Géométrie:

Notions fondamentales:

1) le corps: ou volume:

a trois dimensions:
longueur, largeur, hauteur et il
est limité par des surfaces.

2) la surface:

n'a plus que 2 dimensions:
longueur et largeur, elle est li-
mitée par des lignes.

3) la ligne :

n'a seulement une dimension, la longueur et est limitée par des points.

4) le point :

n'a plus de dimensions.

Un point qui se déplace engendre une lig

Une ligne — — —— — une surface

Une surface — — — — un corps

Pour marquer un point, on dessine 2 trai qui se croisent. X A

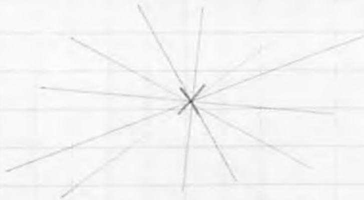
on place à côté une lettre majuscule

~~Par~~ Parmis toutes les lignes, la ligne droite ou la droite est la plus simple.

Un fil bien tendu nous en donne une image.

X

Par un point on peut mener une infinité de lignes droites:



Par 2 points passe une droite et une seule.

Une droite peut :

1) glisser sur elle même : 

2) tourner autour d'elle même, sans sortir de sa position.

La ligne droite est le plus court chemin entre 2 points.

La ligne droite est illimitée dans les 2 sens

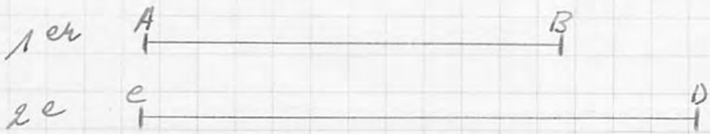
0 = (origine) } une demi-droite

Une droite limitée d'un côté par un point et illimitée de ~~d~~ l'autre s'appelle une demi-droite.

un segment A - B
— — a
— — de droite

Une portion de droite limitée par
un fragment
2 points s'appelle un segment de droite

Comparaison des segments.



Plaçons l'origine du 1er sur l'origine du 2e. Alors 3 cas peuvent se produire:

a) l'extrémité du 1er (B) tombe entre C et D

segment AB < CD

b) B tombe sur D

AB = CD

c) B tombe à l'extérieur de CD

AB > CD

Parmi toutes les surfaces, il y en a une qui est la plus simple, c'est la Surface plane, ou plane ou le plan. (Ebene).

Une image d'un plan nous est donné par la surface d'un liquide en repos.

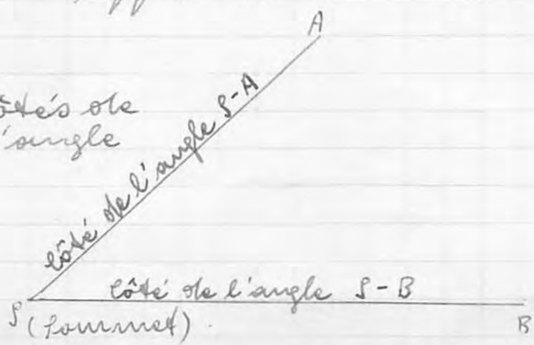
Le plan est la seule surface sur laquelle on peut tracer des lignes droites dans toutes les directions.

La géométrie qui étudie les figures tracées sur un plan sont nommés géométrie plane = (planimétrie)

Angles:

Définition: Un angle est la figure formée par 2 semi-droites issues d'un même point, qui est appelé sommet de l'angle.

S - A) côtés de
S - B) l'angle



la Désignation:

1) $A\hat{S}B$ / $B\hat{S}A$ / $\sphericalangle ASB$ /

2) $\hat{S}$ ou $\sphericalangle S$

3) angle α

4) SB, SA

le sommet doit se trouver toujours entre les autres lettres. ($A\hat{S}B$)

lettres grecques pour la désignation:

α	β	γ	δ	ε	ω
Alpha	Bêta	Gamma	Delta	Epsilon	Omega

Différentes sortes:
(d'angles:)

On peut obtenir encore un angle en faisant tourner une ~~demi-~~ demi-droite autour de son origine.

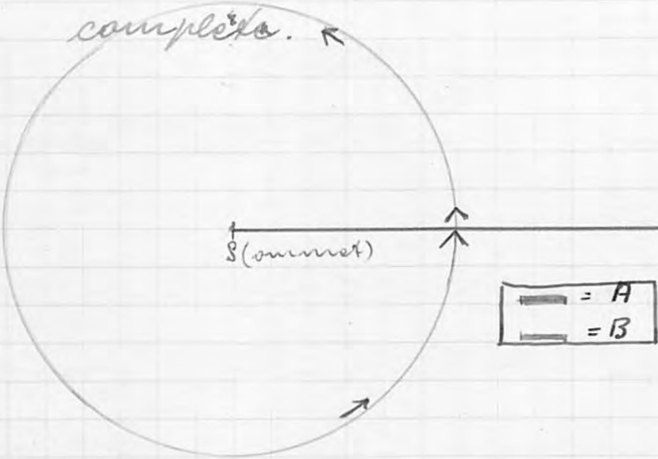
Il s'agit alors de 3 angles:

1/ angle ~~replet~~ complet (360°)

2) angle neutre (180°)

3) angle droit (90°)

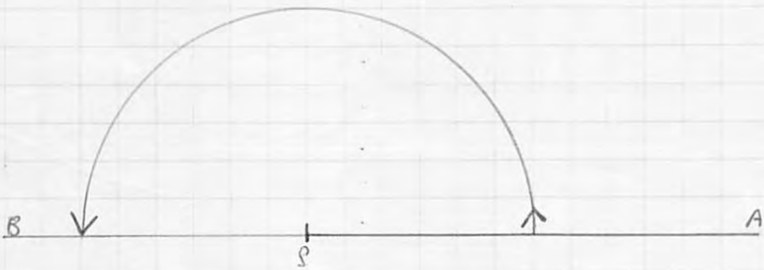
a) la semi-droite effectue un tour (rotation) complète.



Angle replet

côtés SA et SB se coïncident.

b) la côté fait une demi-rotation complète

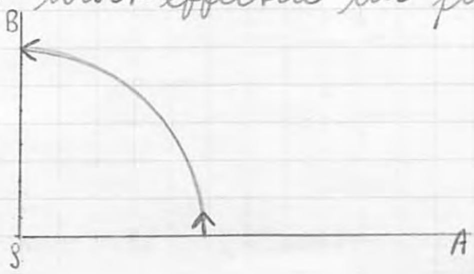


Angle neutre

côtés sont dans le polongement de l'autre

Tous les angles neutres sont égaux, car on peut toujours placer 2 droites l'une sur l'autre, de façon qu'elles se coïncident.

c) la semi-droite effectue un quart de tour.



Angle droit.

les côtés sont perpendiculaires l'un à l'autre (senkrecht.)

$SA \perp SB$

Un angle droit vaut la moitié d'un angle neutre.

Tous les angles droits sont égaux car chacun est la moitié d'un angle neutre et tous les angles neutres sont égaux.

Mesure des angles:

L'unité est l'angle droit = 1 D

on partage un angle droit en 90 parties égales, chacune représente un degré = 1°

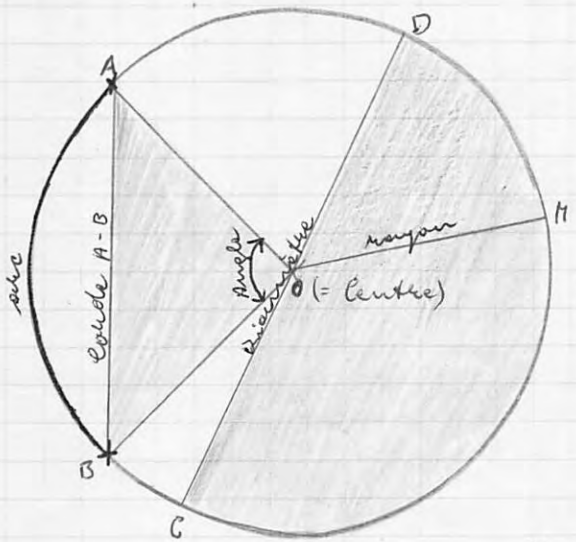
1 D = 90°

Une ~~minute~~ degré est partagé en 60 parties égales appelés minutes 1° = 60' (minutes)

Une minute : 1' = 60" (secondes)

le Cercle:

Définition: le cercle est une ligne courbe fer-mée située dans un plan et dont tous les points sont à égales distances d'un point fixe, appelé centre du cercle:



Centre = O

le rayon: M(O-M)

est la distance d'un point du cercle au centre.

Tous les rayons d'un même cercle sont égaux.

A - B (~~courbe~~)

est un arc. C'est une partie du cercle limité par ces 2 points: arc A-B ou $\overset{\frown}{AB}$

Corde A - B = $\overline{AB}$

la corde est un segment compris entre 2 points du cercle.

le diamètre est une corde qui passe vers le centre.

Angle:

Il a au centre O pour sommet, le centre du cercle et pour côté deux rayons. (A - $\hat{O}$ - B

Tous diamètres d'un cercle sont égaux, car chaque diamètre vaut le double d'un rayon

Dans une rotation autour de son centre. le cercle ne sort jamais de sa position, il glisse sur lui-même.

Théorème:

Tout diamètre partage le cercle en 2 parties égales:

1) Hypothèse: Cercle : centre O / C-D = diamètre

C-D passe par o

2) Conclusion:

le diamètre partage le cercle en 2 parties égales. C M D = C N D

3) Démonstration:

Faisons tourner la partie supérieure C M D de 180° autour de O, D tombe sur C et au même moment C sur D.

Parce que le cercle glisse sur lui-même l'arc D M C tombera exactement sur l'arc. C M D. les 2 sont donc égaux

4). C. Q. F. D. (ce qu'il fallait démontrer.)
(allem. w. z. b. w.) (was zu beweisen war)
(latin. q. e. d.) (quod erat demonstr.)

Théorèmes:

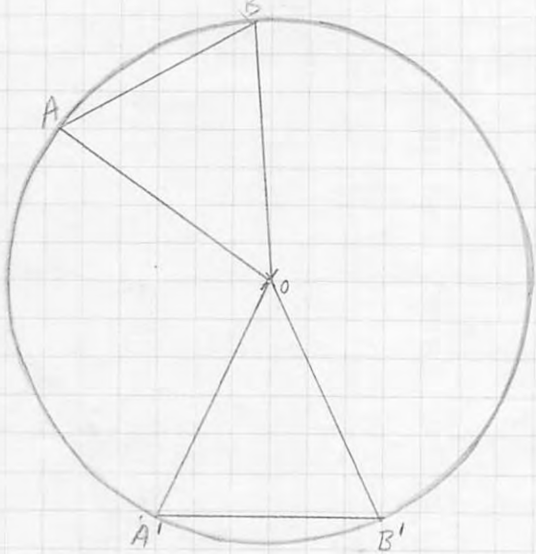
1) Dans un même cercle, ou dans 2 cercles égaux A des arcs égaux correspondent des cordes égales
— des angles égaux.

2) A des angles au centre égaux correspondent
— des arcs égaux
— cordes égales.

3) Au cordes égales correspondent des arcs égaux et des angles égaux au centre.

---

①



<u>Hypothèse:</u> $\begin{cases} \text{Cercle } O \\ \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'} \end{cases}$

<u>Conclusion:</u> $\begin{cases} \overline{AB} \quad \overline{A'B'} \\ A\hat{O}B = A'\hat{O}B' \end{cases}$

<u>Démonstration:</u> Faisant tourner l'arc AB autour de O jusqu'à ce que point A tombe sur B', alors au même instant B tombe sur A' car $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ n.l.

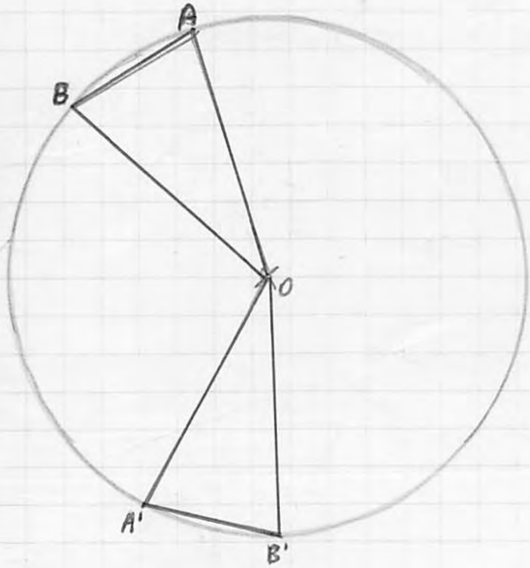
la corde AB tombe exactement sur $\overline{A'B'}$ car entre 2 points il n'y a qu'un seul segment.

O reste en place, en repos, les côtés de l'angle $A\text{-}\hat{O}\text{-}B$ tombe sur les côtés $A'\hat{O}B'$, donc les 2 exemples sont égaux

C.Q.F.D. $A\hat{O}B = B'\hat{O}A'$ / $\overline{AB} = \overline{A'B'}$

---

(2)



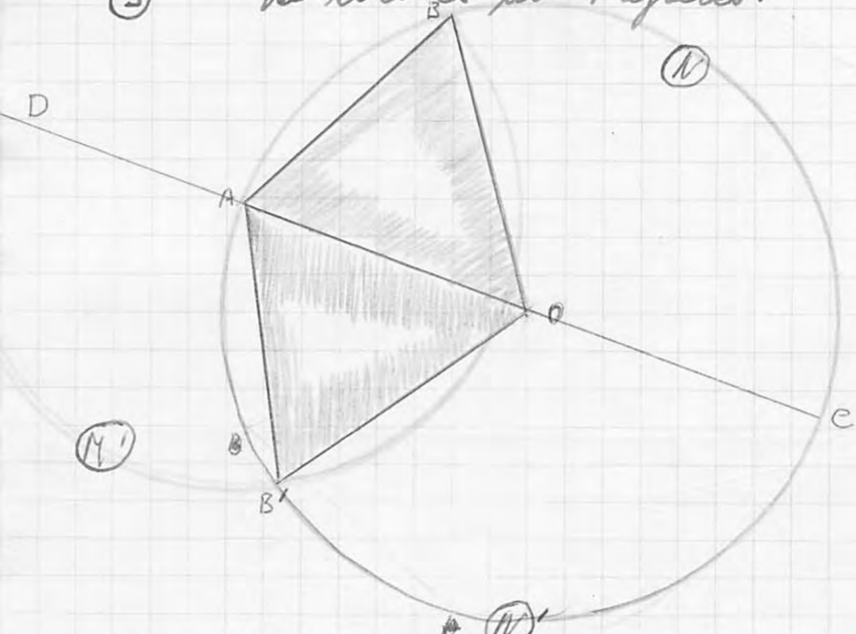
Hypothèse: $\begin{cases} \text{cercle } O \\ A\hat{O}B = A'\hat{O}B' \end{cases}$

Conclusion: $\begin{cases} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'} \end{cases}$

Démonstration: Faisons tourner l'angle $A\hat{O}B$ autour de O jusqu'à ce que OA tombe sur OA'.
Parce que l'angle $A\hat{O}B = A'\hat{O}B'$ p. h.
le côté OB tombe alors sur le côté OB' d'où $\overline{AB} = \overline{A'B'}$
et $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$ } C.Q.F.D.

---

(3) (M) les cordes sont égales:



Hypothèse: $\left\{\begin{array}{l} \text{cercle } O \\ \overline{AB} = \overline{A'B'} \end{array}\right.$

Conclusion: $\left\{\begin{array}{l} \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'} \\ A\hat{O}B = A'\hat{O}B' \end{array}\right.$

on peut toujours supposer que les 2 cordes aient une extrémité commune. De A comme centre et AB comme rayon, traçons un cercle auxiliaire. parce que $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ p. h. ce cercle doit aussi passer par B'

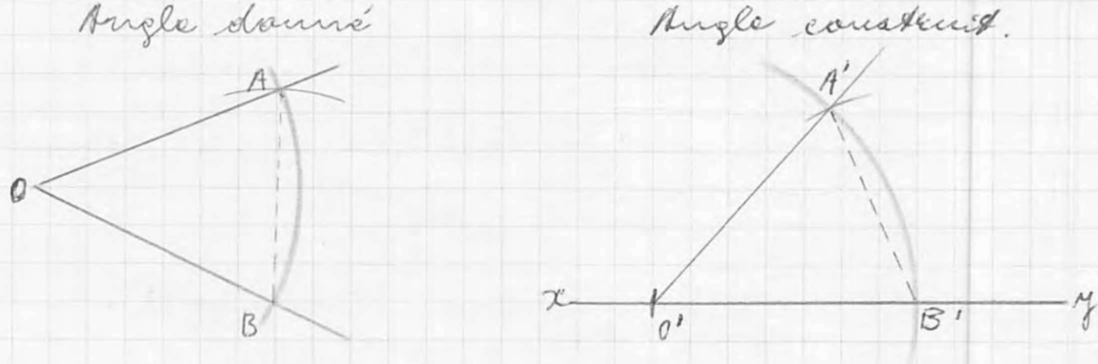
Faisons tourner la partie supérieure de 180° autour du diamètre commun DC.

Parce que tous diamètres partagent le cercle en 2 parties égales, le demi-cercle M tombe sur M' et N sur N' et finalement le point B qui se trouve à la fois sur M et N doit après la rotation se trouver à la foi sur M' et N' c'est à dire à leur intersection B'.

Donc $\left.\begin{aligned} \overset{\frown}{AB} &= \overset{\frown}{A'B'} \\ = A\hat{O}B &= A\hat{O}B' \end{aligned}\right\}$ C. Q. F. D.

Problème:

Construire un angle égale à un angle donné.



Construction de o comme centre avec un rayon quelconque traçons un arc de cercle qui coupe les côtés de l'angle donné en A et B.

De o' comme centre et avec le même rayon traçons un arc de cercle qui coupe la droite x y en B'

Traçons une corde B'A' égale à la corde B A

A' o' B' est l'angle demandé.

Démonstration: Nous avons tracé

2 cercles égaux et dans ces 2 cercles il y a 2 cordes égales.

Or, à des cordes égales correspondent des angles au centre égaux, car

A'O'B' = AOB = C.Q.F.D.

Unités d'arcs

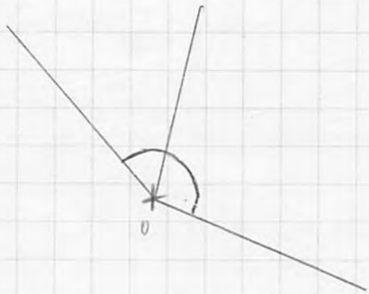
1) cercle complet correspond au angle replet ~~ang.~~ [illegible]
2) demi-cercle — ang. neutre
3) quart de cercle (quadrant) ang. droit.
4) le quadrant est partagé en ~~100~~ 90 parties égales appelé chacune un degré d'arc
5) un degré d'arc = 60 minutes d'arc
6) une minute d'arc = 60 secondes d'arc

Un angle au centre à les mêmes mesures que l'arc compris entre ses côtés.

Un angle se mesure à l'aide du rapporteur qui transforme tout angle en angle au centre.

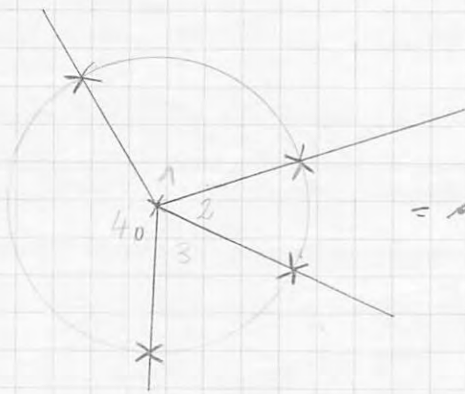
Angles autour d'un point

Définition :



= angles adjacents

Deux angles adjacents ont le même sommet, un côté commun et sont situés de part et d'autre de ce côté commun



= angles adjacents.

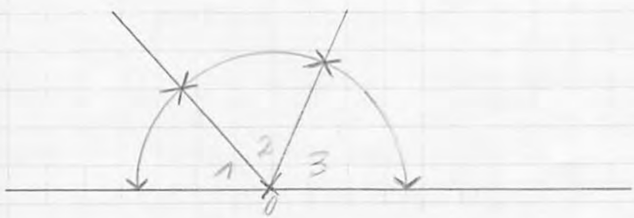
Théorème :

La somme de tous les angles adjacents formés par plusieurs demi-droite autour d'un même point est égal à 360°.

(rém.) Car la somme des arcs compris entre les côtés donnent un cercle complet. = 360°

Théorème :

La somme de tous les angles adjacents formés par plusieurs semi-droite autour d'un même point et d'une même côté d'une droite de 180°.



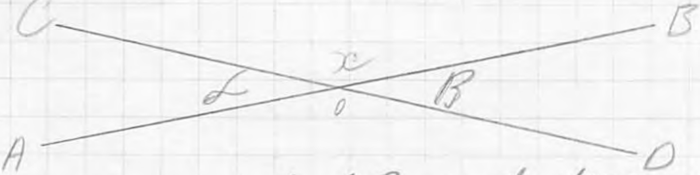
Car la somme de tous les arcs compris entre les côtés donnent un demi-cercle. = 180°

= angles opposés par le sommet

Définition

Deux angles opposés par le sommet sont deux angles dont les côtés de l'un sont formés par les prolongements des côtés de l'autre.

Théorème: Deuse angles opposés par le contre po sommet sont égaux.



Hypothèse: α et β sont deux angles opposés par le sommet

Conclusion: $\alpha = \beta$

Démonstration:

1/ Parce que AB est une droite nous avons $\alpha + x = 180°$ (1)
(la somme de tous les angles adjacents ...)

2/ Parce que CD est une droite nous avons aussi $\beta + x = 180°$ (2)

De (1) et (2) il résulte que $\alpha + x = \beta + x$ car si deuse grandeurs sont égales à une même troisième, elles sont égales entre elles.

Une égalité n'est pas détruite si on diminue (augmente) les 2 membres de l'égalité d'une même grandeur ~~longueur~~.

$$\alpha + x = \beta + x$$

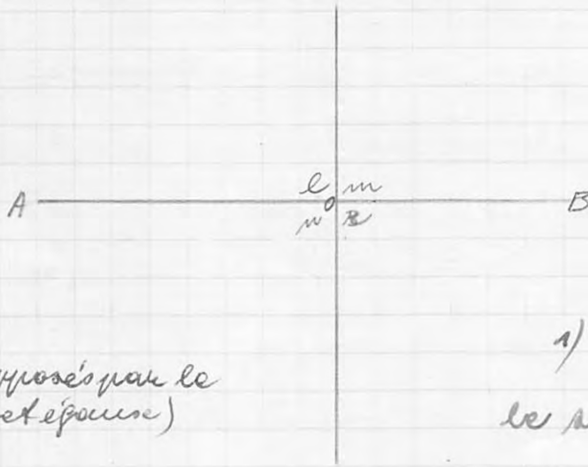
$$x = x \quad (-)$$

$$\alpha = \beta \quad = \text{C.Q.F.D.}$$

(Voir axiomes : livre page 15)

Perpendiculaires

$\boxed{l = 90° \text{ p.h.}}$



(Angles opposés par le sommet épouse)

1) l et r opposé par le sommet, car $l = r$

$l = 90°$ p.h. donc $r = 90°$

2) Parce que A-B est une droite $l + m = 180°$ (la somme de tous les ~~...~~ angles adjacents ....)

or $l = 90°$ p.h.

donc $m = 180° - 90° = 90°$

3) Alors $n = 90°$

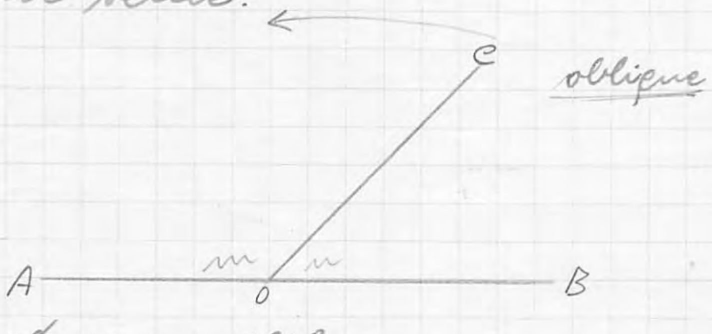
car n et m opposé par le sommet.

Définition:

2 perpendiculaires sont 2 droites dont un des 4 angles qu'elles forment est droit.

Théorème:

En 1 point d'une droite on peut élever une perpendiculaire à cette droite et on n'en peut élever qu'une seule.



m et n = 180°

Traçons une droite CO qui forme avec AB deux angles inégaux (oblique)

Faisant tourner C autour de O, l'angle N augmente.

Parce que m et n = 180°, m doit di=
(la somme de tous angles adjacents..

minime.

Il arrive donc nécessairement un instant où les 2 sont égaux.

Alors $m = n = 180 : 2 = \underline{90°}$

$CO \perp AB$ ($\perp$ = perpendiculaire)

Dès que CO quitte cette position les angles m et n ne sont plus égaux et CO n'est plus $\perp$ à AB

Parallèles.

1)

Hyp. $MA = MB$

C. A tombe sur B

Faisant tourner MA de $180°$ autour de M.

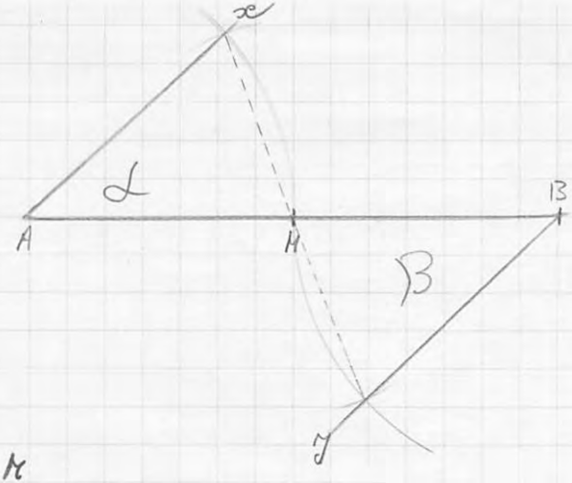
Parceque $MA = MB$, A tombe sur B

B est appelé le point symétrique de A par rapport à M.

M = le centre de symétrie.

M = le milieu de AB

2)



Hyp. { $AM = BM$
$\alpha = \beta$

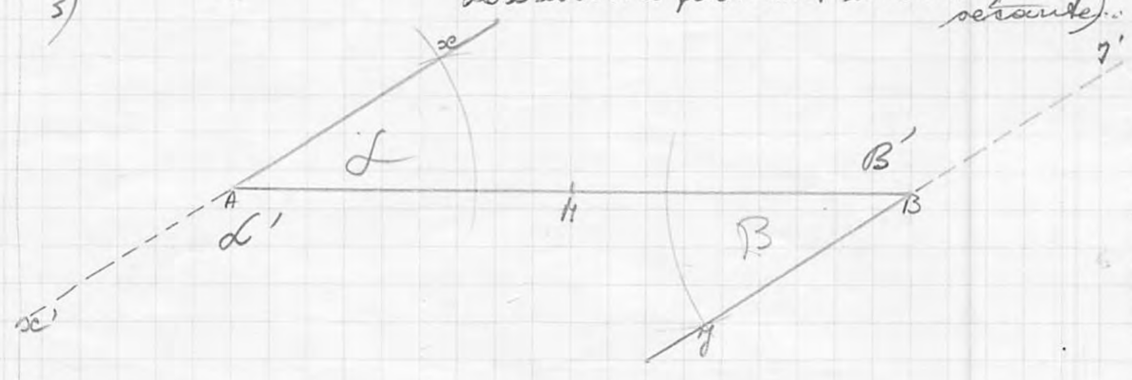
Faisant tourner MA de 180° (degrés) autour de ~~A~~M.

Parce que $\cancel{AM} = \cancel{BM}$ (MA = MB), le point A tombe sur B

Concl. Parce que $\alpha = \beta$ ~~Bx~~ (Ax) ~~tomfera~~ prendra la direction de ~~B~~ y

(~~Théorème I (suite)~~
~~Les droites formant avec une~~ sécante)...

3)



$MA = MB$

$\alpha = \beta$

Ax' = prolongement de Ax

By' = prolongement de ~~B~~ By

} Par construction

(la somme de tous angles adjacents ..)

Nous obtenons encore deux angles α' et β'

Parce que x' et x est une droite nous avons $\alpha + \alpha' = 180°$

— y' et y — — — $\beta' + \beta = 180°$

~~(Axiome: une égalité n'est pas détruite si.....)~~

Donc α et α' = β et β'

or $\alpha = \beta$ p. h. $(-)$

$\alpha' = \beta'$

Faisant tourner $M\,A\,x\,x'$ de $180°$

autour de M.

Parceque $MA = MB$, A tombe sur B

Parce que $\alpha = \beta$ = Ax prendra la direction

de By.

Parce que $\alpha' = \beta'$ = Ax' prendra la direction

de By'

I Théorème: Si 2 droites forment avec une sécante.

4) Faisant tourner maintenant toute la partie $x' A B y$ de 180° autour de M.

~~la poi~~ Parce que $MA = MB$ le point A tombera sur B. En même temps le point B tombe sur A.

Parceque $\beta = \alpha$ By prendra la direction de Ax.

Parce que $\alpha' = \beta'$ ~~A~~ x' prendra la direction de By'.

Concl. Si les 2 droites Ax et By ~~de~~ se coupaient, alors les droits Ax' et By' auraient aussi ~~une~~ point d'intersection.

C.Q.F.D. Donc $x'x$ et y~~y~~$'$ ne peuvent pas se couper et alors ils sont appelés des droites parallèles.

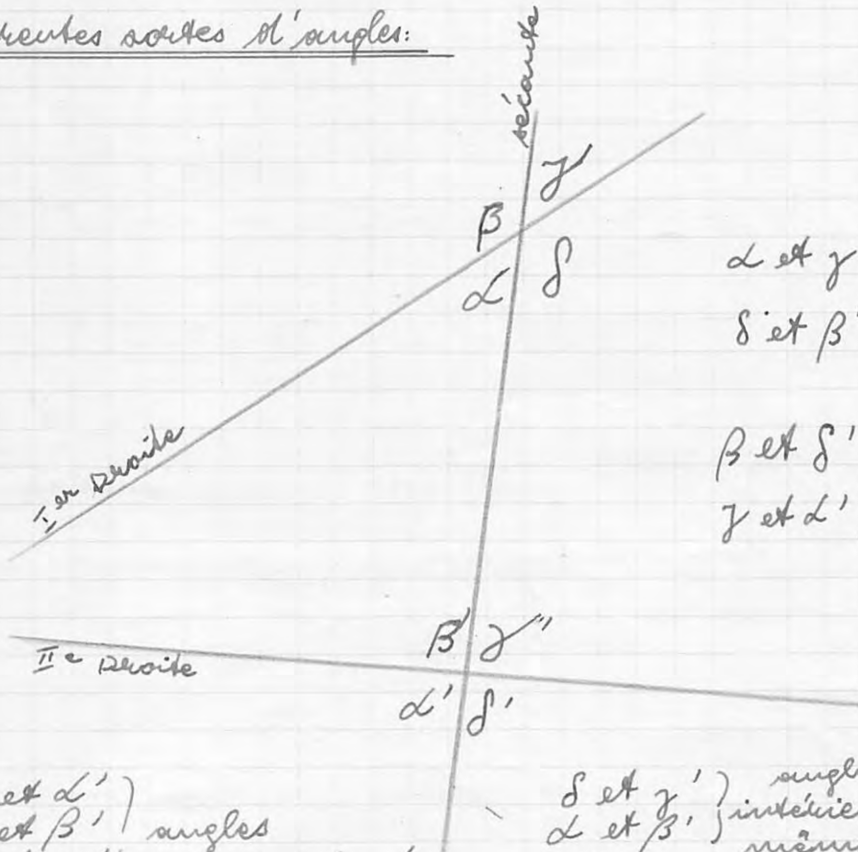
1) Théorème:

Si 2 droites forment avec une sécante sécante deux angles alternes-internes égaux, alors les 2 droites sont parallèles.

Définition:

Deux droites parallèles sont deux droites situées dans un même plan et qui ne se coupent pas aussi loin qu'on les prolonge.

Différentes sortes d'angles:



α et γ' } angles
δ et β' } alternes-internes

β et δ' } angles
γ et α' } alternes-externes

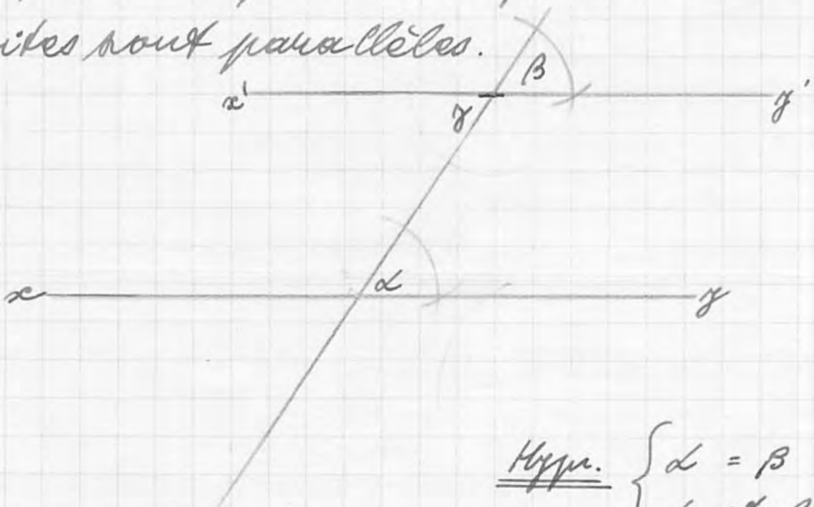
α et α'
β et β' } angles
γ et γ' } correspondants
δ et δ'

δ et γ' } angles
α et β' } intérieurs d'un même côté

γ' et δ' } angles
β et α' } extérieurs d'un même côte

2/ Théorème :

Si 2 droites forment avec une sécante 2 angles correspondants égaux, alors les 2 droites sont parallèles.



<u>Hyp.</u> $\begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha \text{ et } \beta = \text{corres=pondants} \end{cases}$

<u>Conclusion</u> $\begin{cases} x'y' \parallel xy \\ \parallel = \text{parallèles} \end{cases}$

<u>Démonstration :</u> α et γ angles alternes-internes

Si ces 2 angles étaient égaux, alors $x'y'$ serait parallèle en vertu de x et y

Tout revient donc à démontrer que

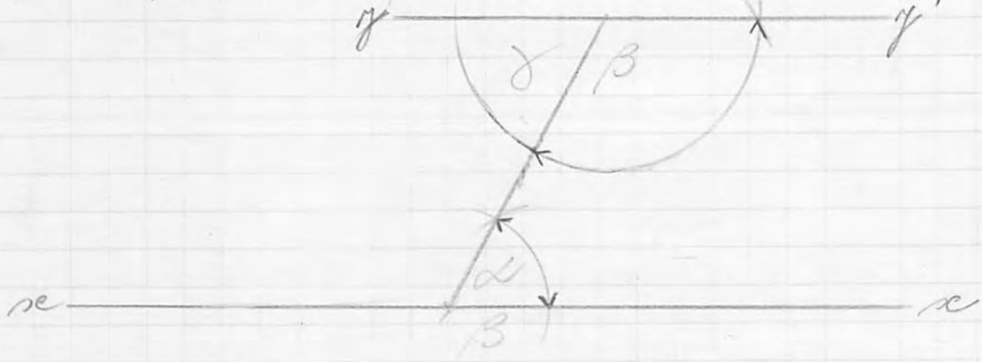
$\alpha = \beta$. par hyp.

Or et $\beta = \gamma$ = opposé par les sommet

(Si 2 grandeurs.) $\alpha = \gamma$ (C.Q.F.D.)

3) Théorèmes:

Si 2 droites forment avec une sécante 2 angles intérieurs d'un même côté supplé=mentaires (somme = 180°) alors les droites sont parallèles.



Hypothèse: $\alpha + \beta = 180°$

$\alpha + \beta$ intérieurs d'un même côté

Conclusion: $x'y' \parallel xy$ (∥ parallèles)

Démonstration:

Considérons les angles α et γ, ils sont alternes-internes.

S'ils étaient égaux $x'y'$ serait parallèle à xy en vertu du théorème I.

Tout revient donc à démontrer que $\alpha = \gamma$!

or $\gamma + \beta = 180°$

(car $x'y'$ est une droite)

(Sc ou retranche...) $\alpha + \beta = 180°$ p. h.

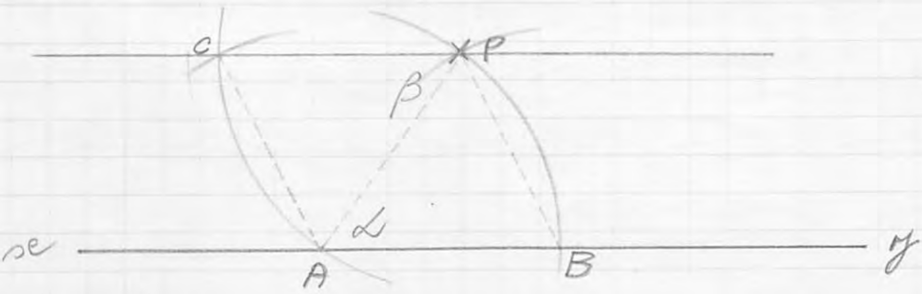
$$\begin{array}{c|l} \alpha + \beta = 180° \text{ p. h.} & \\ \hline \gamma + \beta = \alpha + \beta & \\ \hline \beta = \beta & (-) \\ \hline \gamma = \alpha = \text{C.Q.F.D.} & \end{array}$$

Par un point donné ~~?~~ en dehors d'une droite mener une parallèle à cette droite.

1) <u>A l'aide d'une sécante</u>

(Voir les démonstrations précédentes.

2) A l'aide du compas.



Construction:

De P comme centre avec un rayon quelconque traçons un arc de cercle qui coupe la droite x y donné en A.

De A comme centre et avec le même rayon traçons un arc de cercle qui passe par P et qui coupe x y en B.

Traçons ensuite une corde A C égale à la corde B P

C P est la parallèle demandée.

Démonstration:

α et β sont des angles alternes-internes. S'ils étaient égaux C P // ~~à~~ x y

Tout revient à démontrer que

$\alpha = \beta$

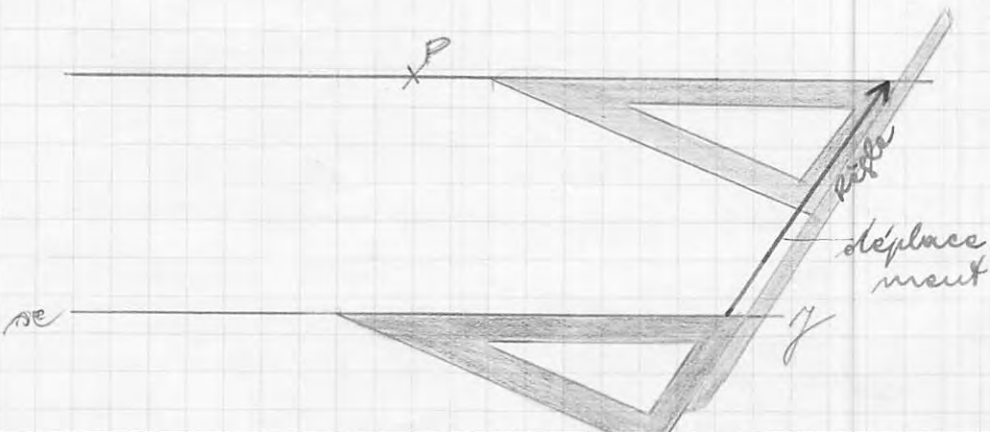
Dans les 2 cercles de centre PB et A, que nous avons tracés avec le même rayon, nous avons tracé 2 cordes égales =

CA = PB

or, dans 2 cercles égaux correspondent à des cordes égales des angles au centre égaux.

$\alpha = \beta$ C.Q.F.D.

3) <u>A l'aide d'équerre.</u>



Postulat d'Euclide

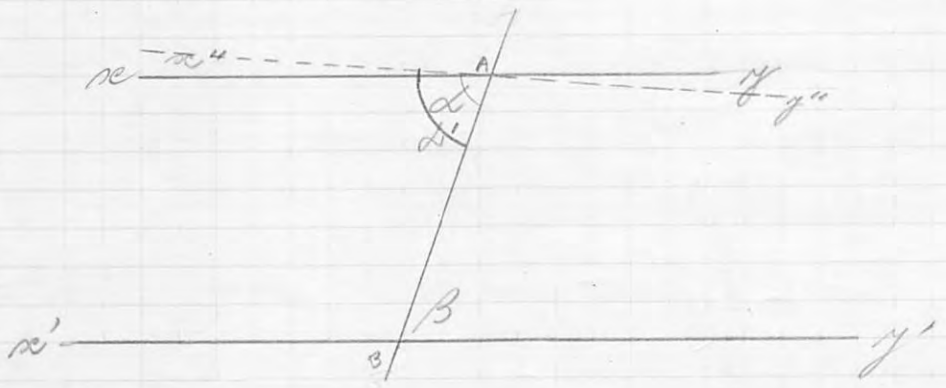
Par un point hors d'une droite, on peut mener une parallèle à cette droite, mais on n'en peut mener qu'une seule.

Nous devons admettre ce théorème sans démonstration.

Théorèmes réciproques.

I

2 parallèles forment avec une sécante des angles alternes-internes égaux.



Hypoth. $\begin{cases} xy \parallel x'y' \\ AB \text{ sécante} \\ \alpha \text{ et } \beta = \text{angles alternes internes} \end{cases}$

Conclus. $\alpha = \beta$ (égaux)

Démonstration indirecte

Réduction à l'absurde

2 cas possible

$\alpha = \beta$

ou α différent de $(\neq)$ β

Si α n'était pas égale à β, on pourrait construire en A un angle α' à β p. cou.

Alors nous obtenons encore une autre droite x'' et y''

En vertu du théorème :

Si 2 droites ($x''y''$ et $x'y'$) forment avec une sécante (A B) 2 angles alternes internes (α' et β) égaux, alors ces droites sont parallèles.

Nous pourrons dire que $x''y''$ est parallèle à $x'y'$.

Or par hypothèse nous avons déjà $xy \parallel x'y'$. ~~et~~

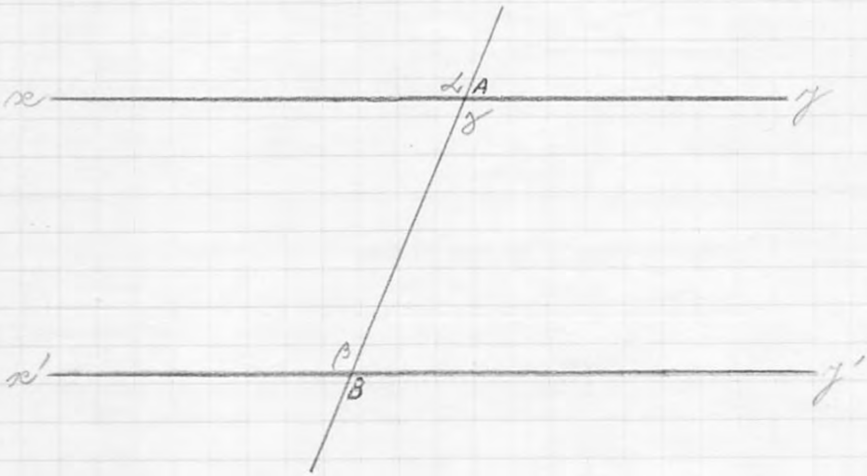
Donc nous aurions par A 2 parallèles à $x'y'$, ce qui ne ~~peu~~ se peut pas faire en vertu du Postulat d'Euclide.

Le 2ème cas est donc impossible, alors il ne reste plus que le premier

$\alpha = \beta$ C.Q.F.D.

2/ Théorème réciproque :

2 parallèles forment avec une sécante 2 angles correspondants égaux.



Hypothèse : $xy \parallel x'y'$
AB = sécante
α et β = angles correspondants

Conclusion : $\alpha = \beta$ (égaux)

Démonstration :

1) Considérons les angles β et γ
Ce sont des angles alternes-internes
Ils sont égaux en vertu du 1er théorème réciproque.
Donc $\beta = \gamma$

2) γ et α sont des angles opposés par

le sommet.

$\gamma = \alpha$ (2 angles opposés par le .....)

3) $\beta = \gamma$ (Si 2 grandeurs sont ...)

$\alpha = \gamma$

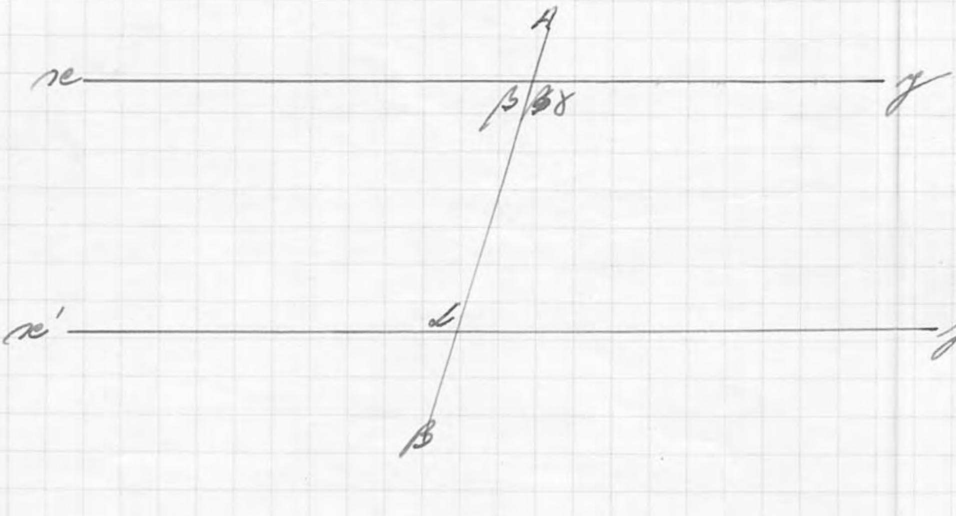
$\alpha = \beta$ C.Q.F.D.

---

3) Théorème réciproque.

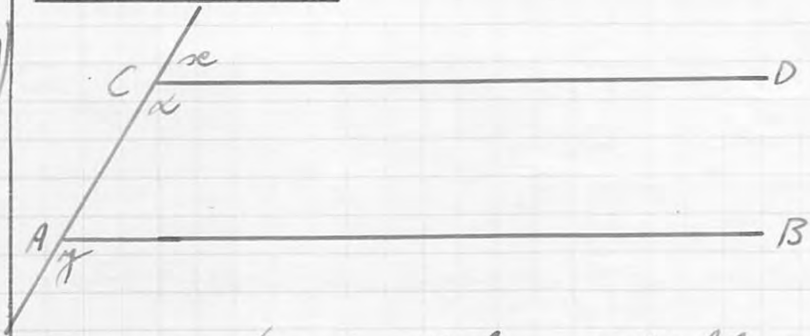
2 parallèles forment avec une sécante 2 angles intérieurs d'un même côté supplémentaires (somme 180°)

Démonstration analoge (



Constructions:

1)



CD ∥ AB

relations entre x et y

$x + \alpha = 180°$ car AC = droites

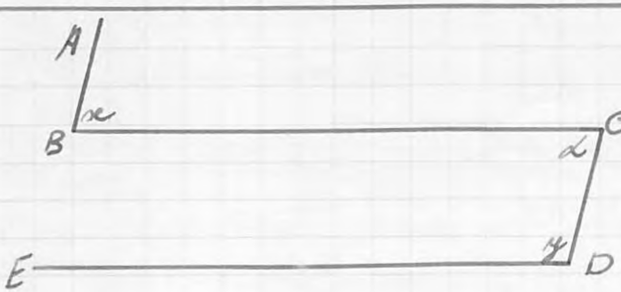
$\alpha = y$ angles correspondants ég.

Ramplaçons dans la 1ère équation

α par son égal y

$$x + y = 180°$$

2)



AB ∥ CD

BC ∥ ED

relat. entre x et y

x et α = angles alternes internes égaux.

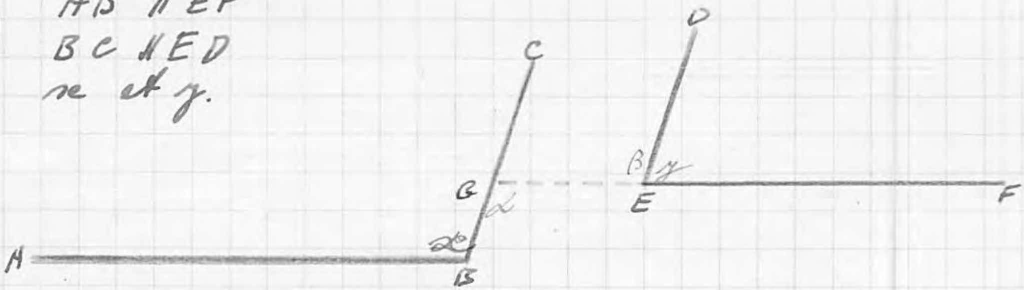
y ~~et~~ α = angles internes d'un même côté, supplémentaires parce que BC ∥ ED =

somme de α et $y = 180°$

Ramplaçons α par son ~~égale~~ égal x.

$$x + y = 180°$$

3) AB // EF
BC // ED
x et y.



Prolongeons EF jusqu'à sa rencontre avec B.C.

Marquons l'angle auxiliaire α

1) $x = \alpha$ car 2 ~~dts~~ parallèles (AB // FG) forment avec une sécante BG deux angles alternes-internes égaux.

2) Marquons l'angle auxiliaire β
$\alpha = \beta$ = angles alternes internes.
Parallèles (BC // ED)
sécante CE

3) $\alpha + y = 180°$
car GF est une droite.

4) Remplaçons β par son égal α et α par son égal x, nous obtenons $x + y = 180°$

4)

à démontrer que

$z = x + y$

AB // DE

($z2$ = z indice 1)

Menons par C la droite CF parallèles à BA

Elle est aussi parallèle à DE. (voir théor. plus loin)

1) x est égal à z_1 car 2 parallèles BA/CF forment avec une sécante BC deux angles alternes internes (x et z_1) égaux.

2) z_2 = ~~y~~ = angles alternes-internes CF et DE = parallèles

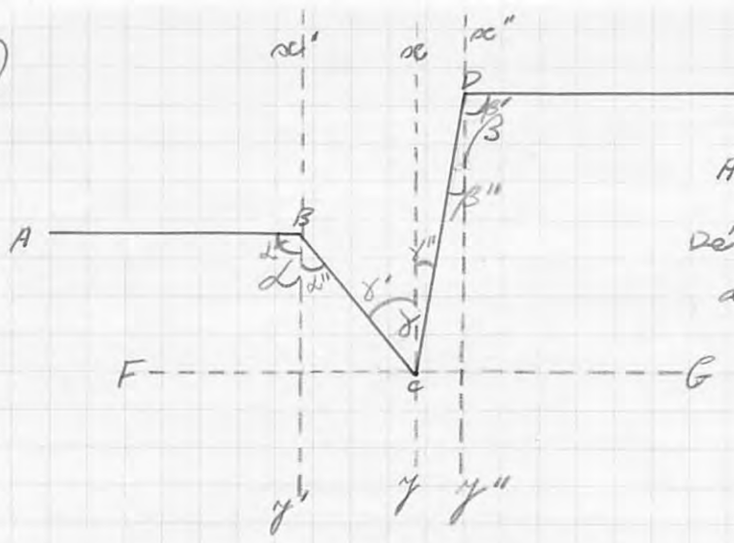
Sécante CD

angles z_2 et y.

3) Parce que $z = z_1$ et z_2 nous avons en remplaçant z_1 par x et z_2 par y:

$z = x + y$ C.Q.F.D.

5)



AB // DE

Démontrer que
$\alpha + \beta = 180° + \gamma$

(En considérant la droite AB et
la droite x'y' nous avons
2 perpendiculaires, dont un des 4 angles = 90°)

1) Enlevons une perpendiculaire à la droite AB qui la coupe en B.
En considérant la droite AB et la droite x'y', ce sont des perpendiculaires,
or, un des 4 angles qu'elles forment = 90°
Nous avons donc un angle α' qui vaut 90°

2) Puis enlevons une perpendiculaire à la droite DE, qui coupe en D.
En voyant les droites DE et x"y" nous avons aussi des perpendiculaires, $\hat{\beta'} = 90°$

3/ Menons à la droite $x'y'$ une parallèle à cette droite qui passe par C et qui est $x\,y$.

Elle est aussi parallèle à la droite $x''y''$

4) α'' est égal à γ', car 2 parallèles $x'y'$ et $x\,y$ forment avec une sécante BC 2 angles alternes internes égaux. ∓ α'' et γ'

5) β'' est aussi égal à γ'', car 2 // $x''y''$ et $x\,y$ forment avec la sécante DC 2 angles alternes internes égaux. ∓ β'' et γ''

6) Alors nous avons:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha' = 90^\circ \\ \beta' = 90^\circ \end{array}\right\} \text{la somme est de } 180^\circ$$

α'' et β'' sont égaux à γ' et γ''

α'' et β'' — — à γ

$$\left.\begin{array}{l} \alpha' + \alpha'' \\ \beta' + \beta'' \end{array}\right\} 180^\circ + \alpha'' + \beta''$$

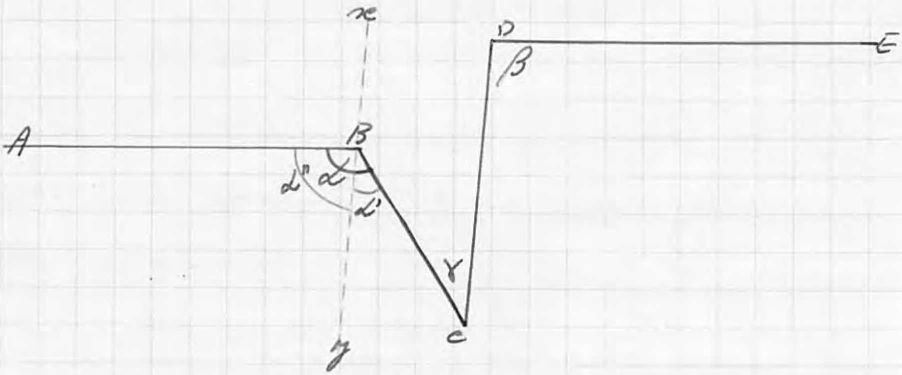
Remplaçons α'' et β'' par leur équivalents γ' et γ'' et ces par γ

Remplaçons α' et α'' par α

Alors: β' et β'' par β

$\alpha\ \beta = 180 + \gamma$ C.Q.F.D.

5 a) autre démonstration:



Menons une droite (x y) qui est parallèle à la droite DC et qui passe par B et partage l'angle α en α' et α''

1) α' est égal à γ car 2 parallèles x y et CD forment avec une sécante BC 2 angles alternes internes égaux.

2) Parce que x y est parallèle à DC nous pouvons dire que α'' et β = 180°.
Car α ~~+~~ − γ + β = 180° = α'' + β = 180°
~~Car la so en rapprochant les 2 droites x et y et DC de sorte qu'elles se recouvrent, on peut dire : la somme de tous les angles ag adjacents est autour d'un point et d'un côté d'une droite = 180°~~

~~3)~~ ~~ca~~

α'' et β = $180°$

α' est égal à γ

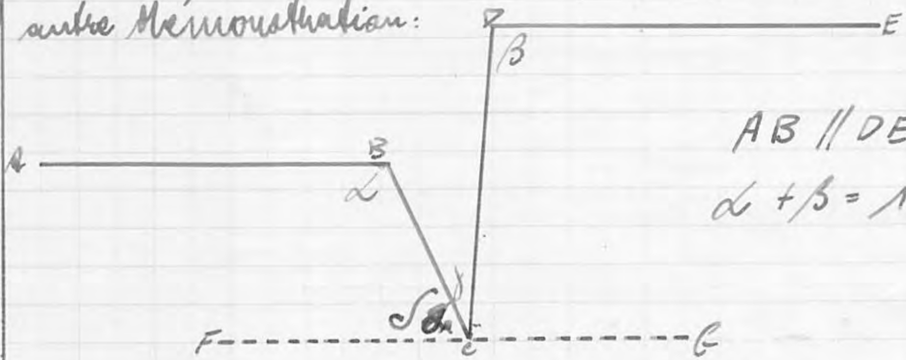
α et β = $180° + \alpha'$

Alors remplaçons α' par son égal γ.

α et β = $180° + \gamma$ C.Q.F.D.

---

5) autre démonstration:



AB // DE

$\alpha + \beta = 180 + \gamma$

Menons une droite parallèle à AB

Alors FG aussi // à DE

Considérons l'angle auxiliaire δ

1) $\alpha + \delta = 180°$ angles d'un même côté

2) $\delta + \gamma = \beta$ angles alternes-internes.

3) Ajoutons aux 2 membres de l'égalité 1, l'angle γ

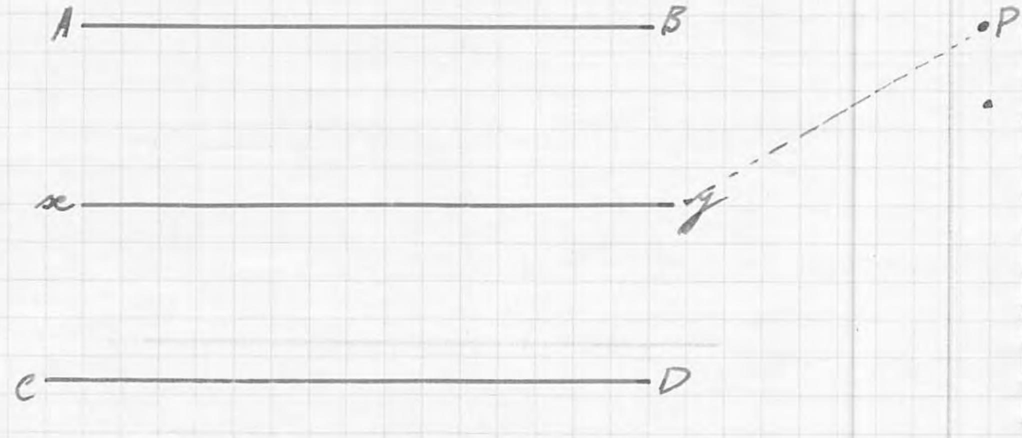
$\alpha + \delta + \gamma = 180° + \gamma$

Remplaçons $\gamma + \delta$ par son égal β

$\alpha + \beta = 180° + \gamma$ C.Q.F.D.

Théorème :

Si 2 droites sont // alors toute // à l'une est aussi // à l'autre.



Hypoth. $\left\{\begin{array}{l} AB \parallel CD \\ xy \parallel CD \end{array}\right.$

Conclusion $\{\ xy \parallel AB$

Démonstration indirecte :

2 cas : $xy \parallel AB$ $\quad xy \nparallel AB$

Considérons le 2ème cas.

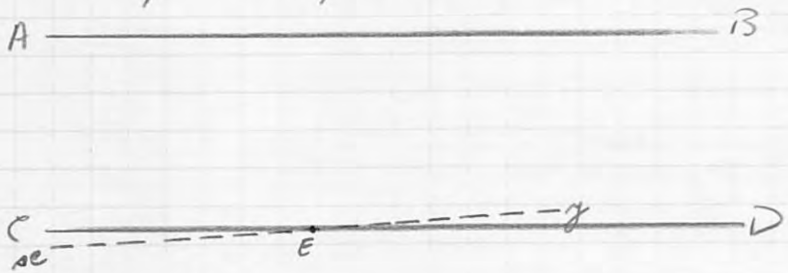
Si xy n'est pas // AB, xy doit couper en un certain point en P. Mais alors il y aurait par P 2 // à CD ce qui est impossible en vertu du Postulat d'Euclide.

Alors le 2ème cas est impossible.

reste le 1er $xy \parallel AB$ C.Q.F.D.

<u>Corollaire</u> (conséquence directe des théorèmes précédents)

Si 2 droites sont parallèles, ~~l'une des~~ toute droite qui coupe l'une, coupe aussi l'autre.



Hypoth. $\begin{cases} AB \parallel CD \\ xy \text{ coupe } CD \text{ en } E \end{cases}$

Conclusion: $\begin{cases} xy \text{ coupe } AB \\ \text{en } F \end{cases}$

Démonstration indirecte. Réduction à l'absurde

2 cas: xy coupe AB en F

xy ne coupe pas AB

2ème cas:

Si xy ne coupait pas AB, xy serait $\parallel$ à AB.

Mais alors il y aurait donc par E, 2 $\parallel$ à AB ce qui est impossible en vertu du Postulat d'Euclide.

le 2ème cas est donc impossible,
se y coupe AB en un point F. C.Q.F.D.

~~Corollai~~
<u>Corollaire:</u>

Si 2 droites sont // à une même 3ème, elles sont // entre elles.

Hypoth.: CD // AB
EF // AB

Conclusion: CD // EF

<u>Démon</u>: 2 cas possibles: CD // EF
CD $\nparallel$ EF

Examinons le 2ème cas:

Si CD n'étaient pas // à EF, ces droites se couperaient en 1 point P.

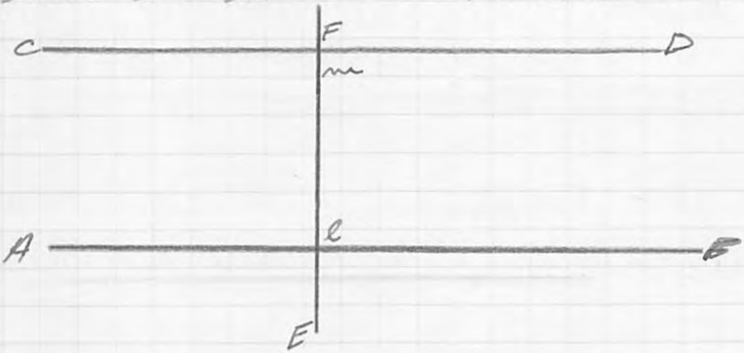
Mais alors on aurait par P 2 // à AB, ce qui est impossible en vertu du Postulat d'Euclide.

2ème cas impossible, reste 1er cas:

CD // EF. C.Q.F.D.

Corollaire:

Si 2 droites sont //, toute perpendiculaire à l'une est aussi ⊥ à l'autre.



Hypothèse: $\left\{ \begin{array}{l} AB \parallel CD \\ l = 90^\circ \end{array} \right.$

Conclusion: $\left\{ m = 90^\circ \right.$

Démo: 1) la ⊥ ~~A~~ à AB coupe d'abord CD d'après le ~~A~~ 1er corollaire.

2) m et l - angles intérieurs d'un même côté

$l + \cancel{l}m = 180^\circ$ car $AB \parallel CD$

Parce que $l = 90^\circ$ nous avons

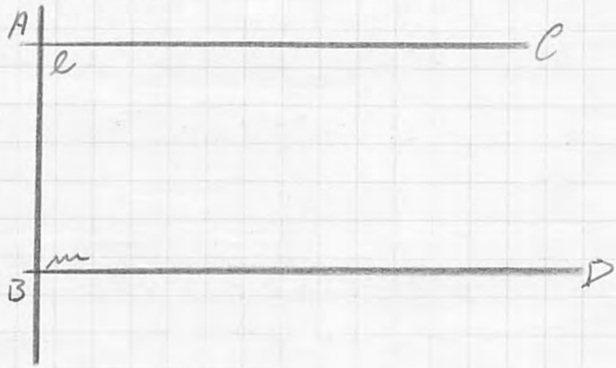
$m = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

Donc $m = \cancel{A}\ 90^\circ$.

Donc $\left. \begin{array}{l} AB \perp FE \\ CD \perp FE \end{array} \right\}$ C.Q.F.D.

Corollaire:

2 perpendiculaires à une droite donnée sont // entre elles.



Hypoth. : $\begin{cases} AC \perp AB \\ DB \perp AB \end{cases}$

Conclusion: $AC \parallel BD$

Démonstration:

l ~~et~~ $= m = 90°$ p. hy.

alors $l + m = 180°$

or l et m sont des angles intérieurs d'un même côté:

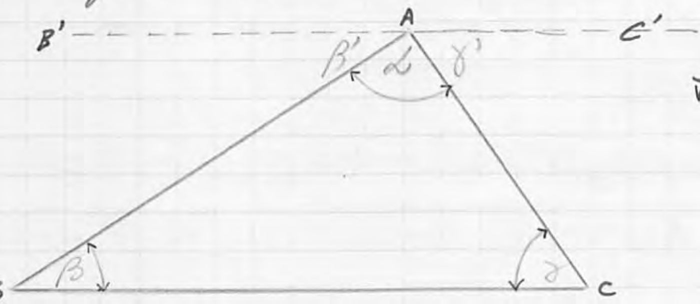
or si 2 droites forment avec une sécante 2 angles int. d'un même côté supplémentaires, les droites sont //.

$AC \parallel BD$ C. Q. F. D.

Théorèmes sur le triangle

1) Théorème:

La somme des angles intérieurs d'un triangle = 180°



Hyp. { triangle ABC
α, β, γ, angles intérieurs

Conclus. $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Dém.

Menons par un des sommets du triangle, p. ex par A la // B'A aux côté opposé BC. Nous obtenons les angles $B'AB = \beta'$ et $C'AC = \gamma'$

Nous pouvons dire $\beta' = \beta$ car 2 // (B'A et BC) forment avec une sécante (BA) 2 angles alternes-internes égaux $= (\beta' = \beta)$

$\gamma' = \gamma$ car 2 // (B'C' et BC)....

On a encore $\beta' + \alpha + \gamma' = 180° =$ somme de tous les angles adjacents......

Remplaçons β' par son égal β
γ' par son égal γ

alors $\beta + \alpha + \gamma = 180°$ C.Q.F.D.

Corollaires:

1) Si 2 angles d'un triangle sont connus, le 3e est connu aussi $[180° - (\alpha + \beta) = \gamma]$

2) Si 2 angles d'un triangle sont égaux à 2 angles d'un autre, le 3e de l'un est aussi égal au 3e de l'autre.

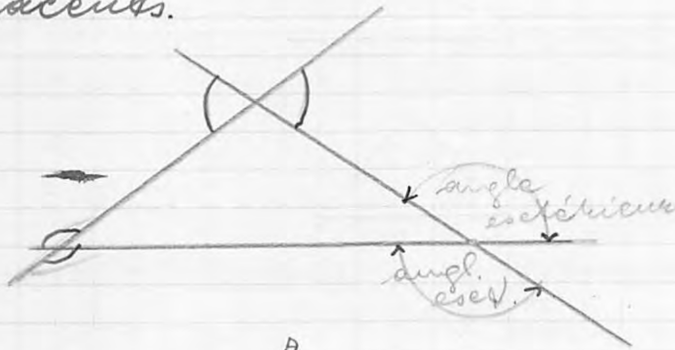
3) Dans tout triangles il ne peut y avoir qu'un seul angle droit et à plus forte raison, qu'un seul angle obtus. (= qui dépasse 90°)

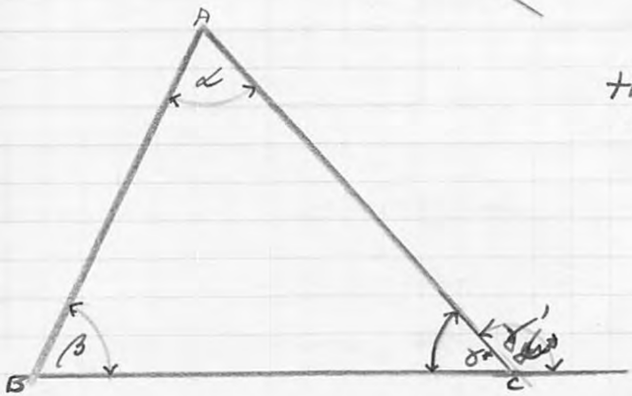
4) Dans tout triangle rectangle la somme des angles aigus vaut 90° ou 1 D (= ~~ou~~ un angle droit.)

6) Un angle extérieur d'un triangle est plus grand que l'un des angles intérieurs non adjacents.

Corrollaire:

Un angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des angles intérieurs non adjacents.





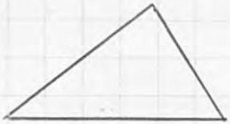
Hyp. triangle ABC, γ' angle extér. α et β ang. int. non adjacents

Concl. $\gamma' = \alpha + \beta$

Dém. 1) $\gamma + \gamma' = 180°$	, droite BC
2) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$	, somme des angles intérieurs d'un triang
$\gamma + \gamma' = \alpha + \beta + \gamma$	2 grandeurs égales à une même 3è sont égales entre elles
Une égalité n'est pas détruite...	
$\gamma' = \alpha + \beta$ C.Q.F.D.	

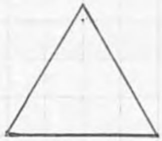
Triangles:

1) les 3 côtés inégaux : triangle scalène



2/ 2 côtés sont égaux : triangle isocèle

3/ 3 côtés sont égaux : triangle équilatéral



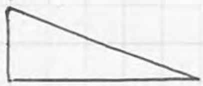
---

1) 3 angles inégaux :

a/ 3 angles sont aigus :

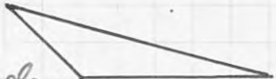
= triangle ~~scalène~~ acutangle

b/ 1 angle droit :



= triangle rectangle

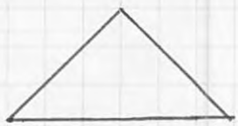
c/ 1 angle obtus :



= triangle obtusangle

2) 2 angles sont égaux :

= triangle isogone :

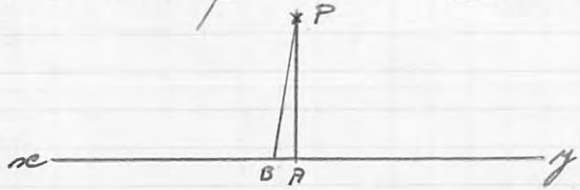


3/ 3 angles sont égaux :

= triangle équiangle

Théorème:

En 1 point hors d'une droite, on ne peut abaisser qu'une $\perp$ à cette droite



Hypothèse: $\left\{\begin{array}{l}\text{droite } xy \\ P \text{ point à l'extérieur de } xy\end{array}\right.$

Concl. $\}$ on ne peut abaisser qu'une $\perp$ sur xy

Démonstrat. 2 cas possible

1) une seule $\perp$
2) plusieurs $\perp$, c'est à dire au moins 2

Nous considérons le 2 cas:

Si nous avons 2 $\perp$ (PA et PB), nous aurions dans Δ P.B.A. un $P\hat{B}A = 90°$
$P\hat{A}B = 90°$

Or, cela est impossible car le corollaire dit: dans un triangle il ne peut y avoir un angle droit.

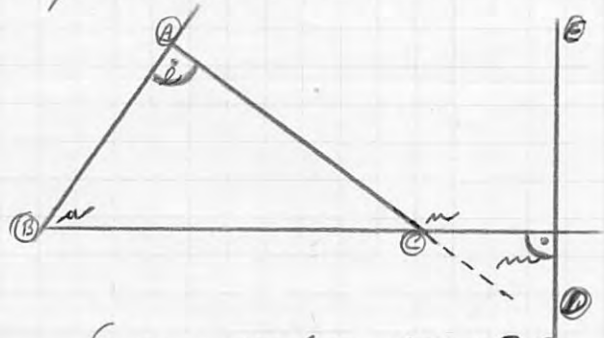
2ème cas est impossible:

reste le 1er cas: 1 seule perpendiculaire

C.Q.F.D.

Corollaire :

les perpendiculaires à 2 droites qui se coupent sont concourantes.



Hypothèse : $\left\{ \begin{array}{l} \text{perpendiculaires } AB + BC = \text{droites qui se coupent en } B. \\ \text{angle } l = D = 90° \\ \text{angle } m = D = 90° \end{array} \right.$

Conclusion : $\{$ AC + ED se coupent aussi.

Démonstration : Il peut y avoir 2 cas.

les perpendiculaires se coupent ou sont ∥

Examinons le 2ème cas :

Si les perpendiculaires (AC + ED) (~~AB + ED~~) étaient ∥ nous aurions $m = n$. (théor. 2 ∥ forment avec une sécante 2 angles correspondants égaux ...) $m = 90°$

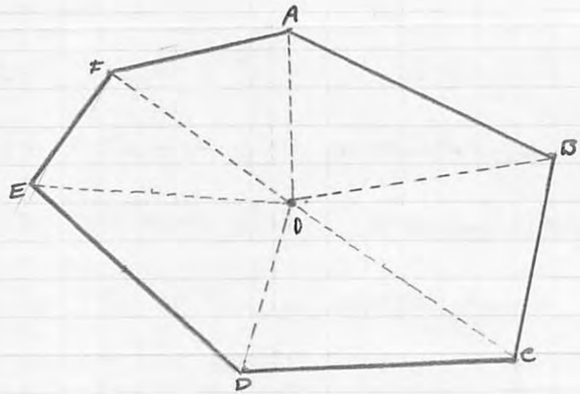
$n = l + a$ (car : ~~théo~~ coroll. un angle extérieur d'un tr.)

$n = 90° + a$ ($l = 90°$ p. hyp.)

$m = 90°$

Alors $n > m$ et en même temps on peut dire que les droites (AB-ED) ne sont pas ∥.

Sommes des angles intérieurs d'un polygone convexe:



polygone: A B C D E F

Prenons o à l'intérieur et relions o avec ~~ses~~ sommets, nous obtenons autant de triangle que de côtés

n côtés donnerait ~~x~~ n triangles

Comme la somme des angles intérieur du triangle vaut 2 D ou 180° nous avons pour la somme de tous les angles intérieurs des triangles $n \times 2D$.

Mais ~~il~~ nous devons retrancher la somme des angles autour de o. = 360° ou 4 D.

Il reste pour la somme des angles intérieurs des polygone $2n\,D - 4D$.

$= $ Sommes $(2n-4)\,D$

n	Polygone:	Somme des ∡ intérieurs	P. rég. 1 angle int.
3	triangle	$(2\cdot3-4)D = 2D$	$\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$
4	quadrilatère	$(2\cdot4-4)D = 4D$	$\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$ carré
5	pentagone	$(2\cdot5-4)D = 6D$	$\frac{540}{5} = 108^\circ$
6	hexagone	$(2\cdot6-4)D = 8D$	$\frac{720}{6} = 120^\circ$

Autre Démonstration: (Coroll. les ⊥ à 2 droites qui se coupent sont concourantes)

2 cas:

$FAC \nparallel DE$

$FC \parallel DE$

Si $FC \parallel DE$: $n = m$ (2 ∥ forment av. une ~~droi~~ sécante 2 angles alt. int. égaux)

Or, $n = a + l$ {angle extérieur est égal à la somme ....)

Or, $m = l$ car $n = 90^\circ$ et $l\ 90^\circ$ p. hr.

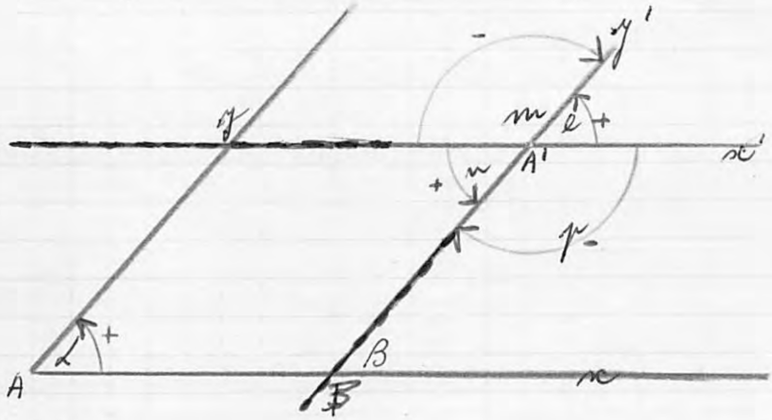
Remplaçons l dans la relation précédente:

$n = a + m$

Mais nous avons ~~trouvé~~ déjà trouvé: $n = m$

Reste le I pas.

Angles à côtés parallèles :



Théorème :

Deux angles à côtés parallèles sont égaux ou supplémentaires, suivant qu'ils sont de même sens, ou de sens contraire. (à partir de 2 côtés parallèles.

Hypot. $\begin{cases} x\hat{A}y \text{ angle donné} \\ A'x' \parallel Ax \quad (y\,x' \parallel Ax) \\ A'y' \parallel Ay \quad (B\,y' \parallel Ay) \end{cases}$

Conclus. $\begin{cases} \alpha = n \\ \alpha = l \\ \alpha + m = 180° \\ \alpha + p = 180° \end{cases}$

Démonstration : $l = n$, $m = p$ } angles opposés par le sommet.

Reste à considérer les angles l et m

Prolongeons A'y' (B y') jusqu'à son intersection en B avec Ax.

$\alpha = \beta$ car angle correspondant ($Ay \parallel A'y'$
la sécante Ax)

$\beta = l$ car angle correspondant ($A'x' \parallel Ax$
séc. BA')

$\alpha = l$ (2 grandeurs qui sont égales à une
même 3, sont égales entre elles)

$l + m = 180°$ (la somme de tous les
angles adjacents..)

$l = \alpha$ par démonst.

$\alpha + m = 180°$ C.Q.F.D.

Angles à côtés perpendiculaires.

Géométrie:

Suite à partir
des triangles.

Théorèmes:

(1) Tout diamètre partage le cercle en 2 parties égales

(2) Dans un même cercle ou dans 2 cercles égaux

a) A des arcs égaux correspondent des cordes égales
— des angles égaux.

b) A des angles au centre égaux corresp. des arcs égaux
— des cordes égales.

c) A des cordes égales correspondent des arcs égaux
— des angles au centre égaux

(3) la somme de tous les angles adjacents formés par plusieurs semi-droites autour d'un même point = 360°

(4) La somme de tous les angles adjacents formés par plusieurs semi-droites autour d'un ~~po~~ même point et d'un même côté d'une droite = 180°

(5). Deux angles opposés par le sommet sont égaux

(6). En 1 point hors d'une droite on peut enlever une perpendiculaire ~~a~~ cette droite et on n'en peut enlever qu'une seule.

(7) Si 2 droites forment avec une sécante 2 angles alternes-internes égaux, alors les 2 droites sont parallèles.

(8) Si 2 droites forment avec une sécante 2 angles correspondants égaux, alors les 2 droites sont parallèles.

(9) Si 2 droites forment avec une sécante 2 angles intérieurs d'un même côté supplémentaires (= somme = 180°) alors les droites sont parallèles.

~~(10)~~ Postulat d'Euclide:

Par un point hors d'une droite on peut mener une parallèle à cette droite, mais seulement une.

Th. (10) réciproque 2 parallèles forment avec une sécante des angles alternes-internes égaux.

Th. réc. (11) 2 parallèles forment avec une sécante 2 angles correspondants égaux.

Th. r. (12) 2 parallèles forment avec une sécante 2 angles intérieurs d'un même côté supplémentaires (180°)

(13) Si 2 droites sont parallèles, alors toute parallèle à l'une est aussi parallèle à l'autre.

Coroll. (14) Si 2 droites sont parallèles, toute droite qui coupe l'une, coupe aussi l'autre.

Cor. (15) Si 2 droites sont parallèles à une même 3ème elles sont // entre elles.

Cor. (16) Si 2 droites sont // toute perpendiculaire à l'une est aussi ⊥ à l'autre.

Cor. (17) 2 perpendiculaires à une droites donnée sont // entre elles.

Th. (18) la somme des angles intérieurs d'un triangle = 180°

Cor. (19) Si 2 angles sont connus, (triangle) le 3e est connu aussi

Cor. (20) Si 2 angles d'un triangle sont égaux à 2 angles d'un autre, le 3e de l'un est égal au 3e de l'autre

Cor. (21) Dans tout triangle il ne peut y avoir qu'un angle droit et à plus forte raison qu'un angle obtus (qui dépasse 90°)

Col. (22) Dans tout triangle rectangle la somme des angles aigus = 90° ou 1 D

Cor. (23) Un angle extérieur d'un triangle est plus grand que l'un des angles intérieurs non adjacents

Cor. (24) Un angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des angles intérieurs non adjacents.

Thé. (25) En 1 point hors d'une droite on ne peut abaisser qu'une $\perp$ à cette droite (= perpend.)

Cor. (26) les perpendiculaires à 2 droites qui se coupent sont concourantes. (= se coupent aussi)

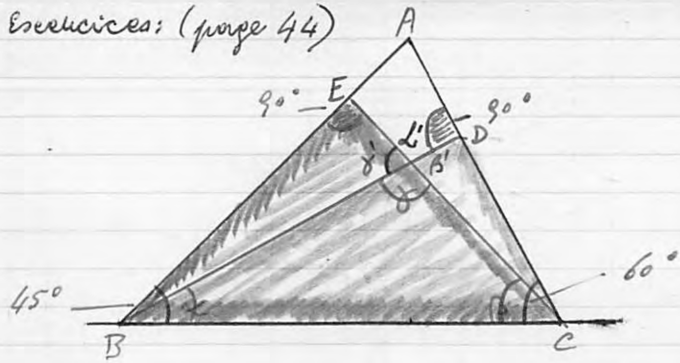
(27) Somme des angles intérieurs d'un polygone convexe

$= 2 \cdot n \cdot D - 4D = (2 \cdot n - 4) D =$ côtés $\times 180° - 360°$.

Th. (28) Deux angles à côtés // sont égaux ou supplémentaires, suivant qu'ils sont de même sens ou de sens contraire (à partir de 2 côtés //)

72. Exercices: (page 44)

(1.)



l'Angle α = ~~180°~~ $- (60° + 90°) = 30°$

(parce que: la somme des angles ~~d'~~ int. d'un triangle est égal à 180°)

l'Angle β = ~~180°~~ $- (45° + 90°) = 45°$

(même théor.)

l'Angle $\gamma = 180° - (30° + 45°) = \underline{\underline{105°}}$

$\gamma = 105°$ C. Q. F. C. (Chercher)

---

l'angle α' est égal à $\gamma = \underline{\underline{105°}}$ (angles opp. p. somm)

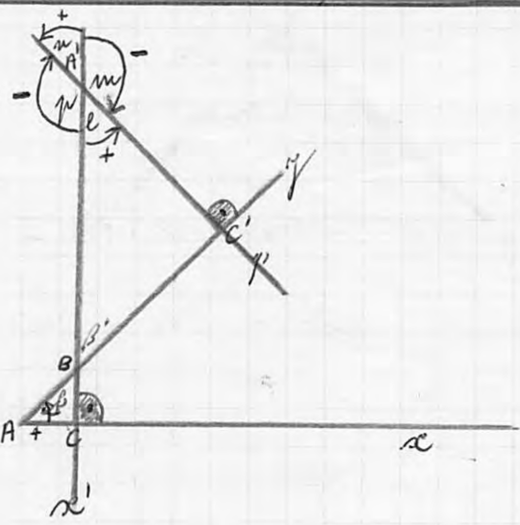
l'angle γ' : = $[(45° - 30°) + 90°] = 105°$

$180° - 105° = \underline{\underline{75°}}$

l'angle β' : = est égal à γ': (angles opp. p. somm.)

$= \underline{\underline{75°}}$

Angles à côtés perpendiculaires.



Hypoth. $\begin{cases} y\hat{A}x = \alpha = \text{angle donné} \\ A' \text{ point quelconque} \\ A'x' \perp Ax \; ; \; A'y' \perp Ay \end{cases}$

Conclus. $\begin{cases} l = \alpha \\ \mu = \alpha \\ \alpha + m = 180^\circ \\ \alpha + p = 180^\circ \end{cases}$

Démonst. Comme $\mu = l$ et $p = m$ (angles opposés p. sommet.

reste à démontrer

1) $l = \alpha$

2) $\alpha + m = 180^\circ$

① $\Delta\, A'BC'$ et $\Delta\, ABC$

$\hat{C}' = \hat{C} = 90^\circ$ (droit) p. hypot.

$\beta' = \beta$ (opposé par sommet

$l = \alpha$

(car si 2 angles d'un triangle sont égaux à 2 angles d'un autre triangle, alors le 3ème de l'un est égal au 3e de l'autre

$l = \alpha$ C.Q.F.D.

(2) $l + m = 180°$ (angles supplément.)

or $l = \alpha$ par démonstration.

Donc $\alpha + m = 180°$

Théorème:

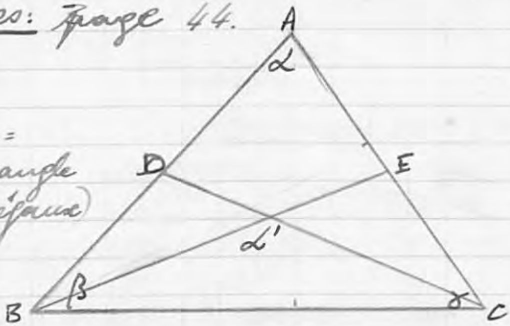
2 angles à côtés perpendiculaires sont égaux ou supplémentaires suivant qu'ils sont de même sens ou de sens contraire (= supplémentaires)

(Nous comptons les angles à partir de 2 droites qui sont perpendiculaires.)

72. Exercices: page 44.

(3).

(bissectrice = partage un angle en 2 angles égaux)



Hyp. { triangle ABC; BE et CD = bissectrices

Concl: $\alpha' = \frac{\alpha}{2} + 90$

Dém:

(1) la somme de tous angles intérieurs d'un tr. = 180°

donc $\alpha + \gamma + \beta = 180°$

$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90°$ Une {somme / égalité} n'est pas dite....

Or, ~~maintenant~~ la somme des angles intérieurs d'un triangle = 180° et non 90°. Alors il me faut ajouter 90° =

$\alpha' = 180° - 90° = 90° + \frac{\alpha}{2}$ = C.Q.F.D.

Symétrie par rapport à une droite.

2 figures sont symétriques par rapport à une droite si l'une se déduit de l'autre par une rotation de 180° autour de la droite (= axe de symétrie)

(1) Un point symétr. de un point donné — axe de symétrie

Supposons que P' est le symétrique de P

Traçons PP' qui coupe l'axe en haut.

l'angle $A\hat{O}P = A\hat{O}P' = 90°$ car ces 2 angles coïncident si on fait tourner la partie gauche de 180° autour de AB.

Et de plus $OP' = OP$

D'où la construction suivante.

On abaisse de P la ⊥ sur l'axe soit PO et l'on prolonge d'une longueur égale
On obtient alors P' symétr. de P.

(72 Exercice page 44) voir Dém. + Con. + Hyp. page suivant.

Autre Dém:

1) $\Delta\ B\mathcal{L}C$ $\quad$ $\ell = 180° = \left(\frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2}\right)$

2) $\Delta\ ABC$ $\quad$ $A + B + C = 180°$

$$\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = 90°$$

$$\frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = 90° = \frac{\hat{A}}{2}$$

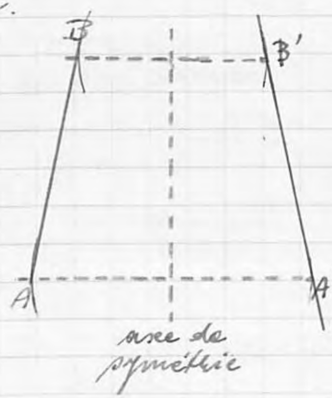
Ramplaçons: $\mathcal{L}' = 180° - \left(90° - \frac{\hat{A}}{2}\right)$

$$\mathcal{L}' = 90° + \frac{A}{2}$$

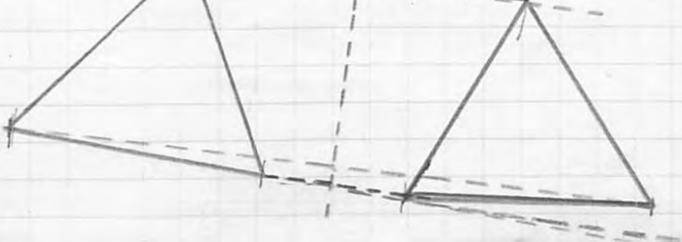
C.Q.F.D.

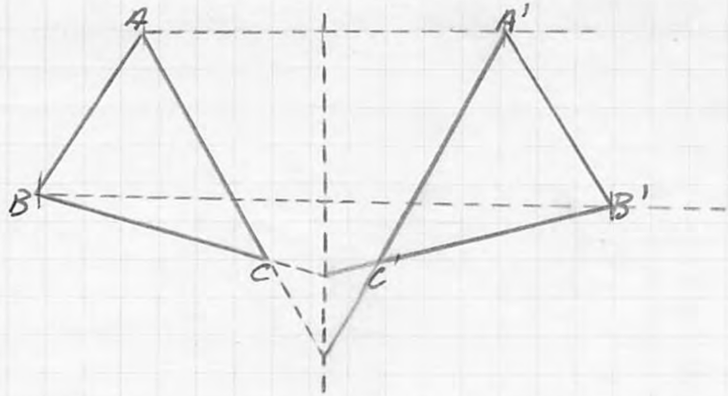
---

② Construire un segment symétrique d'un segment donné.

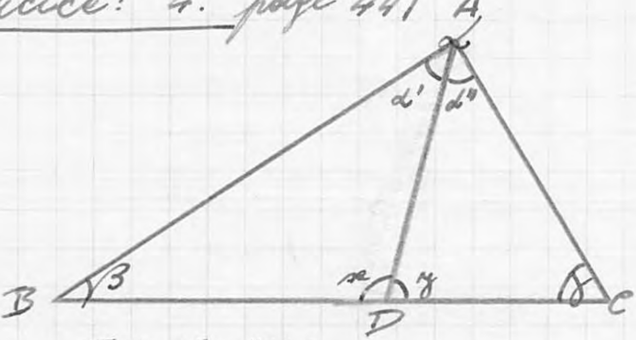


③ Construire un triangle symétrique d'un triangle donné.





72 Exercice: 4. page 44)



Hypot. { Triangle ABC
Angles α, β, γ
Bissectrice divise α en $\alpha' + \alpha''$ / $\alpha' = \alpha''$
(AD)

Conclus. $x - y = \gamma - \beta$

Démonst.

Triangle ABD $= \alpha' + \beta + x = 180°$ (Angles à l'intér. ...)

Triangle ADC $= \alpha'' + y + \gamma = 180°$ (" " ")

$\alpha' + \beta + x = \alpha'' + y + \gamma$ (2 grand. à une 3e ...)

$\alpha' = \alpha''$ p. hypot.

$\beta + x = y + \gamma$

$x - y = \gamma - \beta$ C.Q.F.D.

Devoir en classe: 1er jour II Re.

I) $\frac{2x-4}{5} - \frac{20-x}{4} + \frac{x+0,5}{3} = 6 + \frac{1}{6}$ $\Big/ \cdot 60$

$24x - 48 - 300 + 15x + 20x + 10 = 360 + 10$

$24x + 15x + 20x = 360 + 10 + 48 + 300 - 10$

$59x = 708$

$x = \frac{708}{59} = \underline{\underline{12}}$

II) $\frac{(x-1)(2x-3)}{5} - \frac{(3-x)(2x-1)}{4} - 0,9x^2 = -12,4$ $\Big/ \cdot 20$

$4(x-1)(2x-3) - 5(3-x)(2x-1) - 18x^2 = -248$

$\cancel{8x^2} - 12x - 8x + 12 - 30x + 15 + \cancel{10x^2} - 5x - \cancel{18x^2} = -248$

$\cancel{8x^2} + \cancel{10x^2} - \cancel{18x^2} - 12x - 8x - 30x - 5x = -248 - 12 - 15$

$-55x = -275$

$55x = 275$

$x = \underline{\underline{5}}$

III) Une personne a pris 150 repas tantôt dans un restaurant où elle dépense chaque fois 700 fr. tantôt dans un autre où elle dépense 580 fr. La note dans le 1er dépasse de 28 200 celle du second. Nombre de repas dans chacun?

Nombre de repas dans le I : x

— — — dans le II : $150 - x$

1e Note dans le 1er restaurant : $x \cdot 700 = 700x$

2e Note dans le 2e — : $(150 - x) \cdot 580$

1re Note − 2e Note $= 28200$ fr.

$$700x - (150 - x) \cdot 580 = 28200$$

$$700x - 87000 + 580x = 28200$$

$$700x + 580x = 28200 + 87000$$

$$1280x = 115200$$

$$x = \frac{115200}{1280}$$

$$x = 90$$

Repas dans le 1er restaurant : 90 repas.

— — — — : $150 - 90 = 60$ repas

II. Exerc. (5) 2ème méthode : (page suivante)

$m = \gamma + \frac{y}{2} + \alpha = 90^\circ$ (angles int., $m = 90^\circ$ p.h.)

$n = \beta + \frac{x}{2} + \alpha = 90^\circ$ (même raison)

$\gamma + \frac{y}{2} + \cancel{\alpha} = \beta + \frac{x}{2} + \cancel{\alpha}$ (si on diminue...)

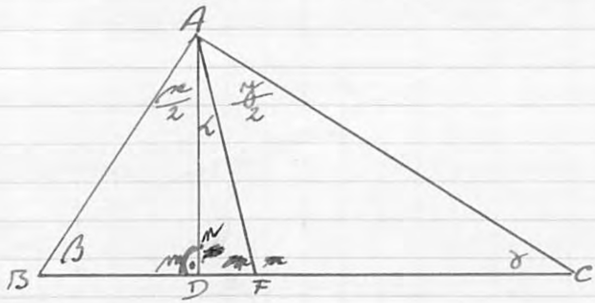
$\cancel{\gamma} + \cancel{\gamma}\ \frac{y}{2} = \frac{x}{2} + \alpha$

$\gamma + \cancel{\frac{x}{2}} + \alpha + \alpha = \beta + \cancel{\frac{x}{2}}$

$2\alpha = \beta - \gamma$ C.Q.F.D.

72. Exercices : (page 44)

5)



Hypot. $\begin{cases} \Delta\ ABC \\ \text{Hauteur } AD, \quad m = 90^\circ \\ \text{Bissectrice } AF. \end{cases}$

Conclus. $\Big\{\ \alpha = \frac{\beta - \gamma}{2} = 2\alpha = \beta - \gamma$

Démonstr. 1) Δ ABD

$\beta + \frac{x}{2} = 90^\circ$ (angles intér.

$\frac{x}{2} = 90^\circ - \beta$ ($m = 90^\circ$ p. hyp.)

2) Δ ADC

$\alpha + \frac{y}{2} + \gamma = 90^\circ$ (même raison)

$\frac{y}{2} + \gamma = 90 - \alpha$

3) Remplaçons : $\frac{y}{2}$ par $\frac{x}{2} + \alpha$

$\frac{x}{2} + \alpha + \gamma = 90 - \alpha$

4) Remplaçons : $\frac{x}{2}$ par son égal $90^\circ - \beta$

$90^\circ - \beta + \alpha + \gamma = 90^\circ - \alpha$

$\cancel{-\beta + \alpha + \gamma + \alpha = 90^\circ - 90^\circ}$

$\alpha + \alpha = \beta - \gamma$

$2\alpha = \beta - \gamma.$ C.Q.F.D.

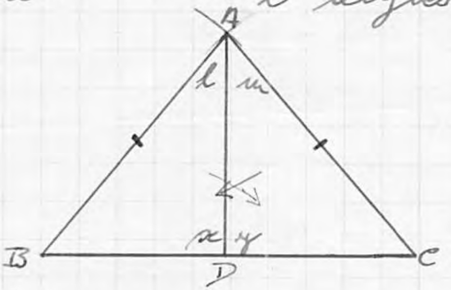
6

Théorème:

Un triangle isoscèle est en même temps isogone.

isoscèle = 2 côtes égaux

isogone = 2 angles égaux.



Hypoth. $\begin{cases} \Delta \ ABC \\ AB = AC \end{cases}$

Conclus. $\{ \ \angle B = \angle C$

Dém. Traçons la bissectrice de A

Faisons tourner le Δ ABD de 180° autour de AD.

Parce que l = m (bissectrice) AB prendra la direction de AC

Parce que AB = AC (p. hyp.) il faut que B tombe sur C.

Comme D reste en place le segment DB tombe sur DC.

les côtés de l'angle B se trouvent sur

les côtés de ∡ C = ∡ B = ∡ C C.Q.F.D.

Conséquences immédiates:

Après la rotation ∡ x coïncide avec

∡ y dont ∡ x = ∡ y

Mais x + y = 180° parce que droite.

Donc x = y = 180° : 2 = 90°

la bissectrice AD = est aussi la hauteur.

Et comme BD = DC elle est aussi

médiane. d'où le théorème:

Dans un triangle isocèle la bissectrice est en même temps la hauteur

la médiane

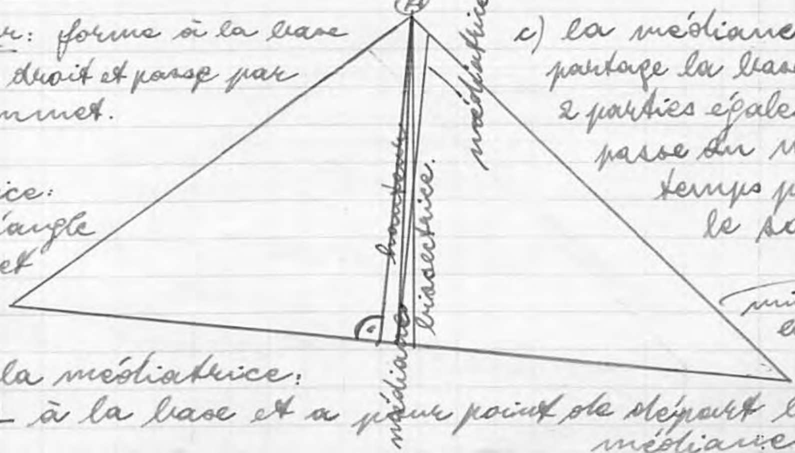
la médiatrice.

---

a) hauteur: forme à la base un angle droit et passe par le sommet.

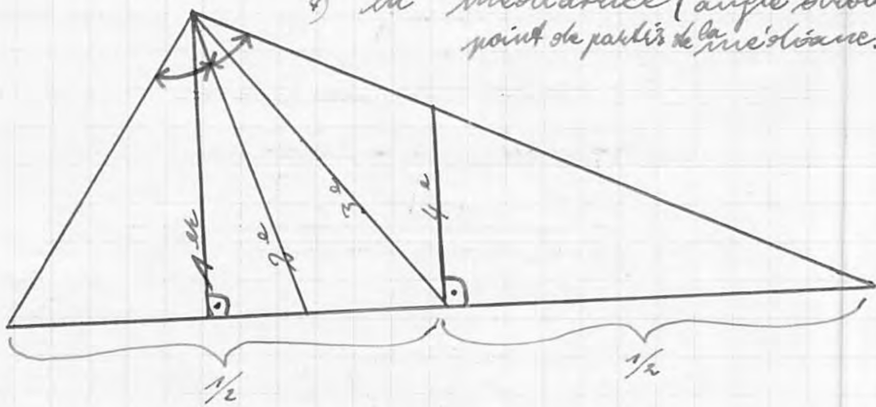
b) bissectrice: partage l'angle du sommet en 2 angles égaux.

c) la médiane: partage la base en 2 parties égales et passe en même temps par le sommet



d) la médiatrice: est ⊥ à la base et a pour point de départ la médiane.

1) la hauteur (angle droit à la base)
2) la bissectrice (2 angles égaux)
3) la médiane (base en 2 parties égales
4) la médiatrice (angle droit sur le point de partie de la médiane.



1.) hauteur: $\perp$ abaissé par d'un sommet sur le côté opposé

2) bissectrice: droite qui partage un angle en 2 parties égales.

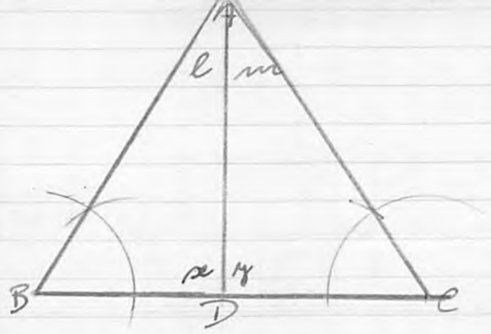
3) médiane: relie un sommet au milieu du côté opposé.

4) médiatrice: c'est la $\perp$ à un côté passant ~~pa~~ par son milieu.

Théorème réciproque.

Un triangle isogone est en même temps isocèle.

Hypothèse: $\{ \measuredangle B = \measuredangle C$



Conclusion: $\left\{ AB = AC \right.$

Démonstration:

Traçons la bissectrice de l'angle A.

1) Considérons les angles x et y.

$x = m + C$ (= angle extérieur du Δ ADC)

$y = l + B$ (= angle ext. du Δ ABD)

Parce que $m = l$ (= bissectrice) et que $C = B$ (Triangle isogone, p.h.) nous avons $x = y$
(Les angles d'un triangle .....)

2) Faisons tourner le triangle ABD de 180° autour de AD, parce que $l = m$, AB prendra la direction de AC,

parce que $x = y$ DB prendra la direction de DC.

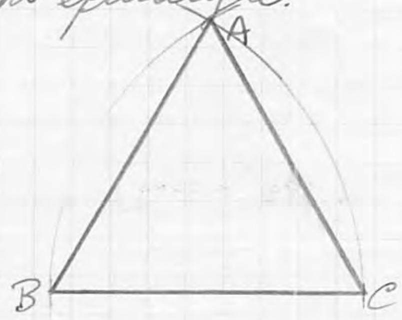
Le point B devant tomber à la fois sur AC et DC tombe sur l'intersection des 2 droites, qui est C.

Comme A reste en place, le côté AB recouvre exactement AC c. à. d.

$AB = AC$ C. Q. F. D.

Théorème:

Un triangle équilatéral est en même temps équiangle.



Hypot. $\begin{cases} ABC = \Delta \\ AB = AC = BC \end{cases}$

Conclus. $\{ \measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle C$

Dém. Parce que $AB = AC$ (p. hy.) $B = C$ (Δ isa est isogone

Parce que $CA = CB$ (p. hy.) $A = B$ (même

$A = C$ (2 grandeurs égale à 3è)

$B = C$, $A = B$, $\underline{\underline{A = C}}$ C. Q. F. D.

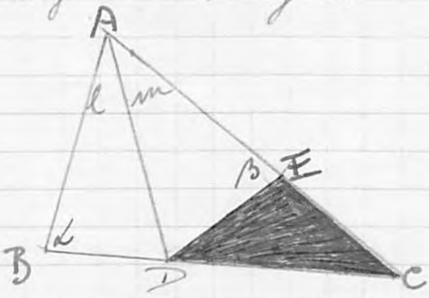
Un angle intérieur d'un triangle équilatéra vaut $180° : 3 = \underline{\underline{60°}}$

D'où une construction géométrique pour un Δ de 60°

Triangle quelconque.

Théorème:

Si ~~les~~ 2 côtés d'un triangle sont inégaux, alors les angles opposés à ces côtés sont également inégaux. Et au plus grand côté est opposé le plus grand angle.



Hypot. $\{ AC > AB$

Conclus. $\{ \hat{B}\,\alpha > \hat{C}$

Dém. Traçons la bissectrice AD et faisons tourner le Δ ABD de 180° autour de AD.

Parce que $l = m$ (bissect.) AB prendra la direction de AC.

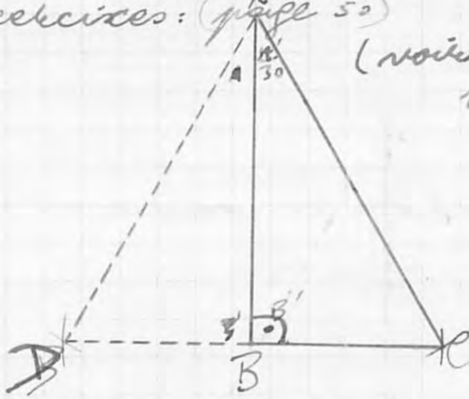
Parce que $AB < AC$ le point B doit tomber entre A et C. par ex en E $\therefore \beta = \alpha$

β = angle extérieur du Δ DEC et par conséquent plus grand que l'un des angles intérieurs non adjacents. donc $\beta > C$

En remplaçant β par son égal α = $\underline{\alpha > \hat{C}}$

83. Exercices: (page 50)

② a)



(voir dém. page suivante)

Hypot. { Triangle ABC
Un des angles aigüs = $\hat{A}' = 30°$
l'angle $B' = 90°$

Conclus. { $\hat{C} = 60°$
$BC = \frac{AC}{2}$

Démonstr. Je trace d'abord un angle de 30° en A sur AB (Traçons un triangle rectangle
En B je trace un autre Δ de 90° et je prolonge $CB \to D$
(ADB) auxiliaire.) Alors nous avons pour

angle A, $2 \cdot 30° = 60°$, pour l'angle $B = 180°$

l'autre angle, D est égale à $C = 60°$

Dans un triangle ~~équilatéral~~ équiangle,

chaque triangle = 60°.

Un triangle équiangle est en même temps

un triangle équilatéral.

Or, dans un Δ équilatéral, la hauteur est à la

fois bissectrice, médiane et médiatrice.

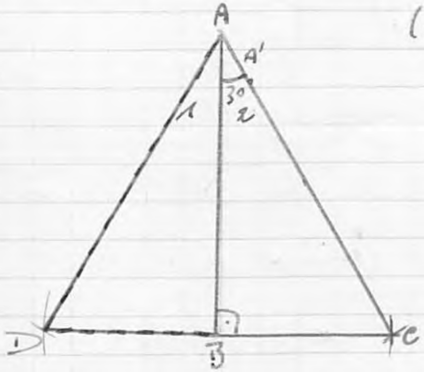
Une médiane relie le sommet A au milieu du

côté opposé (DC) et puisque les 3 côtés égaux: $BC = \frac{AC}{2}$

83. Exercices : (page 50)

② b

(voir Dém. page suivante)



Hypot. $\begin{cases} \Delta\ ABC \\ BC = \dfrac{AC}{2} \\ B = 90° \end{cases}$

Conclus. $\{ \measuredangle A' = 30°$

Dém. Puisque $BC = \frac{AC}{2}$ (p. hy.) on peut tracer un triangle auxiliaire ayant pour hauteur la hauteur de l'autre = AB, et qui a la même grandeur que triangle ABC.

$DC = 2 \cdot BC$.

Voilà j'ai un triangle équilatéral. Or dans un Δ équilatéral est aussi équiangle, donc tout angle $(\hat{A}\,\hat{D}\,\hat{C})$ a une valeur de 60°. Dans un Δ équiangle la bissectrice de A, (ici AB) est à la fois hauteur, (médiane, médiatrice). Or la bissectrice partage chaque angle en 2 parties égales: Donc $A' = \frac{60}{2} = 30°$

C.Q.F.D.

Démonstration: (autre) 83. Exerci. (page 50)

2 a) Je trace en A avec AB un angle de 30°.

Je prolonge CB jusqu'à son intersection.

D avec le côté libre de l'angle de 90°.

$A_1 = A_2 = 30°$ p. hy.

Δ ABC: $A_2 + \hat{B} + \hat{C} = 180°$

$\hat{C} = 60° \quad (180° - 90° - 30°)$

Δ ADC: $\hat{A}_1 + \hat{C} + \hat{D} = 180°$

$D = 60° \, (180° - 90° - 30°)$

Δ ADC: triangle équiangle donc équilatéral

$AD = DC = CA$

Dans un triangle équilatéral la bissectrice = médiane donc $DB = BC$

$DB + BC = AC$

$2\,BC = AC \quad = \quad BC = \frac{AC}{2}$

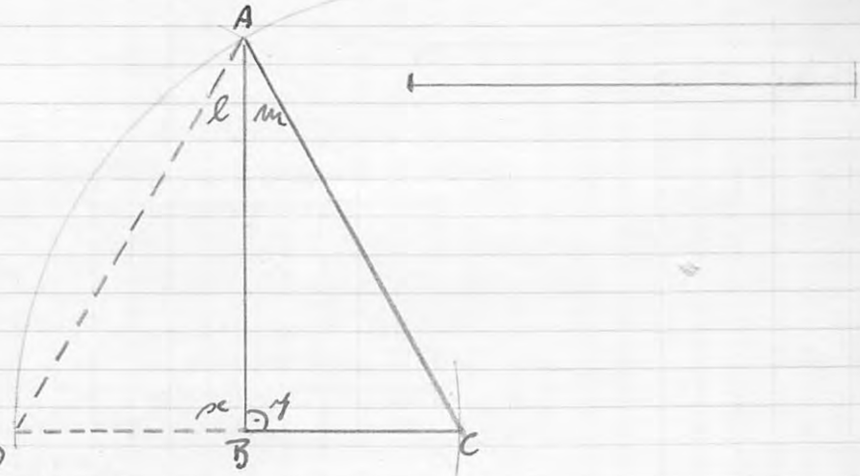
Autre démonstration:

83. Exercices: (page 50)

2 b)

Hypot. $\left\{ \begin{array}{l} \Delta \text{ rectangle } ABC \\ B = 90° \\ AC = 2 \cdot BC \end{array} \right.$

Conclu. $\left\{ \hat{A} = 30° \right.$



Construction:

1/ angle droit
2/ base BC
3/ segment double
4/ traçons un arc de cercle de centre A de rayon 2BC

Démonstration:

1/ Prolongeons CB d'une longueur égale, nous obtenons D.
Relions le point D au point A.

2/ $AC = DC$ car **DB** = BC (p. const.)

$$BC = \frac{AC}{2} \quad \text{(p. hy.)}$$

3/ Rotation de ABC de 180° autour de AB
$y = 90°$ p. hy.
$x = 180° - 90° = 90°$ (prolongé la Dr.)

4/ Parceque $x = y$ la droite BC tombera sur la droite BD (prendra la direct.)
Parce que $BC = BD$ le point C tombera exactement sur D.
Parce que A reste en place AC tombera sur AB

$AC = AD$

le Δ ADC est donc ~~équiangle~~ latéral, donc aussi équiangle.

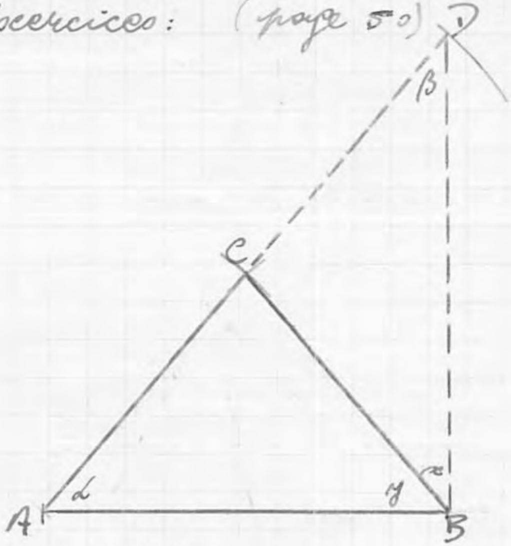
donc $\hat{C} = 60°$

5/ Δ ABC ; $\hat{C} = 60°$; $y = 90°$

$m = 180° - (90° + 60°) = 30$ C.Q.F.D.

83. Exercices: (page 50)

③



Hypot. $\left\{ \begin{array}{l} \Delta\ CAB \\ \cancel{A}CA = CB = CD \end{array} \right.$

Conclus. $\left\{ DB \perp AB \right.$, ou $x + y = 90°$

Démonstr.

1/ Parce $CA = CB$ (p. hy.) $y = \overset{\alpha}{\cancel{x}}$ (triangle isoscèle = triangle isogone

2/ Donc $CA = CD$ p. hyp.

$$\frac{\begin{array}{l} CA = CB \text{ p. hy.} \end{array}}{CD = CB \text{ (2 gr. égales à 3e)}}$$

3) $\Delta\ CB\cancel{A}D$:
parce que $CD = CB$, $x = \beta$.
(triangle isoscèle = isogone)

4) $\Delta\ ABD$: $\cancel{\alpha}$
$\alpha + (y + x) + \beta = 180°$

5) $\alpha + \beta = y + x$ (~~...~~ p. hyp.)

6) $2 \cdot (y + x) = 180°$

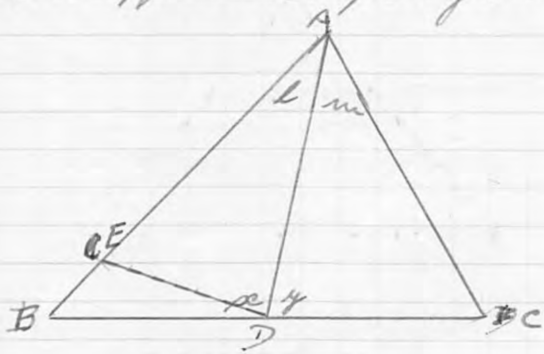
$$\frac{y + x}{2} = \frac{180°}{2}$$

$$y + x = 90°$$

C. Q. F. D.

Théor. réciproque:

Si dans un Δ 2 angles sont inégaux les côtés opposés le sont aussi et au plus grand angle est opposé le plus grand côté.



Hypot. $\begin{cases} \Delta \quad ABC \\ \hat{C} > \hat{B} \end{cases}$

Conclus. $\{ AB > AC$

Démonstr.

Traçons la bissectrice de A. = AD
Comparons les angles x et y
(Δ ADC) x = m + C (angle extérieur)
(Δ ABD) y = l + B (angle ext.)

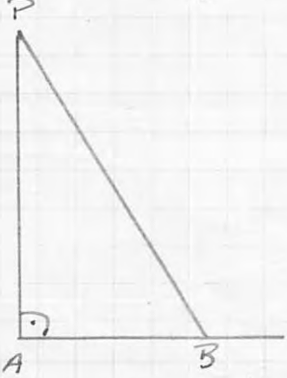
Comme l = m et comme par hypot.
C > B il faut que x > y
Faisons la rotation du Δ ADC de 180° autour de AD.
Parce que m = l (bissectr.) AC prendra la direction de AB
Parce que y < x le côté DC doit tomber à l'intérieur du Δ BDA, c'est à dire c tombe entre AB en E.

Par conséquent AB > AC

C.Q.F.D.

Corollaire :

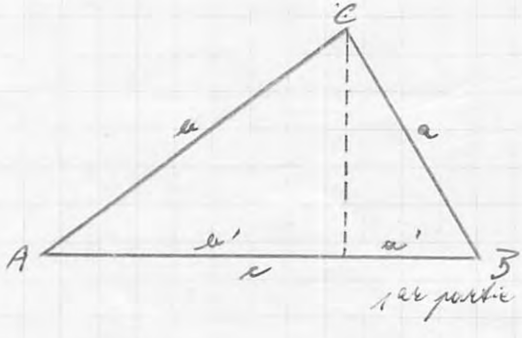
Dans un triangle rectangle le côté opposé à l'angle droit (hypothénuse) est plus grand qu'un des 2 ~~aux~~ autres côtés.



l'oblique est plus ~~longue~~ grande que la ⊥ et on a cherché la ⊥ pour mesurer la distance du point P à la droite AB.

Théorème

Dans tous Δ un côté quelconque est plus petit que la somme des 2 autres et plus grand que leur différence.



Hypot.

$$\begin{cases} \Delta\ ABC \\ a < b < c \end{cases}$$

Conclus.

1er partie

$$\begin{cases} \text{I} & a < b + c \\ \text{II} & b < c + a \\ \text{III} & c < a + b \end{cases}$$

2e partie $\left.\begin{array}{ll} \text{I} & a > c - b \\ \text{II} & b > c - a \\ \text{III} & c > b - a \end{array}\right\}$

Démonstration:

1ère partie la 1ère relation est évidente pour les côtés a et b, car comme $a < b$ on a à plus forte raison $a < b + c$; $= \text{I}$

De même $b < c$ entraine $b < c + a = \text{II}$

Reste à démontrer que $c < a + b$

Parce que c est le plus grand côté, l'angle C est le plus grand angle. Par conséquent les angles A et B doivent être aigues et la hauteur abaissé de C doit tomber à l'intérieur du Δ

Parce que la perpendiculaire est toujours plus courte que toute oblique nous avons $a' < a$ et $b' < b$

$$\begin{array}{c} a' < a \\ b' < b \\ \hline a' + b' < a + b \end{array} \quad (+)$$

$$C < a + b \quad \text{C. Q. F. D.} \quad \text{III}$$

2ème partie.

$$\begin{array}{c} c > a + b \\ b = b \\ \hline c - b < a \end{array} \quad (-\cancel{b})$$

$$a > c - b \quad \text{I}$$

L'inégalité III nous donne
$$\begin{array}{c} c < a + b \\ a = a \\ \hline c - a < b \end{array} \quad (-) \text{ par soustract.}$$

$$b > c - a \quad \text{II}$$

Nous avons finalement:

$$\begin{array}{c} b < c + a \\ a = a \\ \hline b - a < c \end{array} \quad (-)$$

$$c > b - a \quad \text{C. Q. F. D. III}$$

On peut encore dire :

Dans tout triangle le plus grand côté doit être plus petit que la somme des 2 autres.

Le plus petit côté doit être plus grand que la différence des 2 autres.

Exemples :

1) 6, 9, 14.

$14 < 6 + 9$
$6 > 14 - 9$ // triangle ? <u>oui</u>

2) 7, 10, 10

$17 = 7 + 10$
$7 = 17 - 10$ // triangle ? <u>non</u>

3) 8, 12, 22,

$22 \not< 12 + 8$
$8 < 22 - 12$ // triangle ? <u>non</u>

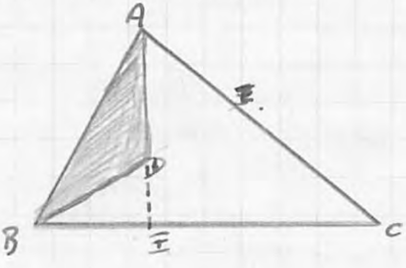
1er)  <u>oui</u>

2e)  <u>non</u>

3e)  <u>non</u>

9o) Exercices : (page 54)

3 <u>Hypot.</u> $\left\{ \begin{array}{l} \Delta\ ABC \\ D.\ \text{point à l'intérieur} \end{array} \right.$



<u>Conclus.</u> $AC + BC > AD + BD$

<u>Démonstr.</u>

1/ $\Delta\ AEC$: $\underline{AE < AC + EC}$ I

2/ $\Delta\ BDE$: $\underline{BD < BE + DE}$ II

3) Remplaçons dans I le segment AE par $AD+DE$: nous obtenons

$$\left.\begin{array}{ll} AD+DE & < AC+EC \\ BD & < BE+DE \end{array}\right| (+)$$

$$AD+\cancel{DE}+BD < AC+EC+BE+\cancel{DE}$$

$$AD+BD < AC+\underbrace{EC+BE}$$

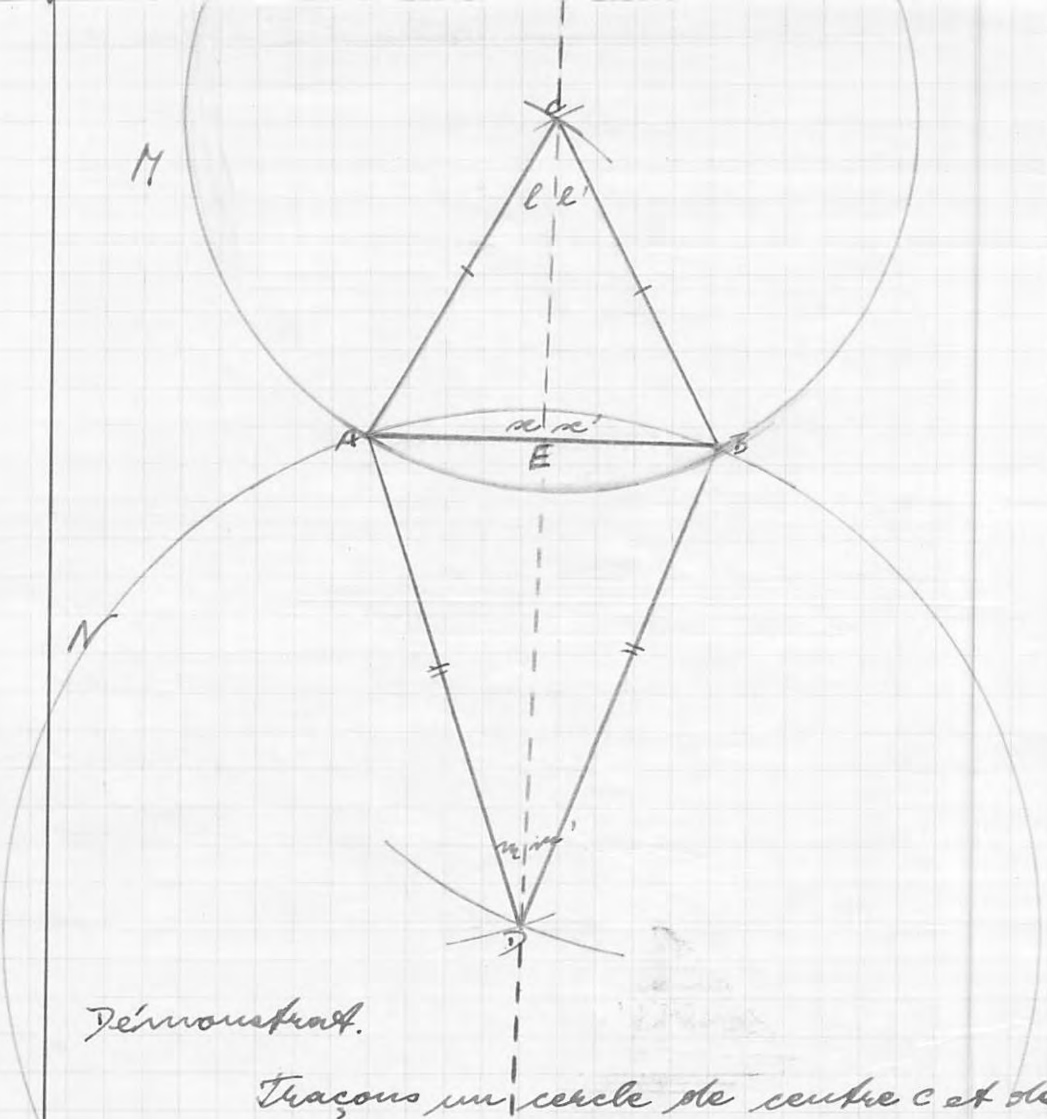
$$AD+BD < AC+BC \quad C.Q.F.D.$$

Théorème du cerf-volant.

Si 2 triangles isocèles ont même base, la droite qui joint les sommets est perpendiculaire au milieu de la base et bissectrice des angles au sommet.

Hypot. $\begin{cases} CA = CB \\ DA = DB \\ AB \text{ base commune} \end{cases}$

Conclus. $\begin{cases} CD \perp AB \\ EA = EB \\ l = l' \\ m = m' \\ x = x' = 90° \end{cases}$



Démonstrat.

Traçons un cercle de centre C et de rayon C A. Parce que C A = C B, ce cercle doit aussi passer par B.

Traçons un cercle de centre D et de rayon D A. Parce que D A = D B ce cercle doit aussi passer par B.

C D est un diamètre commun pour les 2 cercles.

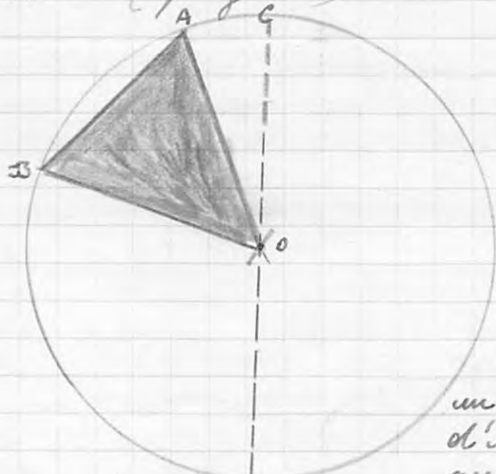
Faisons tourner la partie gauche de 180° autour de CD. Parce que tout diamètre partage un cercle en 2 parties égales, les demi cercles M et N tomberont exactement sur les demi-cercles M' et N'.

Le point A, puisse trouvait à la fois sur N et M, doit tomber après la rotation à la fois sur N' et M' c'est à dire en B.

Comme C et D restent en place, nous avons $l = l'$ ainsi que $x = x' = 180° : 2 = 90°$, $m = m'$ $EA \cdot EB$ C.Q.F.D.

90) Exercices: (page 54)

⑧



Hyp. { BO Rayon
Cercle avec centre o
Δ ABO
BA = Corde
CD Diamètre

Concl. AB < CD

Dém. BO = AO car un rayon est la distance d'un point du cercle au centre et tous les rayons d'un même cercle sont égaux. / = triangle ABO

BA < BO + AO car: Dans tous Δ un côté ....

le diamètre est égal à 2 · rayon.

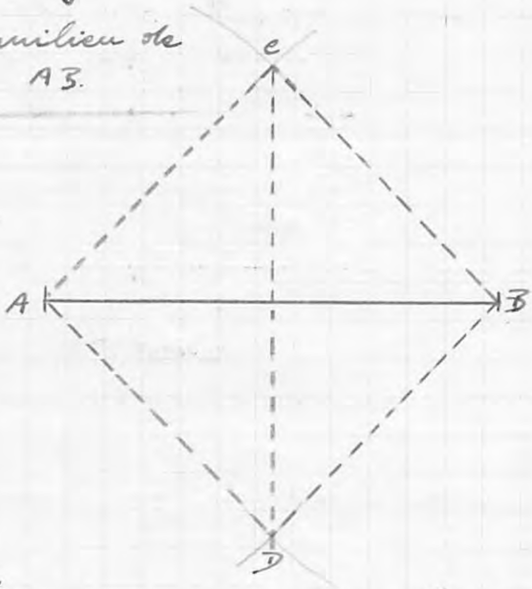
Dou BAB < CD C.Q.F.D.

Constructions fondamentales.

1) Partager un segment en 2 parties égales
(Chercher le milieu d'un segment,
Construire la médiatrice d'un segment

Donnée: segment AB.

Construire: milieu de AB.



Construction:

De A et de B comme centre, traçons avec le même rayon, plus grand que la moitié de AB, 2 arcs de cercles qui se coupent en C et en D.

Le segment CD passe par le milieu de AB et est perpendiculaire à AB (médiatrice)

Démonstration.

Traçons CB, BD, DA, AC

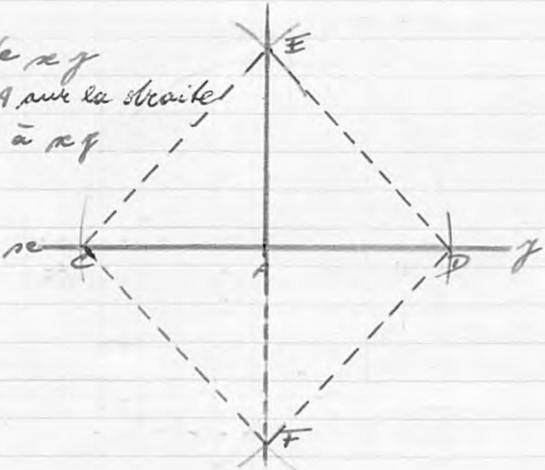
CA = CB rayons de 2 cercles égaux
DA = DB rayons de 2 — —

les 2 triangles CAB et DBA sont donc isocèles et ont une base commune AB.

Alors la droite CD qui relie leurs sommets est perpendiculaire au milieu de la base commune en vertu du théorème du Cerf-volant. C.Q.F.D.

2) En 1 point d'une droite élever la perpendiculaire à cette droite.

Donnée: droite xy
point A sur la droite
Construite: $\perp$ à xy



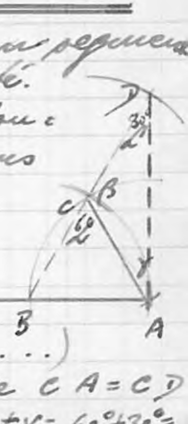
Construction:

De A comme centre avec un rayon quelconque traçons un cercle qui coupe la droite donnée en C et D.
De C et de D comme centre avec le même rayon plus grand que la moitié de CD, traçons 2 arcs de cercles qui se coupent en E et F.
~~Et A~~ EA est la $\perp$ demandée.

Démonstration: voir cas précédent.

Elever la $\perp$ en 1 point hors d'un segment à l'extrémité.

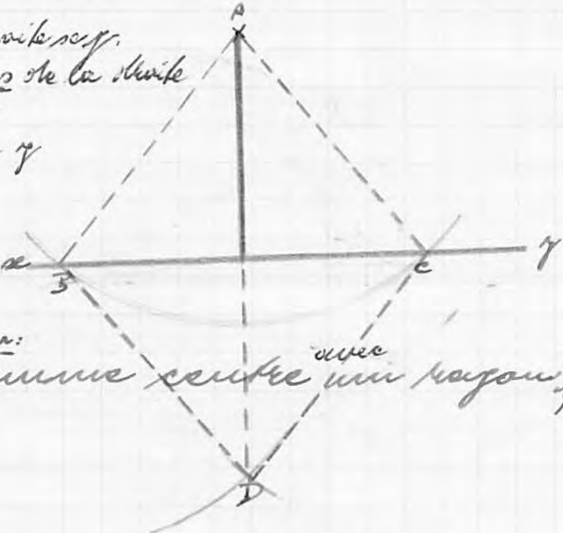
Constr. Traçons un Δ équilatéral. Puis, prolongeons BC d'une longueur égale. Relions le point D à A: $DA \perp BA$



Dém.
Dans un Δ équilatéral un angle vaut 60°. Donc $\alpha = 60°$
$\alpha = \alpha' + \gamma$ (car: un angle extérieur...)
$\alpha = 60°$ Donc $\alpha' + \gamma = 60°$. / Parce que $CA = CD$
$\alpha' = \gamma$ (ans Δ isocèle) Donc $\gamma = 30°$ $\alpha' = 30$ / $\hat{A} + \gamma = 60° + 30° = 90°$

3) D'un point hors d'une droite, abaisser la ⊥ à cette droite.

Donnée : Droite xy.
A, hors de la droite
Construction :
⊥ à xy



Construction :
De A comme centre avec un rayon suffisamment ~~quelconque~~ grand traçons un cercle qui coupe la droite xy en B et en C.
De B et de C comme centre traçons 2 arcs de cercles qui se coupent en D avec même rayon plus grand que la moitié de B et C
A D est la ⊥ demandée.
(On n'a pas besoin du 2ème point d'intersection

Démonstration :
Traçons AB, AC, CD, BD.
AB = AC comme rayon d'un même cer.
BD = CD comme rayon de 2 cer. égaux.
les 2 triangles A B C et D B C sont donc isoscèle et ont même base BC.

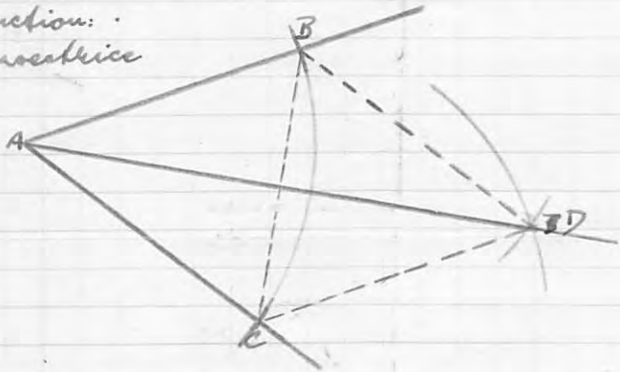
Alors en vertu du théor. du cerf-volant le segment AD, qui relie les 2 sommets, est ⊥ à la base
C. Q. F. D.

4/ Construction de la bissectrice d'un ∢
(partager un angle en 2 parties égales.

Donnée : ∢ BAC

Construction :

Bissectrice



Construction :

De A comme centre avec un rayon quelconque traçons un arc de cercle qui coupe les côtés de l'angle en B et en C

De B et de C comme centre avec le même rayon suffisamment grand, traçons 2 arcs de cercles qui se coupent en D. (on n'a pas besoin du 2e point d'intersection)

A D est la bissectrice demandée.

Démonstration :

Traçons DB , BC , CD

AB = AC · rayons d'un même cercle

DB = DC = comme rayon de 2 cer. égaux

les 2 triangles ABC et DBC sont donc isocèles et ont une base commune.

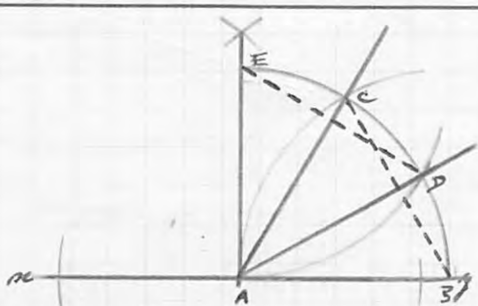
Alors la droite AD qui joint les sommets est bissectrice des angles au sommet

En vertu du théor. du Cerf-Volant.

AD = bissectrice C.Q.F.D.

Remarque :

On a trouvé qu'il est impossible de partager un angle quelconque en 3 parties égales (avec règle + compas). Cependant un angle droit peut être partagé en 3 parties égales.



Prenons A comme centre.
Traçons un arc de cercle qui passe par B et par E.
Puis prenons le même rayon et pour centre B. Traçons alors un arc de cercle qui passe par A et par C.
Et prenons encore le même rayon et pour centre E. Traçons un arc de cercle qui passe par A et par D.

Les lieux géométriques :

Définition :

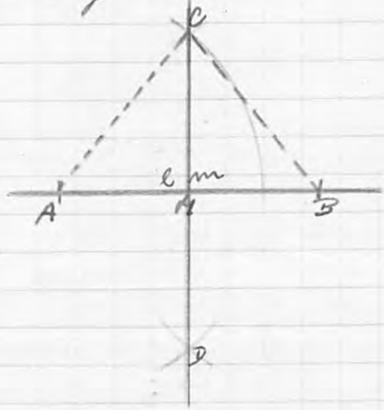
On appelle lieux géométriques un ensemble de points qui tous possèdent une certaine propriété commune que tous les autres points ne possèdent pas.

p. ex.

Cercle: est le lieu géométrique de tous les points d'un plan situés à égale distance d'un point fixe = centre

Médiatrice: C'est la $\perp$ élevé au milieu d'un segment

Théorème: Tout point de la médiatrice d'un segment est équi~~dista~~ distant avec extrémités de ce segment.

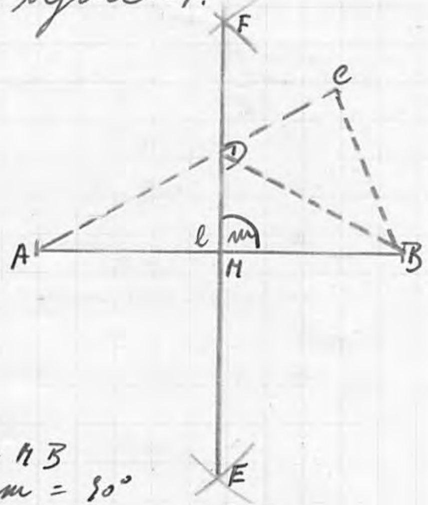


Hypot.
CD = médiatrice de AB
ou $MA = MB$
$l = m = 90°$

Conclus.
$CA = CB$.

Démonstration: Faisons tourner le Δ CAM de 180° autour de CD.
Parce que $l = m$, MA prendra la direction de MB.
Parce que $MA = MB$, le point A tombe sur B.
Comme C reste en place, le segment CA tombe sur CB.
Donc $CA = CB$ C.Q.F.D.

Théorème: Un point hors de la médiatrice d'un segment est inégalement distant des extrémités de ce segment.



Hypot. $AM = MB$
$l = m = 90°$
C hors de la méd. DE

Concl. $CB \neq CA$
$CB < CA$

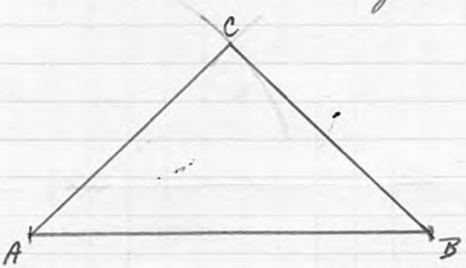
Démonstr. Parce que C est hors de la médiatrice un des segments CA ou CB doit couper la médiatrice. Ici c'est CA coupe la médiatrice en D.
Traçons encore DB
Parce que D est sur la médiatrice nous avons $DA = DB$ (théor. précédent)
Dans le Δ CDB nous avons
$CB < CD + DB$ (dans tout triangle un côté est plus petit ....
Remplaçons DB par son égal DA
nous avons

$$CB < \underbrace{CD + DA}$$

$$= CB < CA$$ C. Q. F. D.

Théorème réciproque du I théor.

Un point également distant des extré-
mités d'un segment se trouve ~~nt~~ sur la
médiatrice ~~sur~~ de ce segment.



Hypot. | $CA = CB$

Conclus. | C sur la médiatr. de AB.

Démonstr. à l'absurde.

2 cas: (C ~~A~~ est sur la médiatr.
(C n'est pas —

Si c n'était pas sur la média-
trice il serait inégalement dis-
tant de A et de B.
(Théorème précédent)
Ce qui est contrairement à l'hypoth.

Alors il ne reste plus que le 1er
cas. C est sur la médiatrice.

Conclusion: C. Q. F. D

Tous points de la médiatrice possèd.
donc une certaine propriété et tous
les autres points ne l'ont pas.
La médiatrice est donc un lieu géométr.

le lieu géométrique de tous les points équidistant de 2 points donnés est la médiatrice du segment qui relie les 2 points donnés.

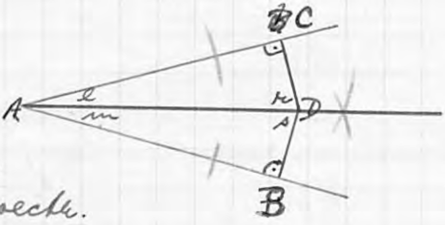
---

la bissectrice :

Définit. droite qui partage un angle en 2 parties égales.

On appelle distance d'un point à une droite la longueur de la ⊥ abaissée de ce point sur la droite.

$\boxed{\text{Théorème:}}$ Tout points de la bissectrice d'un angle est équidistant des côtés de cet ∢



Hypoth. { ∢ CAB
AD bissectr.
ou $l = m$
D sur la bissectrice
DB ⊥ AB
DC ⊥ AC

Conclus. { DC = DB

Démonstr. 1) Δ ACD : $l + C + r = 180°$
Δ ABD : $m + B + s = 180°$

$$l + C + r = m + B + s$$

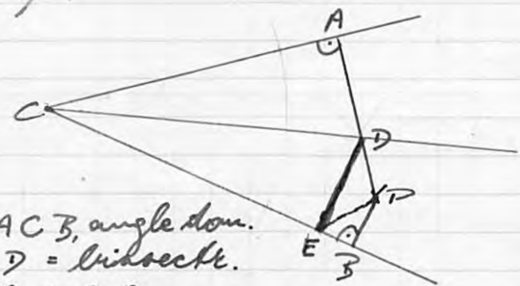
comme $l = m$
$C = B$
alors $r = s$

2) Rotation de 180° du Δ ACD autour AD
Parce que $l = m$, AC prendra la direction de AB
Parce que $r = s$ (p. dém.) DC prendra la dir. de DB
C devant tomber à la fois sur AB et DB,

tombe à leur intersection qui est B.
Comme D reste en place DC tombe sur ~~sa~~ DB.

Donc DC = DB C.Q.F.D.

~~Théorème: 2)~~ ~~Tout~~ point qui n'est pas sur la bissectrice est inégalement distant des côtés de cet $\measuredangle$.



Hyp. $\begin{cases} ACB, \text{ angle don.} \\ CD = \text{bissectr.} \\ PA \perp CA \\ PB \perp CB \\ P \text{ hors de la } \cancel{\text{médi}} \text{ bissectrice} \end{cases}$

Conclus. $\{ PB < PA$

Dém. Comme P ne se trouve pas sur la bissectrice, un des segments PB et PA doit nécessairement couper la bissectrice. Ici PA coupe la bissectrice en D.
Comme D est sur la bissectrice, nous avons en vertu du théor. précédent $DE = DA$
Traçons le segment auxiliaire PE et considérons le Δ rectangle PEB
$EP > PB$ car dans un Δ rectangle l'hypothénuse est le plus grand côté.
Considérons le Δ DEP
$EP < PD$ et DE
$EP < PD + DA$ p. dém.
$EP < PA$
Comme ~~B~~ $PB < EP$ on a à plus forte raison $PB < PA$ ~~C.~~ C.Q.F.D.

la bissectrice est donc un lieu géométrique. (Tous ses points possèdent une propriété que les autres ne possèdent pas.
Le lieu géométrique de tous les points équidistants d'un angle, est la bissectrice de cet angle.

<u>Généralisation</u>:

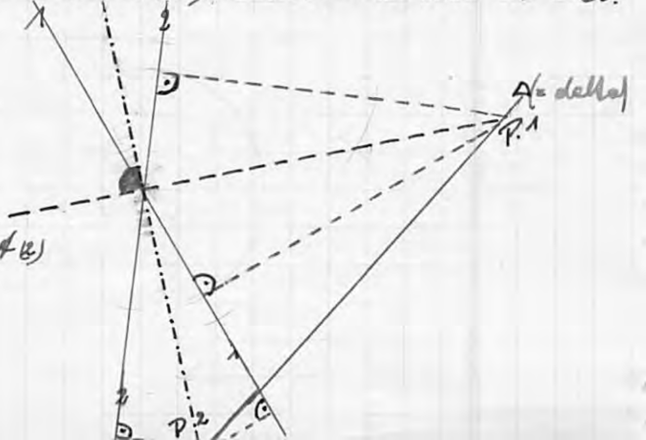
Le lieu géométrique de tous les points d'un plan situés à égale distance de 2 droites sécantes données est le système des bissectrices des quatres angles (formés par les 2 droites sécantes.
(les bissectrices sont $\perp$ l'une à l'autre.)

110 Exercices: (page 64)

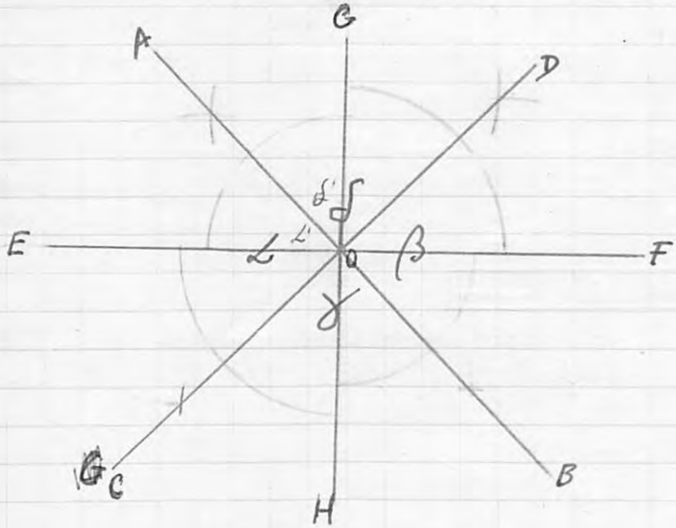
Trouver sur une droite donnée un point équidistant de 2 droites sécantes données.

Données: a) droite Δ
b) 2 droites sécantes (1) et (2)

Construite:
P point sur Δ (= delta) équidistant de (1) et (2)



P se trouve à l'intersection de Δ (Delta) avec le système des bissectrices de quatres angles formés par 1 et 2.



Hypot. AB } 2 dr. sécantes
CD }
EF } bissectr. $\alpha + \beta$
GH } bissectr. $\delta + \gamma$

Concl. $GH \perp EF$ ou $COE = 90°$ ou $\alpha' + \delta' = 90°$

Démonstr. ~~$\frac{\alpha}{2} + \delta + \frac{\beta}{2}$ = 180° (droite EF)~~

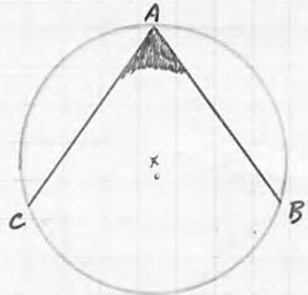
$\alpha + \delta = 180°$ (CD = droite)

$\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = 180°$

$$\underbrace{\frac{\alpha}{2} + \frac{\delta}{2}}_{EOG} = 90°$$

$EOG = 90°$ C.Q.F.D.

Cercle de Thalès



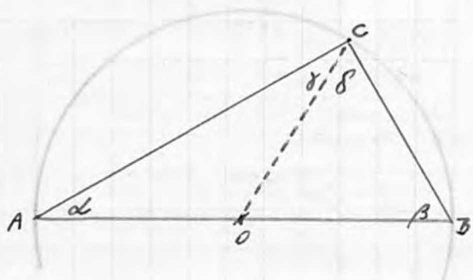
$C\hat{A}B$ = angle inscrit dans un cercle.

Définition:

Un angle inscrit dans un cercle est un angle formé par 2 cordes, issues d'un même point d'un cercle.

Théorème de Thalès

L'angle inscrit dans un <u>demi</u>-cercle est un angle droit = 90°



Hypot. $\begin{cases} ACB: \text{demi-cercle} \\ AB = \text{diamètre} \\ C \text{ sur cercle} \\ O = \text{centre} \end{cases}$

Concl. $\{ A\hat{C}B = 90°$

Démonstration: 1) Traçons le segment auxiliaire CO, et considérons le triangle OAC

OA = OC comme rayon d'un même cercle

Donc Δ OAC = isoscèle

p. c Δ OAC = isogone

$\alpha = \gamma$

2) En considérant le Δ OBC on démontre de la même façon que $\beta = \delta$

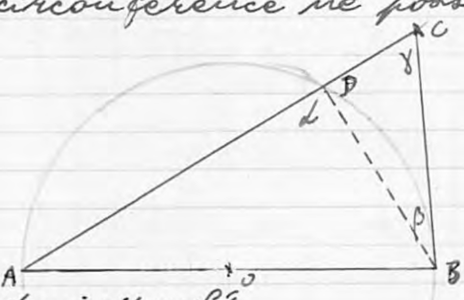
3) Δ ACB : $\alpha + \gamma + \delta + \beta = 180°$ (somme des $\measuredangle$)

4/ Remplaçons α par son égal γ et β par son égal δ =

$$\gamma + \delta + \gamma + \delta = 180°$$
$$2\gamma + 2\delta = 180°$$
$$2(\gamma + \delta) = 180°$$
$$\gamma + \delta = 90°$$
$$A\hat{C}B = 90° \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Tout point de la demi circonférence possède donc la propriété d'être le sommet d'un angle droit, dont les côtés passent par les extrémités ~~A4a~~ du diamètre :

Il faut encore démontrer que tout point hors de la demi-circonférence ne possède pas cette propriété:



Hypoth. { ADB ~~AB~~ demi circonfér.
AB diamètre
O centre
C hors du cercle

Conclus. { $A\hat{C}B \neq 90°$
$A\hat{C}B < 90°$

Démonstr. Parce que C est à l'extérieur du cercle, un des côtés, CA ou CB doit couper le cercle : ici AC coupe le cercle en D

Traçons DB :

$\alpha = 90°$ car D est sur la circonférence (Théor. précédent)

DABC : $\alpha = \gamma + \beta$ = (angle extérieur ...)

$90° = \gamma + \beta$

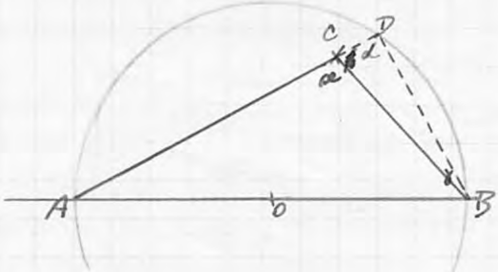
$\gamma = 90° - \beta$

$\gamma < 90°$ C. Q. F. D.

A démontrer que :

Tout point à l'intérieur de la demi-circonférence ne possède pas cette propriété.

Hypothèse : (A✗B = demi-circonfér.
AB = diamètre
E = centre
C à l'intérieur du cercle



Conclusion:

$\left\{ \begin{array}{l} A\hat{C}B \neq 90° \\ ACB > 90° \end{array} \right.$

Démonstration: Parce que C est à l'intérieur, aucun côté ne peut couper le cercle.

Prolongeons le côté AC jusqu'à son intersection avec la circonférence; = D
Puis relions ce point D au point B.
De cette façon nous avons construit le triangle CDB.
$\delta = 90°$ car D est sur la circonférence (voir théor. précédent)

$\Delta\ ADB$: $\delta = 90°$

~~alors~~ ~~...~~ ~~(comme~~

$x = \delta + \gamma$ (angle extérieur)

$x = 90° + \gamma$

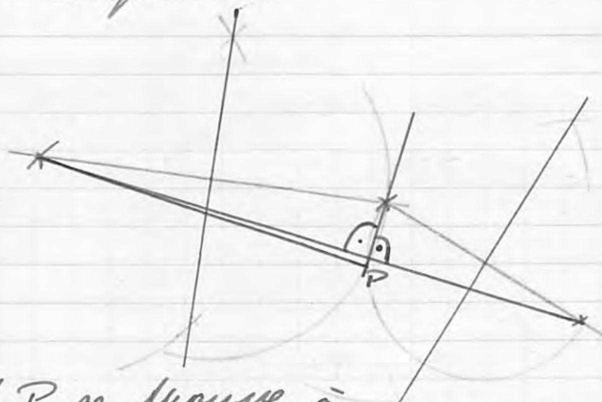
$x > 90°$

C. Q. F. D.

Le lieu géométrique des sommets des angles droits dont les côtés passent par 2 points fixes, est le ~~sommet~~ cercle construit sur le segment qui relie les 2 points comme diamètre.

ou, le lieu géométrique de tous les points desquelles on voit un segment donné sous un angle droit est le cercle de Thalès construit sur ce segment, comme diamètre.

On est placé en 1 point duquel on voit 2 segments donnés sous un angle droit.
Quel est-ce point?

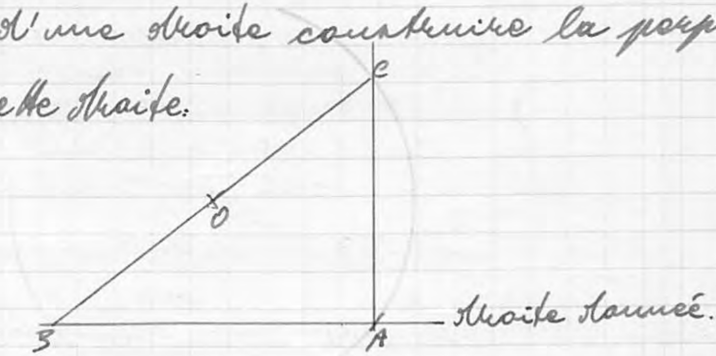


le point P se trouve à
l'intersection des 2 cercles de Thalès, construits sur les segments donnés comme diamètre.

C.Q.F.C.

Construction plus simple:

En 1 point d'une droite construire la perpendiculaire à cette droite.



Construction:

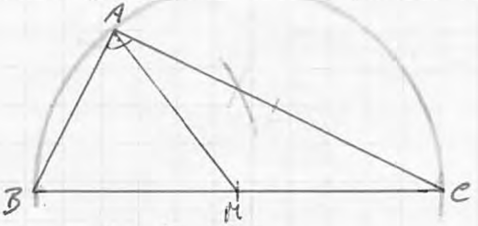
Prenons un centre o quelconque.
Traçons le cercle de centre o et de rayon OA
Il coupe la droite donnée en B
Traçons le diamètre Bo et déterminons ~~de~~ son intersection C avec le cercle

$CA \perp AB$ CA perpend. demandé

C.Q.F.C.

Propriété caractéristique d'un triangle rectangle.

Théorème: Dans un triangle rectangle la médiane relative à l'hypothénuse vaut la moitié de cette hypothénuse.



Hypoth. $\begin{cases} ABC\ \triangle \text{ rectangle} \\ A = 90^\circ \\ MB = MC \\ AM \text{ médiane} \end{cases}$

Concl. $AM = \dfrac{BC}{2} = BM = CM$

Dém. De M comme centre avec un rayon égal à MB, traçons un cercle.
Parce que $MB = MC$ p.h. ce cercle passera également par C.
Il doit aussi passer par A, car sans celà l'angle en A ne pourrait pas être 90°. (en vertu du Th. de Thalès)
MA est donc un rayon de ce cercle et est nécessairement égal à MC ou MB, car tous les rayons sont égaux.

C.Q.F.D.

Réciproque:
Si dans un triangle la médiane relative à un côté vaut la moitié de ce côté, alors le triangle est rectangle. (angle droit est opposé au côté en question.

Hypothèse. $\begin{cases} M \text{ milieu de } BC : MB = MC \\ AM = BM = MC \end{cases}$

Conclus $\left\{ B\hat{A}C = 90° \right.$

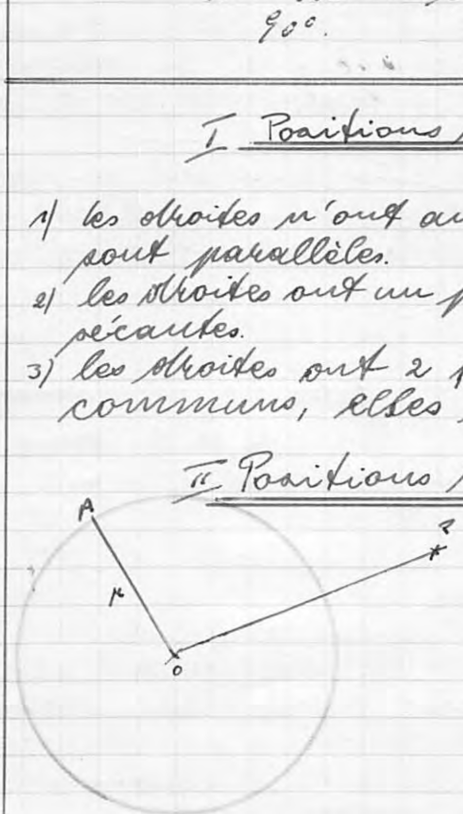
Dém. De M comme centre avec MB comme rayon traçons un cercle.
Parce que MB = MC, ce cercle passera par C.
Parce que MA = MB il passera aussi par A.
L'angle BAC est donc inscrit dans un demi cercle et vaut par conséquent 90°.

C.Q.F.D.

I Positions relatives de 2 droites:

1/ les droites n'ont aucun point comment, elles sont parallèles.
2/ les droites ont un point communn, elles sont sécantes.
3/ les droites ont 2 c'est alors dit, tous les points communs, elles coïncident.

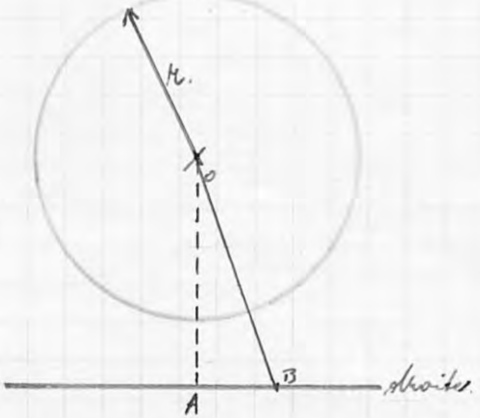
II Positions relatives d'un point et d'un cer[cle]



OA = rayon
O = centre
P
d = distance de P à O

1) si $d > r$, P se trouve à l'extérieur.
2) si $d = r$, P se trouve sur le cercle
3) si $d < r$, P se trouve à l'intérieur.

III Positions relatives d'une droite et un cercle



r = rayon du cercle
o = centre
OA = d = distance de la droite au centre.
OA ⊥ à la droite

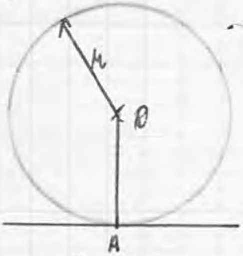
1) $d > r$

le point A est donc à l'extérieur du cercle. Considérons un autre point B de la droite. Traçons OB. Dans le Δ rectangle OAB, nous avons $OB > OA$. (Théor.

B se trouve encore plus loin du centre, donc également à l'extérieur c'est à dire la droite et cercle n'ont aucun point commun

si $D > r$: droite à l'extérieur du cercle.

2) $d = r$

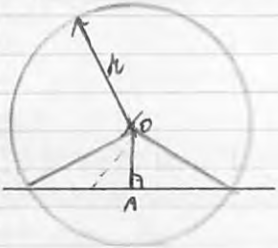


r = rayon
o = centre
OA = distance de la dr. à O
OA ⊥ à la droite.

$d = r$. le point A est sur le cercle. Mais tout autre point de la droite est de nouveau hors du cercle. (Voir dém. précédente) droite et cercle ont donc un point commun

$D = r$ = tangente du cercle, 1 point commun

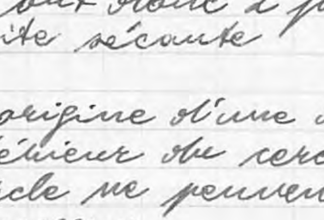
3) $d < r$.



le point A à l'intérieur. les obliques, dont le pied s'écarte davantage de A sont de plus en plus grandes et il arrive un moment où l'oblique est égale au rayon les points se trouvent sur le cercle.
droite et cercle ont donc 2 points communs
$d < r$ = droite sécante \ = droite = sécante

Remarque: Si l'origine d'une demi-droite se trouve à l'intérieur du cercle, cette demi-droite et le cercle ne peuvent avoir qu'un seul point commun.

Théorème: Si 2 obliques s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire, alors c'est la plus grande qui s'écarte le plus.



Hypot { droite AC
$l = 90°$
BP oblique
CP oblique
$AC > AB$
P sommet

Conclus. $PC > PB$.

Démonstr. 1) $m > l$ (car ∢ m = angle extér. Δ PAB)
$l = 90°$, alors $m > 90°$

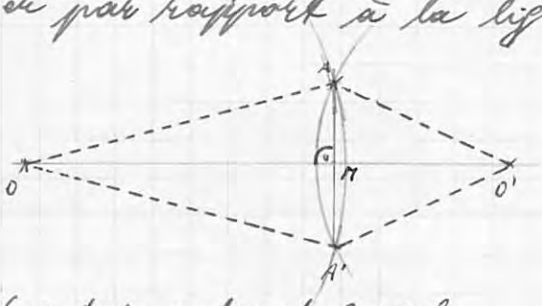
(Δ PAC) 2) d = plus petit que 90° (car dans un Δ il ne peut y avoir qu'un angle droit.

3) Δ PBC.
PC opposé à m, est le plus grand côté ($m > 90°$ et puisque $d < 90°$, à plus forte raison $m > d$) en vertu du théor. au plus grand ∢ est opp. le plus grand côté
Donc $PC > PB$ C.Q.F.D.

Position relative de 2 cercles:

Théorème

Si 2 cercles ont un point commun en dehors de la ligne des centres, alors ils ont encore un 2ème point commun symétrique du 1er par rapport à la ligne des centres.



Hypoth. $\begin{cases} O \text{ et } O' \text{ centre de 2 cercles} \\ A \text{ point commun} \\ AM \perp OO',\ MA' \text{ prol. de } MA \\ MA = MA' \end{cases}$

Conclus. $\begin{cases} A' \text{ 2è point commun.} \\ \text{c. à. d. } A' \text{ sur cercle } O,\quad A' \text{ sur cerc. } O' \end{cases}$

Démonstr.

1) Comme $AA' \perp OO'$ et comme $MA = MA'$ le segment OO' est la médiatrice du segment AA'

or tout point point de la médiatrice ...

Donc $OA = OA'$

le cercle de centre O passant par A, doit aussi par A'.

2)

Même démonstration par le cercle de centre O'

Définition.

le segment qui relie les points d'intersection de 2 cercles s'appelle la corde commune.

Corollaire:

la ligne des centres de 2 cercles qui se coupent est $\perp$ au milieu de la corde commune

Définition

Deux cercles qui ont seulement un point commun sont appelés cercles tangents.

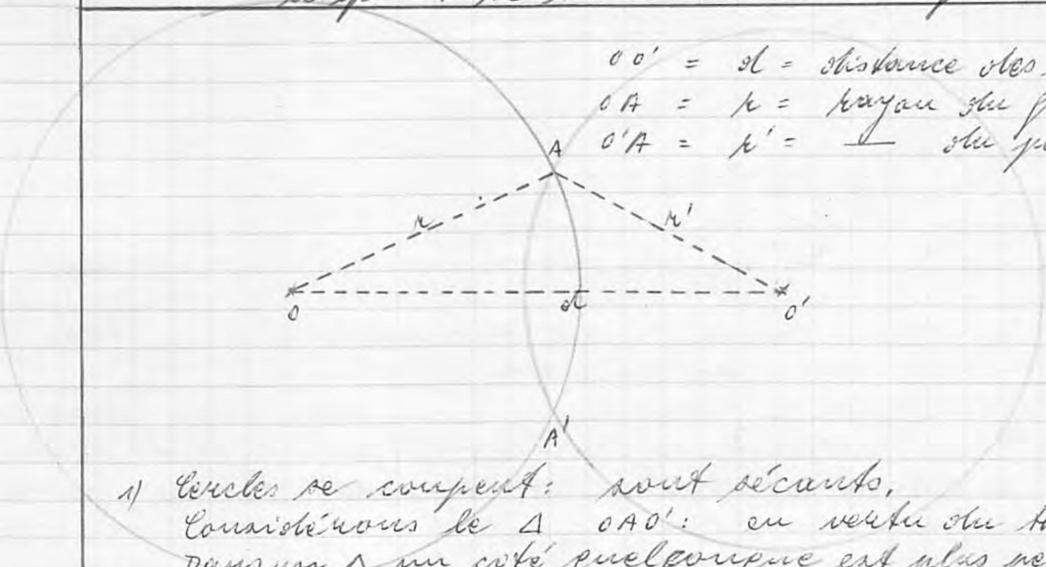
Théorème:

le point de contacte se trouve sur la ligne des centres. (de 2 cercles tangents.

Démonstration. (indirecte) 2 cas a) } le point sur la ligne de centre
b) } hors de la ligne

Si le point n'était pas sur la ligne des centres il y aurait encore d'après le 1er théorème un 2ème point commun, ce qui est contraire à l'hypothèse.
Alors 2ème cas impossible il ne reste que:
le point se trouve sur la ligne de centre

$OO' = d =$ distance des centres
$OA = r =$ rayon du grand cer.
$O'A = r' =$ — du petit cer.



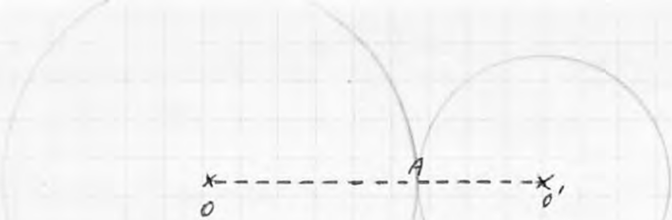
1) Cercles se coupent: sont sécants,
Considérons le Δ OAO': en vertu du théor. Dans un Δ un coté quelconque est plus petit, ...
nous avons:

$$OO' < OA + O'A$$
$$OO' > OA - O'A$$
$$OA - O'A < OO' < OA + O'A$$
$$r - r' < d < r + r'$$

la distance des centres est comprise entre la somme des rayons et la différence des rayons.

---

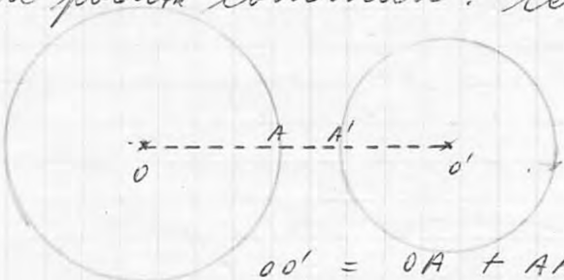
2) Si les cercles s'écartent davantage, il arrive un moment où la corde commune AA' se réduit en 1 point: les cercles sont tangents.
extérieurement



les 2 points A et A' sont venus se confondre en 1 seul point, en A, sur la ligne des centres (Théo: le point de contacte se trouve sur la ligne des centres.

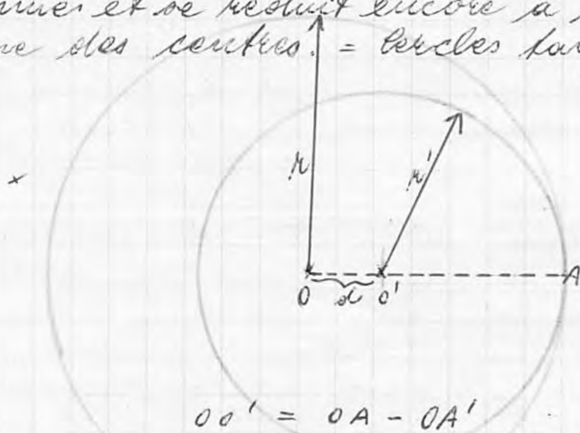
$$OO' = OA + O'A$$
$$d = r + r'$$

3/ les cercles s'écartent encore davantage = plus de points commun : cercles extérieurs



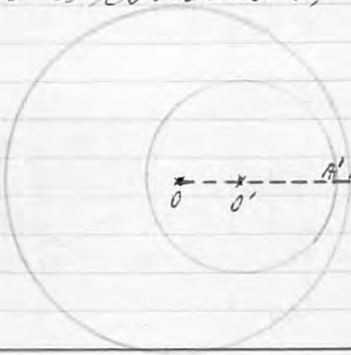
$$OO' = OA + AA' + AO'$$
$$d = r + r' + AA'$$
$$d > r + r'$$

4/ Si les cercles se rapprochent (à partir de la 1ère figure) la corde commune augmente d'abord, puis diminue et se résuit encore à un point sur la ligne des centres = cercles tangents intérieurement



$$OO' = OA - OA'$$
$$d = r - r'$$

5/ les centres se rapprochent davantage, plus de points communs, cercle à l'intérieur.



$OO' = OA - AA' - O'A$
$d = r - r' - AA'$
$d < r - r'$

6/ les centres se rapprochent encore et coïncident finalement, cercles concentriques.

$OO' = 0$
$d = 0$

Résumé :

1/ cercles extérieurs	$d > r + r'$	dist. > sommes des ray.
2/ cercles tangents (extér.)	$d = r + r'$	dist. = somme —
3/ cercles sécants	$r - r' < d < r + r'$	
4/ cercles tangents (intér.)	$d = r - r'$	
5/ cercles intérieurs	$d < r - r'$	
6/ cercles concentriques	$d = 0$	

Remarques sur 2 autres lieux géométriques

1/ le lieu géométrique des points équidistants d'une droite donnée, est le système des parallèles menées à cette droite, à une distance égale à la distance donnée.

2) le lieu géométrique des points équidistants de deux parallèles données est la parallèle menée à égale distance des 2 parallèles données et appelée la parallèle moyenne.

129 Exercices : (page 73)

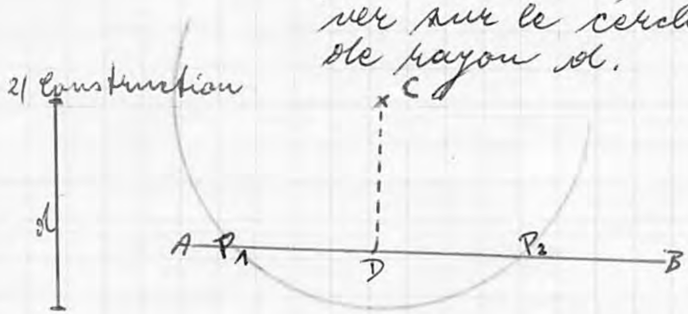
③ 1/ Annalyse

Données : { droite AB
C point
d = distance

Chercher : point P

Conditions : { P doit être sur AB
PC = d ; donc P doit se trouver sur le cercle de centre C et de rayon d.

2/ Construction



P doit se trouver à la fois sur la droite et le cercle, et se trouve donc à l'intersection des deux.

Sur notre figure nous avons 2 points.

3/ la Discussion.

Soit CD la distance de C à AB

a/ si CD < d il y a 2 solutions

b/ si CD = d il y a seulement une solution

c/ si CD > d pas de solutions.

d/ si C est sur AB il y a toujours 2 solutions

128/ Exercices (page 73)

⑤ 1/ Annalyse

Données : { droite AB
2 points C et D

Chercher : P

Conditions : { P sur AB
P à égale distance ~~de~~ C D =
PC = PD

Donc P sur la médiatrice du segment CD.

2/ Construction.

Sur notre figure nous avons un point : P.

3/ Discussions

a) ordinairement une solution.

b) ~~Cas spéciaux~~ :

1/ Si la médiatrice est parallèle à la droite donnée, alors il y n'y a aucune ~~point~~ solution :

CD est alors ~~//~~ perpendiculaire à AB.

2/ Si médiatrice et droite coïncident il y a une infinité de solutions.

AB est alors médiatrice de CD.

129/ Exercices : (page 73)

(6) 1) Données : { AB et CD droites concourantes
point E
distance d

Chercher : P = point

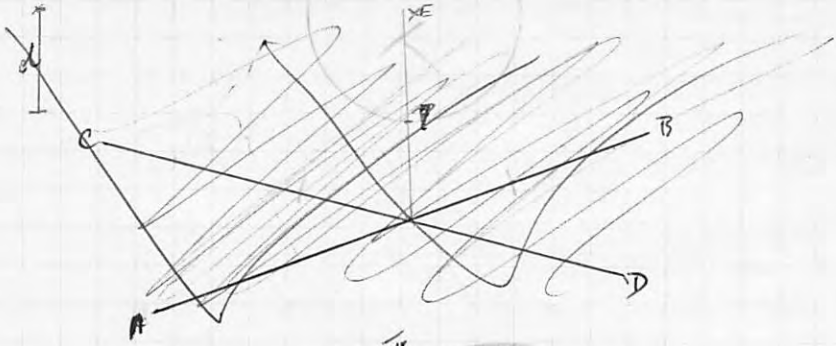
Conditions : { 1/ équidistant de AB et CD
~~2/~~ P sur le système des bissectrices
2) P distant de d du point E.

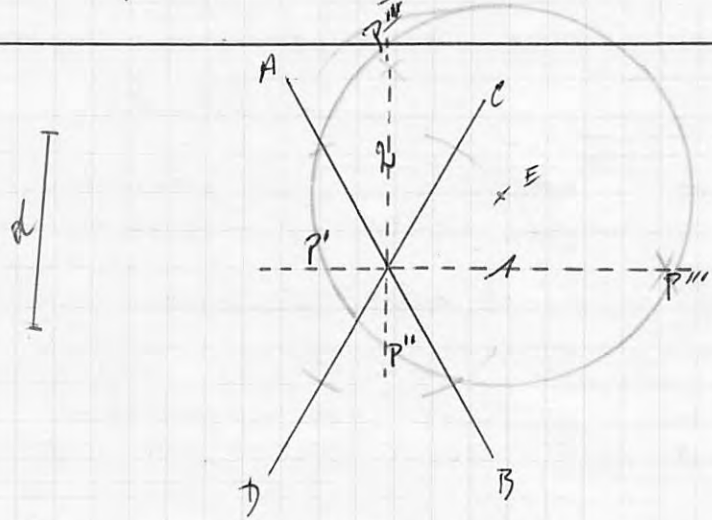
3/ P sur le cercle (centre E, rayon d)

2) ~~Discussions~~ :

Construction.

(Tourner)





Sur notre figure il y a 4 Points

__Discussions:__ 2 groupes de solutions:

1/ intersection du cercle avec bissectrice 1
2/ —— du cercle —— —— 2

Pour chaque groupe on peut avoir 0, 1, 2 solutions (droite et cercle)

le problème admet donc ~~une~~ à 4 solutio

V^e

MATHÉMATIQUES

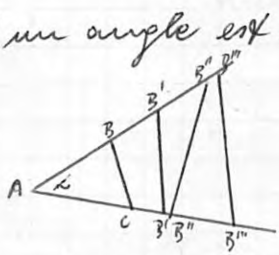
Suite. Géométrie

M. Hoffmann Marcel.

Construire un triangle:

un élément donné:

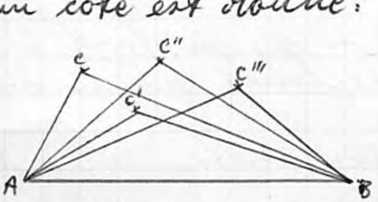
a/ un angle est donné:



une infinité de solutions

le problème est indéterminé

b/ un côté est donné:



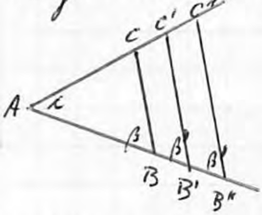
une infinité de solutions

le problème est indéterminé

2) Construire un triangle,

2 éléments donn

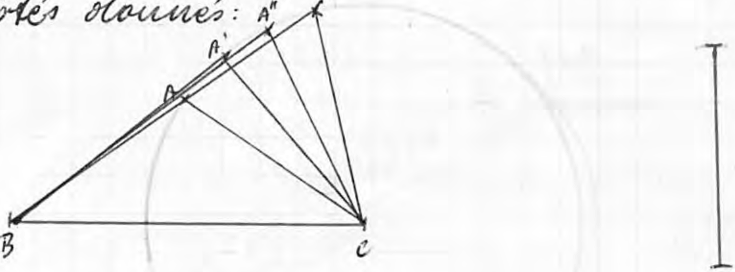
a) 2 angles donnés.



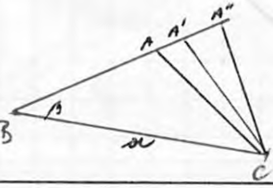
une infinité de solutio

problème indétermin

b) 2 côtés donnés:



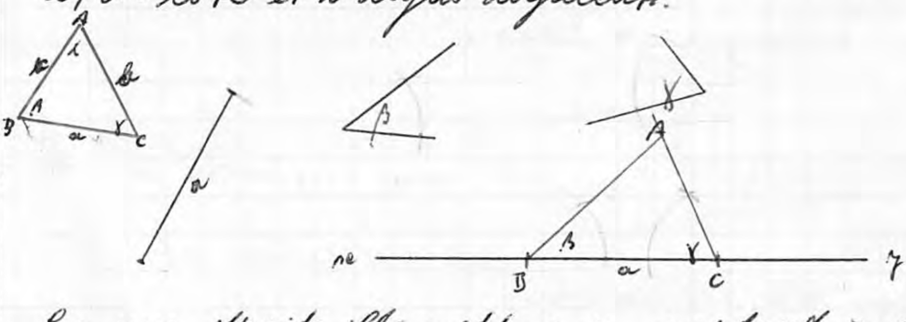
c) un côté et un angle.



Construire un triangle

3 éléments donne

a) un côté et 2 angles adjacents.



Sur une droite illimitée x y, portant avons à parti
d'un point B arbitrairement choisi un segme

Nous avons déjà 2 sommets, reste à trouve

en

A est déterminé par 2 lieux géométriques :

1/ le côté libre de l'angle β construit en B sur BC

2/ le côté — — — γ —— — C sur CB

Discussion : Comme les 2 lieux géométriques sont 2 demi-droites, il n'y a qu'un seul point d'intersection possible, donc il n'y a qu'une solution.

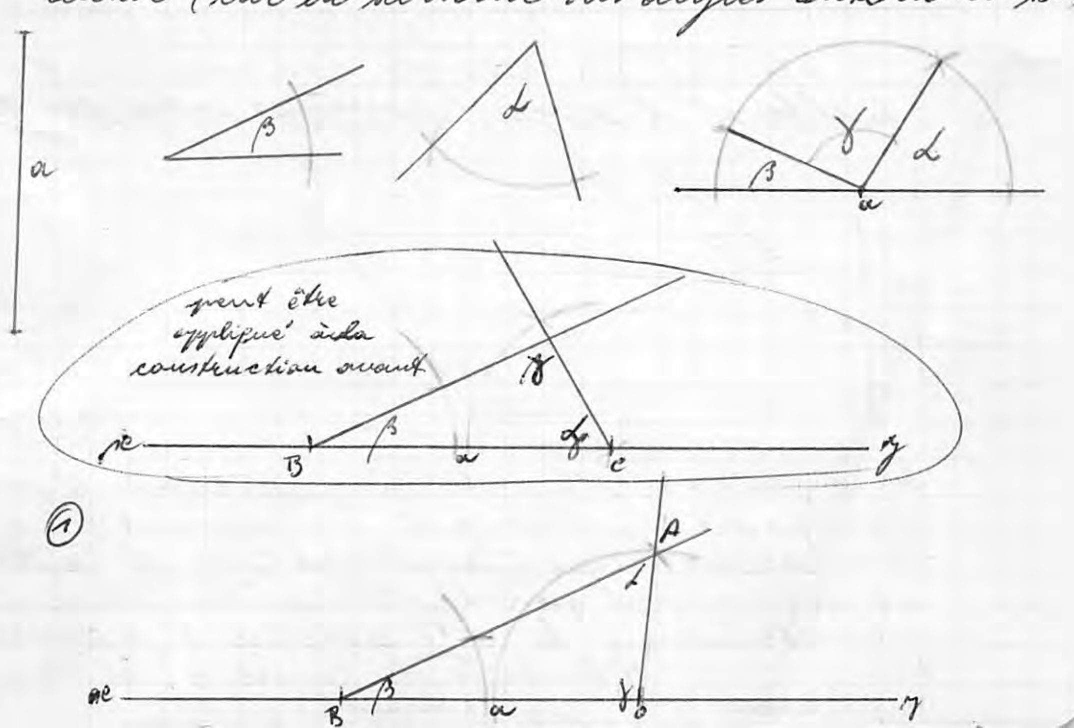
Tous les triangles construits avec les mêmes éléments seraient donc égaux. Nous obtenons un 1er théorème sur l'égalité des triangles.

Théorème :

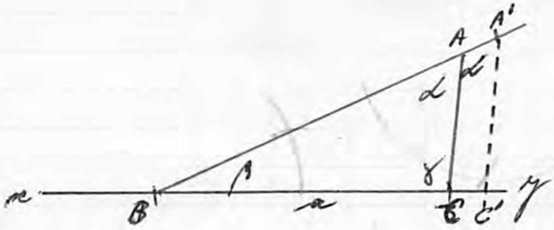
2 triangles sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun (= respectivement égaux)

c) Construire un triangle connaissant un côté a un angle adjacent à ce côté (β) et l'angle opposé à ce côté a = (α)

a) Si 2 angles sont connus, alors le 3e l'est aussi (car la somme des angles intérieurs = 180°)



2

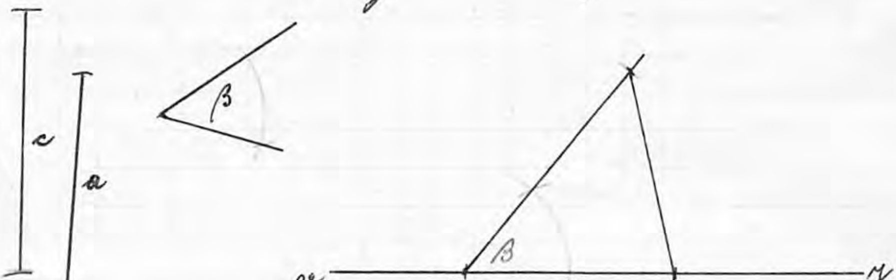


Premier lieu pour A est le côté libre de ∡ β

2e lieu pour A : en un point A' quelconque du côté libre de ∡ β construisant un ∡ égal à l'angle α donné. Nous obtenons C'

Menons par C la ∥ à A'C'. Cette ∥ est le 2ème lieu.
C A''B'' = α car 2 ∥ forment avec une sécante 2 angles correspondants égaux.

c) Construire un triangle connaissant 2 côtés et l'angle compris entre ces côtés.



Sur une droite illimitée x y portons à partir d'un point B quelconque un segment BC = a
Nous avons alors 2 sommets du Δ. Le 3e est déterminé par l'intersection de 2 lieux géométriques. 1/ le côté libre de ∡ β construit en B sur BC
2/ le cercle de centre B, et de rayon c

Discussion: (page suivante)

(5)

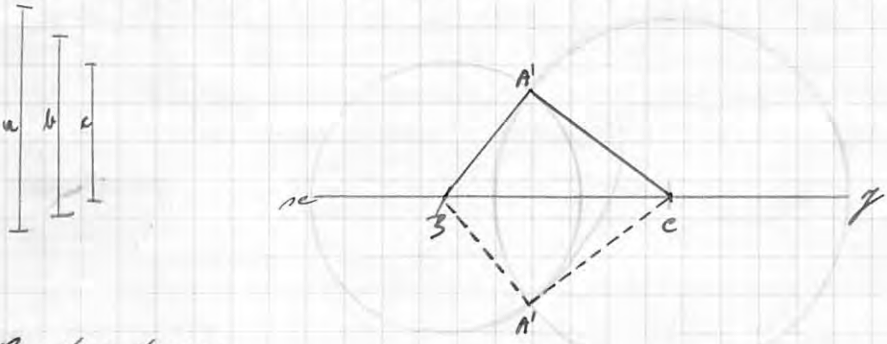
Discussion: β doit être plus petit que 180°
Comme les 2 lieux ne peuvent se couper en 1 seul point, (semi-droite qui a son origine dans l'intérieur du cercle) nous n'avons qu'une solution.
Tous les triangles construits avec ces mêmes éléments seraient égaux: d'où le théorème:

Théorème:
Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont 2 côtés respectivement égaux ainsi que l'angle compris égal.

---

(3)

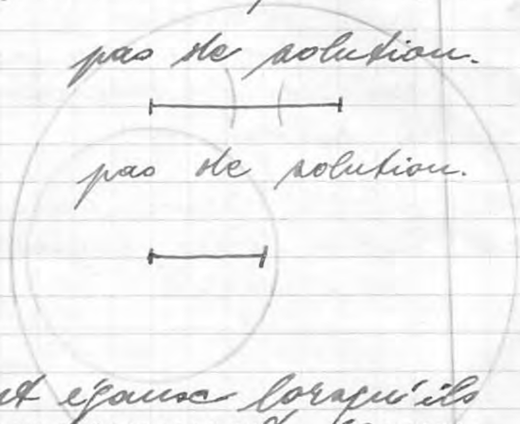
Construire un Δ : connaissant les 3 côtés.



Construction:
Sur une droite illimitée x y portons à partir d'un point B quelconque un segment BC=a
Nous obtenons déjà 2 sommets B et C du Δ cherché
le 3è sommet est déterminé par l'intersection de 2 lieux géométriques.
a) le cercle de centre B et de rayon c
b) le cercle de centre C et de rayon b
les 2 cercles se coupent ordinairement en 2 points, donc il y a 2 solutions.
Mais les 2 triangles sont égaux (à démontrer)
Il n'y donc en réalité qu'une seule solution.

Discussion.
a) les cercles ne se coupent que lorsque ~~BC~~ $b-c<BC<b+c$. (distance des centres comprise entre la somme et différence des rayons. Alors 2 solutions qui se ramènent à une.
b) si $BC > b+c$ pas de solution.

c) si $BC < b-c$ pas de solution.



Théorème:
2 triangles sont égaux lorsqu'ils ont les 3 côtés respectivement égaux.

---

(4) Construire un Δ connaissant 2 côtés ainsi que l'angle opposé à l'un des 2.

Construction: Portons sur une droite illimitée xy à partir du point B arbitrairement choisi un segment égal à a. Nous obtenons ainsi les 2 sommets.
Le 3e sommet se trouve à l'intersection de 2 lieux géom.
a) le côté libre de $\angle \gamma$ construit en C sur $\overline{CB}$.
b) le cercle de centre B et de rayon c
Discussion:
1er cas: l'angle γ = aigu.

Il faut discuter la position relative d'un cercle et d'une droite, qui dépend de la distance du centre à la droite.

(2)

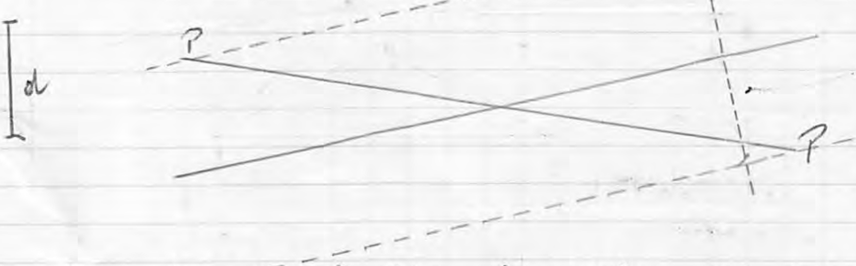
1281 Exercices (page 73)

1) Analyse: Données: { AB droite, CD droite
d = longueur donnée

Chercher: point P

Conditions: 1/ P sur AB
2/ P distant de d de CD

P donc sur le système des // menées à CD d'une distance d.



P se trouve à l'intersection de AB avec le système des //.

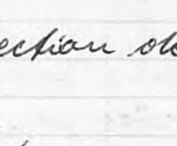
Sur notre figure 2 solutions:

Discussion:
1/ généralement 2 solutions
2/ Si AB // CD et si d = distance de AB à CD, une infinité de solutions
3/ Si AB // CD mais d ≠ distance de AB à CD aucune solution.

---

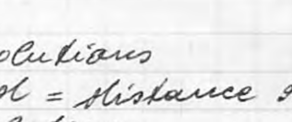
1) Construire un triangle, un élément étant donné.

a/ Un angle est donné: α



une infinité de solutions.
le problème est indéterminé.

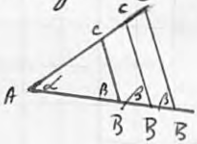
b/ Un côté est donné



une infinité de solutions
le problème est indéterminé.

2) Construire un triangle, 2 éléments donnés.

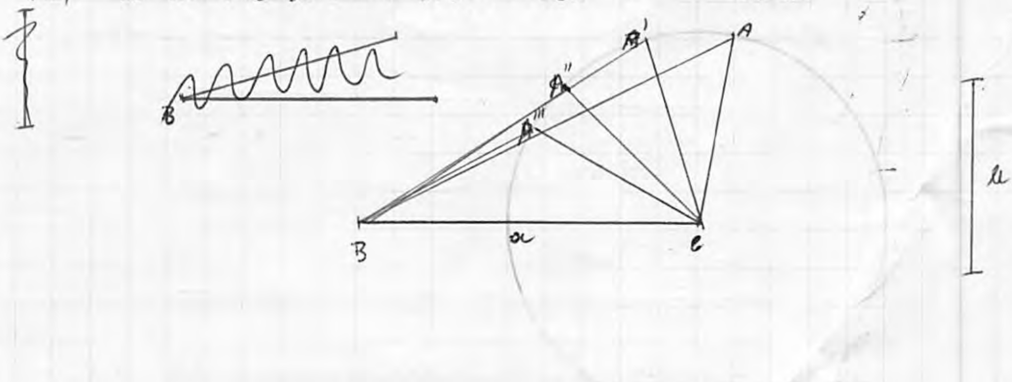
a) 2 angles sont donnés : α et β



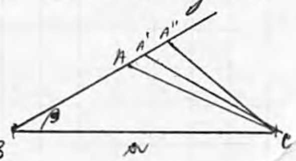
infinité de solutions

problème indéterminé

b/ 2 côtés sont donnés : a et b

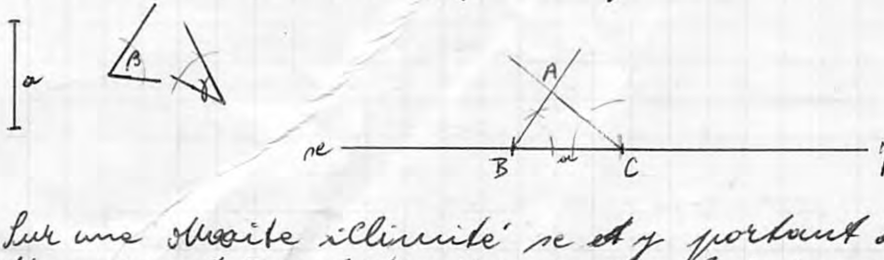


c/ un côté et un angle.



3/ Construire un Δ, 3 éléments donnés.

a) un côté et 2 angles adjacents:



Sur une droite illimitée x et y portant à partir d'un point B arbitrairement choisi un segment a.

Nous avons déjà 2 sommets, reste à trouver 3. en A

A est déterminé par 2 lieux géométriques

1/ le côté libre de l'angle β construit en B sur BC.

2 le côté libre de l'angle γ construit en C sur CB.

Discussion, Comme les 2 lieux géométriques sont 2 semi-droites, il n'y a qu'un seul point d'intersection possible, donc il n'y a qu'une solution.

~~Tous~~ Tous les Δ construits avec ces mêmes éléments seraient donc égaux. Nous obtenons un 1er théor. sur l'égalité des triangles.

Thé 2 triangles sont égaux si lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun. (respectivement égaux)

Construire un Δ connaissant un côté (a) un ∠ adjacent à ce côté β et l'angle opposé à ce côté α

a/ 2 angles étant connus le 3è l'est aussi car la somme des angles intér. ... 180°.

Suite dans le classeur