Dossier méthodologique

Mathématiques

5e et 6e années d'études

Ministère de
l'Education Nationale
et de
la Formation Professionnelle

Ce dossier méthodologique a été élaboré par :

Jacky ANTOINE, mathématicien-chercheur aux Facultés Universitaires de Namur,

Gunnar GNAD, professeur de l'enseignement secondaire,

Elise HOUWEN-GREISCHER, institutrice en 5^e et 6^e année d'études,

Jos JÄHNE, professeur de l'enseignement secondaire technique,

Jean-Pierre SCHMIT, inspecteur de l'enseignement primaire,

May WELFRINGER-STAUDT, institutrice en 5^e et 6^e année d'études.

Le manuel et le dossier méthodologique ne sont pas immuables; ils doivent subir l'épreuve de l'expérience qui amènera certaines corrections. C'est pourquoi vos remarques et vos suggestions sont les bienvenues.

Adresse de contact :
Groupe mathématiques 5/6
c/o Jean-Pierre SCHMIT
ISERP, BP2,
L-7201 Walferdange

Plan du dossier méthodologique

1. Un nouveau manuel : pourquoi ?

2. Les options fondamentales.

3. Les compétences spécifiques en 5^e année d'études.

4. Les compétences spécifiques en 6^e année d'études.

5. Annexes :

- "Apprendre... comprendre... enseigner les mathématiques."
- "Utiliser la calculatrice à l'école primaire ?"
- "Des activités de recherche ou... l'atelier de mathématiques."
- Recueil d'activités de recherche.
- Extraits de "Lehrerinformation zu Mathematik 4" :
  - Programmübersicht 1. bis 4. Schuljahr,
  - Algorithmen.

1. UN NOUVEAU MANUEL : POURQUOI ?

Le nouveau manuel est le témoin d'une EVOLUTION. Certaines options prises autrefois sont confirmées, d'autres sont adaptées, d'autres encore sont abandonnées au profit des conceptions didactiques et méthodologiques actuelles.

Cette évolution nécessaire de l'enseignement des mathématiques résulte de deux facteurs principaux :

- *Le facteur technologique* : la société du 21e siècle ne pourra se satisfaire de n'enseigner que le calcul à la majorité de ses élèves. L'ordinateur et la calculatrice se chargent dès à présent des tâches répétitives et algorithmiques. Les besoins en mathématiques évoluent et se diversifient. Quelques règles et automatismes ne suffisent plus là où une compréhension plus profonde des concepts est souhaitée.

- *Le facteur pédagogique* : les théories de l'apprentissage et la prise en compte de la personnalité de l'élève font sauter le modèle de la "tête vide" à remplir. De nombreuses études proposent de nouvelles méthodes d'enseignement et d'apprentissage en mathématiques. C'est pourquoi les outils d'enseignement mis à la disposition des maîtres ne peuvent être à la traîne.

> *Attacher trop d'importance à la simple reproduction des connaissances reçues, faire acquérir des savoir-faire dans des domaines déterminés constituent des objectifs éducatifs difficilement conciliables avec les impératifs d'une société caractérisée par le changement, ceci d'autant plus que le progrès technologique tend à confier les tâches circonscrites et prévisibles à des machines. Une éducation qui, loin de suivre simplement le changement, cherche à l'anticiper et se veut proactive, voit sa mission centrale dans le développement, chez tous les apprenants, de la capacité fondamentale d'apprendre. Loin de privilégier une simple accumulation des connaissances, l'école doit donc concevoir ses programmes de manière à donner aux élèves la possibilité d'appliquer et d'utiliser les acquis, de développer des compétences comme apprendre à observer, s'informer et à structurer l'information, à généraliser et à déduire, à communiquer et à décider, à agir et à évaluer.* [1]

Devant cette situation, le curriculum de mathématiques ne peut rester figé. Le plan d'études a été mis à jour, la conduite de la classe, les pratiques d'évaluation, les conceptions des enseignants sont en évolution permanente. Il fallait donc aussi renouveler les manuels afin de les rendre plus conformes aux nécessités de l'apprentissage.

---

1 Extrait de "Demain l'école", publié par le Ministère de l'Education Nationale.

2. LES OPTIONS FONDAMENTALES

1. "Ils doivent savoir calculer..."

Le point central de notre réflexion réside dans l'explicitation des objectifs du cours de mathématiques en 5e et 6e année d'études. En quoi et comment les mathématiques contribuent-elles à la formation et au développement de l'enfant durant ces dernières années passées à l'école primaire ?

Notre postulat de départ est que l'apprentissage des mathématiques dépasse la maîtrise des techniques opératoires. L'activité mathématique est donc plus vaste que l'entraînement au calcul correct.

L'apprentissage se situe à 3 niveaux :

a) Dans un premier temps, nous avons dressé la liste des savoir-faire attendus d'un élève en fin de 5e année. Ces savoir-faire, appelés **compétences spécifiques**, sont liés aux différents contenus abordés dans le manuel et sont directement mesurables. **Elles constituent la référence pour les évaluations écrites dont le degré de difficulté est fixé par le manuel.** Ces compétences spécifiques sont énumérées aux paragraphes 3 et 4 de ce dossier.

b) Pourtant l'enseignement des mathématiques ne se limite pas à l'acquisition de ces compétences. A côté de ces savoir-faire, il y a lieu de travailler et de développer des "qualités" propres aux mathématiques (et aux sciences en général) comme, par exemple, le fait de vérifier systématiquement la cohérence d'un résultat ou le fait d'identifier la question lors de la lecture d'un problème. Ces qualités, que nous avons appelées **compétences globales**, sont observables quant à leur évolution mais restent difficilement quantifiables. Elles n'en demeurent pas moins fondamentales dans l'apprentissage mathématique : nul enseignant ne nierait l'opportunité de les exercer.

c) Enfin, des capacités plus générales encore, comme la formulation correcte (orale ou écrite) d'une solution, comme le recours à une argumentation logique, comme la faculté de travailler en groupe, sont apparues comme essentielles. Si ces qualités ne sont pas propres à l'apprentissage des mathématiques (elles sont liées à tout apprentissage), il n'en reste pas moins vrai que les mathématiques sont bien placées pour assurer leur mise en oeuvre. Nous parlons dès lors de **compétences transversales**.

2. Apprendre les mathématiques, c'est apprendre à en faire...

Les objectifs du cours de mathématiques se situent à différents niveaux. A côté de l'acquisition de mécanismes, il importe donc de veiller à la mise en évidence et au développement de "qualités mathématiques". Cette dualité de la formation mathématique ne peut se réaliser que dans un contexte d'apprentissage favorable. C'est ainsi que "placer l'enfant au centre de l'apprentissage" est une formule qui prend tout son sens dans l'enseignement des mathématiques.

Si la répétition de nombreux exercices d'application est essentielle en vue de la mise en place de "réflexes mathématiques", elle ne peut constituer la seule activité de l'élève. Des **activités de recherche**[2], menées individuellement ou en groupe, doivent permettre à l'enfant d'exercer sa créativité mathématique, de se construire un savoir expérimental, de s'approprier les méthodes de résolution de problèmes.

En classe, peuvent ainsi se succéder :

- des moments de reproduction, comme les exercices répétitifs, où il s'agit d'exécuter un algorithme et
- des moments de production, comme les activités de recherche, dont le but est de concevoir un algorithme de résolution.

---

[2] Le lecteur trouvera plus d'informations dans l'article intitulé "Activites de recherche ou... l'atelier de mathématiques", que nous avons joint en annexe.

Si les premiers sont prioritairement orientés vers le RESULTAT à atteindre, les seconds, en revanche, se centrent davantage sur le PROCESSUS utilisé.

Ces deux types d'activités sont complémentaires.

3. "Il y a trop d'exercices dans le manuel..."

Vu le temps prévu pour les leçons de mathématiques au cours de l'année scolaire, il est absolument impossible de réaliser tous les exercices proposés par le manuel. Celui-ci doit donc être considéré comme un recueil d'exercices et de situations dans lequel le choix s'opère en fonction des compétences spécifiques visées, des intérêts des élèves et des aspirations propres de l'enseignant.

De plus, les différentes activités proposées au fil des pages du manuel ne doivent pas nécessairement être traitées de façon linéaire. C'est ainsi qu'un brassage des différents thèmes peut s'avérer efficace dans la perspective d'un enseignement "en spirale". Celui-ci permet de réactiver régulièrement une matière vue antérieurement. De ce point de vue, il n'est pas nécessaire de "vider" un chapitre avant de passer au suivant.

Le manuel laisse donc ainsi une double marge de manoeuvre à l'enseignant, quant au choix des exercices d'une part, et quant à l'ordre de leur présentation d'autre part.

4. "Comment évaluer les compétences de l'élève en mathématiques ?"

Voir le "dossier-ressource" accompagnant les modalités de passage de l'enseignement primaire vers l'enseignement secondaire et secondaire technique.

3. LES COMPÉTENCES SPÉCIFIQUES EN 5ᵉ ANNÉE D'ÉTUDES

Liste des savoir-faire attendus d'un élève en fin de 5ᵉ année d'études	*Notes méthodologiques*
1. Les entiers naturels	
Concernant : ***1.1 L'ordre des entiers naturels***	
• Identifier prédécesseur et successeur d'un nombre ; • exprimer qu'un nombre est plus petit qu'un autre; • utiliser les signes < et > ; • ordonner plusieurs nombres ; • identifier des nombres représentés sur une droite graduée en unités ou non ;	*La plupart des exercices de ce chapitre peuvent être traités oralement ou par ecrit. On veillera à utiliser les deux canaux de la communication mathématique :* ***écrire*** *(formuler une réponse soignée, utiliser dans le cahier les symboles adéquats) et* ***parler*** *(exprimer une solution en utilisant le vocabulaire correct).*
• situer des nombres sur une droite graduée; • construire une suite à partir d'une loi de formation donnée; la loi de formation est constituée soit d'une addition ou soustraction d'une constante, soit d'une multiplication ou division par une constante, soit d'un mélange (ex.: j'additionne 2 puis je multiplie par 3, etc.);	*Les suites de nombres peuvent faire l'objet de "jeux mathématiques". Par exemple, un élève propose à son voisin une suite de nombres qu'il a composée, celui-ci doit retrouver la loi de formation de la suite. Les règles de composition peuvent varier : utilisation d'une opération, combinaison de deux opérations...*
• trouver la loi de formation d'une suite donnée soit par des nombres, soit par un graphique (addition ou soustraction d'une constante, multiplication ou division par une constante).	*Les exercices 17 à 20 (p. 8) sont à concevoir comme "activités de recherche".*
Concernant : ***1.2 Les grands nombres***	
• Distinguer nombre et chiffre dans le système décimal; • identifier la valeur que représente un chiffre suivant la position qu'il occupe dans l'écriture du nombre ; • décomposer un nombre suivant unités, dizaines, centaines, ...; • lire les nombres jusqu'au milliard; • écrire les nombres donnés oralement, jusqu'au milliard; • identifier successeur et prédécesseur d'un grand nombre • ordonner des grands nombres; • additionner mentalement 1000, 10 000, 100 000, ... à des grands nombres.	

Concernant : ***1.3 Autres représentations des nombres***

Les compétences développées dans ce paragraphe ne sont pas des compétences exigées d'un élève en fin de 5e année d'études. Elles ne feront donc l'objet d'aucune évaluation. Elles constituent pourtant d'excellentes activités permettant de découvrir le côté relatif et conventionnel de notre écriture décimale.

2. Addition et soustraction

Concernant : ***2.1 Addition et soustraction***

- Effectuer mentalement l'addition et la soustraction d'entiers en notant éventuellement des résultats intermédiaires (sans toutefois "poser l'addition ou la soustraction écrites");
- expliciter oralement le procédé de calcul mental utilisé;
- résoudre des problèmes de la vie courante faisant intervenir l'addition et la soustraction.

L'exercice 27 (p. 18) ainsi que les carrés magiques (p. 19) constituent d'excellents prétextes à la pratique du calcul mental et à la disposition tabulaire.

Concernant : ***2.2 Règles de calculs et avantages***

- Effectuer des calculs comportant des parenthèses en respectant la priorité qui impose d'effectuer d'abord le calcul contenu dans la parenthèse;
- grouper "avantageusement" les nombres lors d'une addition ou d'une soustraction de plus de 2 nombres.

La consigne de l'exercice 12 (p. 22) est volontairement vague de façon à conserver le caractère "ouvert" de cette activité. Cet exercice ne demande aucune compétence particulière: son but est d'exercer l'observation et l'imagination de l'élève face à une activité aux issues multiples.

Concernant : ***2.3 Additions et soustractions écrites***

2.4 Exercices mélangés sur l'addition et la soustraction

Il est évidemment exclu qu'un élève effectue tous les exercices proposés dans le manuel. On privilégiera les problèmes où la mise en calcul écrit prend un sens. Le calcul écrit est un outil et doit le rester; il est un moyen et non un but.

- additionner par écrit des nombres disposés en colonne;
- disposer correctement des nombres donnés en vue d'effectuer l'addition écrite;

Il est fondamental (ici et ailleurs) de s'exercer à approximer mentalement le résultat avant son calcul. Cette compétence, à développer chez les enfants, peut s'avérer d'une grande efficacité lorsque les solutions sont données comme dans les ex. 3, 4, 5 (p. 23), 4, 5, 6, 7 (p. 25), 9, 10 (p. 26).

- soustraire par écrit un nombre d'un autre, ces nombres étant notés en colonne;
- disposer correctement des nombres donnés en vue d'effectuer la soustraction écrite;
- effectuer par écrit des soustractions successives d'un nombre donné;
- résoudre des problèmes de la vie courante faisant intervenir l'addition et la soustraction écrites.

Afin de s'assurer de la plausibilité du résultat, l'élève peut soit le comparer avec l'approximation effectuée au départ, soit le vérifier par le recours à la calculatrice.

Les exercices 1 et 2 (p. 27) peuvent être conçus comme des "activités de recherche" où l'on mettra en évidence les différentes stratégies utilisées pour parvenir au résultat.

3. Notions fondamentales de géométrie (I)

Concernant : ***3.1 Segment et droite***

- Identifier les lignes droites parmi un ensemble de lignes quelconques;
- reconnaître à l'aide d'une règle les points alignés parmi un ensemble de points donnés;

Même s'il n'est pas question de mémoriser des propriétés, une "pédagogie active" peut amener l'élève à formaliser des énoncés du genre :
- *par 1 point, il passe une multitude de droites,*
- *par 2 points, il passe une seule droite,*
- *par 3 points, il faut distinguer :*
  - *s'ils sont alignés, il passe une seule droite,*
  - *s'ils ne sont pas alignés, il passe 3 droites.*

- tracer à l'aide d'une règle une droite passant par deux points donnés;
- utiliser dans différents contextes les mots "droite", "segment" et "demi-droite";
- distinguer dans une figure les droites, les demi-droites et les segments;
- utiliser dans différents contextes les notations [AB], AB, (AB) et [AB);

Il ne s'agit pas d'imposer à l'élève la récitation d'une définition comme par exemple "segment", mais il importe qu'il intègre ce nouveau terme dans son vocabulaire (la mathématique est un langage qui s'écrit et se dit). La restitution correcte de la définition de "segment" ne garantit ni la reconnaissance de cet objet dans une figure ni l'emploi du terme adéquat dans une argumentation.

- distinguer "segment" et "longueur de segment";

La différence entre un segment et sa longueur est celle qui sépare l'objet géométrique de la grandeur (ici numérique) qui lui est associée.

- mesurer un segment;
- représenter un segment de longueur donnée (représentation horizontale, verticale ou oblique);
- ordonner des segments suivant leur longueur;

L'activité présentée à la p. 31 peut faire l'objet d'un travail en groupe. En effet, même si l'objectif n'est pas de traiter la notion d'échelle, cette première approche peut présenter une difficulté pour certains élèves.

- déterminer le nombre de points d'intersection de 2 ou 3 droites suivant leur position relative, la figure étant donnée;
- représenter 2 ou 3 droites admettant un seul point d'intersection ou n'admettant aucun point d'intersection;
- utiliser dans différents contextes les termes "angle droit", "droites perpendiculaires", "droites parallèles";
- construire par pliage un angle droit, deux droites perpendiculaires;
- vérifier à l'aide de l'équerre qu'un angle est droit, que deux droites sont perpendiculaires;
- construire à l'aide de l'équerre une droite perpendiculaire à une droite donnée, une droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné;
- utiliser les symboles ⊥, // , ⊥ et //;
- construire par pliage des droites parallèles;
- construire à l'aide de l'équerre Aristo (Geodreieck) une

L'exercice 8 (p. 34) est développé dans l'article "Activité de recherche ou laboratoire mathématique", joint en annexe.

droite parallèle à une droite donnée, une droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné, une droite parallèle à une droite donnée située à une distance donnée;

- distinguer sur une figure donnée les droites parallèles et les droites perpendiculaires de celles qui ne le sont pas;
- déterminer la distance entre un point et une droite.

Concernant : ***3.2 Figures planes***

- Identifier parmi plusieurs figures les carrés et les rectangles;
- énoncer (oralement et par écrit) les propriétés du rectangle et du carré concernant leurs angles et leurs côtés;
- nommer les diagonales et les médianes sur une figure donnée;
- construire les diagonales et les médianes du rectangle et du carré;
- vérifier l'exactitude (ou l'inexactitude) de propriétés données concernant les diagonales et les médianes;
- dessiner un rectangle ou un carré dont les longueurs des côtés sont données;
- identifier parmi plusieurs figures les parallélogrammes et les losanges;
- énoncer (oralement et par écrit) les propriétés du parallélogramme et du losange concernant leurs côtés;
- nommer les diagonales sur un parallélogramme ou un losange donnés;
- construire les diagonales du parallélogramme et du losange;
- vérifier l'exactitude (ou l'inexactitude) de propriétés données concernant les côtés et les diagonales du parallélogramme et du losange;
- dessiner un parallélogramme dont deux côtés consécutifs sont dessinés;
- 3 points non alignés étant donnés, construire les 2 parallélogrammes ayant ces 3 points pour sommets;
- dessiner un parallélogramme dont les longueurs des côtés sont données.

Il est conseillé de traiter les exercices 9 à 15 (p. 41) comme "activités de recherche".

Concernant : ***3.3 Aire***

- Reconnaître que la notion d'aire est indépendante de l'orientation de la figure;
- comparer (sans les calculer) les aires de figures différentes;
- choisir l'unité d'aire convenant pour mesurer des surfaces données;

La notion "aire d'une figure" est à rapprocher de "longueur de segment" en ce sens que le but est d'attacher une grandeur à un objet géométrique.

Dans la logique du manuel, les nombres décimaux sont évités puisqu'ils ne sont

- une aire étant donnée dans une unité, la convertir dans une unité voisine;
- utiliser le tableau de conversion pour exprimer une aire dans différentes unités;
- l'aire d'une surface étant donnée par un nombre, ajouter l'unité correcte;
- calculer l'aire d'un rectangle ou d'un carré dont les dimensions sont données;
- trouver différents rectangles ayant une aire donnée;
- résoudre des problèmes faisant intervenir l'aire du rectangle et du carré;
- calculer le périmètre d'un rectangle ou d'un carré dont les dimensions sont données;
- trouver différents rectangles ayant un périmètre donné;
- résoudre des problèmes faisant intervenir le périmètre du rectangle et du carré;
- calculer l'aire d'un parallélogramme dont la base et la hauteur sont données;
- résoudre des problèmes faisant intervenir l'aire du parallélogramme.

abordés qu'au paragraphe 8.

L'activité géométrique qui consiste à "trouver différents rectangles ayant une aire donnée" est à mettre en parallèle avec l'activité arithmétique qui vise à décomposer de plusieurs façons un nombre en facteurs.

4. Multiplication et division

Concernant : ***4.1 Produit et quotient***

- Utiliser dans différents contextes les mots "produit", "facteur", "quotient";
- effectuer mentalement le produit ou le quotient d'entiers en notant éventuellement des résultats intermédiaires;
- écrire une multiplication sous forme d'une division et réciproquement;
- intégrer le "0" dans les multiplications et les divisions;
- expliciter oralement le procédé de calcul mental utilisé;
- .résoudre des problèmes de la vie courante faisant intervenir la multiplication et la division;

En calcul mental, la mise en évidence du processus utilisé est au moins aussi importante que le résultat obtenu. L'explicitation orale d'un mécanisme cérébral (exercice difficile pour les enfants !) est essentielle pour garantir l'assimilation réelle de techniques observées. Donc la qualité de l'entraînement au calcul mental ne se juge pas au nombre d'exercices effectués.

- multiplier et diviser par 10, 100 et 1000;
- effectuer mentalement des multiplications et des divisions de multiples de 10;

Il ne s'agit pas de commencer par donner des recettes telles que "pour multiplier par 100, il suffit d'ajouter 2 zéros; pour diviser, il suffit de les barrer". La recette vient après la pratique de l'activité comme "découverte" et non comme "règle à appliquer".

- effectuer mentalement la division par 5, par 25 et par 50;
- grouper "avantageusement" les facteurs lors de la multiplication de plus de 2 nombres;

Les élèves trouveront et expliciteront différentes façons d'effectuer mentalement une division comme 480 : 5 (ex. 16 f) p. 53).

- résoudre des problèmes de la vie courante faisant intervenir la multiplication de 3 nombres.

L'exercice 1 (p. 55) met en évidence le "diagramme en arbre", représentation fondamentale pour le dénombrement. Autre exemple : "Un restaurateur propose 3 entrées, 4 plats principaux et 3 desserts. Combien de menus différents peut-on établir ?".

Concernant : ***4.2 Priorité des opérations et parenthèses***

- Effectuer des calculs mêlant additions, soustractions, multiplications et divisions en respectant les priorités des opérations et les parenthèses;
- calculer mentalement la somme et la différence de deux produits ayant un facteur commun;
- résoudre des problèmes de la vie courante où sont mêlées les quatre opérations.

Pour un calcul du genre $7 \cdot 24 + 3 \cdot 24$, on privilégiera le passage par le sens premier de la multiplication plutôt que l'application d'une recette. Donc "7 sachets de 24 billes ajoutés à 3 sachets de 24 billes" débouchera naturellement sur "10 sachets de 24 billes". L'encadré de la p. 58 n'est donc pas une règle supplémentaire à appliquer, mais la conséquence d'un raisonnement riche de sens.

Concernant : ***4.3 Multiplications écrites***

- Effectuer une multiplication écrite;
- résoudre des problèmes de la vie courante nécessitant la multiplication écrite.

Ici encore, dans les multiplications et divisions écrites, il y a lieu de privilégier la signification de l'opération, éventuellement de la contextualiser. Dans cet esprit, on veillera à installer le réflexe de l'estimation du résultat avant tout calcul.

Les changements dans le nouvel algorithme de la multiplication écrite sont :
"les 2 facteurs sont écrits en ligne",
"on note les 0"

Exemple :

722 32
1444
21660
23104

Concernant : ***4.4 Divisions écrites***

- Effectuer une division écrite sans reste;
- effectuer une division écrite avec reste;
- résoudre des problèmes de la vie courante nécessitant la division écrite.

5. Divisibilité

Concernant : ***5.1 Diviseur et multiple***

- Utiliser dans différents contextes les mots "divisible", "diviseur", "multiple" et la notation I et I ;
- citer des multiples et des diviseurs d'un nombre donné;
- identifier dans une liste de nombres les multiples et les diviseurs d'un nombre donné.

On mettra en évidence la particularité suivante "un nombre est diviseur et multiple de lui-même". Par contre, il est plus sage de ne pas faire intervenir le zéro.

Concernant : ***5.2 Règles de divisibilité***

- Énoncer les règles de divisibilité par 10, 5, 2; par 25, 4; par 9, 3;
- décider si un nombre est divisible par 10, 5, 2, 25, 4, 9, 3 en utilisant la règle de divisibilité correspondante.

Les exercices permettront aux élèves de découvrir les règles de divisibilité (sauf "divisibilité par 3 et 9" dont la compréhension est moins aisée).

Concernant : ***5.3 Tous les diviseurs et multiples d'un nombre***

- Donner l'ensemble des diviseurs et l'ensemble des multiples d'un nombre.

Concernant : ***5.4 Nombres premiers***

- Reconnaître si un nombre inférieur à 100 est premier ou non;
- utiliser les règles de divisibilité pour décider si un nombre est premier ou non.

Une excellente "activité de recherche" consiste à diagnostiquer si un nombre élevé est premier ou non. En effet, les élèves peuvent découvrir une hiérarchie dans les critères de divisibilité, par exemple "si un nombre n'est pas divisible par 2, il n'est pas divisible par 4" et, par le fait même, une stratégie permettant une réponse rapide.

L'exercice 6 (p. 73) est un exercice-type pour lequel la réponse est moins importante que la justification. Cet exercice développe particulièrement la "mise en doute", faculté qui consiste à remettre en question une solution paraissant évidente. En effet, "il n'existe aucun nombre premier pair" est une affirmation fausse car 2 est premier et pair, "entre 2 nombres premiers, il y a toujours un nombre qui n'est pas premier" est également une affirmation fausse car 2 et 3 sont des nombres premiers consécutifs.

Concernant : ***5.5 Décomposition en nombres premiers***

- Décomposer un nombre en un produit de facteurs premiers.

L'ordre des facteurs de décomposition n'est pas prépondérant. C'est ainsi que pour décomposer 700, il est plus judicieux de commencer par 7 que par 2.

Les exercices 6 et 7 (p. 74) sont à envisager comme des "activités de recherche".

6. Fractions

Concernant : ***6.1 Parties d'un tout***

- Utiliser dans différents contextes les mots "numérateur" et "dénominateur";
- associer une fraction à une figure donnée qui est ou qu'on peut diviser en parts égales;
- représenter dans un rectangle une fraction donnée;
- calculer mentalement ou par écrit des fractions de grandeurs;
- résoudre des problèmes de la vie courante faisant intervenir des fractions de grandeurs;
- écrire une fraction sous forme de division et inversement.

Il ne s'agit pas d'insister sur la notation "$\frac{2}{5}$", mais plutôt sur l'expression "prendre les $\frac{2}{5}$ de".

Concernant : ***6.2 Simplifier et amplifier des fractions***

- Reconnaître l'égalité de fractions à partir de figures géométriques;
- simplifier (ou amplifier) une fraction en divisant (ou en multipliant) le numérateur et le dénominateur par un même nombre;
- transformer une fraction en une fraction égale dont le numérateur ou le dénominateur est donné;
- simplifier une fraction au maximum.

Concernant : ***6.3 Fraction comme point sur un axe gradué***

- Situer des fractions données sur un axe gradué;
- associer à un point d'un axe gradué la fraction correspondante;
- écrire un entier sous forme fractionnaire et réciproquement.

La notation $1\frac{2}{7}$ est supprimée et remplacée par $1 + \frac{2}{7}$.

Concernant : ***6.4 Comparer des fractions***

- Comparer des fractions par représentation graphique;
- comparer des fractions par mise au même dénominateur.

Une fraction correspond à un concept très complexe. L'appréhender exige une progression adaptée. C'est pourquoi la représentation graphique donnant de la fraction une image visuelle, doit être privilégiée tout au long de ce chapitre.

7. Notions fondamentales de géométrie (II)

Concernant : *7.1* ***Solides***

- Utiliser le vocabulaire "cylindre, cône, cube, pavé, pyramide, sphère" pour nommer différents objets de son environnement.

Il est intéressant dans ce chapitre d'attirer l'attention des enfants sur la différence entre l'objet réel et l'objet représenté. C'est ainsi que si le cube possède 6 faces carrées, certaines d'entre elles sont représentées par des parallélogrammes.

Concernant : *7.2* ***Pavé et cube***

- Une propriété étant donnée, l'attribuer au cube et/ou au pavé ;
- associer à un objet donné l'appellation "cube" ou "pavé" en utilisant la justification "6 faces rectangulaires" ou "6 faces carrées" ;
- calculer la longueur totale des arêtes d'un cube connaissant la longueur d'une arête et vice versa ;
- calculer la longueur totale des arêtes d'un pavé connaissant les longueurs des arêtes ayant un sommet commun.

L'exercice 11 (p. 87) constitue une excellente "activité de recherche" où l'on peut comparer les différentes argumentations utilisées.

Concernant : *7.3* ***Développements de cubes et de pavés***

Tout le paragraphe 7.3 doit être compris comme une "activité de recherche" visant à développer la vision dans l'espace.

Concernant : *7.4* ***Représentation dans l'espace***

- Représenter un cube ou un pavé de manière conventionnelle, les longueurs des arêtes étant données.

8. Nombres décimaux

Concernant : ***8.1 Faire la connaissance des nombres décimaux***

8.2 Fractions en notation décimale

- Écrire sous forme décimale un nombre donné dans un tableau de positionnement (Stellenwerttafel) ;
- écrire sous forme décimale (en utilisant un tableau de positionnement) un nombre donné sous forme d'un entier + une fraction dont le dénominateur est 10, 100 ou 1000.
- écrire sous forme fractionnaire un nombre donné sous forme décimale;
- écrire sous forme décimale les fractions de dénominateur 2, 4, 8; 5, 25, 125 et 20, 50, 250, 500.

La familiarisation avec les nombres décimaux requiert beaucoup de précautions. L'élève doit remettre en cause certaines connaissances qu'il a assimilées. En effet, l'élève a appris que tout nombre a un successeur et qu'entre deux nombres consécutifs, on ne peut rien intercaler. Ces "théorèmes" ont été appris à propos des entiers naturels... mais l'élève a tendance à les prolonger spontanément aux nombres décimaux ("3,25 vient juste après 3,24" et "entre 2,5 et 2,7, il n'y a qu'un seul nombre : 2,6"). Ainsi pour bien concevoir les nombres décimaux, il faut rejeter cette idée de nombres consécutifs. Il est important de proposer à l'élève des activités qui le conduisent à cette remise en cause d'une propriété qui, jusque là, lui permettait de réussir. Au contraire, il semble dangereux de présenter les nombres décimaux comme un prolongement "naturel" (!) des entiers naturels et donc de renforcer les parentés entre ces deux types de nombres au lieu de mettre en évidence leurs spécificités.

Concernant : ***8.3 Simplifier et amplifier les nombres décimaux***

- Simplifier et amplifier des nombres décimaux ;
- lire correctement les nombres à virgule.

Concernant : ***8.4 Comparaison de nombres décimaux***

- Placer un nombre décimal sur une droite graduée ;
- identifier les nombres représentés sur une droite graduée;
- comparer des nombres décimaux en utilisant <, > et = ;
- ordonner une suite de nombres décimaux;
- citer quelques nombres décimaux situés entre deux nombres donnés.

L'exercice 6 (p. 98) est l'occasion de se ménager un temps pour "toucher" la notion d'infini : entre deux nombres, il y a toujours une infinité de nombres.

Concernant : ***8.5 Arrondir des nombres décimaux***

- Arrondir des grandeurs décimales à une unité de grandeur donnée ;
- arrondir des nombres décimaux à une position donnée.

9. Grandeurs

La distinction entre "nombre" et "grandeur" (= nombre muni d'une unité qui lui donne son sens) est à mettre en évidence dès le début de ce chapitre. Cette distinction apparaît dans la résolution des problèmes : lors de la rédaction de la solution, il est souvent aisé de ne manipuler que des nombres (sans unités) pour ne faire réapparaître les unités qu'à la conclusion.

Concernant : ***9.1 Masse et poids***

- Utiliser dans différents contextes les unités mg, g, kg, t;
- exprimer dans l'unité voisine une masse donnée;
- comparer des masses exprimées dans des unités différentes;
- additionner et soustraire des masses éventuellement exprimées dans des unités différentes, mais voisines;
- multiplier et diviser une masse donnée par un entier naturel;
- résoudre des problèmes de la vie courante faisant intervenir les masses.

Lors des transformations d'unités, on peut utiliser, le cas échéant, les nombres décimaux.

Notons que la "livre", le "quintal" et le "double quintal" n'ont pas été repris systématiquement.

Concernant : ***9.2 Longueurs***

- Utiliser dans différents contextes les unités mm, cm, dm, m, km;
- tracer un segment de longueur donnée;
- mesurer un segment donné;
- exprimer une longueur donnée dans une autre unité;
- comparer des longueurs exprimées dans des unités différentes;
- additionner et soustraire des longueurs éventuellement exprimées dans des unités différentes, mais voisines;
- multiplier et diviser des longueurs par un entier naturel;
- résoudre des problèmes de la vie courante faisant intervenir les longueurs.

Notons que les "hectomètres" et "decamètres" n'ont pas été repris.

Concernant : ***9.3 Temps***

- Utiliser dans différents contextes les unités seconde, minute, heure, jour, mois, année;
- exprimer dans une autre unité une durée donnée;
- comparer des durées exprimées dans des unités différentes;
- additionner et soustraire des durées éventuellement exprimées dans des unités différentes, mais voisines;
- multiplier et diviser des durées par un entier naturel;
- résoudre des problèmes de la vie courante faisant intervenir les durées.

Concernant : ***9.4 Vitesse***

- Utiliser dans différents contextes les unités de vitesse km/h et m/s;
- résoudre des problèmes de la vie courante faisant intervenir les vitesses.

L'exercice 3c) (p. 112) où il s'agit de déterminer la vitesse de Frank qui effectue 45 km en 1,5 heure, n'est pas à résoudre par la division par un nombre décimal (compétence non acquise en 5^e), mais simplement par raisonnement. La réflexion s'impose car l'élève ne dispose pas d'un outil mécanique.

10. Équations

Concernant : ***10.1 Introduction***

- Calculer la valeur d'une expression littérale du type $x + a$, $x - a$, ou $a \quad x$ avec a un nombre entier naturel;
- écrire en langage mathématique une expression donnée en langage courant.

L'objectif de ce chapitre est de familiariser l'élève avec la notion d'équation. Il y a lieu d'accorder une égale importance à :

1. *la résolution d'une équation au "coup d'oeil" ("14+x=43" peut se lire par "quel est le nombre qui, ajouté à 14, donne 43 ?");*
2. *la résolution d'une équation par application des principes de la balance;*
3. *la mise en équation d'un problème mathématique.*

Concernant : ***10.2 Solutions d'équations***

- Appliquer les méthodes qui découlent du "modèle de la balance" pour résoudre des équations du type $x + a = b$, $x - a = b$, $a \quad x = b$.

Concernant : ***10.3 Solutions de problèmes***

- Mettre un problème en équation.

L'objectif principal n'est pas de trouver simplement la solution du problème (qui n'exige pas nécessairement une mise en équation), mais de sensibiliser l'élève au fait de traduire un texte en une équation dans des cas simples et, ensuite, de la résoudre.

4. LES COMPÉTENCES SPÉCIFIQUES EN 6ᵉ ANNÉE D'ÉTUDES

Liste des savoir-faire attendus d'un élève en fin de 6e année d'études	*exercices correspondants*	*notes méthodologiques*

1. Travaux de révision

1.1 Exercices sur les entiers naturels

		La résolution de la plupart des exercices de ce chapitre ne demande pas de compétences autres que celles développées en 5e. Deux raisons majeures justifient cette « répétition » : d'une part, une compétence acquise à un moment donné se doit d'être entretenue et donc, se doit d'être sollicitée à intervalles réguliers; d'autre part, la difficulté des exercices proposés bien que correspondant aux mêmes compétences s'accroit légèrement en 6e.
*[1] - ordonner plusieurs nombres en utilisant les signes > et <	*1*	
* - écrire les nombres donnés oralement	*2*	Il paraît sage de ne pas dépasser les 10 milliards.
* - identifier des nombres représentés sur une droite graduée en unités ou non	*3*	
		Les exercices 4 et 9 sont d'excellents « exercices à discussion ». En effet le terme « zwischen » peut être interprété de différentes façons, suivant que l'on considère que les bornes font partie ou non de la solution
- compléter une suite dont les premiers termes sont donnés	*5, 11*	
- arrondir un nombre	*6, 12*	Le principe (voir Mathematik 5, p.99) est : bei den Ziffern 5 6 7 8 9 runde auf, bei den Ziffern 0 1 2 3 4 runde ab !
- découvrir des nombres suivant leurs caractéristiques	*8, 10, 12*	Dans « Mathematik 5 », cette compétence est présente dans les exercices 16 et 17, p.11, mais elle n'est pas exigée d'un élève en fin de 5e.

[1] Les compétences précédées d'un astérisque ont déjà été exercées en 5e année.

1.2 Exercices sur les 4 opérations fondamentales

* - effectuer par écrit l'addition, la soustraction, la multiplication et la division de nombres disposés en ligne	*1, 4, 5, 6 : p.6* *19, 23 : p.8* *27,28 : p.9*	
* - calculer mentalement en groupant « avantageusement » les nombres lors d'une addition ou d'une soustraction	*2, 3 : p.6* *17, 24 : p.8*	Notons la différence entre les compétences « appliquer la méthode du groupement avantageux lorsqu'elle est demandée explicitement » et « utiliser spontanément la méthode du groupement avantageux lors d'un calcul ». La deuxième est beaucoup plus difficile à évaluer que la première.
* - effectuer des calculs mêlant additions, soustractions, multiplications et divisions en respectant les priorités des opérations et les parenthèses	*7, 8 : p.7* *14, 20 : p.8* *29, 30 : p.9*	
* - résoudre des problèmes de la vie courante où sont mêlées les 4 opérations	*10, 11, 12, 13 : p. 7* *16, 18, 22, 25 : p.8* *26, 31, 32, 33 : p.9*	L'exercice 21 (p.8) est très intéressant dans le sens où il vise le développement d'une compétence langagière fondamentale. Ce savoir-faire ou plutôt ce « savoir-traduire » n'est pas exigé en fin de 6e, il sera d'ailleurs amplement développé dès la 1ère année de l'enseignement secondaire.

1.3 Exercices sur la divisibilité

* - donner l'ensemble des diviseurs et l'ensemble des multiples d'un nombre	*1, 2*	
* - décider si un nombre est divisible par 10, 5, 2, 25, 4, 9, 3 en utilisant la règle de divisibilité correspondante	*4, 7*	
- décider si un nombre est multiple ou diviseur d'un autre	*3*	
* - reconnaître si un nombre inférieur à 100 est premier ou non	*5, 8*	L'exercice 6 et l'exercice précédé d'une ampoule (p.10) constituent d'excellentes activités de recherche.

2. Fractions

2.1 Exercices de révision

* - utiliser dans différents contextes les mots « numérateur » et « dénominateur »	*1 : p.11*	
* - représenter dans un rectangle une fraction donnée	*2 : p.11*	
* - calculer mentalement ou par écrit des fractions de grandeurs	*3 : p.11* *4, 5 : p.12*	
- transformer un nombre donné sous la forme « entier + fraction » en une fraction et réciproquement	*5, 6 : p.11*	Cette compétence est nouvelle par rapport à la 5e.
* - reconnaître l'égalité de fractions à partir de figures géométriques	*1 : p.12*	
* - simplifier (ou amplifier) une fraction en divisant (ou en multipliant) le numérateur et le dénominateur par un même nombre	*2, 3, 4, 5 : p.12*	
* - comparer des fractions par mise au même dénominateur	*1, 2, 3 : p.13*	Il est important d'inviter les enfants à n'avoir recours à cette technique qu'en cas de stricte nécessité : pour comparer ½ et $^2/_3$, une représentation graphique par « quartiers de tarte » est suffisante.
- comparer des fractions ayant même numérateur	*4 : p.13*	Le formalisme, du type « lorsque deux fractions ont même numérateur, la plus petite est celle qui a le plus grand dénominateur », ne peut être verbalisé (s'il doit l'être !) que par les enfants, suite à leurs activités. Le passage par le sens est prépondérant.
- comparer deux fractions par mise au même numérateur	*5 : p.14*	
- comparer deux fractions en référence à l'unité	*6 : p.14*	
- comparer deux fractions en référence à un entier ou à 1/2	*7 : p.14*	La compétence qui consiste à choisir la méthode la plus rentable (voir ex.8, p.14) est importante et ne manquera pas d'être exercée. Elle est toutefois difficilement mesurable et ne fera l'objet d'une évaluation systématique.

2.2 Addition et soustraction de fractions à même dénominateur

- additionner et soustraire deux fractions ayant	*2, 5 : p.15*	

même dénominateur | *1, 2, 3, 4 : p.16*
- résoudre des problèmes de la vie courante faisant intervenir l'addition et la soustraction de fractions ayant même dénominateur | *5, 6, 7, 8 : p.16*

3. Nombres décimaux

3.1 Exercices de révision

* - écrire sous forme décimale un nombre donné sous forme d'un entier + une fraction dont le dénominateur est 10, 100 ou 1000	*1 : p.17*	
* - écrire sous forme décimale les fractions de dénominateur 2, 4, 8; 5, 25, 125 et 20, 50, 250, 500	*2a, 2b, 2c*	
- écrire sous forme décimale un nombre donné sous forme d'un entier + une fraction dont le dénominateur est 2, 4, 8; 5, 25, 125 et 20, 50, 250, 500	*2d, 2e*	
* - écrire sous forme fractionnaire un nombre donné sous forme décimale	*3*	
* - identifier les nombres représentés sur une droite graduée	*4*	
* - comparer des nombres décimaux en utilisant <, > et =	*5*	
* - citer quelques nombres décimaux situés entre deux nombres donnés	*6*	
* - arrondir des nombres décimaux à une position donnée	*7*	L'exercice 8 est très intéressant même s'il ne vise pas l'acquisition d'une compétence spécifique. Il permet d'invoquer le « sens », voire le « bon sens ». Il reflète la différence entre le travail machinal (arrondir) et le travail non machinal (arrondir si c'est opportun).

3.2 Addition et soustraction

- additionner et soustraire par écrit des nombres décimaux	*1, 2, 3, 4, 5, 6, : p.18* *8, 9 : p.19*	On entraînera l'élève à *penser* systématiquement à effectuer le calcul *mentalement* et, donc à ne recourir au calcul écrit qu'en cas de nécessité. La difficulté n'est pas tant d'effectuer le calcul mentalement mais plutôt de se rendre compte que le calcul est résoluble mentalement.

- compléter un nombre décimal jusqu'à 1, 10 ou 100	*7 : p.19*	
- résoudre des problèmes concernant l'addition et la soustraction de nombres décimaux	*10, 11, 12, 13, 14 : p.19*	

3.3 Multiplication

		Avec les nombres décimaux, l'élève se rend compte que multiplier ne fait pas nécessairement grandir contrairement à ce qu'il pensait au vu de son expérience avec les nombres entiers. Ce phénomène de rupture, propre à chaque enfant, est repris par G. Bachelard (Paris) : « La compréhension s'acquiert contre une connaissance antérieure, en détruisant des connaissances mal faites. »
- multiplier et diviser un nombre décimal par 10, 100 ou 1000	*1, 2, 3 : p.20*	
- multiplier un nombre décimal par un entier	*1, 2, 3, 4 : p.21*	Le fait d'approximer le résultat est important en vue de vérifier la cohérence du résultat obtenu. Ici encore, il s'agit d'une activité de *conception;* il est pratiquement impossible, voire dangereux, de formaliser l'activité avec une technique du genre « Pour approximer le produit de ...., il faut ... »
- multiplier un nombre décimal par un nombre décimal	*1, 2, 3 : p.22*	
- résoudre des problèmes concernant la multiplication et la division de nombres décimaux	*4 : p.20* *5, 6 : p.21* *4, 7, 8, 9, 10 : p.23*	
- respecter les règles de priorité dans les calculs mêlant addition, soustraction et multiplication de nombres décimaux	*11 : p.23*	
- calculer une expression littérale où les lettres sont à remplacer par une valeur numérique	*12 : p.23*	Le but de l'exercice (a.b)-(a.b) est de maintenir le cerveau en éveil, de ne pas tomber dans le mécanisme aveugle. C'est l'occasion de rappeler à l'élève que « Devant tout exercice, la première tâche n'est pas de calculer mais de regarder ! »

3.4 Division

- diviser un nombre décimal par un entier	*1, 2, 4, 5 : p.25*	L'exercice 6, p.25, permet d'utiliser un résultat trouvé pour effectuer un calcul proche. Il exige une maîtrise du sens profond de la division, avec un

raisonnement du type « si je divise par un nombre 10 fois plus petit, le résultat sera 10 fois plus grand ».

- diviser un entier par un entier (avec résultat décimal) *3 : p.25*
- résoudre des problèmes faisant intervenir des divisions de nombres décimaux *8, 9, 10, 11, 12 : p.25*
- diviser un nombre décimal par un nombre décimal *1, 2 : p.26*

Un exercice concernant le change de devises étrangères peut constituer une AR (ex.3, p.26).

4. Géométrie I

4.1 Axe de symétrie d'une figure

- trouver et tracer le ou les axe(s) de symétries d'une figure plane *5 : p.27* *7, 8, 9, 10, 11 : p.28*

Nous mettons en garde contre la confusion possible entre l'axe de symétrie d'une figure et l'axe d'une symétrie axiale qui permet de construire l'image de cette figure.

4.2 Symétrie axiale

- construire l'image d'une figure par symétrie axiale en cherchant l'image de chacun de ses sommets *4 : p.29* *5, 6 : p.30*

4.3 Le cercle

- utiliser dans différents contextes les mots « rayon » et « diamètre »
- tracer un cercle dont le rayon (ou le diamètre) est donné *5, 6*
- calculer le rayon d'un cercle dont le diamètre est donné et vice versa *7*
- tracer deux cercles de rayons égaux ou non, leurs positions relatives étant données *8, 9*

Les exercices 10, 11 et 12 sont intéressants pour renforcer la dextérité dans la manipulation des instruments, pour éveiller l'éducation artistique, ...

4.4 Angles

- utiliser dans différents contextes les mots « angle », « sommet » et « côté »

Les exercices de la page 33, où il s'agit de reproduire dans le cahier des angles donnés, constituent une préparation à la mesure des angles. Cet entrainement à l'approximation (voir aussi l'exercice 4 p.36) assurera la cohérence des mesures effectuées par la suite.

- noter un angle en utilisant les lettres grecques α, β, γ et δ
- mesurer un angle à l'aide du rapporteur (Geodreieck) *3 : p.34* *2, 3 : p.35* *5 : p.36*
- comparer des angles en utilisant les symboles $<$ et $>$ *1 : p.34*
- utiliser dans différents contextes les mots « angle aigu », « angle obtus », et « angle droit »
- dessiner un angle aigu, un angle obtus et un angle droit *1 : p.35*
- construire des angles de mesures données *1, 2, 3 : p.36*

5. Équations

5.1 Exercices de révision

* - appliquer les méthodes qui découlent du « modèle de la balance » pour résoudre des équations du type $x + a = b$, $x - a = b$, $a.x = b$ *1 : p.37*

* - écrire en langage mathématique une expression donnée en langage courant *2, 3 : p.37* *3 : p.39*

5.2 Nouveaux cas d'équations
5.3 Contrôle de la solution

- contrôler la solution d'une équation en remplaçant l'inconnue par la valeur trouvée *1, 2 : p.39*
- résoudre une équation de type $ax + b = c$ ou $ax - b = c$ *2 : p.39*
- mettre un problème en équation *4, 5 : p.39*

La résolution du problème 4 p.39 ne nécessite pas l'utilisation d'une équation. Il est donc intéressant de confronter les différentes façons d'obtenir la solution avec ou sans équation.

6. Géométrie II

6.1 Périmètre des rectangles et des carrés

* - calculer le périmètre d'un rectangle ou d'un carré dont les dimensions sont données	*1, 2, 3 : p.40*	
* - résoudre des problèmes faisant intervenir le calcul du périmètre du rectangle et du carré dont les dimensions sont données	*4, 5, 6 : p.40*	
- calculer le côté d'un carré dont le périmètre est donné		
- calculer la longueur (respectivement la largeur) d'un rectangle dont le périmètre et la largeur (respectivement la longueur) sont donnés	*3 : p.41*	A la page 41, la première méthode est basée sur la résolution d'une équation; elle est moins facile à exprimer oralement. La seconde méthode basée sur le calcul du demi-périmètre, est plus classique.

6.2 Aire des rectangles et des carrés

* - calculer l'aire d'un rectangle ou d'un carré dont les dimensions sont données	*2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 : p.42*	
* - résoudre des problèmes faisant intervenir l'aire du rectangle et du carré	*4, 5 : p.43*	
- calculer la longueur (respectivement la largeur) d'un rectangle dont l'aire et la largeur (respectivement la longueur) sont données	*tableau p.43*	Le fait de traiter simultanément les notions « de périmètre » et « d'aire » a pour objectif d'éviter la confusion entre ces notions. Il s'agit de créer (et donc de ne pas cacher ou éviter) le conflit « périmètre-aire ». A ce propos, l'exercice « parmi les rectangles dont le périmètre est 24 cm, quel est celui qui a la plus grande aire? » (ex. 9 p.44) constitue une excellente activité de recherche et l'occasion pour l'enfant d'aborder une vérité « surprenante », à savoir que deux rectangles de même périmètre n'ont pas nécessairement la même aire.
* - une aire étant donnée dans une unité, la convertir dans une unité voisine	*1, 2, 3 : p.43*	
- résoudre des problèmes mêlant l'aire et le périmètre du rectangle	*6, 7, 8, 11 : p.44*	

6.3 Aire des parallélogrammes

* - calculer l'aire d'un parallélogramme dont la base et la hauteur sont données ou déductibles au vu des informations contenues sur un dessin	*1, 2, 3 : p.45*	La notion de hauteur n'est pas « naturelle » chez les enfants. Même si la notion d'aire du parallélogramme a déjà été abordée en 5e (Mathematik 5, p.50), il n'en reste pas moins étonnant que cette aire dépend de la longueur de la base mais pas de la longueur de l'autre côté (contrairement au rectangle). Voici donc un quadrilatère dont la connaissance des dimensions des côtés qui le composent ne permet pas d'en déterminer l'aire ! Cette phase d'interpellation est synthétisée dans les activités 1, 2, et 3 p.45.

6.4 Triangle

- utiliser dans différents contextes les mots « triangle quelconque », « triangle isocèle », « triangle équilatéral », « triangle rectangle »	*2, 3, 4 : p.47*	Le but de l'exercice 5, p.47, est uniquement d'entraîner les enfants à construire de façon précise un triangle ayant les mêmes caractéristiques que l'original.

6.5 Hauteur du triangle

- tracer les hauteurs d'un triangle	*2, 3, 4 : p.48*	A l'exercice 4, il est possible de prolonger les hauteurs (passer du segment à la droite) afin de mettre en évidence le fait qu'elles soient concourantes. Notons l'abus de langage fréquent : suivant le contexte où il est utilisé, le mot « hauteur » désigne le segment ou la mesure de ce segment.

6.6 Aire du triangle

- calculer l'aire d'un triangle dont les mesures d'un côté et de la hauteur associée sont données	*3, 6 : p.50*	
- calculer l'aire d'un triangle dont les mesures d'un côté et de la hauteur associée sont à déterminer	*1, 2 : p.49*	
- résoudre des problèmes faisant intervenir l'aire du triangle	*4, 5, 7, 8 : p.50*	Il peut être intéressant lors du traitement de l'ex.7 de mener quelques réflexions concernant la perspective ou, plus précisément, la représentation sur un plan d'objets de l'espace. Ainsi, un angle réellement droit n'est pas

		nécessairement représenté par un angle droit !

7. Solides

7.1 Volume

- comparer le volume de corps décomposables en cubes de mêmes dimensions	*1, 2 : p.51*	
- déterminer le nombre de « cubes-unités » qu'il faut pour compléter ou constituer un corps de dimensions données	*3, 5, 6, 7 : p.52*	
- déterminer le nombre de faces colorées de « petits cubes » obtenus par découpage d'un « grand cube » coloré	*4*	Cet exercice fait suite à l'activité de recherche menée en 5e (voir Mathematik 5. ex.11 p. 87)

7.2 Unités de volume

- choisir l'unité de volume convenant pour mesurer des volumes donnés	*1 : p.53*	
- convertir une unité de volume donnée en une autre unité (de préférence voisine)	*2 : p.53* *1, 2, 3, 4, 6 : p.54*	
- exprimer un volume à l'aide de 2 unités voisines et réciproquement	*5 : p.54* *7 : p.55*	
- convertir des l (hl, dl, cl, ml) en dm^3 (m^3, cm^3, mm^3) et réciproquement	*9 : p.55*	Il convient de ne pas voir une différence fondamentale entre des volumes de corps solides (m^3, ...) et des volumes de corps remplis de liquide (l,...)
- additionner et soustraire des volumes	*1, 2 : p.55*	
- multiplier et diviser un volume par un nombre	*3 : p.55*	
- résoudre des problèmes faisant intervenir des volumes	*4, 5 : p.55*	

7.3 Volumes de pavés et de cubes

- calculer le volume d'un pavé ou d'un cube dont les dimensions sont données	*3 : p.57* *7, 12 : p.59*	
- résoudre des problèmes faisant intervenir le calcul du volume de pavés et de cubes	*1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 : p.57*	

7.4 Surface de pavés et de cubes

- calculer la surface latérale d'un pavé ou d'un	*1, 2 : p.58* *3, 4, 7, 12 :*	

cube dont les dimensions sont données	*p.59*	
- résoudre des problèmes faisant intervenir le calcul de la surface de pavés et de cubes	*5, 6, 8, 9, 10, 14 : p.59*	
- le volume étant fixé, trouver les dimensions (nombres entiers uniquement) de différents pavés ou cubes ayant ce volume et comparer leurs surfaces	*11 : p.59*	

8. Grandeurs

8.1 Manipulations des grandeurs dans la vie courante

- citer les unités adaptées à une grandeur et vice versa	*1, 2 : p.60* *7 : p.61*	L'exercice 3, p.60, peut constituer une excellente « activité de recherche ». Pourquoi ne pas inviter les enfants à courir un 50 mètres puis à calculer leur vitesse ? Aux Jeux Olympiques, à quelle vitesse court un athlète qui réalise un chrono de 10 secondes sur 100 mètres ? Les exercices 1 à 8, p.60-61, sont fondamentaux : ils ont pour objectif de familiariser les enfants avec les notions de grandeur, d'insérer le contenu scolaire dans un contexte réel grâce à la manipulation, à l'estimation, à l'approximation.

8.2 Calculer avec les grandeurs

* - effectuer des calculs faisant intervenir des grandeurs de même type (avec conversion éventuelle)	*1, 2, 4, 5 : p.62* *1 : p.64*	L'exercice «ampoule » p.62 constitue, à n'en pas douter, une passionnante « activité de recherche » !
- résoudre des problèmes faisant intervenir les grandeurs	*2 à 8 : p.63*	La résolution de nombreux problèmes, notamment l'ex.4, requiert l'utilisation de la calculatrice.
* - exprimer dans d'autres unités une durée donnée	*3 : p.64*	A l'ex.6, l'âge d'une personne peut être calculé de manière globale (elle a 80 ans) ou de manière précise (elle a 79 ans et 9 mois)
- résoudre des problèmes faisant intervenir la vitesse	*1 à 6 : p.65*	Il est conseillé de ne pas traiter les problèmes de la page 66 les

uns à la suite des autres mais de les disperser sur plusieurs semaines.

9. Problèmes

9.1 Exercices de répétition portant sur divers domaines

Plusieurs exercices trouvent leur spécificité dans le fait qu'il faut retirer l'information pertinente d'un graphique, d'un tableau, d'un plan ou d'un dessin.
D'autres problèmes sont des « problèmes à tiroirs ». La question porte sur le dernier « tiroir ». C'est à l'élève d'imaginer le chemin pour y parvenir, et donc de déterminer les « tiroirs » intermédiaires.

9.2 Profits et pertes

L'objectif de ce chapitre est de familiariser l'enfant avec le vocabulaire « prix d'achat », « prix de vente », « bénéfice », « perte » et « frais » ainsi que de calculer le bénéfice ou la perte connaissant le prix d'achat, le prix de vente et les frais. Outre le fait que le sens de la soustraction entre « prix de vente » et « prix d'achat » dépend de la grandeur de ces données (PA - PV = perte, PV - PA = bénéfice), la plus grande difficulté provient du décalage entre le vocabulaire de la vie de tous les jours et celui utilisé dans cette matière mathématique. En effet, dans la phrase « Tu vends ce stylo 25 F, je l'achète donc 25 F », les termes « achat » et « vente » recouvrent la même valeur, ils ne diffèrent que par le sujet qui les utilise. Par contre, dans la phrase « j'achète un stylo 20 F et je le vends 25 F », c'est le même sujet qui vend et qui achète; dès lors, les valeurs « prix de vente » et « prix d'achat » changent de sens.

9.3 Règle de trois

- connaissant une grandeur associée à n objets, calculer la grandeur associée à un multiple ou à un diviseur de ces n objets (Zweisatzrechnung)

1 à 5 : p.72

S'il peut être résolu indépendamment de la « règle de trois », l'exercice 6 peut également se mettre sous forme d'un tableau :

a) distance parcourue(cm)	nombre de pas
75	1
.1300	
97500	□

b) distance parcourue(cm)	nombre de pas
□	1
	:1500
97500	1500

- connaissant une grandeur associée à n objets, calculer la grandeur associée à p objets, p n'étant pas nécessairement un multiple ou un diviseur de n (Dreisatzrechnung)

La présence de l'exercice 11 p.74 exprime la volonté d'éviter le conditionnement. La chasse à « l'automat(h)isme précoce » garantit une activité mathématique réfléchie.

9.4 Pourcentages

- écrire un pourcentage sous forme de fraction
- écrire une fraction dont le dénominateur est 100 sous forme d'un pourcentage
- représenter un pourcentage donné par une partie de figure géométrique et vice versa — *2 : p.77*, *2 : p.75*
- calculer le pourcentage d'une quantité ou d'une grandeur
- résoudre des problèmes faisant intervenir le pourcentage — *3 à 13*

9.5 Problèmes de partage

Sous la rubrique « Verkilungsaufgaben » sont proposés des problèmes de mise en équation incluant

- résoudre des problèmes de partages inégaux *1, 2, 3*

notamment les partages inégaux mais aussi des exercices de révision.

10. Statistique

10.1 Représentations de données

- traduire des données statistiques en un diagramme en « bande » (Streifendiagramm) et en un diagramme en bâtonnets (Säulendiagramm) *1, 4, 5*
- retrouver des informations à partir de diagrammes en « bande », en bâtonnets et en « tarte » *2, 6*

10.2 Traitement de données

- calculer la moyenne arithmétique de *n* nombres entiers ou décimaux (arrondir si nécessaire) *2, 3, 4, 5, 6*

Il y a lieu d'initier les élèves à deux concepts fondamentaux concernant la moyenne.

1. La formule permettant le calcul de la moyenne (voir encadré p.83). En mathématique, on écrirait : $m = (x_1+x_2+...+x_n) / n$

2. Le sens profond de la moyenne, à savoir un nombre pouvant remplacer chacune des données si toutes celles-ci étaient égales. En mathématique, on écrirait : $x_1+x_2+...+x_n = m+m+...+m$
Ainsi, les exercices 8, 9, 11 et 12 ne requièrent pas le passage par la formule.

- déterminer la moyenne de n nombres (n<6) sans avoir recours à la formule *11, 12*
- connaissant la moyenne entre 2 (ou 3) nombres, déterminer un nombre manquant *8, 9*

L'exercice 10 constitue une intéressante activité de recherche

10.3 Fréquences absolues et relatives

- déterminer les différents résultats possibles d'une simple « situation de hasard » *3, 4, 5, 6, 8*

Ces exercices révèlent les différentes techniques de dénombrement. Il s'agit, en fait, «d'organiser » les différents cas possibles pour être certain de ne pas en oublier.

L'exercice 2d, p.87, peut-être traité en activité de recherche.

- dans un jeu de hasard, traduire une liste de résultats en un tableau de fréquences absolues
- traduire un tableau de fréquences absolues en un diagramme en bâtonnets

1, 2, 3 : p.87

10.4 Fréquences relatives

Suivant le temps encore disponible et l'intérêt des élèves, on traitera ce paragraphe (par ailleurs très intéressant !).

5. ANNEXES

Le groupe d'élaboration du présent dossier soumet à votre réflexion quelques articles qui, à son avis, reflètent une conception actuelle de l'enseignement des mathématiques.

- **"Apprendre... comprendre... enseigner les mathématiques",**
  extrait de "Mathématique", Livre du maître, édition provisoire 1995, édité par la Commission Romande des moyens d'enseignement, Suisse.

- **"Utiliser la calculatrice à l'école primaire ?"**
  par Fernand KOLB.

- **"Des activités de recherche ou... l'atelier de mathématiques"**
  par Jacky ANTOINE.

Suite à la demande de nombreuses institutrices et instituteurs, nous joignons également quelques activités de recherche, qui s'ajoutent à celles proposées par le manuel ainsi que des informations (extraites du dossier de 4e) concernant les algorithmes de soustraction, multiciplication et division.

- **Recueil d'activités de recherche.**

- **Extrais de "Lehrerinformation zu Mathematik 4"**
  - Programmübersicht 1. bis 4. Schuljahr
  - Algorithmen.

Annexe 1

APPRENDRE...
COMPRENDRE...
ENSEIGNER... LES MATHÉMATIQUES

L'article qui suit est extrait de "Mathématique", Livre du maître, Edition provisoire 1994, édité par la Commission Romande des moyens d'enseignement, Suisse.

Depuis un siècle la science a plus progressé qu'elle ne l'avait fait en plusieurs millénaires. L'explosion des connaissances et des techniques, l'incapacité de gérer les prévisions qu'elles suggèrent, l'impossibilité de les rassembler en un système unique mais, au contraire, l'obligation de tenir ensemble des théories complémentaires, voire contradictoires, contraignent l'école à former des esprits aptes à assumer une telle réalité. Qu'on le veuille ou non, le temps n'est plus à la nostalgie des vieilles méthodes, aussi bonnes peuvent-elles paraître. L'élève ne dispose que de quelques années pour apprendre l'essentiel: savoir résoudre des problèmes jamais rencontrés, oser les approcher, inventer des stratégies, chercher des solutions de rechange. Savoir compter et calculer au terme de sa scolarité primaire ne suffit pas à affronter l'actualité.
C'est pourquoi l'élève doit avoir accès à des activités qui, entre autres, reproduisent ou simulent certains aspects de la réalité tout en favorisant le développement de son intelligence.
Jouer, résoudre une énigme, mener une recherche, imaginer des solutions, permettent à l'enfant d'exercer ce qu'il sait, de se représenter une situation afin d'agir sur elle, d'élaborer de nouvelles connaissances, d'accroître son savoir mathématique. Plus encore: acteur de ses apprentissages et gestionnaire de ses activités, l'élève peut accéder à l'autonomie.

Les cadres théoriques de référence

Envisager la création de nouveaux moyens d'enseignement suppose la prise en compte des connaissances les plus récentes en matière d'enseignement. Deux grands domaines scientifiques sont importants: celui qui étudie l'enfant, son évolution et les processus d'apprentissage, et celui qui tente de cerner les conditions dans lesquelles développement et apprentissages scolaires ont le plus de chance de s'accomplir harmonieusement.

Les différentes théories de la science cognitive[1] apportent un éclairage indispensable pour comprendre comment les enfants apprennent et conservent les savoirs enseignés. Elles nous renseignent sur les interactions entre leurs représentations et leurs stratégies en situation de résolution de problème.
La psychologie de l'intelligence s'appuie notamment sur deux conceptions importantes: le constructivisme et l'interactionnisme. Selon ces théories, aucune connaissance n'est le résultat direct d'une expérience ou d'une sensation. Toute connaissance se construit, s'élabore dans une interaction continuelle entre le sujet et son environnement, par des ajustements constants des représentations qu'elle génère. Et ces ajustements ne se produisent pas sans heurts : ils sont source de conflits, de résistances, d'obstacles et parfois même de blocages!

[1] Discipline qui regroupe la psychologie et l'épistémologie génétiques, la psychologie sociale, la psychologie expérimentale de l'apprentissage et de la mémoire, les travaux en intelligence artificielle et en neurosciences.

"L'enfant ne se développe pas en apprenant pour chaque situation la réponse appropriée, mais en se formant des concepts opératoires qui lui permettent de traiter de larges classes de situations y compris celles qu'il n'a jamais rencontrées."[2]

A un moment donné, l'élève est capable de comprendre quelque chose de précis dans une situation particulière et d'en parler. Mais, dans le même temps, il est en train de construire d'autres connaissances, d'établir de nouveaux rapports entre elles, d'élargir celles qui sont déjà opérationnelles. Et toute cette activité cognitive s'élabore en des systèmes de plus en plus complexes et de plus en plus généraux, selon des modèles qui sont propres à chacun.
C'est pourquoi l'élève a besoin d'être confronté à des problèmes qui le contraignent à mettre en oeuvre ce qu'il sait pour apprendre du nouveau.

C'est ici qu'intervient l'enseignement. Le maître est chargé de fournir à l'élève des situations lui permettant de mettre en oeuvre ses connaissances et de lui faire acquérir des savoirs.

Il s'agit de connaître les conditions sous lesquelles les apprentissages ont le plus de chance d'apparaître et de produire des éléments de savoir utilisables lors de situations nouvelles.

Apprendre c'est agir dans un but

L'action n'est pas simple manipulation, elle est orientée vers un but, elle concerne la réalisation d'un projet. Les actions effectives s'organisent entre elles, s'intériorisent de sorte que l'enfant devient capable de penser et de raisonner non seulement sur des objets matériels mais, progressivement, sur des symboles, des représentations, des concepts, des relations...

Contrairement à une idée largement répandue, le sens ne vient pas à l'enfant à travers les successions d'explications que lui fournit l'adulte, surtout pas, ou très rarement lorsque ces explications recourent à l'analogie.
L'enfant donne du sens à ce qu'il fait, à ce qu'il "agit", parce que, depuis tout petit, il finalise ses actions.
L'observation des bébés est éloquente : ce qui arrive par hasard est repris, essayé, transformé, afin de provoquer des résultats, de les reproduire ou de les varier.

L'action peut mener à des réussites (dans un jeu d'adresse par exemple) et présenter ainsi les caractères d'un savoir-faire. L'intériorisation assure le passage de l'action "en acte" à l'action "en pensée"; l'action se transforme en opération ou en notion. Ce passage nécessite une prise de conscience des raisons pour lesquelles on réussit. Celle-ci intervient lorsqu'on réfléchit sur ce qu'on a fait, et comment on l'a fait. Verbaliser son activité, communiquer, représenter, schématiser favorisent cette prise de conscience.

En situation mathématique, ce n'est pas la manipulation seule qui assure la possibilité d'un apprentissage. En revanche, elle est utile pour s'approprier la situation, pour comprendre de quoi il s'agit, pour se faire une représentation de la tâche à accomplir et de sa finalité. Elle peut à nouveau intervenir ultérieurement, pour se réorienter ou pour vérifier une donnée ou une hypothèse. Mais c'est en dépassant la manipulation qu'on mathématise, pour généraliser, pour trouver une loi ou une fonction.

---

2 Vergnaud, G. Activité et connaissance opératoire, in: Bulletin de l'APMEP n° 307, 1977.

Les activités mathématiques, même les plus techniques comme additionner ou établir une relation, dessiner un schéma, ... doivent être finalisées si l'on veut qu'elles revêtent du sens. A quoi sert-il de savoir effectuer une opération si l'on ne sait pas quand et pourquoi il faut y avoir recours ?

Au lieu de soumettre les élèves à des exercices de simple dénombrement, où l'on compte pour compter, on leur proposera de préférence, le plus souvent possible, des activités où dénombrer est utile pour résoudre un problème ou gagner à un jeu. Il en va de même pour toutes les notions importantes du programme. Parce qu'il comprend qu'un savoir est utile et intéressant, l'élève peut alors lui donner du sens et trouve du plaisir à l'étudier pour lui-même, lui conférant ainsi le statut d'objet de connaissance.

Comprendre c'est donner du sens

Donner du sens est essentiel si l'on veut faire des mathématiques un outil de choix pour aborder toutes sortes de problèmes de la vie courante et des sciences.

L'enfant a besoin de savoir "à quoi ça sert" pour pouvoir apprendre et comprendre.
Il n'est pas rare de voir un élève, alors en échec, se mettre à mémoriser des tables d'addition, en dehors de toute suggestion de l'adulte, lorsqu'il commence à comprendre à quoi peut bien servir une addition ou une soustraction et lorsqu'il parvient à maîtriser leurs techniques. Il éprouve du plaisir à les effectuer parce qu'elles correspondent à une suite d'actions qui ont un sens. Il regrette de gâcher ce plaisir juste parce qu'il ne connaît pas ses tables.

L'enseignement par résolution de problèmes est essentiel dans la recherche du sens car il présente une consigne qui contraint l'élève à agir, à mettre en oeuvre ce qu'il sait, à se poser des questions et à envisager des solutions. L'élève peut prendre beaucoup de temps avant de produire quelque chose. Ensuite, il peut tâtonner, se tromper, recommencer. Toute cette phase est fondamentale et ne doit surtout pas être lue comme du temps perdu. C'est le temps qu'il faut pour apprivoiser la tâche, pour se l'approprier: lui donner du sens.

Comprendre c'est conceptualiser

Un *concept* est une idée générale qu'on se fait d'une chose, d'un objet matériel ou abstrait. Le concept est une schématisation : le concept "chat" c'est la représentation qu'on se crée à partir des chats que nous avons rencontrés. De même, le nombre six s'élabore à partir de situations diverses où l'on a compté six. Le concept garde les caractéristiques générales sans les particularités. C'est une classe. Ainsi, la classe "chat", dont les éléments sont le chat noir de la voisine, Minou et les autres.

Le terme de concept est distingué de celui de *notion*, qu'on réserve plutôt pour les objets liés au savoir ou à la culture. Les codes, les fonctions, les algorithmes, les triangles ... sont des notions.
Le nombre est à la fois un concept et une notion. Quand il commence l'école, l'enfant a déjà un concept élémentaire de nombre. Il sait que 4 se rapporte à l'heure du goûter; qu'une fois, il a eu 4 ans, mais que maintenant, il est plus âgé; qu'il met 4 assiettes parce qu'on est 4 en famille, etc. Ce concept va s'amplifier, se spécifier, se coordonner à d'autres concepts. Mais c'est à l'école, la plupart du temps, que cet enfant entre en contact avec la notion de nombre, laquelle est un objet mathématique. Le nombre acquerra un nom, des écritures, des propriétés et s'inscrira dans un système de relations.

Les didacticiens parlent de *champ conceptuel* à propos des notions mathématiques. Cette expression permet de relier à la fois le domaine du savoir scientifique et celui du développement intellectuel, dans lesquels se situent les compétences individuelles. G. Vergnaud en donne la définition suivante : "un champ conceptuel est un espace de problèmes ou de situations-problèmes dont le traitement implique des concepts et des procédures de plusieurs types en étroite connexion."[3] Prenons l'exemple de la multiplication. Elle peut être considérée comme une "simple" opération arithmétique mais elle suppose concepts et notions de mises en relations, additions successives, aire, produit cartésien, fonction, rapport, multiples et diviseurs, etc. Un élève qui "sait" qu'on calcule une aire par une multiplication (5 x 3) peut recourir à une procédure de type additif lorsqu'il est en situation de constituer la surface correspondante par manipulation. Au lieu de placer 3 rangs de 5 cartons, il constitue la bordure d'un rectangle de 15 cartons. Le même décalage est observé quand on demande de dénombrer toutes les combinaisons de 3 formes et 4 couleurs. Beaucoup d'élèves "savent " écrire le produit 3 x 4 = 12 mais, au moment de dresser l'inventaire, n'attribuent qu'une forme à chaque couleur de papier.

L'enseignement doit donc tenir compte de ces deux types de constructions et permettre à l'élève d'en organiser les rapports. Les problèmes ouverts comme toutes les activités qui favorisent la recherche donnent à l'élève l'occasion de relier des connaissances déjà acquises mais jusque là isolées, et d'enrichir ainsi ses concepts et ses notions.

Comprendre c'est se représenter

Dès qu'on entre en relation avec quelque chose du monde extérieur, on s'en fait une représentation. Celle-ci est très souvent partielle ou inadéquate. Elle dépend de nos dispositions intérieures et de notre niveau mental. Elle évolue donc naturellement avec l'âge mais aussi quand on se trouve confronté à des situations qui nous obligent à la remettre en question, à l'abandonner ou, tout simplement, à la modifier ou à l'élargir.
Par exemple, lorsque l'élève recourt à la soustraction, il se donne des indices qui lui permettent de réussir une catégorie de problèmes: il repère que, dans l'énoncé, le premier nombre est toujours plus grand que le second. Au problème: "dans une province romaine, le nombre des citoyens possédant des terres passe de 31800 à 39400. Combien cela fait-il de nouveaux propriétaires?", un élève de 5P sur deux échoue parce qu'il ne pense pas à utiliser la soustraction. Pour répondre correctement à cette question, il faut la rattacher à la classe de problèmes qui se résolvent par une soustraction. Une des difficultés de cet énoncé tient à ce qu'il ne présente pas d'indices qui imposent d'emblée le type d'opérations à effectuer. Par exemple, le plus grand des deux nombres n'est volontairement pas cité en premier. De plus, l'énoncé ne parle ni de reste ni de différence, termes qui servent souvent d'indices, la soustraction étant liée ici à la notion de complémentaire. Le nombre des propriétaires augmente: ce paradoxe crée un conflit insurmontable pour beaucoup d'élèves, qui optent ainsi pour l'addition des deux nombres.[4]

Le même processus intervient lors de l'apprentissage de la multiplication de nombres à virgule : l'élève est tout étonné de trouver un produit plus petit que le nombre de départ. Il ne tient pas compte du fait qu'il a multiplié par un nombre inférieur à 1, il reste fixé sur sa conception actuelle de la multiplication et affirme que "c'est pas possible, parce que multiplier c'est faire plus grand".

---

3 Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactiques des mathématiques, in: Recherches en didactique des mathématiques, vol. 2,2, 1981.

4 Guignard, N., Leutenegger, F. Collection de questions pour évaluer la 5P, Genève, SRP, 1986.

On attribue souvent le retard scolaire à un rythme différent, plus lent. Ce peut-être le cas, mais le plus souvent, une observation attentive ou un diagnostic intellectuel révèlent qu'un élève en difficulté est un enfant qui n'a pas eu suffisamment l'occasion de faire évoluer ses représentations ou dont celles-ci sont trop pauvres par rapport au savoir considéré. Plutôt que d'attendre qu'il "mûrisse", il convient de l'aider en le faisant verbaliser et en le plaçant devant des activités assez riches pour qu'il puisse se rendre compte de ses contradictions et dépasser les conflits qui en résultent. Il est important que cette prise de conscience se fasse par la médiation de l'activité. Si c'est l'enseignant qui essaie de placer l'enfant devant ses contradictions, celui-ci risque d'admettre le point de vue de l'adulte sans pour autant renoncer au sien (qui finit toujours par ressortir). Pire, l'enfant en déduit qu'il n'est pas capable de penser juste, qu'il ne le sera jamais. Et les enfants persuadés d'être "nuls" deviennent quasiment hermétiques aux apprentissages, car toute tentative pour progresser est vécue comme risque d'échec, donc dangereuse.

Apprendre c'est créer de nouveaux réseaux de connaissances

La connaissance ne résulte pas d'un simple cumul de notions qui s'additionnent les unes aux autres. Lorsqu'on apprend quelque chose, cette nouvelle connaissance est connectée au réseau de connaissances existantes et vient modifier ce réseau. Plus l'enfant grandit, plus **ces réseaux s'amplifient et se coordonnent les uns aux autres pour former un véritable système qui peut fonctionner globalement. Cette construction n'est pas linéaire: elle subit des transformations profondes, des ruptures et des réorganisations.** A certains moments du développement, le déséquilibre qui précède et qui accompagne une réorganisation des structures intellectuelles peut provoquer des comportements qui passent, aux yeux de l'adulte, pour une régression.

Chaque enfant s'approprie la réalité en la transformant selon des lois propres à son âge mental et à sa personnalité.

C'est pourquoi les situations larges, qui mettent en jeu des connaissances de niveaux d'élaboration différents, de natures et de domaines divers, sont plus aptes à répondre aux exigences de l'apprentissage que les exercices trop ciblés. Ceux-ci, en revanche, peuvent être utiles pour affiner et "mécaniser" un savoir-faire.

Au fur et à mesure qu'ils se développent, les outils intellectuels se coordonnent, se différencient et deviennent plus "mobiles". Progressivement, l'enfant parvient à tenir compte de plusieurs dimensions de la réalité, à les articuler et à les intégrer.
Pour être acquise et à disposition, une notion doit être connectée et articulée aux autres. Toute connaissance nouvelle accroît la complexité du réseau ainsi que le nombre d'interactions et de coordinations entre les notions déjà construites. La construction du nombre consiste à découvrir certaines de ses propriétés, à en comprendre le système d'écriture. L'apprentissage de l'addition puis celui de la multiplication viennent enrichir la notion de nombre. De même, la progression dans la connaissance des ensembles numériques autres que celui des entiers va remettre en question et élargir les notions d'addition et de multiplication.

Apprendre c'est coopérer et communiquer

La coopération entre élèves est essentielle en mathématique, car c'est le besoin de communiquer qui contraint à trouver et à utiliser des formes de représentations compréhensibles et décodables par autrui, à accepter le langage conventionnel. Actuellement, un grand nombre de recherches issues de la psychologie sociale mettent en évidence le rôle, dans les apprentissages, des interactions entre élèves et des conflits socio-cognitifs : face à un problème, la confrontation entre élèves de niveaux intellectuels un peu différents est très bénéfique pour l'apprentissage.

Prévoir des groupes qui répondent aux conditions de la recherche est très difficile, mais les activités de jeu à plusieurs et les moments de mise en commun après une situation de recherche personnelle ou en groupe peuvent favoriser une telle confrontation.

Communiquer c'est être capable d'exprimer quelque chose d'assez compréhensible pour que l'autre puisse participer à ce qu'on est en train de construire. C'est aussi pouvoir décoder ce que l'autre a dit ou a représenté. Lorsqu'un élève écrit ou représente quelque chose, il s'attend à ce que l'enseignant saisisse ce qu'il a voulu exprimer. En revanche, écrire pour être décodé par ses pairs exige une plus grande précision, car les autres enfants veulent pouvoir comprendre rapidement.

Ce double aspect de la communication ne va pas de soi, il doit être l'enjeu de situations scolaires. On insiste beaucoup, à juste titre, sur l'expression des élèves. Mais on oublie encore trop souvent l'activité de décodage ou alors, on travaille ces deux aspects à des moments différents en omettant de les coordonner. Seules des activités qui rendent obligatoire la communication sont susceptibles de promouvoir le code social et conventionnel propre aux mathématiques notamment.

Communiquer et coopérer c'est aussi prendre conscience que les autres ont des points de vue différents, pas seulement en ce qui concerne les idées, mais aussi sur un plan perceptif : un objet n'est pas vu sous le même angle suivant la position qu'il occupe par rapport aux spectateurs. Cette prise de conscience joue un rôle dans la relativisation des jugements et des représentations mentales.

Apprendre et ... enseigner

Il y a souvent contradiction entre les conceptions de l'apprentissage et la manière dont on enseigne.
On peut admettre la théorie constructiviste et interactionniste de l'apprentissage et pourtant avoir des difficultés à

- faire confiance à l'élève et à la tâche choisie (même par soi!) et ne pas intervenir pour "l'aider à réussir";
- renoncer à donner la réponse attendue si elle n'est pas apparue; patienter;
- ne pas affirmer "c'est juste" ou "c'est faux";
- ne pas utiliser LA bonne réponse du bon élève en pensant qu'il représente la majorité;
- ne pas se sentir investi de la mission de "nouer la gerbe" systématiquement;
- ne pas éviter l'erreur, mais lui donner du sens;
- renoncer à aborder son programme notion après notion, comme une suite linéaire mais l'utiliser pour constater "après-coup" ce qui a été couvert par une activité;
- de penser autrement qu'en terme de "lacune à combler" ou de "rythme à respecter" lorsqu'il s'agit de venir en aide à l'élève en difficulté;
- "habiller" une notion.

L'attitude de l'adulte qui consiste à aplanir la difficulté jusqu'à éviter le problème empêche l'enfant de construire sa connaissance. Cette attitude est très fréquente et compréhensible car elle repose sur l'idée que l'enseignant a accompli son devoir lorsque l'enfant a produit la bonne réponse - qui est la réponse attendue.

Il est très difficile de renoncer à ces habitudes éducatives pour en acquérir de plus adaptées.

Pourquoi?

Parce que nous restons tributaires des modèles hérités de notre propre éducation et de notre culture. Les nouvelles conceptions peuvent nous plaire, nous convaincre même, mais pour devenir efficientes, elles doivent entrer en conflit avec nos a priori, qui doivent faire l'objet d'une remise en question. Ces prises de conscience devraient trouver leur place dans la formation initiale comme dans la formation continue, tant il est vrai que s'approprier un nouveau savoir et surtout une nouvelle pratique est une démarche longue et toujours à renouveler.

Eléments de la didactique des mathématiques

La didactique des mathématiques étudie les conditions nécessaires aux apprentissages scolaires et la façon d'agir pour les améliorer. Elle s'intéresse aussi bien aux mécanismes de transmission qu'aux processus d'acquisition des contenus.

Actuellement, la didactique montre que les meilleures conditions d'apprentissage mathématique sont réunies dans l'enseignement par situations. Celles-ci se différencient, dans la littérature, en situations-problèmes, problèmes ou problèmes ouverts. Nous regroupons ces différents termes par celui de résolution de problème, qui englobe tous les genres.

La didactique offre aux auteurs de manuels (et à tout enseignant) des outils pour créer des problèmes et surtout pour en contrôler au maximum les effets : cadres de références, analyse a priori et a posteriori des données et des résultats, étude des variables, mise au point des consignes et des relances, conditions de reproductibilité d'une situation, etc....

Le savoir mathématique tel qu'il s'est constitué progressivement dans l'histoire, et tel qu'il continue à progresser, n'est pas directement enseignable à l'école primaire. Il a besoin d'être transformé pour être transposé dans l'enseignement. Ce savoir subit un découpage, et certains éléments seulement sont constitués en objets d'enseignement.[5]
Le contenu scolaire est soumis à variation, indépendamment, ou presque, des mathématiques elles-mêmes.
Mais apprendre les mathématiques, ce n'est pas seulement apprendre quelques algorithmes et les tables de multiplication ou "connaître" les quatre opérations. C'est aussi favoriser une bonne structuration mentale.
Les mathématiques sont présentes dans toutes les branches scientifiques (et parfois dans les artistiques) et constituent, par conséquent bien autre chose qu'un peu de calcul. A ce propos, les objectifs généraux des plans d'étude mentionnent explicitement que l'enseignement mathématique doit "participer au développement de diverses capacités intellectuelles; développer la curiosité, l'envie de comprendre et de penser par soi-même", etc.

Mathématiser c'est traduire un problème dans un langage susceptible d'offrir des règles pour trouver une solution, c'est créer des modèles qui représentent la réalité afin de mieux la comprendre et de pouvoir agir sur elle. Il faut agir, représenter, formuler, communiquer, prouver, démontrer...

---

[5] En didactique, ce processus est nommé "transposition didactique".

LA RESOLUTION DE PROBLEME

Si résoudre des problèmes est une activité typiquement mathématique, cela a un sens bien différent que celui auquel sont rattachés la plupart de nos souvenirs scolaires. Il ne s'agit pas de repérer quelques indices dans un énoncé qui ressemble à beaucoup d'autres énoncés, et de trouver la solution grâce à la bonne opération, celle qui correspond aux indices.

Il y a problème chaque fois que le répertoire des réponses immédiatement disponibles ne permet pas de fournir une réponse appropriée.

L'élève doit mettre en oeuvre ce qu'il sait, l'investir, se faire une idée de la situation et lui conférer du sens. Mais un obstacle se présente, un saut l'oblige à trouver autre chose. Il se rend compte par lui-même que ses connaissances sont insuffisantes, qu'il doit les adapter, les modifier ou les enrichir. Il cherche alors d'autres procédures, plus efficientes.

A propos de problème, Jean Brun explique: "Dans une perspective psychologique un problème est généralement défini comme une situation initiale avec un but à atteindre, demandant à un sujet d'élaborer une suite d'actions ou d'opérations pour atteindre ce but. Il n'y a de problème que dans un rapport sujet / situation, où la solution n'est pas disponible d'emblée, mais possible à construire. C'est dire aussi que le problème pour un sujet donné peut ne pas être un problème pour un autre sujet en fonction de leur niveau de développement intellectuel par exemple."[6]
En résolution de problèmes, ce n'est pas l'enseignant qui suggère ou introduit, une nouvelle connaissance, c'est l'élève qui la produit parce que la tâche l'exige.

Dans la résolution de problèmes l'élève a de grandes responsabilité : c'est lui qui choisit sa démarche, fait fonctionner les connaissances dont il dispose et qu'il juge appropriées, les modifie en fonction des exigences de la situation.[7]

Beaucoup d'enfants ne savent pas utiliser leurs connaissances scolaires en dehors de l'école et ne font pas de liens entre les différents domaines de la vie quotidienne. Or, c'est parce qu'ils trouvent eux-mêmes, en résolution de problèmes, une démarche qui les mène à une solution qu'ils seront capables de la retrouver dans un autre problème. Les connaissances ne peuvent être considérées comme véritablement acquises que si elles peuvent être mises en oeuvre dans une situation différente.

Bien que la tâche soit sous la responsabilité des élèves, le maître n'est pas passif. Il observe leurs démarches, vérifient comment les savoirs déjà étudiés sont mobilisés et utilisés, quelles erreurs apparaissent, comment elles sont ou non dépassées. Cette approche est très instructive et donne souvent l'occasion de modifier ses jugements à l'égard de certains enfants, acquis à partir d'activités plus contrôlées ou à partir d'évaluation écrite.

Gestion d'une situation-problème

Avant de placer les élèves face à un problème, il est important que l'enseignant se mette lui-même en situation de le résoudre. Cela lui permet d'anticiper les différentes pistes

6 Brun, J. La résolution de problèmes arithmétiques: bilan et perspectives, Math-Ecole n° 141, 1990.

7 Dans la théorie, on dit qu'on est en phase "a-didactique", l'enseignant s'abstient d'intervenir, il "dévolue" la responsabilité de la tâche à l'élève seul. L'évolution en cours d'activité et à charge de l'élève est possible grâce à la logique interne de la situation.

que suivront les enfants et de penser aux relances adéquates. Il imagine aussi quelques démarches. Ainsi, l'observation en situation réelle lui permettra de confirmer ce qu'il connaît d'un élève, ou, au contraire, aura l'occasion d'affiner ou de modifier son jugement.

En classe, l'enseignant définit le contrat avec ses élèves, il essaie d'être le plus explicite possible. Les élèves doivent savoir ce que le maître attend d'eux : par exemple, que la réponse n'est pas immédiate, qu'ils devront chercher, qu'ils peuvent recourir à du matériel, qu'ils doivent se poser des questions et formuler des hypothèses, qu'ils ont un rapport à faire pour reprendre le travail ultérieurement, qu'ils ont quelque chose à écrire ou à représenter, qu'ils devront discuter de leur travail avec d'autres, etc. ...
Les élèves doivent savoir que la solution du problème est à leur charge, personnelle ou de groupe.

L'enseignant donne la consigne sous forme écrite pour que chacun puisse y revenir chaque fois qu'il en ressent le besoin. Si les enfants éprouvent des difficultés de lecture, le maître la lit aussi souvent qu'il le faut. Il veille à garder intact l'esprit de la consigne : des modifications de l'énoncé entraînent des modifications dans les démarches.

Les élèves restent aux prises avec la situation. Ils prennent du temps pour comprendre la consigne, donner du sens à la situation, se poser des questions, noter des données, etc. Chaque enfant suit sa propre démarche.

L'enseignant met à profit cette phase d'appropriation pour observer les démarches, les confronter à ses prévisions, préparer les relances.

Après un moment assez long pour permettre à chacun d'entrer dans le problème et d'avoir trouvé des pistes, l'enseignant "relance" la situation, si nécessaire, en fonction de la démarche ou de la production des enfants. Suivant le niveau de chacun, il fait jouer les variables.

La phase de recherche se poursuit, les solutions s'élaborent. C'est le plus souvent le moment de trouver d'autres démarches, d'inventer, de découvrir,...

Une solution est trouvée. Une trace écrite est demandée. Dans certains cas, même si la solution est commune, il est recommandé, que chaque élève produise une réponse écrite, personnelle. Le niveau de formalisation peut être très différent d'un élève à l'autre, l'important est que chacun progresse. Chaque réponse est explicitée, justifiée.

L'enseignant reprend tout ce qui s'est passé, prend acte des réponses, établit un inventaire des démarches, relie les nouvelles connaissances au savoir constitué, établit ou fait établir des comparaisons, fait le lien avec le savoir mathématique.

Cette gestion n'est pas encore très pratiquée; elle est difficile au début mais s'apprend peu à peu.
A côté des situations-problèmes, l'enseignement comporte beaucoup d'autres types d'activités, notamment des jeux, où le maître intervient de façon plus directive.

Les consignes

La consigne détermine le problème, son niveau et toute l'approche du travail nécessaire à sa résolution. Elle est donc d'une extrême importance. Le respect de son intégralité aussi, car une seule modification dans son énoncé peut produire une modification dans la démarche de l'élève.

L'enseignant peut répéter la consigne plusieurs fois (les élèves qui savent lire l'ont sous les yeux et peuvent y revenir autant qu'ils veulent). L'important est de la répéter telle qu'elle est, en entier, sans rien changer. Si un mot fait difficulté, on peut faire s'exprimer les élèves à son sujet ou les aider. Mais les explications ne doivent en aucun cas porter sur le sens de la consigne elle-même : ce serait le plus sûr moyen d'enlever ce qui fait l'essence du problème. Expliciter une consigne, c'est empêcher l'élève de lui donner lui-même du sens et d'inventer sa propre démarche. Le piège est connu: c'est en voulant s'assurer que tous ont compris la consigne que l'on transforme le problème en exercice-à-trouver-la-bonne-réponse-attendue.

La consigne est déterminante pour fixer le niveau d'un problème. Par exemple, dans une situation soustractive, il suffit d'éviter le recours aux mots déclencheurs tels que "différence" ou "reste" et de renoncer à mettre le plus grand nombre de l'énoncé en premier pour que la difficulté du problème augmente sensiblement. Si, pour une raison quelconque, le maître en vient à expliciter la consigne, il risque fort de fournir un indice décisif. Dans ce cas, c'est lui qui fait le problème à la place de l'élève.

Si les élèves ont de la peine à se mettre dans l'activité, c'est qu'ils doivent s'en faire une représentation qui, suivant leur niveau, va demander un temps d'adaptation plus ou moins long.

Si la tâche semble être vraiment hors de leur portée, elle est remise à plus tard, mais n'est pas facilitée par une consigne qui serait plus "abordable" aux yeux de l'enseignant mais qui suggérerait une amorce de stratégie.

L'observation des élèves, face à une consigne, révèle que, dans la majorité des cas, la demande d'explicitation n'a rien à voir avec le problème à résoudre. Elle sert de rite pour apaiser l'angoisse. C'est par l'habitude de résoudre des problèmes, la découverte du plaisir à découvrir soi-même quelque chose que l'élève acquerra plus d'autonomie vis-à-vis de la tâche.

Les relances

Les relances permettent de sortir l'élève d'une impasse, le poussent à aller plus avant dans la solution. Elles ne consistent pas à suggérer une démarche rentable ou à pousser à la réussite mais favorisent:

- une meilleure prise en compte de la consigne (il arrive fréquemment qu'une partie de la consigne à été oubliée);
- le passage à une écriture formalisée, un codage, une représentation graphique;...(certains élèves écrivent tout en langage naturel et ne parviennent pas à en dégager les données essentielles);
- la mise en ordre des données (par un tableau par exemple);
- la généralisation (trouver une règle, une loi qui permet de trouver la réponse du premier coup sans avoir besoin de chercher tous les cas intermédiaires);
- la progression grâce à des nouvelles valeurs (des variables sont prévues à cet effet);
- etc. ...

La validation

Nous évoquons par le terme "validation" la dernière phase d'une activité, lorsque l'élève décide qu'elle est terminée. A ce moment, il convient de se prononcer sur le statut de l'activité : qu'a-t-on découvert? que dire de la réponse? est-elle suffisamment élaborée? peut-on considérer la tâche comme réussie?

Si c'est toujours le maître qui décide de la réussite de la tâche, si c'est le maître qui valide toute production en disant "c'est juste" ou "c'est faux", alors il n'y a aucune raison pour que l'élève assume l'évolution de ses connaissances. Dans ce cas, le savoir ne peut être considéré que comme un édifice achevé, parfait, auquel on ne peut plus toucher. Le savoir est détourné de son origine et de son but. Cette attitude empêche les élèves de se faire une idée correcte de la science, de fausser le rapport qu'ils pourront entretenir avec elle. Elle a une incidence sur l'évolution positive ou négative des apprentissages mathématiques.

Une étude des élèves en difficulté mathématique établit que la plupart d'entre eux sortent de l'échec au moment où ils deviennent capables d'assumer leur réponse, au lieu d'attendre le verdict du maître.

Le maître travaille avec toute la classe ou en groupe. Suivant la production de ses élèves, il peut préférer intervenir de façon plus personnifiée.

LE JEU

"Laissez les leçons prendre la forme du jeu." (Platon)

Le jeu est l'attitude la plus spontanée de l'enfant. Sa fonction médiatrice et régulatrice lui donne l'occasion d'aborder la réalité et de s'y confronter, tout en la déformant au gré de ses besoins, de ses angoisses et de ses désirs. C'est par le jeu que l'enfant tente de résoudre les problèmes que lui posent son environnement et les situations de la vie courante qui l'intriguent ou qui le choquent. On peut dire que le jeu est en quelque sorte la première forme de schématisation d'une réalité qui apparaît bien trop complexe : l'enfant en sélectionne et en reproduit certains éléments qu'il manipule à sa convenance.

Le jeu, par sa grande variété, reproduit de multiples aspects de la réalité et sa pratique développe des attitudes qui sont fort utiles à l'exercice des mathématiques. Par exemple, participer, agir, prévoir, s'organiser, respecter les règles, inventer des stratégies plus performantes. Et aussi communiquer, coopérer, s'opposer, décider, accepter le point de vue d'autrui et en tenir compte, attendre son tour.
Certains jeux requièrent de véritables compétences mathématiques. Ils sont aussi bien recommandés pour l'invention et la créativité que pour la fonction d'exercice qu'ils entraînent.

Depuis la plus haute Antiquité, tous ceux qui ont réfléchi sur la manière dont on apprend ont reconnu et préconisé le jeu. Actuellement, tous les théoriciens du développement de l'intelligence comme de l'affectivité sont d'accord pour affirmer que le jeu est le mode préférentiel d'adaptation à la réalité. Le jeu, sous toutes ses formes, est le médiateur entre la personne de l'enfant - et souvent de l'adulte - et l'extérieur, pour s'approprier la culture.
En grec, "schola" (origine du mot école) signifia d'abord "loisir" puis "loisir consacré à l'étude".

Roger Caillois, le spécialiste du rôle et de la fonction du jeu, affirme que :

"les capacités que le jeu exerce sont les mêmes qui servent pour l'étude et pour les activités sérieuses de l'adulte. Si ces capacités sont endormies ou défaillantes, l'enfant à la fois ne sait pas étudier et ne sait pas jouer. [8]

---

8 Les jeux et les hommes, France, Gallimard, 1977

Les diverses classifications des jeux mentionnent la catégorie "jeu de règles" comme regroupant la plupart des jeux pratiqués par l'école en mathématiques.

La pratique des jeux devrait occuper une place prépondérante d'autant plus que les élèves sont petits. Il serait souhaitable que le jeu perde le statut qu'il a encore bien trop souvent, de palliatif ou d'occupation accessoire pour ceux qui travaillent vite. Dans ces conditions, le jeu ne peut être considéré avec le sérieux qui lui revient.
La pratique du jeu comporte tout un ensemble d'objectifs dont les principaux sont :

- mettre en oeuvre des connaissances qui ne seraient pas forcément activées lors d'autres types d'activités;
- favoriser les échanges entre élèves;
- permettre les relations entre domaines mathématiques différents;
- exercer le raisonnement spontané;
- découvrir ce qu'est une règle et la respecter;
- comprendre qu'une modification à une règle provoque des changements;
- initier aux situations-problèmes parce que le jeu comporte des contraintes similaires telles que le respect des consignes, la prise de décision, le choix d'une stratégie, le changement d'une tactique au profit d'une autre plus économique ou plus rentable, etc....;
- apprendre à se décentrer et accueillir le point de vue d'autrui;
- exercer la mémoire efficacement tout en ayant du plaisir;
- favoriser l'autonomie;
- recourir à l'écrit, pour mieux dominer la situation.

L'important est l'enjeu: tous les élèves peuvent en saisir le but. Ils acceptent de respecter les règles, de se soumettre à leurs exigences et à leurs contraintes. Ils améliorent leurs stratégies pour réussir avec le moins de coups possible, à arriver le premier au bout, à sortir toutes ses cartes, etc. Le jeu constitue une activité dont l'organisation interne, l'enjeu justement, conduit à spécifier et à ajuster ses procédures en fonction du but, sans le concours d'un jugement d'adulte.

L'enfant établit une différence entre s'amuser et jouer. Quand il joue, il est sérieux et attend de l'adulte qu'il partage cette conception.

Annexe 2

UTILISER LA CALCULATRICE A L'ECOLE PRIMAIRE ?

Actuellement, dans nos écoles primaires, la calculatrice n'est guère utilisée. En effet, de nombreux enseignants semblent avoir des doutes sérieux quant à l'utilité d'introduire cet outil dans le cours de mathématiques.

Des arguments possibles - et, il est vrai, tout à fait compréhensibles - en défaveur de la calculatrice à l'école primaire pourraient être :

"En se servant de la calculatrice, les élèves ne sauront plus calculer !" ou alors :

"Ce n'est pas comme cela que nous avons appris !".

Or, différentes études réalisées aux États-Unis démontrent une amélioration en ce qui concerne leur attitude face aux mathématiques pour des élèves s'étant servi de la calculatrice à l'école. En outre, aucune de ces études n'a su documenter le moindre effet négatif résultant de l'emploi de la calculatrice sur les compétences mathématiques de base.

Les arguments plaidant en faveur des machines à calculer dans l'enseignement primaire sont nombreux et à mon avis au moins de trois types : les premiers concernent la place qu'occupe la calculatrice dans notre vie quotidienne, les seconds ont trait aux avantages directs de l'utilisation en classe, notamment le champ élargi de calculs possibles et les derniers enfin à l'évolution de la personnalité de l'élève et plus particulièrement à son attitude face aux mathématiques.

Développons un à un ces arguments :

1. Un calcul qui ne peut être réalisé mentalement est effectué à la machine. Ainsi, la calculatrice fait partie intégrante de notre vie quotidienne/professionnelle. Si tel est le cas, l'école ne pourra plus longtemps l'ignorer. S'il est vrai que nous n'apprenons pas pour l'école, mais pour la vie, ceci n'implique-t-il pas aussi que le champ d'intersection qui représente les points communs entre l'école et le "non-école", doit être élargi ? Autrement dit, à qui incombe la charge d'apprendre à un enfant à manier correctement et intelligemment un calculatrice si ce n'est à l'école ?

2. Ces premières réflexions trouveront probablement l'accord unanime des enseignants. En est-il de même pour les arguments "mathématiques" plus directs ? Citons schématiquement ceux qui pourraient bien être les plus importants :

   Le recours à la calculatrice permet à l'élève :

   - de faire le contrôle des calculs auparavant effectués mentalement ou par écrit, mais aussi
   - de développer et d'appliquer des procédures de contrôle et d'estimation des résultats affichés ou à obtenir,
   - de réaliser des calculs qu'autrement il ne pourrait pas mener à terme, faute de maîtrise (suffisante) des algorithmes impliqués,
   - d'aiguiser le sens de l'observation et de promouvoir l'esprit de recherche,
   - de se faire défier, de résoudre des énigmes,
   - de rencontrer de façon "naturelle" des concepts mathématiques non encore appris en classe (comme par exemple les nombres décimaux : 10 : 4 = 2,5 ou comme les nombres entiers négatifs : 5 - 7 = -2) et de susciter la "curiosité mathématique",
   - d'aborder des problèmes de la vie courante présentant un plus grand réalisme (par ex. : sans contrainte de limiter les données numériques à des tailles artificiellement petites),
   - de résoudre des problèmes qu'on ne saurait pas (encore) calculer par d'autres moyens,
   - de développer et de renforcer des concepts et des relations en mathématiques.

Quelques exemples illustrant les possibilités d'emploi de la calculatrice dans le cours de mathématiques (certains constituent des activités de recherche) :

- Vérifier des calculs auparavant effectués mentalement ou par écrit.
- La vérification d'une soustraction (resp. d'une division) peut se faire au moyen d'une addition (multiplication).
- Comment changer le nombre 463 affiché par la calculatrice en 403, en 4630 ou en 46,3, par une seule opération arithmétique ?
- Quelle est la taille moyenne des élèves de ta classe ?
- Comment afficher le nombre 99, en un minimum de touches, sans utiliser de touches-nombres autres que la touche "1" ?
- Dans quel ordre la machine fait-elle les opérations ? (par exemple : quel résultat donne le calcul : 1 + 2 x 3 avec ta calculatrice : 9 ou 7 ? D'où provient la différence ? La machine fait-elle des "fautes de calcul" ?).
- Quand la machine affiche-t-elle le message "Erreur" ? Pourquoi ?
- "Le plus grand produit" : voir l'exercice proposé dans l'article sur les activités de recherche du présent dossier.
- Quel est le plus grand (petit) nombre (entier/décimal) que la machine sait afficher ?
- Comment obtenir un nombre donné sans avoir le droit d'utiliser certaines touches ?
- Comment obtenir un résultat en un minimum de touches ?
- Par une seule soustraction, fais disparaître le chiffre "7" dans le nombre 7324. Comment alors le faire réapparaître ?
- Un élève propose un calcul pour lequel ses condisciples essaient d'estimer le résultat.
- Etc..

3. Mais outre ces avantages "mathématiques", l'utilisation de la calculatrice peut avoir des conséquences positives sur l'élève en tant que personnalité en évolution.

   Motiver, dès ses premiers apprentissages, l'enfant pour un problème précis, c'est peut-être contribuer à promouvoir une attitude positive en face du travail mathématique voire scolaire en général.

   La calculatrice donne à l'élève un feed-back immédiat, ce qui lui permet de vérifier son travail lorsqu'il le juge nécessaire. Ceci peut être important pour des enfants n'ayant pas encore suffisamment confiance en leur propre capacité de résoudre les problèmes qui leur sont proposés.

   La réponse que donne la calculatrice est toujours une réponse "neutre" dans ce sens qu'elle n'est associée à aucune remarque critique quant à la nature d'une erreur éventuellement commise par l'élève.

   En tant qu'instrument de vérification, la machine augmente l'autonomie de l'élève (auto-évaluation des compétences personnelles).

Toutefois, comme dans le passé, **il est absolument nécessaire d'enseigner aux enfants les techniques opératoires usuelles** ! Il faut savoir réaliser seul ce que la machine peut réaliser pour nous. Ainsi, par exemple, la maîtrise parfaite de la table de multiplications reste d'une importance incontestée, le calcul mental est plus que jamais d'actualité : il permet notamment de vérifier la vraisemblance de résultats obtenus à l'aide d'une calculatrice.

Ce n'est que par une pratique régulière du calcul mental que les nombres et les opérations peuvent être connus de façon intime et profonde. "Battre la machine" par une organisation efficace des opérations, voilà aussi un défi pour l'élève (par exemple en ayant à calculer : 3 + 49 x 20).

Il convient aussi de ne pas faire de l'utilisation d'une calculatrice un objet d'étude ou un objectif en soi. L'utilité de l'outil est fonction des situations mathématiques rencontrées, ce n'est pas l'inverse !

Faire preuve d'ambitions exagérées ou ne pas respecter les limites cognitives des enfants aux différents degrés de l'enseignement primaire, signifierait vouloir conférer à la calculatrice une importance qu'elle n'a pas !

Or, une définition précise des limites dans lesquelles l'utilisation de la machine est à recommander, n'est certainement pas chose facile. Quand faut-il faire un calcul de manière "traditionnelle", quand est-il préférable d'avoir recours à la calculatrice ?

Une chose est certaine : opter pour la calculatrice à l'école primaire, c'est assumer la responsabilité d'un choix pédagogique qui, de toute évidence, aux compétences normalement attendues des élèves, devra obligatoirement en ajouter - et non produire un effet inverse !

Fernand KOLB

Références bibliographiques :

1. R. CHARNAY : "Une calculatrice pour tous dès l'école primaire ... ou quelles compétences en calcul aujourd'hui ?" dans "Grand N". 53 pp. 59 - 61, 1993 - 1994.
2. W. H. COCKCROFT : Mathematics counts : Report of the Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools pp. 102 - 120, London, 1982.
3. The Scottish Office Education Department : Curriculum and Assessment in Scotland : National Guidelines. Mathematics 5 - 14 pp. 84 - 86, Edinburgh, 1991.
4. Commission Romande des moyens d'enseignement : Mathématique Livre du maître pp. XLIII-XLIV Neuchâtel, 1994.

Annexe 3

DES ACTIVITES DE RECHERCHE ou... l'atelier de mathématiques

Il est acquis aujourd'hui qu'un programme d'enseignement de mathématiques ne peut se limiter à une liste de connaissances et de techniques. Il conduirait à la formation d'élèves stéréotypés, agissant comme des automates, incapables de réfléchir.

Le programme de mathématiques doit aussi viser le développement de compétences plus générales comme résoudre un problème, collecter des informations, élaborer un raisonnement, communiquer un résultat, justifier une démarche, émettre des hypothèses, ...

Il est donc nécessaire de donner à l'élève l'occasion d'exercer ces compétences à travers des activités de recherche (AR).

Par quoi se caractérise une AR ?

En d'autres mots : quelles sont les conditions requises pour pouvoir parler d'une AR ?

- **L'élève est devant un problème nouveau pour lui**

  Le mot "nouveau" est utilisé dans le sens où il ne s'agit pas de faire appel à une stratégie ou à un mécanisme entraînés auparavant. L'AR ne s'inscrit donc pas dans un cadre d'application ou de répétition mais bien dans le cadre d'une démarche "originale" à mettre en oeuvre.

- **L'élève doit mobiliser des connaissances acquises antérieurement**

  Cette condition n'est pas en contradiction avec la précédente en ce sens que l'AR vise à développer des compétences dépassant l'acquisition de connaissances. Par exemple, pour l'activité "Le plus grand produit", les connaissances requises ne dépassent pas le stade de l'addition et de la multiplication des entiers inférieurs à 20; de même, pour l'activité "Avec 3", les quatre opérations fondamentales et l'usage des parenthèses (voir 4.2, p.56, dans "Mathematik 5") permettent de s'investir dans la recherche.

<u>*"Le plus grand produit"*</u>

1. *Choisis des nombres naturels dont la somme est 20, autant que tu veux. Vérifie que tu ne t'es pas trompé(e): tu dois obtenir 20 lorsque tu additionnes les nombres choisis.*
2. *Calcule le produit de ces nombres.*

Exemple :	*nombres choisis*	*vérification*	*produit*
	2,1 et 17	*2+1+17=20*	*2 1 17=34*

3. *Choisis d'autres nombres dont la somme est toujours 20, mais dont le produit est plus grand que le précédent.*
4. *Continue de la sorte et essaie de trouver le plus grand produit de facteurs dont la somme est 20.*

<u>*"Avec 3"*</u>

Avec quatre nombres "3" et des additions, soustractions, multiplications ou divisions, quels nombres naturels arriveras-tu à former ?

Exemple : (3 + 3) + (3 : 3) = 7

Quel est le plus grand nombre naturel qu'on peut ainsi obtenir ?

Peux-tu obtenir toute la suite des naturels jusqu'à 10 ?

- **L'AR est adaptée au niveau des élèves**

Trop difficile, elle engendre la démotivation; trop simple, elle ne permet pas une véritable "mise en recherche" de l'élève. Seule la connaissance des aspirations profondes de ses élèves permet à l'enseignant de choisir une AR adéquate même si parfois l'expérimentation peut apporter un démenti spectaculaire à une intuition initiale.

Ainsi, l'AR "Combien de droites ?", ressentie dans un premier temps comme difficile, fut traitée avec succès dans quelques classes de 5e année d'études au Grand-Duché, en février 1995.

"Combien de droites ?"

(voir ex. 8 p. 34 dans "Mathematik 5")

Tu sais que par 2 points passe une droite et que par 3 points non alignés passent 3 droites. Et par 4 points (toujours non alignés comme par exemple les sommets d'un carré) ? Et par 5 points (comme par exemple les sommets d'un pentagone) ?

Essaie de compléter le tableau suivant:

nbre de points	2	3	4	5	6	7
nbre de droites	1	3				

Si je te dis que, par 17 points (toujours non alignés 3 à 3), on peut faire passer 136 droites, combien peut-on en faire passer par 18 points ?

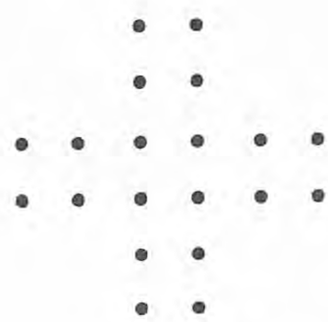
- **L'AR constitue une "véritable activité de l'élève"**

Il est fondamental que la recherche soit menée de bout en bout par l'élève ou le groupe d'élèves. C'est ainsi que les tâches, depuis la prise de connaissance des consignes jusqu'à la communication (écrite ou orale) des résultats, sont prises en charge par l'élève. Cette indépendance doit conduire celui-ci à "oser" ses propres démarches et donc à ne pas adopter un comportement qui le pousse à décoder et à satisfaire la démarche attendue par l'enseignant. Si ce dernier peut parfaitement diriger le processus, décider de l'organisation de la classe (travail par groupes ou individuel), il est nécessaire qu'il adapte son intervention et qu'il dose sa participation pour que l'élève voie émerger son propre problème grâce aux questions qu'il se pose et aux recherches qu'il mène.

Si par exemple, dans l'activité "Les carrés", un élève ne trouve pas tous les carrés possibles parce qu'il ne les a pas cherchés dans un ordre systématique ou parce qu'il n'a perçu que les carrés évidents, l'enseignant peut adopter deux attitudes fondamentalement différentes : imposer une méthode pour dresser l'inventaire complet ou proposer à l'élève de partir de son inventaire incomplet pour y remettre un peu d'ordre. Si dans le premier cas, la procédure conduit plus rapidement à la solution, il s'agit de la solution de l'adulte alors que dans le second, la solution sera peut-être moins élégante mais combien plus personnelle !

"Les carrés"

Combien peut-on tracer de carrés dont les quatre sommets sont quatre points de cette figure ?



Pour information, voici l'analyse des résultats de 137 élèves (âgés de 11 à 18 ans) :

réponse :	*nombre de réponses (en %) :*
5	*8*
9	*31*
13	*9*
17	*10*
21 (la bonne réponse !)	*12*
autres	*30*

Mener des AR avec les élèves demande du temps. Il est indéniable que c'est en réduisant le temps consacré aux exercices répétitifs que l'on trouvera des moments dévolus à la recherche. L'enseignant doit prendre des décisions en fonction de ce qui lui paraît le plus important pour la formation mathématique des enfants qui lui sont confiés.

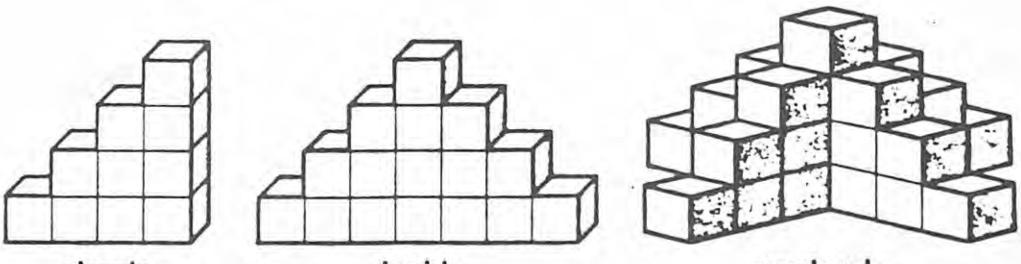
Pourquoi organiser des activités de recherche ?

- La première raison, déjà développée par ailleurs, est que l'AR permet à l'élève d'exercer les facultés intellectuelles liées aux apprentissages supérieurs, comme la faculté d'analyse, de synthèse, de déduction mais également la créativité, l'intuition et l'invention. Ces **qualités essentielles** qui se greffent sur les savoirs, influencent, voire **conditionnent la réussite scolaire** ultérieure des enfants (Cf. les travaux sur "Les déterminants de la réussite scolaire" de J-M De Ketele, Univ. de Louvain). Ainsi, en forme de boutade, pourrait-on s'interroger "Apprend-on à l'école ce qui fait que l'on réussit à l'école ?".

- Les récents travaux de chercheurs en mathématiques et en pédagogie ont conduit notamment à considérer que l'élève ne peut réellement disposer d'outils mathématiques que si ceux-ci font l'objet d'une véritable **structuration** et ne sont **pas seulement juxtaposés**. Cette structuration ne peut être obtenue ni par l'étude des explications du maître, ni par l'imitation, ni par l'apprentissage "par coeur" mais exige que l'élève soit confronté à des situations sur lesquelles il puisse agir, réaliser des prises de conscience, les expliciter, les comparer aux résultats déjà acquis. Pour traiter efficacement l'activité "Des escaliers", l'élève doit la mettre en parallèle avec "Combien de droites".

"Des escaliers"

Voici 3 types d'escaliers :



simple **double** **quadruple**

Combien de cubes devrais-tu prévoir pour construire :

a) un simple escalier de 20 marches ?

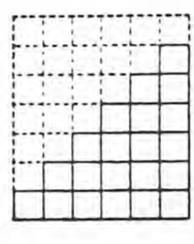
b) un double escalier dont la 15ᵉ marche serait la plus haute ?

c) un quadruple escalier dont la 8ᵉ marche serait la plus haute ?

L'organisation de la recherche dans ces problèmes de dénombrement est l'objectif fondamental. En complément, on fournit à l'élève une occasion de plus de se familiariser avec les nombres naturels et les opérations, de découvrir des lois intéressantes qui apparaissent dans les suites de nombres.

a)

Nombre de marches	1	2	3	4	5	6	...
Nombre de cubes	1	3	6	10	15	21	...

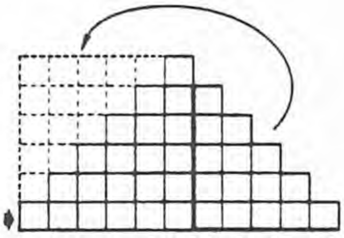


Nombres dits «triangulaires» ou sommes des premiers naturels:

$21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ ou $(6 \cdot 7) : 2 = 21$ ♦

b)

Nombre de marches	1	2	3	4	5	6	...
Nombre de cubes	1	4	9	16	25	36	...



Carrés des nombres naturels.

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 6 \cdot 6$ ♦

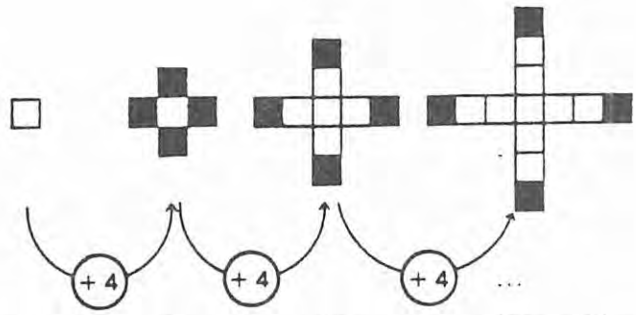
c)

Nombre de marches	1	2	3	4	5	6	...
Nombre de cubes	1	6	15	28	45	66	...

+ 5   + 9   + 13   + 17   + 21

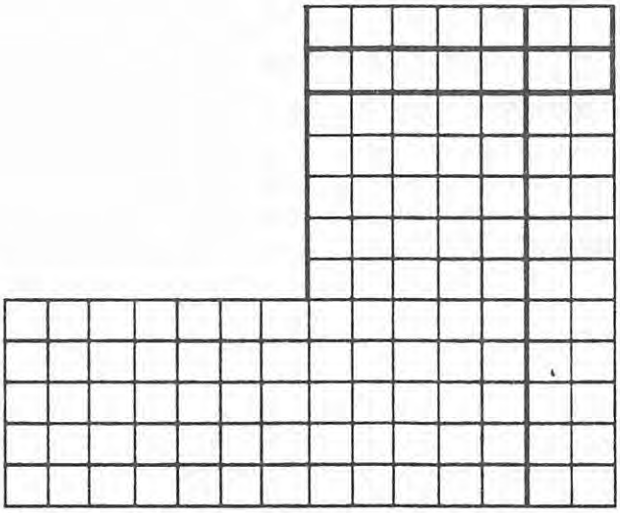
+ 4   + 4   + 4   + 4   ...

Pour cette dernière partie de l'activité, donner à l'élève la possibilité de recourir à un matériel.



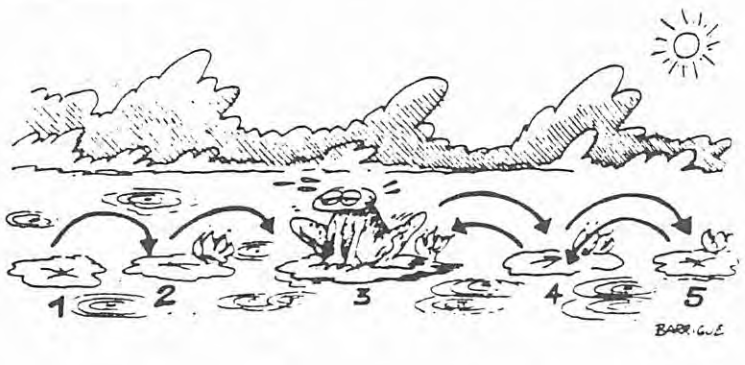
1 + 5 + 9 + 13 = 28

- Dans le même ordre d'idées, une AR permet un brassage des notions vues auparavant et une **intériorisation plus profonde des techniques apprises**. Ainsi l'exemple de Morgan, 9 ans, élève de 3^e année d'études, qui, face à la question de savoir quel âge il aurait dans 7 ans, se met à compter sur ses doigts 10, 11, 12,...pour parvenir à 16, sans songer à effectuer l'addition 9+7 que, par ailleurs, il connaît. De la même façon, devant la situation qui consiste à déterminer le nombre de carreaux contenus dans le pavage suivant, peu d'enfants pensent à utiliser la multiplication.



Il existe donc une différence entre "effectuer une multiplication donnée" et "utiliser la multiplication dans un contexte donné" que seule une réelle mise en situation permet de dépasser. Dans cet ordre d'idées, le recours à la division dans l'activité "La grenouille" n'est pas évident.

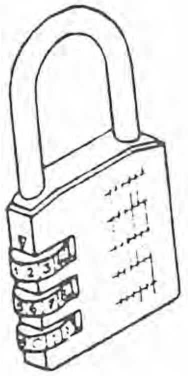
"La grenouille"



L'unique distraction de cette grenouille est de sauter d'un nénuphar à l'autre, dans l'ordre, dans un sens, puis dans l'autre, en allant à chaque fois jusqu'au bout.

Sur quel nénuphar arrivera-t-elle après 1291 sauts, si elle est partie du nénuphar n° 1 ?

- Le langage mathématique ne peut être assimilé qu'à la condition d'être écrit, lu et dit. Le "**dire**" est certainement la composante la moins développée dans les classes de mathématiques; les élèves ont finalement peu d'occasions pour s'exprimer vraiment et complètement. L'AR menée en groupes constitue assurément un moment privilégié où l'enfant utilise le langage mathématique d'autant plus facilement qu'il est face à ses pairs et non face à l'adulte. Par ailleurs, le moment de la **présentation des résultats** auxquels les différents groupes sont parvenus est une phase essentielle de l'AR. Elle oblige en effet les élèves qui "disent" à argumenter, à préciser davantage, à éclaircir certains points, à mieux structurer leurs conclusions, ... En bref, elle amène les enfants à intégrer de manière précise le langage mathématique au langage usuel. "Trou de mémoire" est un bon exemple d'une AR où l'échange entre les participants sur les procédures utilisées peut être fructueux.



"Trous de mémoire"

Chantal a oublié la combinaison de trois chiffres de l'antivol du vélo que son amie lui a prêté. Aussi s'arme-t-elle de patience et procède-t-elle méthodiquement par essais successifs pour retrouver cette combinaison. Chaque essai lui demande environ 2 secondes.

Chantal peut-elle raisonnablement espérer avoir trouvé la bonne combinaison en moins de trente minutes ?

- Si dans un exercice classique d'application, **l'erreur** est assimilé à la faute, il n'en va pas de même dans une AR. Là, l'erreur est une étape; elle **fait partie intégrante du processus de recherche**. Il est en effet impossible de ne pas passer par des phases de tâtonnement, d'essais infructueux, etc..

  Ce statut radicalement différent de la notion d'erreur permet à l'élève de se forger une représentation plus vraie de ce que c'est de faire des mathématiques.

  De plus, cette nouvelle conception de l'erreur peut parfois aider l'élève dont les résultats dans les devoirs en classe ne sont pas brillants, à trouver un terrain où il peut "oser" davantage, où la peur de faire des fautes s'est estompée.

- Même si l'enseignant se doit d'être au courant de l'état d'avancement des travaux et de la dynamique des divers groupes, même si son rôle de "régulateur" (et non "indicateur de la voie à suivre") l'accapare quelque peu, sa position d'**observateur** doit être privilégiée. Une AR représente un moment idéal pour l'enseignant : il peut voir et écouter ses élèves au travail ! Ainsi, il peut recueillir un ensemble d'informations qui peuvent en partie avoir un impact direct sur les travaux en cours, mais qui serviront également à améliorer la qualité du travail ultérieur. Enfin, cette position est parfaite pour apprécier les capacités et les compétences (voir compétences d'intégration et capacités transdisciplinaires au point 3 de ce dossier) des élèves et, par le fait même, compléter l'idée qu'il s'en fait. Car il faut bien constater l'aspect quelque peu réducteur des tests classiques qui se centrent presque exclusivement sur l'évaluation des connaissances et des techniques. Une **vision globale de l'élève**, composée des "résultats mathématiques" et des "comportements mathématiques en phase de recherche", est un atout indéniable dans une école qui se veut centrée sur l'enfant.

Comme les AR ne s'intègrent pas spontanément dans un programme traditionnel de la classe de mathématiques, elles sont souvent considérées comme des activités récréatives, repoussées aux veilles de fêtes ou de vacances ou pire encore, proposées comme travaux à domicile. Pourtant, pour toutes les raisons invoquées plus haut, il serait dommage qu'il en soit ainsi.

Quelques AR bien dosées durant l'année scolaire ne pourront qu'être bénéfiques à la formation mathématique des enfants. Elles leur permettront de concevoir les mathématiques non comme un savoir prédigéré à assimiler passivement, mécaniquement, sans se poser de questions, mais comme un lieu de découverte, de raisonnement et, pourquoi pas, de plaisir.

Si bien des points restent encore en suspens, n'est-il pas exaltant de se lancer dans ce nouveau défi, de transformer sa classe en un "atelier de mathématiques" ?

Rien que pour apprendre à chercher, rien que pour apprendre à penser.

Jacky ANTOINE

Références bibliographiques :

(d'où sont extraites la plupart des AR présentées ci-dessus)

1. CHASTELLAIN Michel, JAQUET François, MICHLIG Yvan, Mathématique 5°, Office romand des éditions scolaires, 1985.
2. CHASTELLAIN Michel, JAQUET François, MICHLIG Yvan, Mathématique 5° méthodologie-commentaires, Office romand des éditions scolaires, 1985.
3. Math-école, revue publiée par l'Institut romand de Recherches et de Documentation Pédagogiques (IRDP), n°166, février 1995.
4. L'évaluation centrée sur l'élève, actes de la 45e rencontre de la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques (CIEAEM), 1993.

Annexe 4

RECUEIL D'ACTIVITÉS DE RECHERCHE

Les activités de recherche qui suivent sont extraites de :
- pour les activités n°1 à 5
Mathématique, 5e année, M.Chastellain, F.Jaquet, Y.Michlig, Office romand des éditions et du matériel scolaires, 1984, Suisse
- pour les activités n°6 à13
Math-Ecole, n° 169, F.Jaquet (rédacteur responsable), octobre1995, Neuchâtel, Suisse
- pour les activités n°14 et 15
Math-Ecole, n° 172, F.Jaquet (rédacteur responsable), avril 1996, Neuchâtel, Suisse

Une littérature abondante propose des activités de recherche.
Parmi d'autres :

Des revues:

— «Math-Ecole» présente non seulement de nombreuses situations parfaitement adaptées aux possibilités des élèves de cinquième et sixième, mais encore des comptes rendus d'expérimentations.

— Le «Bulletin des maîtres de mathématique vaudois» publie occasionnellement des observations détaillées de classes pratiquant une pédagogie des situations;

— «Jeux et Stratégie» paraît tous les deux mois et fourmille de casse-tête, énigmes, jeux, problèmes, dont certains peuvent être exploités en classe;

— «Instantanés mathématiques», revue de l'APAME (Canada) propose de nombreuses activités pour des élèves du degré moyen.

— «Le petit Archimède» (Revue de l'Association pour le Développement de la Culture Scientifique) suggère d'intéressantes pistes de recherche. Abonnement: 61, rue Saint-Fuscien 80000 Amiens (France).

Des ouvrages

— «Situations motivantes dans l'enseignement des mathématiques». Rapport sur le FORUM II de mathématique. Bulletin d'information de la CDIP, N° 10 b (1977);

— «Développements 5ᵉ-6ᵉ» Ed. Office romand des éditions et du matériel scolaires (1978);

— «Mathématiser» Groupe mathématique du SRP, Genève, N° 17 (1978);

— «Sur les pistes de la mathématique en division moyenne» Groupe mathématique du SRP, Genève, N° 25 (1983);

— «Problèmes» Séries rouge, verte, bleue, violette, du «Projet mathématique Nuffield» Ed. OCDL;

— «Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire» Cycle moyen, tomes 1, 2 et 3 ERMEL, Colomb et Coll. Ed. SERMAP Hatier.

Des sources d'idées:

— «1 001 tours et jeux de mathématiques modernes» Girodet et coll. Ed. des Deux Coqs d'Or;

— «Points de départ» Banwell & coll. Ed. CEDIC Nathan;

— «Mathématiques buissonnières» A. Deledicq Ed. CEDIC Nathan;

— «Pentamino» N° 1 à 8 IREM de Grenoble;

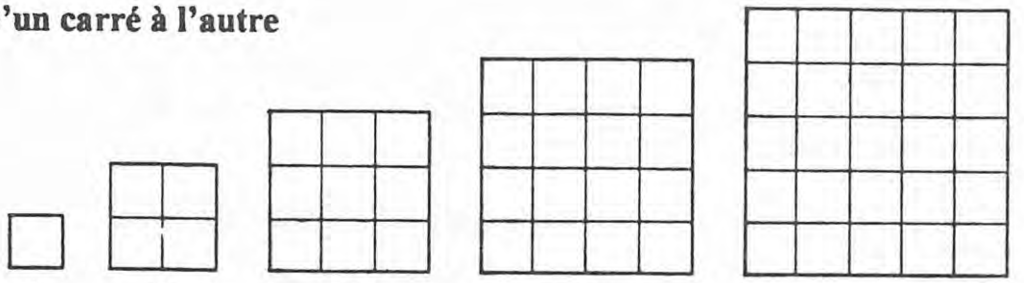
— «La mathématique dans la réalité» Castelnuovo & Barra Ed. CEDIC Nathan;

— «Six thèmes pour six semaines» Myx Ed. CEDIC Nathan;

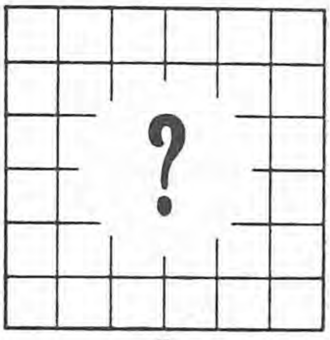
— «Haha», «La magie des paradoxes», «Math circus», «Math festival» M. Gardner. Bibliothèque POUR LA SCIENCE Ed. Belin;

— «Problèmes et divertissements mathématiques». Gardner. Ed. Dunod.

1. D'un carré à l'autre



A B C D E

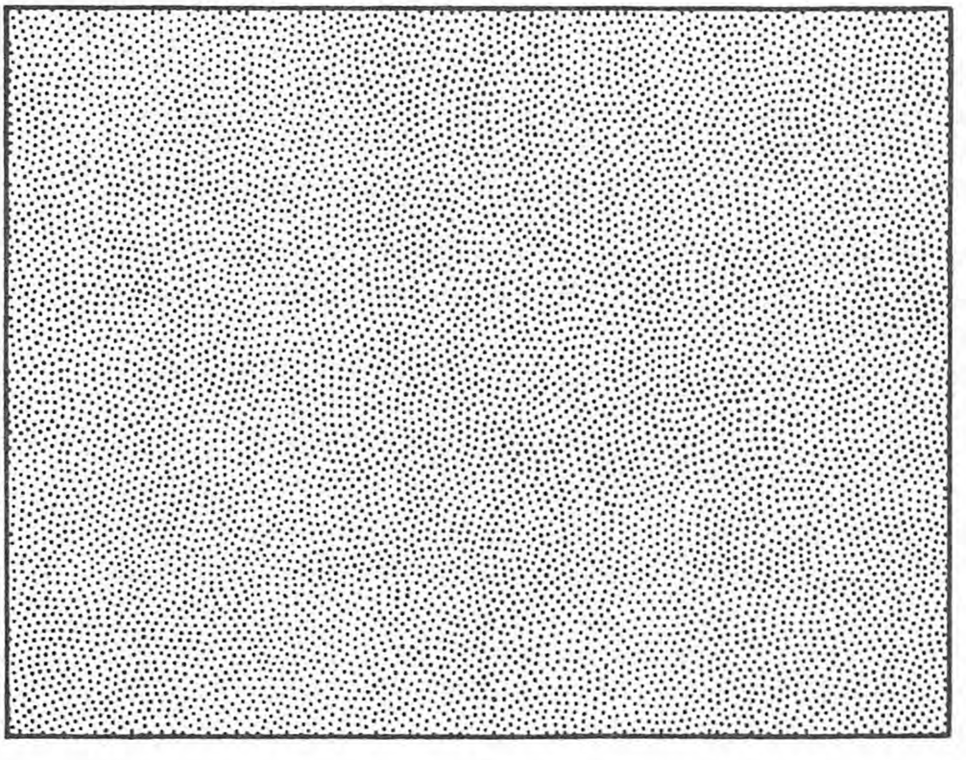


F

On compte un carré dans la figure A, cinq dans la figure B.
a) Combien de carrés comptes-tu dans les figures C, D et E ?
b) Essaie de trouver le nombre de carrés contenus dans la figure F.

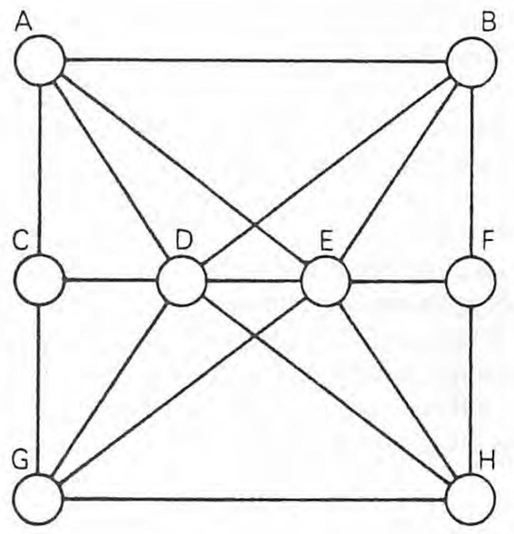
2. Combien y a-t-il...

a) ... de petits points dans le rectangle qui suit ?



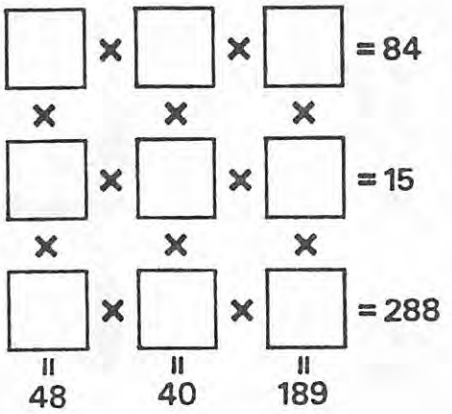
b) ... de feuilles de papier dans une pile d'un mètre de haut ?
c) ... de grains de riz dans un kilo

3. Les mauvais voisins



Place les nombres de 1 à 8 dans les cercles de telle façon que deux nombres dont la différence est 1 ne se trouvent pas dans des cercles directement reliés.

4. Les nombres croisés



Place dans les cases les nombres de 1 à 9 de façon à obtenir les résultats indiqués.

5. Énigmes

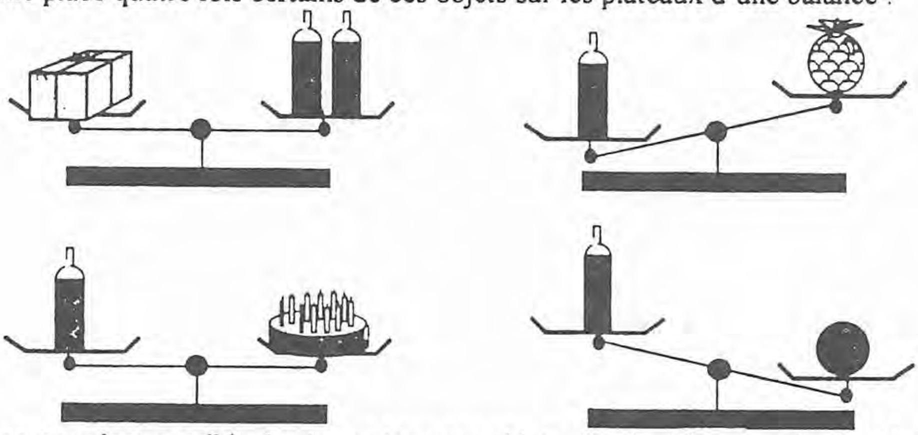
a) Carnaval ! André, Bernard, Claude, David et Éric se sont déguisés et sont devenus : un Charlot, un Pierrot, un Apache, un Dracula et un Arlequin.
Informations :
1. André, Bernard et le Charlot ont confectionné eux-mêmes leurs costumes.
2. Claude et le Pierrot ont été primés au concours des plus beaux déguisements.
3. L'horrible Dracula donne le frisson à André, Bernard et David.

4. David, Bernard et Éric portent un masque, tandis que le Pierrot et l'Apache se sont grimés.
Qui est l'arlequin ?

b) Annick, Brigitte et Claudine jouent chacune de deux des instruments de musique suivants : le violon, le piano, la clarinette, l'accordéon, la guitare et la flûte.
Informations :
1. La violoniste et la clarinettiste habitent le même immeuble.
2. La guitariste et la clarinettiste sont plus âgées qu'Annick.
3. Brigitte est la meilleure amie de la guitariste.
4. Brigitte et la flûtiste sont moins talentueuses que Claudine.
5. La violoniste et la flûtiste jouent parfois ensemble.
6. La flûtiste a prêté quelques partitions à la pianiste.
Qui est la violoniste ?

6. Les balances

Sur sa table, Julie a deux bouteilles de même poids, un paquet, un ananas, un gâteau, une boule. Elle place quatre fois certains de ces objets sur les plateaux d'une balance :



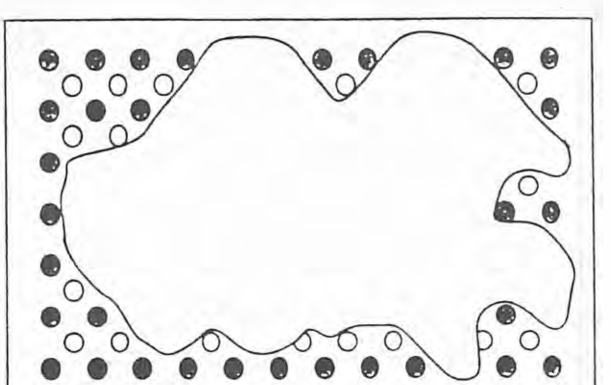
Julie pense que c'est possible de classer tous ces objets, du plus léger au plus lourd, à l'aide de ces quatre pesées seulement. Et vous, qu'en pensez-vous ?

7. Nombres consécutifs

34 est la somme de quatre nombres naturels qui se suivent : $34 = 7 + 8 + 9 + 10$
Trouvez deux autres nombres, entre 40 et 50, qui sont aussi la somme de quatre nombres naturels qui se suivent. Expliquez votre réponse.

8. La tache

Toto a renversé le pot de confiture sur la belle nappe à pois de la cuisine.
Combien y a-t-il de pois entièrement recouverts par la confiture ?
Indiquez comment vous avez trouvé votre solution.



9. Drôle de machine

Chaque fois qu'on introduit un nombre dans cette machine bien particulière
elle le remplace par le produit de ses chiffres,
puis elle reprend le nouveau nombre et recommence,
et elle ne s'arrête que lorsqu'elle obtient un nombre à un seul chiffre.
Voici trois exemples :
Avec 39, il faut trois passages pour aboutir à un nombre à un seul chiffre : 4.
45 devient 0 après deux passages.
Un seul passage suffit pour transformer 23 en 6.

	passage 1		passage 2		passage 3		passage 4	
39	→	27	→	14	→	4		
45	→	20	→	0				
23	→	6						
...	→	...	→	...	→	...	→	...

a) Quel est le plus grand nombre naturel inférieur à 100 qui ne nécessite qu'un seul passage dans le machine pour aboutir à un nombre d'un seul chiffre ?

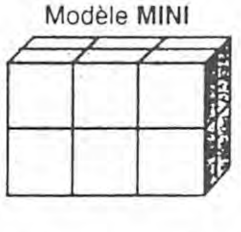
b) Y a-t-il des nombres inférieurs à 100 qui nécessitent plus de trois passages dans la machine pour aboutir à un nombre d'un seul chiffre ? Combien ? Lesquels ?

10. Construction de briques

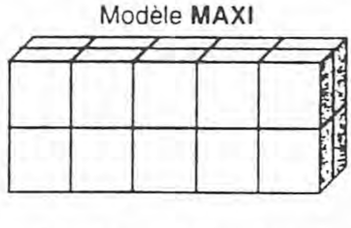
Vous disposez de 150 cubes, tous de ce type :

A l'aide de ces cubes, vous devez construire des briques de l'un ou l'autre de ces deux modèles:

Modèle **MINI**



Modèle **MAXI**

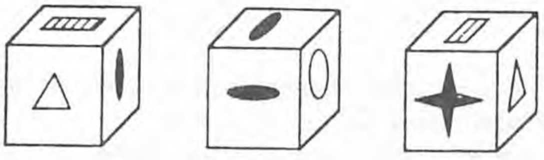


Il faut essayer d'utiliser le plus grand nombre possible de vos 150 cubes.

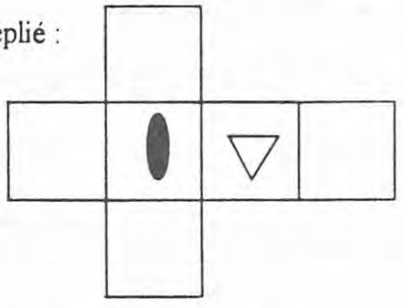
Combien de briques complètes de chaque modèle devrez-vous construire pour qu'il vous reste le moins possible de cubes non utilisés ?
Expliquez votre réponse et indiquez combien il vous reste de cubes non utilisés.

11. Le cube

Voici trois photos d'un même cube :

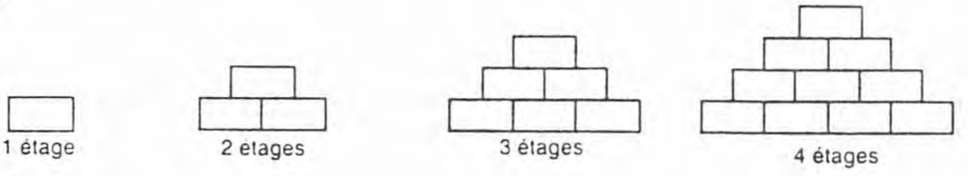


a) Complétez le cube déplié :



b) Y a-t-il une autre solution ? Si oui, dessinez-la.

12. Pyramides



Il faut 10 briques pour construire une pyramide de 4 étages.

a) Combien en faudra-t-il pour construire une pyramide de 12 étages ?

b) Est-ce vrai que pour construire une pyramide de 24 étages, il faudrait le double de briques que pour une pyramide de 12 étages ?

13. La collection

Otto, le fils de Madame et Monsieur Coland, collectionne les autocollants.
Il demande à ses camarades de deviner combien il en possède et leur donne les informations suivantes :
- J'en ai moins de 100.
- Si je les mettais par paquets de six, il m'en resterait trois.
- Si je les mettais par paquets de cinq, il m'en resterait aussi trois.
- Et si je les mettais par paquets de quatre, il m'en resterait toujours trois.

A vous de trouver combien Otto possède d'autocollants. Expliquez votre réponse.

14. Maxima et minima

1	2	3	4	5	6 (six)	7	8	9 (neuf)	+	-	x	:

- Choisissez trois *cartes-chiffres* et une *carte-opération*. Avec deux des trois *cartes-chiffres* choisies, formez un nombre de deux chiffres. Effectuez ensuite l'opération.

⇨ $\boxed{7}$ $\boxed{2}$ $\boxed{5}$ $\boxed{x}$

$\boxed{7}\boxed{x}\boxed{5}\boxed{2}$ = *364*

- Recommencez cela en choisissant trois nouvelles *cartes-chiffres* et une nouvelle *carte-opération*.

⇨ $\boxed{1}\boxed{+}\boxed{9}\boxed{4}$ = *95*

- Terminez avec les trois dernières *cartes-chiffres* et une troisième *carte-opération* (la dernière *carte-opération* restant inutilisée).

⇨ $\boxed{6}\boxed{3}\boxed{-}\boxed{8}$ = *55*

- Additionnez les trois résultats intermédiaires pour obtenir la somme finale.

⇨ +

514

Quelles sont les deux plus grandes et les deux plus petites sommes finales que vous réussirez à obtenir ainsi ?

15. Vingt-cinq

Une année est appelée « vingt-cinq » si la somme de ses chiffres est 25.
Exemple : 1996 est une année « vingt-cinq » car 1 + 9 + 9 + 6 = 25.
Combien compte-t-on d'années « vingt-cinq » entre 1900 et 2000 ?
Expliquez votre réponse.

Quelques commentaires méthodologiques concernant les activités n° 1, 2, 4, et 5 :

D'un carré à l'autre. Cette activité de dénombrement conduit à une suite de nombres intéressante: la somme des carrés des premiers nombres naturels: 1, 5, 14, 30, 55, ...

Pour y arriver, il faut organiser la recherche des carrés avec méthode. Par exemple:

	figure	A	B	C	D	E	F
nombre de carrés de	1 (u) de côté	1	4	9	16	25	?
	2 (u) de côté	—	1	4	9	16	?
	3 (u) de côté	—	—	1	4	9	?
	4 (u) de côté	—	—	—	1	4	?
	5 (u) de côté	—	—	—	—	1	?
	...						
nombre total de carrés dans la figure		1	5	14	30	55	?

Mais avant d'arriver à cette organisation, il y a un long travail. Des élèves vont dessiner les carrés de couleurs différentes pour s'apercevoir que le dessin devient vite surchargé. D'autres ne compteront que les petits carrés-unités ; c'est en confrontant leurs résultats avec ceux de leurs camarades qu'ils constateront leurs oublis.

Cette activité fournit une bonne occasion de revoir (ou d'aborder) les puissances (carrés).

Développement: Même activité, mais avec des cubes!

Pour information, la formule $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ donne la somme des carrés des n premiers nombres naturels.

Enigmes. Casse-tête à résoudre par déduction et élimination.

Une méthode efficace consiste à porter les traductions logiques de chaque information dans un tableau de ce type:

Une information autorise souvent plusieurs déductions et le recoupement de deux informations peut en donner une troisième.

X = oui
O = non

	André	Bernard	Claude	David	Eric
le Charlot	O_1	O_1			
le Pierrot	X_4	O_4	O_2	O_4	O_4
l'Apache		O_4		O_4	O_4
le Dracula	O_3	O_3		O_3	
l'Arlequin					

Combien y a-t-il ...? Les trois questions (points du rectangle, feuilles de papier, grains de riz) sont tout à fait analogues au plan de la démarche à suivre:

— elles demandent une collaboration entre élèves;

— elles exigent une planification de la recherche;

— elles conduisent à une analyse critique des résultats obtenus.

Par exemple, le comptage un à un des points dessinés dans le rectangle prendrait plus de deux heures à une personne seule. Il faut donc trouver une autre méthode. Le simple fait de s'y mettre à plusieurs ne suffit pas car deux ou trois élèves au maximum peuvent travailler sur un même rectangle (en coloriant les points comptés). Il faut se répartir le travail avec une précision rigoureuse. («Tu prends une bande de 2 cm en haut, toi tu prends ...») Mais là encore le comptage se révèle vite fastidieux car il faut aller jusqu'à 10000! La planification la plus efficace apparaît avec l'idée «d'échantillonnage» ou de «sondage»: chacun s'occupe alors d'une surface-unité choisie en commun dans des régions différentes du rectangle (1 cm²).

Les résultats obtenus, il faut les discuter et les analyser. Si 3 élèves trouvent 69, 70, 72 points par cm² et qu'un quatrième n'en trouve que 58, va-t-on recompter, vérifier que la surface-unité choisie a été mesurée avec une précision suffisante, admettre que la densité des points est la même partout?

Vient alors le calcul final qui repose sur celui de l'aire du rectangle. Mais que penser du total obtenu? Est-ce vraiment le nombre apparu comme dernier produit?

Si, par exemple, la moyenne de la classe était de 71 points par cm² et que le calcul final donne $71 \cdot 130 = 9230$, il faut relativiser ce dernier produit et revenir aux comptages effectués. Si ceux-ci se situent tous entre 68 et 74 par exemple et que la majorité se trouve entre 70 et 72, on peut admettre alors que le nombre total est compris entre:

$$70 \cdot 130 \quad \text{et} \quad 72 \cdot 130$$

$$9100 \leqslant \text{nombre total} \leqslant 9360$$

Il en est souvent ainsi des problèmes réels: leur solution n'est qu'une estimation ou un encadrement.

Un conseil pour les classes qui choisissent de compter les grains de riz: il faut les prendre tous dans le même paquet car il y a de très grandes différences de masse d'une sorte de riz à l'autre.

On relèvera encore que chacune de ces recherches introduit de grands nombres, fait appel aux opérations dans $\mathbb{N}$ et se fonde sur les propriétés de la linéarité:

— Si on multiplie la surface-échantillon par n, le nombre de points est aussi multiplié par n.

— Si on réunit deux surfaces-échantillons, le nombre de points de la réunion est la somme des nombres de chaque partie.

Les nombres croisés. Casse-tête très intéressant à résoudre qui fait appel aux notions de multiple, diviseur et décomposition d'un nombre en facteurs.

Connaissant le critère de divisibilité par 5, on peut placer aisément le nombre 5 et la suite ne présente alors plus aucune difficulté.

Suggestion: Demander aux élèves d'imaginer d'autres grilles (toujours avec les nombres de 1 à 9) qu'ils échangeront pour les résoudre.

Annexe 5

EXTRAITS DE "LEHRERINFORMATION ZU MATHEMATIK 4"

- **Programmübersicht 1. bis 4. Schuljahr.**

- **Algorithmen**

Programmübersicht 1. bis 4. Schuljahr

	1. Schuljahr	2. Schuljahr	3. Schuljahr	4. Schuljahr
1.	**Zahlenraum** Einführung der natürlichen Zahlen bis 20 und der Zahlen bis 100 in Zehnerschritten. Zahlen nach ihrer Größe vergleichen und ordnen. Anwendung der Relationen < = >.	**Zahlenraum** Erweiterung des Zahlenraums der natürlichen Zahlen bis 100 und in Hunderterschritten bis 1 000. Zahlen nach ihrer Größe vergleichen und ordnen < = >.	**Zahlenraum** Erweiterung des Zahlenraums der natürlichen Zahlen bis 1 000 und in Tausenderschritten bis 10 000. Zahlen nach ihrer Größe vergleichen und ordnen < = >. Zahlen aufrunden, beziehungsweise abrunden.	**Zahlenraum** Stufenweise Erweiterung des Zahlenraums der natürlichen Zahlen bis 100 000. Zahlen nach ihrer Größe vergleichen und ordnen < = >. Zahlen aufrunden, beziehungsweise abrunden.
2.	**Addition und Subtraktion** Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 20. Addition und Subtraktion von Zehnern im Zahlenraum bis 100. Die Kommutativität und die Assoziativität der Addition zum vorteilhaften Rechnen nutzen. Addition und Subtraktion als inverse Operationen verstehen lernen. *Die systematische Beherrschung des Überschreitens und des Unterschreitens des Zehners wird erst im 2. Schuljahr verlangt.*	**Addition und Subtraktion** Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 100. *Die Schüler sollen das systematische Überschreiten und Unterschreiten des Zehners am Ende des 2. Schuljahres beherrschen.* Einführung in die schriftliche Addition und die schriftliche Subtraktion. Addition und Subtraktion von Hundertern im Zahlenraum bis 1 000. Die Kommutativität und die Assoziativität der Addition zum vorteilhaften Rechnen nutzen. Die Subtraktion als die Umkehrung der Addition erkennen.	**Addition und Subtraktion** Vertiefen der Addition und der Subtraktion im Zahlenraum bis 100. Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 1 000. Das Normalverfahren der schriftlichen Addition und der schriftlichen Subtraktion verstehen und beherrschen. Addition und Subtraktion von Tausendern im Zahlenraum bis 10 000. Die Kommutativität und die Assoziativität der Addition zum vorteilhaften Rechnen nutzen. Die Subtraktion als die Umkehrung der Addition erkennen. Rechenergebnisse durch Überschlagen prüfen können.	**Addition und Subtraktion** Vertiefen der Addition und der Subtraktion im Zahlenraum bis 1 000. Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 100 000. Das Normalverfahren der schriftlichen Addition und der schriftlichen Subtraktion verstehen und beherrschen. Die Kommutativität und die Assoziativität der Addition zum vorteilhaften Rechnen nutzen. Die Subtraktion als die Umkehrung der Addition erkennen. Rechenergebnisse durch Überschlagen prüfen können.
3.	**Multiplikation** Mehrfache Addition einer gleichen Zahl als Multiplikation beschreiben. Im Vordergrund steht das Verständnis der Operation "a •", nicht das Resultat. Die Kommutativität anhand von Beispielen verdeutlichen. Zahlen von 0 bis 10 verdoppeln.	**Multiplikation und Division** Mehrfache Addition einer gleichen Zahl als Multiplikation beschreiben und das Produkt angeben. *Das Resultat kann durch Abzählen in der Zahlenreihe oder durch Addieren bestimmt werden.* Das Einmaleins von "2 •" bis "10 •" kennenlernen. *Beherrschung und Geläufigkeit werden noch nicht im 2. Schuljahr verlangt. Die Memorisation beschränkt sich auf 2 • und 10 •.* Die Kommutativität und die Assoziativität der Multiplikation zum vorteilhaften Rechnen nutzen. Grundlegende Einsichten in die Division gewinnen. Die Division als die Umkehrung der Multiplikation erkennen. Gerade Zahlen im Zahlenraum bis 100 halbieren. ½ • und : 2 werden als gleichbedeutende Schreibweisen gebraucht. *Die Systematisierung der Division erfolgt im 3. Schuljahr.*	**Multiplikation und Division** Geläufigkeit im Gebrauch der Multiplikation und der Division. *Am Ende des dritten Schuljahres sollen das kleine Einmaleins und das entsprechende Teilen ohne Rest beherrscht sein. Dieses Ziel soll parallel mit den andern Lerninhalten des drittes Schuljahrs angestrebt werden. Die Systematisierung der Division erfolgt im 3. Schuljahr.* Mit reinen Zehnern multiplizieren und dividieren können. Die Kommutativität und die Assoziativität der Multiplikation zum vorteilhaften Rechnen nutzen. Das Distributivgesetz bei der Multiplikation anwenden. Divisionsaufgaben durch geeignete Zerlegung berechnen. Die Division als die Umkehrung der Multiplikation erkennen.	**Multiplikation und Division** Einfache Produkte im Zahlenraum bis 100 000 berechnen. Die Kommutativität und die Assoziativität der Multiplikation zum vorteilhaften Rechnen nutzen. Das Distributivgesetz bei der Multiplikation anwenden. Das Normalverfahren der schriftlichen Multiplikation verstehen und anwenden können. Vielfache von Zehnern, Hundertern, Tausendern und Zehntausendern durch 10, 100, 1 000, 10 000 dividieren. Reine Zehner, Hunderter, Tausender und Zehntausender durch geeignete einstellige Zahlen teilen können. Die Division als die Umkehrung der Multiplikation erkennen. Das Normalverfahren der schriftlichen Division verstehen und anwenden können, um Zahlen bis 1 000 000 durch geeignete Zahlen bis 20 zu teilen.

Programmübersicht 1. bis 4. Schuljahr

4.			**Operatoren** Einführung der Operatoren $\frac{a}{b}$ •. *Der Lehrer beschränkt sich auf Beispiele ($\frac{a}{b}$ • □), deren Resultat eine natürliche Zahl ergibt.*	**Operatoren** Anwendung der Operatoren $\frac{a}{b}$ • auf Mengen und Zahlen. *Der Lehrer beschränkt sich auf Beispiele, deren Resultat eine natürliche Zahl ergibt.* Die Operatoren auf Flächen und Strecken anwenden. Brüche als Punkte auf einem Zahlenstrahl darstellen. *Die Schüler sollen erkennen, daß Brüche, die demselben Punkt auf dem Zahlenstrahl zugeordnet sind, denselben Wert haben.* *
5.	**Größeneinheiten** Längenmaße Gebrauch der Maßeinheiten Meter und Zentimeter. Verwandlungsübungen sind nicht vorgesehen. Hohlmaße Praktischer Umgang mit dem Litermaß. Gewichte Praktischer Umgang mit dem Kilogramm. Zeitmaße Kennenlernen der Wochentage, der ganzen und der halben Stunde. Geldwerte Zählen und Auszählen von Geldsummen mit Hilfe verschiedener Geldmünzen.	**Größeneinheiten** Längenmaße Schätzen und Messen mit m, dm, cm, mm. Einführung in den Gebrauch der Stellentafel. Hohlmaße Praktischer Umgang mit dem Litermaß. Einführung der Abkürzung l. Gewichte Praktischer Umgang mit dem Kilogramm. Einführung der Abkürzung kg. Zeitmaße Kennenlernen des Kalenders, der Monate und Wochentage. Systematischer Gebrauch des Datums. Stellen und Lesen der Uhr (ganze und halbe Stunde). Geldwerte Rechnen mit Geld.	**Größeneinheiten** Längenmaße Vervollständigen der Stellentafel: km, hm, dam, m, dm, cm, mm. Verwandlungsübungen mit Hilfe der Stellentafel. Hohlmaße Praktischer Umgang mit l, dl, cl, ml. Eintragen in die Stellentafel. Gewichte Praktischer Umgang mit kg und g. Gebrauch der Stellentafel. Zeitmaße Verhältnisse zwischen Monaten, Wochen und Tagen. Gebrauch des Kalenders. Stellen und Lesen der Uhr. Kenntnis von Stunden und Minuten. Geldwerte Rechnen mit Geld.	**Größeneinheiten** Längenmaße Verwandlungsübungen mit Hilfe der Stellentafel. Hohlmaße Kenntnis der Begriffe Fuder (kl), hl, dal, l, dl, cl, ml. Gebrauch der Stellentafel. Verhältnis Fuder zu l. Gewichte Kenntnis der Begriffe t, kg, g. Gebrauch der Stellentafel. Zeitmaße Kenntnis der Begriffe Jahr, Monat, Woche, Tag, Stunde, Minute, Sekunde. Lesen und Schreiben von Tageszeiten. Geldwerte Kenntnis der im Lande gebräuchlichen Münzen und Scheine. Praktische Übungen. Temperatur Ablesen der Temperatur am Thermometer. Flächenmaße Begriffe m^2, dm^2, cm^2, mm^2 kennenlernen. Gebrauch der Stellentafel.

6.	**Geometrie** Kennenlernen folgender geometrischer Formen: Quadrat, Rechteck, Dreieck, Kreisscheibe. Figuren mit Plättchen auslegen. Erste praktische Annäherung an den Flächenbegriff.	**Geometrie** Die geometrischen Formen Dreieck, Quadrat, Rechteck und Kreisscheibe erkennen und benennen. Figuren mit Plättchen auslegen. In der Umwelt Körper identifizieren können, welche die Form eines Quaders, eines Würfels oder einer Kugel haben.	**Geometrie** Benutzen des Gleitlineals oder des Geodreiecks. Zwischen Strecke und Länge der Strecke unterscheiden lernen. Fläche und Flächeninhalt unterscheiden lernen. In der Umwelt Körper identifizieren können, welche die Form eines Quaders, eines Würfels oder einer Kugel haben.	**Geometrie** Rechteck und Quadrat. Eigenschaften von Rechteck und Quadrat kennen lernen. Rechteck und Quadrat zeichnen lernen. Bestimmen des Umfangs und des Flächeninhalts. In der Umwelt Körper identifizieren können, welche die Form eines Quaders, eines Würfels oder einer Kugel haben. Symmetrie. Achsensymmetrische Figuren herstellen. Achsensymmetrische Figuren in der Umwelt erkennen und die Symmetrieachsen angeben. Teilfiguren achsensymmetrisch ergänzen.
7.	**Sachaufgaben** Sachaufgaben lösen. Sachaufgaben erfinden.	**Sachaufgaben** Sachaufgaben lösen. Sachaufgaben erfinden.	**Sachaufgaben** Sachaufgaben lösen. Sachaufgaben erfinden.	**Sachaufgaben** Sachaufgaben lösen. Sachaufgaben erfinden.

LEHRERINFORMATION ZU MATHEMATIK 4

Subtraktionsalgorithmus

Im ersten Schuljahr müssen die Kinder sowohl in die Addition sowie in die Subtraktion eingeführt werden. Die Operationen sollen über Handlungen eingeführt werden. Bei einer Addition wie z.B. 5 + 3 werden beide Zahlen gleichwertig behandelt.
Das Kind setzt 5 (rote) Steine auf den Abakus und setzt 3 (grüne) Steine hinzu. Es sieht die beiden Zahlen konkret auf dem Abakus.
Bei der Subtraktion 7 – 4 geht man von der Zahl 7 auf dem Abakus aus. Das Kind kann die Zahl 4 jetzt nicht setzen, sondern muß 4 Steine von den 7 auswählen und dann wegnehmen. Es sieht also nicht konkret die beiden Zahlen 7 und 4 auf dem Abakus, sondern muß die Zahl 7 additiv zerlegen (7 = 4 + 3), bevor es die Steine wegnimmt.

Besondere Bedeutung kommt in dem traditionellen Algorithmus dem Zehnerunterschreiten zu.
z. B.

$$\begin{array}{rr} {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 10} \\ \cancel{1} & 2 \\ - & 7 \\ \hline & 5 \end{array}$$

Um 7 Steine wegnehmen zu können, muß das Kind den Zehner durch zehn Einer ersetzen.

Bei der Einführung der schriftlichen Subtraktion soll dem Kind gezeigt werden, daß 7 Punkte weggenommen werden. Dies entspricht dem traditionellen Algorithmus, nicht aber dem Vorgehen im praktischen Leben.

Beispiel:
Marc kauft Brot für 57 F. Er gibt einen Hunderter. Die Bäckersfrau legt das Wechselgeld hin und spricht:
57 ... 60 ... 100 (57 + 3 + 40)

Es scheint uns wichtig, dieses praktische Vorgehen ebenfalls im Algorithmus zu berücksichtigen.
Im Ausland (Deutschland, Schweiz, Frankreich ...) findet diese Idee auch ihren Niederschlag bei der schriflichen Subtraktion.
Die traditionelle Methode ist besonders umständlich, wenn von einem vollen Tausender oder Hunderter ... abgezogen werden soll.

alter Algorithmus

$$\begin{array}{rrrrrr} & & {\scriptstyle 9} & & {\scriptstyle 9} & \\ & & {\scriptstyle \cancel{10}} & {\scriptstyle 10} & {\scriptstyle \cancel{10}} & {\scriptstyle 10} \\ & \cancel{1} & 0 & \cancel{1} & 0 & 0 \\ - & & 7 & 2 & 8 & 7 \\ \hline & & 2 & 8 & 1 & 3 \end{array}$$

neuer Algorithmus

$$\begin{array}{rrrrrr} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ - & & 7 & 2 & 8 & 7 \\ & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\ \hline & & 2 & 8 & 1 & 3 \end{array}$$

Der im Ausland gebräuchliche Algorithmus erlaubt ferner mehrere Zahlen gleichzeitig zu subtrahieren.

Beispiel:

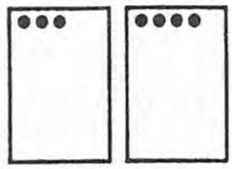
$$\begin{array}{rrrrrr} & 1 & 0 & 7 & 0 & 4 \\ - & & 3 & 4 & 1 & 5 \\ - & & & & 1 & 7 \\ - & & & 6 & 2 & 5 \\ & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 2} & \\ \hline & & 6 & 6 & 4 & 7 \end{array}$$

LEHRERINFORMATION ZU MATHEMATIK 4

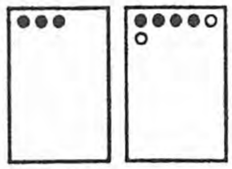
Darstellung auf dem Abakus.

$$\begin{array}{r} 86 \\ -\ 34 \\ \hline \end{array}$$

Wir setzen 34 auf den Abakus.



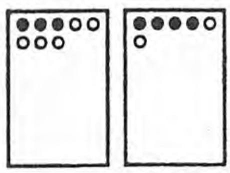
Wir möchten auf dem Abakus 86 als Zahl haben.
Wir setzen auf der Einerplatte 2 Steine hinzu.



$$\begin{array}{r} 86 \\ -\ 34 \\ \hline 2 \end{array}$$

Sprechweise: 4 plus $\boxed{2}$ gleich 6

Wir setzen auf der Zehnerplatte 5 Steine hinzu.



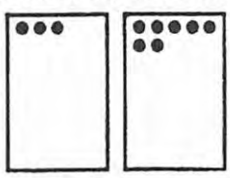
$$\begin{array}{r} 86 \\ -\ 34 \\ \hline 52 \end{array}$$

Sprechweise: 3 plus $\boxed{5}$ gleich 8

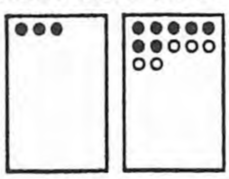
Darstellung auf dem Abakus.

$$\begin{array}{r} 62 \\ -\ 37 \\ \hline \end{array}$$

Wir setzen 37 auf den Abakus.



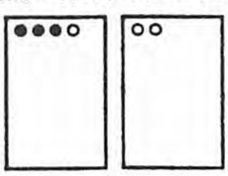
Wir möchten 62 als Zahl auf dem Abakus haben.
Wir setzen 5 Steine auf der Einerplatte hinzu.



$$\begin{array}{r} 62 \\ -\ 37 \\ \hline 5 \end{array}$$

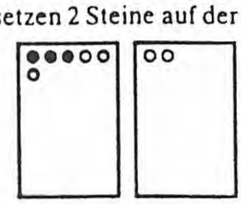
Sprechweise: 7 plus $\boxed{5}$ gleich 12

Wir wenden die Regel des Abakus an.
10 Steine werden durch einen Stein auf der Platte links daneben ersetzt.



$$\begin{array}{r} 62 \\ -\ 37 \\ {\scriptstyle 1} \\ \hline 5 \end{array}$$

Wir setzen 2 Steine auf der Zehnerplatte hinzu.



$$\begin{array}{r} 62 \\ -\ 37 \\ {\scriptstyle 1} \\ \hline 25 \end{array}$$

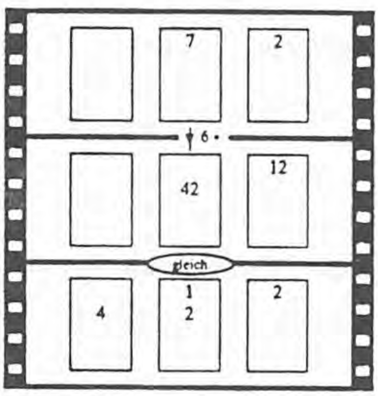
Sprechweise: 1 plus 3 plus $\boxed{2}$ gleich 6

LEHRERINFORMATION ZU MATHEMATIK 4

Multiplikationsalgorithmus

Im 3. Schuljahr wird das Erlernen und Memorieren des kleinen Einmaleins abgeschlossen. Schrittweise wird zum Multiplikationsalgorithmus mit zweistelligen Zahlen, wovon eine der beiden Zahlen kleiner als 20 ist, übergegangen.

Wir rechnen 6 • 72

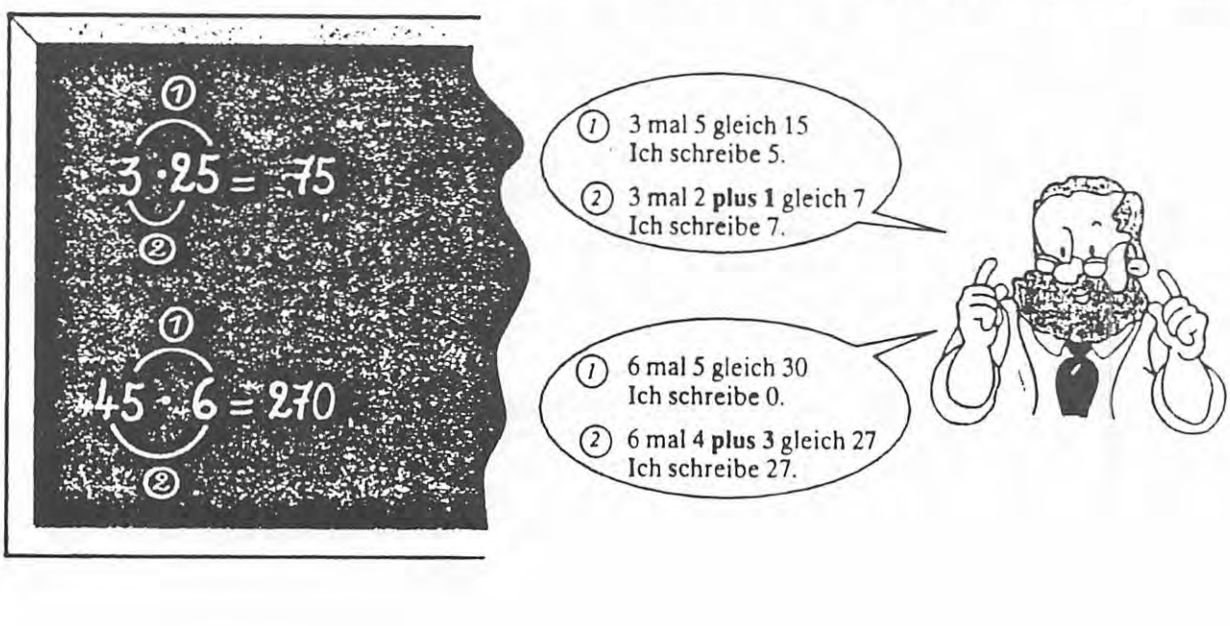


4 3 2

Schreibweise:

						H	Z	E
6	•	7	2	=	4	3	2
6	•		2	=		1	2
6	•	7	0	=	4	2	0

In der zweiten Etappe wird linear gerechnet, um die Mulitplikation mit mehrstelligen Zahlen zu ermöglichen.



LEHRERINFORMATION ZU MATHEMATIK 4

Beim Multiplikationsalgorithmus mit zweistelligen Zahlen wir eine der beiden Zahlen in Einer und Zehner zerlegt.

Wir rechnen 12 • 43 und 24 • 14

	H	Z	E
12 • 43 =	5	1	6
2 • 43 =		8	6
10 • 43 =	4	3	0

	H	Z	E
24 • 14 =	3	3	6
24 • 4 =		9	6
24 • 10 =	2	4	0

Im 4. Schuljahr wird der Multiplikationsalgorithmus auf mehrstellige Zahlen ausgebaut.

$$\begin{array}{r}
\underline{158 \cdot 225 = 35550} \\
158 \cdot 5 = 790 \\
158 \cdot 20 = 3160 \\
158 \cdot 200 = 31600
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
\underline{524 \cdot 137 = 71788} \\
4 \cdot 137 = 548 \\
20 \cdot 137 = 2740 \\
500 \cdot 137 = 68500
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
\underline{206 \cdot 108 = 22248} \\
206 \cdot 8 = 1648 \\
206 \cdot 100 = 20600
\end{array}$$

LEHRERINFORMATION ZU MATHEMATIK 4

Divisionsalgorithmus

1) Allgemeine Erörterungen

Die schriftliche Division, insbesondere durch mehrstellige Divisoren, gilt zu Recht, als das anspruchsvollste schriftliche Rechenverfahren. Sie kann nämlich, im Gegensatz zu allen anderen Grundrechenarten, nicht vollständig auf die Anwendungen von Grundaufgaben (Kleines Einspluseins, Kleines Einmaleins) reduziert werden. Einerseits wird es trotz intensiven Übens zu Ende der Primärschulzeit nur von einem Teil der Schüler völlig sicher beherrscht. Andererseits sind die überall verfügbaren Taschenrechner und Computer dem schriftlichen Rechnen mit Papier und Bleistift haushoch überlegen. Taschenrechner werden heute im täglichen Leben sehr häufig eingesetzt, die normierten schriftlichen Rechenverfahren fast gar nicht.

Man muß sich daher fragen, ob den schriftlichen Rechenverfahren in einem modernen Mathematikunterricht noch dieselbe Wichtigkeit zukommt wie vor der allgemeinen Verbreitung der elektronischen Rechenknechte, ob auf sie nicht etwa gänzlich verzichtet werden kann, um mit der so gewonnen Zeit andere, "höhere" mathematische Fähigkeiten auszubilden.

Moderne Mathematikdidaktiker wie Erich Ch. Wittmann und Friedhelm Padberg schlagen zumindest eine modifizierte Behandlung der schriftlichen Rechenverfahren, die folgende Gesichtspunkte beachtet, im Unterricht vor:

- Ein verstärktes Bemühen um Einsicht in die schriftlichen Rechenverfahren, mit der Konsequenz, daß gegebenfalls andere, leichtere Verfahren als das heutige Normalverfahren im Unterricht behandelt werden.
- Eine stärkere Betonung der Kontroll- und Überschlagsrechnung, um so Fehler bei der Benutzung der elektronischen Hilfsmittel leichter aufdecken zu können. Eine einseitige Abhängigkeit von der Verfügbarkeit von Taschenrechnern ist nämlich äußerst problematisch. Die Schüler sollten schon in der Lage sein, Irrtümer oder Flüchtigkeitsfehler kritisch zu kontrollieren.
- Eine Reduzierung der Komponenten bei der Behandlung der schriftlichen Rechenverfahren, die nur zur Erhöhung der Schnelligkeit beitragen (z. B.: eine Verringerung des entsprechenden Drills oder der Bestrebungen um eine Minimierung der Verfahrensabläufe).
- Ein Verzicht auf die Behandlung komplizierter Fälle, die deutlich über die Zielsetzung eines grundsätzlichen Verständnisses der schriftlichen Rechenverfahren hinausgehen.

Sie fordern, daß die Schüler zunächst *verschiedene Lösungswege* soweit wie möglich selbstständig erarbeiten sollen. Erst auf dieser Grundlage soll allmählich zum jeweiligen Normalverfahren als einem besonders zweckmäßigen und ökonomischen Verfahren hingearbeitet werden. Normalverfahren sollen also nicht am Anfang stehen, sondern im Unterricht erst die ***Endform eines längeren Prozesses*** sein. Die Einzelschritte erfolgen beim Normalverfahren schematisch nach gegebenen Regeln in fester Reihenfolge. Um ein gründliches Verständnis der Normalverfahren zu erreichen, auf welches die unvermeidliche Fehlerbehandlung aufbauen kann, ist es erforderlich, alle Teilschritte wie auch Gesamtablauf des Normalverfahrens sehr sorgfältig zu entwickeln. Die Komplexität und die äußerst komprimierte Kurzfassung des Normalverfahrens bewirken bei einer zu frühen Automatisierung, daß das Verfahren im Falle von Unsicherheit oder Vergessen nur sehr schwer rekonstruiert werden kann.

Bei der Einführung in die schriftliche Division wurde in diesem Lehrbuch versucht, sich von den oben dargelegten Vorstellungen leiten zu lassen.

2) Das Hilfsmittel Tabelle

Im Buch wird eine noch etwas ungewohnte Tabelle als Hilfsmittel vorgeschlagen. Sie baut auf bis dahin ausgiebig geübte Verdoppeln und Verzehnfachen auf.

312 : 4

$312 = 4 \cdot \boxed{}$

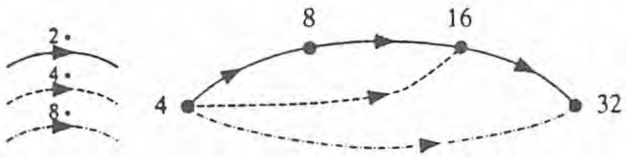
Anteil pro Kind	Verteilte Goldstücke
1	4
2	8
4	16
8	32
10	40
20	80
40	160
~~80~~	~~320~~

Verkürzte Schreibweise

Anteil pro Kind	Verteilte Goldstücke
10	40
20	80
40	160
8~~0~~	32~~0~~

LEHRERINFORMATION ZU MATHEMATIK 4

Das Anfertigen dieser Tabelle hilft den Schülern, zu erkennen, daß man große Anzahlen schrittweise aufteilen oder verteilen kann, wenn man sie günstig zerlegt. Die Tabelle ist nicht beliebig lang, sondern nur so weit aufgestellt, als es für die Problemstellung sinnvoll ist. Zuerst muß dann ein Betrag ausfindig gemacht werden, der so groß ist, daß schon das meiste nach dem ersten Schritt verteilt ist. Der Restbetrag wird wiederum möglichst vollständig aufteilt und durch mehrfaches Wiederholen dieses Verfahrens wird schlußendlich erreicht, daß der Ausgangsbetrag vollständig (oder bis zu einem, in N unteilbaren Rest) verteilt ist.
Die vorgeschlagene Tabelle soll es den Schülern ermöglichen, die zu verteilenden Beträge nicht nur besser einzuschätzen, sondern auch das Konstruieren dieser Beträge zu üben und dadurch gleichzeitig das Zahlenverständnis zu vertiefen. Die fehlerträchtigen und schwierigen Zwischenschritte (überschlagsmäßiges Dividieren, schriftliches Multiplizieren) des späteren Normalverfahrens werden so zunächst einmal entschärft. Der Komplexitätsgrad der Aufgabe wird deutlich reduziert.
Ein Pfeildiagramm kann das Verdoppeln veranschaulichen. Teilresultate können im Pfeildiagramm abgelesen werden bzw. durch Addition bestimmt werden, z. B.: $6 \cdot 4 = (2 \cdot 4) + (4 \cdot 4) = 8 + 16 = 24$.



Es ist natürlich möglich, andere Tabellen und andere Hilfsmittel zu erfinden oder zu benutzen. Bei schwächeren Schülern ist es eventuell sinnvoll, auf die traditionelle Funktionstafel (Zahlenreihe) zurückgreifen. Wir empfehlen auf jeden Fall, die Hilfsmittel differenzierend einzusetzen damit sie den individuellen Möglichkeiten und Strategien der Schüler Rechnung tragen. Natürlich sollen die Schüler motiviert werden, sich schrittweise von diesem Hilfsmittel zu lösen. Der Zeitpunkt der Ablösung wird dabei von Schüler zu Schüler variieren. Weniger leistungsfähige Schüler werden unter Umständen nie auf dieses Hilfsmittel verzichten können.

3) Das halbschriftliche Divisionsverfahren

Bei der Behandlung schriftlichen Division sollte man nicht zu rasch und einseitig auf ein Verfahren in möglichst starker Annäherung an das Normalverfahren hinarbeiten. Im Buch wird nach einer Phase von eher explorativem Vorgehen, eine erste Vorstufe des Algorithmus, ein sogenanntes halbschriftliches Verfahren vorgestellt.

9 9 4 4 = 8 •	1 2 4 3	1 0 0 0	8 0 0 0	9 9 4 4 = 8 • 1 2 4 3
- 8 0 0 0	1 0 0 0	2 0 0 ~~0~~	1 6 0 0 ~~0~~	- 8
		4 0 0	3 2 0 0	
1 9 4 4		8 0 0	6 4 0 0	1 9
- 1 6 0 0	2 0 0			- 1 6
3 4 4				3 4
- 3 2 0	4 0			- 3 2
2 4				2 4
- 2 4	3			- 2 4
0				0

LEHRERINFORMATION ZU MATHEMATIK 4

Dieses halbschriftliche Verfahren erlaubt, im Gegensatz zum Normalverfahren, noch ungünstiges Einschätzen der zu verteilenden Beträge. Die Schüler können sich hier noch mit einer unterschiedlichen Anzahl von Schritten der Lösung nähern. Weniger leistungsfähige Schüler können zwar eine große Anzahl von "überflüssigen" Zwischenschritte gebrauchen, aber dennoch zum richtigen Resultat gelangen. Die multiplikative Form und das Anschreiben der Nullen ermöglichen über das Verständnis des halbschriflichen Verfahrens eine vertiefte Einsicht in das spätere Normalverfahren. Es ist beabsichtigt, den Schülern längere Zeit die Möglichkeit zu lassen, die Lösung der Divisionsaufgaben mit mehr oder weniger Schritten anzusteuern. Die Lehrperson sollte die Schüler jedoch auf die Rechenschritte aufmerksam machen, die jeweils hätten eingespart werden können. Wenn, gemäß unserer Empfehlung, das Verständnis des Algorithmus und nicht die Schnelligkeit der Ausführung im Vordergrund steht, sollte die halbschriftliche Form des Algorithmus wenigstens bis zum Anfang des dritten Trimesters zur Lösung der im Buch angebotenen Aufgaben angewandt werden. Die Endform des Algorithmus unterscheidet sich von der halbschriftlichen Form lediglich durch die Anzahl der angeschriebenen Elemente. Durch deren Reduzierung wird wohl die Schnelligkeit des Anschreibens gesteigert, die Transparenz des Verfahrens jedoch drastisch verringert. Für weniger leistungsfähige Schüler ist es daher unter Umständen von Vorteil, wenn die das halbschriftliche Verfahren während des ganzen vierten Schuljahres beibehalten dürfen.

4) Die Multiplikative Anschreibeweise

Im Lehrbuch wird die mathematisch einwandfreie multiplikative Anschreibweise zurückbehalten.

$14 = 4 \bullet 3 + 2$ anstatt $14 : 4 = 3$ Rest 2

Bei Divisionen mit Rest verstößt die traditionelle Restschreibeweise die Transitivität der Gleichheitsrelation.
Obwohl z. B.:

$14 : 4 = 3$ Rest 2 und $11 : 3 = 3$ Rest 2 gilt, kann man *nicht* folgern

$14 : 4 = 11 : 3$ • denn

$3{,}5 = 3{,}666\ldots$

Das Gleichheitszeichen wird nicht korrekt im Sinne der mathematischen Identität genutzt.

5) Fehlerbehandlung

Ein gut durchdachtes Normalverfahren soll eine hohe Rechensicherheit durch die schematische und einprägsame Abfolge der Einzelschritte garantieren.
Es ist ein Charakteristikum von Normalverfahren, daß sie auch rein mechanisch ohne Einsicht in die Zusammenhänge korrekt durchgeführt werden können. Nach einiger Zeit führen jedoch unverstanden übernommene und angewandte Mechanismen oftmals zu typischen Fehlern.

- Die Zerlegung der Zahlen in ihrer Stellenwerte (wie sie bei den normierten schriftlichen Rechverfahren auftritt) führt leicht dazu, daß die Zahlen nicht mehr als Ganzes, sondern nur noch als eine Ansammlung von Ziffern aufgefaßt werden. Dieses bloße Manipulieren auf der symbolischen Ebene führt oft zu schwerwiegenden Fehlern wie z. B. der falschen Größenordnung eines Ergebnisses.
- Fehlerhafte Überschläge bemerkt man meist erst nach erfolgter Multiplikation (falls die Quotientenziffer zu groß geschätzt wurde) bzw. sogar erst nach der anschließenden Subtraktion (falls die Quotientenziffer zu klein geschätzt wurde). Hier kann die Vorausbestimmung der Anzahl der Ziffern des Ergebnisses bzw. eine Überschlagsrechnung Abhilfe schaffen.
- Aufgaben mit Zwischen- oder Endnullen im Quotienten bereiten den Schülern Schwierigkeiten und führen vielfach zu einem starken Fehleranstieg. (Stellenwertfehlern) z. B.:

  1 216 : 4 = 304 (oft 34 statt 304)
  63 049 : 7 = 9 007 (907,97 statt 9 007)
  3 240 : 6 = 540 (54 statt 540)

In entsprechenden Aufgaben lassen Schüler die Zwischen- oder Endnullen im Quotienten leicht aus. Diese Nullfehler nehmen im Verlauf der weiteren Schulzeit keineswegs automatisch ab, sondern eher noch zu. Besonders häufig geschieht dies, wenn die Endform des Normalverfahrens eingeführt wurde, ehe die Schüler vertiefte Einsicht in das halbschriftliche Verfahren gewinnen konnten. Zur Vorbeugung bzw. Bekämpfung dieser Fehlerart ist es sinnvoll, die verkürzten Schreibweisen, bei der die Zwischenschritte die eine Null im Quotienten liefern, nicht mehr mitgeschrieben werden, erst einzuführen wenn eine vertiefte Einsicht in diese Zusammenhänge sichergestellt ist.

IMPRIMERIE exe ✆97 0 98 TROISVIERGES