

DESCRIPTION

D'UNE

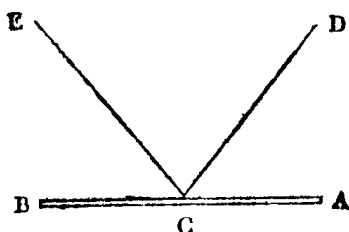
ÉQUERRE À MIROIRS.

CETTE nouvelle équerre que je fis construire il y a plus de douze ans, et que j'ai depuis perfectionnée, diffère de l'équerre ordinaire des arpenteurs, en ce qu'elle peut être réduite à une très-petite dimension, et en ce que son emploi n'exige pas de pied, ou statif.

Elle est, ainsi que l'indique la dénomination que j'ai cru devoir lui donner, composée de plusieurs petits miroirs plans qui forment entre eux des angles invariables ; en la tenant à la main près de l'œil, elle sert à se placer très-exactement sur la ligne qui joint deux objets, à élever sur cette ligne, soit des perpendiculaires, soit des obliques à 45 ou à 60 degrés, et à déterminer la direction d'une ligne de niveau, sur le terrain, avec une précision suffisante dans bien des circonstances.

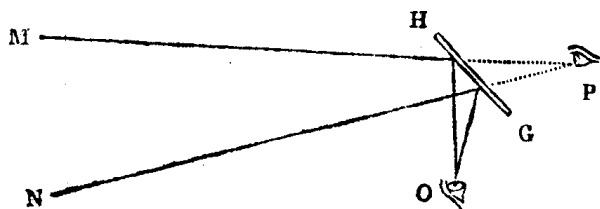
Je sais bien que l'emploi des miroirs pour mesurer des angles, n'est pas une idée nouvelle, puisque déjà en 1731, Hadley, construisit sur ce principe l'octan à réflexion ; que plus tard Tobias Mayer l'appliqua à la construction d'un cercle entier, auquel Borda sut ensuite donner un grand degré de perfection ; mais dans l'arpentage de détail ces instrumens ne seraient pas employés sans inconvéniens, puisqu'ils demandent à être maniés avec beaucoup de soins, qu'ils sont d'ailleurs d'un prix très-élevé, et qu'en résultat leur précision est illusoire quand on opère à de petites distances ; circonstance dans laquelle l'équerre à miroirs offre des avantages remarquables.

Pour faire comprendre la théorie de cet instrument aux personnes qui sont versées en optique, une simple description de la forme des pièces qui le composent serait suffisante ; mais pour celles qui ont perdu cette science de vue, je vais rappeler les principes sur lesquels la construction de l'équerre à miroirs est fondée.



1^{er}. Principe. Lorsqu'un rayon de lumière DC tombe sur un miroir plan AB sous un angle ACD, que j'appellerai angle d'incidence, il est réfléchi sous un angle BCE, que j'appellerai angle de réflexion, et qui est égal au premier ACD (a).

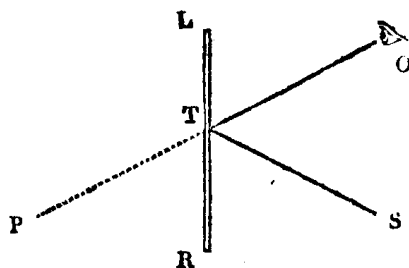
On déduira de ce principe, 1°. que si deux rayons incidents sont parallèles, les deux rayons réfléchis le seront aussi; 2°. que si deux rayons incidents sont, ou *convergens*, ou *divergens*, les deux rayons réfléchis conserveront le même degré de convergence ou de divergence.



Or, puisque deux rayons convergens conservent après leur réflexion le même degré de convergence, on conçoit qu'un très-petit miroir GH, tenu près de l'œil (que je suppose en O), réfléchira tous les objets que l'œil en P aurait vu directement, parce que les rayons lumineux venant de M et de N, en convergeant vers l'œil P, pourront être réfléchis par le petit miroir lorsque celui-ci est posé là où ces rayons sont très-rapprochés.

(a) On est généralement convenu d'appeller en catoptrique, angles d'incidence et de réflexion, les angles formés par les rayons et par la Normale à la surface réfléchissante, menée au point d'incidence; parce que dans l'ensemble de la science, il faut étendre les considérations aux phénomènes que présentent les surfaces courbes réfléchis-

2°. *Principe.* Nous apercevons les objets au moyen de ceux des rayons qui partant de tous les points éclairés de leur surface, peuvent atteindre notre œil. Ces rayons, s'ils ne sont détournés de leur route par une circonstance quelconque, se propagent en ligne droite; mais s'ils rencontrent des corps qui peuvent ou les réfracter, ou les réfléchir, alors ils nous parviennent par des lignes brisées; généralement dans ce cas, les objets ne nous paraissent plus à leur véritable place, car nous les jugeons toujours placés sur la direction du rayon, soit direct, soit réfléchi, qui produit l'impression dans notre œil.

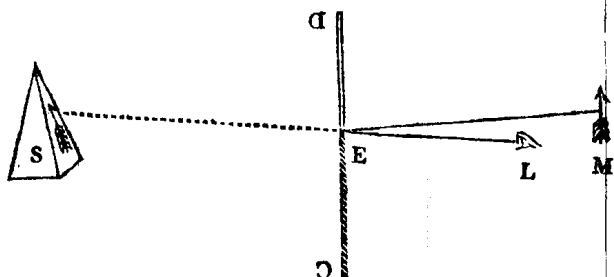


Si, par exemple, un rayon ST venant du point lumineux S tombe sur le miroir RL, il sera réfléchi vers O, en faisant, comme nous l'avons dit, un angle STR, égal à l'angle LTO, et si l'œil de l'observateur se trouve en O, il apercevra le point lumineux S, non pas là où ce point existe véritablement, mais derrière le miroir en P et sur le prolongement du rayon réfléchi OT.

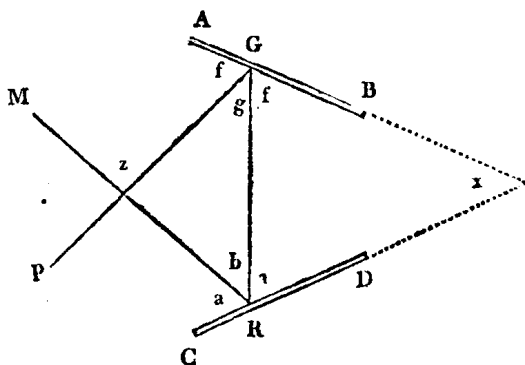
Il en serait de même si le rayon était réfléchi par plusieurs miroirs; mais dans ce cas, l'image nous paraîtrait beaucoup moins claire, car l'expérience prouve que seulement une partie de la lumière qui tombe sur un miroir, subit une réflexion régulière, tandis que l'autre partie se réfléchissant irrégulièrement, est perdue pour l'œil. Quelques physiiciens établissent même, qu'environ la moitié de la lumière est ainsi dispersée. Ce qui explique pourquoi, après plusieurs réflexions, nous voyons si peu distinctement les objets.

santes aussi bien que les surfaces planes. Mais dans le cas particulier dont nous nous occupons, il ne s'agit que de ces dernières; j'ai alors préféré la définition que je donne pour simplifier les démonstrations.

(4)



Il résulte de ce qui précède, que si un observateur se place devant un miroir CD, dont une portion ED n'est pas étamée, il pourra voir l'image d'un objet M, auquel il tourne le dos, occuper la même place que l'objet S qu'il aperçoit directement devant lui, et voir ainsi ces deux objets à la fois comme superposés ou confondus : en effet, le rayon ME ayant été réfléchi vers l'œil placé en L, l'observateur rapporte l'image de cet objet dans le prolongement de LE, sur lequel se trouve l'objet S qu'il voit directement à travers la partie non-étamée du miroir.

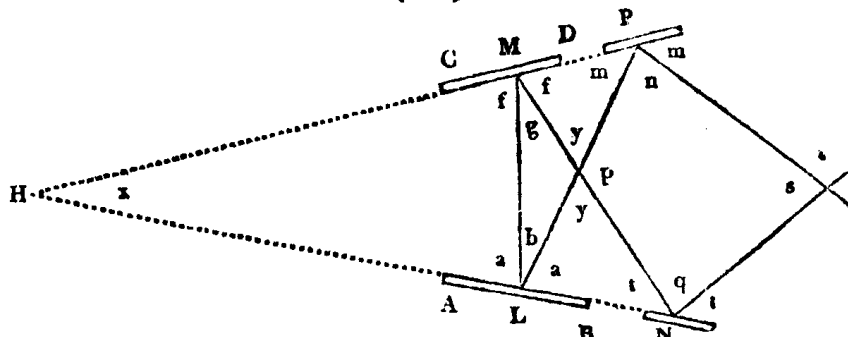


3°. *Principe.* Qu'un rayon de lumière PG tombe sur la surface d'un miroir plan AB, et que le rayon réfléchi GR soit reçu par un second miroir CD, par lequel il est de nouveau réfléchi vers M; l'angle x formé par les plans des deux miroirs sera toujours la moitié de celui z , formé par le premier rayon incident PG et le deuxième rayon réfléchi MR.

Dans le triangle fga , on a $x + a + f = 180$, et multipliant par 2 chaque membre, on aura $2x + 2a + 2f = 360$.

D'un autre côté $2f + g = 180$ et $2a + b = 180$. Additionnant ces 2 équations, on aura $2f + g + 2a + b = 360$. Donc, $2f + g + 2a + b = 2x + 2a + 2f$. Réduisant, il vient, $g + b = 2x$.

Et comme $g + b = z$ angle extérieur; $z = 2x$.



Considérons actuellement ce qui arrive lorsque chaque miroir, au lieu de réfléchir une fois le rayon, le réfléchit deux fois, comme on le voit dans la figure ci-dessus, où le rayon MN ne passe pas au-delà du miroir AB, mais rencontre une autre portion de ce miroir qui le réfléchit vers s . Supposons en outre que le rayon PL, incident à l'égard du miroir AB, soit lui-même le résultat de la réflexion du rayon sP par une portion du miroir CD, prolongé convenablement ; alors il se formera entre le premier rayon incident sP et le dernier rayon réfléchi Ns , un angle z , quadruple de l'angle x , formé par les plans des deux miroirs.

Or, comme nous avons prouvé que l'angle y est double de l'angle x , il nous reste à prouver que z est double de y .

Pour cela considérons que dans le quadrilatère $spnq$,

$$s = 360 - n - q - p,$$

et pour chercher les valeurs des trois quantités n , p et q , en fonction de x et de a , remarquons que $b = 180 - 2a$,

que le triangle PLH donne $m = 180 - a - b - x$,
et que par conséquent, en mettant pour

b sa valeur, et réduisant $m = a - x$;

mais puisque $n = 180 - 2m$, en substituant dans cette équation à m sa valeur, et se rappelant qu'il a été démontré que

$2x = y$, il vient $(n = 180 - 2a + y)$;

d'un autre côté . . . $t = 180 - y - a$;

et puisque $q = 180 - 2t$, en mettant

dans cette équation pour t sa valeur,

et réduisant, il vient $(q = 2a + 2y - 180)$.

La valeur de p se trouve directement . $(p = 180 - y)$;

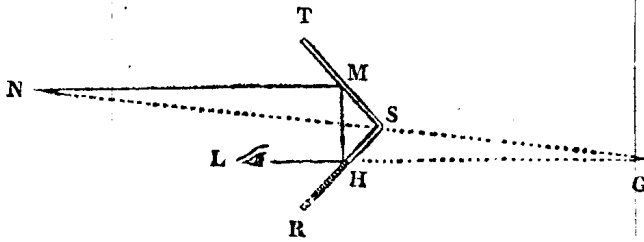
enfin en substituant ces différentes valeurs de n , de q et de p dans l'équation $s = 360 - n - q - p$, on aura

$$s = 360 - 180 + 2a - y - 2a - 2y + 180 - 180 + y,$$

et en réduisant $s = 180 - 2y$.

Or, $s = 180 - z$, donc $z = 2y$, ce qu'il fallait prouver.

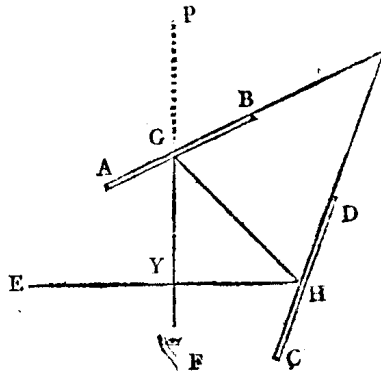
(6)



Des principes qu'on vient de démontrer il résulte :

1°. Que si un observateur place son œil en L, devant deux miroirs très-rapprochés ST et SR, formant ensemble un angle de 90 degrés ; le premier rayon incident NM et le dernier rayon réfléchi HL doivent former un angle double de celui des deux miroirs, c'est-à-dire 180 degrés, et par conséquent, dans notre supposition, les deux lignes LH et MN seront parallèles.

Soit aussi supposé que le miroir SR est en partie non-étamé, l'œil placé en L verra alors *directement* les objets placés derrière ce miroir, et par *réflexion*, ceux placés sur le rayon MN ; par conséquent si ce rayon MN émane d'un objet placé à une assez grande distance devant le miroir ST, que d'ailleurs on rapporte l'image que l'œil reçoit à un objet G, convenablement éloigné et derrière le miroir SR, il est évident qu'alors l'œil L sera très-près d'être sur la ligne droite qui joint l'objet N à l'objet G, et que dans aucun cas il ne peut en être plus éloigné que de la distance MH qui existe entre les deux points de réflexion des miroirs, que nous avons supposés très-rapprochés.

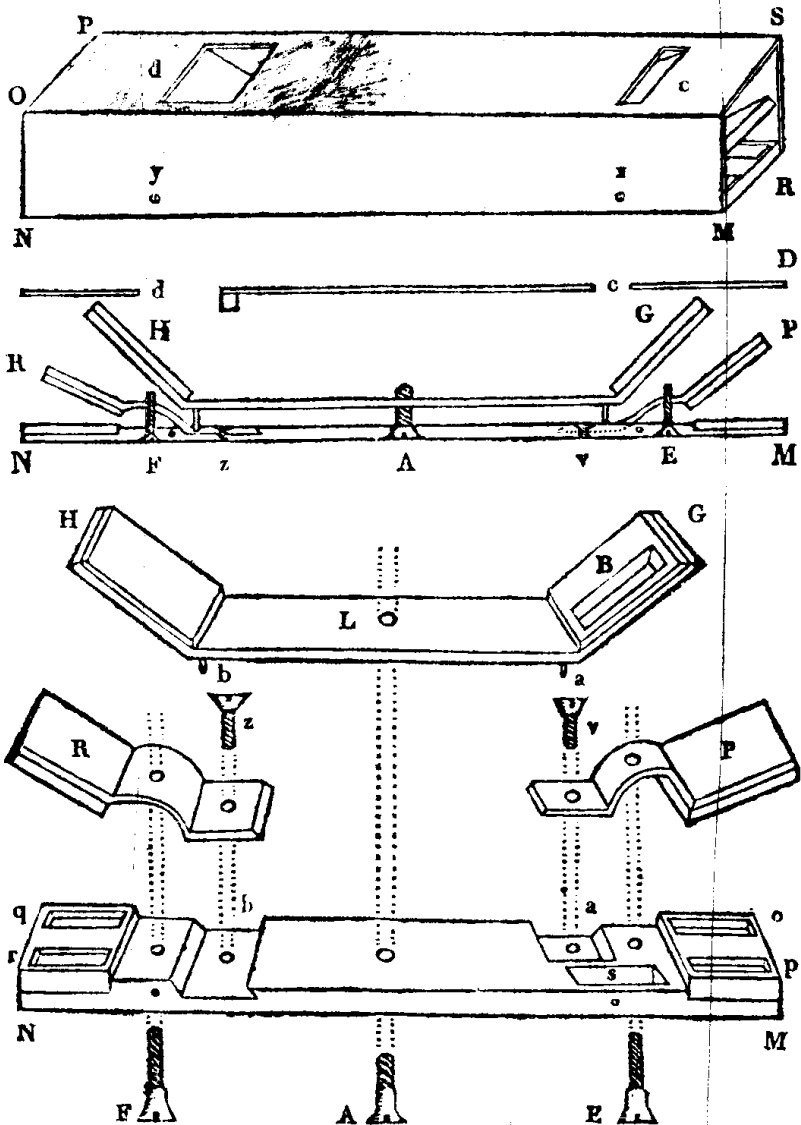


2°. Que si l'angle des deux miroirs est de 45 degrés, le rayon incident EH sera renvoyé par le miroir CD vers le miroir AB, qui, à son tour, le réfléchira vers l'œil placé en F, de telle sorte que le rayon EH sera perpendiculaire sur celui GF, et que l'œil F qui pourra se placer près de l'angle Y, verra par *réflexion* tous les objets qui sont sur la ligne EH, et directement à travers la partie non-étamée du miroir AB, les objets qui se trouvent sur le prolongement de la ligne FG; c'est-à-dire que l'œil sera placé au sommet de l'angle droit, formé entre le rayon émané d'un objet E qui se trouve à côté de l'observateur, et celui émané d'un objet P, placé devant lui, et auquel l'objet E correspondra.

On conçoit que si l'angle entre les deux miroirs était de 30 degrés, le premier rayon incident formerait avec le dernier rayon réfléchi, ou avec son prolongement, un angle de 60 degrés, et si l'angle entre les deux miroirs était de 22 1/2 degrés, ces deux rayons formeraient entre eux un angle de 45 degrés. Cependant, dans ce cas une considération essentielle mérite de fixer notre attention, (parce qu'on verra plus loin qu'elle trouve son application dans la pratique); c'est que non seulement des miroirs formant un angle de 22 1/2 degrés, peuvent faire que le premier rayon incident formera avec le dernier rayon réfléchi un angle de 45 degrés; mais si on tient ces miroirs convenablement, et de manière à ce qu'au lieu que le premier rayon se réfléchisse deux fois seulement il subisse quatre réflexions, comme j'ai démontré que cela peut avoir lieu, alors l'angle entre le premier rayon incident et le dernier réfléchi sera de 90 degrés.

Les principes de catoptrique que nous avons démontrés et les conséquences que nous en avons tirées, suffiraient déjà à un artiste exercé, pour construire une équerre à miroirs; mais afin de ne rien laisser à désirer, je donnerai ici le dessin et la description de toutes les pièces qui composent cet instrument, parce que les différens essais que j'ai faits m'ont mis à même de lui donner la forme et la dimension les plus convenables. Toutefois est-il loisible à chaque constructeur de modifier cette dernière, attendu sur-tout qu'avec un peu d'habitude, on tirera le même parti d'une très-petite équerre que d'une équerre d'un décimètre de longueur.

(8)



La première figure ci-contre représente l'équerre à miroirs lorsque toutes les pièces sont assemblées. On y voit vers le bout SRM une partie de deux petits miroirs. *c* et *d*, sont deux trous rectangulaires, au moyen desquels on découvre, dans l'intérieur, deux miroirs qui se présentent obliquement à ces ouvertures; MN a un décimètre de longueur, NO deux centimètres, et OP ou MR également deux centimètres; la couverture *MNOPS*R ouverte par les deux bouts, peut se détacher entièrement du fond NMR auquel elle est attachée par quatre petites vis, dont on voit deux en *x* et *y*.

La deuxième figure représente ce fond avec toutes ses pièces placées comme elles doivent l'être, et que l'on voit séparées dans la troisième figure à laquelle se rapportent les indications suivantes.

MN pièce de cuivre percée de cinq petites fenêtres *o*, *p*, *q*, *r*, et *s*, au-dessus des fenêtres *o* et *p* on applique un petit miroir à surfaces parallèles, de même qu'au-dessus des fenêtres *q* et *r*, l'étamage sera ôté dans les parties correspondantes aux ouvertures, et il sera conservé dans les intervalles. P et R sont deux pièces de cuivre portant chacune un petit miroir dont la surface réfléchissante est tournée vers le bas; ces pièces se fixent sur la pièce MN au moyen des vis *v* et *z*, et elles se placent dans les échancrures *a* et *b* dont la figure indique la forme. Les vis E et F sont destinées à faire varier les angles formés entre les miroirs, (lorsque ceux-ci sont placés comme on le voit dans la deuxième figure); car ces angles qui doivent être exactement l'un de 30 et l'autre de 22 1/2 degrés ne pourraient pas se construire facilement ainsi, ce qui a nécessité un moyen de rappel, que donnent les vis E et F. La pièce L est une lame de cuivre bien écroui, dont les deux extrémités, G et H, sont pliées de manière à former un angle de 90 degrés entre elles. Celle G est en outre percée d'une petite fenêtre B: on applique sur chacun de ces bouts pliés de la lame L un petit miroir, celui sur le bout G sera non-étamé dans sa partie correspondante à la petite fenêtre B. La pièce L porte en outre quatre petits pieds, dont on voit deux en *a* et *b*. Comme il est encore de rigueur que l'angle formé entre les deux miroirs portés par la pièce L soit de 90 degrés, la vis de rappel A fournira le moyen de l'obtenir très-exactement.

puisqu'elle tend à faire plier la lame *L* vers son milieu, ce qui fera évidemment varier l'angle dont il est question.

L'artiste qui entreprendra la construction d'une équerre, doit mettre la plus grande attention dans le choix des petits miroirs, les meilleurs seraient certainement ceux à surfaces parallèles, mais on n'est pas toujours à même de s'en procurer; à leur défaut donc, et si on veut se contenter d'un instrument *un peu* moins parfait, on en choisira de verre, dit de Bohême, dont l'épaisseur étant moindre que celle des glaces, convient mieux à la construction de l'instrument. Si on a la facilité de faire étamer, il sera bon, après avoir coupé un certain nombre de verres, de la dimension requise, de les vérifier, en les tenant à quelque distance de l'œil, et en examinant, si en leur communiquant un léger mouvement, les objets qu'on voit à travers ne semblent pas trop sensiblement changer de place, ce qui prouverait que le verre ne serait pas propre à faire un miroir convenable; après avoir fait un choix parmi tous les morceaux qu'on aura coupés de la grandeur et de la forme voulues, il faudra user leurs bords en biseau pour que la sertissure soit plus facile et plus propre, ensuite on fera mettre au tain. Jamais il ne faut employer des miroirs de verre commun, car bien qu'il s'en trouve qui, en apparence, sont nets et clairs, ils ont toujours des stries, ou des surfaces tellement irrégulières qu'ils défigurent tous les objets qu'ils réfléchissent à quelques pas de distance.

Les personnes qui n'ont jamais fait usage de l'équerre à miroirs, trouveront au premier abord quelque embarras pour opérer avec cet instrument, cependant les observations ci-après faciliteront tellement son emploi, qu'il ne faudra que très-peu de tems pour être en état de s'en servir avantageusement.

Pour se mettre sur la ligne droite qui joint deux objets :

On se placera aussi près de cette ligne qu'on pourra le faire, sans le secours d'aucun instrument; ensuite on tournera le dos à l'un des deux objets, et en fermant un œil on portera devant l'autre, l'ouverture *c* (1^{re} figure de la page 8). Ayant soin que l'équerre qui a la forme d'un parallélogramme soit tenue horizontalement dans le sens de la longueur, et que l'ouverture *d* soit au-delà des parties de la tête qui pourraient empêcher les rayons de lumière venant de l'objet

auquel on tourne le dos , d'arriver sur le miroir qui correspond à cette ouverture ; on verra dans cette position , par *réflexion* l'objet qu'on a derrière soi , et *directement* à travers la partie non-étamée du miroir qui correspond à l'ouverture c l'objet qu'on a en face. Marchant alors soit à droite soit à gauche , (sans changer la situation de l'équerre par rapport à l'œil) , on arrivera sur la ligne droite qui joint les deux objets , au moment où ceux-ci paraîtront superposés.

Pour trouver sur une direction donnée , le point où tombe la perpendiculaire abaissée d'un point donné.

Étant posé sur cette direction , faites face au point duquel doit être abaissée la perpendiculaire , ensuite tenez l'équerre horizontalement et portez l'œil à l'extrémité ouverte où se trouvent les deux miroirs formant un angle de $22\frac{1}{2}$ degrés , l'équerre sera en outre tournée de manière à ce que l'on voie *directement* à travers les deux petites fenêtres l'objet qu'on a devant soi , et par *quadruple* réflexion l'objet qui se trouve à l'une des extrémités de la ligne sur laquelle on est placé. Si ces deux objets ne se superposent point , on marchera à droite ou à gauche jusqu'à ce que cette superposition ait lieu , et alors on se trouvera au point où tombe la perpendiculaire.

Pour trouver sur une direction donnée , le point où tombe l'oblique à 45 degrés menée d'un objet donné.

Étant placé sur la direction donnée , à peu-près au point où l'on pense que tombe cette oblique , on fera face à l'objet par lequel elle passe ; ensuite avec l'œil tenu près des miroirs qui forment $22\frac{1}{2}$ degrés on verra à travers les petites fenêtres *directement*, cet objet , et par *double réflexion* celui qui se trouve à l'extrémité de la direction donnée , marchant ensuite sur cette direction jusqu'à ce que les deux objets se confondent , on arrivera au point où tombe l'oblique. Mais pour que la double réflexion ait lieu en place de la *quadruple* , comme dans le cas précédent , il convient de tenir l'équerre de manière à ce qu'elle soit presque parallèle à la tangente qui toucherait en même tems le globe de l'un et de l'autre œil.

Pour trouver sur une direction donnée le point où tombe l'oblique à 60 degrés.

On opérera ici de la même manière que pour l'oblique à 45 degrés , seulement on aura soin de se servir des miroirs for-

mant un angle de 30 degrés, et de n'observer que par la *double réflexion*, car pour cet angle il existe aussi le moyen de voir par une *quadruple réflexion*, qui produit alors un angle de 120 degrés.

Pour déterminer la direction d'une ligne de niveau sur le terrain.

On plantera un jalon auquel on donnera l'inclinaison convenable pour qu'un fil-à-plomb, attaché à son extrémité supérieure, réponde au point du terrain dont on veut faire partir la ligne de niveau; on placera ensuite un petit morceau de papier blanc par terre, ayant soin que son bord soit perpendiculaire à la direction dans laquelle on veut niveler, et réponde à la verticale du fil-à-plomb. Après ces légers préparatifs, on fera usage des miroirs qui forment un angle de $22\frac{1}{2}$ degrés, afin que par la *quadruple réflexion* on puisse observer un angle droit, en tenant le bout de l'équerre très-exactement au sommet du jalon. C'est ainsi qu'on verra le bord du papier dans une direction horizontale, et si alors on fait planter à 3 ou 4 mètres de distance du premier jalon un second jalon, dont le sommet se trouve sur la ligne horizontale, il est clair qu'on aura deux points de niveau qui serviront à en déterminer une infinité d'autres, en procédant comme avec un niveau-d'eau, dans lequel la surface du liquide est ici remplacée par les sommets des deux jalons.

Pour faire les opérations précédentes nous avons supposé que l'équerre est bien dressée, c'est-à-dire, que les angles formés par les miroirs sont exactement de 90, 30 et $22\frac{1}{2}$ degrés, mais il pourrait arriver que cela ne fût pas, alors on y remédierait de la manière suivante:

Pour régler l'angle de 90 degrés servant à déterminer l'alignement.

Après s'être placé sur la ligne droite qui joint deux objets, ainsi que nous l'avons dit plus haut, on se retournera pour voir si l'objet qu'on avait d'abord en face, correspond encore à l'objet auquel on tournait le dos, si cela arrive l'angle des miroirs est exactement de 90 degrés, mais dans le cas contraire il faudra le rectifier; et pour faire cette rectification on marquera la place à laquelle on a trouvé une première superposition des deux objets. S'étant retourné on marchera

à gauche ou à droite jusqu'à ce qu'on arrive à la place où les deux mêmes objets se superposent de nouveau, mesurant alors la distance entre ces deux places, et se mettant à la moitié de cette distance, on sera effectivement sur la ligne qui joint les deux objets, et il ne s'agit plus alors que de tourner la vis de rappel, jusqu'à ce qu'en regardant dans les miroirs, les deux objets se superposent quelque soit celui qu'on ait en face. On pourrait aussi, si on voulait jalonner d'avance, se placer vers le milieu d'une ligne jalonnée et alors faire mouvoir la vis de rappel jusqu'à ce que les jalons qu'on aura eu soin d'établir aux extrémités de la ligne, se superposent. Mais la première méthode que nous venons d'indiquer est beaucoup plus expéditive.

Pour régler les miroirs qui doivent former l'angle de 22 1/2 degrés, servant à élever des perpendiculaires et des obliques à 45 degrés.

Etant placé sur la ligne qui joint deux objets, de manière à ce qu'on ait un de ces objets à sa droite, et l'autre à sa gauche, on s'approchera ou on s'éloignera de ce dernier jusqu'à ce qu'un troisième objet, bien distinct et suffisamment éloigné, se trouve sur la perpendiculaire, vraie ou fausse, indiquée par l'équerre, ensuite, sans quitter le premier alignement, et tournant le dos à l'objet qu'on avait à sa gauche, on examinera si, au moyen de l'équerre, on peut faire correspondre l'objet sur la perpendiculaire avec l'objet qu'on avait à sa droite; si cette correspondance a lieu, l'équerre est bien dressée; dans le cas contraire, l'angle des miroirs devra être rectifié au moyen de la vis de rappel à ce destinée, jusqu'à ce qu'enfin l'objet placé sur la perpendiculaire, vienne correspondre aussi exactement sur l'objet à droite que sur celui à gauche.

Les miroirs ainsi dressés pour la perpendiculaire le seront nécessairement pour l'oblique de 45 degrés : cela résulte de tout ce que nous avons dit relativement à la double et quadruple réflexion des rayons (pages 4 et 5).

Pour régler les miroirs qui doivent former l'angle de 30 degrés, servant à élever des obliques à 60 degrés.

Après avoir choisi un alignement dont les deux extrémités sont déterminées par des objets bien distincts, on s'y

placera au moyen de l'équerre au point où tombe l'oblique, vraie ou fausse, de 60 degrés, qui passerait par un troisième objet choisi hors de cette ligne ; pour cette opération on fait usage de la double réflexion, et si nous supposons que l'angle de 60 degrés est formé avec la partie de l'alignement que nous avons à notre droite, il faut nécessairement, si l'angle des miroirs est de 30 degrés, que la même oblique forme, avec la partie de l'alignement que nous aurons à notre gauche, un angle de 120 degrés ; ce que nous pouvons vérifier, en faisant usage de la *quadruple* réflexion. S'il arrivait que nous trouvions un angle trop grand ou trop petit, on changerait celui des miroirs, au moyen de la vis de rappel, mais alors il faudrait changer aussi de position sur l'alignement, pour trouver le point où tombe l'oblique de 60 degrés, et procéder ainsi, jusqu'à ce que l'angle qui se forme entre l'oblique et l'alignement à droite soit de 60 degrés, et que l'angle entre la même oblique et l'alignement à gauche soit de 120 degrés.

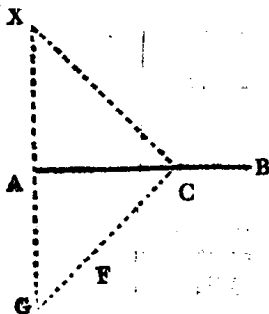
Après avoir décrit dans tous ses détails un instrument qui, depuis deux ans rend d'importans services à MM. les Géomètres du Cadastre du Grand-Duché de Luxembourg, en leur facilitant le moyen d'opérer, tout à la fois avec plus de célérité et plus de précision, il ne sera peut-être pas hors de propos de faire connaître le parti que pourront tirer, de l'équerre à miroirs, toutes les personnes appelées par leur profession à faire des opérations sur le terrain, et de démontrer, par la résolution de quelques problèmes, que son usage est beaucoup plus général qu'on ne le suppose au premier abord. Il n'est en effet pas de travaux de *détail* d'ingénieur civil ou militaire en campagne, qui ne puissent s'exécuter avec toute la précision désirable, au moyen de cet instrument, dont le volume peut être réduit à celui d'un parallépipède de huit centimètres de longueur sur quinze millimètres de largeur et d'épaisseur, dimensions que j'ai données à celui dont je me sers habituellement, et qui a été construit par Monsieur Lyon, horloger-mécanicien à Luxembourg, auquel pourront s'adresser les personnes qui voudraient se procurer une équerre à miroirs, ou d'autres instrumens de géodésie, qu'il construit également avec toute l'exactitude et le soin qui caractérise un mécanicien aussi habile qu'ingénieux.

PROBLÈMES

QU'ON PEUT RÉSOUDRE

AVEC L'ÉQUERRE A MIROIRS (*).

I^{er}. PROBLÈME. *Etant donné le point A, trouver sa distance au point X inaccessible.*

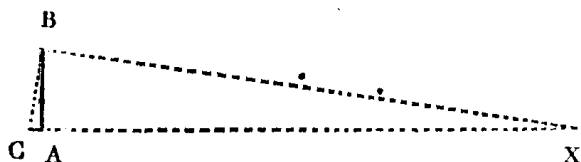


Solution. Du point A on déterminera la direction AB telle que AX lui soit perpendiculaire ; sur cette direction, on cherchera le point C, duquel l'oblique à 45 degrés passe par le point X ; mesurant ensuite AC, on trouvera la distance AX, puisque ces deux lignes sont évidemment égales.

S'il arrivait que des obstacles empêchassent de mesurer dans la direction AB, et que le mesurage fût possible ou plus facile sur le prolongement de XA, alors on fera planter un jalon F, sur une direction perpendiculaire à XC ; mesurant ensuite depuis A jusqu'au point G, situé sur l'alignement du jalon F et de celui qu'on aura laissé en C, on aura encore la distance demandée. S'il arrivait que F fût tellement situé, que du point G le point C ne pût s'apercevoir, (comme cela aurait effectivement lieu si F était sur une trop grande élévation), il faudrait alors déterminer G, en faisant l'angle $FGA = 45$ degrés.

(*) On se bornera à donner la solution des problèmes sans les démontrer. Chaque lecteur pouvant, à l'aide des principes de la géométrie élémentaire, trouver lui-même les démonstrations.

2°. PROBLÈME. Soit X un point inaccessible, dont il faut déterminer la distance au point A , avec la restriction qu'on ne peut mesurer, ni même se transporter qu'à une distance très-limitée, à droite, ou à gauche et en arrière du point donné.



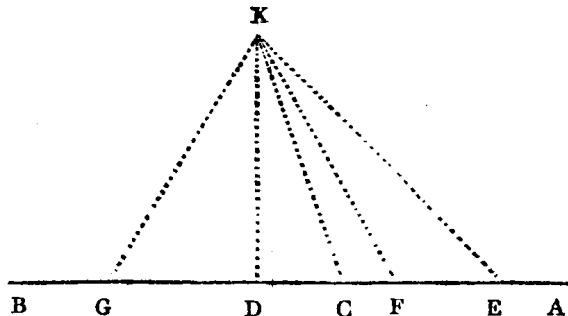
Solution. Au point A je détermine la direction d'une perpendiculaire sur AX , et au point B sur cette perpendiculaire, je détermine la direction d'une seconde perpendiculaire BC sur BX , C étant sur l'alignement de AX . Je signale ensuite soigneusement, au moyen de jalons, les points A , B et C ; tous les trois étant renfermés dans les limites de l'espace hors duquel on ne peut aller; mesurant enfin très-exactement les lignes AB et AC , on sera à même d'établir la proportion $AC : AB :: AB : AX$, de laquelle résulte la valeur de $AX = \frac{AB^2}{AC}$.

Il convient de faire ici l'observation que, ce procédé rigoureusement exact en théorie, cesse de l'être jusqu'à un certain point en pratique, sur-tout quand AB est très-petit par rapport à AX ; car en supposant que $AX = 500$ mètres et $AB = 20^m$ seulement, alors $AC = 0,8$; or, si l'on commettait une erreur, soit en plus, soit en moins, d'un centimètre, en mesurant AC , et d'un décimètre, en mesurant AB , on peut avoir, si ces deux erreurs concourent dans le même sens, jusqu'à 12,5 mètres d'erreur sur la détermination de la distance AX , mais aussi sur d'aussi petites distances que le sont les lignes AB et AC , admettons-nous le maximum de

l'erreur possible dans le mesurage, pour peu qu'on opère avec attention ; en sorte que dans le procédé qu'on vient d'indiquer on trouve une approximation de la valeur de AX , suffisante dans bien des cas, et notamment lorsqu'il est question de déterminer la distance d'une batterie à l'ouvrage contre lequel elle doit agir.

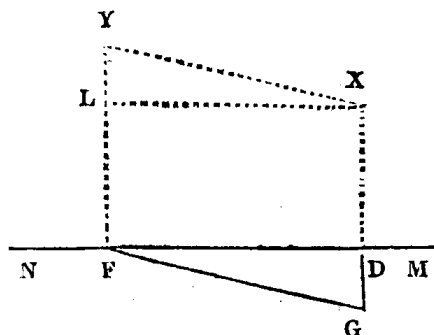
Le problème 4°. ci-après donnera au reste un moyen plus certain pour trouver la distance de A à X , quand les localités ou les circonstances permettent d'opérer à quelque distance en arrière de la batterie ; mais déjà, celui que nous proposons est pour le moins aussi exact, et certainement plus facile, *en admettant les mêmes conditions*, que les opérations trigonométriques faites au graphomètre.

3°. PROBLÈME. Soit proposé de déterminer la distance du point C au point X inaccessible, en supposant qu'on ne puisse mesurer que sur une direction déterminée AB , et que ni du point C , ni du point D , pied de la perpendiculaire abaissée de X , sur la direction AB , on ne puisse voir X .



Solution. Sur la direction AB on détermine le point E , où tombe l'oblique à 45 degrés, passant par le point X ; on détermine aussi les points F et G , où tombent les obliques à 60 degrés, passant par le même point ; ensuite on mesure les lignes EF et FG , et on fait $FD = \frac{FG}{2}$. D sera alors le pied de la perpendiculaire ; or, $FD + FE = ED = DX$, et comme on peut mesurer DC , on aura par le triangle rectangle CXD , $CX = \sqrt{DX^2 + CD^2}$.

4°. PROBLÈME. *Etant donné deux points inaccessibles X et Y, trouver la longueur de la droite XY qui les joint, et déterminer à un point pris à volonté sur le terrain, la direction d'une perpendiculaire et d'une parallèle à cette même droite.*



Solution. Sur la partie accessible du terrain, on choisira une direction MN, au moyen de laquelle on puisse déterminer, par l'un des procédés déjà indiqués, la longueur des perpendiculaires XD et YF, élevées sur cette direction, et passant par les points X et Y; après on prolongera la plus courte des deux perpendiculaires vers G, jusqu'à ce que DG soit égale à la quantité dont YF dépasse XD; alors la longueur de FG (qu'on peut mesurer) sera celle de la droite XY. La seconde partie du problème ne présentera aucune difficulté, si l'on fait attention que, puisque GF est parallèle à XY, on peut élever une perpendiculaire sur cette ligne, passant par un point donné, et que cette perpendiculaire sera par conséquent celle demandée; quant à la parallèle à mener, il suffira de faire au point donné, un angle droit, avec la perpendiculaire à XY et à GF.

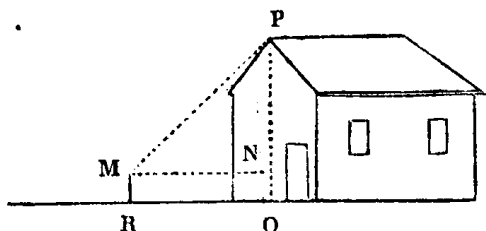
Il pourrait arriver que les deux points X et Y fussent situés, par rapport à l'observateur, de manière à ce que celui-ci trouvât, dans la partie accessible du terrain, à se placer sur l'alignement de ces deux points. Dans ce cas, il faudrait établir une direction perpendiculaire à cet alignement, et déterminer la distance de chacun des points X et Y au sommet de l'angle droit; il est évident qu'alors la différence

entre ces deux distances, sera égale à celle du point X au point Y. Ce procédé serait applicable au cas particulier dont nous avons fait mention dans le 2^e. problème ; car X étant le point de la batterie dont on veut connaître la distance au point Y, on pourra se transporter en arrière sur l'alignement de ces deux points et opérer comme nous venons de le dire.

Le terrain peut offrir bien des obstacles qui empêchent d'opérer comme je l'indique ; mais un Géomètre intelligent trouvera toujours quelque moyen de parvenir à son but. C'est ainsi, par exemple, que l'on pourrait déterminer la valeur de XY, dans la supposition que le prolongement XD, ainsi que le mesurage de GY fussent impossibles, et que l'on fût contraint d'opérer sur la seule ligne MN, que l'on peut supposer être la direction d'un chemin sur le bord d'un bois ; il faudrait alors, après avoir déterminé XD, DF et FY, calculer XY par le moyen du triangle rectangle XLY, dans lequel on connaît $XL = DF$ et $YL = FY - DX$.

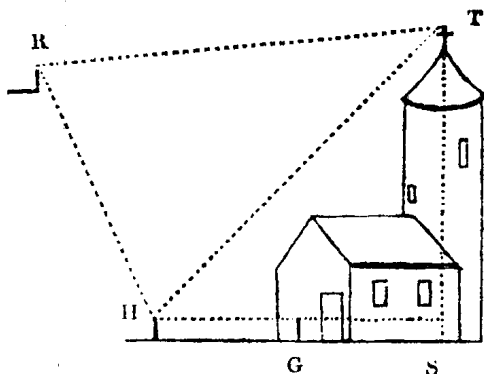
Il est certainement digne de remarque que le problème dont nous venons de donner la solution, nous met à même ; en faisant usage d'un instrument aussi simple qu'une équerre à miroirs, de déterminer la valeur *des angles* et des côtés d'un triangle dont toutes les parties sont inaccessibles. Cependant cela est évident, car, puisqu'on peut trouver la distance de deux points inaccessibles, on peut aussi trouver celle de chacun de ces points à un troisième point, et connaître ainsi les trois côtés du triangle, et par suite chacun de ses angles.

5^e. PROBLÈME. *Déterminer la hauteur verticale PO, dans la supposition que OR est accessible et sur un terrain horizontal.*



Solution. Au point N contre l'objet, on fait une marque à la hauteur de l'œil, ensuite on se retire en arrière jusqu'à ce qu'en M on trouve que l'extrémité supérieure de l'objet forme avec la marque N un angle de 45 degrés, alors la ligne $NM = NP$, et en y ajoutant ON , hauteur de l'œil, on aura PO , hauteur demandée.

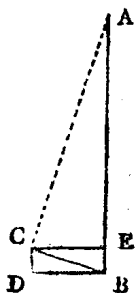
6°. PROBLÈME. Déterminer la hauteur ST , dans la supposition que le terrain est horizontal, mais que le point S est inaccessible, et qu'un obstacle empêche de le voir.



Solution. On place d'abord le plus près possible de l'obstacle un jalon G qui soit égal en hauteur à celle de l'œil; ensuite on recule jusqu'à ce qu'on trouve l'angle GHT de 45 degrés, H étant choisi dans le plan vertical qui passe par les points TS . Au point H , on détermine une direction sur le terrain qui soit accessible, et qui fasse avec la ligne TH dans l'espace, un angle de 60 degrés; sur cette direction on choisit le point R tel, que l'angle TRH soit également de 60 degrés, alors le triangle TRH sera équilatéral, et comme le côté HR peut être mesuré, on connaîtra le côté TH ; mais TH est l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle; donc

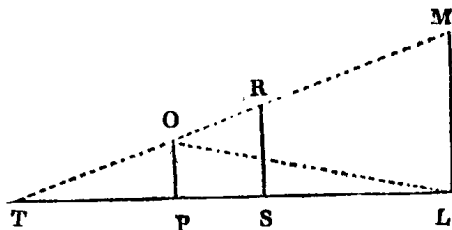
$$ST = \sqrt{\frac{TH^2}{2}} = \sqrt{\frac{HR^2}{2}}.$$

7°. PROBLÈME. Soit proposé de trouver la hauteur d'un objet vertical AB dont on peut approcher, mais dont on ne peut s'éloigner suffisamment, pour que l'angle formé entre l'œil et les lignes menées des extrémités de l'objet, soit de 45 degrés.



Solution. On s'éloigne de l'objet jusqu'à ce qu'on trouve, sur le terrain supposé horizontal, un point D tel, que les lignes menées des points A et B, forment, avec l'œil supposé en C, verticalement au-dessus du point D, un angle droit; imaginant ensuite que du point C on ait abaissé la perpendiculaire CE sur AB, et mesurant $BD = EC$, on pourra établir la proportion $BE : CE :: CE : EA$, de laquelle on tire la valeur de $AE = \frac{CE^2}{BE}$, et par conséquent celle de $AB = \frac{CE^2}{BE} + BE$.

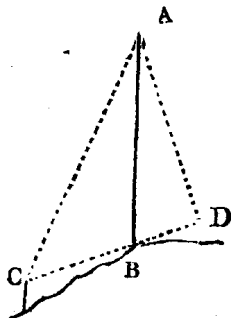
8°. PROBLÈME. *Trouver la hauteur verticale LM, dans la supposition que le terrain horizontal présente des obstacles qui empêchent de s'approcher assez de l'objet, pour que l'angle formé par les lignes MO et LO, menées de ses extrémités à l'œil O, puisse être de 45 degrés.*



Solution. Au point S que nous supposons être la limite de la partie accessible du terrain, on placera un jalon SR d'une hauteur connue et plus grande que celle de l'œil; reculant ensuite, on cherchera le point où l'œil de l'observateur debout, apercevra l'extrémité du jalon SR, correspondant à l'extrémité M de l'objet. Cela étant fait, on déterminera séparément la longueur de OM et de RO, au moyen de l'angle de 60 degrés (en procédant comme nous l'avons fait dans le 6°. problème, pour déterminer la ligne HT).

Ces données suffisent pour établir, 1°. la proportion $RS : RO + OT :: PO : OT$, d'où $OT = \frac{PO \times RO}{RS - PO}$,
et 2°. celle $TR : TM :: SR : LM$, d'où $LM = \frac{TM \times SR}{TR}$,
équation dans laquelle le second membre est entièrement connu.

9°. PROBLÈME. Un objet étant sur un terrain incliné, trouver sa hauteur AB , dans la supposition que l'on peut observer l'angle de 45 degrés, formé par les lignes menées des extrémités de l'objet au point C où se trouve l'œil.



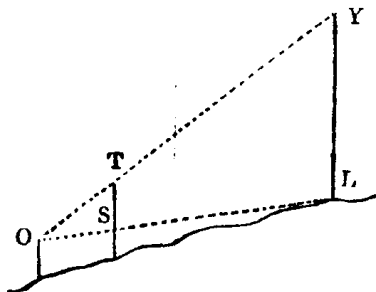
Solution. Après avoir cherché le point où l'angle ACB est de 45 degrés, on déterminera la longueur de AC et de BC par le procédé déjà employé dans les problèmes précédens ; on imagine ensuite BC prolongé jusqu'à la rencontre de AD , qui doit former avec AC un angle de 45 degrés. Le triangle CAD sera alors rectangle en D , et isocèle ; d'où il résulte que $AD = DC$, et que $AC^2 = 2AD^2$, ou que $AD^2 = \frac{AC^2}{2}$, et par conséquent que $AD = \sqrt{\frac{AC^2}{2}}$; mais $DB = DC - BC = AD - BC$, donc $DB^2 = AD^2 - 2AD \times BC + BC^2$, ou en mettant pour AD et AD^2 leurs valeurs, $DB^2 = \frac{AC^2}{2} - 2 \left(\sqrt{\frac{AC^2}{2}} \times BC \right) + BC^2$. Or, le triangle rectangle ADB donne $AB^2 = AD^2 + DB^2$, et substituant dans cette dernière équation à AD^2 et DB^2 leurs valeurs trouvées, et réduisant, il vient, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \sqrt{\frac{AC^2}{2}} \times BC$, équation qui peut se transformer en celle-ci, plus facile à calculer, $AB = \sqrt{(AC - BC)^2 + (AC \times BC) \times (2 - \sqrt{2})}$.

L'expression $2 - \sqrt{2} = 0,5857864$, à un dix millionième près.

Nous ferons ici la remarque, que si le terrain était incliné en sens contraire, c'est-à-dire, que si C était plus haut que le point B , alors la perpendiculaire AD tomberait en dedans

du triangle ABC, et alors $DB = BC - DC$, tandis que nous avons dans l'autre supposition $DB = DC - BC$; mais ce changement de signe ne produit point de changement dans la valeur finale de AB. Si on veut supposer que $DB = 0$, ce qui aurait lieu si le terrain était horizontal, $AB = \sqrt{\frac{AC^2}{2}}$, comme $ST = \sqrt{\frac{TH^2}{2}}$ dans le 6^e. problème.

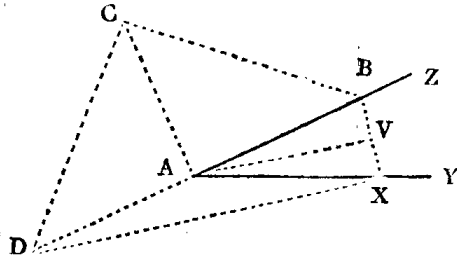
10^e. PROBLÈME. Soit proposé de trouver la hauteur d'un objet LY, situé sur un terrain incliné, dans la supposition que des obstacles empêchent d'approcher assez près de cet objet, pour que l'angle formé par les lignes YO et LO, menées de ses extrémités à l'œil O, puisse être de 45 degrés.



Le moins loin possible de l'objet YL on placera un jalon, dont il convient de couper le sommet en pointe, se retirant ensuite en arrière jusqu'à ce que le bout de ce jalon réponde au point Y, on remarquera, sans déplacer l'œil (qu'on pourra tenir pour cela tout contre le bout d'un second jalon), à quel point du premier jalon passe le rayon visuel qui se dirige vers L; et supposant que ce soit au point S, il ne s'agira plus alors que de mesurer exactement la partie de ce jalon, comprise entre S et T. Les lignes OY et TO se mesureront aussi, mais par les méthodes déjà indiquées dans les problèmes précédens, à moins que la distance de l'œil au jalon n'étant pas très-considérable, on préfère mesurer RO directement. On obtient ainsi les données nécessaires pour établir la proportion suivante :

$$TO : TS :: OY : YL, \text{ d'où } YL = \frac{TS \times OY}{TO}.$$

11°. PROBLÈME. Soit proposé de trouver la ligne VA qui partage l'angle ZAY en deux parties égales, sous la condition qu'on ne pourra mesurer aucune ligne.



Solution. Au point B pris à volonté sur le côté ZA je place un jalon, et je détermine la direction BC, faisant un angle de 45 degrés avec BA ; en A j'élève une perpendiculaire, et au point C où cette perpendiculaire coupe la ligne BC, je place un second jalon ; je cherche ensuite sur le prolongement de ZA le point D, où l'angle ADC est également de 45 degrés, ce qui donne $DA = AB$; après avoir placé un troisième jalon au point D, je viens sur le côté AY de l'angle donné, déterminer le point X, où les lignes DX et AB sont perpendiculaires ; enfin sur la ligne XB je cherche le point V auquel tombe la perpendiculaire passant par A, et ce point déterminera la ligne qui partage l'angle ZAY en deux parties égales.

La solution de ce problème qui est fondée sur ce que l'angle DXB est un angle droit qui peut être considéré comme ayant son sommet à la circonférence dont DB est le diamètre, et par conséquent AB et AX des rayons égaux, m'avait infructueusement occupé, lorsque Mr. VON PRANGEN, Major du génie, au service de S. M. le Roi de Danemark, à qui je l'avais proposé, a trouvé la seule méthode que je crois exister, pour le résoudre.

Je terminerai cette notice en engageant les personnes auxquelles il resterait quelque doute sur l'utilité DE L'ÉQUERRE A MIROIRS, ou sur la facilité de son emploi, à consulter l'expérience, car je suis assuré qu'elles trouveront alors que dans tout ce que j'ai dit, je n'ai point exagéré les avantages que procure cet instrument.

