l'exemple 2 pour en conclure la valeur à choisir pour x_0.

<u>Exemple 1:</u> $f(x) = x^3 - 6x + 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 - 6$



En nous servant de la calculatrice (HP42S), nous arrivons à obtenir une allure de la courbe qui ressemble à celle ci-jointe. Nous pouvons sans problème distinguer qu'il existe 3 racines à cette équation, racines que nous allons toutes approximer à l'aide du procédé itératif de Newton. Nous pouvons supposer que ces racines sont assez proches des valeurs x = -3, x = 0 et x = 3.

Recherche des valeurs plus précises:

1) Point de départ: $x_0 = +3$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3 - \frac{10}{21} = 2{,}52381 \qquad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2{,}52381 - \frac{1{,}93284}{13{,}10885} = 2{,}37636$$

Résumons les calculs dans le tableau suivant, dressé à l'aide de la calculatrice HP42S:

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
0	3	10	21
1	2,52381	1,93284	13,10885
2	2,37636	0,16135	10,94126
3	2,36161	0,00152	10,73161
4	2,36147	0,00001	10,72962

Nous constatons que le procédé converge vers une valeur $\bar{x} = 2{,}36147$, valeur pour laquelle f(x) s'annule.

2) Point de départ: $x_0 = 0$:

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
0	0	1	-6
1	0,16667	0,00463	-5,91667
2	0,16745	0,000005	

Nous constatons que le procédé converge vers une valeur $\bar{x} = 0{,}16745$ valeur pour laquelle f(x) s'annule.

3) Point de départ: $x_0 = -3$:

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
0	-3	-8	21
1	-2,61905	-1,25084	14,57827
2	-2,53325	-0,05724	13,25207
3	-2,52893	-0,00017	13,18646
4	-2,52892	-0,000002	

Nous constatons que le procédé converge vers une valeur $\bar{x} = -2{,}52892$, valeur pour laquelle f(x) s'annule.
Nous venons de trouver des valeurs approchées assez précises pour les 3 racines de cette équation:

$$x = -2{,}52892\,,\quad x = 0{,}16745 \quad \text{et} \quad x = 2{,}36147$$

Il convient de noter qu'à l'aide du programme SOLVER, la calculatrice HP42S nous permet de trouver ces mêmes valeurs, à condition de bien cerner les solutions à l'intérieur d'un intervalle.

Exemple 2: $f(x) = \dfrac{x\cos x}{x+1}$ avec x en radians.

Calculons à l'aide de la calculatrice, programme SOLVER, une série de valeurs de la fonction:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	0,355	-0,872	-1,485	- 0,8	∞	0	0,27	-0,277	-0,742	-0,523	0,236

Nous constatons que, par exemple, entre les valeurs x = 1 et x = 2, f(x) change de signe. Comme la fonction est quand même définie, continue et dérivable sur tout l'intervalle [1;2], il faut nécessairement que f(x) s'annule au moins une fois entre 1 et 2 (Théorème de la valeur moyenne). Utilisons donc le procédé de Newton pour trouver une solution à l'équation f(x) = 0 dans cet intervalle.

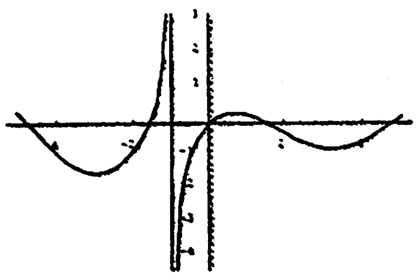
$$f(x) = \frac{x\cos x}{x+1} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{(\cos x - x\sin x)(x+1) - x\cos x}{(x+1)^2} = \frac{x\cos - x^2\sin x + \cos x - x\sin x - x\cos x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x - (x^2 + x)\sin x}{(x+1)^2}$$

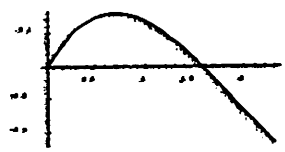
En choisissant le point x = 1 comme point de départ du procédé, nous trouvons le tableau suivant:

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
0	1	0,27015	-0,28566
1	1,94570	-0,24187	-0,65684
2	1,57747	-0,00408	-0,61301
3	1,57081	-0,00001	-0,61102
4	1,57079	0,000004	-0,61101
5	1,57080	0	

Nous voyons que le procédé de Newton nous fournit de nouveau assez rapidement la solution cherchée: x = 1,57080 avec la précision voulue.

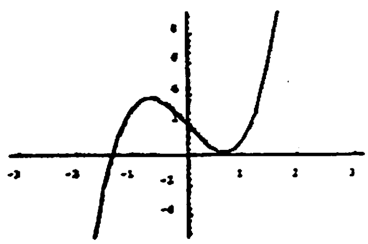


Le graphique de cette fonction nous permet de voir qu'aux environs de x = 1 se trouve un point extremum de cette courbe ce qui explique que le procédé "saute" de x = 1 à x = 1,9457 pour se stabiliser ensuite autour de x = 1,57080.



Dans l'exemple 3, nous allons montrer comment un mauvais choix de la valeur initiale (point de départ) du procédé peut mener à une divergence de ce procédé.

<u>Exemple 3:</u> Résoudre l'équation $f(x) = 3x^3 - 4x + 2$



D'après le graphique, que la HP42S nous trace à l'aide du programme DPLOT, nous constatons qu'il existe une solution à cette équation aux environs de x = -1. La valeur initiale est donc à choisir comme x = -1.

$$f(x) = 3x^3 - 4x + 2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 9x^2 - 4$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -1 - \frac{3}{5} = -1,6$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -1,6 - \frac{-3,888}{19,04} = -1,3958 \ ...$$

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
0	-1	3	5
1	-1,6	-3,88	19,04
2	-1,3958	-0,57491	13,53432
3	-1,35332	-0,02244	12,48328
4	-1,35152	0,00004	