N. J. SCHONS

EXERCICES D'ALGÈBRE

NAMUR
"LA PROCURE"
14 Boulevard Ernest Mélot

BRUXELLES
"LA PROCURE"
161, Rue des Tonneurs

TOURNAI
ÉTABLISSEMTS CASTERMAN

EXERCICES D'ALGÈBRE

COLLECTION N. J. SCHONS

* **Traité d'Algèbre.** — Humanités modernes (5^e, 4^e, 3^e).
* **Compléments.** — Humanités modernes (2^e, 1^{re}).
Éléments de Calcul Intégral. — Rhétorique et 1^{re} Scientifique.
* **Éléments d'Algèbre.** — Humanités anciennes; Écoles normales.
Les premiers Éléments d'Algèbre. — Calcul algébrique, Premier degré, Second degré (Exposé élémentaire).
Les premiers Éléments d'Algèbre. — *Livre du Maître.*

---

* **Éléments d'Arithmétique.** — Humanités anciennes, Humanités modernes (6^e, 5^e, 4^e) ; Écoles moyennes ; Écoles normales.
Exercices et Problèmes d'Arithmétique. — Corrigé des exercices et problèmes des Éléments d'Arithmétique.
* **Traité d'Arithmétique.** — Humanités modernes (3^e, 2^e, 1^{re}).
Exercices d'Arithmologie. — Corrigé des exercices proposés dans le Traité d'Arithmétique.

---

* **Traité de Trigonométrie rectiligne.** — Humanités modernes.
* **Éléments de Trigonométrie.** — Humanités anciennes ; Écoles normales.
Exercices de Trigonométrie. — Corrigé des exercices proposés dans les deux ouvrages précédents.

Tables de Logarithmes et autres Tables. — Logarithmes des nombres entiers de 1 à 10 000 ; Logarithmes (division sexag. et div. centés.) et valeurs naturelles des nombres trigonométriques ; Tables financières et Tables arithmétiques.
Tables. — Intérêts composés et annuités ; nombres premiers ; racines carrées et cubiques.

N. B. — Les diverses éditions des ouvrages marqués d'un astérisque sont inscrites par le Gouvernement au catalogue des ouvrages classiques dont l'emploi est autorisé dans les établissements officiels de l'enseignement moyen.

EXERCICES D'ALGÈBRE

PAR

N. J. SCHONS

QUATRIÈME ÉDITION AUGMENTÉE

1956

LA PROCURE • RUE DES TANNEURS, 161 • BRUXELLES

LA PROCURE • BOULEV. ERNEST MÉLOT, 14 • NAMUR

ÉTABLISSEMENTS CASTERMAN, S. A., TOURNAI

PREMIÈRE PARTIE

Exercices proposés dans le Traité d'Algèbre Élémentaire.

CHAPITRE I

Introduction.

§ I. — ÉQUATIONS A RÉSOUDRE.

1. 1° $x + 3 = 8$ — **Rép.** $x = 5$
2° $x - 2 = 7$ — » $x = 9$
3° $4 = x - 1$ — » $x = 5$
4° $13 = x + 3$ — » $x = 10$
5° $4x + 3 = 51$ — » $x = 12$
6° $6x - 21 = 3$ — » $x = 4$
7° $27 = 4x - 9$ — » $x = 9$
8° $3x + 5 = 2x + 9$ — » $x = 4$
9° $5x - 3 = 4x + 8$ — » $x = 11$
10° $7x - 9 = 6x - 3$ — » $x = 6$
11° $x + 3 = 2x - 4$ — » $x = 7$
12° $1 = 17x - 16x$ — » $x = 1$
13° $4x + 1 = x + 25$ — » $x = 8$
14° $7x - 5 = 5x + 1$ — » $x = 3$
15° $3x - 2 = 5x - 10$ — » $x = 4$
16° $8x - 3 = 6 - x$ — » $x = 1$
17° $10x - 7 = 3 + 8x$ — » $x = 5$
18° $3 - 5x = 7x + 3$ — » $x = 0.$

2. 1° $80 - 5x = 20 + x - 12$ — **Rép.** $x = 12$
2° $7x - 10 = 15 + 5x - 3$ — » $x = 11$
3° $460 - 11x = x + 150 - 2x$ — » $x = 31$
4° $8x - 5 = 7x - 2{,}75 - 2x$ — » $x = 0{,}75$
5° $0 = 9 - 6x - 19 + 10x$ — » $x = 2{,}5$
6° $0{,}5x - 6{,}3 = 3{,}7x - 9{,}5$ — » $x = 1$
7° $4{,}3x - 3{,}9 = 2{,}4x + 5{,}6$ — » $x = 5$
8° $8{,}3 - 3x = 2{,}1 + 7{,}2x + 6{,}2$ — » $x = 0$
9° $10x - 2{,}05 = 4{,}9x + 1{,}75 - 2{,}5x$ — » $x = 0{,}5$
10° $0{,}2x - 0{,}089x + 1{,}78 = x - 16$ — » $x = 20.$

3. 1° $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10$ **Rép.** $x = 12$

2° $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 11$ » $x = 6$

3° $36 - \frac{4x}{9} = 8$ » $x = 63$

4° $\frac{x}{2} - 2 - \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 1$ » $x = \frac{20}{3}$

5° $\frac{7x}{8} - 5 = \frac{9x}{10} - 8$ » $x = 120$

6° $\frac{2x}{7} + \frac{x}{11} = 4\frac{1}{7}$ » $x = 11$

7° $\frac{x}{3} - \frac{1}{3} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4} = \frac{x}{5} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{x}{6}$ » $x = 1$

8° $18x + \frac{x}{4} + \frac{5x}{6} - 36 - 8x = 360 + \frac{x}{12}$ » $x = 36$

9° $\frac{2}{3}x - \frac{7}{4}x - 5 = \frac{5}{6}x + \frac{x}{2} - \frac{39}{2}$ » $x = 6$

10° $x + \frac{3x}{4} + \frac{9x}{16} + \frac{27x}{64} + \frac{81x}{256} = 8591$ » $x = 2816.$

§ II. — PROBLÈMES.

4. *On augmente un nombre de* 37 *et on trouve* 152. *Quel est ce nombre?*
Soit x le nombre. On a l'équation

$$x + 37 = 152.$$

Rép. $x = 115.$

5. *Trouver le nombre dont le double augmenté de* 7 *égale* 33.
Soit x le nombre. L'équation est

$$2x + 7 = 33.$$

Rép. $x = 13.$

6. *Trouver le nombre dont le triple diminué de* 15 *donne* 66.
Soit x le nombre. L'équation est

$$3x - 15 = 66.$$

Rép. $x = 27.$

7. *On retranche* 34 *au quintuple d'un nombre. Il reste le triple de ce nombre. Quel est-il?*
Soit x le nombre. L'équation est

$$5x - 34 = 3x.$$

Rép. $x = 17.$

8. *Un nombre augmenté de 90 donne une somme qui surpasse de 18 le quintuple du nombre. Quel est-il?*

Soit x le nombre. L'équation est

$$x + 90 - 18 = 5x.$$

Rép. $x = 18.$

9. *Au cinquième d'un nombre on retranche 12 et il reste 7. Quel est ce nombre?*

Soit x le nombre. L'équation est

$$\frac{x}{5} - 12 = 7.$$

Rép. $x = 95.$

10. *Trouver le nombre dont le triple diminué de 7 égale le double augmenté de 3.*

Soit x le nombre. L'équation est

$$3x - 7 = 2x + 3.$$

Rép. $x = 10.$

11. *Les trois quarts d'un nombre diminués de 8 égalent l'excès de 69 sur le double du nombre. Quel est ce nombre?*

Soit x le nombre. L'équation est

$$\frac{3x}{4} - 8 = 69 - 2x.$$

Rép. $x = 28.$

12. *Au triple d'un nombre on ajoute son double et on trouve* $38\frac{1}{3}$. *Quel est ce nombre?*

Soit x le nombre. L'équation est

$$3x + 2x = 38\frac{1}{3}.$$

Rép. $x = 7\frac{2}{3}.$

13. *On multiplie un nombre par 15, puis on retranche 29 du produit. Le résultat surpasse de 21 le quintuple du nombre. Quel est ce nombre?*

Soit x le nombre. L'équation est

$$15x - 29 = 5x + 21.$$

Rép. $x = 5.$

14. *Trouver un nombre dont les six septièmes dépassent d'une unité la moitié plus le tiers du nombre.*

Soit x le nombre. L'équation est

$$\frac{6x}{7} - 1 = \frac{x}{2} + \frac{x}{3}.$$

Rép. $x = 42.$

15. *On ajoute* $6\frac{1}{4}$ *à un nombre. On aurait eu le même résultat si on l'avait multiplié par* $7\frac{1}{4}$. *Quel est ce nombre?*

Soit x le nombre. L'équation est

$$x + 6\frac{1}{4} = \frac{29x}{4}.$$

Rép. $x = 1$.

16. *De la moitié d'un capital on retranche* 5 % *du capital et on trouve* 2250 *fr. Quel est ce capital?*

Soit x le capital. On a l'équation

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{20} = 2250; \qquad \text{d'où} \quad x = 5000.$$

Rép. 5000 fr.

17. *On a vendu successivement le tiers, le quart et le sixième d'une pièce de drap. Il en reste encore* 15 *mètres. Trouver la longueur de la pièce.*

Soit x la longueur de la pièce. On a l'équation

$$x - \frac{x}{3} - \frac{x}{4} - \frac{x}{6} = 15; \qquad \text{d'où} \quad x = 60.$$

Rép. 60 mètres.

18. *Partager* 5754 *fr. entre deux personnes de manière que la part de la première vaille les trois quarts de celle de la seconde.*

Soit x la part de la seconde personne. On a l'équation

$$\frac{3x}{4} + x = 5754; \qquad \text{d'où} \quad x = 3288.$$

Rép. La première part est 2466 fr. et la seconde, 3288 fr.

19. *Combien a coûté une auto d'occasion, sachant qu'après y avoir fait pour* 800 *fr. de réparations on l'a vendue* 19280 *fr., et qu'ainsi on a gagné les deux cinquièmes du prix d'achat?*

Soit x le prix d'achat. L'équation est

$$19280 = x + 800 + \frac{2x}{5}; \qquad \text{d'où} \quad x = 13200.$$

Rép. Le prix d'achat est 13200 fr.

20. *Un marchand achète deux chevaux pour* 8800 *fr. Trouver les prix respectifs des deux chevaux, sachant que le premier coûte les sept quarts du second.*

Soit x le prix du second cheval. On a l'équation

$$\frac{7x}{4} + x = 8800; \qquad \text{d'où} \quad x = 3200.$$

Rép. Le premier cheval coûte 5600 fr. et le second 3200 fr.

21. *Quelle est la valeur d'un champ, sachant que les trois cinquièmes du prix font autant que les trois quarts diminués de* 750 *fr?*

Soit x le prix du champ. On a l'équation

$$\frac{3x}{5} = \frac{3x}{4} - 750; \qquad \text{d'où} \quad x = 5000.$$

Rép. 5000 fr.

22. *Deux frères ont ensemble* 55 *ans et l'âge du plus jeune vaut les cinq sixièmes de l'âge de l'aîné. Quels sont leurs âges?*

Soit x l'âge de l'aîné. On a l'équation

$$x + \frac{5x}{6} = 55; \qquad \text{d'où} \quad x = 30.$$

Rép. L'aîné a 30 ans et le plus jeune 25 ans.

23. *Quelqu'un a acheté une pièce de drap. En la vendant* 12 *fr. le mètre, il gagnerait* 100 *fr. En la vendant* 9 *fr. le mètre, il perdrait* 23 *fr. Quelle est la longueur de la pièce?*

Soit x la longueur de la pièce. Le prix d'achat de la pièce est $12x - 100$ et aussi $9x + 23$. On a l'équation

$$12x - 100 = 9x + 23; \quad \text{d'où} \quad x = 41.$$

Rép. 41 mètres.

24. *Le tiers d'un capital est placé à* 5 °/₀ *et le reste à* 4 °/₀. *L'intérêt annuel est* 130 *fr. Trouver ce capital.*

Soit x le capital. L'équation est

$$\frac{5x}{300} + \frac{8x}{300} = 130; \qquad \text{d'où} \quad x = 3000.$$

Rép. 3000 fr.

§ III. — FORMULES.

25. *Calculer la valeur acquise* C *par un capital* c *placé à intérêts simples au taux* i *pour un franc, après* n *années.*

Rép. $C = c + cin = c(1 + in)$.

Applications numériques.

1° $c = 1500$; $i = 0{,}05$; temps 13 ans, 4 mois; $C = c(1 + in)$.

2° $C = 86700$; $i = 0{,}04$; temps 6 mois; $c = \dfrac{C}{1 + in}$.

3° $C = 9072$; $c = 9000$; temps 2 mois, 12 jours; $i = \dfrac{C - c}{cn}$.

4° $C = 7850$; $c = 7536$; $i = 0{,}06$; $n = \dfrac{C - c}{ci} = 0{,}694$.

Rép. 1° 2500 fr. 2° 85000 fr. 3° 4 °/₀. 4° 8 mois, 10 jours.

26. *Que devient la formule de l'intérêt simple, si le taux est* t °/₀? *Calculer alors* c, t, i, n.

La formule $I = cin$ devient, en remplaçant i par $\frac{t}{100}$,

$$I = \frac{ctn}{100}.$$

Cette formule donne

$$c = \frac{100\,I}{tn}; \quad t = \frac{100\,I}{cn}; \quad i = \frac{t}{100} = \frac{I}{cn}; \quad n = \frac{100\,I}{ct}.$$

Si n *représente des mois*, la formule de l'intérêt simple devient

$$I = \frac{cin}{12} \quad \text{ou} \quad I = \frac{ctn}{1200}.$$

27. *Calculer la valeur actuelle* a *d'un billet de* c *fr., payable après* n *années et escompté en dehors au taux* i *pour un franc.*

Rép. $a = c - cin = c(1 - in)$.

Applications numériques.

1° $c = 8000$; $i = 0{,}035$; temps 45 jours; $a = c(1 - in)$.

2° $c = 8166$; $a = 7880$; $i = 0{,}06$; $n = \frac{c - a}{ci} = 0{,}583$.

3° $c = 8000$; escompte 100 fr.; temps 3 mois; $i = \frac{100}{cn}$.

4° Escompte 450 fr.; temps 18 jours; $i = 0{,}06$; $c = \frac{450}{in}$.

Rép. 1° 7965 fr. 2° 210 jours. 3° 5 °/₀. 4° 150.000 fr.

28. *Un tonneau de vin contient* a *litres. On vend ce vin à* b *francs le décalitre. Trouver le prix de vente* v.

Rép. $v = \frac{ab}{10}$.

29. *Une marchandise a coûté* a *fr. Trouver le prix de vente* v *ou* v', *suivant que l'on veut gagner* t °/₀ 1° *sur le prix d'achat*; 2° *sur le prix de vente.*

Rép. $v = a + \frac{at}{100}$; $v' = \frac{100a}{100 - t}$.

Calculer v *et* v' *quand on a :*

1° $a = 1700$; $t = 5$;	**Rép.** $v = 1785$; $v' = 1789{,}47$.
2° $a = 2350$; $t = 12$;	» $v = 2632$; $v' = 2670{,}45$.
3° $a = 155$; $t = 20$;	» $v = 186$; $v' = 193{,}75$.

30. *Quel est le titre* T *d'un lingot qui contient* a *gr. d'or et* b *gr. de cuivre?*

Rép. $T = \frac{a}{a + b}$.

31. *La densité* D *d'un corps dont le volume est* V cm^3 *et la masse* M *gr., a pour expression* $D = \frac{M}{V}$.

Calculer D *dans les cas suivants :*

1° La masse est 149,6 gr. et le volume 17 cm^3;	**Rép.**	8,8.
2° La masse est 2 kg. et le volume 150 cm^3;	»	13,33.
3° La masse est 2,625 kg. et le volume 3,5 l.;	»	0,75.

Calculer la masse dans les cas suivants :

1° $D = 1,29$ et le volume est 41 dm^3;	**Rép.**	52,89 kg.
2° $D = 1,84$ et le volume est 821 dl.;	»	151,064 kg.
3° $D = 11,4$ et le volume est 93 cm^3;	»	1060,2 gr.

Calculer le volume dans les cas suivants :

1° $D = 19,25$ et la masse est 596,75 gr.;	**Rép.**	31 cm^3
2° $D = 10,5$ et la masse est 304,5 kg.;	»	29 dm^3
3° $D = 2,6$ et la masse est 1261 dg.;	»	48,5 cm^3.

32. *Un mark-or (R. M.) vaut sensiblement* 1,25 *francs-or. Montrer que, si* a *marks-or valent* b *francs-or, on a les formules*

$$a = b - \frac{b}{5}; \quad b = a + \frac{a}{4}.$$

Puisque 1,25 francs-or valent 1 mark-or, b francs-or vaudront $\frac{b}{1,25}$ ou $b \times \frac{4}{5}$ ou $\left(b - \frac{b}{5}\right)$ marks-or.

Comme un mark-or vaut 1,25 francs-or, a marks-or vaudront $a \times 1,25$ ou $a \times \frac{5}{4}$ ou $\left(a + \frac{a}{4}\right)$ francs-or.

33. *Calculer les hauteurs d'un triangle dont on connaît l'aire* S *et les côtés* a, b, c. *Calculer aussi le rayon* R *du cercle circonscrit, sachant que* $S = \frac{abc}{4R}$.

Rép. $h_a = \frac{2S}{a}$; $h_b = \frac{2S}{b}$; $h_c = \frac{2S}{c}$; $R = \frac{abc}{4S}$.

34. *A la caisse d'une banque se produisent deux mouvements de fonds, l'un de* a *francs, l'autre de* b *francs. Calculer l'augmentation ou la diminution de l'encaisse.*

Différents cas sont à considérer :

1° Deux recettes : augmentation de $(a + b)$ fr.
2° Deux déboursements : diminution de $(a + b)$ fr.
3° Une recette a supérieure à un déboursement b : augmentation de $(a - b)$ fr.

4° Une recette a inférieure à un déboursement b : diminution de $(b - a)$ fr.

5° Un déboursement a supérieur à une recette b : diminution de $(a - b)$ fr.

6° Un déboursement a inférieur à une recette b : augmentation de $(b - a)$ fr.

7° Une recette et un déboursement égaux : pas de changement.

35. *Un thermomètre marque* 20 *degrés. Le mercure se déplace de* a *divisions. Combien marque-t-il alors?*

1° Le thermomètre monte de a degrés;	Rép.	$20 + a$
2° Il descend de a° et $a < 20$;	»	$20 - a$
3° Il descend de a° et $a > 20$;	»	$-(a - 20)$.

36. *Deux trains se trouvent sur la ligne Bruxelles-Ostende, l'un à* a *km. et l'autre à* b *km. de Gand. Trouver la distance* d *qui les sépare.*

1° Les deux trains sont entre Bruxelles et Gand. Si $a > b$, on a $d = a - b$; si $a < b$, on a $d = b - a$.

2° Les deux trains sont entre Gand et Ostende. Si $a > b$, on a $d = a - b$; si $a < b$, on a $d = b - a$.

3° L'un des trains est entre Bruxelles et Gand et l'autre entre Gand et Ostende. On a $d = a + b$.

CHAPITRE II

Les nombres relatifs.

§ 1. — NOTION DES NOMBRES RELATIFS

37. *Quelle est la valeur absolue des nombres* $+2, -1, +5, -10, -3$?

38. *Des trois nombres* $-75, +30, -120$, *quel est le plus grand et quel est le plus petit en valeur absolue?*

39. *Si* a *égale successivement* $-5, +3, 0, -1, -7$, *que vaut* $-a$? *Si* $-a$ *égale successivement* $+9, -7, +1, -4$, *que vaut* a ?

40. *Représenter les nombres* $+2$; $-1{,}4$; $+4$; $-5{,}7$ *et leurs opposés sur une droite orientée, l'unité de longueur étant le cm.*

41. *Dessiner un thermomètre et figurer par des points les températures suivantes :* 7°, — 10°, 18°, 23°, — 9°. *Un degré est représenté par* 2 *mm.*

42. *Sur un axe orienté, indiquer par des points les dates suivantes rapportées à l'ère chrétienne :* + 200, — 150, + 350, — 50. *Un centimètre représentera* 100 *ans.*

43. *Sur un axe, placer* 4 *points* A, B, C, D, *de manière que* AB = — 40, BC = + 70, CD = + 120. *L'unité de longueur est le mm.*

44. *Tracer un axe et y marquer* 4 *points* A, B, C, D *de manière que* AB = — 5, BC = + 9, CD = — 3. *Trouver ensuite les distances algébriques* AC, AD, BD. *Prendre le centimètre pour unité de longueur.*

45. *Sur une mire fixée à une pile d'un pont passant au-dessus de la Meuse, on a marqué* 0 *au niveau normal de l'eau; puis on l'a graduée en cm., positivement vers le haut et négativement vers le bas. Quel est le sens des indications* + 4, — 27, + 123, — 120?

46. *Si l'on prend pour origine du temps l'heure de minuit dans la nuit du* 31 *décembre au premier janvier, par quels nombres relatifs doit-on représenter :*
1er janvier, 3 h., 7 h., 15 h., 20 h.; 2 janvier, 4 h., 9 h., 20 h., 17 h.;
29 Décembre, 7 h., 17 h., 12 h., 2 h.; 31 décembre, 17 h., 5 h., 13 h., 12 h.
Figurer ces nombres sur un axe, en prenant pour unité de longueur le mm.

§ II. — ADDITION

47. *Effectuer les sommes suivantes :*

1° $(-9)+(+5)=-4$
2° $(-2)+(+10)=8$
3° $(+4)+(-25)=-21$
4° $(+2)+(-7)=-5$
5° $(-3)+(+5)=2$
6° $(-4)+(-12)=-16$
7° $(+3{,}25)+(+4{,}75)=8$
8° $(-2{,}875)+(+9{,}375)=6{,}5$
9° $(+10{,}25)+(-39{,}75)=-29{,}5$.

48. *Chercher la somme des nombres suivants :*

1° -5 et 13 4° -7 et -13 7° $-9{,}7$ et $10{,}8$
2° 2 et -10 5° $-3{,}6$ et $2{,}4$ 8° $7{,}2$ et $-10{,}7$.
3° $\frac{2}{3}$ et $-\frac{5}{6}$ 6° $-4\frac{1}{3}$ et $-2\frac{4}{7}$ 9° $-\frac{3}{4}$ et $\frac{2}{7}$.

Rép. 1° 8; 2° -8; 3° $-\frac{1}{6}$; 4° -20; 5° $-1{,}2$; 6° $-\frac{145}{21}$;
7° 1,1; 8° $-3{,}5$; 9° $-\frac{13}{28}$.

49. *Faire la somme des nombres relatifs suivants :*

1° $+4,\ -7,\ -4,\ +8,\ +5,\ -1,\ -3$;
2° $-5,\ -8,\ +5,\ -9,\ -3,\ -2,\ +7$;
3° $+8{,}75,\ -5{,}65,\ +12{,}35,\ -2{,}60,\ -7{,}25$;
4° $-2\frac{4}{5},\ +\frac{3}{4},\ -\frac{7}{5},\ +\frac{3}{2},\ -9\frac{3}{20}$.

Rép. 1° 2; 2° -15; 3° 5,6; 4° $-11{,}1$.

50. *Calculer la somme* $x = a + b + c + d + e$:

1° Quand $a = -7$, $b = -2$, $c = +3$, $d = +2$, $e = -9$;

2° Quand $a = -\frac{1}{6}$, $b = +\frac{2}{3}$, $c = +3$, $d = -1$, $e = -\frac{3}{4}$;

3° Quand $a = +3{,}25$, $b = -0{,}75$, $c = -0{,}9$, $d = +0{,}5$, $e = +2{,}7$.

Rép. 1° -13; 2° $\frac{7}{4}$; 3° 4,8.

51. *Exprimer algébriquement, en faisant usage de parenthèses :*

1° La somme de 2 et 5, augmentée de 1;
2° La somme de -5 et 2, augmentée de -3;
3° Le nombre -3, augmenté de la somme de 2 et -4;
4° La somme de 7 et 3, augmentée de la somme de -1 et 3;
5° La somme de -4 et -10, augmentée de la somme de 7 et 15.

Par exemple, la somme de 2 et 5, augmentée de 1, s'écrit

$$[(+2) + (+5)] + (+1) \quad \text{ou} \quad (2 + 5) + 1.$$

52. *Expliquer la signification des expressions suivantes :*

1° $a + (b + c)$ 3° $(a + b) + c$
2° $(a + b) + (c + d)$ 4° $a + (b + c + d)$.

Chacune de ces expressions est une somme de deux termes.
Les termes de la première somme sont a et $b + c$; etc.

53. *Calculer la valeur numérique de ces expressions* (52) :

1° Quand $a = -2$, $b = 1$, $c = 3$, $d = -5$;

Rép. 1° 2; 2° -3; 3° 2; 4° -3.

2° Quand $a = \frac{2}{3}$, $b = 0$, $c = 4$, $d = -\frac{3}{5}$.

Rép. 1° $4\frac{2}{3}$; 2° $4\frac{1}{15}$; 3° $4\frac{2}{3}$; 4° $4\frac{1}{15}$.

3° Quand $a = -5$, $b = 5$, $c = \frac{4}{7}$, $d = -\frac{2}{3}$.

Rép. 1° $\frac{4}{7}$; 2° $-\frac{2}{21}$; 3° $\frac{4}{7}$; 4° $-\frac{2}{21}$.

54. *Représenter par des nombres relatifs les trajets successifs d'un cycliste qui, partant de Gembloux, fait successivement sur la grand'route Namur-Bruxelles* 3 *et* 10 *km. dans la direction de Bruxelles, puis* 20 *km. dans la direction opposée. Additionner ces nombres et interpréter le résultat.*

Orienter la droite positivement vers Bruxelles. On aura

$$(+3) + (+10) + (-20) = -7,$$

et le cycliste s'est arrêté à 7 km. de Gembloux, dans la direction de Namur.

55. *Un ballonnet s'élevant du sol, monte de* 300 *m., descend de* 230 *m., remonte de* 560 *m., descend de* 400 *m. Exprimer les montées et les descentes par des nombres relatifs, additionner et interpréter le résultat.*

On a $(+ 300) + (- 230) + (+ 560) + (- 400) = 230.$

Le ballon était finalement à une hauteur de 230 m.

56. *Un thermomètre marque* 10°; *il monte de* 7°, *puis descend de* 20°. *Exprimer la température finale par une somme de nombres relatifs, effectuer et interpréter le résultat.*

On a $(+ 10) + (+ 7) + (- 20) = - 3$. La température finale est — 3°.

57. *Un négociant à* 1200 *fr. en caisse. Il doit à ses fournisseurs* 450 *fr.*, 1245 *fr.*, 565 *fr. D'autre part des clients lui doivent* 85 *fr.*, 795 *fr.*, 868 *fr.*, 925 *fr. Exprimer sa situation par une somme de nombres relatifs, effectuer et interpréter le résultat.*

On a $(+ 1200) + (- 450) + (- 1245) + (- 565) + (+ 85) + (+ 795) + (+ 868) + (+ 925) = (+ 3873) + (- 2260) = 1613.$

L'avoir disponible du commerçant est 1613 fr.

§ III. — SOUSTRACTION

58. *En appliquant la définition de la soustraction, faire la preuve des soustractions suivantes :*

1° $(- 3) - (+ 2) = - 5$, car $(- 5) + (+ 2) = - 3$;

2° $(+ 7) - (- 5) = + 12$, car $(+ 12) + (- 5) = + 7$;

3° $\left(+\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{3}{4}\right) = + \frac{17}{12}$, car $\left(+\frac{17}{12}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) = + \frac{2}{3}$;

4° $(+ 3) - (+ 10) = - 7$, car $(- 7) + (+ 10) = + 3$;

5° $(- 6{,}25) - (- 9{,}75) = + 3{,}5$, car $(+ 3{,}5) + (- 9{,}75) = - 6{,}25$;

6° $\left(- 2\frac{1}{4}\right) - \left(- 1\frac{3}{8}\right) = -\frac{7}{8}$, car $\left(-\frac{7}{8}\right) + \left(- 1\frac{3}{8}\right) = - 2\frac{1}{4}$.

59. *Effectuer les soustractions suivantes :*

1° $(+ 3) - (- 5) = 8$

2° $(+ 2) - (+ 3) = - 1$

3° $\left(+\frac{9}{12}\right) - \left(+\frac{4}{3}\right) = - \frac{7}{12}$

4° $(- 13) - (+ 20) = - 33$

5° $(- 7) - (- 3) = - 4$

6° $\left(-\frac{3}{20}\right) - \left(-\frac{7}{5}\right) = \frac{5}{4}$

7° $(- 2{,}6) - (+ 0{,}8) = - 3{,}4$

8° $(- 7{,}25) - (- 3{,}75) = - 3{,}50$

9° $\left(+ 16\frac{3}{4}\right) - \left(+ 7\frac{5}{8}\right) = 9\frac{1}{8}$.

60. *Quel nombre faut-il ajouter :*

1° *à* $+7$ *pour obtenir* $+10$, -3, 0 *ou* $+5$?

On trouve :

$$10-(+7)=3;\quad -3-(+7)=-10;\quad 0-(+7)=-7;\quad 5-(+7)=-2.$$

2° *à* -4 *pour obtenir* $+20$, 0, -2 *ou* -20 ?

On trouve : $20-(-4)=24$; $0-(-4)=4$; $-2-(-4)=2$; $-20-(-4)=-16$.

61. *Expliquer la signification des expressions suivantes :*

1° $(a+b)-c$ est la différence entre $a+b$ et c;
2° $(a-b)-c$ est la différence entre $a-b$ et c;
3° $(a-b)-(a+b)$ est la différence entre $a-b$ et $a+b$;
4° $(a+b)+(a-c)$ est une somme de deux termes qui sont $a+b$ et $a-c$.

62. *Chercher la valeur numérique des expressions précédentes* (61) :

1° Quand $a=-3$, $b=2$, $c=-1$.
Rép. 1° 0; 2° -4; 3° -4; 4° -3.

2° Quand $a=\frac{3}{4}$, $b=-\frac{2}{3}$, $c=0$.

Rép. 1° $\frac{1}{12}$; 2° $\frac{17}{12}$; 3° $\frac{4}{3}$; 4° $\frac{5}{6}$.

§ IV. — SOMMES ALGÉBRIQUES.

63. *Faire disparaître les parenthèses dans les sommes algébriques suivantes :*

1° $(+5)-(-3)+(-7)-(+4)-(-9)$
$=5+3-7-4+9=6.$

2° $(-7)+(-1)-(-9)-(+5)+(+25)$
$=-7-1+9-5+25=21.$

3° $-(+3)+(-9)-(-8)-(+3)+(-10)$
$=-3-9+8-3-10=-17.$

4° $(+9)-(-2)+(-7)-(-9)-(+5)+(+13)$
$=9+2-7+9-5+13=21.$

64. *Écrire les sommes algébriques suivantes sous forme de sommes en introduisant des parenthèses :*

1° $a-b-c+d-e=a+(-b)+(-c)+(+d)+(-e)$
2° $a+b-c-d+e=a+(+b)+(-c)+(-d)+(+e)$
3° $-a-b+c+d-e=(-a)+(-b)+(+c)+(+d)+(-e)$
4° $a+b-c-d+e=a+(+b)+(-c)+(-d)+(+e).$

65. *Faire disparaître les parenthèses dans la somme algébrique*

$$(+a) - (+b) + (-c) - (-d).$$

Rép. $a - b - c + d.$

66. *Chercher la valeur numérique de* $x = a - b + c - d$:

1° Pour $a = -48$; $b = -30$; $c = +85$; $d = -12$;
2° Pour $a = -7$; $b = +3$; $c = -9$; $d = +7$;
3° Pour $a = -35$; $b = +21$; $c = +18$; $d = -17$;
4° Pour $a = +\frac{3}{4}$; $b = -2\frac{1}{2}$; $c = +\frac{7}{6}$; $d = -4$;
5° Pour $a = -2{,}4$; $b = -5{,}5$; $c = +3{,}7$; $d = -9{,}35$;
6° Pour $a = +3{,}4$; $b = -2{,}9$; $c = -6$; $d = +2{,}9$;

Rép. 1° 79; 2° -26; 3° -24; 4° $8\frac{5}{12}$; 5° 16,15; 6° $-2{,}6$.

67. *Même question pour la somme algébrique* $a - b - c + d$.

Rép. 1° -115; 2° 6; 3° -94; 4° $-1\frac{11}{12}$; 5° $-9{,}95$; 6° 15,2.

68. *Expliquer la signification des expressions*

$$a - (b - c) + d \quad \text{et} \quad a + b - (c - d)$$

et chercher leur valeur numérique quand $a = -1$, $b = 3$, $c = -5$, $d = 4$.

Ces deux expressions sont des sommes algébriques. Leurs termes sont respectivement a, $-(b-c)$, d et a, b, $-(c-d)$. Les valeurs numéques demandées sont -5 et 11.

§ V. — MULTIPLICATION.

69. *Effectuer les multiplications suivantes :*

1° $(+6) \times (-2) = -12$ 5° $(-7) \times (-1) = 7$
2° $(-4) \times (-5) = 20$ 6° $(+15) \times (+2) = 30$
3° $\left(-\frac{7}{3}\right) \times \left(+\frac{1}{4}\right) = -\frac{7}{12}$ 7° $\left(-2\frac{1}{3}\right) \times \left(+\frac{5}{14}\right) = -\frac{5}{6}$
4° $\left(-\frac{5}{6}\right) \times \left(-\frac{9}{2}\right) = \frac{15}{4}$ 8° $\left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$
9° $(+3) \times (-5) \times (-4) \times (+2) = 120$
10° $(-8) \times (+2) \times (+7) \times (-5) \times (-3) = -1680$
11° $(+7) \times (-1) \times (-3) \times (-4) \times (-5) = 420$
12° $(15 - 7 - 11 + 3) \times (-5) = 0.$

70. *Calculer la valeur numérique du produit* abcd :

1° Quand $a = +3$, $b = -5$, $c = -2$, $d = +7$.
2° Quand $a = -5$, $b = -1$, $c = -3$, $d = 10$.
3° Quand $a = -9$, $b = -25$, $c = +2$, $d = -2{,}4$.
4° Quand $a = +2$; $b = -\frac{14}{3}$; $c = +\frac{5}{14}$; $d = +\frac{1}{50}$.

Rép. 1° 210; 2° -150; 3° -1080; 4° $-\frac{1}{15}$.

71. *Calculer de deux manières différentes les expressions :*

1° $(7 - 3 + 2) \times (+5)$ 3° $(-12 + 21 - 7 + 5) \times (-23)$
2° $(-3 + 7 - 9) \times (-11)$ 4° $(15 - 35 + 8 - 11) \times (+7)$.

1° Cette expression est égale à $6 \times 5 = 30$. Elle vaut aussi :
$(+7).(+5) + (-3).(+5) + (+2).(+5) = 35 - 15 + 10 = 30$.
On raisonne de même pour les trois autres exercices.

§ VI. — DIVISION ET FRACTIONS.

72. *En appliquant la définition du quotient de deux nombres, vérifier les divisions suivantes :*

1° $\frac{-15}{6} = -\frac{5}{2}$ 4° $\frac{-1}{-7} = \frac{1}{7}$ 7° $\left(-\frac{2}{3}\right) : \left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{4}{5}$

2° $\frac{-15}{-12} = \frac{5}{4}$ 5° $\frac{3}{7} : \frac{6}{7} = \frac{1}{2}$ 8° $\frac{21}{15} : \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{14}{15}$

3° $\frac{8}{-14} = -\frac{4}{7}$ 6° $\left(-\frac{3}{4}\right) : \frac{3}{4} = -1$ 9° $\left(-\frac{56}{9}\right) : \frac{14}{3} = -\frac{4}{3}$.

On a, par exemple, $\frac{-15}{6} = -\frac{5}{2}$, car

$$\left(-\frac{5}{2}\right) \times (+6) = -15.$$

73. *Quelle est la valeur du quotient* $\frac{a}{b}$:

1° Pour $a = -7$, $b = +35$; 5° Pour $a = -5{,}58$, $b = +1{,}2$;
2° Pour $a = 228$, $b = -12$; 6° Pour $a = -\frac{3}{5}$, $b = -\frac{21}{7}$;
3° Pour $a = 0$, $b = -5$; 7° Pour $a = 2$, $b = 0$;
4° Pour $a = -28{,}6$, $b = -0{,}4$; 8° Pour $a = -7$, $b = -1$.

Rép. 1° $-\frac{1}{5}$; 2° -19; 3° 0; 4° 71,5; 5° $-4{,}65$; 6° $\frac{1}{5}$;
7° division impossible; 8° 7.

74. *Montrer que les expressions suivantes sont égales :*

$$\frac{-6}{9},\quad \frac{2}{-3},\quad -\frac{20}{30},\quad -\frac{-2}{-3},\quad -\frac{10}{15}.$$

75. *Effectuer les opérations suivantes :*

1° $\frac{-2}{3}+\frac{3}{7}=-\frac{5}{21}$

2° $\frac{-5}{-12}-\frac{7}{18}=\frac{1}{36}$

3° $\frac{-7}{36}-\frac{-2}{3}=\frac{17}{36}$

4° $\frac{9}{10}-\frac{3}{-40}=\frac{39}{40}$

5° $\frac{6}{-11}-\frac{7}{55}=-\frac{37}{55}$.

6° $2-\frac{-9}{7}+\frac{-23}{28}=2\frac{13}{28}$

7° $\frac{-3}{4}+\frac{1}{8}-\frac{7}{16}=-\frac{17}{16}$

8° $\frac{-7}{-9}-\frac{1}{-3}+3=4\frac{1}{9}$

9° $\frac{-9}{4}+\frac{-9}{-4}+\frac{-3}{21}=-\frac{1}{7}$

76. *Effectuer les opérations suivantes :*

1° $\frac{1}{-5}\times\frac{-15}{4}=\frac{3}{4}$

2° $\frac{3}{7}\times\frac{-11}{-6}=\frac{11}{14}$

3° $\frac{32}{-4}\times\frac{-15}{8}=15$

4° $\frac{4}{5}\times\frac{-9}{8}=-\frac{9}{10}$

5° $\frac{2}{-5}\times\frac{3}{8}=-\frac{3}{20}$.

6° $\frac{-2}{3}\times 6\times\frac{1}{-7}=\frac{4}{7}$

7° $\frac{-6}{7}\times\frac{5}{-2}\times\frac{-4}{-5}=\frac{12}{7}$

8° $\left(\frac{-4}{9}-\frac{4}{-45}\right)\times\frac{9}{8}=-\frac{2}{5}$

9° $\left(3\frac{1}{7}-\frac{17}{14}\right)\times\frac{-2}{9}=-\frac{3}{7}$

77. *Effectuer les opérations suivantes :*

1° $\frac{-4}{-5}:\frac{-2}{3}=-\frac{6}{5}$ 3° $(-4):\frac{-2}{5}=10$ 5° $\frac{-6}{7}:(-3)=\frac{2}{7}$

2° $\frac{-5}{7}:3=-\frac{5}{21}$ 4° $\frac{-6}{7}:\frac{-3}{8}=\frac{16}{7}$ 6° $\frac{-9}{-4}:\frac{3}{-2}=-\frac{3}{2}$.

§ VII. — PUISSANCES.

78. *Réduire à une forme plus simple les expressions suivantes :*

aaa; aab; $3aa.2bb$; $abab$; $(abb)^2$; $(-aa)^2$; $(-3abbb)^3$; $(-2aab)^4$.

Rép. a^3; a^2b; $6a^2b^2$; a^2b^2; a^2b^4; a^4; $-27a^3b^9$; $16a^8b^4$.

79. *Trouver le nombre de facteurs des produits suivants :*
$7a$; a^7; a^2; $2a$; a^3b; $5abc$; a^5; $5a$; $4a^3$; $3a^4$; $a(a+b)$; $a^2(a+b)$; $(a+b)^2$; $6a(a+b)^2$; $a^3(a+b)^4$; $7a^{n+1}$.

80. *Écrire sans exposant les expressions suivantes :*

$$a^2,\ (-x)^3,\ (3x)^2,\ (ab)^4,\ (-ab)^3,\ (a-b)^2,\ x^2(x+y)^3.$$

On a : 1° $a^2 = aa$;
2° $(-x)^3 = (-x)(-x)(-x) = -xxx$; etc.

81. *Calculer la valeur de* $x = a^n$ *pour les valeurs suivantes de* a *et de* n :

1° $a = -3$, $n = 4$ 4° $a = -1$, $n = 5$ 7° $a = -5$, $n = 3$
2° $a = 7$, $n = 2$ 5° $a = 6$, $n = 0$ 8° $a = -10$, $n = 4$
3° $a = -\frac{2}{7}$, $n = 2$ 6° $a = \frac{2}{3}$, $n = 5$ 9° $a = -\frac{2}{5}$, $n = 3$.

Rép. 1° 81 4° -1 7° -125
2° 49 5° 1 8° 10000
3° $\frac{4}{49}$ 6° $\frac{32}{243}$ 9° $-\frac{8}{125}$.

82. *Chercher la valeur numérique des produits suivants quand* $a = +2$, $b = -1$, $c = +3$, $d = -2$.

1° $14a^3c$ 5° $-2a^3$ 9° $3ab^2c$ 13° $7a(b+c)$
2° $7ad$ 6° $-4a^2b^2$ 10° $-11abc$ 14° $-3ab^2(c-d)$
3° $\frac{5}{12}ab^2d$ 7° $-\frac{2}{5}ad$ 11° $\frac{2ab^3}{c^3}$ 15° $-\frac{4a^2}{b}(a-c)$
4° $\frac{2}{3}a^3b^2c$ 8° $\frac{-7ab^5}{2c}$ 12° $\frac{3(a+d)}{2b}$ 16° $\frac{7}{19}ad(b+d)$.

Rép. 1° 168 5° -8 9° 18 13° 28
2° -28 6° -16 10° 66 14° -30
3° $-\frac{5}{3}$ 7° $\frac{8}{5}$ 11° $\frac{4}{9}$ 15° -16
4° 16 8° $\frac{7}{3}$ 12° 0 16° $\frac{84}{19}$.

83. *Même question quand* $a = -5$, $b = \frac{2}{3}$, $c = 1$, $d = 0$.

Rép. 1° 350 5° -50 9° $-\frac{20}{3}$ 13° $-\frac{175}{3}$
2° 0 6° $-\frac{400}{9}$ 10° $\frac{110}{3}$ 14° $\frac{20}{3}$
3° 0 7° 0 11° $-\frac{40}{9}$ 15° 900
4° $-\frac{1000}{27}$ 8° $\frac{560}{243}$ 12° $-\frac{45}{4}$ 16° 0.

84. *Effectuer les opérations suivantes :*

1° $3^2.3^4 = 3^6 = 729$	9° $4^3 : 4^2 = 4$
2° $(-2)(-2)^3 = 2^4 = 16$	10° $5^4 : 5 = 5^3$
3° $5.5^2.5^3 = 5^6 = 15625$	11° $a^5 : a^2 = a^3$
4° $a^3a^4a^2 = a^9$	12° $x^4 : x^4 = 1$
5° $(abc)^3 = a^3b^3c^3$	13° $x^{m-2}x^4 = x^{\ +2}$
6° $(2a^2bc)^2 = 4a^4b^2c^2$	14° $x^{m+2} : x^m = x^2$
7° $(-ab^3)^3 = -a^3b^9$	15° $(-x)^{2n+1} = -x^{2n+1}$
8° $(-3ax^2)^4 = 81a^4x^8$	16° $x^{n+1}x^{n-1} = x^{2n}$.

CHAPITRE III

Expressions algébriques.

§ I. — GÉNÉRALITÉS.

85. *Quelle distinction faites-vous entre les expressions suivantes :*

1° $5a$ est le produit de 5 par a; a^5 est une puissance de a dont l'exposant est 5.

2° a^2 et aa représentent la même expression.

3° $3a^2$ est le produit de 3 par a^2; $(3a)^2$ est le carré du produit $3a$.

4° $4(a - b)$ est le produit de la différence $a - b$ par 4;
$4a - b$ est la différence entre $4a$ et b.

5° $a - bc$ est la différence entre a et bc;
$(a - b)c$ est le produit de la différence $a - b$ par c.

6° $4ab^3$ est le produit des trois facteurs 4, a et b^3;
$4(ab)^3$ est le produit de 4 par le cube de ab;
$(4ab)^3$ est le cube du produit $4ab$.

7° $a - b^2$ est la différence entre a et b^2;
$(a - b)^2$ est le carré de la différence $a - b$.

8° $ab + c$ est la somme de ab et c;
$a(b + c)$ est le produit de a par $b + c$.

9° $a - b + c$ est une somme algébrique de trois termes;
$a - (b + c)$ est la différence entre a et $b + c$.

10° $a - \frac{b}{c}$ est la différence entre a et $\frac{b}{c}$;
$\frac{a - b}{c}$ est une fraction.

86. *Expliquer la signification des expressions algébriques suivantes :*

1° $a - (b - c)$ est une différence dont le second terme est lui-même une différence.

2° $a + [b + (a - c)]$ est une somme dont le second terme est lui-même la somme de b et de la différence $a - c$.

3° $[(a - b) - c] + a$ est une somme dont le premier terme est la différence entre la différence $a - b$ et c.

4° $[a - (b + c)] + b$ est une somme dont le premier terme est la différence entre a et la somme $b + c$.

5° $2a(b + c)^2$ est un produit de trois facteurs dont le 3e est le carré d'une somme.

6° $a^2 + \dfrac{b + c}{a}$ est une somme; le premier terme est un carré et le second une fraction dont le numérateur est une somme.

7° $\dfrac{a - b}{a} - \dfrac{a + b}{b}$ est la différence entre les fractions $\dfrac{a - b}{a}$ et $\dfrac{a + b}{b}$.

8° $(a - b) : (a + b)$ est le quotient de la différence de deux nombres par leur somme.

9° $(a^2 + ab + b^2)(a - b)$ est un produit de deux facteurs dont chacun est une somme algébrique.

10° $a^3 - abc + b^3 - c^3$ est une somme algébrique de quatre termes.

11° $(a - b)[a^2(a + b) + a^3] - b^4$ est une différence dont le premier terme est le produit d'une différence par une somme.

12° $a(a - b) + a[b - (c - d)]$ est une somme de deux termes; etc.

13° $\left(1 - \dfrac{a - b}{a + b}\right)\left(\dfrac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}\right)$ est un produit de deux facteurs; etc.

14° $\left(3a - \dfrac{5b^2}{c}\right)^2 (b - c)^3$ est le produit d'un carré par un cube; etc.

87. *Exprimer algébriquement :*

1° Le double de x, le tiers de a, le double du carré de b, le carré de la somme de a et b, la moitié du produit de a par le carré de b.

Rép. 1° $2x$; 2° $\dfrac{a}{3}$; 3° $2b^2$; 4° $(a + b)^2$; 5° $\dfrac{1}{2} ab^2$.

2° Un nombre pair, un nombre impair, deux nombres consécutifs, deux nombres pairs consécutifs, trois nombres consécutifs dont le plus grand est a.

Rép. 1° $2n$; 2° $2n + 1$; 3° n et $n + 1$;
4° $2n$ et $2n + 2$; 5° $a - 2$, $a - 1$ et a.

3° Le nombre qui surpasse x de 3; le nombre qui lui est inférieur de 5.

Rép. 1° $x + 3$; 2° $x - 5$.

4° Le nombre qu'il faut ajouter à 7 pour avoir 12, ou — 5, ou a.

Rép. 1° $12 - 7 = 5$; 2° $-5 - 7 = -12$; 3° $a - 7$.

5° Le nombre qu'il faut retrancher de 13 pour avoir 4, ou — 7 ou x; les carrés des nombres trouvés.

Rép. 1° $13 - 4 = 9$; 2° $13 - (-7) = 20$; 3° $13 - x$;
4° 9^2; 5° 20^2; 6° $(13 - x)^2$

6° Le nombre que l'on obtient en augmentant x de sa moitié et en multipliant le résultat par 5.

Rép. $\frac{15x}{2}$.

7° Le nombre que l'on obtient en retranchant la moitié de x du double de x.

Rép. $\frac{3x}{2}$.

8° Un nombre de deux chiffres composé de 4 dizaines et de 3 unités; de a dizaines et de b unités; ces nombres renversés.

Rép. 1° 43; 2° $10a + b$; 3° 34; 4° $10b + a$.

9° Un nombre qui a b dizaines et dont la somme des chiffres est 10, ou $a + b$, ou $2a$, ou $3a + b$.

Rép. 1° $10b + (10 - b)$; 2° $10b + a$;
3° $10b + (2a - b)$; 4° $10b + 3a$.

10° Une fraction dont les termes valent ensemble a et dont le dénominateur vaut b.

Rép. $\frac{a - b}{b}$.

11° Le périmètre d'un rectangle dont le grand côté dépasse de a le petit côté b; l'aire de ce rectangle.

Rép. 1° $2b + 2(a + b)$; 2° $b(a + b)$.

12° L'intérêt de la somme $a - b$ placée à p % pendant trois ans.

Rép. $\frac{3(a - b)p}{100}$ fr.

13° Le chemin parcouru en trois heures par un courrier qui fait x km. en 5 h.

Rép. $\frac{3x}{5}$ km.

14° Le nombre par lequel il faut multiplier x pour obtenir $2a + b$.

Rép. $\frac{2a + b}{x}$.

88. *Si* a $= -1$, b $= +2$, c $= -3$, d $= +4$, *calculer la valeur numérique des expressions suivantes :*

1° $a + b + c + d$

2° $a - b - c - d$

3° $ab + ac + ad - bc - bd + cd$

4° $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+d} + \frac{1}{a-c}$

5° $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} - \frac{c}{a} - \frac{d}{b}$

6° $\frac{b}{a} + \frac{d}{c} - \frac{a}{b} - \frac{c}{d}$

7° $abc - abd + acd - bcd$

8° $a^3 + b^3 - c^3 + d^3$

9° $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

10° $\frac{1}{a-b} - \frac{1}{c+d} + \frac{1}{d-b}$

11° $\frac{a^2 + ab + b^2}{a^3 - b^3} + \frac{c^2 - cd + d^2}{c^3 + d^3}$

12° $\frac{a^2 - ab + b^2}{a^3 + b^3} - \frac{c^2 + cd + d^2}{c^3 - d^3}$.

Rép. 1° 2 4° $\frac{5}{2}$ 7° 50 10° $-\frac{5}{6}$

2° -4 5° $-\frac{25}{4}$ 8° 98 11° $\frac{2}{3}$

3° -17 6° $-\frac{25}{12}$ 9° -27 12° $\frac{8}{7}$.

89. *Si* a $= -\frac{1}{2}$, b $= +\frac{1}{3}$, c $= -\frac{1}{4}$, d $= +\frac{1}{5}$, *calculer la valeur numérique des expressions suivantes :*

1° $a(b + c) + c(b - c)$

2° $(a + b)(c - d) + abcd$

3° $3(a - b)^2 + 5(c + d)^2$

4° $\frac{a}{b} - \frac{b}{c} + \frac{c}{d} - \frac{d}{a}$

5° $\frac{a-b}{c+d} - \frac{c-d}{a+b}$

6° $2(a + b)^2 - 4(c - d)^2$

7° $(a^2 - b)(c^2 - d) - 4ab$

8° $(a + b - c + d)^2$

9° $\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{cd} - \frac{c^2}{ad} - \frac{d^2}{ab}$

10° $\frac{a^2 - b^2}{c^2 - d^2} \times \left(\frac{2a}{d} - \frac{3b}{c}\right)$.

Rép. 1° $-\frac{3}{16}$ 4° $-\frac{61}{60}$ 6° $-\frac{679}{900}$ 9° $-\frac{7843}{1800}$

2° $\frac{1}{12}$ 5° $\frac{419}{30}$ 7° $\frac{217}{320}$ 10° $-\frac{500}{81}$.

3° $\frac{503}{240}$ 8° $\frac{289}{3600}$

90. *Calculer la valeur numérique des expressions suivantes :*

1° $6a^3b^2 - 5a^2b^3 + a^4b$, si $a = 5$, $b = -2$.

2° $5xy + 2x^2y - 3y^2 - 4x$, si $x = 3$, $y = 0{,}2$.

3° $(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)$, si $a = 3$, $b = 0{,}2$, $c = -0{,}2$.

4° $[a^2 - a(b-c)](a^2+b^2-c^2)$, si $a = -1$, $b = 2$, $c = -3$.

5° $\dfrac{a^3-b^3}{a+b} - \dfrac{b^3+c^3}{b-c} + \dfrac{c^3-a^3}{a+c}$, si $a = -\dfrac{1}{3}$, $b = \dfrac{2}{5}$, $c = -\dfrac{1}{2}$.

Rép. 1° 2750 3° 26,52 5° $-\dfrac{302}{225}$.
2° — 5,52 4° — 24

§ II. — MONOMES ET POLYNOMES.

91. *Écrire sans coefficient les expressions suivantes :*

$2a$, $-3b$, $3xy$, $-5ab$, $4x^2$, $-2a^2b$, $3(a+b)$, $4(a-b)$, $2(3a+b)^3$.

On a : 1° $2a = a + a$,
2° $-3b = -b - b - b$; etc.

92. *Écrire sans coefficient et sans exposant les expressions suivantes :*

$3a^2$, $4b^2$, $-3a^3b^2$, $2a^2b^3x$, $2(x+y)^2$, $-4a^2(x^2-y^2)$, $3a^0(2x-y^2)^2$.

On a : 1° $3a^2 = aa + aa + aa$; etc.

93. *Remplacer par un seul monôme les expressions suivantes :*

1° $2a - 5a + 7a - 10a = -6a$;
2° $-x + 3x - 4x + 9x = 7x$;
3° $-10x + 2x + 7x + x = 0$;
4° $-2a^2b + 3a^2b - 7a^2b + 10a^2b = 4a^2b$;
5° $4abc + 2abc - 4abc - 7abc = -5abc$;
6° $3a^2x - a^2x + 2a^2x - 4a^2x = 0$.

94. *On donne les expressions :*

1° $7a^2x^4$ 5° $2a^5 - 4a^3x^3 + 10ax - 7a^5$
2° $2a^5x$ 6° $4ax^3 - 7a^2x^2 + 3a^nx - b^2x^4$
3° $a^2b^2 - ax$ 7° $ax^3 + 2a^2x - ax^3 + ax$
4° $a^2x^2 - ab^2x + b^4$ 8° $ax^2 + x^2 - a^2 - ax^2$.

Trouver le degré de ces expressions. Quel est leur degré par rapport à a*? par rapport à* x*?*

L'expression $7a^2x^4$ est du 6e degré; elle est du 2e degré en a et du 4e degré en x; etc.

95. *Ordonner par rapport aux puissances décroissantes de* x *les polynômes suivants :*

1° $7x^3 + 4y^3 - 3x^2y - xy^2$
Rép. $7x^3 - 3x^2y - xy^2 + 4y^3$.
2° $2x^4 - 3x^2 - 7x^2 + x^3 - 2$
Rép. $2x^4 + x^3 - 10x^2 - 2$.
3° $x^4 - x^2y^2 - 3xy^3 + y^4 + x^3y$
Rép. $x^4 + x^3y - x^2y^2 - 3xy^3 + y^4$.

4° $25a^2x^2 - 3a^4 - ax^3 - 4a^4 - 2a^3x + x^4$
Rép. $x^4 - ax^3 + 25a^2x^2 - 2a^3x - 7a^4$.
5° $6x^5 - 3x^4 - 2x^4 + 5x^3 - 10x^2 + 6x^3$
Rép. $6x^5 - 5x^4 + 11x^3 - 10x^2$.
6° $y^4 + 4x^3y - x^4 - 3x^2y^2 + 2xy^3$
Rép. $- x^4 + 4x^3y - 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4$.
7° $10x^4 - 15a^2x^2 - 5ax^3 - 4a^3x + 6ax^3 + 2a^2x^2$
Rép. $10x^4 + ax^3 - 13a^2x^2 - 4a^3x$.
8° $- 2x^2y^2 + 4x^3y + 6x^4 - 9x^3y - 6x^2y^2 + 2xy^3 - y^4 + 3xy^3$
Rép. $6x^4 - 5x^3y - 8x^2y^2 + 5xy^3 - y^4$.

96. *Les polynômes précédents sont-ils homogènes ou non? Sont-ils complets ou incomplets? Quels sont les termes qui manquent?*

Considérons les polynômes ordonnés précédents.

1° Le polynôme est homogène et complet.
2° Le polynôme est non homogène et incomplet. Le terme en x manque.
3° Le polynôme est homogène et complet.
4° Le polynôme est homogène et complet.
5° Le polynôme est non homogène et incomplet. Le terme en x et le terme indépendant manquent.
6° Le polynôme est homogène et complet.
7° Le polynôme est homogène mais incomplet. Le terme indépendant de x manque.
8° Le polynôme est homogène et complet.

97. *Combien de termes renferme un polynôme complet et ordonné par rapport aux puissances décroissantes de* x, *s'il est du* 3e, *du* 7e *ou du* ne *degré en* x?

1° Un	polynôme	complet	du	3e	degré	renferme	4 termes.
2°	»	»	»	7e	»	»	8 »
3°	»	»	»	ne	»	»	$n + 1$ »

98. *Ordonner par rapport aux puissances croissantes de* a *les polynômes suivants :*

1° $a^2 - 3a^3 - 5a^2 + 4a^3 + 3 + 7a^2 - 4$
Rép. $- 1 + 3a^2 + a^3$.
2° $b^3 + 3a^2b + 3ab^2 + a^3 + 5a^2b - 3b^3 - 3ab^2$
Rép. $- 2b^3 + 8a^2b + a^3$.
3° $a^3 - ab^2 - b^3 + a^2b + 2a^3 + 2b^3 - 3ab^2$
Rép. $b^3 - 4ab^2 + a^2b + 3a^3$.
4° $2a^2b^3 - 5a^3b^2 + 5ab^4 - 5a^4b - b^5 + a^5 + 5a^3b^2 - 3ab^4$
Rép. $- b^5 + 2ab^4 + 2a^2b^3 - 5a^4b + a^5$.

CHAPITRE IV

Polynômes.

§ I. — ADDITION ET SOUSTRACTION.

99. *Trouver la somme des expressions suivantes :*

1° $a + 5b$ et $- 3b$	**Rép.**	$a + 2b$
2° $6a - 3b$ et $- 3a$	»	$3a - 3b$
3° $a + b$ et $a - b$	»	$2a$
4° $- 3a + 2b$ et $3a + 2b$	»	$4b$
5° $4x^2 - 5y^2$ et $3xy + 2y^2$	»	$4x^2 + 3xy - 3y^2$
6° $4ab^2 + 2ac$ et $- 5ac + 2ab^2$	»	$6ab^2 - 3ac$
7° $3x^2 - 9$ et $8x - 45$	»	$3x^2 + 8x - 54$
8° $- x + 3a$ et $x - 5a$	»	$- 2a$
9° $7ab - 3ab^2$ et $- 5ab + 2ab^2$	»	$2ab - ab^2$
10° $3(a^2 - b^2)$ et $5(a^2 + b^2)$	»	$8a^2 + 2b^2$.

100. *Additionner les expressions suivantes :*

1° $3x,\ - 7y,\ 3y,\ - y,\ 10x,\ - 2y,\ - 7x.$
Rép. $6x - 7y.$

2° $3ab,\ - 2a^2,\ 3b,\ 4b - 5ab,\ 2a^2.$
Rép. $- 2ab + 7b.$

3° $x^2,\ - \frac{3}{4}x^2,\ - \frac{2}{3}x^2,\ 2\frac{1}{2},\ x^2 - 1.$

Rép. $\frac{7}{12}x^2 + \frac{3}{2}.$

4° $13a - 10b + 4c;\quad a + 20b - c.$
Rép. $14a + 10b + 3c.$

5° $- 3x + 2y + z;\quad 3x + 7y - 2z.$
Rép. $9y - z.$

6° $4a^2 + ab + 5b^2;\quad - 6a^2 + 9ab - 3b^2.$
Rép. $- 2a^2 + 10ab + 2b^2.$

7° $9a^3b^2 - 4a^5 + 3a^4b;\quad 5a^5 - 9a^3b^2 - 2a^4b.$
Rép. $a^5 + a^4b.$

8° $4x^4y - 3x^3y^2 - 2x^5;\quad 2x^3y^2 + 4x^5 - 8x^4y.$
Rép. $2x^5 - 4x^4y - x^3y^2.$

101. *Additionner les expressions suivantes :*

1° $2x + 3y - z;\quad - x + y + 2z;\quad 3x - y + z.$
Rép. $4x + 3y + 2z.$

2° $2a - b + 3c;\quad a + 4b - c;\quad 4a + 2b - 2c.$
Rép. $7a + 5b.$

3° $x + 3y - 4z$; $3x - y + z$; $5x + y - 2z$.
Rép. $9x + 3y - 5z$.
4° $2x^2 + 3 - x$; $2x + x^2 - 5$; $3x^2 - x - 3$.
Rép. $6x^2 - 5$.
5° $-2x^2 + 4x + 2$; $x^2 - 6x + 3$; $3x^2 + 3x - 5$.
Rép. $2x^2 + x$.
6° $x^3 + x - 2x^2 - 7$; $3x^2 + 2 + 5x$; $x^3 + 6x + 2x^2$.
Rép. $2x^3 + 3x^2 + 12x - 5$.
7° $6x^4 + 3x^3$; $-2x^3 + 7x^2$; $-5x^2 - 2x$; $x^4 - x^3$.
Rép. $7x^4 + 2x^2 - 2x$.
8° $-2x^3 + 2x^2y - 2xy^2 - y^3$; $x^3 - 8y^3$; $-4x^2y + 2xy^2$.
Rép. $-x^3 - 2x^2y - 9y^3$.

102. *Additionner les expressions suivantes :*

1° $\frac{3}{2}a^2b - \frac{3}{4}ab^2 + 2b^3$; $\frac{1}{2}a^3 - 2a^2b - \frac{3}{2}b^3$; $-\frac{3}{2}a^3 + ab^2 + \frac{1}{2}b^3$.
Rép. $-a^3 - \frac{1}{2}a^2b + \frac{1}{4}ab^2 + b^3$.

2° $\frac{2}{3}xy + \frac{7}{5}y^2$; $-\frac{5}{8}x^2 + \frac{13}{5}y^2 - 2xy$; $\frac{3}{4}x^2 - \frac{19}{6}y^2 - \frac{1}{6}xy$.
Rép. $\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{2}xy + \frac{5}{6}y^2$.

3° $\frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{5}y^2$; $\frac{5}{8}x^2 - \frac{1}{3}xy + \frac{3}{10}y^2$; $-\frac{3}{4}x^2 + \frac{14}{15}xy - y^2$.
Rép. $\frac{3}{8}x^2 - \frac{2}{5}xy - \frac{1}{2}y^2$.

4° $\frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{4}b^2$; $\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{3}ab + \frac{1}{4}a^2$; $\frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}b^2$.
Rép. $\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{6}ab - \frac{1}{4}b^2$.

5° $a^m + 6a^{m-1}b + 6a^{m-3}b^3 + 10a^{m-2}b^2 + b^4$
et $3a^{m-1}b + 5a^{m-2}b^2 + 3a^m - 5b^4 - 3a^{m-3}b^3$.
Rép. $4a^m + 9a^{m-1}b + 15a^{m-2}b^2 + 3a^{m-3}b^3 - 4b^4$.
6° $8a^{m-2}b^2 - 5a^m + 3a^{m-3}b^3 + 3b^4 + 6a^{m-1}b$
et $-7b^4 - 3a^{m-2}b^2 + 7a^{m-3}b^3 + 8a^m + 4a^{m-1}b$.
Rép. $3a^m + 10a^{m-1}b + 5a^{m-2}b^2 + 10a^{m-3}b^3 - 4b^4$.

103. *Soustraire :*

1° $2x$ de $7x$	**Rép.**	$5x$
2° $-4y$ de $9y$	»	$13y$
3° $13y$ de $-9y$	»	$-22y$
4° $2x$ de $-2x$	»	$-4x$

5° $-9y$ de $45y$ Rép. $54y$
6° $12xy$ de $-7xy$ » $-19xy$
7° $-3x^2y$ de $6x^2y$ » $9x^2y$
8° $-4x^2y^3z$ de $-9x^2y^3z$ » $-5x^2y^3z$.

104. *Opérer les soustractions suivantes :*
1° De $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ retrancher $x^3 - 3xy^2$
Rép. $3x^2y + 6xy^2 + y^3$.
2° De $6 + x - x^2$ retrancher $4 - x + x^2$
Rép. $2 + 2x - 2x^2$.
3° De $4xy^2 + y^3 - 9x^2y$ retrancher $x^3 - 3y^3 - 4xy^2 - x^2y$
Rép. $-x^3 - 8x^2y + 8xy^2 + 4y^3$.
4° De $x^3 + 3x^2 + x$ retrancher $-x^4 - x^3 + 3x$
Rép. $x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 2x$.
5° De $-x^3 - x^4 + x^5 - x + 1$ retrancher $x^4 - 1 + x - x^2$
Rép. $x^5 - 2x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 2$.
6° De $8xy^3 + 2x^3y + 5y^4$ retrancher $5x^3y + 11xy^3 - x^4 - 6y^4 - 3x^2y^2$
Rép. $x^4 - 3x^3y + 3x^2y^2 - 3xy^3 + 11y^4$.

105. *Combien doit-on ajouter*
1° *à* x — y *pour obtenir* x?
Pour obtenir x, il faut ajouter à $x - y$ la différence $x - (x - y)$ ou y.
2° à $a^2 - b^2$ pour obtenir $2a^2$
3° » $x + y + z$ » » $x - z$
4° » $x^3 + x^2 - x$ » » $2x^3 - x^2 + 2x$
5° » $a^2 + b^2 - 2ab$ » » $4ab$
6° » $a^2 + b^2 + 2ab$ » » $2a^2 - b^2$
7° » $a^2 + b^2$ » » $a^2 - b^2$
8° » $2x^2 + y^2 - z^2$ » » $4x^2 - y^2 + 2z^2$?

Rép. 1° y
2° $a^2 + b^2$
3° $-y - 2z$
4° $x^3 - 2x^2 + 3x$
5° $-a^2 + 6ab - b^2$
6° $a^2 - 2b^2 - 2ab$
7° $-2b^2$
8° $2x^2 - 2y^2 + 3z^2$.

106. *On donne quatre polynômes :*

$$5x^2 - 3xy + y^2 - 3xz + 2yz + z^2$$
$$2x^2 + 5xy - 3y^2 + 2xz - 4yz + 3z^2$$
$$4x^2 - 7xy + 5y^2 - 4xz - 5yz + z^2$$
$$2x^2 + 9xy - 8y^2 + 3xz + 3yz + 2z^2.$$

De la somme des deux premiers, retrancher la somme des deux derniers.
La somme des deux premiers $= 7x^2 + 2xy - 2y^2 - xz - 2yz + 4z^2$. (1)
La somme des deux derniers $= 6x^2 + 2xy - 3y^2 - xz - 2yz + 3z^2$. (2)
La différence entre (1) et (2) $= x^2 + y^2 + z^2$.

107. *On donne les polynômes :*

$$\begin{array}{l} 6x^2 - 3xy + 2y^2 - 5xz + 6yz - 2z^2 \\ x^2 - xy + y^2 + xz - yz - z^2 \\ 2x^2 + 3xy - 2y^2 - 3xz - 4yz - 5z^2 \\ 3x^2 - 6xy + 3y^2 - 4xz + 10yz + 4z^2. \end{array}$$

Du premier, retrancher la somme des trois derniers.

Le 1er polynôme $= 6x^2 - 3xy + 2y^2 - 5xz + 6yz - 2z^2$. (1)
La somme des 3 derniers $= 6x^2 - 4xy + 2y^2 - 6xz + 5yz - 2z^2$. (2)
La différence entre (1) et (2) $= xy + xz + yz$.

108. *Faire disparaître les parenthèses et effectuer les réductions.*

1° $x^2 - (y^2 - z^2) + y^2 - (x^2 + z^2) - z^2 - (x^2 - y^2)$
Rép. $-x^2 + y^2 - z^2$.
2° $(4x^3 - 2x^2 + x + 1) - (-x^2 + 3x^3 - x - 7) - (x^3 - 4x^2 + 8 + 2x)$
Rép. $3x^2$.
3° $(2x - 3y + 4z) - (5z - 5x - 4y) + (y + z - 7x)$
Rép. $2y$.
4° $6x + 3y - (5x + 2y + 3z) + (-4x - 3y)$
Rép. $-3x - 2y - 3z$.
5° $(6x + 5y) - (4x + y - 3z) - (2z + 5x + 3y)$
Rép. $-3x + y + z$.
6° $3x^2y^2 + 4y^4 - (x^3y - 4x^2y^2 - 3xy^3 + 2y^4) - xy^3$
$- (4x^2y^2 + 3y^4) + 3x^4$
Rép. $3x^4 - x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 - y^4$.

109. *Faire disparaître les parenthèses et effectuer les réductions.*

1° $x^2 - (y^2 - z^2) - [y^2 - (z^2 - x^2)] - [z^2 - (y^2 - x^2)]$
Rép. $-x^2 - y^2 + z^2$.
2° $[x^3 + y^3 - (3x^2y + 3xy^2)] - [(x^3 - 3x^2y) - (3xy^2 - y^3)]$
Rép 0.
3° $(x + 2y - 6x) - [3y - (6x - 6y)] - [(x - 3y) - (2x + 5y)]$
Rép. $2x + y$
4° $[2x - (3y + z - 2t)] - [(2x - 3y) + (z - 2y)]$
$+ [2x - (3y + z) - 2t] - [(2x - 3y + z) - 2t]$
Rép. $2y - 4z + 2t$.
5° $7a - \{-3a - [4a - (5a - 2b)] - (-3b + 2a)\}$
Rép. $11a - b$.
6° $2a - (3b + 3c) - \{5b - (6c - 6b) + 5c - [4a - (2c - 5b)]\}$
Rép. $6a - 9b - 4c$.

110. *Faire disparaître les parenthèses et effectuer les réductions.*

1° $x^4 - \{4x^3 - [6x^2 - (4x - 1)]\} - [x^4 + (4x^3 + 6x^2) - (4x - 1)]$
Rép. $-8x^3$.

2° $[2x - (3y + z - 2)] - [(2x - 3y) + (z - 2)]$
$+ [2x - (3y + z) - 2] - [(2x - 3y + z) - 2]$
Rép. $-4z + 4$.
3° $a^5 - \{7 - (3a^4 - a^3) - [8a^4 - (3a^2 - a + 3a^5 - 7) - 5] - 4\}$
Rép. $-2a^5 + 11a^4 - a^3 - 3a^2 + a - 1$.
4° $a + \{4b - [6c - (4d - 1)]\} - [(a + 4b) - (6c - 4d) - 1]$
Rép. 0.
5° $7x - [(a + x) - (a - x)] - \{2x - [(a - x) - (a + x)]\}$
Rép. x.
6° $1 - (x - x^2) + \{x^3 - x^4 - [(1 - x - x^2 - x^3 - x^4) - (2x^3 - 3x^2)]$
Rép. $4x^3 - x^2$.
7° $2a^2 - [2b^2 - (a^2 + b^2)] - \{5b^2 - [3a^2 + (b^2 - 2a^2)]\}$
Rép. $4a^2 - 5b^2$.
8° $x^4 - \{x^3 - [-4x^2 - (6x - 4) - 1]\} - \{4x^3 - [6x^2 - (4x - 1)]\}$
Rép. $x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 10x + 4$.

111. *Résoudre les équations suivantes :*

1° $5x + (7 - x) = -1$	**Rép.** $x = -2$
2° $8x + (x - 7) = 9x - (3 + 4x)$	» $x = 1$
3° $8x - (9 + 4x) - 5 = 7x - 6$	» $x = -\dfrac{8}{3}$
4° $0 = 14 + 2x - (3x + 6) - 8x$	» $x = \dfrac{8}{9}$
5° $-9x = (7x + 15) - (10x - 8 + 5x)$	» $x = -23$
6° $-(10 - 8x) - (6 - 12x) = 2 - 4x$	» $x = \dfrac{3}{4}$
7° $110 - (9x - 15) + 2x = 10 + [(5 - 7x) - 11x]$	» $x = -10$
8° $-[-(12x - 9) + 8x - 60] + (9 + x) = 0$	» $x = -12$
9° $x - [(3 - 6x) - (12x - 9)] = x + 15$	» $x = 1,5$
10° $(7x - 6) + [(5x - 4) - (2 - 3x) + x] = -4$	» $x = 0,5$.

§ II. — MULTIPLICATION ALGÉBRIQUE.

Effectuer les produits suivants :

112. 1° $x^2y \times xy^2$	**Rép.** x^3y^3
2° $x^3y^2 \times xy^3$	» x^4y^5
3° $x^3y^2z^4 \times x^2yz^2$	» $x^5y^3z^6$
4° $(5axy^2)(-8a^2x^3y)$	» $-40a^3x^4y^3$
5° $(3x^4y^3z^2t)(2xy^2z^2t^2)$	» $6x^5y^5z^4t^3$

6° $(-x^2yz^3)(x^2y^3z)$	Rép.	$-x^4y^4z^4$
7° $(2x^3y^2z)(-3x^2y^4z^2)$	»	$-6x^5y^6z^3$
8° $(-x^4y^2z)(-x^3y^2z)$	»	$x^7y^4z^2$
9° $(4a^4x^2)(-3a^3y^2)(-16x^6y^9)$	»	$192a^7x^8y^{11}$
10° $(-3x^2y^2z)(-4xy^3z^2)(-2x^3yz^3)$	»	$-24x^6y^6z^6$
11° $(-x^4y^2)(-4y^2z^2)(-5x^2y^3z)$	»	$-20x^6y^7z^3$
12° $(7x^2y^2z)(x^2z^2)(-y^2z^2)xy$	»	$-7x^5y^5z^5$.

113. 1° $(3x^2y)(5xy^3)(-6xy^4)(-2x^2y^2)$
Rép. $180x^6y^{10}$.
2° $(4a^4)(4ab^4)(-5b^2c)(2a^2)(-5a^3)(-3b^2)(-4a)(-5b)$
Rép. $-48\,000a^{11}b^9c$.
3° $(2xy^2c^3d^4)(-3x^2y^3c^4d^5)(-4x^3y^4c^5d^6)(-5x^4y^5c^6d^7)$
Rép. $-120x^{10}y^{14}c^{18}d^{22}$.
4° $(3a^3b^2c)(-4ab^2c^3)(5a^2b^3c)(-6b^3c^2)\,7a^2c$
Rép. $2520a^8b^{10}c^8$.
5° $(2ab^3c^2d^5)(3a^3b^5c^4d)(-4a^3b^2c^3d)(-7a^4bc^3d^2)$
Rép. $168a^{11}b^{11}c^{12}d^9$.

114. 1° $7a^2bc(3a+b-4c)$
Rép. $21a^3bc+7a^2b^2c-28a^2bc^2$.
2° $-2ab^2c^2(4a^3-3b^2+c)$
Rép. $-8a^4b^2c^2+6ab^4c^2-2ab^2c^3$
3° $3ay^2c^2(2a^3-3y^2+4c)$
Rép. $6a^4y^2c^2-9ay^4c^2+12ay^2c^3$.
4° $-5a^2b^3c^4(a-3b^2+2c^3)$
Rép. $-5a^3b^3c^4+15a^2b^5c^4-10a^2b^2c^7$.
5° $-2ab^2c^3(2a^2-3b^3+4c^4)$
Rép. $-4a^3b^2c^3+6ab^5c^3-8ab^2c^7$.
6° $-3x^2y(2x^2-4xy+2y^2)$
Rép. $-6x^4y+12x^3y^2-6x^2y^3$.
7° $-(4a^4-5a^2b^3+b^6)(-5a^3b^5)$
Rép. $20a^7b^5-25a^5b^8+5a^3b^{11}$.
8° $-(9a^7b^5-11a^9b^8+a^{11}b^{13})\,24a^3b^2$
Rép. $-216a^{10}b^7+264a^{12}b^{10}-24a^{14}b^{15}$.

115. *Effectuer les expressions suivantes et réduire les résultats.*
1° $91a^2b^2c^2-7a^2b(13bc^2-9b^2c)-21b^3c(3a^2-2c^2)$.
Rép. $42b^3c^3$.
2° $9a^2bc(2ab^2c^2-4a^5b^6c^6)-3a^3b^5c^7(a^8b^6c^4-13a^4b^2)$
Rép. $18a^3b^3c^3+3a^7b^7c^7-3a^{11}b^{11}c^{11}$.
3° $13a^2y^2(8a^5y^7-2a^4y^9)-2a^4y^5(9a^3y^4-13a^2y^6)$
Rép. $86a^7y^9$.

4° $(a + b - c)c + (a - b + c)b + (-a + b + c)a$
$- 2[a(b - a) + b(c - b) + c(a - c)]$.

Rép. $a^2 + b^2 + c^2$.

5° $[x^2 + (n - 1)x + 1]x + [x^2 - (n - 1)x + 1]x$

Rép. $2x^3 + 2x$.

6° $x[2x + y - (x + 2y)] + x[3x - 2y - (2x - 3y)]$
$- x[x + 3y - (2x + 2y)]$.

Rép. $3x^2 - xy$.

116. *Effectuer les produits suivants et réduire les résultats.*

1° $(2a + 3c)(5a - 3c)$ **Rép.** $10a^2 + 9ac - 9c^2$

2° $(2ab + 3cd)(4ab + 3cd)$ » $8a^2b^2 + 18abcd + 9c^2d^2$

3° $(5a^2b + 9ab^2)(3a + 4b)$ » $15a^3b + 47a^2b^2 + 36ab^3$

4° $(2x^2 - 3y^2)(5x^3 - 4y^3)$ » $10x^5 - 15x^3y^2 - 8x^2y^3 + 12y^5$

5° $(3a^2 + 2b^2 + 3c^2)(4a^2 + 5b^2 - 6c^2)$

Rép. $12a^4 + 23a^2b^2 - 6a^2c^2 + 10b^4 + 3b^2c^2 - 18c^4$.

6° $(2a^3 + 4a^2 + 8a + 16)(3a - 6)$

Rép. $6a^4 - 96$.

7° $(4b^3 + 3b^2 - 2b + 1)(b^2 - 5b + 26)$

Rép. $4b^5 - 17b^4 + 87b^3 + 89b^2 - 57b + 26$.

8° $(4a^2 + 2ab + b^2)(2a - b)$

Rép. $8a^3 - b^3$.

9° $(4a^3 + 3a^2b + b^3)(2ab^2 - a^2b)$

Rép. $-4a^5b + 5a^4b^2 + 6a^3b^3 - a^2b^4 + 2ab^5$.

10° $(2ab^2 - 6a^2b - b^3 - 5a^3)(8ab^2 - 3b^3 + 3a^2b)$

Rép. $-15a^5b - 58a^4b^2 - 27a^3b^3 + 31a^2b^4 - 14ab^5 + 3b^6$.

117. *Prévoir le degré, les premier et dernier termes, le nombre maximum de termes du produit réduit, puis effectuer :*

1° $(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5)(a + b)$

Le multiplicande est un polynôme ordonné et homogène du 5e degré.

Le multiplicateur est un polynôme ordonné et homogène du 1er degré.

Donc le produit sera du 6e degré; le nombre maximum des termes du produit réduit sera 7.

Le 1er terme du produit $= a^5 \times a = a^6$.

Le dernier terme $= (-b^5) \times b = -b^6$.

En effectuant le produit, on trouve qu'il vaut $a^6 - b^6$.

(Les exercices suivants se résolvent d'une manière analogue).

2° $(a^5 - 5a^4x + 3a^3x^2 + 4a^2x^3 + 5ax^4 + x^5)(a - x)$

Rép. $a^6 - 6a^5x + 8a^4x^2 + a^3x^3 + a^2x^4 - 4ax^5 - x^6$.

3° $(a^5 - 2a^4b + 3a^3b^2 - 3a^2b^3 + 2ab^4 - b^5)(a + b)$

Rép. $a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^2b^4 + ab^5 - b^6$.

4° $(x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5)(x - y)$

Rép. $x^6 - y^6$.

5° $(3a^3 - 4a^2b + 5ab^2 - 2b^3)(5a^2 + 4ab - 3b^2)$
Rép. $15a^5 - 8a^4b + 22a^2b^3 - 23ab^4 + 6b^5$.

6° $(x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3)(x^2 - 2ax + a^2)$
Rép. $x^5 - 5ax^4 + 10a^2x^3 - 10a^3x^2 + 5a^4x - a^5$.

7° $(x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 1)(2x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 2x - 1)$
Rép. $2x^8 - 11x^7 + 17x^6 - 4x^5 - 6x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x + 1$.

8° $(2x^3y - 3xy^3 + 3x^4 + 4x^2y^2 - 6y^4)(3x^3 - 5x^2y + xy^2 - 2y^3)$
Rép. $9x^7 - 9x^6y + 5x^5y^2 - 33x^4y^3 - 3x^3y^4 + 19x^2y^5 + 12y^7$.

9° $(4x^{m+1}y^{m-1} - x^{m-1}y^{m+1})(7x^{m-2}y^{m+2} + x^{m+2}y^{m-2})$
Ordonner le multiplicateur dans le même sens que le multiplicande.
Rép. $4x^{2m+3}y^{2m-3} - x^{2m+1}y^{2m-1} + 28x^{2m-1}y^{2m+1} - 7x^{2m-3}y^{2m+3}$.

118. *Effectuer les opérations suivantes et réduire.*

1° $15x^2 + 24y^2 - (3x + 2y)(5x + 6y)$
Rép. $-28xy + 12y^2$.

2° $2xy + x(9x + 8y) - (8x - 9y)(5x + 7y) - (3x - 2y)(5x + 8y)$
Rép. $-46x^2 - 15xy + 79y^2$.

3° $(3x - 6y)(4x - 3y) - [(2x - 5y)(6x - 11y) - (37y^2 - 6xy)]$
Rép. $13xy$.

4° $(3x^3 - 2x^2 + x - 1)(5x^2 - 4x - 1)$
$- (15x^4 - 12x^3 + 3x^2 - x - 1)(x - 1)$
Rép. $5x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 3x$.

5° $(x^2 - y^2)(2x^3 - 4x^2y - 5xy^2) - (y^2 - x^2)(4x^3 + 8x^2y + 5xy^2)$
Rép. $6x^5 + 4x^4y - 6x^3y^2 - 4x^2y^3$.

6° $[(a - b)x^2 - (a - b)x + (a - b)][(a + b)x^2 + (a + b)x + (a + b)]$
Rép. $(a^2 - b^2)x^4 + (a^2 - b^2)x^2 + a^2 - b^2$.

7° $(a^2 - b^2)(2a - 3b + 5c) + (b - a)(3a^2 + 4bc - 5ac)$
$+ (b^2 - a^2)(4a - 3b + c)$
Rép. $-5a^3 + 9a^2c + 3a^2b + 2ab^2 - 9abc$.

8° $(34a - 12b)(17a - 8b) - [(4a - 6b)(7a - 3b)$
$- (5a - 8b)(7a - 6b)]$
Rép. $585a^2 - 508ab + 126b^2$.

9° $(x^2 - y^2)(2x^3 - 4x^2y - 5xy^2) - (y^2 - x^2)(4x^3 + 8x^2y + 5xy^2)$
$+ (x^2 - y^2)(9x^2y - 6x^3)$
Rép. $13x^4y - 13x^2y^3$.

10° $(2a^{2m} + b^n)(a^{2m} + 3b^n)(3a^{2m} + 2b^n)(2a^{2m} - 3b^n)$
Rép. $12a^{8m} + 32a^{6m}b^n - 29a^{4m}b^{2n} - 57a^{2m}b^{3n} - 18b^{4n}$.

11° $(3a^{2m+2} + 2a^{m+1})(2a^{2m} + 3a^{m-1})(2a^{2m+1} - a^m)$
Rép. $12a^{6m+3} + 20a^{5m+2} - a^{4m+1} - 6a^{3m}$.

12° $(2a^{3m+2} + 3b^{2n+1})(3a^{3m+3}b - ab^{2n+2})(4a^{3m+2}b^n - 3b^{3n+1})$
Rép. $24a^{9m+7}b^{n+1} + 10a^{6m+5}b^{3n+2} - 33a^{3m+3}b^{5n+3} + 9ab^{7n+4}$.

119. *Écrire immédiatement les produits suivants :*

1° $(x + 3)(x + 5)$.

Le produit sera du 2e degré; le 1er terme est x^2.

Le 2e terme $= 3x + 5x = 8x$; le terme indépendant $= 3 \times 5 = 15$.

Rép. $x^2 + 8x + 15$.

2° $(x + 5)(x - 2)$	**Rép.**	$x^2 + 3x - 10$
3° $(x - 3)(x + 2)$	»	$x^2 - x - 6$
4° $(x - 4)(x - 5)$	»	$x^2 - 9x + 20$
5° $(a + 3)(a + 2)$	»	$a^2 + 5a + 6$
6° $(a - 4)(a + 5)$	»	$a^2 + a - 20$
7° $(x + a)(x - b)$	»	$x^2 + (a - b)x - ab$
8° $(x - a)(x - b)$	»	$x^2 - (a + b)x + ab$
9° $(x - 2a)(x + 3a)$	»	$x^2 + ax - 6a^2$
10° $(x - 3a)(x - 5a)$	»	$x^2 - 8ax + 15a^2$
11° $(x^2 + 4)(x^2 - 1)$	»	$x^4 + 3x^2 - 4$
12° $(x^2 - 3)(x^2 + 5)$	»	$x^4 + 2x^2 - 15$
13° $(x^2 - 8)(x^2 - 3)$	»	$x^4 - 11x^2 + 24$
14° $(a^2 - b)(a^2 + 2b)$	»	$a^4 + a^2b - 2b^2$
15° $(x^2 + a)(x^2 + 3a)$	»	$x^4 + 4ax^2 + 3a^2$
16° $(x^2 - 2a)(x^2 - 4a)$	»	$x^4 - 6ax^2 + 8a^2$
17° $(a - 2x)(a + x)$	»	$a^2 - ax - 2x^2$
18° $(a - 3x)(a - x)$	»	$a^2 - 4ax + 3x^2$

19° $(2x + 1)(x - 5)$

Le 1er terme $= 2x^2$; le 2e terme $= (1.1 - 5.2)x = -9x$; le terme indépendant $= (+1)(-5) = -5$. **Rép.** $2x^2 - 9x - 5$.

20° $(3x + 2)(x + 1)$	»	$3x^2 + 5x + 2$
21° $(2x - 1)(x - 3)$	»	$2x^2 - 7x + 3$
22° $(3x - 2)(2x - 1)$	»	$6x^2 - 7x + 2$
23° $(4x + 3)(7x - 2)$	»	$28x^2 + 13x - 6$
24° $(2x^2 - 3)(x^2 - 1)$	»	$2x^4 - 5x^2 + 3$
25° $(2x^2 + 3)(x^2 + 2)$	»	$2x^4 + 7x^2 + 6$

26° $(x^2 + x + 2)(x + 1)$.

Le produit sera du 3e degré. Le 1er terme $= x^2 \times x = x^3$.

Le 2e terme $= x \times x + 1 \times x^2 = 2x^2$; le 3e terme $= 2 \times x + 1 \times x = 3x$;

Le terme indépendant $= 1 \times 2 = 2$. **Rép.** $x^3 + 2x^2 + 3x + 2$

27° $(x^2 - x + 3)(x - 2)$	»	$x^3 - 3x^2 + 5x - 6$
28° $(x^3 + x^2 - x + 2)(x + 3)$	»	$x^4 + 4x^3 + 2x^2 - x + 6$
29° $(x^2 + 3x + 1)(x^2 - 1)$	»	$x^4 + 3x^3 - 3x - 1$
30° $(x^2 + x - 3)(x^2 - x + 1)$	»	$x^4 - 3x^2 + 4x - 3$.

120. *Former le carré, le cube des monômes suivants :*

	CARRÉS	CUBES
1° $2a$	$4a^2$	$8a^3$
2° $-3a$	$9a^2$	$-27a^3$
3° $7a^2b$	$49a^4b^2$	$343a^6b^3$
4° $4ab^3c^2$	$16a^2b^6c^4$	$64a^3b^9c^6$
5° $-4a^3b^2c$	$16a^6b^4c^2$	$-64a^9b^6c^3$
6° $-abx^2y$	$a^2b^2x^4y^2$	$-a^3b^3x^6y^3$
7° $2a^2y^3z^2$	$4a^4y^6z^4$	$8a^6y^9z^6$
8° $-ab^2c^3$	$a^2b^4c^6$	$-a^3b^6c^9$
9° $-(-2a)$	$4a^2$	$8a^3$
10° $-5x^2y^3z$	$25x^4y^6z^2$	$-125x^6y^9z^3$
11° $0{,}2x^2y^2z^2$	$0{,}04x^4y^4z^4$	$0{,}008x^6y^6z^6$
12° $0{,}05x^2y^3z$	$0{,}0025x^4y^6z^2$	$0{,}000125x^6y^9z^3$
13° $-2a^mb^{n+1}c^{n-1}$	$4a^{2m}b^{2n+2}c^{2-n2}$	$-8a^{3m}b^{3n+3}c^{3n-3}$
14° $-4a^{m-1}b^{n+2}c^{m+3}$	$16a^{4m-2}b^{2n+4}c^{2m+6}$	$-64a^{6m-3}b^{3n+6}c^{3m+9}$
15° $5x^{m-1}b^{n-1}$	$25x^{2m-2}b^{2n-2}$	$125x^{3m-3}b^{3n-3}$

121. *Former le carré, le cube des binômes suivants :*

I. — Carrés.

1° $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
2° $(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$
3° $(2a+b)^2 = 4a^2 + 4ab + b^2$
4° $(ax-by)^2 = a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2$
5° $(1-4abc)^2 = 1 - 8abc + 16a^2b^2c^2$
6° $(x^2-3b^2)^2 = x^4 - 6b^2x^2 + 9b^4$
7° $(2ab^2c^3-5)^2 = 4a^2b^4c^6 - 20ab^2c^3 + 25$
8° $(-0{,}3a^2+0{,}2b^2)^2 = 0{,}09a^4 - 0{,}12a^2b^2 + 0{,}04b^4$
9° $(a^m+b^n)^2 = a^{2m} + 2a^mb^n + b^{2n}$
10° $(2a^{3m}-3b^{2n})^2 = 4a^{6m} - 12a^{3m}b^{2n} + 9b^{4n}$
11° $(-ab^{n+1}+a^{m+1}b)^2 = a^2b^{2n+2} - 2a^{m+2}b^{n+2} + a^{2m+2}b^2$
12° $(ax^{m-1}-2by^{n+1})^2 = a^2x^{2m-2} - 4abx^{m-1}y^{n+1} + 4b^2y^{2n+2}$.

II. — Cubes.

1° $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
2° $(x-a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$
3° $(2a+b)^3 = 8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$
4° $(ax-by)^3 = a^3x^3 - 3a^2bx^2y + 3ab^2xy^2 - b^3y^3$
5° $(1-4abc)^3 = 1 - 12abc + 48a^2b^2c^2 - 64a^3b^3c^3$
6° $(x^2-3b^2)^3 = x^6 - 9b^2x^4 + 27b^4x^2 - 27b^6$
7° $(2ab^2c^3-5)^3 = 8a^3b^6c^9 - 60a^2b^4c^6 + 150ab^2c^3 - 125$

8° $(-0{,}3a^2 + 0{,}2b^2)^3 = -0{,}027a^6 + 0{,}054a^4b^2$
$- 0{,}036a^2b^4 + 0{,}008b^6$

9° $(a^m + b^n)^3 = a^{3m} + 3a^{2m}b^n + 3a^mb^{2n} + b^{3n}$

10° $(2a^{3m} - 3b^{2n})^3 = 8a^{9m} - 36a^{6m}b^{2n} + 54a^{3m}b^{4n} - 27b^{6n}$

11° $(-ab^{n+1} + a^{m+1}b)^3 = -a^3b^{3n+3} + 3a^{m+3}b^{2n+3}$
$- 3a^{2m+3}b^{n+3} + a^{3m+3}b^3$

12° $(ax^{m-1} - 2by^{n+1})^3 = a^3x^{3m-3} - 6a^2bx^{2m-2}y^{n+1}$
$+ 12ab^2x^{m-1}y^{2n+2} - 8b^3y^{3n+3}.$

122. *Écrire immédiatement les produits suivants :*

1° $(a + 3)(a - 3)$ **Rép.** $a^2 - 9$
2° $(x - y)(x + y)$ » $x^2 - y^2$
3° $(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$ » $a^4 - b^4$
4° $(-ax + b)(ax + b)$ » $b^2 - a^2x^2$
5° $(-2a - 4b)(2a - 4b)$ » $16b^2 - 4a^2$
6° $(2xy^2 + c^2)(2xy^2 - c^2)$ » $4x^2y^4 - c^4$
7° $(3a^2x^3 + 7b^2y^3)(3a^2x^3 - 7b^2y^3)$ » $9a^4x^6 - 49b^4y^6$

8° $(a + b - c)(a + b + c) = [(a + b) - c][(a + b) + c]$
$= (a + b)^2 - c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - c^2$

9° $(a^2 + b^2 - ab)(a^2 + b^2 + ab) = (a^2 + b^2)^2 - a^2b^2 = a^4 + a^2b^2 + b^4$

10° $(2x - y - 3z)(2x + y + 3z)$
$= 4x^2 - (y + 3z)^2 = 4x^2 - y^2 - 6yz - 9z^2$

11° $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2) = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = x^4 - y^4$

12° $(a^2 - 4a + 4)(2 - a) = (2 - a)^3 = 8 - 12a + 6a^2 - a^3$

13° $(x^2 + 3)(x^4 + 9)(x^2 - 3) = (x^4 - 9)(x^4 + 9) = x^8 - 81$

14° $(a^2 + 4a + 4)(a + 2) = (a + 2)^3 = a^3 + 6a^2 + 12a + 8$

15° $[7(a + b) + 6x][7(a + b) - 6x]$
$= 49(a + b)^2 - 36x^2 = 49a^2 + 98ab + 49b^2 - 36x^2$

16° $[3(a + b) + 5(c - d)][3(a + b) - 5(c - d)]$
$= 9(a + b)^2 - 25(c - d)^2 = 9a^2 + 18ab + 9b^2 - 25c^2 + 50cd - 25d^2.$

123. *Compléter les carrés dont font partie les binômes suivants :*

1° $4x^2 + 4x$ **Rép.** $+ 1$
2° $4a^2b^2 + 9$ » $\pm 12ab$
3° $16a^4 - 8a^2y^2$ » $+ y^4$
4° $9b^4 + 16y^6$ » $\pm 24b^2y^3$
5° $9a^6 - 30a^3b^4$ » $+ 25b^8$
6° $16a^2b^2 + 9a^4b^6$ » $\pm 24a^3b^4$
7° $a^{4m} + 4a^{2m}y^{3n}$ » $+ 4y^{6n}$
8° $4b^{4m} + 9y^{4n}$ » $\pm 12b^{2m}y^{2n}$
9° $16y^4b^2 - 16y^2b^2c$ » $+ 4b^2c^2$
10° $4(x - y)^2 + 81a^2$ » $\pm 36a(x - y)$
11° $16(2a + b)^2 - 40(2a + b)$ » $+ 25$
12° $0{,}04a^2b^2 + 0{,}09a^4c^2$ » $\pm 0{,}12a^3bc.$

124. *Former les carrés des polynômes suivants :*

1° $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
2° $(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$
3° $(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$
4° $(a - c + b + d)^2 = a^2 + c^2 + b^2 + d^2 - 2ac + 2ab + 2ad$
$- 2bc - 2cd + 2bd$
5° $(3x^2 + 4x + 3)^2 = 9x^4 + 24x^3 + 34x^2 + 24x + 9$
6° $(x^2 - 5x + 1)^2 = x^4 - 10x^3 + 27x^2 - 10x + 1$
7° $(x^2 - 2x - 5)^2 = x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 20x + 25$
8° $(a^2 - b^2 + 1)^2 = a^4 + b^4 + 1 - 2a^2b^2 + 2a^2 - 2b^2$
9° $(x^3 - 5x^2 + 2x + 1)^2 = x^6 - 10x^5 + 29x^4 - 18x^3 - 6x^2 + 4x + 1$
10° $(2 - x - x^2 + 3x^3)^2 = 4 - 4x - 3x^2 + 14x^3 - 5x^4 - 6x^5 + 9x^6$
11° $(a - b + c - d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab + 2ac - 2ad$
$- 2bc + 2bd - 2cd$
12° $(2x^{m+1} - 3x^m + 4x^{m-1})^2 = 4x^{2m+2} - 12x^{2m+1} + 25x^{2m}$
$- 24x^{2m-1} + 16x^{2m-2}$.

125. *Former le terme en* x^3 *de chacune des expressions suivantes :*

1° $(x^2 - 3x + 2)(x^2 + x)$
Rép. $(-3x)x^2 + x^2.x = -3x^3 + x^3 = -2x^3$.
2° $(2x^3 - 5x^2 + 2x - 4)^2$
Rép. $2.2x^3(-4) + 2(-5x^2)2x = -16x^3 - 20x^3 = -36x^3$.
3° $(x^3 - 2x^2 + 4x - 8)(x + 2)$
Rép. $(-2x^2)x + 2x^3 = 0$.
4° $(x^2 - 3xy + 2y^2)(5x^2 + 2xy - 7y^2)$
Rép. $(-3xy)5x^2 + x^2.2xy = -15x^3y + 2x^3y = -13x^3y$.
5° $(x + y)^2 (x - y)^2 = (x^2 - y^2)^2$
Rép. Pas de terme en x^3.
6° $(x^2 - ax)^3 - (x^2 + ax)^3$
Rép. $-a^3x^3 - a^3x^3 = -2a^3x^3$.

126. *Effectuer les opérations indiquées :*

1° $(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) = (a^2 + b^2)^2 - a^2b^2 = a^4 + a^2b^2 + b^4$
2° $(x^2 + 2x - 1)(x^2 - 2x + 1) = x^4 - (2x - 1)^2$
$= x^4 - 4x^2 + 4x - 1$
3° $(a + 2b + c - d)(a - 2b + c + d) = (a + c)^2 - (2b - d)^2$
$= a^2 + 2ac + c^2 - 4b^2 + 4bd - d^2$
4° $(x^3 + x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + x - 1) = x^6 + x^4 - x^2 - 1$
5° $(a^2 + 2ab + b^2 - c^2)(2ab + b^2 + c^2 - a^2)$
$- (a^2 - 2ab + b^2 - c^2)(b^2 - a^2 + c^2 - 2ab)$
$= (2ab + b^2)^2 - (a^2 - c^2)^2 - (b^2 - 2ab)^2 + (a^2 - c^2)^2 = 8ab^3$
6° $(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)$
$= [(a + b)^2 - c^2][c^2 - (a - b)^2] = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$
$= 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$

7° $(a + 2)(a^2 - 2a + 4) - (a - 2)(a^2 + 2a + 4)$
$= (a^3 + 8) - (a^3 - 8) = 16$

8° $(a + b)(a^2 + ab + b^2)(a - b)(a^2 - ab + b^2) = a^6 - b^6$

9° $(x + y)^3 - (x - y)^3 - (x^3 - y^3) - (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
$= 6x^2y + 2y^3 - 2(x^3 - y^3) = 4y^3 - 2x^3 + 6x^2y$

10° $(a + b + c)^2 - [(a - b - c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) + 4a(b + c)]$
$= a^2 + b^2 + c^2.$

11° $(a + b + c + d)^2 + (a - b - c + d)^2 + (a - b + c - d)^2$
$+ (a + b - c - d)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$

12° $(a + b)^4 + (a^4 + b^4) - 2(a^2 + b^2 + ab)^2 = 0$

13° $a(b + c)(b^2 + c^2 - a^2) + b(c + a)(c^2 + a^2 - b^2)$
$+ c(a + b)(a^2 + b^2 - c^2) = 2abc(a + b + c)$

14° $[(x + 1)y - (x - 1)]^2 - [(y + 1)x - (y - 1)]^2$
$= 4(xy^2 - x^2y + y - x)$

15° $[(1 + x)^3 + (1 + x)^2y + (1 + x)y^2 + y^3]$
$- [3x(x + 1) + y(y + 1) + 2xy + 1]$
$= x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$

16° $(8a^3 - x^6)(8a^3 + x^6) - (4a^2 - x^4)[2a(2a + x^2) + x^4]$
$[4a^2 - x^2(2a - x^2)] = 0.$

ÉQUATIONS A RÉSOUDRE.

127. 1° $3(5x - 8) = 4(5x - 7) - 1$ **Rép.** $x = 1$
2° $10(x + 3) - 4 = 5(3 - x) - 4$ » $x = -1$
3° $0,4(3x + 1) = 0,5(2,5x + 0,5)$ » $x = 3$
4° $2(0,3x + 11) = 0,7(x + 26)$ » $x = 38$
5° $0,4(5x - 1) = 0,6(2,5x + 2)$ » $x = 3,2$
6° $(7 - x)(4 - x) = (1 - x)(8 - x)$ » $x = 10$
7° $(x - 3)(x - 4) = (x + 4)(x - 7)$ » $x = 10$
8° $(5 - x)(x + 4) = 5 - x^2$ » $x = -15$
9° $(x - 1)(5x + 2) = 5(x^2 + 2)$ » $x = -4$
10° $(x + 5)^2 - (x - 3)^2 = 32$ » $x = 1$
11° $x^2 + 30 = (x + 1)^2 - 59$ » $x = 44$
12° $(x + 2)(x + 3) = x^2 + 366$ » $x = 72$
13° $(x + 5)^2 - (x - 5)^2 = 500$ » $x = 25$
14° $x^2 - (50 - x)^2 = 100$ » $x = 26$
15° $4[3x - 4(x - 2)] = x - 3$ » $x = 7$
16° $4x(x - 2) + 1 = (2x - 1)^2$ » $x = 0$
17° $2(x + 1)^2 = [6 - 2(2 - x)]x + 6$ » $x = 2$
18° $12x - [4x - (x + 108)] = 36$ » $x = -8$
19° $3[x - 2(x - 3)] = 2[x - 2(x - 2,5)]$ » $x = 8$

20° $2\{3x-2[x-5(x-1)+3]-5\}=x$	**Rép.** $x = 2$
21° $5\{5[5(5x-4)-4]\}-4=21$	» $x = 1$
22° $3\{3[3(3x-2)-2]-2\}-2=1$	» $x = 1$

PROBLÈMES A RÉSOUDRE.

128. A, B *et* C *doivent se partager* 185 *fr. de manière que* B *ait* 10 *fr. de plus que* C, *et* A 15 *fr. de plus que* B. *Chercher la part de chacun.*

Soit x la part de C. B aura $x+10$ et A aura $x+10+15=x+25$. On a l'équation

$$x+(x+10)+(x+25)=185; \text{ d'où } x=50.$$

Rép. C aura 50 fr., B, 60 fr. et A, 75 fr.

129. *Trois marchands ont gagné ensemble* 425 *fr.; le* 1er *a eu* 12 *fr. de plus que le* 2e, *et celui-ci* 16 *fr. de plus que le* 3e. *Quel est le gain de chacun?*

Soit x le gain du 3e. On a l'équation

$$x+(x+16)+(x+28)=425; \quad \text{d'où} \quad x=127.$$

Rép. Le 3e a eu 127 fr.; le 2e 143 fr. et le 1er 155 fr.

130. *Partager* 1600 *fr. entre trois personnes de manière que la* 1re *ait* 200 *fr. de plus que la* 2e, *et celle-ci* 100 *fr. de plus que la* 3e.

Soit x la part de la 3e. On a l'équation

$$x+(x+100)+(x+300)=1600; \quad x=400.$$

Rép. La part de la 3e = 400 fr.; celle de la 2e = 500 fr. et celle de la 1re = 700 fr.

131. *Partager* 3123 fr. *entre deux personnes de manière que la part de la* 2e *surpasse de* 100 *fr. le triple de celle de la* 1re.

Soit x la part de la 1re. Celle de la 2e $= 3x+100$. On a l'équation

$$x+(3x+100)=3123; \quad \text{d'où} \quad x=755{,}75.$$

Rép. La part de la 1re = 755,75 fr.; celle de la 2e = 2367,25 fr.

132. *On a donné* 60 *noix à deux enfants; si le* 1er *en donnait* 18 *au* 2e, *celui-ci en aurait* 5 *fois autant que l'autre. Combien chaque enfant a-t-il reçu de noix?*

Soit x la part du 1er; celle du 2e est $60-x$.

Si le 1er donnait 18 noix au 2e, il lui en resterait $x-18$ et le 2e en aurait $60-x+18$ ou $78-x$. On a donc l'équation

$$5(x-18)=78-x; \quad \text{d'où} \quad x=28.$$

Rép. Le 1er a reçu 28 noix et le 2e, 32 noix.

133. *On a partagé* 1650 fr. *entre* 125 *personnes; chaque homme a reçu* 15 *fr. et chaque femme* 10 *fr. Combien y avait-il d'hommes et de femmes?*

Soit x le nombre des hommes; celui des femmes $= 125-x$.

Les hommes ont reçu $15x$ et les femmes $10(125 - x)$.
On a l'équation

$$15x + 10(125 - x) = 1650; \quad \text{d'où} \quad x = 80.$$

Rép. Il y avait 80 hommes et 45 femmes.

134. *Un entrepreneur donne* 1520 *fr. à* 25 *ouvriers divisés en deux groupes; ceux du* 1er *groupe reçoivent chacun* 80 *fr. et ceux du* 2^{e}, 50 *fr. Combien y a-t-il d'ouvriers dans chaque groupe?*

Soit x le nombre des ouvriers du 1er groupe; celui du 2^{e} groupe $= 25 - x$. On a l'équation

$$80x + 50(25 - x) = 1520; \quad \text{d'où} \quad x = 9.$$

Rép. Il y a 9 ouvriers dans le 1er groupe et 16 dans le second.

135. *En vendant un objet* 5,70 *fr. on gagne* 4 *fois autant qu'on aurait perdu en le vendant* 4,20 *fr. Quel est le prix de cet objet?*

Soit x le prix de cet objet.
En le vendant 5,70 fr., on gagnerait $5{,}70 - x$.
En le vendant 4,20 fr., on perdrait $x - 4{,}20$.
On a l'équation

$$5{,}70 - x = 4(x - 4{,}20); \quad \text{d'où} \quad x = 4{,}50.$$

Rép. Cet objet coûte 4,50 fr.

136. *Il y avait dans une corbeille* 3 *fois autant de poires que de pommes; on ôte* 8 *fruits de chaque sorte et le nombre des poires est maintenant* 5 *fois celui des pommes. Combien y avait-il de pommes et de poires?*

Soit x le nombre des pommes; celui des poires est $3x$. On a l'équation

$$5(x - 8) = 3x - 8; \quad \text{d'où} \quad x = 16.$$

Rép. Il y avait 16 pommes et 48 poires.

137. *Deux bergers ont ensemble* 332 *moutons. Le nombre des moutons du* 1er *surpasse de* 8 *le triple du nombre des moutons du second. Combien de moutons ont-ils chacun?*

Soit x le nombre des moutons du 1er; celui du second sera $332 - x$. On a l'équation

$$x - 8 = 3(332 - x); \quad \text{d'où} \quad x = 251.$$

Rép. Le 1er a 251 moutons et le second en a 81.

138. *Deux voyageurs* A *et* B *se mettent en route, le* 1er *avec* 100 *fr. et l'autre avec* 48 *fr.* A *dépense* 2 *fois autant que* B *et possède alors* 3 *fois autant d'argent que* B. *Calculer la dépense de chaque voyageur.*

Soit x la dépense de B; celle de A sera $2x$. Il leur reste respectivement $48 - x$ et $100 - 2x$. On a l'équation

$$3(48 - x) = 100 - 2x; \quad \text{d'où} \quad x = 44.$$

Rép. B a dépensé 44 fr. et A, 88 fr.

139. *Le premier facteur d'un produit de deux nombres est* 52. *Si l'on augmente chaque facteur de* 7, *le nouveau produit surpasse de* 581 *le produit primitif. Trouver le second facteur.*

Soit x le second facteur; donc le produit primitif $= 52x$. Le nouveau produit a pour facteurs 59 et $x + 7$. On a l'équation

$$59(x + 7) - 581 = 52x; \quad \text{d'où} \quad x = 24.$$

Rép. Le second facteur est 24.

140. *Partager* 20 *en deux parties telles que la somme du triple de l'une et du quintuple de l'autre soit* 84.

Soit x l'une des parties; l'autre sera $20 - x$. On a l'équation

$$3x + 5(20 - x) = 84; \quad \text{d'où} \quad x = 8.$$

Rép. Les deux parties sont 8 et 12.

141. *Un père a* 25 *ans de plus que son fils. Dans* 20 *ans l'âge du père sera le double de celui du fils. Quels sont les deux âges?*

Soit x l'âge du fils; celui du père est $x + 25$. Dans 20 ans, leurs âges respectifs seront $x + 20$ et $x + 45$. On a l'équation

$$x + 45 = 2(x + 20); \quad \text{d'où } x = 5.$$

Rép. Le fils a 5 ans et le père a 30 ans.

142. *Un père a* 70 *ans; son fils* 40. *Combien y a-t-il d'années que l'âge du père était le triple de celui du fils?*

Soit x ce nombre d'années. A cette époque, leurs âges respectifs étaient $70 - x$ et $40 - x$. On a l'équation

$$70 - x = 3(40 - x); \quad \text{d'où } x = 25.$$

Rép. 25 ans.

143. *On a deux lingots d'or aux titres de* 0,775 *et* 0,950. *Combien de grammes doit-on prendre de chacun pour former* 25 *gr. d'alliage au titre de* 0,900?

Soit x le nombre de grammes à prendre au titre de 0,775.

On prendra $25 - x$ grammes au titre de 0,950.

$0{,}775x$ représente la quantité de fin contenue dans les x grammes.

$0{,}950(25 - x)$ représente la quantité de fin contenue dans les $25 - x$ grammes.

$0{,}900 \times 25$ représente la quantité de fin contenue dans l'alliage.

On a l'équation

$$0{,}775x + 0{,}950(25 - x) = 0{,}900 \times 25; \quad \text{d'où } x = 7\frac{1}{7}.$$

Rép. Il faut prendre $7\frac{1}{7}$ gr. au titre 0,775 et $17\frac{6}{7}$ gr. au titre 0,950.

144. *Trois nombres consécutifs sont tels que le double du plus petit, augmenté du triple du plus grand, dépasse de* 11 *le quadruple du moyen. Quels sont-ils?*

Soient $x - 1$, x et $x + 1$ ces trois nombres. On a l'équation

$$2(x - 1) + 3(x + 1) - 11 = 4x; \quad \text{d'où } x = 10.$$

Rép. Les trois nombres sont 9, 10 et 11.

145. *Un nombre est formé de deux chiffres dont la somme est* 12. *Si on ajoute* 21 *au double de ce nombre, on trouve le triple du nombre renversé. Quel est ce nombre?*

Soit x le chiffre des dizaines; $12 - x$ représente celui des unités.

Le nombre s'écrit $10x + 12 - x$. Le nombre renversé peut s'écrire $(12 - x)10 + x$. On a l'équation

$$2(10x + 12 - x) + 21 = 3[(12 - x)10 + x].$$

Par suite, $x = 7$.

Rép. Le nombre est 75.

146. *On a un capital de* 1200 *fr. On en place une partie à* 5 % *et le reste à* 4 %. *L'intérêt annuel est* 52,50 *fr. Trouver les deux parties.*

Soit x la partie placée à 5 %; $1200 - x$ sera la partie placée à 4 %. On a l'équation

$$\frac{5x}{100} + \frac{4(1200 - x)}{100} = 52{,}50; \quad \text{d'où } x = 450.$$

Rép. 450 fr. à 5 % et 750 fr. à 4 %.

§ III. — DIVISION ALGÉBRIQUE

Effectuer les divisions suivantes :

147. 1° $6xy : 3y$ **Rép.** $2x$

2° $-12a^4b : 4a^2b$ » $-3a^2$

3° $6b^3x^3 : 3b^2x$ » $2bx^2$

4° $\frac{3}{2}x^2y^4 : \left(-\frac{5}{6}xy\right)$ » $-\frac{9}{5}xy^3$

5° $-\frac{1}{3}a^4b^5c : \frac{7}{12}bc$ » $-\frac{4}{7}a^4b^4$

6° $-8a^4b^4c^2 : 4a^3b^2c^2$ » $-2ab^2$

7° $4a^5b^2 : 3a^3b^2$ » $\frac{4}{3}a^2$

8° $-6x^3y^2z : 5xyz$ » $-\frac{6}{5}x^2y$

9° $0{,}4b^5c^3 : \frac{1}{25}b^2c^2$ » $10b^3c$

10° $210b^7c^8 : \frac{70}{71}b^4c^5$	**Rép.** $213b^3c^3$
11° $x^4y^4z^4 : 2x^3y^2z^4$	» $0{,}5xy^2$
12° $0{,}5ab^4 : (-\ 0{,}4b^3)$	» $-\ \frac{5}{4}ab$
13° $0{,}25a^4b^5c : 0{,}05a^3b^3$	» $5ab^2c$
14° $-\ \frac{5}{6}a^4b^5c^3 : (-\ 0{,}25a^4b)$	» $\frac{10}{3}b^4c^3$
15° $0{,}35a^5b^4 : \left(-\ \frac{7}{8}a^4b\right)$	» $-\ \frac{2}{5}ab^3.$

148. 1° $(25b^7 - 20b^6c^3 + 5a^6b^4) : 5b^3$
Rép. $5b^4 - 4b^3c^3 + a^6b.$
2° $(-\ bcx^3 - 2b^2cx^2 - 3bc^2x) : (-\ bcx)$
Rép. $x^2 + 2bx + 3c.$
3° $(6a^4b^3 + 12a^3b^4 - 6a^2b^5) : 3a^2b^3$
Rép. $2a^2 + 4ab - 2b^2.$
4° $(-\ 4x^3y^2z^3 + 6x^2y^5z^3 - 8xy^2z^6) : (-\ 2xy^2z^3)$
Rép. $2x^2 - 3xy^3 + 4z^3.$
5° $(-\ 12x^6y^4 + 12x^4y^5 - 18x^3y^6) : (-\ 6x^3y^3)$
Rép. $2x^3y - 2xy^2 + 3y^3.$
6° $(-\ 8a^4b^3c^2 + 6a^5b^4c^3 - 8ab^2c^3) : (-\ 2ab^2c)$
Rép. $4a^3bc - 3a^4b^2c^2 + 4c^2.$
7° $(a^4bx^4y - 3a^3b^2x^3y^2 - 3a^2b^3x^2y^3 + ab^4xy^4) : abxy$
Rép. $a^3x^3 - 3a^2bx^2y - 3ab^2xy^2 + b^3y^3.$
8° $\left(6a^5b^2 + \frac{2}{9}a^4b^3 - \frac{6}{7}a^3b^4\right) : \frac{2}{3}a^3b$
Rép. $9a^2b + \frac{1}{3}ab^2 - \frac{9}{7}b^3.$

149. 1° $\left(-\ \frac{4}{5}a^5 + \frac{7}{8}a^6 - \frac{3}{4}a^7 - \frac{1}{2}a^4\right) : \left(-\ \frac{1}{2}a^4\right)$
Rép. $\frac{8}{5}a - \frac{7}{4}a^2 + \frac{3}{2}a^3 + 1.$
2° $[x^6(a^2 - b^2) - 2x^4(a^2 - b^2)^2 + 4x^2(a^2 - b^2)^4] : x^2(a^2 - b^2)$
Rép. $x^4 - 2x^2(a^2 - b^2) + 4(a^2 - b^2)^3.$
3° $(15x^m - 5x^{2m} + 10x^{3m+1} - 20x^{4m-3}) : (-\ 5x^{m-1})$
Rép. $-\ 3x + x^{m+1} - 2x^{2m+2} + 4x^{3m-2}.$
4° $(115x^{3m-1} - 46x^{3m} + 23x^{3m+1} - x^{3m+2}) : 23x^{3m-n}$
Rép. $5x^{n-1} - 2x^n + x^{n+1} - \frac{1}{23}x^{n+2}.$

5° $(24a^mb^n - 12a^{2m}b^{2n} + 36a^{m+3}b^{n+4}) : 12a^mb^n$
Rép. $2 - a^mb^n + 3a^3b^4$.

6° $\left(\frac{1}{4}a^mb^n + 0{,}2a^{2m}b^{n+1} - \frac{3}{4}a^{3m}b^{n+2} + \frac{1}{2}a^{4m}b^{n+3}\right) : \left(-\frac{1}{2}a^mb^n\right)$
Rép. $-\frac{1}{2} - \frac{2}{5}a^mb + \frac{3}{2}a^{2m}b^2 - a^{3m}b^3$.

150. *Mettre en évidence les facteurs communs dans les expressions suivantes :*

1° $ab + b = b(a + 1)$
2° $ma + ap = a(m + p)$
3° $a^3x^2 - a^2x^3 = a^2x^2(a - x)$
4° $4ac - 2ab = 2a(2c - b)$
5° $6a^2b + 4ab = 2ab(3a + 2)$
6° $24b^3c^5 - 36bc^2 = 12bc^2(2b^2c^3 - 3)$
7° $3a^3b^4 - 12a^2b^3 = 3a^2b^3(ab - 4)$
8° $15a^7b^2 - 10a^5b^3 = 5a^5b^2(3a^2 - 2b)$
9° $3a^2bc^2 - abc^3 = abc^2(3a - c)$
10° $y(b - a) - x(b - a) = (b - a)(y - x)$
11° $a(x^2 + y^2) - b(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2)(a - b)$
12° $2bc^5 - 6b^2c^4 + 6b^3c^3 - 2b^4c^2 = 2bc^2(c^3 - 3bc^2 + 3b^2c - b^3)$
$= 2bc^2(c - b)^3$
13° $3ab(bc)^3 - ab(bc)^2 = ab^3c^2(3bc - 1)$
14° $2a^3b^2 + 8a^3b^3 - 6a^4b = 2a^3b(b + 4b^2 - 3a)$
15° $3x^3y^2z - 9x^2y^3z^2 + 18x^4y^2z^2 = 3x^2y^2z(x - 3yz + 6x^2z)$
16° $a(b - c) - b(b - c) + c(b - c) = (b - c)(a - b + c)$
17° $4x^ny^m + 2x^{n+2}y^{m+2} = 2x^ny^m(2 + x^2y^2)$
18° $5x^{n-1}y^{m+1} + 10x^ny^m + 25x^{n+1}y^{m-1}$
$= 5x^{n-1}y^{m-1}(y^2 + 2xy + 5x^2)$
19° $3x^{n+2}y^{m+2} + 6x^ny^m - 18x^{n-2}y^{m-2}$
$= 3x^{n-2}y^{m-2}(x^4y^4 + 2x^2y^2 - 6)$
20° $2a^{m+n}b^{m-n} + 4a^mb^m + 8a^{m-n}b^{m+n}$
$= 2a^{m-n}b^{m-n}(a^{2n} + 2a^nb^n + 4b^{2n})$.

151. *Ordonner par rapport à* x, *les polynômes suivants*

1° $a^2x^3 - b^2x^3 + ab^2x^2 - a^2b^2x + a^3b^2 - a^2b^3$
Rép. $(a^2 - b^2)x^3 + ab^2x^2 - a^2b^2x + a^2b^2(a - b)$.

2° $a^2x^2 - 2c^2dx + 2abx^2 + c^3x + b^2x^2 + cd^2x - a^2b^2$
Rép. $(a + b)^2x^2 + c(c - d)^2x - a^2b^2$.

3° $a^3x^3 - 3a^2bx^3 + 3ab^2x^3 - b^3x^3 + m^2x^2 + 2mnx^2 + n^2x^2$
Rép. $(a - b)^3x^3 + (m + n)^2x^2$.

4° $x^3 + a^2x^2 - 4ax^2 + 4x^2 - a^3$
Rép. $x^3 + (a - 2)^2x^2 - a^3$.

5° $c^2x^2 - ac^2x + a^2cx + a^2c^2 - a^3c - 4a^4$
Rép. $c^2x^2 - ac(c - a)x + a^2(c^2 - ac - 4a^2)$.

6° $ax^4 - bx^4 - ax^3 + ax^2 + 2bx^3 - ax - 3bx^2 + 4bx + a - 5b$
Rép. $(a - b)x^4 - (a - 2b)x^3 + (a - 3b)x^2$
$- (a - 4b)x + a - 5b.$

152. *Les divisions suivantes se font exactement. Dire quel est le degré du quotient par rapport à la lettre ordonnatrice, son premier et son dernier terme; le nombre maximum de ses termes; puis chercher le quotient.*

1° $(35x^3 + 47x^2 + 13x + 1) : (5x + 1).$

Le dividende est du 3ᵉ degré en x et le diviseur du premier. Le quotient sera donc du 2ᵉ degré en x et le nombre maximum de ses termes sera 3.

Le premier terme du quotient est $35x^3 : 5x = 7x^2$.

Le dernier terme est $1 : 1 = 1$.

En effectuant la division, on trouve, de fait, le quotient

$$7x^2 + 8x + 1.$$

2° $(6x^3 - 17x^2 + 14x - 3) : (2x - 3)$
Rép. $3x^2 - 4x + 1.$

3° $(a^7 - 3a^6 + a^5 - 4a^2 + 12a - 4) : (a^5 - 4)$
Rép. $a^2 - 3a + 1.$

4° $(10a^3b^2 + a^5 - 5a^4b - 10a^2b^3 - b^5 + 5ab^4) : (a - b)$
Ordonner le dividende par rapport aux puissances décroissantes de a.
Rép. $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4.$

5° $(3a^4 - 7a^3 - 18a^2 + 28a + 24) : (3a^2 + 8a + 4)$
Rép. $a^2 - 5a + 6.$

6° $(14a^4 - 27a^3b - 3ab^3 + 21a^2b^2 - 2b^4) : (2a^2 - 3ab + 2b^2)$
Rép. $7a^2 - 3ab - b^2.$

7° $(- 25a^3x - 2a^2x^2 + 12a^4 - 10x^4 + 7ax^3) : (4a^2 - 3ax + 2x^2)$
Rép. $3a^2 - 4ax - 5x^2.$

8° $(8a^5 - 17a^3b^2 - 22a^4b - 8b^5 + 48a^2b^3 + 26ab^4)$
$: (2a^2 - 3ab - 4b^2)$
Rép. $4a^3 - 5a^2b - 8ab^2 + 2b^3.$

9° $(9x^8 - 130x^6 + 497x^4 - 520x^2 + 144)$
$: (x^3 - 2x^2 - 9x + 18)$
Rép. $9x^5 + 18x^4 - 13x^3 - 26x^2 + 4x + 8.$

10° $(3a^7 - 11a^6 + 7a^5 + 11a^4 - 2a^3 + a^2 - 28a + 15)$
$: (3a^3 - 2a^2 - 5a + 3)$
Rép. $a^4 - 3a^3 + 2a^2 - a + 5.$

11° $(a^5 - a^2b^3) : (a - b) = a^4 + a^3b + a^2b^2.$

12° $(a^5x^5 + y^5) : (ax + y) = a^4x^4 - a^3x^3y + a^2x^2y^2 - axy^3 + y^4.$

13° $(a^8 + a^4 + 1) : (a^2 - a + 1) = a^6 + a^5 - a^3 + a + 1.$

14° $(x^6 - 1) : (x^3 + 2x^2 + 2x + 1) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1.$

153. *Les divisions suivantes ne se font pas exactement. Dire quel est le degré maximum du reste par rapport à la lettre ordonnatrice; puis effectuer la division.*

1o $(6x^5 + 5x^4 - 25x^3 + 31x^2 - 12x + 5) : (2x^2 - 3x + 2)$

Le diviseur étant du 2e degré, le reste de la division sera au plus du 1er degré.

Le quotient $= 3x^3 + 7x^2 - 5x + 1$; le reste $= x + 3$.

2o $(120x^4 + 154x^3 + 71x^2 + 14x + 8) : (6x^2 + 5x + 1)$

Le quotient $= 20x^2 + 9x + 1$; le reste $= 7$.

3o $(a^7 - 4a^6 + 2a^5 + a^4 - 3a^2 + 2a - 6) : (a^5 - 3)$

Le quotient $= a^2 - 4a + 2$; le reste $= a^4 - 10a$.

4o $(a^4 - a^3b - a^2b^2 - ab^3 - b^4) : (a - 2b)$

Le quotient $= a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$; le reste $= b^4$.

5o $(a^8 - 2a^5 + a^4 + 2a^3 + 1) : (a^6 + a^5 - a^3 + a + 1)$

Le quotient $= a^2 - a + 1$; le reste $= -2a^5 + 2a^3$.

6o $(3x^6 + 27x^5 - 9x^4 - 68x^3 + 36x^2 + 10x + 70)$
$: (3x^5 - 8x^3 + 4x^2 + 8)$

Le quotient $= x + 9$; le reste $= -x^4 + 2x - 2$.

7o $(24a^5 + 16a^4b - 12a^3b^2 + 4a^2b^3 + 10ab^4 + 4b^5)$
$: (2a^2 - 2ab + b^2)$

Le quotient $= 12a^3 + 20a^2b + 8ab^2$; le reste $= 2ab^4 + 4b^5$.

8o $(16x^8 - 32ax^6 + 20a^2x^4 - 10a^3x^2 + 2a^4)$
$: (8x^6 - 12ax^4 + 6a^2x^2 - a^3)$

Le quotient $= 2x^2 - a$; le reste $= -4a^2x^4 - 2a^3x^2 + a^4$.

154. *Effectuer les divisions suivantes :*

1o $[3x^2 - (3a + b - 3)x - 3a - b] : (x + 1)$

Rép. $3x - 3a - b$.

2o $[2x^2 + x(4a - b) + 2a^2 - ab] : (2x + 2a - b)$

Rép. $x + a$.

3o $(6a^{4m} - a^{3m} - 82a^{2m} + 81a^m + 36) : (2a^m - 3)$

Rép. $3a^{3m} + 4a^{2m} - 35a^m - 12$.

4o $(4a^{2m+4} + 6a^{2m+3} - a^{2m+2} + 5a^{2m+1} - 2a^{2m}) : (a^{m+1} + 2a^m)$

Rép. $4a^{m+3} - 2a^{m+2} + 3a^{m+1} - a^m$.

155. *Effectuer les divisions suivantes et continuer l'opération jusqu'au sixième terme du quotient.*

1o $1 : (1 + x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots$

2o $x : (1 - x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \ldots$

3o $x : (1 - x^2) = x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + x^{11} + \ldots$

4o $(1 + 2x) : (1 - 3x)$
$= 1 + 5x + 15x^2 + 45x^3 + 135x^4 + 405x^5 + \ldots$

§ IV. — PROPRIÉTÉS DES POLYNOMES ENTIERS EN x.

Déterminer le reste et écrire le quotient des divisions suivantes :

156. 1° $(x^3 - 4x^2 + 4x - 1) : (x - 1)$
Rép. $R = 0;\quad Q = x^2 - 3x + 1.$
2° $(x^3 - 7x + 6) : (x - 1)$
Rép. $R = 0;\quad Q = x^2 + x - 6.$
3° $(2a^3 + 7a^2 - 6a - 5) : (a + 1)$
Rép. $R = 6;\quad Q = 2a^2 + 5a - 11.$
4° $(x^4 - 7x^2 - x + 6) : (x + 3)$
Rép. $R = 27;\quad Q = x^3 - 3x^2 + 2x - 7.$
5° $(x^3 - 40x - 63) : (x - 7)$
Rép. $R = 0;\quad Q = x^2 + 7x + 9.$
6° $(a^4 + 6a^2x^2 - 4ax^3 - 4a^3x + x^4) : (a - x)$
Rép. $R = 0;\quad Q = a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3.$
7° $(2x^6 - 3x^5 - 9x^4 - 5x^3 + 12x^2 + 4x - 40) : (x + 2)$
Rép. $R = 120;\quad Q = 2x^5 - 7x^4 + 5x^3 - 15x^2 + 42x - 80.$
8° $(x^5 - 10x^4y + 40x^3y^2 - 80x^2y^3 + 80xy^4 + 68y^5) : (x - 2y)$
Rép. $R = 100y^5;\quad Q = x^4 - 8x^3y + 24x^2y^2 - 32xy^3 + 16y^4.$

157. 1° $(6a^4 + a^2 - 15) : \left(a^2 - \frac{3}{2}\right)$
Rép. $R = 0;\quad Q = 6a^2 + 10.$
2° $(2x^6 + 7x^4 + 7x^2 + 2) : (x^2 + 1)$
Rép. $R = 0;\quad Q = 2x^4 + 5x^2 + 2.$
3° $(a^8 + 8a^6 + 24a^4 + 32a^2 + 16) : (a^2 + 2)$
Rép. $R = 0;\quad Q = a^6 + 6a^4 + 12a^2 + 8.$
4° $(3x^5y^5 + 2x^4y^4 - 4x^3y^3 + 4x^2y^2 + 5xy) : (xy + 1)$
Rép. $R = 2;\quad Q = 3x^4y^4 - x^3y^3 - 3x^2y^2 + 7xy - 2.$
5° $(8a^3 + 16a^2 - 9) : (2a - 1)$
Rép. $R = -4;\quad Q = 4a^2 + 10a + 5.$
6° $(8x^3 - 8x - 3) : (2x + 1)$
Rép. $R = 0;\quad Q = 4x^2 - 2x - 3.$
7° $[x^3 + (a - 4)x^2 + 3x + 3a^2 - 3a] : (x + a - 1)$
Rép. $R = 0;\quad Q = x^2 - 3x + 3a.$
8° $[x^3 + (1 - y)x^2 - 2x + y^2 - 2y] : (x - y + 2)$
Rép. $R = 0;\quad Q = x^2 - x - y.$

158. *Trouver les quotients des divisions suivantes :*
1° $(x^3 - 3x^2 + 4) : (x - 2)(x + 1)$
Rép. $x - 2.$

2° $(4x^3 + 4x^2 - 5x - 3) : (x - 1)(2x + 1)$
Rép. $2x + 3$.
3° $(x^4 - 5x^2 + 4) : (x - 1)(x + 2)$
Rép. $x^2 - x - 2$.
4° $(x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8) : (x - 1)(x - 2)$
Rép. $x^2 - 4x + 4$.
5° $(5x^4 + x^3 - 4x^2 - x - 1) : (x + 1)(x - 1)$
Rép. $5x^2 + x + 1$.
6° $(9x^4 + 9x^3 - 7x^2 - 9x - 2) : (x + 1)(3x + 1)$
Rép. $3x^2 - x - 2$.
7° $(x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12)$
$: (x - 1)(x - 2)(x + 1)$
Rép. $x^2 + 5x + 6$.

159. *Écrire immédiatement les quotients suivants :*

1° $(x^6 - 1) : (x - 1) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
2° $(x^6 - 1) : (x + 1) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$
3° $(x^6 - 1) : (x^2 - 1) = x^4 + x^2 + 1$
4° $(x^6 + y^6) : (x^2 + y^2) = x^4 - x^2y^2 + y^4$
5° $(64x^6 - 1) : (2x + 1) = 32x^5 - 16x^4 + 8x^3 - 4x^2 + 2x - 1$
6° $(x^5 + y^5) : (x + y) = x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4$
7° $(x^7 - y^7) : (x - y) = x^6 + x^5y + x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + y^6$
8° $(x^8 - y^8) : (x - y)$
$= x^7 + x^6y + x^5y^2 + x^4y^3 + x^3y^4 + x^2y^5 + xy^6 + y^7$
9° $(x^8 - y^8) : (x^2 + y^2) = x^6 - x^4y^2 + x^2y^4 - y^6$
10° $(1 - x^7y^7) : (1 - xy)$
$= 1 + xy + x^2y^2 + x^3y^3 + x^4y^4 + x^5y^5 + x^6y^6$
11° $(x^8 - y^8) : (x^4 - y^4) = x^4 + y^4$
12° $(x^7y^7 + 1) : (xy + 1)$
$= x^6y^6 - x^5y^5 + x^4y^4 - x^3y^3 + x^2y^2 - xy + 1$
13° $(x^7 + 2187) : (x + 3) = (x^7 + 3^7) : (x + 3)$
Rép. $x^6 - 3x^5 + 9x^4 - 27x^3 + 81x^2 - 243x + 729$
14° $(32x^5 + 243) : (2x + 3) = [(2x)^5 + 3^5] : (2x + 3)$
$= (2x)^4 - 3(2x)^3 + 9(2x)^2 - 27(2x) + 81$
Rép. $16x^4 - 24x^3 + 36x^2 - 54x + 81$
15° $(a^9 + 1) : (a^3 + 1) = [(a^3)^3 + 1^3] : (a^3 + 1)$
Rép. $(a^3)^2 - a^3 + 1 = a^6 - a^3 + 1$.

160. *Quelles divisions fournissent les quotients suivants :*

1° $a + b$	**Rép.**	$(a^2 - b^2) : (a - b)$
2° $a - y$	»	$(a^2 - y^2) : (a + y)$
3° $x^2 - xy + y^2$	»	$(x^3 + y^3) : (x + y)$
4° $1 - x + x^2$	»	$(1 + x^3) : (1 + x)$
5° $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$	»	$(a^4 - b^4) : (a - b)$

6° $a^3b^3 + a^2b^2xy + abx^2y^2 + x^3y^3$ **Rép.** $(a^4b^4 - x^4y^4) : (ab - xy)$

7° $x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5$
Rép. $(x^6 - y^6) : (x - y)$.

8° $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6$
Rép. $(1 + x^7) : (1 + x)$.

9° $8 - 4x + 2x^2 - x^3$
Rép. $(16 - x^4) : (2 + x)$

10° $27 + 9y + 3y^2 + y^3$
Rép. $(81 - y^4) : (3 - y)$.

11° $125x^3 + 25x^2y + 5xy^2 + y^3$
Rép. $(625x^4 - y^4) : (5x - y)$.

12° $1 - ay + a^2y^2 - a^3y^3 + a^4y^4$
Rép. $(1 + a^5y^5) : (1 + ay)$.

13° $x^4 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{9} + \frac{x}{27} + \frac{1}{81}$

Rép. $\left(x^5 - \frac{1}{243}\right) : \left(x - \frac{1}{3}\right)$

14° $a^{12} + a^8b^4 + a^4b^8 + b^{12}$
Rép. $(a^{16} - b^{16}) : (a^4 - b^4)$.

15° $x^7 - x^6y + x^5y^2 - x^4y^3 + x^3y^4 - x^2y^5 + xy^6 - y^7$
Rép. $(x^8 - y^8) : (x + y)$.

16° $a^8 - a^7b + a^6b^2 - a^5b^3 + a^4b^4 - a^3b^5 + a^2b^6 - ab^7 + b^8$
Rép. $(a^9 + b^9) : (a + b)$.

161. *Déterminer les coefficients littéraux de manière que les divisions suivantes s'effectuent sans reste; écrire ensuite le quotient.*

1° $(x^2 + ax + 12) : (x - 3)$.

Le dividende doit s'annuler pour $x = 3$; ce qui exige

$$9 + 3a + 12 = 0 \quad \text{ou} \quad a = -7.$$

Le quotient de la division $(x^2 - 7x + 12) : (x - 3)$ est $x - 4$.

Autre solution. — Le quotient sera du 1er degré en x; son premier terme sera x et le dernier, $12 : (-3) = -4$. On aura

$$x^2 + ax + 12 = (x - 3)(x - 4).$$

Le second membre doit reproduire terme à terme le premier. Par suite,

$$a = -3 - 4 = -7.$$

2° $(x^2 + ax + 15) : (x + 3)$
Rép. $a = 8$; $Q = x + 5$.

3° $(x^3 + ax^2 + 19x - 12) : (x - 1)$
Rép. $a = -8$; $Q = x^2 - 7x + 12$.

4° $(3x^4 - ax^3 + 8x^2 - 2ax - 20) : (x - 2)$
Rép. $a = 5$; $Q = 3x^3 + x^2 + 10x + 10$.

5° $(8x^4 - 3x + a) : (2x - 1)$
Rép. $a = 1$; $Q = 4x^3 + 2x^2 + x - 1$.
6° $(2x^3 + ax^2 + 3x - 1) : (2x + 1)$
Rép. $a = 11$; $Q = x^2 + 5x - 1$.
7° $(x^3 + ax^2 + bx + 6) : (x - 2)(x - 3)$.
Le dividende doit s'annuler pour $x = 2$ et pour $x = 3$; d'où
$$4a + 2b + 14 = 0 \quad \text{et} \quad 9a + 3b + 33 = 0.$$
Ce système donne $a = -4$ et $b = 1$. On a ensuite :
$$(x^3 - 4x^2 + x + 6) : (x - 2) = x^2 - 2x - 3$$
et
$$(x^2 - 2x - 3) : (x - 3) = x + 1.$$

Autre solution. — Le quotient sera du premier degré en x; son premier terme sera x et le second $6 : 6 = 1$. On peut donc écrire
$$x^3 + ax^2 + bx + 6 = (x - 2)(x - 3)(x + 1)$$
$$= x^3 - 4x^2 + x + 6.$$
Le second membre doit reproduire terme à terme le premier. Par suite,
$$a = -4; \quad b = 1.$$
8° $(4x^4 + 7x^3 - ax^2 + bx + 24) : (x - 2)(x + 4)$
Rép. $a = 37$; $b = 2$; $Q = 4x^2 - x - 3$.
9° $(x^4 + ax^3 + 3x^2 + 2x + b) : x(x + 1)$
Rép. $a = 2$; $b = 0$; $Q = x^2 + x + 2$.
10° $(x^3 - 5x^2 + ax + b) : (x - 1)^2$.
Le dividende sera divisible par $x - 1$, si l'on a
$$a + b - 4 = 0 \quad \text{ou} \quad b = 4 - a.$$
Le dividende devient $x^3 - 5x^2 + ax + 4 - a$ et en divisant par $x - 1$, on trouve $x^2 - 4x - 4 + a$. Ce quotient doit s'annuler aussi pour $x = 1$; ce qui donne $a = 7$ et par suite, $b = -3$.

La division de $x^2 - 4x + 3$ par $x - 1$ donne alors le quotient cherché $x - 3$.

Autre solution. — Le quotient sera du premier degré en x; son premier terme sera x et le second b. On aura
$$x^3 - 5x^2 + ax + b = (x - 1)^2 (x + b)$$
$$= x^3 + (b - 2)x^2 + (1 - 2b)x + b.$$
Le second membre doit reproduire terme à terme le premier. On a donc le système $b - 2 = -5$; $a = 1 - 2b$.

Ce système donne $a = 7$; $b = -3$.
11° $(x^3 + ax^2 - 9x + b) : (x + 1)^2$
Rép. $a = -3$; $b = -5$; $Q = x - 5$.
12° $(x^3 + 4x^2 + ax + b) : (x^2 + x + 1)$.
Le quotient sera du premier degré en x. Son premier terme sera x et le second b. On aura

$x^3 + 4x^2 + ax + b = (x^2 + x + 1)(x + b)$
$= x^3 + (b + 1)x^2 + (b + 1)x + b.$

On a le système $b + 1 = 4;\ b + 1 = a.$

Par suite, $a = 4,\ b = 3,$ et le quotient cherché est $x + 3.$

13° $(4x^4 + ax^3 + 7x^2 + bx + 3) : (2x^2 + x + 1)$

Rép. $a = 0;\ b = 2;\ Q = 2x^2 - x + 3.$

14° $(2x^4 - 5x^3 + ax^2 - 2x + 4b) : (2x^2 - x - 1)$

Rép. $a = 9;\ b = -1;\ Q = x^2 - 2x + 4.$

162. *Quelle valeur faut-il donner à m pour que l'expression*

$$x^3 + y^3 + z^3 + mxyz$$

soit divisible par $x + y + z$ *? Trouver le quotient.*

Le dividende peut être considéré comme étant un polynôme du 3e degré en x et le diviseur, comme un binôme du 1er degré en x. Le quotient sera de la forme $x^2 + px + q$, q étant égal à

$$(y^3 + z^3) : (y + z) = y^2 - yz + z^2.$$

On doit avoir terme à terme,

$$x^3 + myzx + y^3 + z^3 = (x + y + z)(x^2 + px + q)$$
$$= x^3 + (y + z + p)x^2 + [p(y + z) + q]x + q(y + z).$$

On a donc le système

$$y + z + p = 0 \quad \text{ou} \quad p = -(y + z); \qquad (1)$$
$$p(y + z) + q = myz. \qquad (2)$$

Remplaçant p et q dans l'égalité (2), il vient

$$-3yz = myz; \quad \text{d'où} \quad m = -3.$$

Le quotient est

$$x^2 - (y + z)x + y^2 - yz + z^2 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx.$$

REMARQUE. — Dans cette solution, on suppose x, y et z différents de zéro. Si une ou deux variables étaient nulles, on vérifierait aisément que la division est possible, quel que soit m.

163. *Montrer que les expressions suivantes sont divisibles par* $(x - 1)^2$ *et trouver le quotient.*

1° $x^{n+1} - (n + 1)x + n.$

Cette expression s'annule pour $x = 1$, elle est donc divisible par $x - 1$. On obtient pour quotient

$$x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x - n.$$

Ce quotient s'annulant pour $x = 1$, est aussi divisible par $x - 1$ et on obtient pour quotient

Rép. $Q = x^{n-1} + 2x^{n-2} + 3x^{n-3} + \ldots + (n - 1)x + n.$

2° $nx^{n+1} - (n + 1)x^n + 1.$

Une 1re division par $x - 1$ donne

$$nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \ldots - x - 1.$$

Une 2^e division donne

Rép. $Q = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + \ldots + 2x + 1.$

164. *Vérifier que les divisions suivantes sont possibles et trouver le quotient.*

1° $[(a+b)^2 - (c+d)^2 + (a+c)^2 - (b+d)^2] : (a-d)$.

Le dividende s'annule pour $a = d$; il est donc divisible par $a - d$. Ordonnons le dividende par rapport à a. Il vient

$$2a^2 + 2(b+c)a - 2d(b+c+d).$$

Le quotient sera du 1^er degré en a; son 1^er terme $= 2a$. Son dernier terme égale le quotient du dernier terme du dividende par le dernier terme du diviseur ou $2(b+c+d)$.

Rép. $Q = 2(a+b+c+d)$.

2° $[a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 2abc] : (a+b)(a+c)$.

Le dividende s'annule pour $a = -b$ et pour $a = -c$; il est donc divisible par $a+b$ et $a+c$ et partant par $(a+b)(a+c)$ (en supposant b différent de c).

Le dividende et le diviseur étant du même degré en a, le quotient sera $b + c$.

Rép. $Q = b + c$.

3° $[a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 - 4abc] : (a+b)(a+c)$.

Rép. $Q = b + c$.

4° $[(a-b)(a+b-c) + (b-c)(b+c-a)] : (a-b+c)$.

Le dividende s'annule pour $a = b - c$; il est donc divisible par $a - (b-c)$ ou $a - b + c$.

Ordonnons le dividende par rapport à a. Il vient

$$a^2 - ba + c(b-c).$$

Le 1^er terme du quotient égale a. Son 2^e terme égale $\dfrac{c(b-c)}{-(b-c)} = -c$.

Rép. $Q = a - c$.

165. *Démontrer les identités suivantes :*

1° $x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$
$$+ (y-z)(z-x)(x-y) = 0.$$

L'expression $x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$ s'annule pour $x = y$ et $x = z$; elle est donc divisible par $(x-y)(x-z)$. Le dividende et le diviseur étant du 2^e degré en x, le quotient est égal à $y - z$. On a donc

$$x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) = (y-z)(x-y)(x-z),$$

et par suite,

$$x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) + (y-z)(z-x)(x-y) = 0.$$

Autre solution. — L'expression $x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$ peut s'écrire successivement

$x^2y - x^2z + y^2z - xy^2 + xz^2 - yz^2 =$
$xy(x - y) - z(x^2 - y^2) + z^2(x - y) = (x - y)(xy - xz - yz + z^2)$
$= (x - y)[x(y - z) - z(y - z)] = (x - y)(y - z)(x - z).$

Il en résulte que l'égalité proposée est bien une identité.

AUTRE SOLUTION. — On peut également vérifier l'identité proposée en effectuant les calculs dans les deux membres.

Les trois mêmes méthodes sont applicables aux deux exercices suivants. Nous nous bornerons à exposer chaque fois la première méthode.

2° $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 3(y - z)(z - x)(x - y).$

Le premier membre, développé et réduit, devient

$$3[(z - y)x^2 - (z^2 - y^2)x + yz(z - y)].$$

Cette expression s'annule pour $x = y$ et $x = z$. Elle est donc divisible par $(x - y)(x - z)$. Le quotient est $3(z - y)$.

Par suite,

$(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 3(y - z)(z - x)(x - y).$

3° $x^3(y - z) + y^3(z - x) + z^3(x - y)$
$+ (y - z)(z - x)(x - y)(x + y + z) = 0.$

L'expression $x^3(y - z) + y^3(z - x) + z^3(x - y)$ s'annule pour

$$x = y; \quad x = z; \quad x = -(y + z).$$

Elle est donc divisible par $(x - y)(x - z)(x + y + z)$. Le dividende et le diviseur étant du 3e degré en x, le quotient sera $y - z$. On a donc

$x^3(y - z) + y^3(z - x) + z^3(x - y)$
$= (y - z)(x - y)(x - z)(x + y + z)$

et $x^3(y - z) + y^3(z - x) + z^3(x - y)$
$+ (y - z)(z - x)(x - y)(x + y + z) = 0.$

§ V. — DÉCOMPOSITION EN FACTEURS.

166. *Mettre en évidence les facteurs communs :*

1° $10ac^2 + 15a^2c = 5ac(2c + 3a)$
2° $12x^2y^2 - 18xy^3 + 24x^3y = 6xy(2xy - 3y^2 + 4x^2)$
3° $12a^2x^3 - 30a^3x^2 + 18ax^4 = 6ax^2(2ax - 5a^2 + 3x^2)$
4° $a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$
5° $(a - b) + x(a - b) = (a - b)(1 + x)$
6° $-44ax^n + 286a^2x^{n+1} - 66a^3x^{n+2} = 22ax^n(-2 + 13ax - 3a^2x^2)$
7° $x^{m+n}y^m - x^{2n}y^{m+n} - x^ny^{2m} = x^ny^m(x^m - x^ny^n - y^m)$
8° $7x^{m+3}y^{n-2} + 14x^my^{n+1} + 21x^{m-3}y^{n+4}$
$= 7x^{m-3}y^{n-2}(x^6 + 2x^3y^3 + 3y^6).$

167. ***Décomposer en facteurs par* la méthode des identités.**

1° $a^2 - 9 = (a + 3)(a - 3)$
2° $b^2 - a^{2m} = (b + a^m)(b - a^m)$
3° $x^3y - xy^3 = xy(x^2 - y^2) = xy(x + y)(x - y)$
4° $a^2 - 16b^2 = (a + 4b)(a - 4b)$
5° $a^4 - 9b^2 = (a^2 + 3b)(a^2 - 3b)$
6° $a^2 - 25x^2 = (a + 5x)(a - 5x)$
7° $32a^2 - 2b^4 = 2(16a^2 - b^4) = 2(4a + b^2)(4a - b^2)$
8° $a^2x^2 - b^2x^2 = x^2(a^2 - b^2) = x^2(a + b)(a - b)$
9° $4x^2 - 16a^2 = 4(x^2 - 4a^2) = 4(x + 2a)(x - 2a)$
10° $a^2b^2c^2 - m^2 = (abc + m)(abc - m)$
11° $50x^4 - 2y^2 = 2(25x^4 - y^2) = 2(5x^2 + y)(5x^2 - y)$
12° $256x^2 - 64a^4 = 64(2x + a^2)(2x - a^2)$
13° $a^2x^2 - 81x^2 = x^2(a + 9)(a - 9)$
14° $16x^2y^2 - 121y^4 = y^2(4x + 11y)(4x - 11y)$
15° $x^4y^2 - x^2y^4 = x^2y^2(x + y)(x - y)$
16° $3a^3x - 3ax^3 = 3ax(a + x)(a - x)$
17° $150a^6b^2 - 24a^2b^2 = 6a^2b^2(5a^2 + 2)(5a^2 - 2)$
18° $37a^5x - 333a^3x = 37a^3x(a + 3)(a - 3)$
19° $x^4 - 81 = (x^2 + 9)(x^2 - 9) = (x^2 + 9)(x + 3)(x - 3)$
20° $81x^4 - 625a^4 = (9x^2 + 25a^2)(3x + 5a)(3x - 5a)$
21° $32x^4 - 2a^4 = 2(4x^2 + a^2)(2x + a)(2x - a)$
22° $3ax^4 - 3ay^4 = 3a(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$
23° $3x^5 - 48xy^8 = 3x(x^2 + 4y^4)(x + 2y^2)(x - 2y^2)$
24° $x^{11}y^4 - x^5y^{10} = x^5y^4(x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2)$
25° $m^3 \pm n^3 = (m \pm n)(m^2 \mp mn + n^2)$
26° $6xy^3 \pm 6x = 6x(y^3 \pm 1) = 6x(y \pm 1)(y^2 \mp y + 1)$
27° $32x^5 \pm 243y^5$
$= (2x \pm 3y)(16x^4 \mp 24x^3y + 36x^2y^2 \mp 54xy^3 + 81y^4)$
28° $125x^3 \pm 1 = (5x \pm 1)(25x^2 \mp 5x + 1)$
29° $192x^6y^6 - 2187z^6 = 3(8x^3y^3 + 27z^3)(8x^3y^3 - 27z^3)$
$= 3(2xy + 3z)(4x^2y^2 - 6xyz + 9z^2)(2xy - 3z)(4x^2y^2 + 6xyz + 9z^2)$
30° $a^7b - ab^7 = ab(a^6 - b^6) = ab(a^3 + b^3)(a^3 - b^3)$
$= ab(a + b)(a^2 - ab + b^2)(a - b)(a^2 + ab + b^2)$
31° $x^{10}y - xy^{10} = xy(x^9 - y^9) = xy(x^3 - y^3)(x^6 + x^3y^3 + y^6)$
$= xy(x - y)(x^2 + xy + y^2)(x^6 + x^3y^3 + y^6)$
32° $a^{5m} - 9a^{3m}y^{2n} = a^{3m}(a^{2m} - 9y^{2n}) = a^{3m}(a^m + 3y^n)(a^m - 3y^n)$
33° $32x^5 - 243 = (2x - 3)(16x^4 + 24x^3 + 36x^2 + 54x + 81)$
34° $343x^3 - 512b^6 = (7x - 8b^2)(49x^2 + 56b^2x + 64b^4)$
35° $64x^6 - 1 = (8x^3 + 1)(8x^3 - 1)$
$= (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$
36° $729a^6 - 64 = (3a + 2)(9a^2 - 6a + 4)(3a - 2)(9a^2 + 6a + 4)$
37° $(a - b)^2 - c^2 = (a - b + c)(a - b - c)$
38° $(a + b)^2 - (x - y)^2 = (a + b + x - y)(a + b - x + y)$

39° $(5a + 2b)^2 - (2b - 5a)^2 =$
$(5a + 2b + 2b - 5a)(5a + 2b - 2b + 5a) = 4b \times 10a = 40ab$

40° $(x + a)^2 - (3x - 2a)^2 = (4x - a)(3a - 2x)$ $2x \cdot 2a : 4ax$

41° $(4x - a)^2 - (4a - x)^2 = (3x + 3a)(5x - 5a) = 15(x + a)(x - a)$

42° $(a + b + c)^2 - (a - 2b - c)^2 = (2a - b)(3b + 2c)$

43° $(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = (x + 1 + x - 1)(x + 1 - x + 1) = 4x$

44° $(a + b)^3 + (a - b)^3 = [(a + b) + (a - b)]$
$\times [(a + b)^2 - (a^2 - b^2) + (a - b)^2] = 2a(a^2 + 3b^2).$

168. ***Décomposer en facteurs par la méthode des identités.***

1° $a^2 + 4ab + 4b^2 = (a + 2b)^2$

2° $9a^2 - 12ab + 4b^2 = (3a - 2b)^2$

3° $4a^2 - 4a + 1 = (2a - 1)^2$

4° $a^2 - a + \frac{1}{4} = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2$

5° $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$

6° $x^6 + 6x^3 + 9 = (x^3 + 3)^2$

7° $ab^2 - 2abc + ac^2 = a(b^2 - 2bc + c^2) = a(b - c)^2$

8° $\frac{x^2}{16} - \frac{3xy}{2} + 9y^2 = \left(\frac{x}{4} - 3y\right)^2$

9° $4x^4 + x^2y + \frac{y^2}{16} = \left(2x^2 + \frac{y}{4}\right)^2$

10° $9a^4b^2 - 6a^2bc + c^2 = (3a^2b - c)^2$

11° $24a^6bc^3 + 54a^4b^3c^3 - 72a^5b^2c^3 = 6a^4bc^3(2a - 3b)^2$

12° $49x^2y^8 + 25a^6b^4 - 70a^3b^2xy^4 = (7xy^4 - 5a^3b^2)^2$

13° $50a^6b^2c^2 + 72a^2b^8c^2 + 120a^4b^5c^2 = 2a^2b^2c^2(5a^2 + 6b^3)^2$

14° $\frac{4}{3}a^7x + 8a^4x^5 + 12ax^9 = \frac{4}{3}ax(a^3 + 3x^4)^2$

15° $144x^5y + 324x^3y^3 + 432x^4y^2 = 36x^3y(2x + 3y)^2$

16° $270x^9y^3 + 750x^3y^7 - 900x^6y^5 = 30x^3y^3(3x^3 - 5y^2)^2$

17° $48a^2x^4y + 9y^2 + 64a^4x^8 = (8a^2x^4 + 3y)^2$

18° $\frac{9a^4b}{4} - a^3b^2 + \frac{a^2b^3}{9} = a^2b\left(\frac{3a}{2} - \frac{b}{3}\right)^2$

19° $9a^{2m+2} - \frac{3a^{m+2}y^n}{2} + \frac{a^2y^{2n}}{16} = a^2\left(3a^m - \frac{y^n}{4}\right)^2$

20° $175a^2x^{2m} + 280a^2x^my^n + 112a^2y^{2n} = 7a^2(5x^m + 4y^n)^2.$

169. ***Décomposer en facteurs par la méthode des identités.***

1° $a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3 = (a - 2b)^3$

2° $x^3 \pm 9x^2 + 27x \pm 27 = (x \pm 3)^3$

3° $a^6x^3 + 3x - \frac{1}{a^3}(3a^6x^2 + 1) = \left(a^2x - \frac{1}{a}\right)^3$

4° $150xy^2 - 60x^2y + 8x^3 - 125y^3 = (2x - 5y)^3$

5° $27a^6x^3 - 108a^4bx^2 + 144a^2b^2x - 64b^3 = (3a^2x - 4b)^3$

6° $108x^3 \pm 432x^2 + 576x \pm 256 = 4(3x \pm 4)^3$
7° $1000a^3 - 1200a^2b + 480ab^2 - 64b^3 = (10a - 4b)^3$
8° $250x^6y^9 + 150x^4y^7z^2 + 30x^2y^5z^4 + 2y^3z^6 = 2y^3(5x^2y^2 + z^2)^3$.

170. *Décomposer en facteurs par* **la méthode des identités.**

1° $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc = (a - b - c)^2$
2° $x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y + 1 = (x - y + 1)^2$
3° $x^8 - 2x^6 - 2x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 = x^2(x^3 - x - 1)^2$
4° $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^2 + x + 1)^2$.

171. *Décomposer en facteurs par* **la méthode des groupements.**

1° $a^2 - 2ab + b^2 - 1 = (a - b)^2 - 1 = (a - b + 1)(a - b - 1)$
2° $a^2 - y^2 - 2xy - x^2 = a^2 - (x + y)^2 = (a + x + y)(a - x - y)$
3° $a^2 - b^2 + 2bc - c^2 = a^2 - (b - c)^2 = (a + b - c)(a - b + c)$
4° $x^2 - 2x - y^2 + 1 = (x - 1)^2 - y^2 = (x - 1 + y)(x - 1 - y)$
5° $x^2 - 4y^2 + 4y - 1 = x^2 - (2y - 1)^2 = (x + 2y - 1)(x - 2y + 1)$
6° $cy + y + c + 1 = y(c + 1) + (c + 1) = (c + 1)(y + 1)$
7° $4x^2 + 2x - 9y^2 - 3y = (4x^2 - 9y^2) + (2x - 3y)$
$= (2x - 3y)(2x + 3y + 1)$
8° $c^2 + d - d^2 - c = (c^2 - d^2) - (c - d) = (c - d)(c + d - 1)$
9° $b^2y - b^2 + a^2y - a^2 = b^2(y - 1) + a^2(y - 1) = (y - 1)(a^2 + b^2)$
10° $5a^3 + a^2 - 20a - 4 = 5a(a^2 - 4) + (a^2 - 4)$
$= (a + 2)(a - 2)(5a + 1)$
11° $a^4 - 2a^3 + a - 2 = a^3(a - 2) + (a - 2)$
$= (a - 2)(a + 1)(a^2 - a + 1)$
12° $b^2y - b^2 - a^2y + a^2 = b^2(y - 1) - a^2(y - 1)$
$= (y - 1)(b + a)(b - a)$
13° $ax^2 - x^2 - 4a + 4 = a(x^2 - 4) - (x^2 - 4)$
$= (x + 2)(x - 2)(a - 1)$
14° $8y^4 - 8y^3 + y - 1 = 8y^3(y - 1) + (y - 1)$
$= (y - 1)(2y + 1)(4y^2 - 2y + 1)$
15° $x^3 + 4x - 5 = x^3 - x + 5x - 5$
$= x(x^2 - 1) + 5(x - 1) = (x - 1)(x^2 + x + 5)$
16° $x^3 + 6x + 7 = (x^3 + 1) + 6(x + 1) = (x + 1)(x^2 - x + 7)$
17° $a^4 + 5a^2 + 4 = a^2(a^2 + 4) + (a^2 + 4) = (a^2 + 4)(a^2 + 1)$
18° $a^5 - 2a^2 + 1 = a^2(a^3 - 1) - (a^2 - 1)$
$= (a - 1)(a^4 + a^3 + a^2 - a - 1)$
19° $a^4 + b^4 + a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2 - a^2b^2$
$= (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)$
20° $4x^4 + y^4 + 3x^2y^2 = 4x^4 + 4x^2y^2 + y^4 - x^2y^2$
$= (2x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = (2x^2 + y^2 + xy)(2x^2 + y^2 - xy)$
21° $a^2 - b^2 + x^2 - y^2 - 2(ax - by)$
$= (a - x)^2 - (b - y)^2 = (a - x + b - y)(a - x - b + y)$
22° $a^2 - b^2 - c^2 + d^2 - 2(ad - bc)$
$= (a - d)^2 - (b - c)^2 = (a - d + b - c)(a - d - b + c)$

23° $2a^3 - 2a^2b - a^2 + ab + 2ab^2 - b^2$
$= 2a(a^2 - ab + b^2) - (a^2 - ab + b^2) = (a^2 - ab + b^2)(2a - 1)$
24° $x^8 - 4x^6 - 2x^5 + 8x^3 + x^2 - 4$
$= x^6(x^2 - 4) - 2x^3(x^2 - 4) + (x^2 - 4) = (x^2 - 4)(x^6 - 2x^3 + 1)$
$= (x^2 - 4)(x^3 - 1)^2 = (x + 2)(x - 2)(x - 1)^2(x^2 + x + 1)^2.$

172. *Décomposer les trinômes suivants :*

1° $x^2 - 8x + 12 = (x - 2)(x - 6)$
2° $x^2 - 14x + 13 = (x - 1)(x - 13)$
3° $x^2 - 22x + 85 = (x - 5)(x - 17)$
4° $x^2 - 4x - 5 = (x + 1)(x - 5)$
5° $x^2 + 10x + 16 = (x + 2)(x + 8)$
6° $x^2 - 115x + 1500 = (x - 15)(x - 100)$
7° $x^2 - 4x - 32 = (x + 4)(x - 8)$
8° $x^2 + 5x - 14 = (x - 2)(x + 7)$
9° $x^2 + 20x + 19 = (x + 1)(x + 19)$
10° $x^2 - 4x - 12 = (x + 2)(x - 6)$
11° $2x^2 + 9x + 7 = 2x^2 + 2x + 7x + 7$
$= 2x(x + 1) + 7(x + 1) = (x + 1)(2x + 7)$

On a commencé par décomposer le produit des deux coefficients extrêmes, qui est 14, en un produit de deux facteurs, 2 et 7, dont la somme est égale au coefficient 9 de x.

12° $2x^2 - 2x - 24 = 2(x^2 - x - 12) = 2(x - 4)(x + 3)$
13° $6x^2 + 15x + 6 = 3(2x^2 + 5x + 2) = 3(x + 2)(2x + 1)$
14° $27x^2 - 75x + 48 = 3(9x^2 - 25x + 16) = 3(x - 1)(9x - 16)$
15° $4x^2 + x - 5 = 4x^2 - 4x + 5x - 5 = (x - 1)(4x + 5)$
16° $11x^2 + 28x - 15 = (x + 3)(11x - 5)$
17° $6x^4 + 5x^2 + 1 = (2x^2 + 1)(3x^2 + 1)$
18° $21x^4 - 8x^2 - 5 = (3x^2 + 1)(7x^2 - 5)$
19° $45x^2 - 39xy - 6y^2 = 3(x - y)(15x + 2y)$
20° $12x^2 + 34xy + 10y^2 = 2(3x + y)(2x + 5y)$
21° $2x^4 + x^2y^2 - 3y^4 = (x^2 - y^2)(2x^2 + 3y^2)$
$= (x + y)(x - y)(2x^2 + 3y^2).$

173. *Décomposer en facteurs les polynômes suivants :*

1° $x^3 + 9x^2 + 11x - 21 = (x - 1)(x^2 + 10x + 21)$
$= (x - 1)(x + 3)(x + 7)$
2° $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x + 1)(x^2 + x - 6)$
$= (x + 1)(x - 2)(x + 3)$
3° $x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15$
$= (x + 1)(x - 1)(x - 3)(x + 5)$
4° $x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6 = (x - 1)^2(x - 2)(x - 3)$
5° $x^5 + 3x^4 - 16x - 48 = (x + 3)(x^4 - 16)$
$= (x - 2)(x + 2)(x + 3)(x^2 + 4)$

6° $6x^4 + 13x^3 - 13x - 6 = 6(x^4 - 1) + 13x(x^2 - 1)$
$= (x^2 - 1)(6x^2 + 13x + 6)$
$= (x + 1)(x - 1)(2x + 3)(3x + 2)$

7° $6x^4 - 5x^3 - 23x^2 + 20x - 4$
$= (x - 2)(x + 2)(2x - 1)(3x - 1)$

8° $6x^4 + 4x^3 - 26x^2 - 16x + 8 = 2(x + 1)(x - 2)(x + 2)(3x - 1)$

9° $x^4 + ax^3 - 7a^2x^2 - a^3x + 6a^4 = (x + 3a)(x - 2a)(x + a)(x - a)$

10° $2a^4 + 2a^3b - 2a^2c^2 - 2abc^2 = 2a(a^3 + a^2b - ac^2 - bc^2)$
$= 2a[a^2(a + b) - c^2(a + b)] = 2a(a + b)(a + c)(a - c).$

174. *Décomposer en facteurs les expressions suivantes :*

1° $ax^6 - a^7 = a(x^6 - a^6)$
$= a(x - y)(x + y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$

2° $8a^2 + 125a^5 = a^2(8 + 125a^3) = a^2(2 + 5a)(4 - 10a + 25a^2)$

3° $(x^2 + 2)^2 - 9x^2 = (x^2 + 3x + 2)(x^2 - 3x + 2)$
$= (x + 1)(x + 2)(x - 1)(x - 2)$

4° $(x^2 - 3)^2 - 4x^2 = (x - 1)(x + 3)(x + 1)(x - 3)$

5° $b^3 - b^2c - bc^2 + c^3 = b^2(b - c) - c^2(b - c) = (b - c)^2(b + c)$

6° $4a^4 - 8a^3 + 4a - 8 = 4[a^3(a - 2) + (a - 2)]$
$= 4(a - 2)(a^3 + 1) = 4(a - 2)(a + 1)(a^2 - a + 1)$

7° $x^7 - x^4y^3 - x^3y^4 + y^7 = x^4(x^3 - y^3) - y^4(x^3 - y^3)$
$= (x^3 - y^3)(x^4 - y^4) = (x - y)^2(x + y)(x^2 + y^2)(x^2 + xy + y^2)$

8° $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2) = (x - 1)^2(x + 2)$

9° $5a^2x^2 - 27ax + 10 = 5a^2x^2 - 25ax - 2ax + 10$
$= 5ax(ax - 5) - 2(ax - 5) = (ax - 5)(5ax - 2)$

10° $24x^2y^2 - 1 - 2xy = 24x^2y^2 - 6xy + 4xy - 1$
$= 6xy(4xy - 1) + (4xy - 1) = (4xy - 1)(6xy + 1)$

11° $2abxy + 1 - a^2x^2 - b^2y^2 = 1 - (ax - by)^2$
$= (1 + ax - by)(1 - ax + by)$

12° $25x^4 - 104x^2y^4 + 16y^8 = 25x^4 - 100x^2y^4 - 4x^2y^4 + 16y^8$
$= 25x^2(x^2 - 4y^4) - 4y^4(x^2 - 4y^4)$
$= (x + 2y^2)(x - 2y^2)(5x + 2y^2)(5x - 2y^2).$

On pourrait aussi compléter le carré dont feraient partie les termes extrêmes. On aurait : $(5x^2 - 4y^4)^2 - 64x^2y^4$, etc.

13° $x(x^2 + y) - y(y^2 + x) = x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

14° $a^{12} - y^{12} = (a^3 + y^2)(a^6 - a^3y^2 + y^4)(a^3 - y^2)(a^6 + a^3y^2 + y^4)$

15° $a^8 - b^4 = (a^4 + b^2)(a^4 - b^2) = (a^4 + b^2)(a^2 + b)(a^2 - b)$

16° $(10x^4 - 41)^2 - (6x^4 - 40)^2 = (16x^4 - 81)(4x^4 - 1)$
$= (4x^2 + 9)(2x + 3)(2x - 3)(2x^2 + 1)(x\sqrt{2} - 1)(x\sqrt{2} + 1)$

17° $(8,5x^4 - 41)^2 - (7,5x^4 - 40)^2 = (16x^4 - 81)(x^4 - 1)$
$= (4x^2 + 9)(2x + 3)(2x - 3)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$

18° $a^4x^4 - 2a^3bx^3y + a^2b^2x^2y^2 = a^2x^2(a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2)$
$= a^2x^2(ax - by)^2$

19° $x^6 + 7x^3 - 8 = x^6 + 8x^3 - x^3 - 8$
$= x^3(x^3 + 8) - (x^3 + 8) = (x^3 + 8)(x^3 - 1)$
$= (x + 2)(x^2 - 2x + 4)(x - 1)(x^2 + x + 1)$

20° $8x^6 - 63x^3 - 8 = 8x^6 - 64x^3 + x^3 - 8 = 8x^3(x^3 - 8) + (x^3 - 8)$
$= (x - 2)(x^2 + 2x + 4)(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$.

175. *Décomposer en facteurs les expressions suivantes :*

1° $x^2(x^2 - 4) - x^2 + 4 = x^2(x^2 - 4) - (x^2 - 4)$
$= (x + 2)(x - 2)(x + 1)(x - 1)$

2° $(x^2 - 2x)^2 - 1 = (x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x - 1)$
$= (x - 1)^2 (x^2 - 2x - 1)$

3° $(x - y)^3 - x^3 + y^3 = -3x^2y + 3xy^2 = -3xy(x - y)$

4° $x^{12} - y^6 = (x^2 + y)(x^4 - x^2y + y^2)(x^2 - y)(x^4 + x^2y + y^2)$

5° $a^9b - ab^9 = ab(a^8 - b^8) = ab(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$

6° $(x + y)^2 + z(2x + 2y + z) = x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2$
$= (x + y + z)^2$

7° $(x - 1)^2 + y(2x + y - 2) = x^2 - 2x + 1 + 2xy + y^2 - 2y$
$= (x + y - 1)^2$

8° $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 - 7b^3 = (a + b)^3 - 8b^3$
$= (a - b)(a^2 + 4ab + 7b^2)$

9° $x^3 + 3x^2 + 3x - 26 = (x + 1)^3 - 27 = (x - 2)(x^2 + 5x + 13)$

10° $x^9 - 8x^6 - x^3 + 8 = x^6(x^3 - 8) - (x^3 - 8) = (x^3 - 8)(x^6 - 1)$
$= (x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x + 1)(x^2 - x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)$

11° $3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = 3(x^4 - 1) - 10x(x^2 - 1)$
$= (x + 1)(x - 1)(x - 3)(3x - 1)$

12° $x^9 - 3x^6 - 13x^3 + 15 = x^9 - 3x^6 + 3x^3 - 1 - 16x^3 + 16$
$= (x^3 - 1)^3 - 16(x^3 - 1) = (x^3 - 1)[(x^3 - 1)^2 - 16]$
$= (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^3 - 5)(x^3 + 3)$

13° $a^4 - a^3 - a + 1 = a^3(a - 1) - (a - 1)$
$= (a - 1)(a^3 - 1) = (a - 1)^2 (a^2 + a + 1)$

14° $x^4 - 2x^2 + 1 - (x - 1)^2 = (x^2 - 1)^2 - (x - 1)^2$
$= x(x - 1)^2 (x + 2)$

15° $(a - b)^5 - a^5 + b^5 = (a - b)[(a - b)^4 - (a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)]$
$= (a - b)(-5a^3b + 5a^2b^2 - 5ab^3) = -5ab(a - b)(a^2 - ab + b^2)$.

16° $a^3 - b^3 - 3ab(a - b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$

17° $x^4 - 15x^2y^2 + 9y^4 = (x^2 - 3y^2)^2 - 9x^2y^2$
$= (x^2 + 3xy - 3y^2)(x^2 - 3xy - 3y^2)$

18° $4a^3 - a^2x - 100ax^2 + 25x^3$
$= a^2(4a - x) - 25x^2(4a - x) = (4a - x)(a + 5x)(a - 5x)$

19° $3a^{2m+2} + 6a^{m+2}y^n + 3a^2y^{2n} = 3a^2(a^{2m} + 2a^my^n + y^{2n})$
$= 3a^2(a^m + y^n)^2$

20° $a^4 - 2a^3b + 2ab^3 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) - 2ab(a^2 - b^2)$
$= (a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - 2ab) = (a + b)(a - b)^3$.

176. *Décomposer en facteurs les expressions suivantes :*

1° $a^4 + 2a^3b - 2ab^3 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) + 2ab(a^2 - b^2)$
$= (a^2 - b^2)(a^2 + b^2 + 2ab) = (a - b)(a + b)^3$

2° $(5a^2 + 2b^2)^2 - (4a^2 - 6b^2)^2 = (9a^2 - 4b^2)(a^2 + 8b^2)$
$= (3a + 2b)(3a - 2b)(a^2 + 8b^2)$

3° $(18a^3 + 4b^3)^2 - (9a^3 - 5b^3)^2 = (27a^3 - b^3)(9a^3 + 9b^3)$
$= 9(a + b)(a^2 - ab + b^2)(3a - b)(9a^2 + 3ab + b^2)$

4° $5a^2 - 5b^2 - 5a^2c^2 + 5b^2c^2 = 5[a^2 - b^2 - c^2(a^2 - b^2)]$
$= 5(a^2 - b^2)(1 - c^2) = 5(a + b)(a - b)(1 + c)(1 - c)$

5° $ab(2ab - 5c^2) - c(5a^3 - 2b^3) = 2a^2b^2 - 5abc^2 - 5a^3c + 2b^3c$
$= 2b^2(a^2 + bc) - 5ac(a^2 + bc) = (a^2 + bc)(2b^2 - 5ac)$

6° $x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 - x - y = (x^3 + y^3) - xy(x + y) - (x + y)$
$= (x + y)(x^2 - xy + y^2 - xy - 1) = (x + y)[(x - y)^2 - 1]$
$= (x + y)(x - y + 1)(x - y - 1)$

7° $x^3 - (a + b + 1)x^2 + (a + b + ab)x - ab.$

Ce polynôme s'annule pour $x = 1$; il est égal à
$(x - 1)[x^2 - (a + b)x + ab]$ ou $(x - 1)(x - a)(x - b)$

8° $(a + 3b)a^2 - a^3 + (3a + b)b^2 - b^3$
$= a^3 + 3a^2b - a^3 + 3ab^2 + b^3 - b^3 = 3ab(a + b)$

9° $(ab + ac)(a + d) - (ab - ad)(a - c)$
$= a(ac + bd + ad + bc) = a(a + b)(c + d)$

10° $y^3 - b^2y + by^2 - b^3 + y^2 - b^2 = y^2(y + b + 1) - b^2(y + b + 1)$
$= (y + b)(y - b)(y + b + 1)$

11° $x^3 - xy^2 - x^2y + y^3 + 2x^2 - 2y^2 = x^2(x - y + 2) - y^2(x - y + 2)$
$= (x + y)(x - y)(x - y + 2)$

12° $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3.$

Ce polynôme s'annule pour $a = -b$ et $a = -c$. Il est donc divisible par $(a + b)(a + c)$. D'autre part, il peut s'écrire :

$[a + (b + c)]^3 - a^3 - b^3 - c^3$
$= a^3 + 3(b + c)a^2 + 3(b + c)^2a + (b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$
$= 3(b + c)a^2 + 3(b + c)^2a + 3b^2c + 3bc^2.$

Le quotient de la division est donc $3(b + c)$ et le polynôme est égal à
$$3(a + b)(a + c)(b + c).$$

13° $(a - b + c)^3 - a^3 + b^3 - c^3.$

En raisonnant comme pour l'exercice précédent, on trouve
$$(a - b + c)^3 - a^3 + b^3 - c^3 = -3(a - b)(a + c)(b - c).$$

14° $x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc.$

Ce polynôme s'annule pour $x = a$, b et c. Il est donc divisible par $(x - a)(x - b)(x - c)$. Dividende et diviseur étant de même degré, le quotient est 1, et le polynôme peut s'écrire $(x - a)(x - b)(x - c)$.

15° $4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$
$= (2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2)(2ab + 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2)$
$= [(a + b)^2 - (c - d)^2][(c + d)^2 - (a - b)^2]$
$= (a + b + c - d)(a + b - c + d)(a - b + c + d)(-a + b + c + d).$

16° $x^3 - (a + b - c)x^2 + (ab - ac - bc)x + abc.$

Ce polynôme s'annule pour $x = a$, b et $-c$. Par suite, il est divisible par $(x - a)(x - b)(x + c)$. Le quotient $= 1$. On a donc
$$x^3 - (a + b - c)x^2 + (ab - ac - bc)x + abc = (x - a)(x - b)(x + c).$$

17° $a(a - 1)x^2 + (2a^2 - 1)x + a(a + 1).$

Décomposons le 2e terme de ce trinôme en une somme de deux termes tels que leur produit soit égal au produit des deux termes extrêmes. On a :
$$(2a^2 - 1)x = a^2x + (a^2 - 1)x$$
et $$a^2x \times (a^2 - 1)x = a(a - 1)x^2 \times a(a + 1).$$
Par suite, $a(a - 1)x^2 + a^2x + (a^2 - 1)x + a(a + 1)$
$= ax[(a - 1)x + a] + (a + 1)[(a - 1)x + a]$
$= [(a - 1)x + a][ax + (a + 1)].$

18° $a(a - 1)x^2 - (a - b - 1)xy - b(b + 1)y^2.$

On transforme ce trinôme comme celui de l'exercice précédent, en remarquant que l'on a :
$$-(a - b - 1)xy = abxy + (-ab - a + b + 1)xy$$
et $$abxy \times (-ab - a + b + 1)xy = a(a - 1)x^2 \times (-b)(b + 1)y^2.$$
La réponse est $[ax - (b + 1)y][(a - 1)x + by].$

19° $a^3 - a^2b + a^2c - 2abc - ab^2 + b^2c + b^3$
$= a^2(a - b) - b^2(a - b) + c(a^2 + b^2 - 2ab)$
$= (a - b)[a^2 - b^2 + c(a - b)] = (a - b)^2(a + b + c)$

20° $ab^3 - a^3b + bc^3 - b^3c + a^3c - ac^3$
$= ab(b^2 - a^2) - c(b^3 - a^3) + c^3(b - a)$
$= (b - a)[ab(b + a) - c(b^2 + ab + a^2) + c^3]$
$= (b - a)(ab^2 + a^2b - b^2c - abc - a^2c + c^3)$
$= (b - a)[b^2(a - c) + ab(a - c) - c(a^2 - c^2)]$
$= (b - a)(a - c)(b^2 + ab - ac - c^2)$
$= (a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c).$

§ VI. — PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR ET PLUS PETIT COMMUN MULTIPLE.

177. *Chercher le plus grand commun diviseur* (D) *et le plus petit commun multiple* (M) *des expressions suivantes :*

1° $4abc$; $5a^2b$; $20ab^2c$; $12ax$.

Rép. $D = a$; $M = 60a^2b^2cx$.

2° $6a^2x$; $15a^2b$; $30abx$; $24a^2b^2x^2$..

Rép. $D = 3a$; $M = 120a^2b^2x^2$.

3° $4a^4b^7c^5$; $28a^2b^4c^7$; $32a^5b^4c$; $42a^2b^5c$.

Rép. $D = 4a^2b^4c$; $M = 672a^5b^7c^7$.

4° $9(2x - a)^2$

$4x^2 - a^2 = (2x + a)(2x - a)$

Rép. $D = 2x - a$; $M = 9(2x + a)(2x - a)^2$.

5° $4a - 4a^2 - 1 = -(4a^2 - 4a + 1) = -(2a - 1)^2$

$4a^3 + a - 1 = (2a - 1)(2a^2 + a + 1)$

Rép. $D = 2a - 1$; $M = (2a - 1)^2(2a^2 + a + 1)$.

6° $18a^2b(a^3 + b^3)(a - b) = 18a^2b(a + b)(a - b)(a^2 - ab + b^2)$

$6ab^2(a^2 - b^2)(a + b)^2 = 6ab^2(a + b)^3(a - b)$

Rép. $D = 6ab(a + b)(a - b)$;

$M = 18a^2b^2(a + b)^3(a - b)(a^2 - ab + b^2)$.

7° $x^2 - 11x + 28 = (x - 7)(x - 4)$

$2x^2 - 2x - 84 = 2(x - 7)(x + 6)$

$x^2 + x - 56 = (x - 7)(x + 8)$

Rép. $D = x - 7$; $M = 2(x - 7)(x - 4)(x + 6)(x + 8)$.

8° $3x^2 + 9xy = 3x(x + 3y)$

$2x^3 - 18xy^2 = 2x(x + 3y)(x - 3y)$

$x^3 + 6x^2y + 9xy^2 = x(x + 3y)^2$

Rép. $D = x(x + 3y)$; $M = 6x(x - 3y)(x + 3y)^2$.

9° $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

$x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 = (x + y)(x - y)^2$

Rép. $D = x - y$; $M = (x + y)(x - y)^2(x^2 + xy + y^2)$.

10° $ax^2 + 2a^2x + a^3 = a(x + a)^2$

$2ax^2 - 4a^2x - 6a^3 = 2a(x + a)(x - 3a)$

$3a^2x^2 + 6a^3x + 3a^4 = 3a^2(x + a)^2$

Rép. $D = a(x + a)$; $M = 6a^2(x + a)^2(x - 3a)$.

11° $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$

$x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x - 1)(x + 2)(x - 2)$

$x^3 - ax^2 - 4x + 4a = (x - a)(x + 2)(x - 2)$

Rép. $D = x - 2$; $M = (x - 1)(x + 2)(x - 2)(x - a)$.

12° $2a^3 + 3a^2 - 2ax^2 - 3x^2 = (a + x)(a - x)(2a + 3)$

$3a^3 - 3ax^2 + a^2 - x^2 = (a + x)(a - x)(3a + 1)$

$x^3 + ax^2 - a^2x - a^3 = (x + a)^2(x - a) = -(a + x)^2(a - x)$

Rép. $D = (a + x)(a - x)$; $M = (a + x)^2(a - x)(2a + 3)(3a + 1)$.

CHAPITRE V

Fractions algébriques.

178. *Simplifier les fractions suivantes :*

1° $\dfrac{14b^4x \times 5ay}{15a^2x \times 7b^3y} = \dfrac{2b}{3a}$

2° $\dfrac{axy - bxy}{ab - b^2} = \dfrac{xy}{b}$

3° $\dfrac{a - 3}{2a^2 - 18} = \dfrac{1}{2(a + 3)}$

4° $\dfrac{9a^5 - 16a}{6a^2b^2 - 8b^2} = \dfrac{a(3a^2 + 4)}{2b^2}$

5° $\dfrac{a^3 + b^3}{(a - b)^2 + ab} = a + b$

6° $\dfrac{4(x + y)^2}{3(x^2 - y^2)} = \dfrac{4(x + y)}{3(x - y)}$

7° $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} = \dfrac{x - 2}{x + 2}$

8° $\dfrac{8a^3 + 1}{64a^6 - 1} = \dfrac{1}{8a^3 - 1}$

9° $\dfrac{4a^2 + 12a + 9}{4a^2 - 9} = \dfrac{(2a + 3)^2}{4a^2 - 9} = \dfrac{2a + 3}{2a - 3}$

10° $\dfrac{25x^2 + 20ax + 4a^2}{2(25ax^3 - 4a^3x)} = \dfrac{(5x + 2a)^2}{2ax(25x^2 - 4a^2)} = \dfrac{5x + 2a}{2ax(5x - 2a)}$

11° $\dfrac{12ax^2 + 3ax}{8x^2 + 22x + 5} = \dfrac{3ax(4x + 1)}{(4x + 1)(2x + 5)} = \dfrac{3ax}{2x + 5}$

12° $\dfrac{3x^2 - x - 14}{3abx + 6ab} = \dfrac{(x + 2)(3x - 7)}{3ab(x + 2)} = \dfrac{3x - 7}{3ab}$

13° $\dfrac{x^2 - 7x - 8}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \dfrac{(x + 1)(x - 8)}{x(x + 1)(x + 2)} = \dfrac{x - 8}{x(x + 2)}$

14° $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{9 - x^2} = \dfrac{(x + 1)(x - 3)}{(3 + x)(3 - x)} = -\dfrac{x + 1}{x + 3}$

15° $\dfrac{8x^2 + 22x - 6}{4x^2 + 27x - 7} = \dfrac{2(x + 3)(4x - 1)}{(4x - 1)(x + 7)} = \dfrac{2(x + 3)}{x + 7}$

16° $\dfrac{2x^2 - 9x + 7}{12x^2 - 21x + 9} = \dfrac{(x - 1)(2x - 7)}{3(x - 1)(4x - 3)} = \dfrac{2x - 7}{3(4x - 3)}$

17° $\dfrac{8x^6 + 27y^6}{8x^4 - 18y^4} = \dfrac{4x^4 - 6x^2y^2 + 9y^4}{2(2x^2 - 3y^2)}$

18° $\dfrac{40x^3 - 5}{12x^2 + 6x + 3} = \dfrac{5(8x^3 - 1)}{3(4x^2 + 2x + 1)} = \dfrac{5(2x - 1)}{3}$

19° $\dfrac{16x^3 - 54}{8x^2 - 24x + 18} = \dfrac{2(8x^3 - 27)}{2(2x - 3)^2} = \dfrac{4x^2 + 6x + 9}{2x - 3}$

20° $\dfrac{(a + b)^2(a^3 - b^3)}{(a^2 - b^2)^2} = \dfrac{(a + b)^2(a^3 - b^3)}{(a + b)^2(a - b)^2} = \dfrac{a^2 + ab + b^2}{a - b}$

21° $\dfrac{a^6 - b^6}{(a + b)^2(a^3 - b^3)} = \dfrac{a^3 + b^3}{(a + b)^2} = \dfrac{a^2 - ab + b^2}{a + b}.$

179. *Simplifier les fractions suivantes :*

1° $\dfrac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{(x - 1)(x - 2)(x + 2)}{(x - 1)(x - 2)} = x + 2$

2° $\dfrac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} = \dfrac{(x + 1)^2(2x + 1)}{(x + 1)^3} = \dfrac{2x + 1}{x + 1}$

3° $\dfrac{x^3 - 9x^2 + 11x + 21}{x^4 - x^3 - 4x^2 - 5x - 3} = \dfrac{(x + 1)(x - 3)(x - 7)}{(x + 1)(x - 3)(x^2 + x + 1)}$
$= \dfrac{x - 7}{x^2 + x + 1}$

4° $\dfrac{(a + b)^2 - (c - b)^2}{(a - b)^2 - (c + b)^2} = \dfrac{(a + c)(a + 2b - c)}{(a + c)(a - 2b - c)} = \dfrac{a + 2b - c}{a - 2b - c}$

5° $\dfrac{(a^2 + b^2 - c^2)^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2}{4ab^2 + 4abc} = \dfrac{2a^2(2b^2 - 2c^2)}{4ab(b + c)}$
$= \dfrac{a(b - c)}{b}$

6° $\dfrac{x^4 - 2x^2 + 1}{3x^5 - 10x^3 + 15x - 8} = \dfrac{(x^2 - 1)^2}{(x - 1)^3(3x^2 + 9x + 8)}$
$= \dfrac{(x + 1)^2}{(x - 1)(3x^2 + 9x + 8)}$

7° $\dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^3 - 5x^2 + 2x + 8} = \dfrac{(x - 2)(x - 4)}{(x + 1)(x - 2)(x - 4)} = \dfrac{1}{x + 1}$

8° $\dfrac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^3 - 3x + 2} = \dfrac{(x + 2)(x + 1)(x - 1)}{(x + 2)(x - 1)^2} = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

9° $\dfrac{1 + x^3}{1 + 2x + 2x^2 + x^3} = \dfrac{(1 + x)(1 - x + x^2)}{(1 + x)(1 + x + x^2)}$
$= \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$

10° $\dfrac{2x^3 - 7x^2 + 2x + 3}{2x^3 - 9x^2 + 10x - 3} = \dfrac{(x - 1)(x - 3)(2x + 1)}{(x - 1)(x - 3)(2x - 1)}$
$= \dfrac{2x + 1}{2x - 1}$

11° $\dfrac{x^2 - a^2 + 2ab - b^2}{x^2 - 2(a - b)x + (a - b)^2} = \dfrac{x^2 - (a - b)^2}{(x - a + b)^2} = \dfrac{x + a - b}{x - a + b}$

12° $\dfrac{a^2 + 2ab + b^2 - x^2}{x^2 - 2(a + b)x + (a + b)^2} = -\dfrac{x + a + b}{x - a - b}$

13° $\dfrac{1 - a^2}{(1 + ax)^2 - (a + x)^2} = \dfrac{1 - a^2}{(1 - a^2)(1 - x^2)} = \dfrac{1}{1 - x^2}$

14° $\dfrac{a^2x^2 + a^2x + abx + ab}{a^2x^2 - a^2x + abx - ab} = \dfrac{a^2x(x+1) + ab(x+1)}{a^2x(x-1) + ab(x-1)} = \dfrac{x+1}{x-1}$

15° $\dfrac{x^4 - y^4}{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3} = \dfrac{x^4 - y^4}{(x-y)(x^2+y^2)} = x + y$

16° $\dfrac{1 - x^2 + x^3 - x^5}{x + x^2 - x^3 - x^4} = \dfrac{(1-x^2)(1+x^3)}{x(1+x)(1-x^2)} = \dfrac{1 - x + x^2}{x}$

17° $\dfrac{(a^8 + 2a^4x^2 + x^4)(a^4 - x^2)}{(a^2+x)(a^6 - a^4x + a^2x^2 - x^3)} = \dfrac{(a^4+x^2)^2(a^4-x^2)}{a^8 - x^4} = a^4 + x^2$

18° $\dfrac{a^3 + a(1+a)x + x^2}{a^4 - x^2} = \dfrac{(a+x)(a^2+x)}{a^4 - x^2} = \dfrac{a+x}{a^2-x}$

19° $\dfrac{7a^2 + 19ab - 6b^2}{7a^3 - 2a^2b - 63ab^2 + 18b^3}$

$$= \frac{(a+3b)(7a-2b)}{(a+3b)(a-3b)(7a-2b)} = \frac{1}{a-3b}$$

20° $\dfrac{a^5 + a^2b^3 - a^4b - ab^4}{a^4 - a^2b^2 + a^3b - ab^3} = \dfrac{a^2(a^3+b^3) - ab(a^3+b^3)}{a^2(a^2-b^2) + ab(a^2-b^2)}$

$$= \frac{a(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)}{a(a-b)(a+b)^2} = \frac{a^2 - ab + b^2}{a+b}$$

180. *Effectuer les opérations suivantes et simplifier :*

1° $\dfrac{x+3}{3} + \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{5x}{6}$

2° $\dfrac{x+3}{3} - \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{12-x}{6}$

3° $\dfrac{a-b}{4} - \dfrac{b-a}{6} = \dfrac{5(a-b)}{12}$

4° $\dfrac{x+a}{2} - \dfrac{2x+a}{4} = \dfrac{a}{4}$

5° $\dfrac{a+b}{a} + \dfrac{a+b}{b} = \dfrac{(a+b)^2}{ab}$

6° $\dfrac{a+b}{a} - \dfrac{b-a}{b} = \dfrac{a^2+b^2}{ab}$

7° $\dfrac{1}{a+2} + \dfrac{1}{a+4} = \dfrac{2(a+3)}{(a+2)(a+4)}$

8° $\dfrac{3}{x-6} - \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{2x}{(x-6)(x-2)}$

9° $\dfrac{2}{x-2} - \dfrac{4}{x^2-4} = \dfrac{2x}{x^2-4}$

10° $\dfrac{a}{x-a} - \dfrac{b}{x-b} = \dfrac{x(a-b)}{(x-a)(x-b)}$

11° $\dfrac{a+3}{a+4} - \dfrac{a+1}{a+2} = \dfrac{2}{(a+4)(a+2)}$

12° $\dfrac{x-3}{x-5} - \dfrac{x-4}{x-6} = \dfrac{-2}{(x-5)(x-6)}$

13° $\frac{x-3}{x+3} - \frac{x+3}{x-3} = \frac{-12x}{x^2-9}$

14° $\frac{x+a}{a-x} - \frac{x-a}{a+x} = \frac{2(a^2+x^2)}{a^2-x^2}$

15° $\frac{a}{x-a} - \frac{a^2}{x^2-a^2} = \frac{ax}{x^2-a^2}$

16° $\frac{3}{x-3} + \frac{2x}{x^2-9} = \frac{5x+9}{x^2-9}$

17° $\frac{2x-3a}{x-2a} - \frac{2x-a}{x-a} = \frac{a^2}{(x-a)(x-2a)}$

18° $\frac{x+a}{x-2a} - \frac{x^2+2a^2}{x^2-4a^2} = \frac{3ax}{x^2-4a^2}$

19° $\frac{2x^2}{x^2-y^2} - \frac{2x^2}{x^2+xy} = \frac{2x^2}{x^2-y^2} - \frac{2x}{x+y} = \frac{2xy}{x^2-y^2}$

20° $\frac{x^2}{x-x^3} - \frac{x}{1+x^2} = \frac{x}{1-x^2} - \frac{x}{1+x^2} = \frac{2x^3}{1-x^4}$

21° $\frac{a+1}{x^2-a^2} + \frac{a-1}{(x-a)^2} = \frac{2a(x-1)}{(x+a)(x-a)^2}$.

181. *Effectuer et simplifier.*

1° $\frac{2}{2-x} - \frac{x}{x-2} = \frac{2}{2-x} + \frac{x}{2-x} = \frac{2+x}{2-x}$

2° $\frac{5}{a^2-1} + \frac{5}{1-a} = \frac{5}{a^2-1} - \frac{5}{a-1} = \frac{-5a}{a^2-1}$

3° $\frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-a} = \frac{a}{a-b} - \frac{b}{a-b} = \frac{a-b}{a-b} = 1$

4° $\frac{3}{1-x^2} - \frac{2}{x-1} = \frac{3}{1-x^2} + \frac{2}{1-x} = \frac{5+2x}{1-x^2}$

5° $\frac{2a}{a+1} + \frac{3a^2+1}{1-a^2} = \frac{2a}{a+1} - \frac{3a^2+1}{a^2-1}$

$= -\frac{(a+1)^2}{a^2-1} = \frac{1+a}{1-a}$

6° $\frac{y^2}{x^3-y^3} + \frac{x^3y^2}{y^6-x^6} = \frac{y^2}{x^3-y^3} - \frac{x^3y^2}{x^6-y^6} = \frac{y^5}{x^6-y^6}$.

182. *Réduire en une seule fraction et simplifier :*

1° $a^2 - \frac{x^3}{a} = \frac{a^3-x^3}{a}$

2° $a - \frac{3b-a}{6} = \frac{7a-3b}{6}$

3° $1 - \dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{2b}{a+b}$ 4° $1 + \dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{2a}{a-b}$

5° $x - \dfrac{x^2}{a+x} = \dfrac{ax}{a+x}$

6° $a + b - \dfrac{a^2-b^2}{a+2b} = \dfrac{3b(a+b)}{a+2b}$

7° $2x - \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} = 2x - (x-2) = x+2$

8° $x + y + \dfrac{x^2-y^2}{x-y} = (x+y) + (x+y) = 2(x+y)$

9° $x + 2 - \dfrac{x^2-2x+4}{x+2} = \dfrac{(x+2)^2 - (x^2-2x+4)}{x+2} = \dfrac{6x}{x+2}$

10° $1 + x + x^2 + \dfrac{x^3}{1-x} = \dfrac{(1-x^3)+x^3}{1-x} = \dfrac{1}{1-x}$

11° $1 - x + x^2 - \dfrac{x^3}{1+x} = \dfrac{(1+x^3)-x^3}{1+x} = \dfrac{1}{1+x}$

12° $1 - 2x + x^2 + \dfrac{1-x^4}{1+2x+x^2} = \dfrac{(1-x^2)^2+(1-x^4)}{1+2x+x^2}$

$$= \frac{2(1-x^2)}{(1+x)^2} = \frac{2(1-x)}{1+x}.$$

183. *Effectuer les opérations suivantes et simplifier :*

1° $\dfrac{5x-1}{8} - \dfrac{3x-2}{7} + \dfrac{x-5}{4} = \dfrac{25x-61}{56}$

2° $\dfrac{x-2y}{xy} + \dfrac{3y-a}{ay} - \dfrac{3x-2a}{ax} = \dfrac{0}{axy} = 0$

3° $\dfrac{a-x}{x} + \dfrac{a+x}{a} - \dfrac{a^2-x^2}{2ax} = \dfrac{a^2+3x^2}{2ax}$

4° $\dfrac{2}{xy} - \dfrac{3y^2-x^2}{xy^3} + \dfrac{xy+y^2}{x^2y^2} = \dfrac{x^3+y^3}{x^2y^3}$

5° $\dfrac{1}{x+y} - \dfrac{1}{x-y} + \dfrac{2x}{x^2-y^2} = \dfrac{2(x-y)}{x^2-y^2} = \dfrac{2}{x+y}$

6° $\dfrac{12}{9-a^2} - \dfrac{2}{3+a} - \dfrac{1}{3-a} = \dfrac{3+a}{9-a^2} = \dfrac{1}{3-a}$

7° $\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{a-b} - \dfrac{2ab}{a^2-b^2} = \dfrac{(a-b)^2}{a^2-b^2} = \dfrac{a-b}{a+b}$

8° $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2} + \dfrac{b}{a-b} - \dfrac{a}{a+b} = \dfrac{2b(a+b)}{a^2-b^2} = \dfrac{2b}{a-b}$

9° $\dfrac{a+8}{a-1}+\dfrac{a+4}{a+1}-\dfrac{2(4a+1)}{a^2-1}=\dfrac{2(a+1)^2}{a^2-1}=\dfrac{2(a+1)}{a-1}$

10° $\dfrac{a}{2(a+b)}+\dfrac{2a^2}{3a^2-3b^2}-\dfrac{3b}{4a-4b}=\dfrac{14a^2-15ab-9b^2}{12(a^2-b^2)}$

11° $\dfrac{a+5}{a-1}-\dfrac{6}{a^2+a+1}-\dfrac{6(a^2+2)}{a^3-1}=\dfrac{a^3-1}{a^3-1}=1$

12° $\dfrac{a^3-b^3}{a^2-b^2}-\dfrac{a^2b+ab^2}{a^2+ab}=\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}-b=\dfrac{a^2}{a+b}$

13° $\dfrac{a^2+ab}{a^2-ab}-\dfrac{a^3+2a^2b+ab^2}{a^2b-b^3}=\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a(a+b)}{b(a-b)}$

$$=-\frac{a+b}{b}$$

14° $am(a+m)-\dfrac{a^4m+am^4}{a^2+2am+m^2}$

$$=am(a+m)-\frac{am(a^2-am+m^2)}{a+m}$$

$$=\frac{am(a+m)^2-am(a^2-am+m^2)}{a+m}=\frac{3a^2m^2}{a+m}$$

15° $\dfrac{a^3+2a^2b+ab^2}{a^2-b^2}+\dfrac{a^3+b^3}{(a-b)^2+2b(a-b)}$

$$=\frac{a(a+b)}{a-b}+\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}=\frac{2a^2+b^2}{a-b}$$

16° $2+\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{1}{2+x}+\dfrac{4}{x^2-4}=2,$

car la somme des deux premières fractions est égale à l'opposée de la troisième.

17° $\dfrac{3}{1+a}-\dfrac{2}{1-a}-\dfrac{5a}{a^2-1}$

$$=\frac{3}{1+a}-\frac{2}{1-a}+\frac{5a}{1-a^2}=\frac{1}{1-a^2}$$

18° $\dfrac{x-a}{x+a}+\dfrac{a^2+3ax}{a^2-x^2}+\dfrac{x+a}{x-a}=\dfrac{x-a}{x+a}-\dfrac{a^2+3ax}{x^2-a^2}+\dfrac{x+a}{x-a}$

$$=\frac{2x^2-3ax+a^2}{x^2-a^2}=\frac{(x-a)(2x-a)}{x^2-a^2}=\frac{2x-a}{x+a}$$

19° $\dfrac{3-2x}{2x+3}-\dfrac{2x+3}{3-2x}+\dfrac{36}{4x^2-9}$

$$=\frac{3-2x}{2x+3}+\frac{2x+3}{2x-3}+\frac{36}{4x^2-9}=\frac{12}{2x-3}$$

20° $\dfrac{ax^2+b}{2x-1}+\dfrac{2(bx+ax^2)}{1-4x^2}-\dfrac{ax^2-b}{2x+1}$

$$=\frac{ax^2+b}{2x-1}-\frac{2x(ax+b)}{4x^2-1}-\frac{ax^2-b}{2x+1}=\frac{2bx}{4x^2-1}.$$

184. *Effectuer et simplifier.*

1° $$\frac{x}{x^2+5x+6}+\frac{15}{x^2+9x+14}-\frac{12}{x^2+10x+21}$$
$$=\frac{x}{(x+2)(x+3)}+\frac{15}{(x+2)(x+7)}-\frac{12}{(x+3)(x+7)}$$
$$=\frac{x^2+10x+21}{(x+2)(x+3)(x+7)}=\frac{1}{x+2}$$

2° $$\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-x-2}+\frac{2}{x^2-1}$$
$$=\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{1}{(x+1)(x-2)}+\frac{2}{x^2-1}$$
$$=\frac{4x-4}{(x^2-1)(x-2)}=\frac{4}{(x+1)(x-2)}$$

3° $$\frac{1}{x^2-4x+3}+\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-5x+6}$$
$$=\frac{3x-6}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{3}{(x-1)(x-3)}$$

4° $$\frac{a^2+ac}{a^2c-c^3}-\frac{a^2-c^2}{a^2c+2ac^2+c^3}+\frac{2c}{c^2-a^2}-\frac{3}{a+c}$$
$$=\frac{a}{c(a-c)}-\frac{a-c}{c(a+c)}-\frac{2c}{a^2-c^2}-\frac{3}{a+c}=\frac{0}{c(a^2-c^2)}=0$$

5° $$\frac{b}{a(a^2-b^2)}+\frac{a}{b(a^2+b^2)}+\frac{a^4+b^4}{ab(b^4-a^4)}-\frac{a^6}{b^8-a^8}$$

La somme des deux premiers termes est égale à l'opposé du troisième terme. L'expression se réduit donc à son quatrième terme.

6° $$\frac{a^2-2ax+x^2}{2(a^2-x^2)}-\frac{2ax(a+x)}{(a-x)(a^2+2ax+x^2)}-\frac{x^2-a^2}{2(x-a)^2}$$
$$=\frac{a-x}{2(a+x)}-\frac{2ax}{a^2-x^2}+\frac{a+x}{2(a-x)}$$
$$=\frac{(a-x)^2-4ax+(a+x)^2}{2(a^2-x^2)}=\frac{a-x}{a+x}$$

7° $$\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$$
$$=\frac{1}{(a-b)(a-c)}-\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(a-c)(b-c)}$$
$$=\frac{0}{(a-b)(a-c)(b-c)}=0$$

8° $\dfrac{b-c}{(a-b)(a-c)} - \dfrac{c-a}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{a-b}{(c-a)(c-b)}$

$$= \frac{b-c}{(a-b)(a-c)} - \frac{a-c}{(a-b)(b-c)} + \frac{a-b}{(a-c)(b-c)}$$

$$= \frac{(b-c)^2 - (a-c)^2 + (a-b)^2}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$= \frac{2(b^2 - bc + ac - ab)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = \frac{2}{c-a}$$

9° $\dfrac{bc}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{ca}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{ab}{(c-a)(c-b)}$.

Le dénominateur commun est $(a-b)(a-c)(b-c)$. Le numérateur est $bc(b-c) - ac(a-c) + ab(a-b)$; c'est un trinôme en a qui s'annule pour $a = b$ et $a = c$; le coefficient de a^2 étant $b - c$, ce trinôme est égal au dénominateur commun.

L'expression proposée est donc égale à 1.

10° $\dfrac{a^2bc}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^2ca}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{c^2ab}{(c-a)(c-b)} = 0.$

185. *Effectuer les multiplications suivantes et simplifier :*

1° $\dfrac{a}{6b} \times \dfrac{3b}{4} \times \dfrac{2b}{5} = \dfrac{ab}{20}$

2° $\left(-\dfrac{7a}{10}\right) \times \dfrac{5a}{6} \times \dfrac{4x^2}{21a} = -\dfrac{ax^2}{9}$

3° $\left(-\dfrac{a}{2x}\right) \times \dfrac{8x}{9} \times \left(-\dfrac{6a}{7x}\right) = \dfrac{8a^2}{21x}$

4° $(-3a^2)\left(-\dfrac{11a}{15x}\right)\left(-\dfrac{x}{22}\right) = -\dfrac{a^3}{10}$

5° $\dfrac{4x^2 - 6xy}{5x} \times \dfrac{10x}{6x - 9y} = \dfrac{4x}{3}$

6° $\dfrac{8x - 2y}{x + y} \times \dfrac{2x - 8y}{4x - y} = \dfrac{4(x - 4y)}{x + y}$

7° $\dfrac{4 + 2a}{6 - 3a} \times \dfrac{3(a-2)^2}{2(a+2)^2} = \dfrac{6(a+2)(2-a)^2}{6(2-a)(a+2)^2} = \dfrac{2-a}{2+a}$

8° $\dfrac{6a + a^2}{6 - a} \times \dfrac{a^2 - 36}{a} = \dfrac{a(a+6)(a+6)(a-6)}{-(a-6)a} = -(a+6)^2$

9° $\dfrac{x^4 + x^2 - 2}{x^2 + 3x + 2} \times \dfrac{x+1}{x^2 - 1} = \dfrac{(x^2+2)(x^2-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)(x^2-1)} = \dfrac{x^2+2}{x+2}$

10° $\dfrac{2x^2 - 3x - 9}{x^2 + 5x + 4} \times \dfrac{x + 4}{2x + 3} = \dfrac{(x - 3)(2x + 3)(x + 4)}{(x + 1)(x + 4)(2x + 3)} = \dfrac{x - 3}{x + 1}$

11° $\dfrac{a^2x^2}{y^2} \times \dfrac{xy}{a(x + y)} \times \dfrac{x^2 - y^2}{axy} = \dfrac{x^2(x - y)}{y^2}$

12° $\dfrac{a + x}{(m + n)^3} \times \dfrac{x^2 - y^2}{12} \times \dfrac{(m + n)^2}{m - n} \times \dfrac{6(m^2 - n^2)}{x + y} = \dfrac{(a + x)(x - y)}{2}$

13° $\dfrac{ab - 3a}{4b - 5} \times \dfrac{20b - 25}{ac + 2a} \times \dfrac{2b + bc}{a - 5} \times \dfrac{2(5a - a^2)}{4c} = -\dfrac{5ab(b - 3)}{2c}$

14° $\dfrac{x^3 + y^3}{x^4 - y^4} \times \dfrac{x^2y + y^3}{x^4 + x^2y^2 + y^4} \times \dfrac{x^2 + xy + y^2}{x + y} = \dfrac{y}{x^2 - y^2}$

15° $\dfrac{6x^2 + 5xy - 6y^2}{3x^2 - 8xy - 3y^2} \times \dfrac{3x^2 - 11xy + 6y^2}{6x^2 + 11xy + 3y^2} \times \dfrac{9x^2 + 9xy + 2y^2}{9x^2 - 12xy + 4y^2}$

$$= \frac{(3x - 2y)(2x + 3y)(3x - 2y)(x - 3y)(3x + y)(3x + 2y)}{(3x + y)(x - 3y)(3x + y)(2x + 3y)(3x - 2y)^2} = \frac{3x + 2y}{3x + y}.$$

186. *Effectuer et simplifier.*

1° $\left(1 - x + \dfrac{4 + x^2}{1 + x}\right)(1 - x^2) = \dfrac{5(1 - x^2)}{1 + x} = 5(1 - x)$

2° $\left(1 - x - \dfrac{2 - x^2}{1 + x}\right)(1 - x^2) = \dfrac{-1}{1 + x} \times (1 - x^2) = x - 1$

3° $\left(\dfrac{1 + x}{1 - x} - \dfrac{1 - x}{1 + x}\right)\left(\dfrac{3}{4x} + \dfrac{x}{4} - x\right) = \dfrac{4x}{1 - x^2} \times \dfrac{3(1 - x^2)}{4x} = 3$

4° $\left(\dfrac{1}{x - y} - \dfrac{1}{x + y}\right) \times \dfrac{x^2 - y^2}{2y} = 1$

5° $\left(x^2 - xy + y^2 - \dfrac{2y^3}{x + y}\right) \times \dfrac{x + y}{x - y} = x^2 + xy + y^2$

6° $\left(x + 2a - \dfrac{a^2}{2x + 3a}\right)\left(2x - a - \dfrac{2a^2}{x + a}\right)$

$$= \frac{2x^2 + 7ax + 5a^2}{2x + 3a} \times \frac{2x^2 + ax - 3a^2}{x + a}$$

$$= \frac{(x + a)(2x + 5a)}{2x + 3a} \times \frac{(x - a)(2x + 3a)}{x + a} = (2x + 5a)(x - a)$$

7° $(x + 2)\left(1 + \dfrac{6x + 12}{x^2 - x - 6}\right)\left(1 - \dfrac{5x + 5}{x^2 + 3x + 2}\right) =$

$$(x + 2)\left(1 + \frac{6}{x - 3}\right)\left(1 - \frac{5}{x + 2}\right) = \frac{(x + 2)(x + 3)(x - 3)}{(x - 3)(x + 2)} = x + 3$$

8° $\left(b + \frac{ab}{b-a}\right)\left(b - \frac{ab}{a+b}\right) \times \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}$

$$= \frac{b^2}{b-a} \times \frac{b^2}{a+b} \times \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} = \frac{b^4}{b^2 + a^2}.$$

187. *Effectuer les divisions suivantes et simplifier.*

1° $(x + y) : \frac{x+y}{x-y} = x - y$

2° $(a^2 - b^2) : \frac{a+b}{a-b} = (a-b)^2$

3° $\frac{a^2 - 4}{b+3} : \frac{a+2}{b^2 - 9} = (a-2)(b-3)$

4° $\frac{4x^2 - 9a^4}{ab - a^2} : \frac{2x - 3a^2}{a^3b - a^4} = a^2(2x + 3a^2)$

5° $\frac{(a+b)^2}{x-y} : \frac{a^2 - b^2}{x^2 - y^2} = \frac{(a+b)(x+y)}{a-b}$

6° $\frac{20x - 25}{3b - 4} : \frac{4a^2x - 5a^2}{9b^2 - 16} = \frac{5(3b+4)}{a^2}$

7° $\left(\frac{a^2}{x^2} - \frac{x^2}{a^2}\right) : \left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a}\right) = \frac{a}{x} - \frac{x}{a} = \frac{a^2 - x^2}{ax}.$

Le dividende est une différence de deux carrés et le quotient est le binôme conjugué du diviseur.

8° $\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x^2}\right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right) = -\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{x}\right) = -\frac{a+x}{ax}$

9° $\left(a^4 - \frac{1}{a^2}\right) : \left(a^2 + \frac{1}{a}\right) = a^2 - \frac{1}{a} = \frac{a^3 - 1}{a}$

10° $\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) : \left(\frac{a}{x^2} + \frac{a}{x}\right) = \frac{x^2 - 1}{x^2} : \frac{a + ax}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{a(x+1)} = \frac{x-1}{a}$

11° $\left(1 + \frac{a^3}{x^3}\right) : \left(\frac{1}{x^2} + \frac{a}{x^3}\right) = \frac{x^3 + a^3}{x + a} = x^2 - ax + a^2$

12° $\left(1 + \frac{x-a}{x+a}\right) : \left(\frac{x+a}{x-a} - 1\right) = \frac{2x}{x+a} : \frac{2a}{x-a} = \frac{x(x-a)}{a(x+a)}$

13° $\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right) : \left(\frac{1}{x^2} - 1\right) = \frac{x-3}{x(1-x)}$

14° $(2x^2 - x - 6) : \left(\frac{4}{x^2} - 1\right) = -\frac{x^2(2x+3)}{x+2}$

15° $\frac{2}{1-x^2} : \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right) = \frac{2}{1-x^2} : \frac{2x}{1-x^2} = \frac{1}{x}$

$$16^{o}\ \left(\frac{a^3-b^3}{a-b}-\frac{a^3+b^3}{a+b}\right):\frac{4ab}{a^2-b^2}=2ab:\frac{4ab}{a^2-b^2}=\frac{a^2-b^2}{2}.$$

188. *Transformer les expressions suivantes :*

$$1^{o}\ \frac{\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{x}{1-x}}{\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{x}{1+x}}\qquad\qquad 4^{o}\ \frac{\dfrac{a-b}{1+ab}+\dfrac{b-c}{1+bc}}{1-\dfrac{(a-b)(b-c)}{(1+ab)(1+bc)}}$$

$$2^{o}\ \frac{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}{1-\dfrac{a^2+b^2}{(a+b)^2}}\qquad\qquad 5^{o}\ \frac{1}{a-\dfrac{a^2-1}{a+\dfrac{1}{a-1}}}$$

$$3^{o}\ \frac{\dfrac{x-y}{y-a}-\dfrac{y-a}{x-y}}{\dfrac{x-y-1}{x-y}-\dfrac{y-a-1}{y-a}}\qquad\qquad 6^{o}\ \frac{a-x}{a^2-ax-\dfrac{(a-x)^2}{1-\dfrac{a}{x}}}$$

$$7^{o}\ \frac{\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{a}{a-1}}{2-\dfrac{a-7}{1-a}}\times\frac{1-\dfrac{4}{a+1}}{a+\dfrac{a(a-1)}{a+1}}.$$

$$8^{o}\ \frac{a+\dfrac{b-a}{1+ab}}{1-\dfrac{a(b-a)}{1+ab}}\times\frac{\dfrac{x+y}{1-xy}-y}{1+\dfrac{y(x+y)}{1-xy}}$$

$$9^{o}\ \frac{\dfrac{x-1}{3}+\dfrac{x-1}{x-2}}{\dfrac{x+2}{4}+\dfrac{x+2}{x-3}}:\frac{\dfrac{x+3}{3}-\dfrac{x+3}{x-2}}{\dfrac{x-5}{12}+\dfrac{x-5}{4(x-1)}}$$

$$10^{o}\ \frac{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-1}{\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{x}{y}+1}\times\frac{1+\dfrac{y}{x}}{x-y}:\frac{1+\dfrac{y^3}{x^3}}{\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{y^2}{x}}.$$

Nous désignerons chaque fois par E l'expression à calculer, par N son numérateur et par D son dénominateur.

1° En multipliant le numérateur et le dénominateur par $1-x^2$, il vient :

$$E=\frac{1-x+x(1+x)}{1+x-x(1-x)}=\frac{x^2+1}{x^2+1}=1.$$

2° On a successivement :

$$N = \frac{4ab}{a^2 - b^2}; \quad D = \frac{2ab}{(a + b)^2}; \quad E = \frac{2(a + b)^2}{a^2 - b^2} = \frac{2(a + b)}{a - b}.$$

3° En multipliant N et D par $(x - y)(y - a)$, il vient

$$E = \frac{(x - y)^2 - (y - a)^2}{(x - y - 1)(y - a) - (y - a - 1)(x - y)}$$
$$= \frac{(x - a)(x - 2y + a)}{x - 2y + a} = x - a.$$

4° En multipliant N et D par $(1 + ab)(1 + bc)$, il vient

$$E = \frac{(a - b)(1 + bc) + (b - c)(1 + ab)}{(1 + ab)(1 + bc) - (a - b)(b - c)}$$
$$= \frac{(a - c)(b^2 + 1)}{(1 + ac)(b^2 + 1)} = \frac{a - c}{1 + ac}.$$

5° Comme $a + \dfrac{1}{a - 1} = \dfrac{a^2 - a + 1}{a - 1}$, on peut écrire :

$$D = a - \frac{(a^2 - 1)(a - 1)}{a^2 - a + 1} = \frac{2a - 1}{a^2 - a + 1}$$

et $\quad E = \dfrac{a^2 - a + 1}{2a - 1}.$

6° Comme $1 - \dfrac{a}{x} = \dfrac{x - a}{x}$, on a

$$D = a^2 - ax - x(x - a) = a^2 - x^2 \quad \text{et} \quad E = \frac{1}{a + x}.$$

7° Les deux facteurs valent respectivement

$$\frac{2a^2}{3(a + 1)(a - 3)} \quad \text{et} \quad \frac{a - 3}{2a^2}; \quad \text{d'où} \quad E = \frac{1}{3(a + 1)}.$$

8° Les deux facteurs valent respectivement

$$\frac{a + a^2b + (b - a)}{1 + ab - a(b - a)} = b \quad \text{et} \quad \frac{x + y - y(1 - xy)}{1 - xy + y(x + y)} = x.$$

D'où $E = bx$.

9° Le dividende et le diviseur valent respectivement

$$\frac{4(x - 1)(x - 3)}{3(x - 2)(x + 2)} \quad \text{et} \quad \frac{4(x - 1)(x + 3)}{(x - 2)(x + 2)}$$

D'où $\quad E = \dfrac{x - 3}{3(x + 3)}.$

10° Le dividende vaut

$$\frac{y(x^2+y^2-xy)}{x(x^2+y^2+xy)} \times \frac{x+y}{x(x-y)} = \frac{y(x^3+y^3)}{x^2(x^3-y^3)};$$

et le diviseur

$$\frac{x^3+y^3}{x^3} : \frac{x^3-y^3}{xy} = \frac{y(x^3+y^3)}{x^2(x^3-y^3)}.$$

D'où $E = 1$.

CHAPITRE VI

Équations.

189. *Résoudre les équations suivantes :*

1° $6(x+5) - 5x = 25$ — Rép. $x = -5$

2° $4(4+2x) = 60 - 3x$ — » $x = 4$

3° $60x + 1 = 3(3+4x)$ — » $x = \frac{1}{6}$

4° $(5-x)(x+4) = 8 - x^2$ — » $x = -12$

5° $(x-3)^2 - 5(10+x) = x^2 - 8$.

Il importe de s'exercer à effectuer les calculs indiqués et à réduire les termes semblables sans écritures intermédiaires. On trouve dans le cas actuel

$$x^2 - 11x - 41 = x^2 - 8.$$

D'où $-11x = 33$ et $x = -3$.

6° $(x+5)^2 - (x-5)^2 = 500$ — Rép. $x = 25$

7° $(x-4)^2 - 5(16-x) = x(x-1)$ — » $x = -32$

8° $(x+2)(x+3) = x^2 + 366$ — » $x = 72$.

190. *Résoudre les équations suivantes :*

1° $3x + 100 = \frac{x}{3} + \frac{x}{2} - 4$

On ne réduit pas les termes du second membre au même dénominateur, mais on multiplie les deux membres de l'équation par le p. p. c. m. des dénominateurs. Il vient ainsi

$$6(3x+100) = 2x + 3x - 24.$$

D'où $13x = -624$ et $x = -48$.

2° $3x - \frac{1}{2}(4-x) = x - \frac{1}{3}$ — Rép. $x = \frac{2}{3}$

3° $3x - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{5} + 6\right) = 25 + \frac{3x}{2}$

Faire disparaître les parenthèses, puis multiplier les deux membres par le p. p. c. m. des dénominateurs. On trouve successivement

$$3x - \frac{x}{10} - 3 = 25 + \frac{3x}{2} \quad \text{et} \quad 30x - x - 30 = 250 + 15x.$$

D'où $$14x = 280 \quad \text{et} \quad x = 20.$$

4° $\frac{2x}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{5x}{4} - 4\right) = x + \frac{27}{5}$ **Rép.** $x = -4$

5° $\frac{5x - 11}{4} - \frac{x - 1}{10} = \frac{11x - 1}{12}$

En multipliant les deux membres par 60 qui est le p. p. c. m. des dénominateurs, il vient

$$15(5x - 11) - 6(x - 1) = 5(11x - 1).$$

On effectue les calculs indiqués et on réduit les termes semblables, sans écritures intermédiaires. On trouve ainsi

$$69x - 159 = 55x - 5;$$

puis $$14x = 154; \quad \text{d'où } x = 11.$$

6° $\frac{x - 2}{3} - \frac{12 - x}{2} = \frac{5x - 36}{4} - 1$ **Rép.** $x = 8$

7° $\frac{x + 1}{2} - \frac{6x + 7}{8} = \frac{4 - 3x}{5} - \frac{1}{8}$ » $x = 3$

8° $\frac{5x - 1}{7} - \frac{9x - 7}{5} + \frac{9x - 5}{11} = 0$ » $x = 3.$

191. *Résoudre les équations suivantes :*

1° $x - 7\left(\frac{x}{5} - \frac{x - 5}{4}\right) = 25$

Cette équation peut s'écrire

$x - \frac{7x}{5} + \frac{7(x - 5)}{4} = 25.$ **Rép.** $x = 25$

2° $x - \left(\frac{x}{33} + \frac{x - 15}{4\frac{1}{2}}\right) = \frac{12}{11}$ » $x = -3$

3° $\frac{30}{x + 5} - \frac{15}{3} + \frac{5 + 4x}{x + 5} = 0$ » $x = 10$

4° $\frac{4}{x + 2} + \frac{7}{x + 3} = \frac{37}{x^2 + 5x + 6}$ » $x = 1$

5° $\frac{x + 8}{x - 1} - \frac{4 + x}{x + 1} = \frac{12x}{x^2 - 1}$ » $x = 2$

6° $\dfrac{3}{3 - 5x - 2x^2} - \dfrac{3 - 2x}{x + 3} = 2$ **Rép.** $x = \dfrac{1}{3}$.

Les racines des trois dernières équations conviennent, car elles n'annulent aucun dénominateur.

192. *Résoudre les équations suivantes :*

1° $3(x - 1)(x - 2) - (x - 3)(x - 4) = (2x + 7)(x + 4)$
Rép. $x = -2$

2° $(2x - 3)(3x - 2) - (4x - 5)(5x - 4)$
$= (3 + 2x)(12 - 7x)$
Rép. $x = 2$

3° $\dfrac{3 + 2x}{1 + 2x} - \dfrac{5 + 2x}{7 + 2x} = 1 - \dfrac{4x^2 - 1}{7 + 16x + 4x^2}$
Rép. $x = 1$

4° $\dfrac{2x}{x + 10} - \dfrac{2(x - 5)}{x + 20} = \dfrac{160}{x + 10} - \dfrac{150}{x + 20}$
Rép. $x = 80$

5° $\dfrac{4x + 5}{2x^2 - 9x + 7} - \dfrac{3x}{x - 1} = \dfrac{5}{2x - 7} - \dfrac{3(x - 2)}{x - 1}$
Rép. $x = 4$

6° $5\left(\dfrac{9}{x - 5} - \dfrac{5}{x + 5}\right) - \dfrac{3(6x + 5)}{x^2 - 25} = \dfrac{25}{x + 5}$
Rép. $x = 20$.

Les racines des quatre dernières équations conviennent, car elles n'annulent aucun dénominateur.

193. *Résoudre les équations suivantes en les décomposant d'abord en d'autres équations de degré moindre.*

1° $x^2 - 9 = 0$.

Cette équation peut s'écrire $(x + 3)(x - 3) = 0$. Elle est donc équivalente à l'ensemble des équations $x + 3 = 0$ et $x - 3 = 0$; d'où $x = \pm 3$.

2° $4x^2 - 1 = 0$; $(2x + 1)(2x - 1) = 0$
Rép. $x = \pm 0{,}5$

3° $x^2 - 3x = 0$; $x(x - 3) = 0$
Rép. $x = 0$ ou 3

4° $x^2 - x - 6 = 0$; $(x + 2)(x - 3) = 0$
Rép. $x = -2$ ou 3

5° $x^2 + 10x + 21 = 0$; $(x + 3)(x + 7) = 0$
Rép. $x = -3$ ou -7

6° $2x^2 + x - 15 = 0$; $(x + 3)(2x - 5) = 0$
Rép. $x = -3$ ou $2{,}5$

7° $6x^2 - 13x + 6 = 0$; $(3x - 2)(2x - 3) = 0$
Rép. $x = \frac{2}{3}$ ou $\frac{3}{2}$.

8° $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$; $x(x + 1)(x - 3) = 0$
Rép. $x = 0, -1$ ou 3

9° $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; $(x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$
Rép. $x = \pm 1$ ou ± 2

10° $x^3 - 7x - 6 = 0$; $(x + 1)(x + 2)(x - 3) = 0$
Rép. $x = -1, -2$ ou 3

11° $(x - 9)^2 - 1 = 0$; $(x - 8)(x - 10) = 0$
Rép. $x = 8$ ou 10

12° $(x - 4)^2 - 16 = 0$; $x(x - 8) = 0$
Rép. $x = 0$ ou 8

13° $(x - 2)^2 - 9(x - 2) = 0$; $(x - 2)(x - 11) = 0$
Rép. $x = 2$ ou 11

14° $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$; $(x + 1)(x - 2)(x + 3) = 0$
Rép. $x = -1, 2$ ou -3

15° $3x^3 + 2x^2 - 3x - 2 = 0$; $(x + 1)(x - 1)(3x + 2) = 0$
Rép. $x = \pm 1$ ou $-\frac{2}{3}$

16° $x^3 + x^2 = 4x + 4$; $(x + 1)(x + 2)(x - 2) = 0$
Rép. $x = -1, -2$ ou 2

17° $x^5 - 2x^4 = x - 2$; $(x - 2)(x^4 - 1) = 0$
Rép. $x = 2$ ou ± 1

18° $b^2 + 2ax = x^2 + a^2$; cette équation peut s'écrire
$b^2 - (x - a)^2 = 0$ ou $(b + x - a)(b - x + a) = 0$
Rép. $x = a \pm b$.

194. *Montrer que les équations suivantes sont impossibles ou indéterminées.*

1° $2x - \frac{2x}{9} = \frac{1}{9}\left(16x - \frac{3}{2}\right)$.

Cette équation est impossible, car elle peut s'écrire

$$36x - 4x = 32x - 3 \quad \text{ou} \quad 0.x = -3.$$

2° $\frac{5x}{18} - \frac{4x - 3}{8} = \frac{9 - 2x}{9}$.

Cette équation est impossible, car elle peut s'écrire

$$20x - 9(4x - 3) = 8(9 - 2x) \quad \text{ou} \quad 0.x = 45.$$

3° $\frac{3x}{2} - \frac{2x}{3} = 5\left(\frac{x}{6} + 1\right) - 5.$

Cette équation est indéterminée, car elle donne

$$9x - 4x = 5x + 30 - 30 \quad \text{ou} \quad 0.x = 0.$$

4° $\frac{2}{x+1} + \frac{5}{x-1} = \frac{10}{x^2-1}$

La résolution de cette équation donne $x = 1$. Cette racine ne convient pas, car elle annule $x - 1$ et $x^2 - 1$. L'équation proposée est impossible.

5° $\frac{2x-3}{5} + \frac{x}{2} = \frac{3(3x-2)}{10}$

Cette équation est indéterminée, car elle donne

$$2(2x - 3) + 5x = 3(3x - 2) \quad \text{ou} \quad 0.x = 0.$$

6° $\frac{4}{x} + \frac{x}{x+1} = \frac{x^2}{x^2+x}$

La résolution de cette équation donne $x = -1$. Cette racine ne convient pas, car elle annule deux dénominateurs. L'équation est impossible.

7° $\frac{x-1}{2} = \frac{x^2+2}{2(x+2)} + \frac{x-1}{x+2} - \frac{1}{2}$

Cette équation est indéterminée, car elle peut s'écrire

$$(x - 1)(x + 2) = x^2 + 2 + 2(x - 1) - (x + 2) \text{ ou } 0.x = 0$$

8° $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{4}{x+1}\left(\frac{1}{x-1} + 1\right)$

Cette équation est indéterminée, car elle peut s'écrire

$$(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = 4 + 4(x - 1) \quad \text{ou} \quad 0.x = 0.$$

195. *Résoudre les équations littérales suivantes* (sans discussion).

1° $2abx + a^2 = a^2x + b^2x$ Rép. $x = \frac{a^2}{(a-b)^2}$

2° $2a(x - 2a) = x - 1$ » $x = 2a + 1$

3° $a^2(x - a) = b^2(x - b)$ » $x = \frac{a^2 + ab + b^2}{a+b}$

4° $a^3(bx - a) = b^3(ax - b)$ » $x = \frac{a^2 + b^2}{ab}$

5° $(a + x)(b + x) = x(x - c)$ » $x = -\frac{ab}{a+b+c}$

6° $(a - b)(x + a) = (a + b)(x - b)$ » $x = \frac{a^2 + b^2}{2b}.$

196. 1° $b + \frac{ax}{b} = \frac{bx}{a} + a$ Rép. $x = \frac{ab}{a+b}$

$2^o\ \dfrac{a(d^2 + x^2)}{dx} = \dfrac{ax}{d} + ac$ Rép. $x = \dfrac{d}{c}$

$3^o\ \dfrac{2(x - a)}{3x - b} = \dfrac{2x + a}{3(x - b)}$ » $x = \dfrac{7ab}{9a + 4b}$

$4^o\ \dfrac{x - a}{2} = \dfrac{(x - b)^2}{2x - a}$ » $x = \dfrac{a^2 - 2b^2}{3a - 4b}$

$5^o\ \dfrac{x + a}{b} - \dfrac{x - b}{a} = 2$ » $x = b - a$

$6^o\ \dfrac{x}{ab} - \dfrac{a - x}{a(a + b)} = \dfrac{b - x}{b(a + b)}$ » $x = \dfrac{ab}{a + b}$

$7^o\ \dfrac{a + b}{x} - \dfrac{2b}{a - b} = 2 - \dfrac{a - b}{x}$ » $x = a - b$

$8^o\ \dfrac{x + a}{a + 1} - \dfrac{x - a}{a - 1} = \dfrac{4(x - a^2)}{1 - a^2}$ » $x = a^2$

$9^o\ \dfrac{2a + x}{2b - x} - \dfrac{2a - x}{2b + x} = \dfrac{4ab}{4b^2 - x^2}$ » $x = \dfrac{ab}{a + b}$

$10^o\ \dfrac{2x + a}{x + 3a} + \dfrac{3x^2 - 22a^2}{x^2 - 9a^2} = 5$ » $x = 4a.$

197. $1^o\ (b + c)^2 = \dfrac{b^3 - c^3}{b - c} + \dfrac{bc(b + c)}{x}.$

Cette équation peut s'écrire

$$b^2 + 2bc + c^2 = b^2 + bc + c^2 + \frac{bc(b + c)}{x}.$$

Réduisant et divisant par bc, il vient

$$1 = \frac{b + c}{x}; \quad \text{d'où} \quad x = b + c.$$

$2^o\ (b - c)^2 = \dfrac{b^3 + c^3}{b + c} - \dfrac{bc(b - c)}{x}$ Rép. $x = b - c$

$3^o\ [(a^2 - b^2)x - 1]^2 + (2abx - 1)^2 = [(a^2 + b^2)x + 1]^2$

On a

$$(2abx - 1)^2 = [(a^2 + b^2)x + 1]^2 - [(a^2 - b^2)x - 1]^2.$$

Le second membre est une différence de deux carrés. Décomposons-le en un produit de deux facteurs. Il vient ainsi

$$(2abx - 1)^2 = 2a^2x \times 2(b^2x + 1) \quad \text{ou} \quad 1 = 4a^2x + 4abx.$$

Rép. $x = \dfrac{1}{4a(a + b)}$

4° $$\frac{x + a^2}{(a + b - c)(a - b + c)} + \frac{x - b^2 - c^2}{(c - a - b)(b - a - c)} = 1$$

En observant que les deux dénominateurs sont égaux, on voit que l'équation peut s'écrire

$$2x + a^2 - b^2 - c^2 = (a + b - c)(a - b + c).$$

On trouve ensuite $x = bc$.

5° $$\frac{(m + n)(mnx + nx^2 + x^3)}{x^3 + nx^2 - m^2x - m^2n} = \frac{nx^2}{x^2 - m^2} + \frac{mx}{x + n} + \frac{mn}{x - m}$$

Multiplions les deux membres par le dénominateur du 1er membre, qui vaut $(x^2 - m^2)(x + n)$. Le second membre devient

$$nx^2(x + n) + mx(x^2 - m^2) + mn(x + m)(x + n)$$
$$= x^3(m + n) + nx^2(m + n) + (m + n)mnx - m^3x + m^2n^2.$$

Réduisons les termes semblables dans les deux membres. Il vient

$$m^3x = m^2n^2; \quad \text{d'où} \quad x = \frac{n^2}{m}.$$

6° $$\frac{a(a^2x - b^2x)}{b} + \frac{b(a^2x - b^2x)}{a} + \frac{2ab}{a + b} = \frac{(a + b)^2(a^2x - b^2x)}{ab}$$

En faisant passer dans le second membre toutes les fractions qui renferment x, l'équation devient

$$\frac{2ab}{a + b} = \frac{2ab(a^2x - b^2x)}{ab} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{a + b} = \frac{a^2x - b^2x}{ab}.$$

De là, on déduit :

Rép. $x = \dfrac{ab}{(a + b)^2(a - b)}$.

7° $$\frac{3abc}{a + b} + \frac{a^2b^2}{(a + b)^3} - \frac{3acx + bx}{a} = -\frac{2b^2x}{(a + b)^2} - \frac{b^3x}{a(a + b)^2}.$$

Multiplions les deux membres par $a(a + b)^3$, puis faisons passer tous les termes dans le premier membre.

$$3a^2bc(a + b)^2 + a^3b^2 - (3ac + b)(a + b)^3x + 2ab^2(a + b)x$$
$$+ b^3(a + b)x = 0.$$

Le coefficient de x est

$$(a + b)[-(a + b)^2(3ac + b) + 2ab^2 + b^3]$$
$$= (a + b)[-3ac(a + b)^2 - a^2b].$$

L'équation devient donc

$$(a + b)[3ac(a + b)^2 + a^2b]x = ab[3ac(a + b)^2 + a^2b].$$

Rép. $x = \dfrac{ab}{a + b}$.

8o $\dfrac{x-(a-1)}{x-a} - \dfrac{x-a}{x-(a+1)} = \dfrac{x-(b-1)}{x-b} - \dfrac{x-b}{x-(b+1)}$

Le 1er membre vaut

$$\frac{[(x-a)^2-1]-(x-a)^2}{(x-a)\,[x-(a+1)]} = \frac{-1}{(x-a)\,[x-(a+1)]}$$

Le 2e membre vaut de même $\dfrac{-1}{(x-b)\,[x-(b+1)]}$

On a donc $(x-a)(x-a-1) = (x-b)(x-b-1)$.

Rép. $x = \dfrac{a+b+1}{2}$.

198. *Résoudre les équations suivantes en appliquant les propriétés des proportions.*

1o $\dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{a+1}{a-1}$

Dans toute proportion, la somme des deux premiers termes est à leur différence comme la somme des deux derniers est à leur différence. En appliquant ce principe, on a

$$\frac{2}{2x} = \frac{2a}{2}.$$

Rép. $x = \dfrac{1}{a}$.

2o $\dfrac{5+x}{7+x} = \dfrac{4-x}{5-x}$

Dans toute proportion, la somme des antécédents est à la somme des conséquents comme la différence des antécédents est à la différence des conséquents. En appliquant ce principe, on a

$$\frac{9}{12} = \frac{1+2x}{2+2x}; \quad \text{puis} \quad 3(2+2x) = 4(1+2x).$$

Rép. $x = 1$.

3o $\dfrac{x+7}{x+4} = \dfrac{x-1}{x-2}$ **Rép.** $x = 5$

4o $\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{a+b+1}{a+b-1}$ » $x = a+b$

5o $\dfrac{ax+a}{ax-a} = b$ » $x = \dfrac{b+1}{b-1}$

6o $\dfrac{x+1}{x+a+b} = \dfrac{x-1}{x+a-b}$ » $x = \dfrac{a}{b-1}$.

CHAPITRE VII

Équations simultanées.

§ I — SYSTÈMES DE 2 ÉQUATIONS A 2 INCONNUES.

Résoudre les systèmes suivants :

199. 1° $3x + 4y = 24$, $5y = 15$ — Rép. $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$

2° $x + y = 19$, $2x - y = 2$ — » $\begin{cases} x = 7 \\ y = 12 \end{cases}$

3° $12x - 5y = 29$, $4x - 3y = 11$ — » $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

4° $x + y = 28$, $3x - 11y = 8y - 48$ — » $\begin{cases} x = 22 \\ y = 6 \end{cases}$

5° $5x = y$, $12x - 2y = 10$ — » $\begin{cases} x = 5 \\ y = 25 \end{cases}$

6° $2x + 3y = 4$, $3y + 10x = 44$ — » $\begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases}$

7° $2x - 3y + 25 = 0$, $4x - y - 25 = 0$ — » $\begin{cases} x = 10 \\ y = 15 \end{cases}$

8° $x + 3y = 11$, $5y - 3(x - 1) = 68$ — » $\begin{cases} x = -10 \\ y = 7 \end{cases}$

9° $12x + 11y = 6$, $3y - 2x = 28$ — » $\begin{cases} x = -5 \\ y = 6 \end{cases}$

10° $2x + 5y = 69$, $y - 4(x - 7) = 67 - 3x$ — » $\begin{cases} x = -18 \\ y = 21 \end{cases}$

11° $72x + 14y = 330$ ou $36x + 7y = 165$, $63x + 7y = 273$ ou $9x + y = 39$ — » $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$

12° $21x + 8y + 66 = 0$, $28x - 23y - 13 = 0$ — » $\begin{cases} x = -2 \\ y = -3. \end{cases}$

200. 1° $x + \frac{3y}{7} = 17$; $y - \frac{5x}{8} = 16$.

Rép. $x = 8$, $y = 21$.

2° $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 9$; $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 7$.

Rép. $x = 12$, $y = 20$.

3° $\frac{4x - 5}{2y - 3} = 3;\quad \frac{3x + 5}{y + 1} = 4.$

Rép. $x = 5,\ y = 4.$

4° $\frac{x - 1}{8} + \frac{y - 2}{5} = 2;\quad 2x + \frac{2y - 5}{3} = 21.$

Rép. $x = 9,\ y = 7.$

5° $\frac{x - 4}{3} - \frac{3y + 4}{10} = x - y;\quad \frac{2x - 5}{5} - \frac{2y - 4}{4} = x - 12.$

Rép. $x = 10,\ y = 12.$

6° $\frac{4x + 15}{3} - \frac{3y - 5}{5} = x;\quad \frac{2y + 3x}{4} + \frac{y + 15}{5} = y.$

Rép. $x = 0,\ y = 10.$

7° $\frac{x - y}{3} - \frac{1}{4}\left(x - \frac{10 - 2y}{3}\right) = 3;$

$\frac{x - 5y}{5} + \frac{x + 2}{2} = x - 4.$

Rép. $x = 20,\ y = -1.$

8° $\frac{3x}{5} + \frac{4y}{10} = \frac{x - y}{5};\quad \frac{10(2x + 3)}{11} - 2\left(y - \frac{3x - 5}{8}\right) = 60.$

Rép. $x = 15,\ y = -10.$

9° $\frac{13}{3 + x + 2y} + \frac{3}{6 + 4x - 5y} = 0;$

$\frac{6x - 5y + 4}{3} = \frac{3x + 2y + 1}{19}.$

Rép. $x = 7,\ y = 8.$

10° $\frac{x + 5}{x + 1} = \frac{y - 9}{y + 7} + \frac{112}{(x + 1)(y + 7)};\quad 2x + 10 = 3y + 1.$

Rép. $x = 3,\ y = 5.$

Résoudre les systèmes littéraux suivants (sans discussion).

201. 1° $x + y = 2a$, $x - y = 2b$ **Rép.** $\begin{cases} x = a + b \\ y = a - b \end{cases}$

2° $ax + by = 2ab$, $bx + ay = a^2 + b^2$ » $\begin{cases} x = b \\ y = a \end{cases}$

3° $x + y = a - 2b$, $bx + ay + b^2 = 0$ » $\begin{cases} x = a - b \\ y = -b \end{cases}$

4° $x + y = c$, $ax - by = c(a - b)$ » $\begin{cases} x = \dfrac{ac}{a + b} \\ y = \dfrac{bc}{a + b} \end{cases}$

5° $ax + by = 2a$

$a^2x - b^2y = a^2 + b^2$

Rép. $\begin{cases} x = \dfrac{a+b}{a} \\ y = \dfrac{a-b}{b} \end{cases}$

6° $ax + by = a^3 + 2a^2b + b^3$
$bx + ay = a^3 + 2ab^2 + b^3$ » $\begin{cases} x = a^2 + ab + b^2 \\ y = a^2 - ab + b^2 \end{cases}$

7° $(a + b)x - (a - b)y = 4ab$
$(a - b)x + (a + b)y = 2a^2 - 2b^2$ » $\begin{cases} x = a + b \\ y = a - b \end{cases}$

8° $(a + b)x + (a - b)y = 2ab$
$(a + c)x + (a - c)y = 2ac$ » $\begin{cases} x = a \\ y = - a. \end{cases}$

202. 1° $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 2$
$bx - ay = 0$ Rép. $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$

2° $\dfrac{x}{a+b} + \dfrac{y}{a-b} = 2a$
$\dfrac{x-y}{2ab} = \dfrac{x+y}{a^2+b^2}$ » $\begin{cases} x = (a+b)^2 \\ y = (a-b)^2 \end{cases}$

3° $\dfrac{x}{a+b} + \dfrac{y}{a-b} = \dfrac{1}{a-b}$
$\dfrac{x}{a+b} - \dfrac{y}{a-b} = \dfrac{1}{a+b}$ » $\begin{cases} x = \dfrac{a}{a-b} \\ y = \dfrac{b}{a+b} \end{cases}$

4° $\dfrac{1}{a-x} + \dfrac{1}{a+y} = \dfrac{3a}{(a-x)(a+y)}$
$\dfrac{a+x}{a} = \dfrac{a-y}{b}$ » $\begin{cases} x = -\dfrac{ab}{a+b} \\ y = \dfrac{a^2}{a+b} \end{cases}$

5° $(a - b)x + y = \dfrac{a+b+1}{a+b}$
$x + (a + b)y = \dfrac{a-b+1}{a-b}$ » $\begin{cases} x = \dfrac{1}{a-b} \\ y = \dfrac{1}{a+b} \end{cases}$

6° $\dfrac{x-a}{y-a} = \dfrac{a-b}{a+b}$
$\dfrac{x}{y} = \dfrac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$ » $\begin{cases} x = \dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b} \\ y = \dfrac{a^2-ab+b^2}{a-b} \end{cases}$

§ II. — SYSTÈMES A PLUS DE DEUX INCONNUES.

Résoudre les systèmes suivants :

203. 1° $4x + 3y + 6z = 41$
$8x + 5y = 31$
$7y = 21$ Rép. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 4 \end{cases}$

2° $2x - 3y + 2z = 41$
$5x + 3y = 10 - z$
$9x = 27$
Rép. $\begin{cases} x = 3 \\ y = -5 \\ z = 10 \end{cases}$

3° $7x - 4y - 5z = 56$
$3y - 2z = 13$
$5x - 3y = 22$
» $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \\ z = -5 \end{cases}$

4° $6x - y + 3z = 38$
$5x - 2y + z = 24$
$3x + 5z = 28$
» $\begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \\ z = 2 \end{cases}$

5° $x + y + z = 25$
$x - y + z = 5$
$x + 2z = 2y - 10$
» $\begin{cases} x = 20 \\ y = 10 \\ z = -5 \end{cases}$

6° $x - y - z = 6$
$x - 2y - 3z = 10$
$5x + 6y + z = 2$
» $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$

7° $3z - 2y - x = 18$
$2y + 3z - 2x = 36$
$5x + 2y - z = 10$
» $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \\ z = 10 \end{cases}$

8° $x + 4y - z = 1$
$2x - 3y + 2z = 21$
$2y - x + z = 17$
» $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 13 \end{cases}$

9° $3x - y + z = 29$
$x + 3y + 30z = 6$
$x - y + z = 17$
» $\begin{cases} x = 6 \\ y = -10 \\ z = 1 \end{cases}$

10° $2x + 3y + 4z = 53$
$3x + 5y - 4z = 2$
$4x + 7y - 2z = 31$
» $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \\ z = 8 \end{cases}$

11° $x + y + z = 0$
$(b + c)x + (a + c)y + (a + b)z = 0$
$bcx + acy + abz = 1$

Dans les deux dernières équations, remplacer x (ou y, ou z) par sa valeur tirée de la 1re.

Rép. $x = \frac{1}{(a - b)(a - c)}$; $y = \frac{1}{(b - a)(b - c)}$;
$$z = \frac{1}{(c - a)(c - b)}.$$

12° $x + ay + a^2z = a^3$
$x + by + b^2z = b^3$
$x + cy + c^2z = c^3$

De la 1e équation, soustraire la 2e puis la 3e. On trouve :
$(a - b)y + (a^2 - b^2)z = a^3 - b^3$ ou $y + (a + b)z = a^2 + ab + b^2$
$(a - c)y + (a^2 - c^2)z = a^3 - c^3$ ou $y + (a + c)z = a^2 + ac + c^2.$

Soustrayons membre à membre. Il vient

$$(b-c)z = a(b-c) + (b^2-c^2) = (b-c)(a+b+c).$$

D'où $$z = a+b+c.$$

Rép. $x = abc$; $y = -(ab+ac+bc)$; $z = a+b+c$.

204. 1° $$\begin{cases} x - \dfrac{4y-3}{3} + \dfrac{z-2}{2} = 2 \\ \dfrac{x}{5} - \dfrac{3y}{2} + 3z = 22 \\ \dfrac{x-1}{4} - \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z-10}{10} \end{cases} \qquad \textbf{Rép.} \begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \\ z = 10 \end{cases}$$

2° $$\begin{cases} \dfrac{4x-7}{3} - \dfrac{2(y-2)}{3} = z \\ \dfrac{3x}{7} + \dfrac{2y-1}{7} - 5z = 1 \\ \dfrac{2x+y}{5} + \dfrac{z}{4} = 5\frac{1}{4} \end{cases} \qquad \text{»} \begin{cases} x = 7 \\ y = 11 \\ z = 1 \end{cases}$$

3° $$\begin{cases} \dfrac{x+2y-3z}{13} - 4z = 3(x+2) \\ \dfrac{5x-1}{7} + 2y - z = 33 \\ x + \dfrac{2y+7}{5} - z = 3x - 7 \end{cases} \qquad \text{»} \begin{cases} x = 10 \\ y = 9 \\ z = -8 \end{cases}$$

4° $$\begin{cases} x + y + z = a + b \\ \dfrac{1}{x-y} = \dfrac{1}{2b} \\ \dfrac{x}{y-z} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{b}{a-b} \end{cases} \qquad \text{»} \begin{cases} x = a+b \\ y = a-b \\ z = b-a. \end{cases}$$

205. 1° $$\begin{cases} x + y + z + v = 10 \\ 2x - y + z = 3 \\ 4y + 3z = 17 \\ 7y - 3z = 5 \end{cases} \qquad \text{»} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \\ v = 4 \end{cases}$$

2° $$\begin{cases} 2x - y + 2z - v = 20 \\ 5x - 2y + v = 11 \\ 4x + y - 3v = 20 \\ 2x - 3y + 2v = 3 \end{cases} \qquad \text{»} \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = 4 \\ v = -5 \end{cases}$$

3° $$\begin{cases} 5x + y + 2z + 3v = 51 \\ 3x - 4y + 2z + v = 12 \\ x + 4y - v = 10 \\ x - 2y + 4v = 27 \end{cases} \qquad \text{»} \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \\ z = 1 \\ v = 7 \end{cases}$$

4° $\begin{aligned} 2x + y + 2z + 3v &= 52 \\ x - y + z - 2v &= 0 \\ 2x - 3y + 2z - v &= 4 \\ 3x + 5z - 4v &= 44 \end{aligned}$ Rép. $\left\{\begin{aligned} x &= 10 \\ y &= 8 \\ z &= 6 \\ v &= 4 \end{aligned}\right.$

5° $\begin{aligned} 4y - 5x - v - 3z &= -6 \\ 3z - 2x + v + y &= 12 \\ 2z + y - 5x - v &= 7 \\ 2x - 3y + 3z + 4v &= -5 \end{aligned}$ » $\left\{\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 4 \\ z &= 5 \\ v &= -3 \end{aligned}\right.$

6° $\begin{aligned} x - y - z - v &= 8 \\ 2x + y + z - u &= 8 \\ y + z - u - v &= 0 \\ z + 2x - u - y &= 16 \\ x - 3v + 2u - 3z &= 4 \end{aligned}$ » $\left\{\begin{aligned} x &= 5 \\ y &= -4 \\ z &= 3 \\ u &= 1 \\ v &= -2. \end{aligned}\right.$

§ III. — ARTIFICES DE CALCUL.

206. *Résoudre les systèmes suivants :*

1° $x + y = 10;\quad x + z = 19;\quad y + z = 23.$

En additionnant les trois équations membre à membre, on trouve

$$2x + 2y + 2z = 52 \quad \text{ou} \quad x + y + z = 26.$$

De l'équation ainsi obtenue, on retranche successivement chacune des équations données.

Rép. $x = 3;\quad y = 7;\quad z = 16.$

2° $x + y - z = 17;\quad x - y + z = 13;\quad y + z - x = 7.$

Rép. $x = 15;\quad y = 12;\quad z = 10.$

3° $x + y + z = 3;\quad y + z + u = -2;\quad z + u + x = 6;$
$u + x + y = 2.$

Rép. $x = 5;\quad y = -3;\quad z = 1;\quad u = 0.$

4° $x + y = 18;\quad y + z = 14;\quad z + v = 10;\quad v + u = 6;\quad u + x = 12.$

En additionnant ces équations membre à membre, on trouve

$$x + y + z + u + v = 30.$$

De l'équation ainsi obtenue, on retranche la somme de deux des équations données, ayant des inconnues toutes différentes.

Rép. $x = 10;\quad y = 8;\quad z = 6;\quad u = 2;\quad v = 4.$

5° $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{9}{20};\quad \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{13}{15};\quad \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{11}{12}.$

On considère $\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}, \dfrac{1}{z}$ comme inconnues auxiliaires, puis on opère comme pour le premier exercice de ce numéro. Il vient ainsi

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{4};\quad \frac{1}{y} = \frac{1}{5};\quad \frac{1}{z} = \frac{2}{3}.$$

Rép. $x = 4;\quad y = 5;\quad z = 1{,}5.$

6° $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{13}{12}$; $\frac{2}{x}-\frac{1}{y}+\frac{2}{z}=\frac{7}{6}$; $\frac{3}{x}-\frac{1}{y}+\frac{5}{z}=\frac{29}{12}$.

Résoudre ce système par rapport à $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$, considérés comme inconnues auxiliaires.

Rép. $x = 2$; $y = 3$; $z = 4$.

7° $\frac{xy}{x+y}=\frac{8}{3}$; $\frac{yz}{y+z}=\frac{8}{5}$; $\frac{xz}{x+z}=\frac{4}{3}$.

En renversant les rapports, on obtient le système

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{8};\quad \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{5}{8};\quad \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{3}{4}.$$

Rép. $x = 4$; $y = 8$; $z = 2$.

207. *Résoudre les systèmes suivants :*

1° $\frac{xy}{3x-4y}=\frac{2}{11}$, $\frac{yz}{2y+3z}=\frac{6}{5}$, $\frac{xz}{x-z}=\frac{3}{2}$.

Renverser les rapports, puis résoudre par rapport à $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$.

Rép. $x = -1$; $y = 2$; $z = -3$.

2° $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}-\frac{c}{z}=a$, $\frac{a}{x}-\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=b$, $\frac{b}{y}-\frac{a}{x}+\frac{c}{z}=c$.

Rép. $x=\frac{2a}{a+b}$; $y=\frac{2b}{a+c}$; $z=\frac{2c}{b+c}$.

3° $\frac{xy}{ay+bx}=\frac{1}{c}$, $\frac{xz}{az+cx}=\frac{1}{b}$, $\frac{yz}{bz+cy}=\frac{1}{a}$.

Rép. $x=\frac{2a}{b+c-a}$; $y=\frac{2b}{a-b+c}$; $z=\frac{2c}{a+b-c}$.

4° $$\begin{aligned} yz+xz-6xy&=9xyz & &\qquad & \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{6}{z}&=9\\ yz-xz+4xy&=5xyz & &\text{ou} & \frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{4}{z}&=5\\ 3xz-2yz-xy&=4xyz & & & \frac{3}{y}-\frac{2}{x}-\frac{1}{z}&=4. \end{aligned}$$

Résoudre par rapport à $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$.

Rép. $x=\frac{1}{8}$; $y=\frac{1}{7}$; $z = 1$.

5° $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{y+1}=2$, $\frac{3}{x-1}-\frac{4}{y+1}=11$.

Résoudre par rapport à $\frac{1}{x-1}$, $\frac{1}{y+1}$, considérés comme inconnues auxiliaires.

Rép. $x = \frac{4}{3}$; $y = -3$.

6° $\frac{1}{3x-2y} + \frac{1}{2x-3y} = \frac{5}{8}$; $\frac{1}{2x-3y} - \frac{1}{3x-2y} = \frac{3}{8}$.

Résoudre par rapport à $\frac{1}{3x-2y}$ et $\frac{1}{2x-3y}$. On trouve

$$\frac{1}{3x-2y} = \frac{1}{8}; \quad \frac{1}{2x-3y} = \frac{1}{2}.$$

Rép. $x = 4$; $y = 2$.

7° $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$; $2x - y - z = 6$.

On a

$$\frac{2x}{8} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2} = \frac{2x-y-z}{8-3-2} = \frac{6}{3} = 2.$$

Donc $$\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2} = 2.$$

Rép. $x = 8$; $y = 6$; $z = 4$.

8° $\frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{x+y}{5}$.

On a

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{x+y}{5} = \frac{(x+1)+(y+1)-(x+y)}{3+4-5} = 1,$$

Rép. $x = 2$; $y = 3$.

208. *Résoudre les systèmes suivants :*

1° $\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{3}$; $2x + 3y + 4z = 37$.

On a

$$\frac{2x-2}{10} = \frac{3y-6}{12} = \frac{4z-12}{12} = \frac{2x+3y+4z-20}{34} = \frac{1}{2}.$$

Donc $$\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{3} = \frac{1}{2}.$$

Rép. $x = \frac{7}{2}$; $y = 4$; $z = \frac{9}{2}$.

2° $\dfrac{21}{3x + 4y - 17} + \dfrac{105}{8x - 7y + 22} = 4;$

$\dfrac{3x + 4y - 17}{3} = \dfrac{8x - 7y + 22}{5}.$

La 2e équation permet de poser

$$x' = \frac{3}{3x + 4y - 17} = \frac{5}{8x - 7y + 22}.$$

La 1re équation devient $7x' + 21x' = 4$; d'où $x' = \dfrac{1}{7}$.

On aura le système :

$$\frac{3x + 4y - 17}{3} = 7 \qquad \frac{8x - 7y + 22}{5} = 7 \qquad \textbf{Rép.} \left\{ \begin{array}{l} x = 6 \\ y = 5 \end{array} \right.$$

On peut également résoudre le système en le considérant comme un système du premier degré en $\dfrac{1}{3x + 4y - 17}$ et $\dfrac{1}{8x - 7y + 22}$.

3° $\dfrac{x + 1}{2} = \dfrac{y - 2}{5} = \dfrac{3x - y + 9}{3}.$

On a

$$\frac{x + 1}{2} = \frac{y - 2}{5} = \frac{3x - y + 9}{3}$$
$$= \frac{3(x + 1) - (y - 2) - (3x - y + 9)}{6 - 5 - 3} = 2.$$

Rép. $x = 3;\ y = 12.$

4° $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c} = \dfrac{u}{d};\quad x + y - z + u = k.$

$$\textbf{Rép.} \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{ak}{a + b - c + d};\quad y = \dfrac{bk}{a + b - c + d}; \\ z = \dfrac{ck}{a + b - c + d};\quad u = \dfrac{dk}{a + b - c + d}. \end{array} \right.$$

5° $mx = ny = pz;\quad ax + by + cz = d.$

Des données, on déduit

$$\frac{ax}{\frac{a}{m}} = \frac{by}{\frac{b}{n}} = \frac{cz}{\frac{c}{p}} = \frac{d}{\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p}} = \frac{dmnp}{anp + bmp + cmn};$$

ou encore, $mx = ny = cz = \dfrac{dmnp}{anp + bmp + cmn}.$

Ces relations donnent immédiatement, x y et z.

§ IV. — SYSTÈMES IMPOSSIBLES OU INDÉTERMINÉS.

209. *Pour chacune des équations suivantes, trouver une autre équation formant avec elle, soit un système impossible, soit un système indéterminé. Vérifier chaque fois.*

Deux équations du premier degré à deux inconnues, ramenées à la forme générale, forment un système impossible quand les coefficients des inconnues sont proportionnels, sans que les termes indépendants soient dans le même rapport. Elles forment un système indéterminé quand les coefficients des inconnues et les termes connus sont dans le même rapport.

Pour vérifier, il suffit d'éliminer une inconnue entre les deux équations considérées.

1° $3x - 5y = 7$.

Chacune des équations

$$3x - 5y = 11; \quad 6x - 10y = 5; \quad -3x + 5y = 3; \quad \text{etc.}$$

forme avec l'équation proposée un système impossible.

Chacune des équations

$$6x - 10y = 14; \quad -3x + 5y = -7; \quad 9x - 15y = 21; \text{ etc.}$$

forme avec l'équation proposée un système indéterminé.

2° $x - y = 4$.

Système impossible : $x - y = 4; \quad 3x - 3y = 15$.

Système indéterminé : $x - y = 4; \quad 2y - 2x + 8 = 0$.

3° $-2x + 3y = 17$.

Système impossible : $-2x + 3y = 17; \quad 2x - 3y = 17$.

Systéme indéterminé : $-2x + 3y = 17; \quad 6x - 9y = -51$.

4° $\dfrac{x}{3} - \dfrac{2y}{5} = 1$.

Système impossible : $\dfrac{x}{3} - \dfrac{2y}{5} = 1; \quad x - \dfrac{6y}{5} = 1$.

Système indéterminé : $\dfrac{x}{3} - \dfrac{2y}{5} = 1; \quad 5x - 6y = 15$.

5° $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = \dfrac{2}{5}$.

Système impossible : $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = \dfrac{2}{5}; \quad 3x + 2y = 2$.

Système indéterminé : $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = \dfrac{2}{5}; \quad 15x + 10y = 12$.

210. *Examiner les systèmes suivants pour voir quels sont ceux qui sont impossibles ou indéterminés.*

1° $x - 2y = 3; \quad 3x - 6y = 9$.

Ce système est indéterminé; il se réduit à la 1re équation.

2° $7x - 5 = 6y + 3;\ \ y + 7x = 7y + 12.$

Ce système peut s'écrire

$$7x - 6y = 8;\ \ 7x - 6y = 12.$$

Il est impossible.

3° $2(x + y) = 5;\ \ \frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1.$

Ce système peut s'écrire

$$2x + 2y = 5;\ \ x + y = 3.$$

Il est impossible.

4° $3x + 2y = 4;\ \ \frac{x+3}{x-2} = \frac{y+2}{y+1}.$

La seconde équation peut s'écrire

$$x - 5y = 7.$$

Le système

$$3x + 2y = 4;\ \ x - 5y = 7$$

donne $x = 2;\ \ y = -1.$

Cette solution est inacceptable pour le système proposé, car pour ces valeurs de x et de y, la seconde équation n'a pas de sens; le système est donc impossible.

5° $y - x = 0;\ \ 3x = 3y + 7.$

Ce système est impossible.

6° $\frac{x-3}{y+2} = \frac{2}{3};\ \ \frac{x+3}{y-2} = -\frac{3}{2}.$

En rendant ces équations entières, on obtient le système

$$3x - 2y = 13;\ \ 2x + 3y = 0$$

dont la solution est $x = 3;\ \ y = -2.$

Cette solution est inacceptable pour le système proposé, car pour $y = -2$, la première équation n'a pas de sens. Le système est donc impossible.

7° $x + y - z = 5;\ \ 3x - 2y + z = 4.$

Ce système donne

$$x = \frac{z+14}{5};\ \ y = \frac{4z+11}{5}.$$

A chaque valeur de z correspond un système de valeurs pour x et y. Le système est indéterminé.

8° $5x - 2y = 7;\ \ 10x + 3y = 7;\ \ x - 5y = 7.$

Les deux premières équations donnent $x = 1;\ y = -1$. Cette solution ne vérifie pas la 3e équation et le système est impossible.

9° $3x - 2y = 5;\ \ x - 3y = 4;\ \ 7x + 5y = 2.$

Ce système admet la solution unique $x = 1;\ \ y = -1.$

10° $4x - 3y = 11;\ \ 4x + 7y = 1;\ \ 4x + 2y = 6.$

Ce système admet la solution unique $x = 2,\ \ y = -1.$

11° $x + y + z = 9; \quad x + 2y + 3z = 14; \quad 3x + 2y + z = 22.$
En remplaçant x dans les deux dernières équations par sa valeur tirée de la première, on voit que le système se réduit aux équations

$$x + y + z = 9; \quad y + 2z = 5.$$

Celles-ci donnent $x = 4 + z$, $y = 5 - 2z$ et le système est indéterminé.

12° $2x - y + z = 16; \quad 3x + 2y - z = 5; \quad 9x - y + 2z = 40.$
En remplaçant z dans les deux dernières équations par sa valeur tirée de la première, on obtient le système équivalent

$$2x - y + z = 16; \quad 5x + y = 21; \quad 5x + y = 8$$

dont les deux dernières équations sont incompatibles.

CHAPITRE VIII

Inéquations.

211. *Résoudre les inéquations suivantes :*

1° $7x - 6 > 5 + 6x$	**Rép.**	$x > 11$
2° $12 - 5x > x - 60$	»	$x < 12$
3° $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} > \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$	»	$x > \frac{6}{7}$
4° $\frac{x}{2} + 4 > \frac{2x}{3} - \frac{x}{8}$	»	$x < 96$
5° $4(5 + x) > 5(x + 3)$	»	$x < 5$
6° $3 - 4(5 - x) \leqslant 2x + 5$	»	$x \leqslant 11$
7° $\frac{3x - 1}{5} - \frac{13}{2} \geqslant \frac{7x}{3} - \frac{11(x + 3)}{6}$	»	$x \geqslant 12$
8° $\frac{2x}{5} - \frac{2x - 17}{3} < 10 - \frac{2x - 6}{2}$	»	$x < 10.$

212. *Chercher les valeurs entières de x qui vérifient les systèmes suivants :*

1° $2(4x + 1) \geqslant 5x + 8; \quad 2(3x + 2) > 5(3x - 10).$
Ces inéquations donnent $x \geqslant 2$; $x < 6$; ou, en résumé,

$$2 \leqslant x < 6.$$

Rép. 2, 3, 4, 5.

2° $8x + \frac{14x}{5} \geqslant 66 - \frac{12x}{5}; \quad \frac{1}{6}\left(\frac{7x}{4} + x\right) > x - \frac{13}{2}.$

Ces inéquations donnent $x \geqslant 5$; $x < 12$; ou, en résumé,

$$5 \leqslant x < 12.$$

Rép. 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.

3° $5(20 - x) > 3x + 68;\quad 3(x - 7) < 4(5x - 1).$
Ces inéquations donnent $x < 4;\quad x > -1$; ou, en résumé,
$$-1 < x < 4.$$
Rép. 0, 1, 2, 3.

4° $\dfrac{2x-7}{4} - \dfrac{x+1}{8} > \dfrac{x-5}{2};\quad \dfrac{3x-14}{12} + \dfrac{3x-2}{4} > \dfrac{2x-1}{3}.$
Ces inéquations donnent $x < 5;\quad x > 4;$ ou, en résumé,
$$4 < x < 5.$$
Rép. Pas de solution entière.

213. *Trouver des solutions entières des systèmes suivants :*

1° $2x - 3y < 25;\quad 4x - y > 25.$
En résolvant ces inéquations par rapport à x, on trouve :
$$x < \frac{25+3y}{2};\quad x > \frac{25+y}{4}.$$
Ces dernières inéquations exigent que l'on ait
$$\frac{25+y}{4} < \frac{25+3y}{2} \quad \text{ou} \quad y > -5.$$
On devra attribuer à y des valeurs entières supérieures à -5. Par exemple, pour $y = 1$, on trouve $7 \leqslant x < 14$.

2° $x - 11 > -3y;\quad 5y - 68 < 3(x - 1).$
Ces inégalités donnent
$$x > 11 - 3y;\quad x > \frac{5y-65}{3}.$$
On pourra attribuer des valeurs entières quelconques à y.
Pour $y = 1$, par exemple, les inégalités précédentes deviennent
$$x > 8;\quad x > -20;$$
ou, en résumé, $x > 8$.

3° $4x + 3y < 120;\quad 5x + 4y > 100.$
On a successivement :
$$y < \frac{120-4x}{3} \quad \text{et} \quad y > \frac{100-5x}{4};$$
puis,
$$\frac{100-5x}{4} < \frac{120-4x}{3} \quad \text{ou} \quad x < 180.$$
Pour $x = 0$, par exemple, on trouvera $25 < y < 40$.

4° $x + y > 20;\quad 2x - y > 2;\quad 2x - 3y < 10.$
On doit avoir
$$y > 20 - x;\quad y < 2x - 2;\quad y > \frac{2x-10}{3}.$$
Ces inégalités exigent que l'on ait :
$$20 - x < 2x - 2 \quad \text{et} \quad \frac{2x-10}{3} < 2x - 2.$$

Les deux dernières inégalités donnent $x > 7\frac{1}{3}$, $x > -1$; d'où $x \geqslant 8$.

Pour $x = 10$, par exemple, on trouve $10 < y < 18$.

5° $2x - 3y < 25$; $4x - y < 25$; $2x + y < 25$.

En éliminant y comme dans l'exercice précédent, on trouve finalement

$$x \leqslant 8.$$

Pour $x = 6$, par exemple, on trouve $-1 < y < 13$.

6° $x - 2 < y + 2 < 1 - x$.

L'inégalité $x - 2 < 1 - x$ donne $x \leqslant 1$.

Pour $x = 0$, par exemple, on a $-4 < y < -1$.

7° $3x + 5 < 2y + 2 < 5x - 3$.

L'inégalité $3x + 5 < 5x - 3$ donne $x > 4$.

Pour $x = 10$, par exemple, on a $17 \leqslant y \leqslant 22$.

214. *Si* a, b, c *sont des nombres différents deux à deux, vérifier que l'on a :*

1° $a^2 + b^2 > 2ab$.

En effet, cette inégalité peut s'écrire $(a - b)^2 > 0$.

2° $a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$.

En effet, on a :

$$a^2 + b^2 > 2ab; \quad b^2 + c^2 > 2bc; \quad c^2 + a^2 > 2ac.$$

Additionnons membre à membre; divisons ensuite les deux membres de l'inégalité obtenue par 2. Il vient

$$a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ca.$$

On peut démontrer la même propriété en partant de la relation

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2.$$

215. *Si* a, b, c, *sont des nombres positifs, différents deux à deux, on a :*

1° $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$,

car on obtient cette inégalité en divisant par ab, qui est positif, les deux membres de l'inégalité $a^2 + b^2 > 2ab$.

2° $ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) > 6abc$.

Divisions les deux membres par abc. Il vient :

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} > 6,$$

ou
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b} > 6,$$

ou
$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) > 6;$$

ce qui est vrai, car chaque parenthèse est supérieure à 2, en vertu de l'exercice précédent.

216. *Si* a, b, c *sont les côtés d'un triangle, on a toujours*

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca).$$

En effet, on a :

$$a < b + c \quad \text{ou} \quad a^2 < ab + ac;$$
$$b < a + c \quad \text{ou} \quad b^2 < ab + bc;$$
$$c < a + b \quad \text{ou} \quad c^2 < ac + bc.$$

D'où, par addition, $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ac)$.

CHAPITRE IX

Problèmes du premier degré.

§ I. — PROBLÈMES A UNE INCONNUE.

217. *J'ai dépensé le tiers, puis le cinquième de mon argent, et il me reste encore* 14 *fr. Combien avais-je d'argent?*

Soit x mon avoir initial. L'équation est

$$x - \frac{x}{3} - \frac{x}{5} = 14; \quad \text{d'où} \quad x = 30.$$

Rép. J'avais 30 fr.

218. *Partager le nombre* 200 *en deux parties telles qu'en divisant la* 1re *par* 16 *et la* 2e *par* 10, *la différence des quotients soit* 6.

Soit x la première partie; la seconde partie sera $200 - x$. On a

$$\frac{x}{16} - \frac{200 - x}{10} = 6; \quad \text{d'où} \quad x = 160.$$

Rép. Les deux parties sont 160 et 40.

219. *Un nombre vaut le quart d'un autre; si l'on retranche le plus petit de* 25 *et le plus grand de* 70, *les restes sont égaux. Quels sont ces nombres?*

Soit x le plus grand des deux nombres; le plus petit sera $\frac{x}{4}$. On a

$$70 - x = 25 - \frac{x}{4}; \quad \text{d'où} \quad x = 60.$$

Rép. Les deux nombres sont 60 et 15.

220. *On multiplie un nombre par* 5, *on retranche* 24 *du produit, on divise le reste par* 6, *on ajoute* 13 *au quotient et on retrouve le nombre. Quel est-il?*

Soit x le nombre. L'équation est

$$\frac{5x - 24}{6} + 13 = x; \quad \text{d'où} \quad x = 54.$$

Rép. $x = 54$.

221. *Un nombre est divisé ainsi : la* 2e *partie égale les deux tiers de la* 1re, *et la* 3e, *les trois quarts de la* 2e. *La différence entre la* 2e *partie et la* 3e *est* 400. *Trouver le nombre et chaque partie.*

Soit x la première partie; la deuxième est $\frac{2x}{3}$ et la troisième, $\frac{6x}{12}$ ou $\frac{x}{2}$. L'équation est

$$\frac{2x}{3} - \frac{x}{2} = 400; \quad \text{d'où} \quad x = 2\,400.$$

Rép. Les trois parties sont 2 400, 1 600, 1 200; le nombre est 5 200.

222. *Deux nombres sont entre eux comme* 9 *est à* 11. *Les* 2/5 *du plus petit augmentés des* 7/10 *du plus grand font* 113. *Quels sont ces nombres?*

Soit x le premier nombre; le second sera $\frac{11x}{9}$ L'équation est

$$\frac{2x}{5} + \frac{77x}{90} = 113; \quad \text{d'où} \quad x = 90.$$

Rép. Les deux nombres sont 90 et 110.

223. *Trois personnes se sont partagé un terrain de* 864 *ares; la part de la* 1re *est à celle de la* 2e *comme* 5 *est à* 7 *et celle de la* 3e *égale la somme des deux autres. Quelle est la part de chacune?*

Soit x la part de la première; celles des deux autres sont $\frac{7x}{5}$ et $\frac{12x}{5}$.

On a $$x + \frac{7x}{5} + \frac{12x}{5} = 864; \quad \text{d'où} \quad x = 180.$$

Rép. Les trois parts sont 180, 252 et 432 ares.

224. *Quatre créanciers,* A, B, C, D, *doivent se partager* 31 500 *fr. dans les rapports suivants : les créances de* A *et* B *sont entre elles comme* 2 *est à* 3, *celles de* B *et* C *comme* 4 *est à* 5 *et celles de* C *et* D *comme* 6 *est à* 7. *Trouver la part de chacun.*

Soit x la part de A; celle de B sera $\frac{3x}{2}$; celle de C, $\frac{3x}{2} \times \frac{5}{4}$ ou $\frac{15x}{8}$; celle de D, $\frac{15x}{8} \times \frac{7}{6}$ ou $\frac{35x}{16}$. On a

$$x + \frac{3x}{2} + \frac{15x}{8} + \frac{35x}{16} = 31\,500; \quad \text{d'où} \quad x = 4\,800.$$

Rép. Les parts sont 4 800, 7 200, 9 000 et 10 500 fr.

225. *Une personne échange des pièces de* 2 *fr. contre des pièces de* 5 *fr. Elle trouve qu'elle a alors* 102 *pièces en moins. Quelle somme possède-t-elle?*

Supposons que la personne possède x fr. Elle avait $\frac{x}{2}$ pièces de 2 fr.; elle aura $\frac{x}{5}$ pièces de 5 fr. L'équation est

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{5} = 102; \quad \text{d'où} \quad x = 340.$$

Rép. La somme est 340 fr.

226. *Si l'on compte par* 9 *les arbres d'un jardin, il en reste* 3; *si on les compte par* 11, *il en reste* 2. *Sachant que le nombre des groupes de* 9 *surpasse de* 3 *celui des groupes de* 11, *on demande de calculer combien d'arbres renferme ce jardin.*

Soit x le nombres des arbres. Il y aura $\frac{x-3}{9}$ groupes de 9 et $\frac{x-2}{11}$ groupes de 11. L'équation est

$$\frac{x-3}{9} - \frac{x-2}{11} = 3; \quad \text{d'où} \quad x = 156.$$

Rép. Le jardin renferme 156 arbres.

227. *Si l'on compte les élèves d'une école par douzaines, il en reste* 4; *si on les compte par dizaines, il en reste* 8; *mais il y a trois dizaines de plus que de douzaines. Combien d'élèves compte cette école?*

Soit x le nombre d'élèves. L'équation est

$$\frac{x-4}{12} = \frac{x-8}{10} - 3; \quad \text{d'où} \quad x = 208.$$

Rép. L'école compte 208 élèves.

228. *Le numérateur d'une fraction surpasse de* 50 *le dénominateur; lorsqu'on ajoute* 7 *aux deux termes, elle vaut* 3 *unités. Trouver cette fraction.*

Soit x le numérateur; le dénominateur sera $x - 50$. On a

$$\frac{x+7}{x-50+7} = 3; \quad \text{d'où} \quad x = 68.$$

Rép. La fraction est $\frac{68}{18}$.

229. *Trouver deux nombres, sachant qu'ils diffèrent de* 495, *que leur quotient est* 4 *et le reste de leur division,* 60.

Soit x le plus petit nombre; le plus grand sera $x + 495$. On a

$$x + 495 = 4x + 60; \quad \text{d'où} \quad x = 145.$$

Rép. Les deux nombres sont 145 et 640.

230. *Deux personnes sont âgées respectivement de* 30 *ans et de* 20 *ans. Dans combien de temps leurs âges seront-ils dans le rapport de* 5 *à* 4*?*

Supposons qu'après x années le rapport des âges soit $\frac{5}{4}$. On a

$$\frac{30 + x}{20 + x} = \frac{5}{4}; \quad \text{d'où} \quad x = 20.$$

Rép. Dans 20 années.

231. *Le chiffre des dizaines d'un nombre de deux chiffres est égal aux* 2/3 *du chiffre des unités. Le nombre lu à rebours surpasse de* 18 *le nombre primitif. Trouver ce nombre.*

Soit x le chiffre des unités; celui des dizaines sera $\frac{2x}{3}$. On a

$$\frac{20x}{3} + x = \left(10x + \frac{2x}{3}\right) - 18; \quad \text{d'où} \quad x = 6.$$

Rép. Le nombre est 46.

232. *Un nombre est formé de deux chiffres dont la somme est* 12; *si on ajoute* 4 *au sixième du nombre, on trouve le septième du nombre renversé. Trouver ce nombre.*

Soit x le chiffre des dizaines; celui des unités sera $12 - x$. On a

$$\frac{10x + (12 - x)}{6} + 4 = \frac{10(12 - x) + x}{7}; \quad \text{d'où} \quad x = 4.$$

Rép. Le nombre est 48.

233. *Un nombre de deux chiffres a le chiffre des unités double de celui des dizaines; quand on ajoute* 36 *au nombre, on obtient le nombre renversé. Quel est ce nombre?*

Soit x le chiffre des dizaines; celui des unités sera $2x$. On a

$$10x + 2x + 36 = 20x + x; \quad \text{d'où} \quad x = 4.$$

Rép. Le nombre est 48.

234. *Un nombre compris entre* 1000 *et* 2000 *est tel que la somme de ses chiffres est* 19; *le chiffre des dizaines vaut* 3 *fois celui des unités; celui des centaines égale les* 3/5 *de la somme des chiffres des dizaines et des mille. Trouver ce nombre.*

Soit x le chiffre des unités; celui des dizaines est $3x$ et celui des mille, 1; le chiffre des centaines est $\frac{3}{5}(3x + 1)$. On a

$$1 + \frac{3}{5}(3x + 1) + 3x + x = 19; \quad \text{d'où} \quad x = 3.$$

Rép. Le nombre est 1693.

235. *Un père a* 43 *ans et son fils en a* 13; *quand l'âge du père était-il le quadruple de celui du fils?*

Supposons qu'il y a x années, l'âge du père était le quadruple de celui du fils. On a

$$43 - x = 4(13 - x); \quad \text{d'où} \quad x = 3.$$

Rép. Il y a 3 ans.

236. *Un père a 38 ans; ses enfants sont âgés de 12 ans et de 8 ans. Dans combien d'années l'âge du père égalera-t-il la somme des âges de ses enfants?*

Supposons que ce soit dans x années. On a

$$38 + x = (12 + x) + (8 + x); \quad \text{d'où} \quad x = 18.$$

Rép. Dans 18 années.

237. *Un père dit à son fils : La somme de nos âges est 65 et leur différence est à la somme des années que nous aurons dans 5 ans, comme 7 est à 15. Trouver l'âge du père et celui du fils.*

Soit x l'âge actuel du père; celui du fils est $65 - x$. On a

$$\frac{x - (65 - x)}{65 + 10} = \frac{7}{15}; \quad \text{d'où} \quad x = 50.$$

Rép. Le père a 50 ans et le fils, 15 ans.

238. *L'âge d'une personne est double de celui d'une autre. Il y a 7 ans, la somme des âges des deux personnes était égale à l'âge actuel de la première. Quels sont actuellement les âges des deux personnes?*

Soient x l'âge actuel de la 2e personne et $2x$ celui de la 1re. On a

$$(x - 7) + (2x - 7) = 2x; \quad \text{d'où} \quad x = 14.$$

Rép. 14 et 28 années.

239. *On place les 4/5 d'un capital à 4% et le reste à 5%. La somme des intérêts annuels est 4221 fr. Quelles sont les deux parties?*

Soit x le capital. L'équation est

$$\frac{4x}{5} \times \frac{4}{100} + \frac{x}{5} \times \frac{5}{100} = 4221; \quad \text{d'où} \quad x = 100\,500.$$

Rép. 80 400 fr. à 4% et 20 100 fr. à 5%.

240. *Un capital a été placé à 4% pendant 3 ans et 6 mois. L'ayant retiré avec les intérêts, on place le tout dans un commerce qui procure 8%. Le revenu annuel étant de 2736 fr., quel est le capital primitif?*

Soit x le capital. Placé à 4% pendant 3 ans et 6 mois, il devient

$$x + \frac{4x}{100} \times \frac{7}{2} = \frac{114x}{100}.$$

Les intérêts annuels de cette somme à 8% sont $\frac{8}{100} \times \frac{114x}{100}$. On a l'équation

$$\frac{8}{100} \times \frac{114x}{100} = 2736; \quad \text{d'où} \quad x = 30\,000.$$

Rép. 30 000 fr.

241. *Quelqu'un met son capital dans une entreprise; la* 1re *année il perd* 10%; *la* 2^{e} *année il perd* 8% *du reste; la* 3^{e} *année il gagne* 10% *du nouveau reste. La perte totale est de* 1784 *fr. Calculer le montant du capital.*

Soit x le capital.

A la fin de la 1re année, il reste $x - \dfrac{x}{10}$ ou $\dfrac{9x}{10}$.

A la fin de la 2^{e} année, on a $\dfrac{9x}{10} - \dfrac{72x}{1000} = \dfrac{828x}{1000}$.

A la fin de la 3^{e} année, on a $\dfrac{828x}{1000} + \dfrac{828x}{10000}$.

L'équation est

$$\frac{828x}{1000} + \frac{828x}{10000} = x - 1784.$$

Rép. 20 000 fr.

242. *Sur les* 3/4 *d'une somme placée dans un commerce, un négociant a perdu* 4% *moins* 50 *fr. Sur le reste il gagne* 2%. *Il retire le tout et le place à* 5%. *Il se fait ainsi un revenu annuel de* 490 *francs. Trouver le capital primitif.*

Soit x le capital.

La perte sur la première partie est $\dfrac{3x}{4} \times \dfrac{4}{100} - 50 = \dfrac{3x}{100} - 50$.

Le gain sur la 2^{e} partie est $\dfrac{x}{4} \times \dfrac{2}{100} = \dfrac{x}{200}$.

Le négociant retire en tout

$$\frac{3x}{4} - \left(\frac{3x}{100} - 50\right) + \frac{x}{4} + \frac{x}{200} \quad \text{ou} \quad \frac{39x}{40} + 50.$$

On a l'équation

$$\left(\frac{39x}{40} + 50\right)\frac{5}{100} = 490.$$

Rép. 10 000 francs.

243. *L'intérêt d'un capital placé à* 5% *pendant* 73 *jours ayant été calculé sur* 365 *jours au lieu de* 360, *l'erreur commise est de* 6,25 *fr. Trouver le capital?*

Soit x le capital. L'équation est

$$\frac{5x \times 73}{100 \times 360} - \frac{5x \times 73}{100 \times 365} = 6{,}25 \quad \text{ou} \quad \frac{73x}{7200} - \frac{x}{100} = 6{,}25.$$

Rép. 45 000 francs.

244. *Une somme de* 10 000 *fr. placée à intérêts simples est devenue* 16 200 *fr. On demande le temps pendant lequel elle est restée placée à intérêts, sachant qu'elle a rapporté* 5 % *pendant les deux premiers tiers de ce temps et* 5,5 % *pendant le dernier tiers?*

Supposons que la somme reste placée pendant $3x$ années.

Les intérêts à 5 % pendant $2x$ années sont $\frac{10000\times 5\times 2x}{100} = 1000x.$

Les intérêts à 5,5 % pendant x années sont $\frac{10000 \times 5{,}5 \times x}{100} = 550x.$

On a l'équation $1000x + 550x = 6200$; d'où $x = 4$.

Rép. 12 années.

245. *Deux neveux sont appelés par le testament de leur oncle à partager une somme de* 16 200 *fr., de telle manière qu'en plaçant leurs parts à intérêt simple à* 4 %, *ils aient la même somme à l'âge de* 21 *ans. Comment effectuer ce partage, sachant que l'un a* 16 *ans et que l'autre en a* $8\frac{1}{2}$?

Soit x la part de l'aîné. Après 5 années, elle devient

$$x + x \times \frac{4}{100} \times 5 \quad \text{ou} \quad \frac{6x}{5}.$$

La part du second est $16200 - x$. Après $12\frac{1}{2}$ années, elle devient

$$(16200 - x) + (16200 - x) \times \frac{4}{100} \times \frac{25}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{3(16200 - x)}{2}.$$

L'équation est

$$\frac{6x}{5} = \frac{3(16200 - x)}{2}; \quad \text{d'où} \quad x = 9000.$$

Rép. La part de l'aîné est 9000 fr. et celle du second, 7200 fr.

246. *Pour solder une propriété qu'il vient d'acquérir au prix de* 9300 *fr., un particulier doit emprunter* 3000 *fr. à* 3 %. *Quand pourra-t-il payer le capital emprunté, augmenté de ses intérêts simples, au moyen du revenu accumulé de sa propriété, si celle-ci lui rapporte* 5 %?

Soit x le nombre d'années requis. Après ces x années, la somme empruntée vaudra

$$3000 + \frac{3000 \times 3 \times x}{100} \quad \text{ou} \quad 3000 + 90x.$$

Le revenu annuel de la propriété est $93 \times 5 = 465$. Après x années le revenu accumulé sera $465x$. On a l'équation

$$3000 + 90x = 465x; \quad \text{d'où} \quad x = 8.$$

Rép. Après 8 années.

247. *Un billet payable dans trois mois est escompté à* 4 %. *Sa valeur actuelle étant* 990 *fr., calculer sa valeur nominale.*

Soit x la valeur nominale. L'escompte est égal à

$$\frac{4 \times 3 \times x}{100 \times 12} = \frac{x}{100}.$$

On a l'équation $$x - \frac{x}{100} = 990; \quad \text{d'où} \quad x = 1000.$$

Rép. La valeur nominale est 1000 fr.

248. *Une somme de* 1800 *fr. est payable dans* 20 *mois, une autre de* 1600 *fr., dans* 22 *mois. Quel est le taux de l'escompte sachant que la* 1re *somme donne* 2 *fr. d'escompte de plus que la* 2e*?*

Soit x le taux de l'escompte.

L'escompte sur 1800 fr. est $\dfrac{1800 \times x \times 20}{100 \times 12} = 30x.$

L'escompte sur 1600 fr. est $\dfrac{1600 \times x \times 22}{100 \times 12} = \dfrac{88x}{3}.$

On a l'équation $30x = \dfrac{88x}{3} + 2.$

Rép. 3 %.

249. 3000 *fr. payables dans* 25 *mois et* 2900 *fr. payables dans* 14 *mois ont la même valeur actuelle. Quel est le taux de l'escompte?*

Soit x le taux de l'escompte. L'équation est
$$3000 - 30x \times \frac{25}{12} = 2900 - 29x \times \frac{14}{12}.$$

Rép. $3\,\dfrac{21}{43}$ %.

250. *Pour acquitter une dette de* 8200 *fr.* 10 *mois avant son échéance, il faut* 600 *fr. de moins que pour acquitter une dette de* 9000 *fr.* 18 *mois avant son échéance. Quel est le taux de l'escompte?*

Soit x le taux de l'escompte. L'équation est
$$8200 - 82x \times \frac{10}{12} = \left(9000 - 90x \times \frac{18}{12}\right) - 600.$$

Rép. 3 %.

251. *Pour se libérer d'une dette de* 3600 *fr., un débiteur donne un acompte de* 1000 *fr. et souscrit un billet de* 2634,70 *fr. payable dans* 4 *mois. Calculer l'échéance de la première dette, le taux de l'escompte étant* 6 %.

Supposons que la dette de 3600 fr. soit exigible dans x mois. Sa valeur actuelle est
$$3600 - 3600 \times \frac{6}{100} \times \frac{x}{12} \quad \text{ou} \quad 3600 - 18x.$$

La valeur actuelle du billet est
$$2634{,}70 - 2634{,}70 \times \frac{6}{100} \times \frac{4}{12} = 2582.$$

L'équation est $3600 - 18x = 1000 + 2582.$

Rép. Dans 1 mois.

252. *Une somme de* 3000 *fr. doit être payée aujourd'hui; le débiteur demande à s'en acquitter en quatre payements égaux : le* 1er *dans* 3 *mois, le* 2e *dans* 6 *mois, le* 3e *dans* 10 *mois et le* 4e *dans* 16 *mois. Quel est le montant de chaque payement, le taux étant* 5 %*?*

Soit x le montant de chaque paiement. L'équation est

$$3000 = x - \frac{15x}{1200} + x - \frac{30x}{1200} + x - \frac{50x}{1200} + x - \frac{80x}{1200};$$

ou encore, $$3000 = 4x - \frac{175x}{1200}; \quad \text{d'où} \quad x = 778{,}38.$$

Rép. Le montant de chaque paiement est environ 778,38 fr.

253. *On a mélangé* 200 *litres de vin à* 3 *fr. le litre avec* 300 *litres d'une autre qualité. Le mélange revient à* 3,90 *fr. le litre. Que coûte le litre de la* 2e *qualité?*

Supposons qu'un litre de la 2e qualité coûte x fr. Les 300 litres de la 2e qualité coûtent $300x$ fr. et les 200 litres de la 1re, 600 fr. D'autre part, le prix du mélange est 1950 fr. On a donc l'équation

$$600 + 300x = 1950.$$

Rép. Un litre de la 2e qualité coûte 4,50 fr.

254. *J'ai deux pièces d'eau-de-vie contenant l'une* 228 *litres, l'autre* 450 *litres. Elles reviennent respectivement à* 4560 *fr. et* 11 700 *fr. Je veux former un mélange de* 450 *litres à* 24 *fr. le litre. Combien faut-il en prendre de chaque qualité?*

Prenons x litres de la 1re qualité, qui coûte 20 fr. le litre et $(450 - x)$ litres de la 2e qualité qui coûte 26 fr. le litre. On a

$$20x + 26(450 - x) = 450 \times 24.$$

Rép. 150 litres de la 1re qualité et 300 litres de la 2e.

255. *Une barrique de vin de* 250 *litres pèse* 250 *kg. On remplace une certaine quantité de vin par de l'eau et le poids est* 257,20 *kg. Combien de litres d'eau a-t-on ajoutés, la barrique vide pesant* 24 *kg?*

Supposons que l'on remplace x litres de vin par de l'eau. Le poids d'un litre de vin est

$$\frac{250 - 24}{250} = 0{,}904 \text{ kg.}$$

Les $(250 - x)$ litres de vin qui restent pèsent donc $(250 - x)0{,}904$ kg.; l'eau ajoutée pèse x kg. D'autre part, le mélange pèse aussi

$$257{,}20 - 24 = 233{,}20 \text{ kg.}$$

On a donc l'équation

$$(250 - x)0{,}904 + x = 233{,}20.$$

Rép. 75 litres d'eau.

256. *On achète* 100 *litres de lait. Pour le vérifier, on le pèse et on trouve* 102,7 *kg. Trouver combien d'eau avait été ajoutée en supposant qu'un litre de lait pur pèse* 1030 *grammes.*

Supposons que l'on ait ajouté x litres d'eau; ils pèsent x kg. Le poids du lait sera $(100 - x) \times 1{,}03$ kg. L'équation est

$$x + (100 - x) \times 1{,}03 = 102{,}7.$$

Rép. 10 litres d'eau.

257. *Un orfèvre a deux lingots d'or de* 95 *dag. chacun, l'un au titre* 0,920 *et l'autre à* 0,740. *Combien de gr. du second lingot doit-il ajouter au premier pour abaisser le titre à* 0,840*?*

Supposons qu'il ajoute x gr. du second lingot. Le premier lingot contient $0{,}920 \times 950 = 874$ gr. de fin. Les x gr. ajoutés renferment $0{,}740x$ gr. de fin. D'autre part, le fin de l'alliage pèse $0{,}840(950 + x)$ gr. On a l'équation

$$874 + 0{,}740x = 0{,}840(950 + x).$$

Rép. 760 grammes.

258. *On a fondu* 144 *gr. d'or au titre de* 0,950 *avec un certain nombre de grammes au titre de* 0,700. *L'alliage résultant est au titre de* 0,780. *Déterminer la quantité qu'on a prise au second lingot.*

Supposons qu'on ait pris x gr. du second lingot. L'équation est

$$136{,}8 + 0{,}700x = 0{,}780(144 + x).$$

Rép. 306 grammes.

259. *Combien faut-il ajouter de cuivre à un lingot d'argent de* 167 *dag. au titre de* 0,920 *pour obtenir un alliage au titre de* 0,835*?*

Supposons que l'on ajoute x grammes de cuivre. L'équation est

$$1536{,}4 = 0{,}835(1670 + x).$$

Rép. 170 grammes.

260. *Un orfèvre doit fabriquer un objet en or de* 278 *gr. au titre de* 0,780. *Il a deux lingots au titre de* 0,750 *et* 0,840. *Quel poids de chaque lingot doit-il jeter dans le creuset?*

Supposons qu'il prenne x gr. du 1er lingot. L'équation est

$$0{,}750x + 0{,}840(278 - x) = 216{,}84; \quad \text{d'où} \quad x = 185\frac{1}{3}.$$

Rép. $185\frac{1}{3}$ gr. du 1er lingot et $92\frac{2}{3}$ gr. du second.

261. *Un lingot d'argent de* 1250 *gr. est au titre de* 0,850. *Combien d'argent pur faut-il ajouter pour porter le titre à* 0,900*?*

Soit x gr. le poids de l'argent ajouté. L'équation est

$$x + 0{,}850 \times 1250 = 0{,}900(1250 + x).$$

Rép. 625 grammes.

262. *Un alliage de plomb et d'étain pèse* 65 kg. *Quand on le pèse dans l'eau, son poids n'est plus que de* 57,5 *kg. On demande les poids respectifs des deux métaux sachant que la densité du plomb est* 11,40 *et celle de l'étain* 7,30.

Supposons que l'alliage contienne x kg. de plomb. Le volume de l'alliage est 7,5 dm³, car il perd 7,5 kg. de son poids dans l'eau. D'autre part, le volume de l'alliage est aussi

$$\frac{x}{11{,}4} + \frac{65 - x}{7{,}3},$$

car il contient x kg. de plomb et $(65 - x)$ kg. d'étain. On a donc l'équation

$$\frac{x}{11{,}4} + \frac{65 - x}{7{,}3} = 7{,}5; \quad \text{d'où} \quad x = 28{,}5.$$

Rép. Il y a 28,5 kg. de plomb et 36,5 kg. d'étain.

263. *Un bloc de glace flottant sur la mer émerge de* 5,5 *m³. Déterminer le volume immergé sachant que la densité de la glace est* 0,92 *et celle de l'eau de mer* 1,03.

Supposons que le volume de la partie immergée soit x m³. La poussée de l'eau est égale à $x \times 1{,}03$; elle est égale au poids du bloc de glace qui est $(5{,}5 + x) \times 0{,}92$. On a

$$x \times 1{,}03 = (5{,}5 + x) \times 0{,}92.$$

Rép. 46 m³.

264. *Une fontaine remplit un bassin en* 6 *heures, une autre en* 8 *heures et une* 3e *en* 10 *heures. Elles coulent ensemble pendant* 2 *heures et il manque* 26 *hl. pour que le bassin soit rempli. Quelle est sa capacité?*

Supposons que la capacité du bassin soit x hl.

La 1re fontaine remplit en 2 heures $\frac{x}{3}$ hl.; la 2e, $\frac{x}{4}$ hl. et la 3e, $\frac{x}{5}$ hl.

L'équation est

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = x - 26; \quad \text{d'où} \quad x = 120.$$

Rép. 120 hl.

265. *Une fontaine peut remplir un bassin en* 4 *h.* 30 *min. et un robinet le vide en* 5 *heures. En combien de temps ce bassin sera-t-il rempli si l'on ouvre les deux conduits en même temps.*

Supposons que le bassin soit rempli après x heures. La fontaine remplit pendant ce temps $\frac{2x}{9}$ du bassin; le robinet laisse écouler $\frac{x}{5}$ du bassin.

L'équation est

$$\frac{2x}{9} - \frac{x}{5} = 1; \quad \text{d'où} \quad x = 45.$$

Rép. 45 heures.

266. *Une cuve est munie de trois robinets : le* 1er *la remplit en* 8 *heures, le* 2e *en* 12 *heures et le* 3e *la viderait en* 3 *heures. La cuve étant remplie, on demande quand elle sera vide si l'on ouvre les trois robinets.*

Supposons que la cuve soit vide après x heures. L'équation est

$$1 + \frac{x}{8} + \frac{x}{12} = \frac{x}{3}; \quad \text{d'où} \quad x = 8.$$

Rép. 8 heures.

267. *Trois fontaines remplissent ensemble un bassin en* 8 *heures. Si chacune coule séparément, le temps que met la première est à celui mis par la seconde comme* 1 *est à* 2/3 *et le temps mis par la* 2e *est à celui mis par la* 3e *comme* 1 *est à* 3/4. *Quel temps faut-il à chacune des fontaines pour remplir le bassin?*

Supposons que la 1re fontaine mette x heures pour remplir le bassin. La seconde mettra $\frac{2x}{3}$ heures et la 3e, $\frac{2x}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{x}{2}$ heures. En une heure chacune des 3 fontaines remplit respectivement $\frac{1}{x}$, $\frac{3}{2x}$, $\frac{2}{x}$ du bassin. L'équation est

$$\frac{8}{x} + \frac{24}{2x} + \frac{16}{x} = 1; \quad \text{d'où} \quad x = 36.$$

Rép. La 1re met 36 h.; la 2e, 24 h.; la 3e, 18 h.

268. *Deux robinets rempliraient un bassin en* 8 *heures; un* 3e *le viderait en* 20 *heures. On ouvre les trois robinets, mais le premier se ferme accidentellement pendant* 3 *heures; il faut alors aux* 3 *conduits* 1 *h.* 30 *min. de plus pour remplir le bassin. En combien de temps chacun des deux premiers pourrait-il le remplir?*

Soit x le temps mis par le 1er robinet. En une heure, il remplit $\frac{1}{x}$.

Au moment où le bassin devrait être rempli, il manque $\frac{3}{x}$, qui sont remplis quand les trois robinets ont encore coulé pendant 1 h. 30 min. On a

$$\frac{3}{x} = \frac{1}{8} \times \frac{3}{2} - \frac{1}{20} \times \frac{3}{2}; \quad \text{d'où} \quad x = \frac{80}{3}.$$

Rép. Le 1er robinet remplirait le bassin en 26 h. 40 min. et le 2e en 11 h. $\frac{3}{7}$.

269. *Un groupe d'ouvriers peut faire un travail en* 18 *jours. S'il comptait* 4 *ouvriers de plus, le travail serait terminé en* 15 *jours. De combien d'ouvriers est composé le groupe?*

Supposons que le groupe compte x ouvriers. Un ouvrier fait en un jour $\frac{1}{18x}$ de l'ouvrage. Les $x + 4$ ouvriers font en 15 jours

$$\frac{15(x + 4)}{18x} = 1; \quad \text{d'où} \quad x = 20.$$

Rép. 20 ouvriers.

270. *Deux trains partent en même temps, l'un de A et l'autre de B, pour aller à la rencontre l'un de l'autre. Le* 1er *parcourt* 54 *km. à l'heure et l'autre* 36 *km. La distance AB étant de* 144 *km., calculer à quelle distance de A se fera la rencontre des deux trains.*

Supposons que la rencontre ait lieu à x km. de A. Le 1er train met $\frac{x}{54}$ heures pour y arriver et le second $\frac{144 - x}{36}$ heures. On a

$$\frac{x}{54} = \frac{144 - x}{36}; \quad \text{d'où} \quad x = 86{,}4.$$

Rép. 86,4 km.

271. *Deux voyageurs sont éloignés de* 45 *km.; le* 1er *fait* 5 *km. à l'heure et le second* 6 *km. Le* 1er *part à* 5 *heures; le* 2e *part à* 5 *h.* 45 *pour aller à la rencontre du* 1er. *Quand et où se rencontreront-ils?*

Supposons que la rencontre ait lieu x heures après 5 h.

Le premier voyageur parcourt $5x$ km. et le second $6\left(x - \frac{3}{4}\right)$ km.

L'équation est

$$5x + 6\left(x - \frac{3}{4}\right) = 45; \quad \text{d'où} \quad x = 4\,\frac{1}{2}.$$

Rép. La rencontre a lieu à 9 h. 30 et à égale distance des deux points de départ.

272. *Un train de voyageurs qui fait* 9 *lieues à l'heure est parti* 3 *h.* 30 *min. après un train de marchandises qui fait* 4 *lieues à l'heure. Après quel temps et à quelle distance du point de départ le premier atteindra-t-il l'autre?*

Si le train de voyageurs roule pendant x heures, il parcourt $9x$ lieues. Le train de marchandises roulera pendant $(x + 3{,}5)$ heures et parcourra $4(x + 3{,}5)$ lieues. L'équation est

$$9x = 4(x + 3{,}5); \quad \text{d'où} \quad x = 2{,}8.$$

Rép. Les deux trains se rencontrent 2 h. 48 min. après le départ du train de voyageurs à $25\frac{1}{5}$ lieues du point de départ.

273. *On a expédié un courrier qui fait* 7 *mam. en* 5 *heures;* 8 *heures après son départ on en envoie un autre à sa poursuite. Sachant que celui-ci fait* 5 *mam. en* 3 *heures, on demande dans combien de temps il aura rejoint le premier.*

Supposons que le second courrier marche pendant x heures. En raisonnant comme pour le problème précédent, on trouve l'équation

$$\frac{5x}{3} = \frac{7(x + 8)}{5} \quad \text{d'où} \quad x = 42.$$

Rép. 42 heures après le départ du second courrier.

274. *D'une certaine ville part un courrier qui fait 8 km. à l'heure; d'une autre ville située à 10 km. en arrière de la première, part 2 heures après, dans la même direction, un second courrier qui fait 10 km. à l'heure; quand et où le premier courrier sera-t-il atteint par le second?*

Soit x le nombre d'heures que dure le voyage du premier courrier; il parcourt $8x$ km. Le second courrier voyagera pendant $x - 2$ heures et parcourra $10(x - 2)$ km. Écrivons que la différence des deux parcours est 10 km.

$$10(x - 2) - 8x = 10; \quad \text{d'où} \quad x = 15.$$

Rép. Le 1er courrier voyage pendant 15 h. et parcourt 120 km.

275. *Deux villes A et B sont distantes de 64 km. Un courrier quitte A à 6 h. du matin et atteint B à deux heures de l'après-midi. Le lendemain il part de B pour A à 7 h. du matin. En quel point de la route pourra-t-il dire : hier, à la même heure, j'étais ici?*

Le courrier parcourt $64 : 8 = 8$ km. à l'heure. Supposons que le courrier ait atteint le point voulu le second jour à x heures. Il se trouvait alors à $8(x - 7)$ km. de B. Le premier jour à x heures il devait encore marcher pendant $14 - x$ heures et parcourir $8(14 - x)$ km. avant d'être en B.

Écrivons que ces deux trajets sont égaux.

$$8(x - 7) = 8(14 - x) \quad \text{ou} \quad x - 7 = 14 - x; \quad \text{d'où} \quad x = 10{,}5.$$

Rép. Le courrier se trouve au point voulu le second jour à 10 h. $\frac{1}{2}$.

Le point se trouve à 36 km. de A et à 28 km. de B.

276. *Un facteur rural part du bureau de poste à 6 heures du matin pour se rendre à une localité distante de 15 km. où il doit arriver à 9 heures. Après avoir parcouru 3 km. il s'aperçoit qu'il a oublié une lettre, retourne au bureau et arrive à destination à l'heure fixée. Quelle a été sa vitesse, supposée uniforme, depuis le moment où il s'est aperçu de son oubli?*

Le facteur devait faire 5 km. à l'heure. Au moment où il s'est aperçu de son oubli, il était 6 h. $\frac{3}{5}$ et il lui restait 2 h. $\frac{2}{5}$ ou $\frac{12}{5}$ h. pour parcourir $3 + 15 = 18$ km. Soit x sa vitesse. On a

$$\frac{12}{5}x = 18; \quad \text{d'où} \quad x = 7\frac{1}{2}.$$

Rép. 7,5 km. à l'heure.

277. *Une voiture et un piéton partent en même temps, l'un de* A *et l'autre de* B *pour aller à la rencontre l'un de l'autre. La voiture parcourt* 9 *km. à l'heure et le piéton* 5 *km. Au moment de la rencontre le piéton monte dans la voiture. Il met ainsi deux heures de moins pour retourner que pour venir. Quelle est la distance entre* A *et* B*?*

Supposons que le piéton ait voyagé pendant x heures avant de rencontrer la voiture. Il a parcouru $5x$ km. La voiture parcourt ces $5x$ km. en $\frac{5x}{9}$ heures et on a l'équation

$$x - \frac{5x}{9} = 2; \quad \text{d'où} \quad x = 4\frac{1}{2}.$$

Au moment de la rencontre, le piéton avait parcouru $5 \times \frac{9}{2} = 22\frac{1}{2}$ km. et la voiture $9 \times \frac{9}{2} = 40\frac{1}{2}$ km.

Rép. La distance entre A et B est 63 km.

278. *Un lévrier poursuit un chevreuil qui a* 45 *m. d'avance et qui fait* 1,25 *m. par saut. Quand le lévrier fait* 8 *sauts, le chevreuil en fait* 5, *et* 4 *sauts du lévrier en valent trois du chevreuil. Combien de sauts fera chacun avant que le chevreuil ne soit atteint, et quelle distance auront-ils parcourue?*

Soit x le nombre de sauts du chevreuil. Il aura parcouru $1{,}25x$ mètres Le chien devra parcourir $(1{,}25x + 45)$ mètres.

Pendant que le chevreuil fait x sauts, le chien fait $\frac{8x}{5}$ sauts qui valent $\frac{85}{x} \times \frac{3}{4}$ sauts de chevreuil, ou $\frac{6x}{5} \times 1{,}25$ mètres. On a

$$\frac{6x}{5} \times 1{,}25 = 1{,}25x + 45; \quad \text{d'où} \quad x = 180.$$

Rép. Le chevreuil fait 180 sauts et le lévrier 288. Le chevreuil parcourt 225 m. et le chien, 270 m.

279. *Deux points mobiles* A *et* B *partent en même temps des deux extrémités d'un diamètre d'un cercle et vont dans le même sens en suivant la circonférence et en parcourant respectivement* 100 *m. et* 80 *m. par minute. Calculer :* 1° *au bout de quel temps et à quelle distance du point de départ de* A, *celui-ci aura atteint* B, *si le diamètre mesure* 1400 *m.;* 2° *le nombre de tours faits par chacun.* $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$.

Soit x le nombre de minutes requises. Le point A parcourt $100x$ mètres et le point B, $80x$ mètres. Écrivons que la différence de ces deux parcours est églae à la longueur de la demi-circonférence.

$$100x - 80x = 700 \times \frac{22}{7}; \quad \text{d'où} \quad x = 110.$$

Rép. La rencontre a lieu après 110 minutes. A a parcouru 11 000 m. ou $2\frac{1}{2}$ tours; B a parcouru 8800 m. ou 2 tours.

280. *Une horloge marque midi. A quel moment, pour la première fois, les aiguilles des heures et des minutes :* a) *coïncident-elles*; b) *se trouvent-elles sur le prolongement l'une de l'autre*; c) *sont-elles distantes de* 25 *divisions*; d) *font-elles un angle de* 45°?

Si la vitesse de l'aiguille des minutes est 12, celle de l'aiguille des heures est 1.

a) Supposons que la rencontre ait lieu x minutes après 1 heure.

L'aiguille des minutes doit parcourir $60 + x$ divisions et l'aiguille des heures, x divisions. Écrivons que les temps employés sont égaux.

$$\frac{60 + x}{12} = \frac{x}{1}; \quad \text{d'où} \quad x = \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11}.$$

b) Supposons que les deux aiguilles se trouvent sur le prolongement l'une de l'autre x minutes après 12 heures. L'aiguille des minutes a parcouru x divisions et l'aiguille des heures $(x - 30)$ divisions. Les temps employés sont égaux. On a donc

$$\frac{x}{12} = \frac{x - 30}{1}; \quad \text{d'où } x = 32\frac{8}{11}.$$

Pour *c*) et *d*) on raisonne comme pour *b*).

Rép. *a*) 1 h. 5 min. $\frac{5}{11}$; *b*) 12 h. 32 min. $\frac{8}{11}$; *c*) 12 h. 27 min. $\frac{3}{11}$; *d*) 12 h. 8 min. $\frac{2}{11}$.

281. *Il est* 9 *heures. A quel moment l'aiguille des minutes aura-t-elle une avance ou un retard de* 5 *divisions sur l'aiguille des heures?*

a) Supposons qu'à 9 h. x min. l'aiguille des minutes ait une avance de 5 divisions. L'aiguille des minutes aura parcouru x divisions et l'aiguille des heures $(x - 50)$ divisions. Écrivons que les temps employés sont égaux.

$$\frac{x}{12} = \frac{x - 50}{1}; \quad \text{d'où} \quad x = 54\frac{6}{11}.$$

Pour *b*) on raisonne d'une façon analogue.

Rép. *a*) 9 h. 54 min. $\frac{6}{11}$; *b*) 9 h. 43 min. $\frac{7}{11}$.

282. *Une horloge a trois aiguilles. A quel moment pour la première fois après deux heures, l'aiguille des secondes :* a) *coïncidera-t-elle avec celle des minutes*; b) *formera-t-elle avec l'aiguille des heures un angle de* 45°; c) *formera-t-elle avec* *celle des minutes un angle de* 45°; d) *sera-t-elle la bissectrice de l'angle formé par les deux autres aiguilles?*

a) Si la rencontre a lieu à 2 h. x min. l'aiguille des minutes aura parcouru x divisions et l'aiguille des secondes, $(60 + x)$ divisions. L'équation est

$$\frac{x}{1} = \frac{60 + x}{60}; \quad \text{d'où} \quad x = 1\,\frac{1}{59}.$$

b) Si l'aiguille des secondes forme à 2 h. x sec. un angle de 45° avec l'aiguille des heures, l'aiguille des secondes aura parcouru x divisions et l'aiguille des heures, $\left(x + 7\frac{1}{2}\right) - 10 = \left(x - 2\frac{1}{2}\right)$ divisions. On a

$$\frac{x}{720} = x - \frac{5}{2}; \quad \text{d'où} \quad x = 2\,\frac{362}{719}.$$

c) Si l'aiguille des secondes forme à 2 h. x sec. un angle de 45° avec celle des minutes, l'aiguille des secondes aura parcouru x divisions et celle des minutes, $\left(x - 7\frac{1}{2}\right)$ divisions. On a l'équation

$$\frac{x}{60} = x - \frac{15}{2}; \quad \text{d'où} \quad x = 7\,\frac{37}{59}.$$

d) Supposons que l'aiguille des secondes ait parcouru x divisions au moment où elle est la bissectrice. L'aiguille des minutes aura parcouru $\frac{x}{60}$ divisions et celle des heures, $\frac{x}{720}$ divisions. On a l'équation

$$x - \frac{x}{60} = \left(10 + \frac{x}{720}\right) - x; \quad \text{d'où} \quad x = 5\,\frac{65}{1427}.$$

Rép. *a*) 2 h. 1 min. 1 sec. $\frac{1}{59}$; *b*) 2 h. 2 sec. $\frac{362}{719}$; *c*) 2 h. 7 sec. $\frac{37}{59}$; *d*) 2 h. 5 sec. $\frac{65}{1427}$.

283. *La fortune d'un négociant a augmenté la* 1re *année du huitième de sa valeur; la seconde année, des* 4/9 *de sa nouvelle valeur; la* 3e *année, des* 5/13 *de la valeur précédente. Elle se monte alors à* 27 000 *fr. Qu'était-elle au commencement?*

Soit x la fortune initiale.

A la fin de la 1re année, elle est $\frac{9x}{8}$; à la fin de la 2e année, $\frac{9x}{8} \times \frac{13}{9} = \frac{13x}{8}$; à la fin de la 3e année, $\frac{13x}{8} \times \frac{18}{13} = \frac{9x}{4}$. On a l'équation

$$\frac{9x}{4} = 27\,000; \quad \text{d'où} \quad x = 12\,000.$$

Rép. 12 000 fr.

284. *Un négociant augmente chaque année sa fortune du tiers de la valeur précédente et prélève ensuite* 1000 *fr. pour ses dépenses. Or, à la fin de la* 3e *année, les* 1000 *fr. étant prélevés, la fortune primitive est doublée. A combien se montait-elle?*

Soit x la fortune primitive.
Au début de la 2e année, elle est $\frac{4x}{3} - 1000$.

Au début de la 3e année, elle est $\frac{4}{3}\left(\frac{4x}{3} - 1000\right) - 1000 = \frac{16x}{9} - \frac{7000}{3}$.

A la fin, elle est $\frac{4}{3}\left(\frac{16x}{9} - \frac{7000}{3}\right) - 1000 = \frac{64x}{27} - \frac{37000}{9}$.

On a l'équation

$$\frac{64x}{27} - \frac{37000}{9} = 2x; \quad \text{d'où} \quad x = 11\,100.$$

Rép. 11 100 fr.

285. *Quatre enfants se sont partagé un certain nombre d'oranges de la manière suivante : le* 1er *en a reçu la moitié moins* 6; *le* 2e, *le tiers du reste moins* 2; *le* 3e, *le quart du nouveau reste moins une; le* 4e *a eu les* 13 *oranges qui restaient. Combien d'oranges y avait-il?*

Soit x le nombre d'oranges. Le premier reste est $\frac{x}{2} + 6$;

le 2e, $\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2} + 6\right) + 2$ ou $\frac{x}{3} + 6$; le 3e, $\frac{3}{4}\left(\frac{x}{3} + 6\right) + 1$ ou $\frac{x}{4} + \frac{11}{2}$.

On a l'équation

$$\frac{x}{4} + \frac{11}{2} = 13; \qquad \text{d'où} \qquad x = 30.$$

Rép. 30 oranges.

286. *Une marchande a un panier de poires qu'elle vend à* 3 *personnes* A, B, C. A *en prend la moitié plus une,* B *la moitié du reste plus une,* C *la moitié du nouveau reste plus* $1\frac{1}{2}$. *Il en reste* 4 *dans le panier. Combien de poires contenait-il?*

Soit x le nombre de poires. On trouve comme dans l'exercice précédent

$$\frac{x}{8} - \frac{9}{4} = 4; \quad \text{d'où} \quad x = 50.$$

Rép. 50 poires.

287. *Un père a un certain nombre de pommes qu'il veut partager entre ses* 7 *enfants : le* 1er *en reçoit la moitié plus une demi-pomme; le* 2e, *la moitié du reste plus une demi-pomme et ainsi de suite jusqu'au dernier. Toutes les pommes sont alors distribuées. Combien en avait-il?*

Soit x le nombre de pommes. Le 1er reçoit $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2}$ pommes.

Le 2e reçoit $\frac{1}{2}\left(x - \frac{x+1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{4}$ pommes et ainsi de suite.

L'équation est

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{4} + \frac{x+1}{8} + \frac{x+1}{16} + \frac{x+1}{32} + \frac{x+1}{64} + \frac{x+1}{128} = x.$$

Rép. 127 pommes.

288. *Un père partage une certaine somme entre ses enfants : l'aîné reçoit* 100 *fr. plus le dixième du reste; le* 2e, 200 *fr. plus le dixième de ce qui reste alors et ainsi de suite. Or, chaque enfant reçoit la même somme. Quelle est la somme partagée et combien y a-t-il d'enfants?*

Supposons que le père ait partagé x fr. Le premier enfant reçoit

$$100 + \frac{x - 100}{10} = \frac{x + 900}{10};$$

le 2e reçoit $200 + \frac{1}{10}\left(x - \frac{x + 900}{10} - 200\right) = \frac{9x + 17\,100}{100}.$

Ces deux parts étant égales, on a l'équation

$$\frac{x + 900}{10} = \frac{9x + 17\,100}{100}; \quad \text{d'où} \quad x = 8100.$$

Le premier a reçu 900 fr.; il a donc 9 enfants.

Comme toutes les conditions indiquées dans l'énoncé n'ont pas été utilisées lors de la mise en équation, il reste à vérifier si toutes les parts sont effectivement égales à 900 fr.

289. *Quatre enfants doivent se partager une succession de* 86000 *fr. d'après les conditions suivantes : la part de l'aîné doit être le double de celle du second, moins* 1000 *fr.; le second doit avoir trois fois autant que le* 3e, *moins* 2000 *fr.; le* 3e, 4 *fois autant que le* 4e, *moins* 3000 *fr. Déterminer la part de chaque enfant.*

Supposons que le 4e enfant reçoive x fr. Le 3e recevra $(4x - 3000)$ fr;

le 2e, $3(4x - 3000) - 2000 = (12x - 11000)$ fr.;

le 1er, $2(12x - 11000) - 1000 = (24x - 23000)$ fr.

On a

$$x + (4x - 3000) + (12x - 11000) + (24x - 23000) = 86\,000.$$

Rép. Les parts sont 49 000 fr., 25 000 fr., 9000 fr., 3000 fr.

290. *Dans un triangle on mène à un côté une parallèle qui divise un autre côté en deux segments mesurant* 27 *et* 17 *m. Déterminer la longueur des segments que cette parallèle détermine sur le* 3e *côté qui mesure* 66 *mètres.*

Soit x la longueur d'un des segments du 3^e côté. On a l'équation

$$\frac{x}{27} = \frac{66 - x}{17}; \quad \text{d'où} \quad x = 40{,}5.$$

Rép. 40,5 m. et 25,5 m.

291. *Les bases d'un trapèze mesurent* 23 *et* 13 *m., et la hauteur* 4 *m. Trouver la hauteur du triangle que l'on obtient en prolongeant les côtés non parallèles.*

Soit x cette hauteur. On a

$$\frac{x}{23} = \frac{x - 4}{13}; \quad \text{d'où} \quad x = 9{,}20.$$

Rép. 9,20 mètres.

292. *Les deux dimensions d'un rectangle sont* 54 *m. et* 36 *m. Mener une parallèle au petit côté de manière à former un rectangle semblable au premier.*

L'un des côtés du rectangle à construire mesure 36 m. Soit x la longueur de l'autre côté. On a $\frac{54}{36} = \frac{36}{x}$; d'où $x = 24$.

Rép. 24 mètres.

293. *Dans un triangle de* 63 *m. de base et de* 54 *m. de hauteur on inscrit un rectangle dont le périmètre mesure* 116 *m. Trouver les dimensions de ce rectangle.*

Soit x la hauteur du rectangle; le côté parallèle à la base du triangle mesure $(58 - x)$ mètres. On a

$$\frac{63}{54} = \frac{58 - x}{54 - x}; \quad \text{d'où} \quad x = 30.$$

Rép. La hauteur du rectangle mesure 30 mètres.

294. *Deux côtés d'un triangle mesurent* 20 *m. et* 36 *m. La bissectrice de l'angle qu'ils comprennent, détermine sur le* 3^e *côté deux segments dont la différence est* 12 *m. Trouver ce* 3^e *côté.*

Soit x le segment du 3^e côté, adjacent au côté qui mesure 20 m. On a

$$\frac{x}{12 + x} = \frac{20}{36}; \quad \text{d'où} \quad x = 15.$$

Rép. Les segments mesurent 15 et 27 m. Le 3^e côté mesure 42 m.

§ II. — PROBLÈMES A PLUSIEURS INCONNUES.

295. *Comment peut-on payer la somme de* 270 *fr. avec* 30 *pièces, les unes de* 5 *fr. et les autres de* 20 *fr.?*

Supposons qu'il y ait x pièces de 5 fr. et y pièces de 20 fr.

On a le système

$$x + y = 30; \quad 5x + 20y = 270.$$

Rép. 22 pièces de 5 fr. et 8 pièces de 20 fr.

296. *Deux ouvriers ont fait ensemble* 151 *mètres d'ouvrage, en travaillant respectivement* $7\frac{1}{2}$ *jours et* $5\frac{3}{7}$ *jours. S'ils avaient travaillé* $8\frac{1}{5}$ *jours et* $7\frac{1}{2}$ *jours, ils auraient fait* 187 *mètres. Combien de mètres chaque ouvrier fait-il par jour?*

Supposons que les deux ouvriers fassent respectivement x et y m. par jour. On a le système

$$\frac{15x}{2} + \frac{38y}{7} = 151; \quad \frac{41x}{5} + \frac{15y}{2} = 187.$$

Rép. 10 m. et 14 m.

297. *En ajoutant* 36 *à un nombre de deux chiffres, on obtient le nombre renversé; le chiffre des dizaines augmenté de* 2, *vaut les* 3/4 *du chiffre des unités. Quel est ce nombre?*

Soient x le chiffre des dizaines et y le chiffre des unités. On a le système

$$10x + y + 36 = 10y + x; \quad x + 2 = \frac{3y}{4}.$$

Rép. Le nombre est 48.

298. *Un nombre de deux chiffres est tel qu'en y ajoutant* 9, *on obtient le nombre renversé, et qu'en le diminuant de* 9, *le reste égale* 4 *fois la somme des chiffres. Quel est ce nombre ?*

Soient x le chiffre des dizaines et y le chiffre des unités. On a le système

$$10x + y + 9 = 10y + x; \quad 10x + y - 9 = 4(x + y).$$

Rép. Le nombre est 45.

299. A *et* B *travaillent à un ouvrage qu'ils peuvent terminer en* 30 *jours, et qui leur sera payé* 1152 *fr. Quand ils sont à moitié,* A *interrompt pendant* 8 *jours et* B, *pendant* 4 *jours. A cause de cela. il leur faut* $5\frac{1}{2}$ *jours de plus. Combien chacun recevra-t-il ?*

Soient x la fraction de l'ouvrage que A fait en un jour et y la fraction de l'ouvrage que B fait en un jour. On a le système

$$30x + 30y = 1; \quad 8x + 4y = \frac{11}{2}(x + y).$$

Ce système donne $\quad x = \frac{1}{80}$ et $y = \frac{1}{48}$.

A a travaillé pendant $27\frac{1}{2}$ jours et a fait $\frac{55}{160}$ de l'ouvrage; B a travaillé pendant $31\frac{1}{2}$ jours et a fait $\frac{63}{96}$ de l'ouvrage.

Rép. A reçoit 396 fr. et B, 756 fr.

300. *Il y a* 4 *ans, l'âge d'un père était le quadruple de celui de son fils; dans* 10 *ans il n'en sera plus que le double. Quels sont les âges actuels ?*

Soient x l'âge actuel du père et y celui du fils. On a le système

$$x - 4 = 4(y - 4); \quad x + 10 = 2(y + 10).$$

Rép. Le père a 32 ans et le fils 11 ans.

301. *Pierre dit à Simon : J'ai deux fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez, et quand vous aurez l'âge que j'ai, la somme de nos deux âges égalera* 63 *ans; quels sont leurs âges?*

Soit x l'âge de Pierre, y celui de Simon.

Quand Pierre avait y ans, Simon en avait $y - (x - y) = 2y - x$.
Quand Simon aura x ans, Pierre en aura $x + (x - y) = 2x - y$.
D'où le système

$$x = 2(2y - x); \quad (2x - y) + x = 63.$$

Rép. Pierre a 28 ans et Simon, 21 ans.

302. *Il y a* 7 *ans, la moitié de l'âge de mon oncle surpassait le mien de* 2 *ans. Aujourd'hui mon âge surpasse de* 5 *ans les* 2/5 *de celui de mon oncle. Quels sont nos âges?*

Soit x l'âge de mon oncle, y mon âge. On a le système

$$\frac{1}{2}(x - 7) = (y - 7) + 2; \quad y - 5 = \frac{2x}{5}.$$

Rép. Mon oncle a 35 ans; j'ai 19 ans.

303. *Deux sommes placées l'une à* 4% *et l'autre à* 5% *produisent ensemble un revenu annuel de* 400 *fr. Si l'une était placée au taux de l'autre, elles donneraient* 410 *fr. Quelles sont ces deux sommes?*

Soit x la somme placée à 4%, y la somme placée à 5%. On a le système

$$\frac{4x}{100} + \frac{5y}{100} = 400; \quad \frac{5x}{100} + \frac{4y}{100} = 410.$$

Rép. 5000 fr., 4000 fr.

304. *Deux sommes placées à* 5% *donnent* 550 *fr. d'intérêt par an; en diminuant le taux de la première et en augmentant celui de la seconde, chacun de* 0,25 *fr., l'intérêt serait augmenté de* 2,50 *fr. Quelles sont les deux sommes?*

Soient x et y les deux sommes. On a le système

$$\frac{5x}{100} + \frac{5y}{100} = 550; \quad \frac{4,75x}{100} + \frac{5,25y}{100} = 552,50.$$

Rép. 5000 fr., 6000 fr.

305. *Deux sommes, l'une de* 5000 *fr. et l'autre de* 6000 *fr., rapportent ensemble* 525 *fr. par an. En les plaçant l'une au taux de l'autre, l'intérêt ne serait que de* 520 *fr. Quels sont les deux taux?*

Soient x et y les deux taux. On a le système

$$50x + 60y = 525; \quad 50y + 60x = 520.$$

Rép. 4,5%; 5%.

306. *Deux capitaux* A *et* B *ont été placés comme il suit : le quart de* A *et les* 3/5 *de* B *à* 4%; *les restes à* 5%. *Le premier placement donne* 2160 *fr. d'intérêts simples en* 3 *ans et l'autre* 5200 *fr. en* 4 *ans. Trouver les deux capitaux.*

Soit $A = x$, $B = y$. On a le système

$$\left(\frac{x}{4} + \frac{3y}{5}\right) \times \frac{4}{100} \times 3 = 2160; \quad \left(\frac{3x}{4} + \frac{2y}{5}\right) \times \frac{5}{100} \times 4 = 5200.$$

Rép. 24 000 et 20 000 francs.

307. *Jean a placé* 12600 *fr. de plus que Louis et à* 1% *de plus; aussi retire-t-il* 730 *fr. d'intérêts de plus par an. Alphonse place* 3000 *fr. de plus que Louis et à* 2% *de plus; son revenu annuel surpasse de* 380 *fr. celui de Louis. Déterminer les capitaux placés et les taux.*

Soit x le capital de Louis, y le taux auquel il est placé. On a le système

$$(x + 12\,600)\frac{y+1}{100} - \frac{xy}{100} = 730;$$

$$(x + 3000)\frac{y+2}{100} - \frac{xy}{100} = 380.$$

D'où $x = 10\,000$; $y = 4$.

Rép. Louis a placé 10 000 fr. à 4%; Jean a placé 22 600 fr. à 5%; Alphonse a placé 13 000 fr à 6%.

308. *Deux capitaux ont comme somme* 6000 *fr. Le* 1er *est placé à* 1% *de plus que le* 2e *et ils produisent ensemble* 264 *fr. d'intérêts par an. Si le premier était placé au taux du second, et réciproquement, ils produiraient* 276 *fr. d'intérêts. Quelles sont les deux sommes et à quels taux sont-elles placées?*

Soit x le premier capital, y le taux auquel il est placé. On a le système

$$\frac{xy}{100} + \frac{(6000 - x)(y - 1)}{100} = 264;$$

$$\frac{x(y-1)}{100} + \frac{(6000 - x)y}{100} = 276.$$

Par suite, $x = 2400$; $y = 5$.

Rép. 2400 fr. sont placés à 5 % et 3600 fr. à 4 %.

309. *Quelqu'un a acheté* 540 fr. *de rente* 2,5% *et* 270 *fr de rente* 3%. *Quelques jours après, alors que le* 2,5% *a baissé de* 30 *centimes et le* 3% *de* 39 *centimes, il achète* 540 *fr. de rente* 3% *et* 270 *fr. de* 2,5%. *A quel cours a-t-il acheté chaque fois, sachant que son premier achat lui a coûté* 15 498 *fr. et le second* 15 341,40 *fr.?*

Soit x le premier cours du 2,5%, y le premier cours du 3%. On a le système

$$\frac{540x}{2,5} + \frac{270y}{3} = 15\,498;$$

$$\frac{270(x - 0,30)}{2,5} + \frac{540(y - 0,39)}{3} = 15\,341,40.$$

Rép. Le 1er cours du 2,5% était 48 fr.; celui du 3% était 57 fr.

310. *Un négociant reçoit deux billets: l'un est payable dans 3 mois, et l'autre, supérieur au premier de 600 fr., est payable dans 9 mois. Un banquier les escompte à 5% et retient 84,50 fr. Trouver le montant de chaque billet.*

Soient x et y les montants des deux billets. On a le système

$$y - x = 700; \quad \frac{5x}{100} \times \frac{3}{12} + \frac{5y}{100} \times \frac{9}{12} = 84,50.$$

Rép. Les valeurs nominales sont 1240 fr. et 1840 fr.

311. *Un billet de 9500 fr. payable dans 24 mois, et un autre de 9200 fr. payable dans 15 mois, escomptés au même taux, ont la même valeur actuelle. Calculer la valeur actuelle et le taux.*

Soit x la valeur actuelle commune, y le taux.

En écrivant chaque fois que la valeur actuelle x plus l'escompte est égal à la valeur nominale, on obtient le système

$$x + 95y \times 2 = 9500; \quad x + 92y \times \frac{5}{4} = 9200.$$

Par suite, $x = 8740$; $y = 4$.

Rép. La valeur actuelle est 8740 fr. et le taux 4 %.

312. *Un billet escompté en dehors à 6% donne un escompte de 48,60 fr.; en dedans, à 5%, il donnerait 40 fr. Trouver le montant du billet et le nombre de jours pour lesquels il a été escompté.*

Soit x le montant du billet, y le nombre de jours.

L'escompte en dehors est $x \times \frac{6}{100} \times \frac{y}{360}$ ou $\frac{xy}{6000}$.

Calculons l'escompte en dedans. A une valeur actuelle de 100 fr. correspond un escompte en dedans de $\frac{5y}{360} = \frac{y}{72}$. Pour une valeur actuelle de $(x - 40)$ fr. l'escompte sera $\frac{(x - 40)y}{7200}$.

On a le système

$$\frac{xy}{6000} = 48,60; \quad \frac{(x - 40)y}{7200} = 40.$$

Rép. La valeur nominale est 3240 fr.; le nombre de jours est 90.

313. *Un marchand a du vin de deux qualités : en mêlant* 3 *hl. du meilleur avec* 5 *hl. du moins bon, l'hl. vaut* 246 *fr. En mêlant* $3\frac{3}{4}$ *hl. du meilleur avec* $7\frac{1}{2}$ *hl. de l'autre, l'hl. revient à* 240 *fr. Quel est le prix de l'hl. de chaque espèce?*

Soient x et y les prix cherchés. On a le système

$$3x + 5y = 8 \times 246; \quad \frac{15x}{4} + \frac{15y}{2} = \frac{45}{4} \times 240.$$

Rép. Les prix cherchés sont 336 fr. et 192 fr.

314. *On a un certain nombre de litres de vin. Si l'on y ajoute* 6 *litres d'eau, le prix du litre diminue de* 36 *centimes; si l'on ajoute* 10 *litres d'eau, le prix du litre diminue de* 56 *centimes. Déterminer le nombre de litres de vin et le prix du litre.*

Supposons qu'il y ait x litres de vin à y fr. le litre. On a le système

$$xy = (x + 6)(y - 0{,}36);$$
$$xy = (x + 10)(y - 0{,}56);$$

ou $$y - 0{,}06x = 0{,}36; \quad 5y - 0{,}28x = 2{,}8.$$

Rép. On avait 50 litres de vin à 3,36 fr. le litre.

315. *Vingt et un kg. d'argent ne pèsent dans l'eau que* 19 *kg., et* 9 *kg. de cuivre n'y pèsent que* 8 *kg. Un alliage d'argent et de cuivre de* 148 *kg. perd* $14\frac{2}{3}$ *kg. dans l'eau. Déterminer les quantités d'argent et de cuivre qu'il contient.*

Supposons qu'il y ait x kg. d'argent et y kg. de cuivre dans l'alliage. En vertu des données, l'argent perd dans l'eau 2/21 de son poids et le cuivre 1/9. On a donc l équation

$$\frac{2x}{21} + \frac{y}{9} = \frac{44}{3} \quad \text{et aussi} \quad x + y = 148.$$

Rép. 112 kg. d'argent et 36 kg. de cuivre.

316. *On a deux lingots de même poids et de titres différents. Si on fond le premier avec le quart du second, on obtient un alliage au titre de* 0,936. *Si l'on fond le premier avec la moitié du second, on obtient un alliage au titre de* 0,920. *Déterminer le titre de chaque lingot.*

Soit x le titre du 1er lingot, y celui du second. On a le système

$$x + \frac{y}{4} = \frac{5}{4} \times 0{,}936; \quad x + \frac{y}{2} = \frac{3}{2} \times 0{,}920.$$

Rép. Les titres sont 0,96 et 0,84.

317. A *et* B *jouent deux parties; à la première,* A *gagne autant d'argent qu'il en avait, moins* 8 *fr.; il en a alors deux fois autant que* B. *A la seconde partie,* B *gagne autant qu'il lui restait, moins* 4 *fr. Ils ont alors la même somme. Combien d'argent avait chacun?*

Supposons que A possède x fr. et B, y fr. Après la 1re partie, A possède $(2x - 8)$ fr. et B, $y - (x - 8)$ fr. On a donc l'équation

$$2x - 8 = 2[y - (x - 8)].$$

Après la 2^e partie, A possède $2x - 8 - (y - x + 4)$ fr.; B possède alors $2(y - x + 8) - 4$ fr. D'où l'équation

$$2x - 8 - (y - x + 4) = 2(y - x + 8) - 4.$$

Le système donne $x = y = 12$.

Rép. Chaque joueur avait 12 fr.

318. *Une somme d'argent a été partagée également entre un certain nombre de personnes. S'il y avait eu* 6 *personnes de plus, chacune eût reçu* 2 *fr. de moins. Au contraire, s'il y avait eu* 3 *personnes de moins, chacune aurait reçu* 2 *fr. de plus. Déterminer le nombre de personnes, la part de chacune et la somme partagée.*

Supposons qu'il y ait x personnes et que chacune ait reçu y fr.

On a le système

$$xy = (x + 6)(y - 2); \quad xy = (x - 3)(y + 2);$$

ou

$$6y - 2x = 12; \quad 2x - 3y = 6.$$

Ce système donne $x = 12$; $y = 6$.

Rép. Il y avait 12 personnes; chacune a reçu 6 fr. La somme à partager était 72 fr.

319. *On demandait à quelqu'un son âge, ainsi que celui de son père et de son grand-père. Il répondit : mon âge et celui de mon père font ensemble* 56 *ans; mon père et mon grand-père ont ensemble* 100 *ans; enfin mon âge et celui de mon grand-père font ensemble* 80 *ans. Déterminer l'âge de chacun.*

Soit x l'âge du fils, y celui du père, z celui du grand-père. On a le système

$$x + y = 56; \quad y + z = 100; \quad x + z = 80.$$

Rép. Les trois âges sont 18, 38, 62 ans.

320. *Trois fontaines* A, B, C *coulent dans un bassin;* A *et* B *le rempliraient en* 1 *h.* 10 *m.;* A *et* C *en* 84 *m.;* B *et* C *en* 2 *h.* 20 *m. Quel temps faut-il :* 1° *à chaque fontaine;* 2° *aux trois fontaines à la fois, pour remplir le bassin?*

Désignons par x, y et z les nombres de minutes que mettent respectivement A, B ou C pour remplir le bassin.

1° En une minute elles remplissent la 1re $\frac{1}{x}$, la 2^e $\frac{1}{y}$, la 3^e $\frac{1}{z}$ du bassin.

On a le système

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{70}; \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{84}; \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{140}.$$

Ce système donne $x = 105$; $y = 210$; $z = 420$.

Rép. Les temps requis sont 1 h. 45 min., 3 h. 30 min., 7 h.

2° On a aussi $$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{60}.$$

Les trois fontaines réunies remplissent donc le bassin en une heure.

321. *Une somme d'argent placée à intérêt simple a rapporté* 860 *fr. Elle est divisée en trois parts : la première a été placée à* 4 % *pendant* 7 *mois; la deuxième à* 4,5 % *pendant* 4 *mois; la troisième à* 5% *pendant* 16 *mois. Quelles sont les trois parts, sachant que les deux premières sont entre elles comme* 5 *est à* 3, *et les deux dernières comme* 8 *est à* 5?

Soient x, y, z les trois parts. On a le système
$$\frac{4x}{100} \times \frac{7}{12} + \frac{4{,}5y}{100} \times \frac{4}{12} + \frac{5z}{100} \times \frac{16}{12} = 860;$$
$$3x = 5y; \quad 5y = 8z.$$

Rép. Les trois parts sont 15 000, 9000 et 5625 fr.

322. *Trois artilleurs,* A, B, C *ont tiré des coups de canon;* A *et* B *ont tiré ensemble* 20 *coups de plus que* C; B *et* C, 32 *coups de plus que* A; A *et* C, 28 *coups de plus que* B. *Calculer le nombre de coups tirés par chaque artilleur.*

Soient x, y, z les nombres de coups que A, B, C ont tirés. On a le système
$$x + y = z + 20; \quad y + z = x + 32; \quad x + z = y + 28.$$

Rép. 24, 26, 30 coups.

323. *Un nombre de trois chiffres a* 16 *pour somme de ses chiffres; en y ajoutant le nombre renversé, on obtient* 1211; *en le retranchant du nombre renversé, on obtient* 297. *Quel est ce nombre?*

Soit x le chiffre des centaines, y celui des dizaines et z celui des unités. On a le système
$$x + y + z = 16;$$
$$(100x + 10y + z) + (100z + 10y + x) = 1211;$$
$$(100z + 10y + x) - (100x + 10y + z) = 297.$$

En remplaçant dans la deuxième équation $x + z$ par sa valeur tirée de la 1re, on trouve $81y = 405$ ou $y = 5$.

On trouve ensuite $x = 4$, $z = 7$.

Rép. Le nombre est 457.

324. *Une fraction vaut* 4/5. *Si l'on retranche de ses termes les* 2 *termes correspondants d'une autre fraction valant* 6/7, *on obtient une fraction équivalente à* 2/3 *et dont la somme des termes est* 20. *Déterminer ces trois fractions.*

Soient $\frac{4x}{5x}, \frac{6y}{7y}, \frac{2z}{3z}$ les fractions demandées.

D'après les données, la fraction $\frac{4x - 6y}{5x - 7y}$ est identique à la fraction $\frac{2z}{3z}$.

On a donc $4x - 6y = 2z;\quad 5x - 7y = 3z.$

On a aussi $2z + 3z = 20.$

Ce système donne $x = 8;\quad y = 4;\quad z = 4.$

Rép. Les fractions cherchées sont $\frac{32}{40}, \frac{24}{28}$ et $\frac{8}{12}$.

325. *Trois employés ont respectivement* 18, 12 *et* 9 *années de service. Leurs appointements respectifs sont* 21 600, 14 400 *et* 9 600 *fr. Ils doivent se partager une gratification de* 1440 *fr. en raison directe de leurs années de service et en raison inverse de leurs appointements. Trouver les trois parts.*

Soient x, y, z les trois parts. On a

$$\frac{21600x}{18} = \frac{14400y}{12} = \frac{9600z}{9} \quad \text{ou} \quad x = y = \frac{8z}{9}.$$

On a aussi $x + y + z = 1440.$

Ce système donne $x = y = 460{,}80;\quad z = 518{,}40.$

Rép. Les trois parts sont 460,80 fr.; 460,80 fr.; 518,40 fr.

CHAPITRE X

Discussion d'équations et d'inéquations du premier degré.

326. *Chercher les valeurs qu'il faut attribuer aux lettres* a *et* b *pour que les équations suivantes soient impossibles ou indéterminées.*

1° $(a + 2)x = 7.$

Rép. Impossible pour $a = -2.$

2° $(a + 1)x = a^3 + 1.$

Rép. Indéterminée pour $a = -1.$

3° $(a - 1)x = a^2 - 1.$

Rép. Indéterminée pour $a = 1.$

4° $(a^2 - 1)x = a - 1.$

Rép. Indéterminée pour $a = 1$; impossible pour $a = -1.$

5° $(a^2 + 2a - 3)x = a + 3$

Rép. Indéterminée pour $a = -3$; impossible pour $a = 1.$

6° $a(x - 4) + 7x + 14 = 0$ ou $(a + 7)x = 4a - 14$.
Rép. Impossible pour $a = -7$.
7° $a^2(x - a + 3) = 9x$ ou $(a^2 - 9)x = a^2(a - 3)$.
Rép. Indéterminée pour $a = 3$; impossible pour $a = -3$.
8° $a^2(x - 1) - 4(x + a) = 4$ ou $(a^2 - 4)x = a^2 + 4a + 4$.
Rép. Indéterminée pour $a = -2$; impossible pour $a = 2$.
9° $(a + b)x = b - 1$.
Rép. Indéterminée pour $b = -a = 1$;
impossible pour $b = -a \neq 1$.
10° $bx + 7b = ax + 2b$ ou $x(a - b) = 5b$.
Rép. Indéterminée pour $a = b = 0$;
impossible pour $a = b \neq 0$.

327. *Chercher les valeurs qu'il faut attribuer aux lettres* a *et* b *pour que les équations suivantes soient impossibles ou indéterminées ?*

1° $x + 1 = \dfrac{1}{a - 1}$.

Cette équation est impossible pour $a = 1$.
Si $a \neq 1$, elle peut s'écrire $(a - 1)x = 2 - a$.
On voit qu'elle est possible et déterminée pour $a \neq 1$.

2° $ax - 2 = \dfrac{3}{a - 2}$.

Cette équation est impossible pour $a = 2$.
Si $a \neq 2$, elle peut s'écrire $a(a - 2)x = 2a - 1$.
On voit qu'elle est encore impossible pour $a = 0$.
Rép. Impossible pour $a = 0$ ou 2.

3° $ax - x = \dfrac{a - 1}{a}$.

Rép. Impossible pour $a = 0$; indéterminée pour $a = 1$.

4° $\dfrac{x + a}{2} = \dfrac{x + 3}{a - 1}$.

Rép. Impossible pour $a = 1$; indéterminée pour $a = 3$.

328. *Résoudre et discuter les équations suivantes :*

1° $(a - 1)x = 3a + 2$.

a) Si $a \neq 1$, on a $x = \dfrac{3a + 2}{a - 1}$.

b) Si $a = 1$, l'équation est impossible.

2° $(m - 3)x = 9 - m^2$.

a) Si $m \neq 3$, on a $x = -(m + 3)$.
b) Si $m = 3$, l'équation est indéterminée.

3° $a(x - m) = m(x - 2m)$ ou $x(a - m) = am - 2m^2$.

a) Si $a \neq m$, on a $x = \dfrac{m(a - 2m)}{a - m}$.

b) Si $a = m$, l'équation devient $0.x = - a^2$.

L'équation est impossible si $a = m \neq 0$; elle est indéterminée si $a = m = 0$.

4° $2ax + 1 = 4x + b$ ou $2x(a - 2) = b - 1$.

a) Si $a \neq 2$, l'équation donne $x = \dfrac{b - 1}{2(a - 2)}$.

b) Si $a = 2$, l'équation devient $0.x = b - 1$.

Elle est impossible si $a = 2$, $b \neq 1$; elle est indéterminée si $a = 2$, $b = 1$.

329. *Résoudre et discuter les équations suivantes :*

1° $\dfrac{x}{a - 1} - 1 = \dfrac{x}{a + 1} + 1$.

a) Si $a = \pm 1$, l'équation n'a pas de sens.
b) Si $a \neq \pm 1$, on trouve $x = a^2 - 1$.

2° $\dfrac{x}{a - b} + \dfrac{x}{a + b} = 2$.

a) Si $a = \pm b$, l'équation n'a pas de sens.
b) Si $a \neq \pm b$, on trouve, après transformation,

$$ax = a^2 - b^2.$$

Cette équation est possible et déterminée quand $a \neq 0$; elle est impossible quand $a = 0$, car on a alors $b \neq 0$, à cause de l'hypothèse $a \neq \pm b$.

3° $\dfrac{x - a}{a - b} - \dfrac{x + a}{a + b} = \dfrac{2ax}{a^2 - b^2}$.

a) Si $a = \pm b$, l'équation n'a pas de sens.
b) Si $a \neq \pm b$, l'équation devient $(b - a)x = a^2$, et on a

$$x = \frac{a^2}{b - a}.$$

4° $\dfrac{x - 2}{a - 2} + \dfrac{x + 2}{a + 2} + \dfrac{ax - 4}{a^2 - 4} = 0$.

a) Si $a = \pm 2$, l'équation n'a pas de sens.
b) Si $a \neq \pm 2$, on trouve après transformation $ax = 4$.

Si $a \neq 0$, on aura $x = \dfrac{4}{a}$.

Si $a = 0$, l'équation est impossible.

330. *Résoudre et discuter les équations suivantes, en supposant* a *et* b *différents de zéro.*

1° $\dfrac{a}{b - x} = \dfrac{b}{a - x}$. (1)

En faisant disparaître les dénominateurs, il vient
$$(a - b)x = a^2 - b^2. \qquad (2)$$

a) Si $a \neq b$, l'équation (2) donne $x = a + b$. Cette solution convient à l'équation (1), car elle n'annule aucun des deux dénominateurs (a et $b \neq 0$).

b) Si $a = b$, l'équation (2) est indéterminée. Il en est de même de l'équation (1); toutefois cette dernière équation n'est pas vérifiée par $x = a$ et $x = b$.

2° $\dfrac{x - a}{2} = \dfrac{(x - b)^2}{2x - a}$. (1)

En faisant disparaître les dénominateurs, il vient
$$x(3a - 4b) = a^2 - 2b^2. \qquad (2)$$

a) Si $3a \neq 4b$, l'équation (2) donne $x = \dfrac{a^2 - 2b^2}{3a - 4b}$. Cette solution convient à l'équation (1), si elle n'annule pas le dénominateur $2x - a$; ce qui exige qu'on ait
$$\frac{a^2 - 2b^2}{3a - 4b} \neq \frac{a}{2}, \quad \text{ou} \quad (a - 2b)^2 \neq 0, \quad \text{ou} \quad a \neq 2b.$$

b) Si $3a = 4b$, l'équation (2) devient $0.x = -\dfrac{2b^2}{9}$.

Cette équation est impossible, car nous supposons $b \neq 0$.

3° $\dfrac{a}{ax + 1} + \dfrac{1}{ax - 1} + \dfrac{1}{a^2x^2 - 1} = 0$. (1)

En faisant disparaître les dénominateurs, il vient
$$a(a + 1)x = a - 2. \qquad (2)$$

I. Si a égale 0 ou -1, l'équation (2) est impossible; il en sera de même de l'équation (1).

II. Si a est différent de 0 et de -1, l'équation (2) donne
$$x = \frac{a - 2}{a(a + 1)}.$$

Cette réponse convient à l'équation (1), pourvu qu'elle soit différente de $\pm \dfrac{1}{a}$.

a) L'inégalité $\dfrac{a - 2}{a^2 + a} \neq \dfrac{1}{a}$ exige $a^2 - 2a \neq a^2 + a$, ou $a \neq 0$.

b) L'inégalité $\dfrac{a-2}{a^2+a} \neq -\dfrac{1}{a}$ exige $2a^2 - a \neq 0$ ou $a \neq \dfrac{1}{2}$.

4° $\dfrac{1}{x} + \dfrac{a}{b-a} = \dfrac{a}{b+a} + \dfrac{2ab}{b^2-a^2}$. (1)

a) Si $a = \pm b$, l'équation (1) n'a pas de sens.

b) Si $a \neq \pm b$, l'équation (1) devient après disparition des dénominateurs

$$2a(a-b)x = a^2 - b^2 \quad \text{ou} \quad 2ax = a + b, \quad \text{car} \quad a \neq b.$$

Cette équation donne

$$x = \frac{a+b}{2a},$$

car nous supposons $a \neq 0$. La solution trouvée convient à l'équation (1), car on a $a + b \neq 0$ et $x \neq 0$, à cause des hypothèses initiales.

331. *Résoudre les inéquations suivantes :*

1° $ax - 3 < x + 2$.

L'inéquation peut s'écrire $x(a-1) < 5$.

Si $a > 1$, on a $x < \dfrac{5}{a-1}$.

Si $a < 1$, on a $x > \dfrac{5}{a-1}$.

Si $a = 1$, l'inéquation devient $0.x < 5$, et elle est vérifiée par toutes les valeurs de x.

2° $2ax > (a-1)x + 7$.

L'inéquation peut s'écrire $(a+1)x > 7$.

Si $a > -1$, on a $x > \dfrac{7}{a+1}$.

Si $a < -1$, on a $x < \dfrac{7}{a+1}$.

Si $a = -1$, l'inéquation devient $0.x > 7$, ce qui est une inéquation impossible.

3° $\dfrac{x}{a} - 5 < \dfrac{x}{3}$. (1)

I. Si $a > 0$, l'inéquation (1) peut s'écrire $x(a-3) > -15a$.

a) Si $a > 3$, on a $x > \dfrac{15a}{3-a}$.

b) Si $0 < a < 3$, on a $x < \dfrac{15a}{3-a}$.

c) Si $a = 3$, l'inéquation (1) devient $\frac{x}{3} - 5 < \frac{x}{3}$, ce qui est une inéquation toujours vraie.

II. Si $a < 0$, l'inéquation (1) peut s'écrire

$$x(a - 3) < -15a \quad \text{ou} \quad x > \frac{15a}{3 - a},$$

car $a - 3$ est négatif comme a.

III. Si $a = 0$, l'inéquation (1) n'a plus de sens.

4° $(x + a)^2 > (x - a)^2 + (a + 1)$.

Après réduction des termes semblables, il vient

$$4ax > a + 1.$$

Si $a > 0$, on a $x > \frac{a + 1}{4a}$.

Si $a < 0$, on a $x < \frac{a + 1}{4a}$.

Si $a = 0$, l'inéquation devient $0.x > 1$, ce qui est impossible.

5° $a^2x - a < 1 - x$.

Après réduction des termes semblables, il vient

$$x(a^2 + 1) < a + 1.$$

Comme $a^2 + 1$ est toujours positif, on a

$$x < \frac{a + 1}{a^2 + 1}.$$

6° $\frac{2x}{a - 2} + x < \frac{a - 2}{2}$. (1)

I. Si $a > 2$, l'inéquation peut s'écrire

$$4x + 2x(a - 2) < (a - 2)^2 \quad \text{ou} \quad 2ax < (a - 2)^2.$$

Comme a est positif, on a

$$x < \frac{(a - 2)^2}{2a}.$$

II. Si $a < 2$, l'inéquation peut s'écrire $2ax > (a - 2)^2$.

a) Si $0 < a < 2$, on a $x > \frac{(a - 2)^2}{2a}$.

b) Si $a < 0$, on a $x < \frac{(a - 2)^2}{2a}$.

c) Si $a = 0$, l'inéquation (1) devient $0.x < -1$, ce qui est impossible.

III. Si $a = 2$, l'inéquation (1) n'a plus de sens.

332. *Déterminer* m *pour que les systèmes suivants soient impossibles ou indéterminés.*

1° $mx + y = 5;\ x - y = 3.$

On a $D \equiv -m - 1$ et $N_x = -8$. Le système est impossible pour $m = -1$.

2° $mx - y = 1;\ 10x - 2y = m - 3.$

On a $D \equiv 10 - 2m$ et $N_x \equiv m - 5$. Le système est indéterminé pour $m = 5$.

3° $(m - 1)x - 3y = 1;\ mx + y = 0.$

On a $D \equiv 4m - 1$ et $N_x = 1$. Le système est impossible pour $m = \frac{1}{4}$.

4° $2x + (m - 5)y = 5;\ 4x - 3my = 5m.$

On a $D \equiv 20 - 10m$ et $N \equiv 10m - 20$. Le système est indéterminé pour $m = 2$.

5° $x + (5m - 4)y = m;\ (2m + 1)x + (m - 4)y = 2m.$

On a $D \equiv -10m^2 + 4m$ et $N_y \equiv -2m^2 + m$.

Le système est indéterminé pour $m = 0$; il est impossible pour $m = \frac{2}{5}$.

6° $mx + 4y = 3m;\ (m^2 - 1)x + 3my = 4.$

On a $D \equiv 4 - m^2$ et $N_x \equiv 9m^2 - 16$. Le système est impossible pour $m = \pm 2$.

7° $mx - 3y = 5m - 3;\ 2x + (m - 7)y = 29 - 7m.$

On a $D \equiv m^2 - 7m + 6 = (m - 1)(m - 6)$

et $N_y \equiv -7m^2 + 19m + 6.$

Le système est impossible pour $m = 1$ et pour $m = 6$.

8° $mx + 2y = 1;\ 2x + 2(m - 1)y = 1.$

On a $D \equiv 2m^2 - 2m - 4 = 2(m + 1)(m - 2)$ et $N_y \equiv m - 2$.

Le système est indéterminé pour $m = 2$; il est impossible pour $m = -1$.

9° $x - my = \frac{5}{m^2 - 1};\ x + (m - 4)y = \frac{3}{m^2 - 1}.$

Le système n'a pas de sens pour $m = \pm 1$. Supposons $m \neq \pm 1$.

On a $D \equiv 2m - 4$. Pour $m = 2$, le système devient

$$x - 2y = \frac{5}{3},\quad x - 2y = 1,$$

et il est impossible.

10° $x - my = \dfrac{3}{(m-1)(m-3)}$; $4(m-3)x - 8my = 3$.

Le système n'a pas de sens pour $m = 1$ ou 3. Supposons donc m différent de 1 et 3. On a $D \equiv 4m^2 - 20m = 4m(m-5)$.

Pour $m = 0$, le système devient $x = 1$, $-12x = 3$; il est impossible.

Pour $m = 5$, le système devient $x - 5y = \dfrac{3}{8}$; $8x - 40y = 3$; il est indéterminé et se réduit à la première équation,

333. *Déterminer* p *et* q *pour que les systèmes suivants soient indéterminés.*

1° $x - y = 5$; $px + qy = 1$.

On a $\qquad D \equiv q + p$; $N_y \equiv 1 - 5p$.

Le système est indéterminé quand on a $p = \dfrac{1}{5}$, $q = -\dfrac{1}{5}$.

2° $(p-1)x - 3y = q$; $(q-5)x + y = p$.

On a $\qquad D \equiv p + 3q - 16$; $N_x \equiv q + 3p$.

Le système est indéterminé quand on a $p = -2$, $q = 6$.

3° $2x + py = px + 8y = q + 1$.

Le système peut s'écrire

$$2x + py = q + 1; \quad px + 8y = q + 1.$$

On a $\qquad D \equiv 16 - p^2$; $N_y \equiv (2-p)(q+1)$.

Le système est indéterminé quand on a $p = \pm 4$, $q = -1$.

334. *Résoudre et discuter les systèmes suivants :*

1° $mx - y = m$; $x + y = 5$.

Le déterminant du système est $m + 1$.

a) Si $m \neq -1$, on trouve

$$x = \frac{m+5}{m+1}; \quad y = \frac{4m}{m+1}.$$

b) Si $m = -1$, le système devient

$$x + y = 1; \quad x + y = 5.$$

On voit qu'il est impossible.

2° $(m-4)x + y = 6m - 1$; $(3m-9)x + 2y = 10$.

Le déterminant du système est $-m + 1$.

a) Si $m \neq 1$, on trouve

$$x = -12; \quad y = 18m - 49.$$

b) Si $m = 1$, le système devient

$$-3x + y = 5; \quad -6x + 2y = 10.$$

On voit qu'il est indéterminé et qu'il se réduit à l'équation unique

$$-3x + y = 5.$$

3° $x + ay = b; \quad y - ax = 0.$

Le déterminant du système est $a^2 + 1$ qui est toujours positif. Le système admet donc une solution unique, quels que soient a et b. Cette solution est

$$x = \frac{b}{a^2 + 1}; \quad y = \frac{ab}{a^2 + 1}.$$

4° $x - 2y = 7; \quad ax - 4y = b.$

Le déterminant du système est $2a - 4$.

a) Si $a \neq 2$, le système admet une solution unique qui est

$$x = \frac{b - 14}{a - 2}; \quad y = \frac{b - 7a}{2(a - 2)}.$$

b) Si $a = 2$, le système devient

$$x - 2y = 7, \quad x - 2y = \frac{b}{2}.$$

Il est indéterminé pour $b = 14$; il est impossible pour $b \neq 14$.

5° $(m + 2)x + my = 1; \quad -3x + (m - 2)y = -1.$

Le déterminant du système est $m^2 + 3m - 4 = (m + 4)(m - 1)$.

a) Si $m^2 + 3m - 4 \neq 0$, le système admet une solution unique

$$x = \frac{2}{m + 4}; \quad y = \frac{-1}{m + 4}.$$

b) Si $m = -4$, le système est impossible, car il devient

$$-2x - 4y = 1; \quad 3x + 6y = 1.$$

c) Si $m = 1$, le système est indéterminé, car il se réduit à l'équation

$$3x + y = 1.$$

6° $(m - 1)x - (m - 2)y = m + 1; \quad (m + 2)x - my = m + 6.$

Le déterminant du système est $m - 4$.

a) Si $m \neq 4$, le système admet une solution unique

$$x = 3, \quad y = 2.$$

b) Si $m = 4$, le système est indéterminé et se réduit à l'équation

$$3x - 2y = 5.$$

7° $(m^2 + 1)x + (m + 1)y = m - 1; \quad (m^2 - 1)x + (m - 1)y = m + 1.$

Additionnons, puis soustrayons ces deux équations membre à membre. Nous obtenons ainsi le système équivalent

$$m^2x + my = m; \quad x + y = -1.$$

Le déterminant de ce système est $m^2 - m = m(m-1)$.

a) Si $m(m-1) \neq 0$, le système admet une solution unique

$$x = \frac{2}{m-1}; \quad y = -\frac{m+1}{m-1}.$$

b) Si $m = 0$, le système est indéterminé, car il se réduit à l'équation

$$x + y = -1.$$

c) Si $m = 1$, le système est impossible, car il devient

$$x + y = 1; \quad x + y = -1.$$

8° $(a^2 - b^2)x + (a^2 + b^2)y = a^2; \quad (a^3 - b^3)x + (a^3 + b^3)y = a^3.$

Le déterminant du système est $2a^2b^3 - 2a^3b^2 = 2a^2b^2(b-a)$.

a) Si $2a^2b^2(b-a) \neq 0$, le système admet une solution unique. On trouve

$$x = 0{,}5, \quad y = 0{,}5.$$

b) Si $a = b \neq 0$, le système se réduit à l'équation unique

$$2y = 1.$$

On en tire $y = 0{,}5$; x est arbitraire.

c) Si $a = 0 \neq b$, le système se réduit à l'équation unique

$$x - y = 0.$$

d) Si $b = 0 \neq a$, le système se réduit à l'équation unique

$$x + y = 1.$$

e) Si $a = b = 0$, le système est complètement indéterminé.

9° $m^2(x+y) + m(x-2y) = 1; \quad m^2(x+y) + m(2x-y) = 2.$

Additionnons et soustrayons ces deux équations membre à membre. Nous obtenons ainsi le système équivalent

$$2m^2(x+y) + 3m(x-y) = 3; \quad m(x+y) = 1.$$

a) Si $m \neq 0$, les deux équations donnent

$$x + y = \frac{1}{m} \quad \text{et} \quad x - y = \frac{3-2m}{3m}.$$

De là, on déduit

$$x = \frac{3-m}{3m}, \quad y = \frac{1}{3}.$$

b) Si $m = 0$, le système est évidemment impossible.

10° $m(x+y) + m^2(2x - 3y - 2) = m + 3;$

$(m - m^2)x + m(y-1) = 2m^2(x-y) - 3m^2 - 2.$

Ce système peut s'écrire :

$$(m + 2m^2)x + (m - 3m^2)y = 2m^2 + m + 3;$$
$$(m - 3m^2)x + (m + 2m^2)y = -3m^2 + m - 2.$$

Le déterminant de ce système est

$$(m + 2m^2)^2 - (m - 3m^2)^2 = 5m^3(2 - m).$$

a) Si $m^3(2 - m)$ est différent de zéro, on a

$$x = \frac{m^3 - 2m^2 - 1}{m^2(m-2)}; \quad y = \frac{1-m}{m^2(m-2)}.$$

b) Si $m = 0$, le système est impossible, car il devient

$$0.x + 0.y = 3; \quad 0.x + 0.y = -2.$$

c) Si $m = 2$, le système est impossible, car il devient

$$10x - 10y = 13; \quad 10x - 10y = 12.$$

335. *Résoudre et discuter les systèmes suivants en supposant dans les trois derniers* a *et* b *différents de zéro.*

1° $x + ay = \dfrac{a^2+1}{a^2-1}; \quad ax + y = \dfrac{2a}{a^2-1}.$

a) Si $a = \pm 1$, le système proposé n'a pas de sens.

b) Si $a \neq \pm 1$, le déterminant du système est $1 - a^2$ et on trouve

$$x = \frac{1}{a^2-1}, \quad y = \frac{a}{a^2-1}.$$

2° $ax + (a-b)y = \dfrac{1}{a-b}; \quad bx + (a+b)y = \dfrac{1}{a+b}.$

a) Le système est évidemment impossible quand $a = \pm b$.

b) En supposant $a \neq \pm b$ et a et b différents de zéro, on trouve la solution

$$x = \frac{4ab}{a^4-b^4}; \quad y = \frac{a^2-2ab-b^2}{a^4-b^4}.$$

3° $\dfrac{x-a}{y-a} = \dfrac{a-b}{a+b}; \quad \dfrac{x}{y} = \dfrac{a^3-b^3}{a^3+b^3}.$

Nous supposons a et b différents de zéro. Le système proposé n'a pas de sens si $a + b = 0$. Supposons donc $a \neq -b$.

Le système peut s'écrire

$$(a+b)x - (a-b)y = 2ab; \quad (a^3+b^3)x - (a^3-b^3)y = 0.$$

Le déterminant de ce système est $-2ab(a^2-b^2)$.

a) Si $a \neq b$, on trouve

$$x = \frac{a^2+ab+b^2}{a+b}; \quad y = \frac{a^2-ab+b^2}{a-b}.$$

Cette solution ne convient au système primitif, que si la valeur de y est différente de zéro et de a. Or, on a de fait :

$y \neq 0$, car son numérateur est positif (*Traité*, 403).

$y \neq a$, car l'égalité $\dfrac{a^2-ab+b^2}{a-b} = a$ suppose $b = 0$.

b) Si $a = b$, le système proposé devient

$$x - a = 0, \quad x = 0,$$

ce qui est impossible quand $a \neq 0$.

4° $\dfrac{x-a}{x+a} + \dfrac{y+b}{y-b} = 2; \quad \dfrac{x-b}{x+b} + \dfrac{y+a}{y-a} = 2.$

Nous supposons a et $b \neq 0$. En faisant disparaître les dénominateurs le système devient

$$bx - ay = -2ab; \quad ax - by = -2ab.$$

Le déterminant de ce système est $a^2 - b^2$.

a) Si $a \neq \pm b$, le système donne

$$x = \frac{-2ab}{a+b}; \quad y = \frac{2ab}{a+b}.$$

Cette solution ne convient au système primitif que si la valeur de x est différente de $-a$ et de $-b$; et celle de y différente de a et de b. On vérifierait aisément que ces conditions sont réalisées quand a et b sont différents de zéro et différents l'un de l'autre.

b) Si $a = b$, le système est indéterminé, car il se réduit à l'équation

$$x - y = -2a.$$

Toutefois, la solution $x = -a$, $y = a$ est inacceptable.

c) Si $a = -b$, le système est impossible, car il devient

$$x + y = 2a, \quad x + y = -2a.$$

336. *Chercher la solution générale des systèmes suivants, puis déterminer les valeurs que doivent prendre les paramètres pour que* x *et* y *soient positifs.*

1° $mx - y = 2 - m; \quad mx + 5y = 8 - m.$

La solution générale ($m \neq 0$) est

$$x = \frac{3-m}{m}; \quad y = 1.$$

On voit que y est toujours positif.

x est positif dans les deux cas suivants :

a) $m > 0$; $3 - m > 0$ ou $m < 3$; en résumé, quand $0 < m < 3$.

b) $m < 0$; $3 - m < 0$ ou $m > 3$; ce qui est impossible.

2° $x + 2y = 3m; \quad 2x - y = m - 1.$

La solution du système est, quel que soit m,

$$x = \frac{5m-2}{5}; \quad y = \frac{5m+1}{5}.$$

x et y sont positifs, si on a :

$$5m - 2 > 0 \quad \text{et} \quad 5m + 1 > 0;$$

ce qui exige $$m > \frac{2}{5}.$$

3° $x - my = 7$; $2x + (m - 6)y = 1$.
La solution générale de ce système est $(m \neq 2)$

$$x = \frac{8m - 42}{3m - 6}; \quad y = \frac{-13}{3m - 6}.$$

y sera positif, si on a $3m - 6 < 0$ ou $m < 2$.
x sera positif, si on a en plus,

$$8m - 42 < 0 \quad \text{ou} \quad m < \frac{21}{4}.$$

En résumé, on doit avoir $m < 2$.

4° $x(1 - m) + y = 1 + 2m$; $x(1 + m) - 2y = 1 - 2m$.
La solution générale $(m \neq 3)$ de ce système est

$$x = \frac{3 + 2m}{3 - m}; \quad y = \frac{6m}{3 - m}.$$

x et y seront positifs dans les deux cas suivants :

$$a) \left.\begin{array}{lll} 3 + 2m > 0 & \text{ou} & m > -\frac{3}{2} \\ 3 - m > 0 & \text{ou} & m < 3 \\ 6m > 0 & \text{ou} & m > 0 \end{array}\right\} \text{En résumé, } 0 < m < 3.$$

$$b) \left.\begin{array}{lll} 3 + 2m < 0 & \text{ou} & m < -\frac{3}{2} \\ 3 - m < 0 & \text{ou} & m > 3 \\ 6m < 0 & \text{ou} & m < 0 \end{array}\right\} \text{Ces inéquations sont incompatibles.}$$

5° $(a + 1)x - (a - 1)y = 4a$; $(a - 1)x + (a + 1)y = 2a^2 - 2$.
On trouve, quel que soit a,

$$x = a + 1, \quad y = a - 1.$$

x et y seront positifs, si on a

$$a + 1 > 0 \quad \text{et} \quad a - 1 > 0;$$

ou, en résumé, $a > 1$.

6° $5x + 3y = 4a + b - 1$; $3x + 5y = 4a - b + 1$.
Ce système donne :

$$x = \frac{a + b - 1}{2}; \quad y = \frac{a - b + 1}{2}.$$

x et y seront positifs, si l'on a

$$a + b - 1 > 0 \quad \text{et} \quad a - b + 1 > 0;$$

ou

$$b > 1 - a \quad \text{et} \quad b < a + 1;$$

ce qui exige

$$a + 1 > 1 - a \quad \text{ou} \quad a > 0.$$

Supposons, par exemple, qu'on prenne $a = 5$. On devra avoir

$$b > -4 \quad \text{et} \quad b < 6;$$

ou, en résumé, $-4 < b < 6$.

7° $(a + 2b)x - (a - 2b)y = 6a$; $(a + 3)y - (a - 3)x = 4ab$.
Si $2a(2b + 3) \neq 0$, ce système donne
$$x = a - 2b + 3; \quad y = a + 2b - 3.$$
On doit avoir
$$a - 2b + 3 > 0 \quad \text{et} \quad a + 2b - 3 > 0;$$
ou
$$b < \frac{a + 3}{2}; \quad b > \frac{3 - a}{2};$$
ce qui exige $3 - a < a + 3$ ou $a > 0$.

Si l'on prend, par exemple, $a = 3$, on devra avoir $b < 3$ et $b > 0$, ce qui donne $0 < b < 3$.

337. *Quelles valeurs doit prendre* m *pour que les systèmes suivants admettent une solution unique? Quelle est cette solution?*

1° $x + 12 = 0$; $mx + 6 = 0$.

Rép. $m = \frac{1}{2}$; $x = -12$.

2° $mx + 2 = 0$; $(m - 1)x + 4 = 0$.

a) Si $m = 0$, la 1re équation est impossible.

b) Si $m \neq 0$, la 1re équation donne $x = \frac{-2}{m}$. La 2e équation donne, après avoir remplacé x par sa valeur,
$$m = -1; \quad \text{puis} \quad x = 2.$$

3° $(m - 5)x = 3$; $(2m - 5)x = 1$.
Rép. $m = 2$; $x = -1$.

4° $(m + 2)x = -3$; $mx = m - 2$.

a) Si $m = 0$, la 2e équation est impossible.

b) Si $m \neq 0$, la 2e équation donne $x = \frac{m - 2}{m}$. En remplaçant dans la 1re équation, on trouve
$$m^2 + 3m - 4 = 0 \quad \text{ou} \quad (m - 1)(m + 4) = 0.$$
Si $m = 1$, on a $x = -1$;
si $m = -4$, on a $x = 1{,}5$.

338. *Quelles valeurs doit prendre* m *pour que les systèmes suivants admettent une solution unique? Quelle est cette solution?*

1° $x + 2y = 1$; $mx - y = 4$; $x - 3y = 6$.
Le système formé par la 1re et la 3e équation, donne
$$x = 3, \quad y = -1.$$
En remplaçant x et y dans la 2e équation, on trouve
$$m = 1.$$

2° $x - 3y = 8; \quad 2x + y = 2; \quad x - my = 2.$
Rép. $x = 2, \quad y = -2; \quad m = 0.$

3° $x + (m + 1)y = 10; \quad 2x - (4m + 1)y = 5; \quad x - y = 6.$
a) Si $4m - 1 \neq 0$, les deux dernières équations forment un système possible et déterminé, qui donne $x = \dfrac{24m + 1}{4m - 1}, \quad y = \dfrac{7}{4m - 1}.$

En substituant dans la 1^re équation, on obtient la condition

$$9m - 18 = 0, \quad \text{ou} \quad m = 2.$$

On trouve ensuite $x = 7, \quad y = 1.$

b) Si $4m - 1 = 0$, les deux dernières équations sont incompatibles et le système est impossible.

4° $5x + (m - 1)y = -4; \quad x + my = 7; \quad 2x + my = 5.$

a) Si $m \neq 0$, les deux dernières équations sont compatibles et donnent

$$x = -2, \quad y = \frac{9}{m}.$$

Les trois équations sont compatibles, si cette solution vérifie la 1^re équation. En remplaçant x et y, on trouve $m = 3$. On en déduit $y = 3$.

b) Si $m = 0$, les deux dernières équations sont incompatibles et le système est impossible.

339. *Quelles valeurs faut-il donner à* a *et* b *pour que les systèmes suivants admettent une solution unique ? Quelle est cette solution ?*

1° $2x = 6, \quad ax = bx + 8; \quad bx = a.$
La première équation donne $x = 3$. Les deux équations suivantes deviennent après substitution

$$3a - 3b = 8; \quad a - 3b = 0.$$

On trouve ainsi $a = 4, \quad b = \dfrac{4}{3}.$

Rép. $x = 3; \quad a = 4, \quad b = \dfrac{4}{3}.$

2° $ax = b - 1; \quad bx = 2a + 1; \quad x + 1 = 0.$
Rép. $x = -1; \quad a = -2, \quad b = 3.$

3° $4x + y = 21; \quad ax + by = 13; \quad -x + 2y = -3;$

$$3ax - 2by = 24.$$

Rép. $x = 5, \quad y = 1; \quad a = 2, \quad b = 3.$

4° $ax + 2y = 2a - 2 \qquad (1)$
$ax - y = a + 1 \qquad (2)$
$3ax + 3by = ab - 1 \qquad (3)$
$6bx - 6ay = 11 - 2a^2. \qquad (4)$

a) Si $a \neq 0$, les équations (1) et (2) donnent

$$x = \frac{4}{3}, \quad y = \frac{a-3}{3}.$$

Après substitution dans les équations (3) et (4), on obtient un système en a et b

$$4a - 3b = -1; \quad 6a + 8b = 11.$$

On trouve ainsi $a = \frac{1}{2}, \quad b = 1;$

et par suite, $x = \frac{4}{3}, \quad y = -\frac{5}{6}.$

b) Si $a = 0$, le système proposé devient

$$y = -1; \quad y = -1; \quad 3by = -1; \quad 6bx = 11.$$

On a donc une 2^e réponse

$$a = 0, \quad b = \frac{1}{3}; \quad x = \frac{11}{2}, \quad y = -1.$$

340. *Quelle relation doit exister entre* a, b, c *pour que les trois équations suivantes soient compatibles?*

$$x - ay - b = 0; \quad y + ax - c = 0; \quad bx + cy = 1.$$

Les deux premières équations sont compatibles, car le déterminant du système qu'elles forment, est $a^2 + 1$. Ce système donne

$$x = \frac{b+ac}{a^2+1}; \quad y = \frac{c-ab}{a^2+1}.$$

En remplaçant x et y dans la 3^e équation, on trouve la relation cherchée

$$a^2 - b^2 - c^2 + 1 = 0.$$

341. *Si* a, b, c *sont des nombres distincts, montrer que* $a + b + c = 0$ *est la condition de compatibilité des trois équations :*

$$x + ay + a^3 = 0; \quad x + by + b^3 = 0; \quad x + cy + c^3 = 0.$$

Comme $b - a \neq 0$, les deux premières équations forment un système possible et déterminé, qui donne

$$x = ab(a+b), \quad y = -(a^2 + ab + b^2).$$

En remplaçant dans la 3^e équation, on trouve finalement

$$(b-c)(a-c)(a+b+c) = 0.$$

Comme a, b, c sont des nombres distincts, on devra avoir

$$a + b + c = 0.$$

342. *On donne les équations* $ax + by = c$ *et* $a'x + b'y = c'$; *on suppose qu'elles donnent pour* x *et* y *une valeur unique.*

Quelle relation doit exister entre les coefficients pour que la valeur de x *soit le triple de celle de* y*?*

Lorsque $ab' - ba' \neq 0$, le système admet une solution unique

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}; \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

La valeur de x sera le triple de celle de y, lorsqu'on aura

$$cb' - bc' = 3(ac' - ca').$$

343. *On donne le système*

$$mx - 6y = 2m + 4; \quad 6x - (m - 1)y = 4.$$

Déterminer m *pour que ce système admette une solution unique et que la valeur de* y *soit le double de celle de* x.

Le déterminant du système proposé est

$$m(1 - m) + 36 \quad \text{ou} \quad - m^2 + m + 36.$$

Si ce déterminant est différent de zéro, le système admet la solution

$$x = \frac{2m^2 + 2m - 28}{m^2 - m - 36}; \quad y = \frac{8m + 24}{m^2 - m - 36}.$$

Les valeurs cherchées de m sont les solutions du système

$$- m^2 + m + 36 \neq 0; \qquad (1)$$

$$2(2m^2 + 2m - 28) = 8m + 24. \qquad (2)$$

Les solutions de ce système sont

$$m' = - 4, \quad m'' = 5.$$

Si $m = - 4$, on trouve $x = 0{,}25$, $y = 0{,}5$.
Si $m = 5$, on trouve $x = - 2$, $y = - 4$.

344. *Même question pour le système*

$$(2m + 5)x + (3m + 1)y + 3 = 0;$$

$$(m + 5)x + (2m + 3)y - 18 = 0.$$

Le déterminant de ce système est $m^2 + 10$. Il est positif, quel que soit m. La solution du système est

$$x = \frac{- 60m - 27}{m^2 + 10}; \quad y = \frac{39m + 105}{m^2 + 10}.$$

On doit avoir $39m + 105 = - 2(60m + 27)$.
Cette équation donne $m = - 1$.
On trouve ensuite $x = 3$, $y = 6$.

345. *Quelle relation doit exister entre* a *et* b *pour que les équations*

$$x - y = 5; \quad x + y = a; \quad (a + 5)x + (a - 5)y = b$$

soient compatibles ?

Les deux premières équations donnent

$$x = \frac{a + 5}{2}; \quad y = \frac{a - 5}{2}.$$

Cette solution doit vérifier la 3^e équation. On trouve ainsi la condition

$$a^2 + 25 = b.$$

346. *Même question pour les équations :*

$$x - 2y = b; \quad 2x - y = a; \quad (2a + b)x + (a + 2b)y = a - b.$$

Les deux premières équations donnent

$$x = \frac{2a - b}{3}; \quad y = \frac{a - 2b}{3}.$$

Remplaçons x et y dans la 3^e équation. On trouve ainsi la condition

$$5a^2 - 5b^2 = 3(a - b).$$

Cette condition de compatibilité est vérifiée quand $a - b = 0$; ou encore, quand $5(a + b) = 3$.

347. *Trouver la condition pour que le système*

$$x + 2y = 0, \quad ax + by = 0,$$

admette d'autres solutions que la solution nulle.

Ce système admet d'autres solutions que la solution nulle,s'il se réduit à une équation, ce qui a lieu :

1° quand on a $\dfrac{1}{a} = \dfrac{2}{b}$ ou $b = 2a$;

2° quand on a $a = b = 0$.

348. *Résoudre les systèmes homogènes suivants :*

1° $x + y - z = 0$; $2x - 3y + 4z = 0$.
Rép. $x = k$; $y = -6k$; $z = -5k$.

2° $2x - y + 3z = 0$; $-x + 5y - z = 0$.
Rép. $x = -14k$; $y = -k$; $z = 9k$.

3° $6x + 2y - z = 0$; $3x + y - 3z = 0$.
Rép. $x = k$; $y = -3k$; $z = 0$.

4° $x + 2y + 3z = 0$; $2x + 4y - 6z = 0$
Rép. $x = -2k$; $y = k$; $z = 0$.

CHAPITRE XI

Discussion de problèmes.

§ I. — PROBLÈMES IMPOSSIBLES OU INDÉTERMINÉS.

Résoudre les problèmes numériques qui suivent et dire pourquoi ils sont impossibles ou indéterminés.

349. *Un joueur donne 2 fr. pour chaque partie qu'il perd et reçoit 1 fr. pour chaque partie qu'il gagne; après douze parties, son gain excède sa perte de 18 fr. Combien de parties a-t-il gagnées ?*

Supposons qu'il gagne x parties. L'équation est

$$x - 2(12 - x) = 18; \quad \text{d'où} \quad x = 14.$$

Le problème est impossible, car x ne peut être supérieur à 12.

350. *On demande à un berger combien il a de moutons. Si j'en avais 10 de plus, dit-il, j'en aurais les 2/3 des 3/4 du double de ce que j'ai. Combien de moutons a-t-il ?*

Soit x le nombre de moutons. L'équation est

$$x + 10 = 2x \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \quad \text{ou} \quad 0.x = 10.$$

L'équation et le problème sont impossibles.

351. *Un enfant va cueillir des pêches; il devra donner la moitié de ses pêches à un ami, et le quart du reste à son frère. Combien doit-il en cueillir s'il veut en conserver 7 pour lui?*

Soit x le nombre de pêches. L'équation est

$$x - \frac{x}{2} - \frac{x}{8} = 7; \quad \text{d'où} \quad x = 18\,\frac{2}{3}.$$

Le problème est impossible, car le nombre de pêches doit être entier.

352. *Un joueur perd d'abord les 4/9 de son argent, puis il gagne 15 fr. Ensuite il perd les 2/5 de ce qu'il possède et il lui reste le tiers de ce qu'il avait d'abord, plus 9 fr. Quelle somme avait-il avant le jeu?*

Supposons qu'il possédait x fr. L'équation est

$$\frac{3}{5}\left(\frac{5x}{9} + 15\right) = \frac{x}{3} + 9 \quad \text{ou} \quad 0.x = 0.$$

L'équation et le problème sont indéterminés.

353. *Trouver un nombre qui, divisé respectivement par* 2, 3, 4, *donne pour restes* 1, 2, 3; *la somme des quotients vaut le nombre plus un douzième de ce même nombre.*

Soit x le nombre. L'équation est

$$\frac{x-1}{2}+\frac{x-2}{3}+\frac{x-3}{4}=\frac{13x}{12} \quad \text{ou} \quad 0.x = 23.$$

L'équation et le problème sont impossibles.

354. *Deux pièces d'une même étoffe mesurent respectivement* 200 *mètres et* 180 *mètres. Si le prix du mètre augmentait de* 2 *fr., les deux pièces coûteraient ensemble* 760 *fr. Quel est le prix du mètre?*

Supposons qu'un mètre coûte x fr. L'équation est

$$200(x+2)+180(x+2)=760; \quad \text{d'où} \quad x=0.$$

Cette solution ne convient pas au problème.

355. *Deux lingots d'or sont au titre de* 0,900 *et* 0,820, *et pèsent respectivement* 2,7 *kg. et* 3,5 *kg. Après les avoir fondus ensemble, on veut ramener le lingot résultant au titre de* 0,850. *Quelle quantité d'or pur ou de cuivre faudra-t-il ajouter?*

1° Supposons qu'il faille ajouter x grammes d'or. L'équation est

$$(2700+3500+x)0{,}85 = 2700\times 0{,}9+3500\times 0{,}820+x;$$

d'où

$$x = -200.$$

Cette réponse négative est inacceptable pour le problème.

2° Supposons qu'il faille ajouter x grammes de cuivre. L'équation est

$$(2700+3500+x)0{,}85 = 2700\times 0{,}9+3500\times 0{,}820;$$

d'où

$$x = 35\,\frac{5}{17}.$$

Cette réponse est acceptable : il faut ajouter $35\,\frac{5}{17}$ gr. de Cu.

356. *Chercher les dimensions d'un rectangle sachant que la superficie augmente de* 60 m^2 *si l'on augmente la base de* 4 *m. et la hauteur de* 12 *m.; tandis qu'elle diminue de* 8 m^2 *si l'on diminue la base de* 1 *m. et la hauteur de* 3 *m.*

Supposons que la base mesure x mètres et la hauteur y mètres. On a le système

$$(x+4)(y+12)=xy+60; \quad (x-1)(y-3)=xy-8;$$

ou

$$3x+y=3; \quad 3x+y=11.$$

Le système et le problème sont impossibles.

357. *Si l'on augmente la base d'un rectangle de* 2 *m. et la hauteur de* 6 *m., l'aire augmente de* 96 m^2; *si l'on diminue la base de* 5 *m. et la hauteur de* 15 *m., l'aire diminue de* 135 m^2. *Déterminer les dimensions de ce rectangle.*

Supposons que la base mesure x mètres et la hauteur y mètres. On a le système

$$(x + 2)(y + 6) = xy + 96; \quad (x - 5)(y - 15) = xy - 135;$$

ou $$3x + y = 42; \quad 3x + y = 42.$$

Le système et le problème sont indéterminés.

Résoudre les problèmes numériques suivants. Examiner s'ils sont possibles ou non. Le cas échéant, modifier les énoncés en vue de les rendre possibles.

358. *Deux nombres sont tels que leur produit plus* 30 *égale le produit de ces mêmes nombres augmentés chacun de* 5; *trouver ces nombres sachant qu'ils diffèrent de* 5 *unités.*

Soit x le plus petit nombre. L'équation est

$$x(x + 5) + 30 = (x + 5)(x + 10); \quad \text{d'où} \quad x = -2.$$

Cette solution négative convient au problème.

359. *Deux courriers, faisant le premier* 9 *km. et le second* 8 *km. à l'heure, se dirigent vers le même but. Ils se rejoignent à* 144 *km. de leur point de départ commun. Combien d'heures le second était-il parti* après *le premier ?*

Si le second est parti x heures après le 1er, l'équation est

$$\frac{144}{9} - \frac{144}{8} = x; \quad \text{d'où} \quad x = -2.$$

Cette réponse ne convient pas au problème, qui est donc impossible. On aura un problème possible en remplaçant dans l'énoncé le mot *après* par le mot *avant.*

360. *Le poids d'une pendule descend de* 11 *cm. en* 3 *minutes. Un insecte grimpe le long de la corde et parcourt* 17 *cm. en* 5 *minutes. On demande après combien de temps l'insecte sera en un point situé* 12 *cm.* plus haut *que son point de départ ?*

Supposons que ce soit après x minutes. On a l'équation

$$\frac{17x}{5} - \frac{11x}{3} = 12; \quad \text{d'où} \quad x = -45.$$

Cette réponse négative est inacceptable pour le problème. Celui-ci devient un problème possible en remplaçant *plus haut* par *plus bas.*

361. *Un bassin pouvant contenir* 60 *m*^{3} *et muni de deux robinets, a été rempli en* 20 *heures. Le premier tuyau y versait* 4 *m*^{3} *par heure. Combien le second en faisait-il* entrer *dans le même temps ?*

Supposons que le second robinet versait par heure x m^3 dans le bassin. L'équation est $4 \times 20 + 20x = 60$; d'où $x = -1$.

Cette solution négative est inacceptable pour le problème. Celui-ci devient un problème possible en remplaçant le mot *entrer* par le mot *sortir.*

362. *Deux bassins, dont l'un* reçoit 5 *hl. d'eau par heure et l'autre* 2 *hl., contiennent déjà, le premier* 24 *hl. et le second* 10 *hl.* Dans combien de temps *le premier bassin contiendra-t-il deux fois autant d'eau que le second ?*

Supposons que dans x heures le 1er bassin contienne le double du second. L'équation est

$$24 + 5x = 2(10 + 2x); \quad \text{d'où} \quad x = -4.$$

Cette solution négative est inacceptable pour le problème. Celui-ci serait possible si on demandait : *A quel moment le premier contenait-il le double du second ?* Il serait également possible si on remplacait le mot *reçoit* par le mot *perd.*

363. *Trouver un nombre de deux chiffres tel que la différence entre* 4 *fois le chiffre des dizaines et* 3 *fois le chiffre des unités égale* 7, *et que, renversé, le nombre diminue de* 18.

Soient x le chiffre des dizaines, y le chiffre des unités. On a le système

$$4x - 3y = 7; \quad (10x + y) - 18 = 10y + x.$$

Ce système donne $x = 1$, $y = -1$.

Cette solution est inacceptable et le problème est impossible.

364. *Si Pierre recevait* 1000 *fr. et Paul* 2000 *fr., l'avoir de Pierre vaudrait* 12 *fois celui de Paul. Si tous deux recevaient* 4000 *fr., Pierre aurait* 5 *fois autant que Paul. Que possède chacun ?*

Supposons que Pierre possède x fr. et Paul, y fr. On a le système

$$x + 1000 = 12(y + 2000); \quad x + 4000 = 5(y + 4000).$$

Ce système donne $x = 11000$; $y = -1000$.

Cette réponse convient au problème si on remplace la question finale par : *Quel était l'état de la fortune d'un chacun ?* La réponse indique alors que Pierre possédait 11000 fr. et que Paul avait une dette de 1000 fr.

365. *Trouver ce que possèdent* 3 *personnes sachant que* A *et* B *ont ensemble* 1000 *fr.*; A *et* C, 1800 *fr.*; B *et* C, 400 *fr.*

En supposant que A, B, C possèdent respectivement x, y, z fr., on a le système

$$x + y = 1000; \quad x + z = 1800; \quad y + z = 400.$$

Ce système donne $x = 1200$; $y = -200$; $z = 600$.

Rép. B a une dette de 200 fr.

366. *Deux charbonnages* M *et* N *sont distants de* 125 *km. Le charbon pris en* M *coûte* 27,50 *fr. la tonne; en* N, *il coûte* 44 *fr. Le transport se paie à raison de* 0,06 *fr. par km. et par tonne. En quel point* R *de la distance* MN, *le charbon revient-il au même prix ?*

Supposons que le point à déterminer se trouve à x km. de M et à y km. de N. On a le système :

$$x + y = 125; \quad 27{,}50 + 0{,}06 \times x = 44 + 0{,}06 \times y.$$

Ce système donne $x = 200$; $y = -75$.

Le problème est impossible.

§ II. — PROBLÈMES A DISCUTER.

A quelles conditions doivent satisfaire les données** (supposées positives) **des problèmes suivants, pour qu'ils soient possibles?

367. *La différence de deux capitaux est* a. *Le plus grand est placé à* t *p. c. et le plus petit à* t′ *p. c. Ces deux capitaux donnent le même intérêt. Quel est le plus petit des capitaux?*

Soit x le plus petit capital, placé à t' p. c. L'équation est

$$\frac{(x+a)t}{100} = \frac{xt'}{100} \quad \text{ou} \quad x(t'-t) = at.$$

1° Si $t \neq t'$, cette équation donne

$$x = \frac{at}{t'-t}.$$

Cette solution de l'équation n'est une solution du problème, que si elle est positive. On doit donc avoir $t' > t$: *Le plus petit capital doit être placé au taux le plus élevé.*

2° Si $t = t'$, l'équation est impossible, de même que le problème.

368. *On achète du drap à* a *fr. les* m *mètres et on le revend à* b *fr. les* n *mètres. On gagne ainsi* c *fr. Trouver la longueur de la pièce.*

Supposons que la pièce mesure x mètres. Comme on a acheté le mètre pour $\frac{a}{m}$ fr. et qu'on l'a revendu pour $\frac{b}{n}$ fr., l'équation du problème sera

$$\frac{bx}{n} - \frac{ax}{m} = c \quad \text{ou} \quad x(bm - an) = cmn.$$

1° Si $bm - an \neq 0$, on a $x = \dfrac{cmn}{bm - an}$.

Cette solution de l'équation n'est une solution du problème que si elle est positive. On doit donc avoir

$$bm - an > 0 \quad \text{ou} \quad \frac{b}{n} > \frac{a}{m}.$$

Le prix de vente du mètre doit être supérieur au prix d'achat.

2° Si $bm - an = 0$, l'équation et le problème sont impossibles quand $c \neq 0$; ils sont indéterminés, quand $c = 0$.

369. *Un robinet remplit un bassin en* a *heures; un autre le vide en* b *heures. On ouvre les deux robinets à la fois, le bassin étant vide. Après combien d'heures sera-t-il rempli?*

S'il est rempli après x heures et s'il peut contenir A litres, on a l'équation

$$\frac{Ax}{a} - \frac{Ax}{b} = A \quad \text{ou} \quad (b-a)x = ab.$$

Si $a = b$, l'équation et le problème sont impossibles.
Si $a \neq b$, l'équation donne

$$x = \frac{ab}{b - a}.$$

Cette réponse ne convient que si elle est positive. On doit donc avoir $b > a$, ce qui s'explique aisément.

370. *Un ouvrier s'engage chez un particulier à condition de recevoir* a *fr. par jour de travail et de rendre* b *fr. par jour de chômage. Après* n *jours, il reçoit* c *fr. Pendant combien de jours a-t-il travaillé ?*

Soit x le nombre des jours de travail. L'équation est

$$ax - b(n - x) = c \quad \text{ou} \quad x(a + b) = c + bn.$$

Comme $a + b$ est positif, l'équation admet toujours une solution qui est

$$x = \frac{c + bn}{a + b}.$$

Cette solution de l'équation n'est acceptable pour le problème que si elle est inférieure ou égale à n. On doit donc avoir

$$\frac{c + bn}{a + b} \leqslant n \quad \text{ou} \quad c \leqslant an.$$

La somme reçue c doit évidemment être inférieure ou égale au salaire an, que l'ouvrier recevrait en travaillant tous les jours.

371. *On a deux lingots d'argent aux titres* a *et* b. *Quel poids faut-il prendre de chacun pour fabriquer* c *pièces de* 5 *fr.?*

Prenons x grammes du 1er lingot et y grammes du second. Le poids des c pièces de 5 fr. est $25c$ grammes. On est conduit au système

$$x + y = 25c; \quad ax + by = 0,9 \times 25c;$$

son déterminant est $b - a$.

1re Partie : $a - b \neq 0$. — Le système admet dans ce cas une solution unique, qui est

$$x = \frac{25c(0,9 - b)}{a - b}; \quad y = \frac{25c(a - 0,9)}{a - b}.$$

Ces réponses doivent être positives ou nulles; par le fait, x et y seront inférieurs ou égaux à $25c$. x et y seront positifs, si les deux termes de chaque fraction sont de même signe.

1er cas : $a - b > 0$; $0,9 - b > 0$; $a - 0,9 > 0$. — Dans ce cas, x et y sont positifs.

Les hypothèses peuvent s'écrire $b < 0,9 < a$. On voit que le titre des pièces doit être compris entre les titres des lingots. Cette condition de possibilité s'impose d'ailleurs à priori.

2e cas : $a - b < 0$; $0,9 - b < 0$; $a - 0,9 < 0$. — Dans ce cas, x et y sont positifs.

3e cas : $b = 0{,}9 \neq a$. — Dans ce cas, on a
$$x = 0, \quad y = 25c.$$
4e cas : $a = 0{,}9 \neq b$. — Dans ce cas, on a
$$x = 25c, \quad y = 0.$$
2e PARTIE : $a = b$. — Le système devient
$$x + y = 25c; \quad x + y = \frac{0{,}9 \times 25c}{a}.$$
5e cas : $a = b \neq 0{,}9$. — Le système et le problème sont impossibles.

6e cas : $a = b = 0{,}9$. — Le système et le problème sont indéterminés.

372. *Partager chacun des deux nombres positifs* p *et* q *en deux parties positives, telles que si on divise une partie de* p *par une partie de* q, *on obtienne la fraction* $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$, *et si on divise l'autre partie de* p *par l'autre partie de* q, *on obtienne la fraction* $\frac{\mathrm{a}'}{\mathrm{b}'}$.

Soit x l'une des parties de p et y la partie correspondante de q; les deux autres parties seront $p - x$ et $q - y$. On a le système
$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}; \quad \frac{p-x}{q-y} = \frac{a'}{b'},$$
qui peut s'écrire
$$ay - bx = 0; \quad a'y - b'x = a'q - b'p.$$
1re PARTIE : $a'b - ab' \neq 0$. — On a la solution
$$x = \frac{a(a'q - b'p)}{a'b - ab'}; \quad y = \frac{b(a'q - b'p)}{a'b - ab'}.$$
Ces valeurs doivent être positives; de plus, la valeur de x doit être inférieure à p et celle de y, inférieure à q.

La 1re condition exige que les deux termes des fractions égales à x et y soient de même signe.

1er cas : $a'b - ab' > 0$; $a'q - b'p > 0$. — Dans ce cas, x et y sont positifs. On devra avoir en plus
$$\frac{a(a'q - b'p)}{a'b - ab'} < p; \quad \frac{b(a'q - b'p)}{a'b - ab'} < q.$$
Ces deux inégalités se ramènent chacune à la suivante
$$bp - aq > 0.$$
On a ainsi trois conditions de possibilité. Elles peuvent s'écrire
$$\frac{a'}{b'} > \frac{a}{b}; \quad \frac{a'}{b'} > \frac{p}{q}; \quad \frac{p}{q} > \frac{a}{b};$$
ou, en résumé,
$$\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{a'}{b'}.$$

2^e cas : $a'b - ab' < 0$; $a'q - b'p < 0$. — Dans ce cas, x et y sont positifs. En raisonnant comme dans le 1^er cas, on verrait que ces valeurs positives de x et y ne conviennent au problème que si on a

$$\frac{a'}{b'} < \frac{p}{q} < \frac{a}{b}.$$

En résumé, quand $a'b - ab'$ est différent de zéro, le problème n'est possible que si $\frac{p}{q}$ est compris entre les deux fractions données $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$.

2^e Partie : $a'b - ab' = 0$. — Le système et le problème sont impossibles ou indéterminés, suivant que $a'q - b'p$ est différent de zéro ou non.

373. *Trouver trois nombres positifs* x, y, z, *tels que le rapport des deux derniers égale* $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$, *et que, si au premier on ajoute successivement chacun des deux autres, les sommes obtenues soient respectivement* a *et* b.

On a le système

$$\frac{y}{z} = \frac{m}{n}; \quad x + y = a; \quad x + z = b.$$

La première équation peut s'écrire

$$\frac{y}{m} = \frac{z}{n}.$$

Elle donne, en représentant chacun des deux rapports par k,

$$y = mk; \quad z = nk.$$

Les deux dernières deviennent alors

$$x + mk = a; \quad x + nk = b.$$

1^re Partie : $m - n \neq 0$. — On trouve dans ce cas

$$x = \frac{an - bm}{n - m}; \quad k = \frac{b - a}{n - m};$$

$$y = \frac{m(b - a)}{n - m}; \quad z = \frac{n(b - a)}{n - m}.$$

Les trois inconnues sont positives, dans les deux cas suivants :

1° $n - m > 0$; $b - a > 0$; $an - bm > 0$.

Ces hypothèses donnent $\frac{m}{n} < \frac{a}{b} < 1$.

2° $n - m < 0$; $b - a < 0$; $an - bm < 0$.
Ces hypothèses donnent

$$1 < \frac{a}{b} < \frac{m}{n}.$$

2^e Partie : $m = n$. — Le système devient

$$y = z; \quad x + v = a; \quad x + z = b.$$

Il est impossible quand $a \neq b$. Il est indéterminé quand $a = b$.

374. *On a du vin à* a *et à* b *fr. le litre. Combien doit-on prendre de chaque sorte pour former un mélange de* n *litres qui revienne à* c *fr. le litre?*

Soit x le nombre de litres de la première espèce; $n - x$ sera le nombre de litres de la seconde espèce, et on aura l'équation

$$ax + b(n - x) = cn$$

ou

$$(a - b)x = n(c - b).$$

1re Partie : $a - b \neq 0$. — On a la solution

$$x = \frac{n(c - b)}{a - b}.$$

Cette valeur de x n'est acceptable pour le problème que si elle est positive et inférieure *à* n. La 1re condition exige que les deux termes de la fraction égale à x soient de même signe.

1er cas : $c - b > 0$; $a - b > 0$. — Dans ce cas, x est positif. On devra avoir en plus

$$\frac{n(c - b)}{a - b} < n \quad \text{ou} \quad c < a.$$

Le problème est donc possible, quand on a :

$$c - b > 0; \quad a - b > 0; \quad a - c > 0;$$

ou, en résumé,

$$a > c > b.$$

2e cas : $c - b < 0$; $a - b < 0$. — Dans ce cas, x est positif. On montrerait, comme dans le cas précédent, qu'on doit avoir en plus

$$a - c < 0.$$

Le problème est donc possible, quand on a :

$$c - b < 0; \quad a - b < 0; \quad a - c < 0;$$

ou, en résumé,

$$a < c < b.$$

3e cas : $c - b = 0$. — On a dans ce cas $x = 0$. Il ne faudra prendre que du vin de la 2e espèce.

2e Partie : $a - b = 0$. — L'équation devient

$$0.x = n(c - b).$$

L'équation et le problème sont impossibles ou indéterminés suivant que c est différent de b ou égal à b.

375. *On donne le périmètre* 2p *et la hauteur* h *d'un triangle isocèle; calculer les côtés de ce triangle.*

Soit ABC le triangle considéré tel que AB = AC.

Prenons pour inconnues les côtés AB = x et BC = $2y$.

Le périmètre est évidemment égal à $2(x + y)$, d'où l'équation

$$x + y = p. \qquad (1)$$

La hauteur étant AD, le triangle rectangle ABD donne

$$x^2 = y^2 + h^2 \quad \text{ou} \quad x^2 - y^2 = h^2,$$

c'est-à-dire

$$(x + y)(x - y) = h^2,$$

ou, en remplaçant $x + y$ par p et divisant,

$$x - y = \frac{h^2}{p}. \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) donnent

$$x = \frac{p^2 + h^2}{2p}; \qquad 2y = \frac{p^2 - h^2}{p}.$$

Discussion. — Pour que les valeurs obtenues pour les côtés x et $2y$ soient acceptables, il faut qu'elles soient positives et que l'on puisse construire un triangle avec ces longueurs, c'est-à-dire que la base $2y$ soit moindre que la somme des deux autres côtés; cette condition s'exprime par $y < x$.

La valeur de x est positive; celle de $2y$ est positive si l'on a

$$p^2 - h^2 > 0 \quad \text{ou} \quad p > h.$$

On doit aussi avoir

$$y < x \quad \text{ou} \quad \frac{p^2 - h^2}{2p} < \frac{p^2 + h^2}{2p};$$

cette inégalité a toujours lieu, puisqu'elle est équivalente à

$$2h^2 > 0.$$

La seule condition est donc

$$p > h,$$

et si elle est remplie, le problème n'a qu'une solution.

Résoudre et discuter les problèmes suivants :

376. *On a acheté* 9 *m. de drap pour* 270 *fr. De combien faut-il augmenter ou diminuer le prix du mètre pour que les* 9 *m. coûtent* p *fr. ?*

Le prix d'un mètre est 270 : 9 = 30 fr. Supposons que le prix varie de x fr. On a

$$9(30 + x) = p; \quad \text{d'où} \quad x = \frac{p - 270}{9}.$$

1^er^ cas : $p > 270$. — On a $x > 0$ et le prix augmente.

2^e^ cas : $p = 270$. — On a $x = 0$.

3^e^ cas : $p < 270$. — On a $x < 0$ et le prix diminue. Seulement cette réponse négative ne convient que si elle est inférieure en valeur absolue à 30. On doit donc avoir

$$\frac{270 - p}{9} < 30 \quad \text{ou} \quad p > 0.$$

377. *Trouver le nombre dont le produit par* a *est égal à ce nombre augmenté de* a, *et discuter son signe.*

Soit x le nombre cherché. On a

$$ax = x + a \quad \text{ou} \quad x(a - 1) = a.$$

Si $a = 1$, l'équation et le problème sont impossibles. Supposons donc $a \neq 1$. L'équation donne alors

$$x = \frac{a}{a - 1}.$$

1er cas : $a < 0$. — On a aussi $a - 1 < 0$ et x est positif.

2e cas : $a = 0$. — On aura $x = 0$.

3e cas : $0 < a < 1$. — On a $a - 1 < 0$ et x est négatif.

4e cas : $a > 1$. — On a aussi $a - 1 > 0$ et x est positif.

378. *La somme de deux nombres et le quotient du premier par le second sont égaux à* a. *Trouver ces deux nombres et discuter leur signe.*

Soient x et y les deux nombres. On a

$$x + y = a; \quad (1) \qquad \frac{x}{y} = a. \quad (2)$$

Ces équations donnent

$$x = ay \quad \text{et} \quad y(a + 1) = a.$$

Cette dernière équation et le problème sont impossibles si $a = -1$. Supposons donc $a + 1 \neq 0$. On trouve alors

$$x = \frac{a^2}{a + 1}; \quad y = \frac{a}{a + 1}.$$

1er cas : $a > 0$. — On aura aussi $a + 1 > 0$ et x et y sont positifs.

2e cas : $a = 0$. — On a $x = y = 0$. Cette solution est inacceptable, car pour $x = y = 0$, l'équation (2) n'a pas de sens.

3e cas : $-1 < a < 0$. — On a $a + 1 > 0$; par suite, x est positif et y négatif.

4e cas : $a < -1$. — On a $a + 1 < 0$; par suite, x est négatif et y est positif.

379. *Quel nombre faut-il ajouter aux deux termes de la fraction* $\frac{a}{b}$ *pour qu'elle devienne égale à son inverse.*

Soit x le nombre cherché. On a l'équation

$$\frac{a + x}{b + x} = \frac{b}{a} \quad (1) \qquad \text{ou} \quad x(a - b) = b^2 - a^2. \quad (2)$$

Remarquons d'abord que a et b doivent être différents de zéro; sinon le problème n'aurait pas de sens.

1er cas : $a = b$. — L'équation (2) devient $0.x = 0$. Elle est indéterminée ainsi que le problème. Toutefois, on doit avoir $x \neq -a = -b$, car l'équation (1) n'a pas de sens pour $x = -a = -b$.

2e cas : $a \neq b$. — L'équation (2) donne $x = -(a+b)$. De fait, on a

$$\frac{a-(a+b)}{b-(a+b)} = \frac{-b}{-a} = \frac{b}{a}.$$

380. *Deux cercles* O *et* O′ *ont pour rayons* R *et* R′. *La mesure de* OO′ *est* d. *Calculer la distance du point* O *au centre de similitude externe et discuter son signe.*

Prenons O comme origine et orientons OO′ positivement vers la droite, par exemple. On aura $\overline{OO'} = d$. Soit I le centre de similitude externe; posons $\overline{OI} = x$.

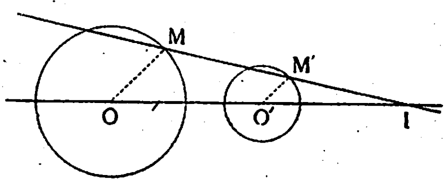


Fig. 1.

Si $d \neq 0$ et $R \neq R'$, on aura, dans tous les cas, en valeur absolue et en signe

$$\frac{\overline{OI}}{\overline{O'I}} = \frac{R}{R'} \quad \text{ou} \quad \frac{OI}{\overline{OI}-\overline{O'I}} = \frac{R}{R-R'}.$$

Mais on a

$$\overline{OO'} + \overline{O'I} + \overline{IO} = 0 \quad \text{ou} \quad \overline{OI} - \overline{O'I} = \overline{OO'} = d.$$

Il vient donc

$$\frac{x}{d} = \frac{R}{R-R'} \quad \text{ou} \quad x = \frac{dR}{R-R'}.$$

x est positif et le centre de similitude se trouve à droite dans les deux cas suivants :

$$d > 0;\ R > R' \quad \text{et} \quad d < 0;\ R < R'.$$

x est négatif et le centre de similitude se trouve à gauche dans les deux cas suivants :

$$d > 0;\ R < R' \quad \text{et} \quad d < 0;\ R > R'.$$

381. *Deux points* A *et* B *sont situés d'un même côté de la droite horizontale* X′X. *On trace* AA′ *et* BB′ *perpendiculaires à* X′X *et on pose* $AA' = a$ *et* $BB' = b$. *La mesure de* A′B′ *est* d. *On demande de trouver sur la droite* X′X *un point* M *équidistant de* A *et de* B *et d'étudier la position de* M *par rapport à* A′ *et* B′, *quand* B′ *est à droite de* A′.

Orientons X′X positivement vers la droite. Par hypothèse, on a $\overline{A'B'} = d > 0$.

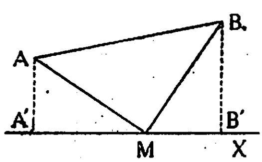


Fig. 2.

En posant $\overline{A'M} = x$, l'égalité

$$AM^2 = BM^2$$

donne l'équation

$$x^2 + a^2 = (d - x)^2 + b^2 \quad \text{ou} \quad 2dx = b^2 + d^2 - a^2.$$

Comme $d > 0$, il vient

$$x = \frac{b^2 + d^2 - a^2}{2d}.$$

1° Le point M est à gauche de A′, si $x < 0$; donc si on a

$$b^2 + d^2 < a^2 \quad \text{ou} \quad A'B < A'A.$$

2° Le point M est en A′, si $x = 0$, donc si on a

$$b^2 + d^2 = a^2 \quad \text{ou} \quad A'B = A'A.$$

Les points A et B sont alors sur une circonférence de centre A′.

3° Le point M est entre A′ et B′, si $0 < x < d$, donc si on a

$$b^2 + d^2 > a^2 \quad \text{ou} \quad A'B > A'A$$

et $$\frac{b^2 + d^2 - a^2}{2d} < d \quad \text{ou} \quad b^2 < a^2 + d^2 \quad \text{ou} \quad B'B < B'A.$$

4° Le point M est à droite de B′, si $x > d$, donc si on a

$$\frac{b^2 + d^2 - a^2}{2d} > d \quad \text{ou} \quad b^2 > a^2 + d^2 \quad \text{ou} \quad B'B > B'A.$$

382. *Trouver une proportion dont les quatre termes diffèrent également de quatre nombres positifs donnés* a, b, c *et* d.

L'équation du problème est

$$\frac{a + x}{b + x} = \frac{c + x}{d + x} \tag{1}$$

ou

$$x[(a + d) - (b + c)] = bc - ad. \tag{2}$$

1^re Partie : $a + d - (b + c) \neq 0$. — L'équation précédente donne

$$x = \frac{bc - ad}{(a + d) - (b + c)}.$$

1^er cas : Si on a $bc > ad$ et $a + d > b + c$, ou encore, si on a $bc < ad$ et $a + d < b + c$, on trouve $x > 0$ et cette réponse positive convient toujours.

2^e cas : Si on a $bc > ad$ et $a + d < b + c$, ou encore, si on a $bc < ad$ et $a + d > b + c$, on trouve pour x une valeur négative. Cette réponse négative convient à condition qu'elle n'annule aucun dénominateur de l'équation (1). $x \neq -b$ exige

$$\frac{bc - ad}{(a + d) - (b + c)} \neq -b,$$

ou $$b^2 - (a + d)b + ad = (b - a)(b - d) \neq 0,$$

ou encore, b différent de a et de d.

De même, $x \neq -d$ exige d différent de b et de c.

3e **cas** : Si l'on a $bc - ad = 0$, on obtient $x = 0$. Ce résultat est évident à priori, car l'égalité $bc = ad$ peut s'écrire $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, et les quatre nombres forment déjà une proportion.

2e Partie : $(a + d) - (b + c) = 0$. — L'équation (2) devient

$$0.x = bc - ad.$$

4e **cas** : Si $bc - ad \neq 0$, l'équation et le problème sont impossibles.

5e **cas** : Si $bc - ad = 0$, l'équation et le problème sont indéterminés.

Pour nous rendre compte de cette indétermination, remarquons que l'hypothèse $(a + d) - (b + c) = 0$ peut s'écrire

$$a - b = c - d.$$

Or, l'hypothèse $bc - ad = 0$ donne $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$;

puis $$\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c} \quad \text{et} \quad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}.$$

On a donc $$a = c \quad \text{et} \quad b = d.$$

Les quatre nombres forment une proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, qui peut s'écrire

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b};$$

et, en ajoutant un même nombre à tous les termes de cette proportion, les résultats sont évidemment encore en proportion. Toutefois le nombre que l'on ajoute, doit être différent de $-b$.

CHAPITRE XII

Détermination d'un point.

383. *Marquer sur une droite orientée* x'x *les points dont les abscisses sont données par les équations suivantes :*

$$x^2 - 5x = 0; \quad x^2 + 2x - 3 = 0; \quad x^2 - 3x + 2 = 0; \quad x^2 + 4x - 12 = 0.$$

Rép. Les abscisses des points à marquer sont :

$$0 \text{ et } 5; \quad -3 \text{ et } 1; \quad 1 \text{ et } 2; \quad -6 \text{ et } 2.$$

Remarque. — On peut résoudre les équations précédentes en décomposant les premiers membres en facteurs. Ainsi, l'équation $x^2 - 5x = 0$ peut s'écrire $x(x - 5) = 0$. Elle est donc équivalente à l'ensemble des équations $x = 0$ et $x - 5 = 0$.

384. *Les racines de chacune des équations précédentes permettent de marquer deux points* A *et* B *sur* x'x. *Calculer les valeurs de* $\overline{AB}$ *et de* $\overline{BA}$, *puis vérifier sur* x'x.

Désignons chaque fois par A le point qui a la plus petite abscisse et par B le point qui a la plus grande abscisse.

On a :

$\overline{AB} = 5 - 0 = +5$; $\overline{BA} = 0 - 5 = -5$.
$\overline{AB} = 1 - (-3) = +4$; $\overline{BA} = -3 - 1 = -4$.
$\overline{AB} = 2 - 1 = +1$; $\overline{BA} = 1 - 2 = -1$.
$\overline{AB} = 2 - (-6) = +8$; $\overline{BA} = -6 - 2 = -8$.

385. *Marquer sur la droite orientée* x'x *les points* A, B, C, *ayant respectivement pour abscisses* 3, — 5, 1; *puis vérifier les relations suivantes* :

$\overline{CA} = \overline{CB} + \overline{BA}$; $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$; $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$; etc.

1° On a : $\overline{CA} = \overline{CB} + \overline{BA}$.

En effet, on a (faire la figure) :

a) $\overline{CA} = 3 - 1 = +2$;

b) $\overline{CB} + \overline{BA} = (-5 - 1) + [3 - (-5)] = -6 + 8 = +2$.

Par suite, $\overline{CA} = \overline{CB} + \overline{BA}$.

2° On vérifierait d'une façon analogue les relations :

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB};$$
$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC};$$
$$\overline{BA} = \overline{BC} + \overline{CA};$$
$$\overline{BC} = \overline{BA} + \overline{AC};$$
$$\overline{CB} = \overline{CA} + \overline{AB}.$$

386. *Marquer de même les quatre points* A, B, C, D, *ayant respectivement pour abscisses* 5, — 2, 2, 3; *puis vérifier les relations :*

$\overline{BD} = \overline{BA} + \overline{AC} + \overline{CD}$; $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BD} + \overline{DC}$; etc.

1° On a : $\overline{BD} = \overline{BA} + \overline{AC} + \overline{CD}$.

En effet, (faire la figure) :

a) $\overline{BD} = 3 - (-2) = 5$;

b) $\overline{BA} + \overline{AC} + \overline{CD} = [5 - (-2)] + (2 - 5) + (3 - 2)$
$= 7 - 3 + 1 = 5$.

Donc $\overline{BD} = \overline{BA} + \overline{AC} + \overline{CD}$.

2° On vérifierait d'une façon analogue les relations :

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BD} + \overline{DC};$$
$$\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DB} + \overline{BC};$$
$$\overline{CA} = \overline{CB} + \overline{BD} + \overline{DA}; \quad \text{etc.}$$

387. *Marquer sur une droite* AB *les points dont les rapports de section relatifs à* A *et* B *sont* : 3; $\frac{1}{2}$; -4; $-\frac{1}{3}$; -2; 5.

Prenons le point A comme origine et soit b l'abscisse de B. En appliquant la formule

$$x = \frac{a - bk}{1 - k},$$

on trouve que l'abscisse du point cherché est suivant le cas :

$$\frac{3b}{2};\quad -b;\quad \frac{4b}{5};\quad \frac{b}{4};\quad \frac{2b}{3};\quad \frac{5b}{4}.$$

On est ainsi conduit aux réponses suivantes :

Rép. 1° $k = 3$. — Porter à partir de A vers B le segment $AM = \frac{3AB}{2}$.

2° $k = \frac{1}{2}$. — Porter à partir de A, mais en sens inverse de AB, un segment AM dont la longueur absolue est égale à celle de AB.

3° $k = -4$. — Le point M se trouve aux quatre cinquièmes de AB à partir de A.

4° $k = -\frac{1}{3}$. — Le point M se trouve au quart de AB à partir de A.

5° $k = -2$. — Le point M se trouve aux deux tiers de AB à partir de A.

6° $k = 5$. — Porter à partir de A vers B, un segment AM égal aux cinq quarts de AB.

388. *On donne les points* A *et* B *ayant pour abscisses* 5 *et* 1. *Calculer les abscisses des points qui déterminent sur la droite* AB *les rapports de section* $-\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $-1{,}4$; 3. *Marquer les points et vérifier que leurs rapports de section relatifs à* A *et* B *ont la valeur voulue.*

On applique la formule $x = \frac{a - bk}{1 - k}$,

a étant l'abscisse du point A, b celle du point B et k le rapport de section considéré.

Rép. 1° $k = -\frac{2}{3}$; $x = \frac{17}{5}$; 3° $k = -1{,}4$; $x = \frac{8}{3}$;

2° $k = \frac{3}{4}$; $x = 17$; 4° $k = 3$; $x = -1$.

389. *Le rapport de section du point* M *relatif aux points* A *et* B *est* k. *Les abscisses des points* M, A, B, *sont* x, a, 0. *Démontrer qu'on a* :

$$k = \frac{x - a}{x};\quad x = \frac{a}{1 - k}.$$

En effet, on a : $$k = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{a - x}{0 - x}$$

et par suite, $$x = \frac{a}{1 - k}.$$

390. *Trouver l'abscisse d'un point* X, *connaissant celles des points* A, B, C, D, *et sachant que*

$$\frac{\overline{XA}}{\overline{XC}} \times \frac{\overline{XB}}{\overline{XD}} = 1.$$

Désignons par a, b, c, d, x les abscisses des points A, B, C, D, X.

On a $$\frac{(a - x)(b - x)}{(c - x)(d - x)} = 1,$$

ou $$x^2 - (a + b)x + ab = x^2 - (c + d)x + cd.$$

Par suite, $$x = \frac{ab - cd}{(a + b) - (c + d)}.$$

391. *Démontrer les relations suivantes :*

1° $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} + \dfrac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = 1.$

2° $\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AC}.\overline{DB} + \overline{AD}.\overline{BC} = 0.$ (Relation de Pappus).

3° $\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = 2\overline{AB}.\overline{OM},$ O étant le milieu de AB.

1° Adoptons le point A pour origine. On a

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} + \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = \frac{-\overline{AC}}{\overline{AB} - \overline{AC}} + \frac{-\overline{AB}}{\overline{AC} - \overline{AB}} = \frac{-\overline{AC} + \overline{AB}}{\overline{AB} - \overline{AC}} = 1.$$

2° Adoptons le point A pour origine. On a

$$\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AC}.\overline{DB} + \overline{AD}.\overline{BC}$$
$$= \overline{AB}(\overline{AD} - \overline{AC}) + \overline{AC}(\overline{AB} - \overline{AD}) + \overline{AD}(\overline{AC} - \overline{AB}).$$

En effectuant le second membre, on trouve zéro.

3° Adoptons le point O comme origine. En remarquant que $\overline{OB} = -\overline{OA}$, on trouve

$$\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = (\overline{OA} - \overline{OM})^2 - (\overline{OB} - \overline{OM})^2 = -4\overline{OA}.\overline{OM}$$

et $$2\overline{AB}.\overline{OM} = 2(\overline{OB} - \overline{OA})\overline{OM} = 2\overline{OB}.\overline{OM} - 2\overline{OA}.\overline{OM} = -4\overline{OA}.\overline{OM}.$$

392. *Le nombre* c *est* la moyenne arithmétique *des nombres* a *et* b, *s'il est égal à leur demi-somme.*

Montrer que le point M, *milieu du vecteur* AB, *a pour abscisse la moyenne arithmétique des abscisses* a *et* b *des points* A *et* B, *et réciproquement.*

1° En effet, on a

$$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM} \quad \text{et} \quad \overline{OM} = \overline{OB} + \overline{BM}.$$

En additionnant membre à membre, on trouve

$$2\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} \quad \text{ou} \quad \overline{OM} = \frac{a+b}{2},$$

car $\overline{AM} = -\overline{BM}$ et $\overline{AM} + \overline{BM} = 0$.

2° Réciproquement, si $\overline{OM} = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2}$ on a

$$\overline{OM} = \frac{(\overline{OM} + \overline{MA}) + (\overline{OM} + \overline{MB})}{2} = \overline{OM} + \frac{\overline{MA} + \overline{MB}}{2}.$$

Par suite, $\overline{MA} + \overline{MB} = 0$ ou $\overline{MA} = -\overline{MB}$, et M est le milieu de AB.

393. *Le nombre* x *est* la moyenne arithmétique *des nombres* a, b, c, *quand on a*

$$x = \frac{a+b+c}{3}.$$

Si x *est l'abscisse du point* X *et si* a, b, c, *sont les abscisses des points* A, B, C, *montrer que* $\overline{MX} = \dfrac{\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}}{3}$, M *étant un point quelconque.*

En effet, on a :

a) $$\overline{MX} = \overline{OX} - \overline{OM} = x - \overline{OM} = \frac{a+b+c}{3} - \overline{OM}.$$

b) $$\frac{\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}}{3} = \frac{(\overline{OA} - \overline{OM}) + (\overline{OB} - \overline{OM}) + (\overline{OC} - \overline{OM})}{3}$$

$$= \frac{a+b+c-3\overline{OM}}{3} = \frac{a+b+c}{3} - \overline{OM}.$$

394. *Étant donnés quatre points* A, B, C, D, *en ligne droite, le point* C *est* le conjugué harmonique *du point* D *par rapport aux points* A *et* B, *quand on a :*

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}.$$

Montrer que si on prend un point quelconque O *sur l'axe* AD, *on a*

$$2(\overline{OA}.\overline{OB} + \overline{OC}.\overline{OD}) = (\overline{OA} + \overline{OB})(\overline{OC} + \overline{OD}).$$

En effet, la relation $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ peut s'écrire

$$\frac{\overline{OA} - \overline{OC}}{\overline{OB} - \overline{OC}} = -\frac{\overline{OA} - \overline{OD}}{\overline{OB} - \overline{OD}}.$$

Faire disparaître les dénominateurs et transformer l'égalité obtenue. On obtient ainsi la relation demandée.

395. *Le nombre* a *est* la moyenne harmonique *des nombres* b *et* c *quand son inverse est la moyenne arithmétique des inverses des nombres* b *et* c. *On a donc*

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{2}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Si C *est le conjugué harmonique de* D *par rapport aux points* A *et* B, *montrer que :*

1° $\overline{AB}$ *est la moyenne harmonique des nombres* $\overline{AC}$ *et* $\overline{AD}$.
2° $\overline{BA}$ *est la moyenne harmonique des nombres* $\overline{BC}$ *et* $\overline{BD}$.
3° $\overline{CD}$ *est la moyenne harmonique des nombres* $\overline{CA}$ *et* $\overline{CB}$.
4° $\overline{DC}$ *est la moyenne harmonique des nombres* $\overline{DA}$ *et* $\overline{DB}$.

1° En prenant comme origine le point A, la relation $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=-\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ devient

$$\frac{-\overline{AC}}{\overline{AB}-\overline{AC}}=-\frac{-\overline{AD}}{\overline{AB}-\overline{AD}},$$

ou
$$-\overline{AB}.\overline{AC}+\overline{AC}.\overline{AD}=\overline{AB}.\overline{AD}-\overline{AC}.\overline{AD},$$

ou
$$2\overline{AC}.\overline{AD}=\overline{AB}.\overline{AD}+\overline{AB}.\overline{AC}.$$

En divisant les deux membres par $\overline{AB}.\overline{AC}.\overline{AD}$, on obtient la relation

$$\frac{2}{\overline{AB}}=\frac{1}{\overline{AC}}+\frac{1}{\overline{AD}}.$$

2° On démontre les trois autres propriétés d'une façon analogue, en prenant successivement pour origine les points B, C, D.

396. *Sur du papier quadrillé, prendre deux axes de coordonnées et marquer les points suivants :*

A(1, 3); B(7, 2); C(— 5, — 2); D(— 4, 3); E(0, — 5); F(2, 0); G(1, — 3).

397. *Marquer les points* (2, 2) (— 2, 2), (— 2, — 2), (2, — 2); *montrer que la figure obtenue en joignant ces quatre points doit être un carré et chercher sa superficie.*

Le quadrilatère, ayant pour sommets les quatre points donnés, a ses angles droits et ses quatre côtés égaux. C'est donc un carré.

398. *Montrer que les points* (— 1, 2), (3, 2), (0, 2), (— 5, 2) *sont sur une même droite.*

Ces quatre points se trouvent sur la droite menée par le point (0, 2) parallèlement à l'axe $x'x$.

399. *Même question pour les points* (— 2, 0), (—2, 3), (— 2, — 5), (—2, 1).

Ces quatre points se trouvent sur la droite menée par le point (— 2,0) parallèlement à l'axe $y'y$.

400. *Marquer les points* (2, 2), (5, 5), (— 1, — 1), (— 3, — 3) *et démontrer qu'ils sont sur une même droite passant par l'origine.*

Après avoir marqué les points A(2, 2), B(5, 5), C(— 1, — 1), D(— 3, — 3), on trace les droites AA', BB', CC', DD' perpendiculaires à l'axe $x'x$. Les triangles AOA', BOB', COC', DOD' sont semblables, parce qu'ils sont rectangles isocèles. Il en résulte que les points A, B, C, D sont sur une même droite qui est la bissectrice du premier et du troisième angle des axes.

401. *Même question pour les points* (2, — 2), (— 2, 2), (— 1, 1), (5, — 5).

Ces quatre points se trouvent sur la bissectrice du 2e et du 4e angle des axes.

402. *Montrer que les points* (— 5, 2) *et* (5, — 2) *sont symétriques par rapport à l'origine.*

Joindre les deux points et tracer leurs coordonnées. On obtient ainsi deux triangles égaux.

CHAPITRE XIII

Des Fonctions.

§ I. — GRAPHIQUES.

Les trois premiers graphiques sont formés de segments de droites; les suivants sont à arrondir en courbes.

403. *On a pris deux fois par jour, le matin et le soir à* 6 *h., la température d'un malade. Les températures observées sont* 37°,5; 38°,5; 38°,1; 39°,4; 38°,5; 40°,1; 38°,2; 39°,5; 37°,5; 38°,4; 36°,8; 37°,2. *Construire le graphique des variations de la température.*

404. *Représenter graphiquement les variations des hauteurs moyennes de la pluie tombée à Bruxelles, d'après les données suivantes :*

Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin
54 mm.	47	48	46	56	65

Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre
73 mm.	74	65	71	61	60

405. *Représenter graphiquement les températures moyennes observées à Bruxelles.*

Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin
1°,4	2°,8	5°,2	9°	12°,6	16°,1
Juillet	**Août**	**Septembre**	**Octobre**	**Novembre**	**Décembre**
17°,6	17°,3	14°,6	10°,3	5°,3	2°,4

406. *Les tables suivantes donnent la tension maxima de la vapeur d'eau pour différentes températures.*

Températures	100°	121°	135°	145°	153°	181°	215°	236°
Tension en atmosphères	1	2	3	4	5	10	20	30

Tracer le graphique. Quelle est approximativement la tension à 110°, *à* 170°, *à* 200°*? A quelle température la tension est-elle de* 2,5, 6, 17 *atmosphères?*

407. *La pression atmosphérique varie avec l'altitude du lieu d'observation. Dans les tables suivantes, la pression est donnée en mm. de mercure et l'altitude en mètres.*

Altitude	0	200	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000
Pression	760	742	724	707	690	674	658	642	627	612	598

Tracer le graphique.

§ II. — FONCTION $y = ax$.

408. *Représenter graphiquement les fonctions définies par les relations suivantes, puis répondre pour chacune aux questions formulées aux n*^{os} **409** *et* **410.**

1° $y = -3x$ 4° $2y = 3x$ 7° $x - y = 0$

2° $3x = 4y$ 5° $x + y = 0$ 8° $y = x\sqrt{3}$

3° $y = \frac{1}{3}x$ 6° $y = -\frac{1}{3}x$ 9° $y\sqrt{3} - x = 0.$

1° La droite $y = -3x$ passe par l'origine; elle passe également par le point $(1, -3)$, dont les coordonnées vérifient son équation. On marque ces points et on les joint.

2° On construit les autres droites d'une façon analogue.

409. *Quels sont les coefficients angulaires des droites obtenues?*

Pour chacune de ces droites, construire le vecteur dont la mesure est le coefficient angulaire de la droite. Pour la 5^e *et chacune des trois dernières, indiquer l'angle qu'elle forme avec* Ox.

1° Le coefficient angulaire de la droite $y = -3x$ est -3. Il est représenté par l'ordonnée de celui de ses points qui a 1 comme abscisse; ou encore, par la tangente de l'angle que la droite forme avec Ox.

2° En désignant par α l'angle que la droite $x + y = 0$, ou $y = -x$ forme avec Ox, on a

$$\operatorname{tg} \alpha = -1, \quad \text{ou} \quad \alpha = k\pi + 135^\circ.$$

On trouve de même,

pour la droite $x - y = 0$, $\alpha = k\pi + 45^\circ$;
pour la droite $y = x\sqrt{3}$, $\alpha = k\pi + 60^\circ$;
pour la droite $y\sqrt{3} - x = 0$, $\alpha = k\pi + 30^\circ$.

410. *Calculer pour chaque droite l'ordonnée du point dont l'abscisse est* 4; *et l'abscisse du point dont l'ordonnée est* -2. *Vérifier sur la figure.*

I. Ordonnée du point dont l'abscisse est 4 :

1° -12	4° 6	7° 4
2° 3	5° -4	8° $4\sqrt{3}$
3° $\frac{4}{3}$	6° $-\frac{4}{3}$	9° $\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

II. Abscisse du point dont l'ordonnée est -2 :

1° $\frac{2}{3}$	4° $-\frac{4}{3}$	7° -2
2° $-\frac{8}{3}$	5° 2	8° $-\frac{2}{3}\sqrt{3}$
3° -6	6° 6	9° $-2\sqrt{3}$.

411. *Montrer, sans faire de figure, que les points* $(1, 3)$, $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$, $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right)$ $(-2, -6)$ *sont sur la droite* $y = 3x$.

En effet, l'ordonnée de chacun de ces points est le triple de son abscisse.

412. *Chercher les équations des droites menées par* O *et formant respectivement avec* Ox *un angle de* 30°, 135°, 240°.

1° $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, car $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$;
2° $y = -x$, car $\operatorname{tg} 135^\circ = -1$;
3° $y = x\sqrt{3}$, car $\operatorname{tg} 240^\circ = \sqrt{3}$.

413. *Un thermomètre gradué en degrés centigrades et Réaumur marque au même moment* y°C *et* x°R. *Exprimer* y *en fonction de* x. *Tracer le graphique de la fonction obtenue. — Ce graphique permet de convertir à vue les degrés centigrades en degrés Réaumur. Donner quelques exemples.*

L'expression de y en fonction de x est

$$y = \frac{5}{4}x.$$

414. *Le belga vaut approximativement* 0,52 *francs-or* (en 1935). *Chercher le nombre* y *de francs-or que valent* x *belgas. Tracer le graphique qui permettra, d'une façon approchée, la conversion des francs-or en belgas et réciproquement.*

L'expression de y en fonction de x est

$$y = 0{,}52x.$$

§ III. — FONCTION $y = ax + b$.

415. *Représenter graphiquement les fonctions définies par les équations suivantes, puis répondre pour chacune aux questions formulées aux nos* **416** *et* **417.**

1° $y = x + 3$	5° $y = 2x + 2$	9° $2x - 3y = 6$
2° $y = x - 2$	6° $y = 0{,}6x - 1$	10° $x + 2y = 4$
3° $y = 2x - 4$	7° $y = -x + 3$	11° $5x + 4y + 10 = 0$
4° $y = \frac{2}{3}x - 1$	8° $y = \frac{x}{3} + 3$	12° $2y - 7x + 14 = 0.$

416. *Quels sont les coefficients angulaires et les coordonnées à l'origine des droites précédentes ?*

Désignons le coefficient angulaire par m, l'abscisse à l'origine par a et l'ordonnée à l'origine par b.

1°	$m = 1;$	$a = -3;$	$b = 3.$	7°	$m = -1;$	$a = 3;$	$b = 3.$
2°	$1;$	$2;$	$-2.$	8°	$\frac{1}{3};$	$-9;$	$3.$
3°	$2;$	$2;$	$-4.$	9°	$\frac{2}{3};$	$3;$	$-2.$
4°	$\frac{2}{3};$	$\frac{3}{2};$	$-1.$	10°	$-\frac{1}{2};$	$4;$	$2.$
5°	$2;$	$-1;$	$2.$	11°	$-\frac{5}{4};$	$-2;$	$-\frac{5}{2}.$
6°	$0{,}6;$	$\frac{5}{3};$	$-1.$	12°	$\frac{7}{2};$	$2;$	$-7.$

417. *Par l'origine et par le point B* (0, 5), *on mène des parallèles aux droites précédentes. Quelles sont les équations de ces parallèles ?*

Pour les huit premières droites, on obtient la parallèle par l'origine en supprimant le terme connu; et la parallèle menée par le point B (0, 5) en remplaçant le terme connu par 5.

Pour les quatre dernières droites, on procède de même après avoir ramené leur équation à la forme $y = ax + b$.

Leurs équations ainsi transformées sont :

$$9^o\ y = \frac{2}{3}x - 2; \qquad 11^o\ y = -\frac{5}{4}x - \frac{5}{2};$$

$$10^o\ y = -\frac{x}{2} + 2; \qquad 12^o\ y = \frac{7}{2}x - 7.$$

418. *Étudier la variation de signe du binôme* $2x + 5$ *et vérifier après avoir construit la droite* $y = 2x + 5$.

On a $\qquad 2x + 5 = 2[x - (-2{,}5)]$.

Donc le binôme est positif pour $x > -\frac{5}{2}$ et négatif pour $x < -\frac{5}{2}$.

On construit ensuite la droite $y = 2x + 5$. Elle coupe l'axe des x au point $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$, car $-\frac{5}{2}$ est son abscisse à l'origine. Les points de la droite qui ont une abscisse inférieure à $-2{,}5$ sont en-dessous de l'axe des x; ceux qui ont une abscisse supérieure à $-2{,}5$ sont au-dessus de l'axe des x.

419. *Même question pour les binômes suivants :*

$1^o\ -x + 7 \qquad 3^o\ 3x - 8 \qquad 5^o\ 4 - 2x$

$2^o\ -\frac{x}{2} - 4 \qquad 4^o\ \frac{x}{6} + \frac{1}{3} \qquad 6^o\ \frac{1}{2} + 2x.$

Rép. $1^o\ -x + 7 = -(x - 7)$; le binôme est positif pour $x < 7$ et négatif pour $x > 7$.

$2^o\ -\frac{x}{2} - 4 = -\frac{1}{2}[x - (-8)]$; le binôme proposé est positif pour $x < -8$ et négatif pour $x > -8$.

$3^o\ 3x - 8 = 3\left(x - \frac{8}{3}\right)$; le binôme est négatif pour $x < \frac{8}{3}$ et positif pour $x > \frac{8}{3}$.

$4^o\ \frac{x}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}[x - (-2)]$; le binôme est négatif pour $x < -2$ et positif pour $x > -2$.

$5^o\ 4 - 2x = -2(x - 2)$; le binôme est positif pour $x < 2$ et négatif pour $x > 2$.

6° $\frac{1}{2} + 2x = 2\left[x - \left(-\frac{1}{4}\right)\right]$; le binôme est négatif pour $x < -\frac{1}{4}$ et positif pour $x > -\frac{1}{4}$.

420. *Chercher les coordonnées à l'origine de la droite*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Rép. L'abscisse à l'origine est a;
l'ordonnée à l'origine est b.

421. *De l'exercice précédent, déduire les équations des droites qui ont respectivement pour abscisses et ordonnées à l'origine* 2 *et* 6; 3 *et* — 2; — 1 *et* 2.

Rép. 1° $\frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 1$; 2° $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$;

3° $-x + \frac{y}{2} = 1$.

422. *Trouver les coordonnées à l'origine des droites suivantes; puis tracer ces droites.*

1° $x - y = 5$ 4° $-x + 3y - 6 = 0$
2° $3x + 2y = 6$ 5° $2x + 2y = 3$
3° $3x + y + 6 = 0$ 6° $x + 2y + 5 = 0$.

Commencer par ramener l'équation considérée à la forme $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. L'abscisse à l'origine est le dénominateur de x; l'ordonnée à l'origine est le dénominateur de y.

Rép. 1° 5 et — 5; 4° — 6 et 2;

2° 2 et 3; 5° $\frac{3}{2}$ et $\frac{3}{2}$;

3° — 2 et — 6; 6° — 5 et $-\frac{5}{2}$.

423. *Un thermomètre gradué en degrés centigrades et en degrés Fahrenheit marque, à un instant donné,* y°C *et* x°F. *Exprimer* y *en fonction de* x *et tracer le graphique de la fonction obtenue.*

L'expression de y en fonction de x est

$$y = \frac{5}{9}(x - 32) \quad \text{ou} \quad y = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}.$$

424. a) *On donne la fonction* ax + 3. *Vérifier par voie graphique, en prenant* a = 2, *que sa racine est l'abscisse à l'origine de la droite* y = ax + 3. *Que devient sa racine quand* a, *partant de* 2, *devient de plus en plus petit, tout en restant positif?*

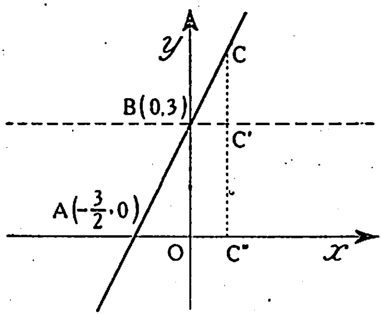


Fig. 3.

Construisons la droite $y = 2x + 3$. L'abscisse à l'origine de cette droite est $-\frac{3}{2}$ qui est aussi la racine du binôme $2x + 3$.

Considérons ensuite la droite $y = ax + 3$. Elle passe par le point fixe B, car les coordonnées de ce point vérifient l'équation $y = ax + 3$. Son coefficient angulaire est a, qui est la mesure du vecteur C'C, quand on suppose que l'abscisse de C'' est 1.

Supposons alors que a décroisse à partir de 2 tout en restant positif. La droite $y = ax + 3$ tournera autour du point B et C'C ira en décroissant. La figure montre que le point A se déplacera vers la gauche. Son abscisse, qui est la racine du binôme $ax + 3$, croîtra constamment en valeur absolue, tout en restant négative.

On dit que la racine du binôme tend vers $-\infty$, quand a tend vers zéro par valeurs positives.

b) *Même question pour le binôme* ax — 3.

On montre d'une façon analogue que la racine du binôme $ax - 3$ tend vers $+\infty$, lorsque a tend vers zéro par valeurs positives.

425. *Trouver les équations des droites passant par les points suivants :*

1° (1, 2) et (3, 1)	4° (0, — 3) et (5, 0)
2° (2, 1) et (— 1, 3)	5° (0, 0) et (1, — 2)
3° (4, 1) et (— 2, — 1)	6° (— 2, — 7) et (1, — 1).

Rép.

1° $x + 2y = 5$	4° $3x - 5y = 15$
2° $2x + 3y = 7$	5° $y + 2x = 0$
3° $x - 3y = 1$	6° $2x - y = 3$.

§ IV. — SYSTÈMES D'ÉQUATIONS ET D'INÉQUATIONS.

426. *Résoudre les systèmes suivants et vérifier les résultats trouvés en traçant les droites représentées par les équations des divers systèmes.*

1° $x - 2 = 0;$
$3x - 2y = 0.$ **Rép.** $x = 2, y = 3.$

2° $x - 2y = 4;$
$y - 1 = 0.$ » $x = 6, y = 1.$

3° $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1;$
$x + y = 0.$ » $x = 6, y = -6.$

4° $3x + 5y + 5 = 0;$
$x + y + 1 = 0.$ **Rép.** $x = 0, y = -1.$

5° $4x + y = 2;$
$6x + y + 2 = 0.$ » $x = -2, y = 10.$

6° $\dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{3} = 1;$
$x + y + 10 = 0.$ » $x = -4, \quad y = -6.$

427. *Résoudre les systèmes suivants :*

1° $y - 2x - 4 < 0;$
$y - 4 > 0.$

Les points dont les coordonnées conviennent se trouvent dans l'angle ABC (Fig. 4).

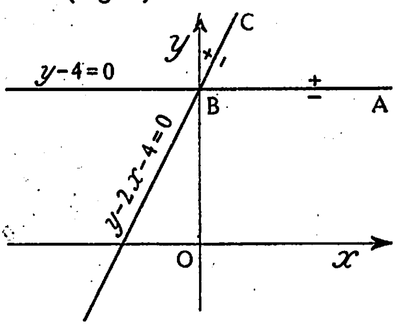


Fig. 4.

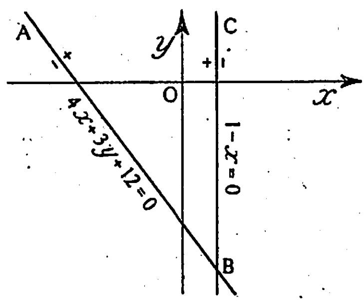


Fig. 5.

2° $4x + 3y + 12 > 0;$
$1 - x > 0.$

Les coordonnées des points situés dans l'angle ABC sont les solutions du système (Fig. 5).

3° $x > y - 3$ ou $x - y + 3 > 0;$
$x < 2 - y$ ou $x + y - 2 < 0.$

Les coordonnées des points situés dans l'angle ABC sont les solutions du système (Fig. 6).

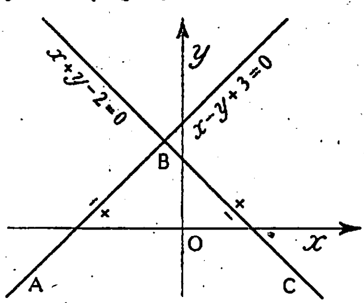


Fig. 6.

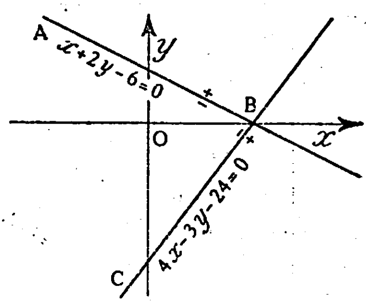


Fig. 7.

4° $4x < 3v + 24$ ou $4x - 3y - 24 < 0$;
$x \leqslant 6 - 2y$ ou $x + 2y - 6 \leqslant 0$.

Les coordonnées des points situés dans l'angle ABC ou sur la demi-droite BA sont les solutions du système (Fig. 7).

428. *Résoudre les systèmes suivants :*

1° $x + 4y - 8 < 0$;
$2y - x > 0$;
$2x - y > 0$.

Les coordonnées des points situés dans le triangle OBC vérifient le système (Fig. 8).

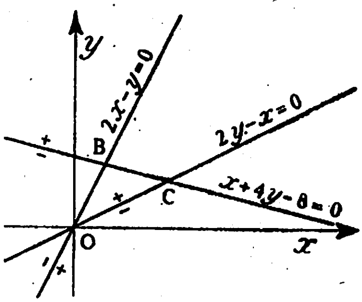


Fig. 8.

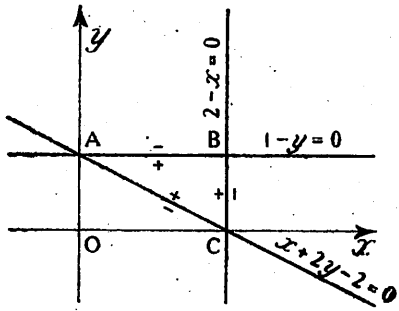


Fig. 9.

2° $x + 2y - 2 > 0$;
$1 - y > 0$;
$2 - x > 0$.

Les coordonnées des points situés dans le triangle ABC vérifient le système proposé (Fig. 9).

3° $4x + 3y - 12 > 0$;
$y > 0$;
$y - x < 0$.

Les coordonnées des points situés dans la région ABCD vérifient le système proposé (Fig 10).

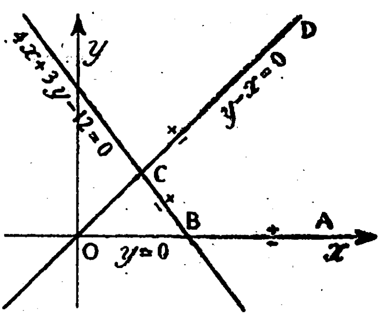


Fig. 10.

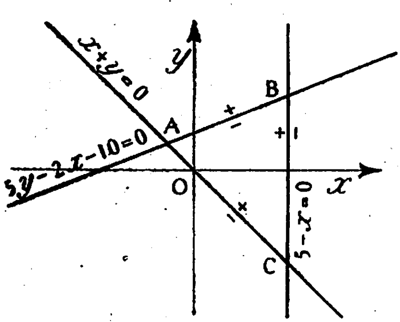


Fig. 11.

4° $5y - 2x - 10 \leqslant 0;$
$x + y \geqslant 0;$
$5 - x \geqslant 0.$

Les coordonnées des points situés dans le triangle ABC ou sur les côtés de ce triangle vérifient le système proposé (Fig. 11).

5° $2y > x + 4$ ou $2y - x - 4 > 0;$
$x + y + 4 > 0;$
$2x < y + 4$ ou $2x - y - 4 < 0.$

Les coordonnées des points situés dans la région ABCD vérifient le système proposé (Fig. 12).

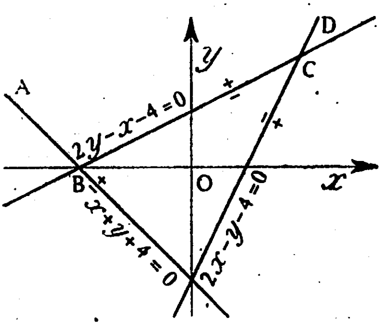


Fig. 12.

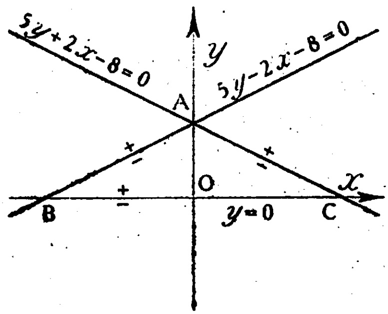


Fig. 13.

6° $5y - 2x < 8$ ou $5y - 2x - 8 < 0;$
$y \geqslant 0;$
$5y + 2x < 8$ ou $5y + 2x - 8 < 0.$

Les coordonnées des points situés dans le triangle ABC ou sur le côté BC vérifient le système proposé (Fig. 13).

429. *Résoudre les inéquations suivantes :*

1° $xy > 0.$

Les points dont les coordonnées vérifient cette inéquation se trouvent dans le 1er et le 3^{e} angle des axes.

2° $(x - 1)y \geqslant 0.$

On trace les droites $x - 1 = 0$ et $y = 0$ et on détermine pour chacune la région positive et la région négative.

Les points dont les coordonnées vérifient l'inéquation proposée se trouvent sur ces droites ou dans les deux angles qui correspondent aux 1er et 3^{e} angles des axes.

3° $(2 - x)(y + 1) < 0.$

Même solution que pour le 2°.

4° $(x + 1)(2y - 3x + 6) > 0$.

On trace les droites $x + 1 = 0$ et $2y - 3x + 6 = 0$ et on détermine pour chacune la région positive et la région négative.

L'examen de la figure montre que les coordonnées des points situés dans l'un ou l'autre des deux angles aigus, formés par les deux droites, vérifient l'inéquation.

5° $\dfrac{2(y + 5)}{y - 5x + 10} \leqslant 0$.

Les coordonnées des points de la droite $y + 5 = 0$ ainsi que les coordonnées des points situés dans l'un ou l'autre des deux angles aigus, formés par les droites $y + 5 = 0$ et $y - 5x + 10 = 0$, vérifient l'inéquation.

§ V. — MOUVEMENT UNIFORME.

430. *Reprendre les problèmes des n*^{os} **270** *à* **274**. ***Après avoir choisi un sens positif et une origine pour les déplacements, puis une origine des temps, donner l'équation du mouvement de chaque mobile. Chercher ensuite le point et l'heure de la rencontre, puis faire la vérification graphique.***

N° 270. Orienter AB positivement de A vers B et prendre comme origine le point A. Prendre comme origine des temps le moment du départ. On a $\overline{AB} = 144$; la vitesse du premier train est $+ 54$; celle du train partant de B est $- 36$. Les équations du mouvement sont :

$$x = 54t; \quad x = 144 - 36t.$$

Ces équations donnent $x = 86{,}4$; $t = 1{,}6$.

La rencontre a lieu 1 h. 36 min. après le départ et à 86,4 km. de A.

Tracer ensuite les droites $x = 54t$ et $x + 36t - 144 = 0$, en représentant une heure par 3 cm. et un km. par un mm.

N° 271. A et B étant les points de départ, orienter AB dans le sens AB et prendre comme origine le point A. Prendre comme origine des temps le moment du départ du premier voyageur. Les équations du mouvement sont :

$$x = 5t; \quad x = 45 - 6(t - 0{,}75).$$

Ces équations donnent $t = 4{,}5$; $x = 22{,}5$. La rencontre a lieu à 9 h. 30 min. et à égale distance de A et de B.

Tracer ensuite les droites $x = 5t$ et $x = 45 - 6(t - 0{,}75)$ en représentant une heure par 2 cm. et un km. par 2 mm.

N° 272. Orienter X'X dans le sens du mouvement; prendre comme origine le point de départ commun A et comme origine des temps le moment du départ du premier train. Les équations du mouvement sont :

$$x = 4t; \quad x = 9(t - 3{,}5).$$

Ces équations donnent $x = 25{,}2;\quad t = 6{,}3.$

Le second train rejoint le premier à 25,2 lieues de A et 6 h. 18 min. après le départ du premier (ou 2 h. 48 min. après le départ du second).

N° 273. Orienter X'X dans le sens du mouvement; prendre comme origine le point de départ commun A et comme origine des temps le moment du départ du premier courrier. Les équations du mouvement sont :

$$x = \frac{7}{5}t;\quad x = \frac{5}{3}(t - 8).$$

Ces équations donnent $x = 70;\quad t = 50.$

Le second courrier rejoint le premier à 70 mam. de A et 50 heures après le départ du premier (ou 42 heures après le départ du second).

N° 274. A étant la première ville et B la seconde, orienter AB dans le sens BA et prendre A pour origine. Prendre comme origine des temps, le moment du départ du premier courrier. Les équations du mouvement sont :

$$x = 8t;\quad x = -10 + 10(t - 2).$$

Ces équations donnent $x = 120;\quad t = 15.$ La rencontre a lieu à 120 km. de la 1re ville, 15 heures après le départ du premier courrier.

Tracer ensuite les droites $x = 8t$ et $x = -10 + 10(t - 2)$ en représentant un km. par un mm. et une heure par un mm.

431. *Deux points mobiles* M *et* M' *se déplacent d'un mouvement uniforme et dans le sens* X'X *sur l'axe* X'X. *Ils passent au même moment le premier en* A, *le second en* B. *La vitesse de* M' *est triple de celle de* M. *La mesure de* AB *est d. Déterminer le point de rencontre des deux mobiles.*

Orientons X'X positivement dans le sens X'X (vers la droite) et prenons le point A pour origine. Soit R le point de rencontre. Posons $\overline{AB} = d$, $\overline{AR} = x$.

Soit v la vitesse de M; celle de M' sera $3v$. Prenons comme moment origine l'instant où M et M' sont en A et B et désignons par t la durée du trajet. Les équations du mouvement sont :

$$x = vt;\quad x = d + 3vt.$$

Ces équations donnent

$$2x = -d;\quad x = -\frac{d}{2}.$$

1er cas : $d > 0$; x est négatif et la rencontre a lieu à gauche de A.

2e cas : $d < 0$; x est positif et la rencontre a lieu à droite de A.

Interprétons le cas où d est négatif. Le point B se trouve à gauche du point A. Le mobile M' se déplace avec une vitesse triple de celle du mobile M; tous deux se déplacent vers la droite. On voit facilement que M' rejoindra M en un point R placé à droite de A.

432. *Mêmes données. Déterminer le moment de la rencontre.*

Les équations du problème précédent donnent

$$2vt = -d; \quad t = -\frac{d}{2v}.$$

D'après l'énoncé, v est positif. Dès lors :

1° Si $d > 0$, x est négatif : la rencontre a eu lieu.
2° Si $d < 0$, x est positif : la rencontre aura lieu.

Interprétons le cas où d est positif. Le point B se trouve à droite du point A. Le point M′ se déplace avec une vitesse triple de celle du point M; tous deux se déplacent vers la droite. On voit facilement que le point M′ a dépassé le point M en un point R situé à gauche de A.

433. *Reprendre les deux problèmes précédents en supposant que la vitesse de* M′ *égale k fois celle de* M ($k > 0$).

Les équations du problème **431** deviennent

$$x = vt; \quad x = d + kvt.$$

Si $1 - k \neq 0$, ces deux équations donnent

$$x = \frac{d}{1-k}; \quad t = \frac{d}{v(1-k)}.$$

1er cas : $d > 0$; $1 - k > 0$. — Dans ce cas, x et t sont positifs. La rencontre aura lieu à droite de A.

De fait, $d > 0$ indique que B est à droite de A ; $k < 1$ indique que M′ marche moins vite que M. Le point M rejoindra donc le point M′ en un point placé à droite de A.

On peut encore remarquer que $1 - k < 1$ et par suite, que x est supérieur à d. La rencontre a donc lieu à droite de B.

On explique les cas suivants d'une façon analogue.

2e cas : $d < 0$; $1 - k < 0$. — Dans ce cas, x et t sont positifs. La rencontre aura lieu à droite de A.

3e cas : $d > 0$; $1 - k < 0$. — La rencontre a eu lieu à gauche de A.

4e cas : $d < 0$; $1 - k > 0$. — La rencontre a eu lieu à gauche de A.

Cas particulier : $k = 1$. — Le système devient

$$x = vt; \quad x = d + vt.$$

Si $d \neq 0$, le système est impossible. Les deux mobiles ne se rencontreront jamais.

Si $d = 0$, le système est indéterminé. Les deux mobiles sont et seront toujours ensemble.

434. *Deux courriers* M *et* M′ *se déplacent d'un mouvement uniforme et dans le sens* X′X *sur l'axe* X′X. M *passe en* A, h *heures avant que* M′ *passe en* B. *On demande de déterminer leur point de rencontre* R, *sachant que la mesure de* AB *est* d *et que leurs vitesses respectives sont* v *et* v′.

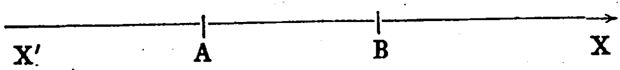


Fig. 14.

Orientons X′X positivement vers la droite et prenons le point A pour origine. Nous supposons le point B placé à droite de A. Nous aurons $\overline{AB} = d > 0$. Désignons le point de rencontre par R et soit $\overline{AR} = x$.

Prenons comme moment origine le moment où M est en A, et représentons par t l'intervalle de temps qui va du moment origine au moment de la rencontre.

Les équations du mouvement des deux courriers seront

$$x = vt; \quad x = d + v'(t - h).$$

Ces équations donnent

$$x(v - v') = v(d - v'h).$$

1re Partie : $v - v' \neq 0$. — L'équation donne

$$x = \frac{v(d - v'h)}{v - v'}.$$

1er cas : $v - v' > 0$; $d - v'h > 0$. — La valeur de x est positive et le point de rencontre se trouve à droite de A.

Ce résultat s'explique facilement. En effet, quand M est en A, M′ est en un point D placé à gauche de B et on a $\overline{DB} = v'h$. Ce point D se trouve à droite de A, car $v'h < d$. D'autre part, M se déplace plus vite que M′. Il rejoindra donc M′ en un point situé à droite de D, donc aussi à droite de A.

Les cas suivants s'expliquent d'une façon analogue.

2e cas : $v - v' > 0$; $d - v'h < 0$. — La valeur de x est négative et la rencontre a lieu à gauche de A.

3e cas : $v - v' < 0$; $d - v'h > 0$. — La valeur de x est négative et la rencontre a lieu à gauche de A.

4e cas : $v - v' < 0$; $d - v'h < 0$. — La valeur de x est positive et la rencontre a lieu à droite de A.

5e cas : $d - v'h = 0$. — Dans ce cas, x est nul et la rencontre a lieu en A.

2e Partie : $v - v' = 0$. — L'équation devient

$$0.x = v(d - v'h).$$

6^e cas : $d - v'h \neq 0$. — L'équation est impossible. Le problème l'est également. Quand M est en A, M' est en un point D distinct de A et comme ils ont même vitesse, ils resteront toujours à la même distance.

7^e cas : $d - v'h = 0$. — L'équation et le problème sont indéterminés.

REMARQUE. — La discussion serait analogue, si on supposait que B est à gauche de A $(d < 0)$.

CHAPITRE XIV

Radicaux du second degré.

435. *Trouver les racines carrées arithmétiques des expressions suivantes, en faisant toutes les hypothèses voulues.*

1° $\sqrt{a^6}$ est égal à a^3 quand a est positif et à $-a^3$ quand a est négatif.
$\sqrt{b^4} = b^2$, car b^2 représente un nombre positif.
$\sqrt{b^{10}}$ est égal à b^5 quand b est positif et à $-b^5$ quand b est négatif.
$\sqrt{x^2}$ est égal à x quand x est positif et à $-x$ quand x est négatif.

2° $\sqrt{b^8} = b^4$, car b^4 représente un nombre positif.
$\sqrt{x^6}$ est égal à x^3 quand x est positif et à $-x^3$ quand x est négatif.
$\sqrt{x^{4n}} = x^{2n}$, car x^{2n} représente un nombre positif.
$\sqrt{x^{2n}}$ est égal à x^n quand x est positif, ou encore, quand x est négatif et n pair; et à $-x^n$ quand x est négatif et n impair.

3° $\sqrt{(x-2)^2}$ est égal à $x - 2$ quand $x > 2$; et à $2 - x$ quand $x < 2$.
$\sqrt{(a-b)^4} = (a-b)^2$, car $(a-b)^2$ représente un nombre positif.

4° $\sqrt{a^2b^4}$ est égal à ab^2 quand a est positif et à $-ab^2$ quand a est négatif.
$\sqrt{a^4b^2x^6}$ est égal à a^2bx^3 quand b et x sont de même signe; et à $-a^2bx^3$ quand b et x ont des signes contraires.

REMARQUE. — Dans les exercices précédents, nous n'avons pas considéré le cas où le radicand est nul. Quand ce cas se présente, le radical est nul.

436. *Quelles valeurs doit prendre* x *pour que les valeurs numériques des expressions suivantes admettent des racines carrées.*

1° $3x - 2$; Rép. $x \geqslant \frac{2}{3}$;

2° $6 - 12x$; » $x \leqslant 0{,}5$;

3° $-2(x - 5)$; » $x \leqslant 5$;

4° $-7(1 - x)$; » $x \geqslant 1$.

437. *Après avoir posé* $a = 4$, *on écrit l'égalité exacte*

$$\sqrt{(3 - a)^2} = \sqrt{(5 - a)^2}.$$

Quelqu'un en déduit $3 - a = 5 - a$, *ou* $3 = 5$. *Où se trouve l'erreur ?*

L'égalité $\sqrt{(3 - a)^2} = \sqrt{(5 - a)^2}$ est exacte, car

$$\sqrt{(3 - a)^2} = \sqrt{(-1)^2} = 1 \quad \text{et} \quad \sqrt{(5 - a)^2} = \sqrt{1^2} = 1.$$

Mais on se trompe quand on en déduit

$$3 - a = 5 - a,$$

car la racine carrée arithmétique de l'expression $(3 - a)^2$ est $a - 3$ et non pas $3 - a$.

N. B. — *Les lettres qui interviennent dans les exercices suivants, représentent des nombres positifs.*

438. *Simplifier les radicaux arithmétiques suivants :*

1° $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ $\sqrt{300} = 10\sqrt{3}$

$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ $\sqrt{160} = 4\sqrt{10}$ $\sqrt{2000} = 20\sqrt{5}$.

2° $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$ $\sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3}{4}\sqrt{2}$ $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{15}$ $\sqrt{\frac{7}{27}} = \frac{1}{9}\sqrt{21}$ $\sqrt{\frac{5}{7}} = \frac{1}{7}\sqrt{35}$.

3° $\sqrt{a^5} = a^2\sqrt{a}$ $\sqrt{72x^{4m}} = 6x^{2m}\sqrt{2}$

$\sqrt{a^4x^5} = a^2x^2\sqrt{x}$ $\sqrt{12ab^5} = 2b^2\sqrt{3ab}$

$\sqrt{8x^4} = 2x^2\sqrt{2}$ $\sqrt{18x^{4n}y^{4n+1}} = 3x^{2n}y^{2n}\sqrt{2y}$.

4° $\sqrt{\frac{ax^5}{20}} = \frac{x^2}{10}\sqrt{5ax}$ $\sqrt{\frac{1}{3}a^2x} = \frac{a}{3}\sqrt{3x}$

$\sqrt{\frac{320a^5}{x^3}} = \frac{8a^2}{x^2}\sqrt{5ax}$ $\sqrt{\frac{2a^3}{b^4}} = \frac{a}{b^2}\sqrt{2a}$

$\sqrt{\frac{12a^9}{5b^8}} = \frac{2a^4}{5b^4}\sqrt{15a}$ $\sqrt{\frac{a^4x^{2n}}{2}} = \frac{a^2x^n}{2}\sqrt{2}$.

5° $\sqrt{162a^2} = 9a\sqrt{2}$ $\qquad$ $\sqrt{2a^3x^2} = ax\sqrt{2a}$

$\sqrt{90x^2} = 3x\sqrt{10}$ $\qquad$ $\sqrt{20a^5x^{2n}} = 2a^2x^n\sqrt{5a}$

$\sqrt{x^4y^3} = x^2y\sqrt{y}$ $\qquad$ $\sqrt{504x^{2n-1}} = 6x^{n-1}\sqrt{14x}$.

439. *Simplifier les radicaux arithmétiques suivants, en se rappelant que les lettres représentent des nombres positifs.*

1° $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = x - 2$, pour x supérieur à 2;
$= 2 - x$, pour x inférieur à 2.

$\sqrt{(x^3 - 1)(x - 1)} = (x - 1)\sqrt{x^2 + x + 1}$, pour $x > 1$.
$= (1 - x)\sqrt{x^2 + x + 1}$, pour $x < 1$.

$\sqrt{2a^2 + 4a + 2} = (a + 1)\sqrt{2}$, car a est positif.

$\sqrt{a^3 - 2a^2b + ab^2} = (a - b)\sqrt{a}$, pour a supérieur à b;
$= (b - a)\sqrt{a}$, pour a inférieur à b.

2° $\sqrt{\left(x^2 - \frac{x}{2}\right)(2x - 1)} = \frac{1}{2}(2x - 1)\sqrt{2x}$, si x est supérieur à $\frac{1}{2}$;
$= \frac{1}{2}(1 - 2x)\sqrt{2x}$, si x est inférieur à $\frac{1}{2}$.

$\sqrt{(x^2 - a^2)(ax - a^2)} = (x - a)\sqrt{a(x + a)}$, si x est supérieur à a;
$= (a - x)\sqrt{a(x + a)}$, si x est inférieur à a.

$\sqrt{\left(x^4 + \frac{x^2}{2}\right)\left(a^4x^2 + \frac{a^4}{2}\right)} = \frac{1}{2}a^2x(2x^2 + 1)$,
car x représente un nombre positif.

3° $\sqrt{\frac{x^3 + x - 2x^2}{4}} = \frac{1}{2}(x - 1)\sqrt{x}$, si x est supérieur à 1;
$= \frac{1}{2}(1 - x)\sqrt{x}$, si x est inférieur à 1.

$\sqrt{\frac{x}{a^3 - ab^2 - a^2b + b^3}} = \frac{\sqrt{(a + b)x}}{a^2 - b^2}$, si a^2 est supérieur à b^2;
$= \frac{\sqrt{(a + b)x}}{b^2 - a^2}$, si a^2 est inférieur à b^2.

$\sqrt{\frac{1}{xy^2z} - \frac{1}{x^2yz} + \frac{1}{xyz^2}} = \frac{1}{xyz}\sqrt{xz - yz + xy}$.

440. *Effectuer les additions et les soustractions suivantes :*

1° $5\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{2}{3}\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \frac{19}{6}\sqrt{2}$

2° $\sqrt{50} - 2\sqrt{8} + 3\sqrt{18} - 7\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

3° $2\sqrt{54} - 2\sqrt{24} - \sqrt{150} + \sqrt{6} = -2\sqrt{6}$

4° $2\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{18} + \sqrt{\frac{2}{9}} - \sqrt{\frac{9}{8}} = -\frac{29}{12}\sqrt{2}$

5° $\sqrt{48} - \sqrt{\frac{12}{25}} + \sqrt{\frac{1}{3}} + 3\sqrt{75} = \frac{284}{15}\sqrt{3}$

6° $2\sqrt{28} - 6\sqrt{\frac{7}{4}} + 14\sqrt{\frac{1}{7}} = 3\sqrt{7}$

7° $\sqrt{72} + 3 - \sqrt{50} - \sqrt{25} = \sqrt{2} - 2$

8° $5\sqrt{12} - 2\sqrt{\frac{3}{4}} + 2\sqrt{27} - 8\sqrt{\frac{3}{16}} = 13\sqrt{3}$

9° $-\sqrt{\frac{3}{5}} + 2\sqrt{\frac{5}{3}} - \sqrt{60} + \sqrt{\frac{1}{15}} = -\frac{22}{15}\sqrt{15}$

10° $2\sqrt{5} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{20}\sqrt{45} = \frac{41}{20}\sqrt{5}.$

441. *Effectuer les additions et les soustractions suivantes :*

1° $\sqrt{2a^3b} - \sqrt{32ab^3} + \sqrt{18ab^3} = (a - b)\sqrt{2ab}$

2° $\sqrt{72a^5b^5} + \sqrt{18a^3b^7} + \sqrt{18a^7b^3} = 3ab(a + b)^2\sqrt{2ab}$

3° $\sqrt{a^5 - 2a^4} + \sqrt{ab^4 - 2b^4} - \sqrt{4a^3b^2 - 8a^2b^2} = (a - b)^2\sqrt{a - 2}$

4° $\sqrt{\frac{a^2b}{c}} - \sqrt{\frac{9b^3}{c}} - \sqrt{bc} + \sqrt{\frac{4b^3}{c}} = \frac{a - b - c}{c}\sqrt{bc}$

5° $\sqrt{\frac{a + b}{a - b}} - \sqrt{\frac{a - b}{a + b}} = \frac{2b}{a^2 - b^2}\sqrt{a^2 - b^2}$

Remarque. — Cet exercice suppose que l'on ait $a > b$. La même remarque s'applique à l'exercice suivant.

6° $a\sqrt{\frac{a - b}{a + b}} + b\sqrt{\frac{a + b}{a - b}} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}\sqrt{a^2 - b^2}$

7° $\sqrt{\frac{b + x}{x^2}} - \sqrt{\frac{b}{x^2} + \frac{1}{x}} = 0$

8° $\sqrt{\frac{a^3 - a^2b}{b^2}} - \sqrt{\frac{ab^2 - b^3}{a^2}} = \frac{a^2 - b^2}{ab}\sqrt{a - b}.$

442. *Effectuer les multiplications suivantes :*

1° $\sqrt{28} \times \sqrt{7} = 14$

2° $\sqrt{10} \times \sqrt{15} = 5\sqrt{6}$

3° $-\sqrt{7} \times \sqrt{42} = -7\sqrt{6}$

4° $\sqrt{7} \times \sqrt{\frac{1}{7}} = 1$

5° $2\sqrt{18} \times \sqrt{8} = 24$

6° $(4 - \sqrt{3})\sqrt{3} = 4\sqrt{3} - 3$

7° $(\sqrt{5} - \sqrt{3})\sqrt{15} = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{5}$

8° $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(-\sqrt{6}) = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$

9° $(3 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5}) = 1 - \sqrt{5}$

10° $(7 + 2\sqrt{6})(9 - 5\sqrt{6}) = 3 - 17\sqrt{6}$

11° $(9\sqrt{12} + 3)(\sqrt{3} + 8) = 78 + 147\sqrt{3}$

12° $(6 + 12\sqrt{7})(3 - 5\sqrt{7}) = 6\sqrt{7} - 402.$

443. *Effectuer les multiplications suivantes :*

1° $(9 + 2\sqrt{10})(9 - 2\sqrt{10}) = 41$

2° $(-5 - \sqrt{3})(-5 + \sqrt{3}) = 22$

3° $(5 - 2\sqrt{3})(5 + 2\sqrt{3}) = 13$

4° $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x^2} - \sqrt{xy}) = (x - y)\sqrt{x}$

5° $(a + b + \sqrt{x})(a + b - \sqrt{x}) = (a + b)^2 - x$

6° $(x - y + \sqrt{xy})(x + y - \sqrt{xy}) = x^2 - y^2 - xy + 2y\sqrt{xy}$

7° $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^2(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}) = 18\sqrt{2} - 12\sqrt{3}$

8° $(\sqrt{a} - \sqrt{b} + 1)(\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1) = a - b - 1 + 2\sqrt{b}.$

444. *Effectuer les multiplications suivantes :*

1° $(2\sqrt{8} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2})(\sqrt{72} - 5\sqrt{20} - 2\sqrt{2}) = 42\sqrt{10} - 174$

2° $(\sqrt{35} + 3\sqrt{2} + \sqrt{7})(\sqrt{35} - 3\sqrt{2} - \sqrt{7}) = 10 - 6\sqrt{14}$

3° $\sqrt{5 + \sqrt{24}} \times \sqrt{5 - \sqrt{24}} = 1$

4° $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} \times \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1.$

445. *Élever au carré les expressions suivantes :*

1° $(3\sqrt{2})^2 = 18$

2° $(2\sqrt{7})^2 = 28$

3° $(3a\sqrt{b})^2 = 9a^2b$

4° $(2a\sqrt{5b})^2 = 20a^2b$

5° $(\sqrt{2} - \sqrt{6})^2 = 8 - 4\sqrt{3}$

6° $(2\sqrt{6} + \sqrt{24})^2 = 96$

7° $(2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$

8° $(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6})^2 = 11 + 2\sqrt{6} - 4\sqrt{3} - 6\sqrt{2}$

9° $\left[\dfrac{3\sqrt{5}-5\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-5\sqrt{5}}\right]^2 = \dfrac{60-15\sqrt{15}}{76-15\sqrt{15}} = \dfrac{1185-240\sqrt{15}}{2401}$

10° $\left[\dfrac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}\right]^2 = \dfrac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}} = \dfrac{2a^2-b^2-2a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}.$

446. *Rendre rationnel le dénominateur de chacune des fractions suivantes :*

1° $\dfrac{9\sqrt{2}-8\sqrt{3}+3\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 3\sqrt{3}-4\sqrt{2}+3$

2° $\dfrac{3\sqrt{20}-5\sqrt{15}+\sqrt{30}}{\sqrt{5}} = 6-5\sqrt{3}+\sqrt{6}$

3° $\dfrac{\sqrt{32}-5\sqrt{2}+2\sqrt{8}}{2\sqrt{8}} = \dfrac{3}{4}$

4° $\dfrac{2\sqrt{15}-3\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{5\sqrt{15}} = \dfrac{10-5\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{25}$

5° $\dfrac{-\sqrt{12}+\sqrt{24}-\sqrt{48}}{-\sqrt{6}} = 3\sqrt{2}-2$

6° $\dfrac{3-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}-3$

7° $\dfrac{18}{4-\sqrt{7}} = 8+2\sqrt{7}$

8° $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}} = -\dfrac{2+\sqrt{10}}{3}$

9° $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

10° $\dfrac{2}{-2\pm\sqrt{6}} = 2\pm\sqrt{6}$

11° $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}} = -\dfrac{7+2\sqrt{10}}{3}$

12° $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = 4-\sqrt{15}$

13° $\dfrac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \sqrt{15}$

14° $\dfrac{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \sqrt{35}$

15° $\dfrac{\sqrt{2(10-5\sqrt{2})}}{\sqrt{10+5\sqrt{2}}} = \dfrac{(10-5\sqrt{2})\sqrt{2}}{\sqrt{50}} = 2-\sqrt{2}.$

447. *Rendre rationnel le dénominateur de chacune des fractions suivantes :*

1° $\dfrac{ax-by}{\sqrt{ax}+\sqrt{by}} = \sqrt{ax}-\sqrt{by}$

2° $\dfrac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = a + b + \sqrt{ab}$

3° $\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}} = \dfrac{(a+b)\sqrt{ab}-ab}{ab}$

4° $\dfrac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b}-\sqrt{a+b}} = -\dfrac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$

5° $\dfrac{(\sqrt{5}+2)\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = 4 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + \sqrt{15}$

6° $\dfrac{\sqrt{a}\sqrt{3a-a\sqrt{3}}}{\sqrt{3a+a\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{6a}-\sqrt{2a}}{2}$

7° $\dfrac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1} = \sqrt{6}+\sqrt{2}-2$

8° $\dfrac{6}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{30}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3})$

9° $\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$

10° $\dfrac{10+4\sqrt{35}+30\sqrt{2}}{\sqrt{5}+2\sqrt{7}+3\sqrt{10}} = 2\sqrt{5}$

11° $\dfrac{-1+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}} = \sqrt{2}-\sqrt{3}$

12° $\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-1).$

448. *Simplifier les expressions suivantes :*

1° $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} + \dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} = 2x$

2° $\dfrac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} + \dfrac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}} = \dfrac{2(a^2+b)}{a^2-b}$

3° $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}} = -(x+\sqrt{x^2-1})$

4° $\dfrac{x+\sqrt{x-1}}{x-\sqrt{x-1}} - \dfrac{x-\sqrt{x-1}}{x+\sqrt{x-1}} = \dfrac{4x\sqrt{x-1}}{x^2-x+1}$

5° $\left[\dfrac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}} - \dfrac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}}\right]^2 = \dfrac{4x^2}{a^2-x^2}$

6° $\dfrac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{1}{b}(\sqrt{ab}+\sqrt{b(a+b)})$.

449. *Simplifier les expressions suivantes :*

1° $\left[\dfrac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x-a}} - \dfrac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}}\right] \times \dfrac{\sqrt{x^3-a^3}}{\sqrt{(x+a)^2-ax}} = \dfrac{2a\sqrt{x+a}}{x+a}$

2° $\left[\sqrt{2x}+\sqrt{2(2x-1)}-\dfrac{1}{\sqrt{2x}}\right]\left[\dfrac{1}{\sqrt{2x}}+\sqrt{2(2x-1)}-\sqrt{2x}\right]$

$= 2(2x-1) - \left[\sqrt{2x}-\dfrac{1}{\sqrt{2x}}\right]^2 = \dfrac{4x^2-1}{2x}$

3° $\dfrac{1}{a\sqrt{a+1}+(a+1)\sqrt{a}} - \dfrac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}{\sqrt{a(a+1)}} = 0$

4° $\dfrac{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}-2}{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}+2} = \dfrac{(n+1)\sqrt{n^2-4}}{(n-1)(n+2)}$.

En effet, on a $n^3-3n-2=(n-2)(n+1)^2$ et le numérateur est égal à

$$(n+1)\sqrt{n-2}\,[(n+1)\sqrt{n-2}+(n-1)\sqrt{n+2}].$$

On a aussi $n^3-3n+2=(n+2)(n-1)^2$ et le dénominateur est égal à

$$(n-1)\sqrt{n+2}\,[(n-1)\sqrt{n+2}+(n+1)\sqrt{n-2}].$$

450. *Si* $\dfrac{A}{a}=\dfrac{B}{b}=\dfrac{C}{c}$, *démontrer que*

$$\sqrt{Aa}+\sqrt{Bb}+\sqrt{Cc}=\sqrt{(A+B+C)(a+b+c)}.$$

En effet, des égalités proposées, on déduit :

$$\frac{Aa}{a^2}=\frac{Bb}{b^2}=\frac{Cc}{c^2};\quad \frac{\sqrt{Aa}}{a}=\frac{\sqrt{Bb}}{b}=\frac{\sqrt{Cc}}{c};$$

$$\frac{\sqrt{Aa}}{a}=\frac{\sqrt{Aa}+\sqrt{Bb}+\sqrt{Cc}}{a+b+c}. \qquad (1)$$

Des égalités proposées, on déduit aussi :

$$\frac{A}{a}=\frac{A+B+C}{a+b+c};\quad \frac{Aa}{a^2}=\frac{(A+B+C)(a+b+c)}{(a+b+c)^2};$$

$$\frac{\sqrt{Aa}}{a}=\frac{\sqrt{(A+B+C)(a+b+c)}}{a+b+c}. \qquad (2)$$

En comparant les seconds membres des égalités (1) et (2), on obtient la relation demandée.

AUTRE DÉMONSTRATION. — Si on désigne par q la valeur commune des rois fractions, on a

$$A = aq;\quad B = bq;\quad C = cq.$$

En remplaçant A, B et C dans les deux membres de l'égalité à démontrer, ils deviennent respectivement :

$$\sqrt{a^2q} + \sqrt{b^2q} + \sqrt{c^2q} = (a+b+c)\sqrt{q};$$
$$\sqrt{(a+b+c)^2q} = (a+b+c)\sqrt{q}.$$

Donc ces deux membres sont égaux. — Les deux démonstrations supposent que les termes des trois fractions soient positifs.

451. *Si* $a^2 = b^2 + c^2$, *que devient l'expression*

$$\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}?$$

En groupant les facteurs et en tenant compte de l'hypothèse, on a :

$$(a+b+c)(b+c-a) = (b+c)^2 - a^2 = (b^2+c^2-a^2) + 2bc = 2bc;$$
$$(a+b-c)(a+c-b) = a^2 - (b-c)^2 = (a^2-b^2-c^2) + 2bc = 2bc.$$

Donc le radicand est égal à $4b^2c^2$ et l'expression proposée se réduit à $\frac{1}{2}bc$.

CHAPITRE XV

Équations du second degré.

§ I. — RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS.

452. 1° $x^2 + 5x + 4 = 0$	**Rép.**	$x' = -1;\quad x'' = -4.$
2° $x^2 + 9x + 14 = 0$	»	$x' = -2;\quad x'' = -7.$
3° $x^2 - 6x + 5 = 0$	»	$x' = 5;\quad x'' = 1.$
4° $x^2 - 6x + 8 = 0$	»	$x' = 4;\quad x'' = 2.$
5° $x^2 - 3x - 18 = 0$	»	$x' = 6;\quad x'' = -3.$
6° $x^2 - 3x + 10 = 0$		pas de solution.
7° $x^2 - 3x - 28 = 0$	»	$x' = 7;\quad x'' = -4.$
8° $x^2 + 10x + 25 = 0$	»	$x' = x'' = -5.$
9° $x^2 + 9x - 10 = 0$	»	$x' = 1;\quad x'' = -10.$
10° $x^2 + x + 1 = 0$		pas de solution.

453. Avant de résoudre les équations suivantes, diviser les deux membres de chacune par un même facteur.

1° $3x^2 - 9x + 6 = 0$ **Rép.** $x' = 2;\ x'' = 1.$
2° $3x^2 - 15x + 18 = 0$ » $x' = 3;\ x'' = 2.$
3° $4x^2 - 4x + 8 = 0$ pas de solution.
4° $2x^2 - 14x + 12 = 0$ » $x' = 6;\ x'' = 1.$
5° $7x^2 - 49x - 126 = 0$ » $x' = 9;\ x'' = -2.$
6° $3x^2 + 24x + 21 = 0$ » $x' = -1;\ x'' = -7.$
7° $2x^2 - 12x - 14 = 0$ » $x' = 7;\ x'' = -1.$
8° $7x^2 + 21x - 28 = 0$ » $x' = 1;\ x'' = -4.$

454. 1° $7x^2 + 58x = 45$ **Rép.** $x' = \frac{5}{7};\ x'' = -9.$

2° $11x^2 + 2(19x - 12) = 0$ » $x' = \frac{6}{11};\ x'' = -4.$

3° $x - x^2 + 42 = 0$ » $x' = 7;\ x'' = -6.$

4° $2x^2 + \frac{9}{16} = x$ pas de solution.

5° $\frac{3x^2}{4} + 2x + \frac{4}{3} = 0$ » $x' = x'' = -\frac{4}{3}.$

6° $x^2 + 64 = 20x$ » $x' = 16;\ x'' = 4.$

7° $2x^2 + 16(2 + x) = 0$ » $x' = x'' = -4.$

8° $49x^2 + 140x - 629 = 0$ » $x' = \frac{17}{7};\ x'' = -\frac{37}{7}.$

9° $x^2 - \frac{17x}{6} = \frac{1}{2}$ » $x' = 3;\ x'' = -\frac{1}{6}.$

10° $\frac{x^2}{3} + \frac{12}{25} = \frac{4x}{5}$ » $x' = x'' = \frac{6}{5}.$

455. *Résoudre les équations suivantes sans appliquer les formules générales :*

1° $3x^2 = 3072$ ou $x^2 = 1024.$
Rép. $x = \pm 32.$

2° $3x^2 + 4x = 0$ ou $x(3x + 4) = 0.$
Rép. $x' = 0;\ x'' = -\frac{4}{3}.$

3° $5x^2 = 2x$ ou $x(5x - 2) = 0.$
Rép. $x' = \frac{2}{5};\ x'' = 0.$

4° $4x^2 - 4x + 1 = 0$ ou $(2x - 1)^2 = 0.$
Rép. $x' = x'' = 0{,}5.$

5° $x(x + 1) = 2(x + 1)$ ou $(x + 1)(x - 2) = 0$.
Rép. $x' = 2$; $x'' = -1$.

6° $x^2 - 4 = x + 2$ ou $(x + 2)(x - 3) = 0$.
Rép. $x' = 3$; $x'' = -2$.

7° $36 = x^2$ ou $x^2 = 36$.
Rép. $x = \pm 6$.

8° $9x^2 - 6x + 1 = 0$ ou $(3x - 1)^2 = 0$.
Rép. $x' = x'' = \frac{1}{3}$.

9° $(x - 3)(x - 5) + x = 5$ ou $(x - 5)(x - 2) = 0$.
Rép. $x' = 5$; $x'' = 2$.

10° $(x + 3)^2 - 7(x + 3) = 0$ ou $(x + 3)(x - 4) = 0$.
Rép. $x' = 4$; $x'' = -3$.

11° $(2x - 3)(x + 1) + 3 = 2x$ ou $(2x - 3)x = 0$.
Rép. $x' = 1{,}5$; $x'' = 0$.

12° $x^2 - (a + b)x + ab = 0$.
Les racines cherchées sont a et b, car ces deux nombres ont comme produit ab et comme somme $a + b$.

13° $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$.
Rép. $x' = a + b$; $x'' = a - b$.

14° $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$.
Rép. $x' = a + 1$; $x'' = a - 1$.

15° $a^2x^2 - 2abx + b^2 - c^2 = 0$.
Rép. $x' = \frac{b + c}{a}$; $x'' = \frac{b - c}{a}$.

16° $a^2x^2 - 2a^3x + a^4 - 1 = 0$.
Rép. $x' = \frac{a^2 + 1}{a}$; $x'' = \frac{a^2 - 1}{a}$.

456. *Résoudre les équations suivantes :*

1° $(5x - 2)(x + 3) = 7(x - 1)$
Rép. $x' = -\frac{1}{5}$; $x'' = -1$.

2° $(5x - 3)(x - 5) = (2x + 5)^2 + 90$
Rép. $x' = 50$; $x'' = -2$.

3° $(x - 4)^2 + (x - 3)^2 = (x - 2)(3x - 16)$
Rép. $x' = 7$; $x'' = 1$.

4o $14x^2 - (2x - 11)(5x + 4) - 33x = 32$
Rép. $x' = -1{,}5$; $x'' = -2$.

5o $(x + 1)(4x - 5) + (x + 2)(3x - 2) = (x + 3)(3x - 1)$
Rép. $x' = 2$; $x'' = -0{,}75$.

6o $(x + 3)(2x - 7) - (x - 5)^2 - 2(x + 2)(x - 4) = 0.$
Rép. $x' = 10$; $x'' = 3$.

7o $(x + 16)(2x - 9) - 2(x + 15)(x - 5) - (x - 16)^2 = 0$
Rép. $x' = 25$; $x'' = 10$.

8o $(2x + 5)(3x - 5) = 3(x - 2)(x + 14) + (x - 3)(2x - 13)$
Rép. $x' = 10$; $x'' = 2$.

Remarque. — Il convient d'exercer les élèves à réduire ces équations à la forme générale sans écritures intermédiaires. La même remarque s'applique au no suivant, quand on a fait disparaître les dénominateurs en multipliant les deux membres par le p. p. c. m. des dénominateurs.

457. 1o $\dfrac{1}{x - 2} - \dfrac{1}{x + 2} = \dfrac{1}{35}.$

Faisons disparaître les dénominateurs en multipliant les deux membres par le p. p. c. m. des dénominateurs, qui est $35(x^2 - 4)$. On trouve

$$35(x + 2) - 35(x - 2) = x^2 - 4 \quad \text{ou} \quad x^2 - 144 = 0.$$

Rép. $x'' = -12$; $x' = 12$; ces réponses conviennent.

2o $\dfrac{4}{x^2 - 1} + \dfrac{3}{x + 1} = \dfrac{2}{x - 1} + 1$

On a $x^2 - x = 0$; d'où $x'' = 0$, $x' = 1$.
La racine $x = 1$ ne convient pas à l'équation proposée.

3o $\dfrac{x - 3}{x - 1} + \dfrac{x - 1}{x - 3} = \dfrac{25}{12}$

On a $x^2 - 4x - 45 = 0$; d'où $x'' = -5$, $x' = 9$.
Les deux racines conviennent.

4o $\dfrac{2x - 1}{3} + \dfrac{3}{x - 8} = \dfrac{x - 5}{x - 8} + 3$

On a $2x^2 - 29x + 104 = 0$; d'où $x'' = \dfrac{13}{2}$, $x' = 8$.

La racine $x = 8$ est à écarter.

5o $\dfrac{8x - 3}{x + 3} - 2x = 4 - \dfrac{3x^2}{x + 3}$

On a $x^2 - 2x - 15 = 0$; d'où $x'' = -3$, $x' = 5$.
La racine $x = -3$ est à écarter.

6° $\dfrac{x+2}{x-1} + \dfrac{x-4}{2x} = \dfrac{4}{2x^2-2x}$

On a $3x^2 - x = 0$; d'où $x'' = 0$, $x' = \dfrac{1}{3}$.

La racine $x = 0$ est à écarter.

7° $\dfrac{x+3}{x+2} - \dfrac{x+2}{x+3} = \dfrac{x^2-75}{x^2+5x+6}$

On a $x^2 - 2x - 80 = 0$; d'où $x'' = -8$, $x' = 10$.

Les deux racines conviennent.

8° $\dfrac{x-2}{3(x-1)} + \dfrac{x-1}{4(x-2)} = \dfrac{x+2}{x^2-3x+2}$

On a $7x^2 - 34x - 5 = 0$; d'où $x'' = -\dfrac{1}{7}$, $x' = 5$.

Les deux racines conviennent.

9° $\dfrac{2+2x}{9x^2-4} - \dfrac{x-2}{9x^2+12x+4} = \dfrac{x+4}{9x^2-4}$

Cette équation renferme deux fractions ayant même dénominateur. En les réduisant en une seule, l'équation devient

$$\frac{x-2}{9x^2-4} = \frac{x-2}{9x^2+12x+4}.$$

Cette équation se décompose en deux autres

$$x-2=0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{9x^2-4} = \frac{1}{9x^2+12x+4},$$

dont la résolution donne

$$x'' = -\frac{2}{3}, \quad x' = 2.$$

La racine $x = -\dfrac{2}{3}$ est inacceptable pour l'équation proposée, car elle annule ses dénominateurs.

10° $\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{3}{x+2} + \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{3}{x-2} = 0.$

Divisons les deux membres par 3, puis groupons la 1re et la 3e, la 2e et la 4e fraction. L'équation devient

$$\frac{2x}{x^2-1} + \frac{2x}{x^2-4} = 0.$$

Cette équation se décompose en deux autres

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x^2 - 1 = 4 - x^2,$$

dont la résolution donne

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{10}.$$

Ces trois racines conviennent.

N. B. — *Les lettres* a, b, c, *qui interviennent dans les deux nos suivants, représentent des nombres connus, différents de zéro.*

458. 1° $x^2 + 6ax + 8a^2 = 0$ Rép. $-2a$; $-4a$.

2° $6(x^2 + 2a^2) - 17ax = 0$ » $\frac{3a}{2}$; $\frac{4a}{3}$.

3° $ab(x^2 + 1) - (a^2 + b^2)x = 0$ » $\frac{a}{b}$; $\frac{b}{a}$.

4° $abcx^2 - (a^2b^2 + c^2)x + abc = 0$ » $\frac{ab}{c}$; $\frac{c}{ab}$.

5° $(a - x)^2 + (x - b)^2 = (a - b)^2$ » a; b.

6° $x^2 - 2(a^2 + b^2)x + (a^2 - b^2)^2 = 0$ » $(a + b)^2$; $(a - b)^2$.

459. 1° $\dfrac{a-b}{4(x-a)} + \dfrac{x+2b}{a+b} = 2.$

Cette équation est impossible si $a = -b$. Supposons $a \neq -b$ et faisons disparaître les dénominateurs. Il vient

$$4x^2 - 12ax + 9a^2 - b^2 = 0;\quad \text{d'où}\quad x'' = \frac{3a-b}{2};\quad x' = \frac{3a+b}{2}.$$

Ces racines ne sont acceptables que si elles n'annulent pas le dénominateur $x - a$. La relation $x'' \neq a$ exige $a \neq b$; la relation $x' \neq a$ exige $a \neq -b$.

En résumé, si $a \neq \pm b$, il y a deux racines;
si $a = b$, il y a une racine, qui est x';
si $a = -b$, l'équation est impossible.

2° $\dfrac{(a-x)^2 - (x-b)^2}{(a-x)(x-b)} = \dfrac{4ab}{a^2 - b^2}.$

Supposons $a \neq \pm b$ et faisons disparaître les dénominateurs. Il vient

$$4abx^2 - 2x(a+b)(a^2+b^2) + (a^2+b^2)^2 = 0.$$

Par suite, $x' = \dfrac{a^2+b^2}{2a}$; $x'' = \dfrac{a^2+b^2}{2b}$.

Ces racines ne conviennent que si elles sont différentes de a et de b. On peut vérifier que cette condition est satisfaite dès que $a \neq \pm b$.

3° $\dfrac{(a-x)^2 + (x-b)^2}{(a-x)(x-b)} = \dfrac{13}{6}.$

En faisant disparaître les dénominateurs, l'équation devient

$$25x^2 - 25(a+b)x + 6a^2 + 6b^2 + 13ab = 0.$$

Par suite, $x' = \dfrac{3a+2b}{5}$; $x'' = \dfrac{2a+3b}{5}$.

Ces réponses ne conviennent que si elles sont différentes de a et de b. On vérifierait aisément que cette condition est satisfaite dès que $a \neq b$.

4° $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = \dfrac{3a^2+b^2}{a^2+3b^2}.$

En faisant disparaître les dénominateurs, il vient

$$x^2(a^2 - b^2) - 2x(a^2 + b^2) + (a^2 - b^2) = 0.$$

Si $a \neq \pm b$, cette équation admet les deux racines

$$x' = \frac{a+b}{a-b}, \quad x'' = \frac{a-b}{a+b},$$

qui conviennent à l'équation proposée, car le trinôme $x^2 - x + 1$ ne s'annule pour aucune valeur de x.

Si $a = \pm b$, l'équation proposée devient

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} = 1; \text{ d'où } x = 0.$$

5° $\dfrac{(a-x)^2 + (x-b)^2}{(a+b-2x)^2} = \dfrac{a^2+b^2}{(a+b)^2}.$

Supposons $a \neq -b$ et faisons disparaître les dénominateurs. Il vient

$$x^2(a-b)^2 - x(a+b)(a-b)^2 = 0.$$

Si $a \neq b$, cette équation donne

$$x' = 0, \quad x'' = a + b,$$

et ces racines conviennent à l'équation proposée, car elles n'annulent pas le dénominateur $a + b - 2x$.

Si $a = b$, l'équation proposée se réduit à l'identité

$$\frac{2(a-x)^2}{4(a-x)^2} = \frac{2a^2}{4a^2}.$$

6° $\dfrac{3a+b-x}{3a-b-x} = \dfrac{a+b}{a-b} \times \dfrac{a-b+x}{a+b+x}.$

Supposons $a \neq b$. L'équation proposée pourra s'écrire

$$\frac{3a+b-x}{3a-b-x} = \frac{a^2-b^2+(a+b)x}{a^2-b^2+(a-b)x},$$

ou, en appliquant les propriétés des proportions,

$$\frac{3a-x}{b} = \frac{a^2-b^2+ax}{bx}.$$

Nous supposons $b \neq 0$. Faisons disparaître les dénominateurs. Il vient $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0.$

Par suite, $x' = a + b$ et $x'' = a - b$.

La racine x' convient, si l'on a

$$a + b \neq 3a - b \text{ et } a + b \neq -(a+b);$$

ce qui exige $a \neq \pm b$.

La racine x'' convient, si

$$a - b \neq 3a - b \text{ et } a - b \neq -(a+b);$$

ce qui exige $a \neq 0$, condition que nous supposons réalisée.

En résumé, si $a \neq \pm b$, l'équation a deux racines;
si $a = -b$, l'équation a une racine, qui est x'';
si $a = b$, l'équation est impossible.

7° $\dfrac{x + a - b}{x - a - b} = \dfrac{(a + b)^2}{(a - b)^2} \times \dfrac{x + a + b}{x - a + b}.$

Supposons $a \neq b$. En faisant disparaître les dénominateurs et en réduisant les termes semblables, on obtient l'équation

$$x^2 = 2(a^2 + b^2)$$

ou

$$x = \pm \sqrt{2(a^2 + b^2)}.$$

Ces racines doivent être différentes de $a + b$ et de $a - b$; ce qui a lieu quand on a

$$2(a^2 + b^2) \neq (a \pm b)^2 \quad \text{ou} \quad a \neq \pm b.$$

Pour $a = b$, l'équation est impossible.

Pour $a = -b$, l'équation devient

$$\frac{x + 2a}{x} = 0; \quad \text{d'où} \quad x = -2a.$$

8° $\dfrac{x + b}{x - a} - \dfrac{x - a}{2x - 2b} = \dfrac{ax - b^2}{x^2 - (a + b)x + ab}.$

En multipliant par $2(x - a)(x - b)$, on obtient après réduction l'équation $x^2 = a^2$, dont les racines sont $\pm a$.

La racine $+ a$ est à écarter; si $a \neq -b$, la racine $- a$ convient.

9° $\dfrac{(4a - 3b)^2 + (4x + 5b)^2}{(4a + 3b)^2 + (4x - 5b)^2} = \dfrac{5x + 3a + 4b}{5x + 3a - 4b}.$

En appliquant les propriétés des proportions, on trouve

$$\frac{8a^2 + 17b^2 + 8x^2}{-12ab + 20bx} = \frac{5x + 3a}{4b},$$

ou encore, puisque nous supposons $b \neq 0$,

$$\frac{8a^2 + 17b^2 + 8x^2}{5x - 3a} = 5x + 3a.$$

Faisons disparaître les dénominateurs. Il vient

$$x^2 = a^2 + b^2 \quad \text{ou} \quad x = \pm \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ces racines ne conviennent que si elles n'annulent pas les dénominateurs de l'équation proposée. Pour qu'elles n'annulent pas le dénominateur du second membre, il suffit que l'on ait

$$25(a^2 + b^2) \neq (4b - 3a)^2 \quad \text{ou} \quad (4a + 3b)^2 \neq 0.$$

Quand cette condition est satisfaite, le dénominateur du premier membre ne s'annule pour aucune valeur de x et les deux racines conviennent.

Si $4a + 3b = 0$, l'équation proposée devient, après avoir remplacé b en fonction de a,

$$\frac{36a^2 + (3x - 5a)^2}{(3x + 5a)^2} = \frac{15x - 7a}{15x + 25a}; \quad \text{d'où} \quad x' = \frac{5a}{3}, \quad x'' = -\frac{5a}{3}.$$

On vérifie aisément que x' convient et que x'' ne convient pas.

10° $1 + \dfrac{2x}{x + 4a} + \dfrac{27a^2}{2x^2 + 7ax - 4a^2} = \dfrac{6a}{2x - a}$.

En multipliant par $(2x - a)(x + 4a) = 2x^2 + 7ax - 4a^2$, il vient après réduction

$$6x^2 - ax - a^2 = 0.$$

D'où $$x' = \frac{a}{2};\quad x'' = -\frac{a}{3}.$$

La racine $x' = \dfrac{a}{2}$ doit être écartée.

460. *Déterminer* m *pour que* 1 *soit une racine des équations suivantes. Trouver l'autre racine.*

1° $x^2 + (3 - m)x + 2m - 1 = 0$.
On doit avoir

$$1 + (3 - m) + 2m - 1 = 0;\quad \text{d'où}\quad m = -3.$$

La seconde racine est -7.

2° $m^2x^2 - (4m - 1)x + m + 1 = 0$.
On doit avoir

$$m^2 - (4m - 1) + m + 1 = 0;\quad \text{d'où}\quad m = 1 \quad \text{ou}\quad 2.$$

Si $m = 1$, la seconde racine est 2;
Si $m = 2$, la seconde racine est 0,75.

3° $(m^2 - 1)x^2 - (2m - 1)x - 3 = 0$.
On doit avoir

$$m^2 - 2m - 3 = 0;\quad \text{d'où}\quad m = -1 \quad \text{ou}\quad 3.$$

Si $m = 3$, la seconde racine est $-\dfrac{3}{8}$;

Si $m = -1$, l'équation donnée devient $3x - 3 = 0$. Sa racine unique est $x = 1$.

4° $m^2x^2 - m(3x + 10) - (x^2 + 3x + 10) = 0$.
On doit avoir

$$m^2 - 13m - 14 = 0;\quad \text{d'où}\quad m = -1 \quad \text{ou}\quad 14.$$

Si $m = 14$, la seconde racine est $-\dfrac{10}{13}$.

Si $m = -1$, l'équation devient $0.x^2 + 0.x + 0 = 0$. Elle est indéterminée.

461. *Déterminer* m *pour que* -1 *soit une racine des équations suivantes. Trouver les autres racines.*

1° $x^3 + 6x^2 + 11x + m = 0$.

On doit avoir $m - 6 = 0$; d'où $m = 6$.

L'équation peut alors s'écrire

$$(x + 1)(x^2 + 5x + 6) = 0.$$

L'équation $x^2 + 5x + 6 = 0$ donne les deux autres racines qui sont -2 et -3.

2° $x^3 + 2mx^2 - (m - 1)x - 4 = 0.$

Rép. $m = 2;\quad x'' = -4;\quad x''' = 1.$

462. *Montrer que l'équation* $x^2 - (a + c)x + ac - b^2 = 0$ *admet toujours deux racines.*

On a $\rho = (a + c)^2 - 4ac + 4b^2 = (a - c)^2 + 4b^2$,
qui est positif, à moins qu'on n'ait

$$a = b = c = 0 \quad \text{ou} \quad a = c,\ b = 0.$$

463. *Si l'équation* $x^2 + px + q = 0$ *admet deux racines, il en sera de même des équations suivantes :*

1° $x^2 + x(p - 2q) + q(1 - p + q) = 0.$

On a $\rho = (p - 2q)^2 - 4q(1 - p + q) = p^2 - 4q$,
qui est positif par hypothèse.

2° $x^2 + px + q + m(2x + p) = 0.$

On a $\rho = (p + 2m)^2 - 4(q + mp) = (p^2 - 4q) + 4m^2$,
qui est positif comme $p^2 - 4q$.

§ II. — NOMBRE ET SIGNES DES RACINES.

464. *Dans les équations des nos* 452 *et* 453, *indiquer, sans résoudre, le nombre et les signes des racines.*

Exemple. — Pour l'équation $x^2 + 5x + 4 = 0$, on a

$$\rho = 9;\quad P = 4;\quad S = -5.$$

Cette équation admet donc deux racines négatives distinctes.

465. *Déterminer* c *pour que l'équation* $3x^2 - 10x + c = 0$ *admette :*

1° *deux racines distinctes;*
2° *deux racines positives;*
3° *une racine nulle;*
4° *des racines inverses;*
5° *deux racines de signes contraires;*
6° *pas de racine.*

1° L'équation admet deux racines distinctes si on a

$$\rho = 25 - 3c > 0 \quad \text{ou} \quad c < \frac{25}{3}.$$

2° L'équation admet deux racines positives si on a :

$$\rho = 25 - 3c \geqslant 0;\quad P = \frac{c}{3} > 0;\quad S = \frac{10}{3} > 0.$$

Rép. $0 < c \leqslant \frac{25}{3}.$

3° L'équation a une racine nulle quand $c = 0$.

4° L'équation a deux racines inverses si on a :

$$\rho = 25 - 3c > 0; \quad P = \frac{c}{3} = 1.$$

Rép. $c = 3$.

5° L'équation a deux racines de signes contraires quand on a

$$P = \frac{c}{3} < 0.$$

Rép. $c < 0$.

6° L'équation n'a pas de racine pour $c > \dfrac{25}{3}$.

466. *Déterminer* c *pour que l'équation* $x^2 + 4x + c + 2 = 0$ *admette :*
1° *deux racines distinctes;* 3° *une racine double;*
2° *deux racines négatives;* 4° *une racine nulle.*

1° L'équation a deux racines distinctes quand on a :

$$\rho = 2 - c > 0 \quad \text{ou} \quad c < 2.$$

2° L'équation a deux racines négatives quand on a :

$$\rho = 2 - c \geqslant 0; \quad P = c + 2 > 0; \quad S = -4 < 0.$$

Rép. $-2 < c \leqslant 2$.

3° L'équation a une racine double quand $c = 2$.

4° L'équation a une racine nulle pour $c = -2$.

467. *Quelles valeurs doit prendre* c *pour que l'équation*

$$(c + 4)x^2 - 2(c - 2)x + c - 4 = 0$$

admette : 1° *deux racines distinctes;* 3° *deux racines opposées;*
2° *une racine nulle;* 4° *deux racines inverses.*

1° L'équation a deux racines distinctes quand on a

$$\rho = -4c + 20 > 0 \quad \text{ou} \quad c < 5 \quad \text{avec} \quad c \neq -4.$$

2° L'équation a une racine nulle pour $c = 4$.

3° L'équation a deux racines opposées si on a :

$$\rho = 20 - 4c > 0; \quad S = \frac{2(c - 2)}{c + 4} = 0.$$

Rép. $c = 2$.

4° L'équation a deux racines inverses si on a :

$$\rho = 20 - 4c > 0; \quad P = \frac{c - 4}{c + 4} = 1.$$

L'équation $P = 1$ peut s'écrire $0.c = 8$. Elle est donc impossible et il n'y a jamais deux racines inverses.

468. *Déterminer le nombre et les signes des racines des équations suivantes, lorsque* m *croît de* $-\infty$ *à* $+\infty$.

1° $(m-3)x^2 - 8x + 4 = 0$.

On a : $\rho = 16 - 4(m-3) = 28 - 4m$.

$$P = \frac{4}{m-3};\quad \text{P a le même signe que } m - 3.$$

$$S = \frac{8}{m-3};\quad \text{S a le même signe que } m - 3.$$

m	ρ	P	S	
	+	—	—	Deux racines de signes contraires.
3				Équation du 1er degré; $x = 0,5$.
	+	+	+	Deux racines positives.
7	0	+	+	Une racine double; $x' = x'' = 1$.
	—	+	+	Pas de racine.

2° $2x^2 - 5x + 3m - 1 = 0$.

On a : $\rho = 25 - 8(3m-1) = 33 - 24m$.

$$P = \frac{1}{2}(3m-1);\quad S = \frac{5}{2}.$$

m		P	S	
	+	—	+	Deux racines de signes contraires
$\frac{1}{3}$	+	0	+	$x'' = 0$; $x' = \frac{5}{2}$.
	+	+	+	Deux racines positives.
$\frac{11}{8}$	0	+	+	Une racine double; $x' = x'' = \frac{5}{4}$.
	—	+	+	Pas de racine.

3° $(2m+5)x^2 - 4x - 8 = 0$.

On a : $\rho = 4 + 8(2m+5) = 16m + 44$.

$$P = -\frac{8}{2m+5};\quad \text{P a le signe contraire de } 2m + 5.$$

$$S = \frac{4}{2m+5};\quad \text{S a le signe de } 2m + 5.$$

m	ρ	P	S	
	—	+	—	Pas de racine.
$-\frac{11}{4}$	0	+	—	$x' = x'' = -4$.
	+	+	—	Deux racines négatives.
$-\frac{5}{2}$				Équation du 1er degré; $x = -2$.
	+	—	+	Racines de signes contraires.

4° $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 = 0$.

On a : $\rho = (m + 1)^2 - m^2 = 2m + 1$.

$P = m^2$.

$S = 2(m + 1)$.

m	ρ	P	S	
	—	+	—	
-1	—	+	0	Pas de racine.
	—	+	+	
0,5	0	+	+	$x' = x'' = 0{,}5$.
	+	+	+	Deux racines positives.
0	+	0	+	$x'' = 0$; $x' = 2$.
	+	+	+	Deux racines positives.

§ III. — APPLICATIONS DES PROPRIÉTÉS DES RACINES.

469. *Décomposer en facteurs les trinômes suivants :*

1° $x^2 - 9x + 18 = (x - 3)(x - 6)$

2° $x^2 + 3x - 28 = (x + 7)(x - 4)$

3° $3x^2 - 21x + 36 = 3(x - 3)(x - 4)$

4° $2x^2 - 12x + 18 = 2(x - 3)^2$

5° $2x^2 - 3x - 2 = (x - 2)(2x + 1)$

6° $x^2 - 5x - 6 = (x - 6)(x + 1)$

7° $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$

8° $x^2 + 10x + 20 = (x + 5 + \sqrt{5})(x + 5 - \sqrt{5})$

9° $3x^2 - 2x - 4 = 3\left[x - \dfrac{1 + \sqrt{13}}{3}\right]\left[x - \dfrac{1 - \sqrt{13}}{3}\right]$

10° $18x^2 + 3x - 1 = (6x - 1)(3x + 1)$

11° $4x^2 - 4x + 1 = 4\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 = (2x - 1)^2$

12° $63x^2 + 25x + 2 = (9x + 1)(7x + 2)$.

470. *Trouver deux nombres ayant respectivement pour somme et pour produit :*

1° 17 et 30

2° 1 et -56

3° $\dfrac{24}{5}$ et -1

4° $\dfrac{4}{5}$ et $-\dfrac{2}{5}$

5° $2a$ et $a^2 - b^2$

6° $2a^2b$ et $a^4b^2 - a^2b^4$

7° $\dfrac{a^2 + b^2}{ab}$ et 1

8° $\dfrac{2a}{a^2 - b^2}$ et $\dfrac{1}{a^2 - b^2}$.

Les nombres cherchés sont les racines d'une équation du second degré de la forme $x^2 + px + q = 0$; p est égal à la somme des nombres, changée de signe; et q est égal au produit des nombres.

1° $x^2 - 17x + 30 = 0$ Rép. 2 et 15

2° $x^2 - x - 56 = 0$ » -7 et 8

3° $5x^2 - 24x - 5 = 0$ » 5 et $-\dfrac{1}{5}$

4° $5x^2 - 4x - 2 = 0$ » $\dfrac{2 \pm \sqrt{14}}{5}$

5° $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ » $a \pm b$

6° $x^2 - 2a^2bx + a^4b^2 - a^2b^4 = 0$ » $a^2b \pm ab^2$

7° $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$ » $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{b}{a}$

8° $(a^2 - b^2)x^2 - 2ax + 1 = 0$ » $\dfrac{1}{a - b}$ et $\dfrac{1}{a + b}$.

471. *Former une équation du second degré ayant pour racines :*

1° 7 et -3

2° -2 et -5

3° 3 et $\dfrac{1}{3}$

4° 2 et $-\dfrac{1}{2}$

5° 3 et -7

6° $a + b$ et $a - b$

7° $a + b$ et $-(a + b)$

8° $a + b$ et $\dfrac{1}{a + b}$

9° $3 + \sqrt{2}$ et $3 - \sqrt{2}$

10° $2 + \sqrt{3}$ et $2 - \sqrt{3}$

11° $\dfrac{1}{a + b}$ et $\dfrac{1}{b - a}$

12° $\dfrac{a + b}{a - b}$ et $\dfrac{a - b}{a + b}$.

On cherche la somme S et le produit P des racines de l'équation demandée; celle-ci est alors $x^2 - Sx + P = 0.$

Ensuite on fait disparaître les dénominateurs, s'il y a lieu.

1° $S = 4;\ P = -21$ **Rép.** $x^2 - 4x - 21 = 0.$
2° $S = -7;\ P = 10$ » $x^2 + 7x + 10 = 0.$
3° $S = \frac{10}{3};\ P = 1$ » $3x^2 - 10x + 3 = 0.$
4° $S = \frac{3}{2};\ P = -1$ » $2x^2 - 3x - 2 = 0.$
5° $S = -4;\ P = -21$ » $x^2 + 4x - 21 = 0.$
6° $S = 2a;\ P = a^2 - b^2$ » $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0.$
7° $S = 0;\ P = -(a + b)^2$ » $x^2 - (a + b)^2 = 0.$
8° $S = \frac{(a + b)^2 + 1}{a + b};\ P = 1$
Rép. $(a + b)x^2 - [(a + b)^2 + 1]x + a + b = 0.$
9° $S = 6;\ P = 7$
Rép. $x^2 - 6x + 7 = 0.$
10° $S = 4;\ P = 1$
Rép. $x^2 - 4x + 1 = 0.$
11° $S = \frac{2b}{b^2 - a^2},\ P = \frac{1}{b^2 - a^2}$
Rép. $(b^2 - a^2)x^2 - 2bx + 1 = 0.$
12° $S = \frac{2(a^2 + b^2)}{a^2 - b^2};\ P = 1$
Rép. $(a^2 - b^2)x^2 - 2(a^2 + b^2)x + a^2 - b^2 = 0.$

472. *Former l'équation ayant des racines triples de celles de l'équation*

$$2x^2 - x - 10 = 0.$$

Soient x' et x'' les racines de l'équation donnée. Celles de l'équation cherchée seront $3x'$ et $3x''$. On a :

$$S = 3(x' + x'') = 1{,}5.$$
$$P = 9x'x'' = -45.$$

Rép. $2x^2 - 3x - 90 = 0.$

473. *Former l'équation dont les racines sont les nombres opposés aux racines de l'équation* $x^2 - 3x - 1 = 0.$

Rép. $x^2 + 3x - 1 = 0.$

474. *Équation dont les racines sont celles de l'équation* $x^2 - 3x - 10 = 0,$ *augmentées de* 2.

Rép. $x^2 - 7x = 0.$

475. *Équation dont les racines sont celles de l'équation* $x^2 - 3x - 4 = 0$, *divisées par* 3.

Rép. $9x^2 - 9x - 4 = 0$.

476. *Équation dont chaque racine égale* 3 *fois la correspondante de l'équation* $x^2 - 4x - 1 = 0$, *plus* 2.

Rép. $x^2 - 16x + 19 = 0$.

477. *Si* x' *et* x'' *sont les racines de l'équation* $x^2 + px + q = 0$, *quelle est l'équation qui admet pour racines :*

1° x'^2 et x''^2

2° $\dfrac{x'}{x''}$ et $\dfrac{x''}{x'}$

3° $x' + ax''$ et $x'' + ax'$

4° $x' + \dfrac{1}{x'}$ et $x'' + \dfrac{1}{x''}$

5° $x' + \dfrac{1}{x''}$ et $x'' + \dfrac{1}{x'}$

6° $x' + x''$ et $x'^2 + x''^2$

7° $\dfrac{x'}{x''} + 1$ et $\dfrac{x''}{x'} + 1$

8° $x'(1 - x')$ et $x''(1 - x'')$

9° $x'x'' + \dfrac{x'}{x''}$ et $x''x' + \dfrac{x''}{x'}$

10° $\dfrac{x'}{x' - 1}$ et $\dfrac{x''}{x'' - 1}$.

Désignons par S la somme et par P le produit des racines de l'équation à former.

1° $S = x'^2 + x''^2 = p^2 - 2q$; $P = q^2$.

Rép. $x^2 - (p^2 - 2q)x + q^2 = 0$.

2° $S = \dfrac{x'^2 + x''^2}{x'x''} = \dfrac{p^2 - 2q}{q}$; $P = 1$.

Rép. $qx^2 - (p^2 - 2q)x + q = 0$.

3° $S = (a + 1)(x' + x'') = -(a + 1)p$;

$P = (1 + a^2)x'x'' + a(x'^2 + x''^2) = (1 + a^2)q + a(p^2 - 2q)$.

Rép. $x^2 + (a + 1)px + (1 + a^2)q + a(p^2 - 2q) = 0$.

4° $S = x' + x'' + \left(\dfrac{1}{x'} + \dfrac{1}{x''}\right) = -\dfrac{p}{q}(q + 1)$;

$P = \left(x' + \dfrac{1}{x'}\right)\left(x'' + \dfrac{1}{x''}\right) = \dfrac{1}{q}(p^2 + q^2 - 2q + 1)$.

Rép. $qx^2 + p(q + 1)x + p^2 + q^2 - 2q + 1 = 0$.

5° $S = x' + x'' + \dfrac{x' + x''}{x'x''} = -\dfrac{p}{q}(q + 1)$;

$P = \left(x' + \dfrac{1}{x''}\right)\left(x'' + \dfrac{1}{x'}\right) = \dfrac{1}{q}(q^2 + 2q + 1)$.

Rép. $qx^2 + p(q + 1)x + (q + 1)^2 = 0$.

6° $S = (x' + x'') + (x'^2 + x''^2) = p^2 - p - 2q$;

$P = (x' + x'')(x'^2 + x''^2) = -p(p^2 - 2q)$.

Rép. $x^2 + (p + 2q - p^2)x - p(p^2 - 2q) = 0$.

7° $S = \dfrac{x'^2 + x''^2}{x'x''} + 2 = \dfrac{p^2}{q}$; $P = \dfrac{p^2}{q}$.

Rép. $qx^2 - p^2x + p^2 = 0$.

8° $S = (x' + x'') - (x'^2 + x''^2) = 2q - p - p^2$;
$P = x'x''(1 - x')(1 - x'') = q(1 + p + q)$.

Rép. $x^2 + (p^2 + p - 2q)x + q(p + q + 1) = 0$.

9° $S = 2x'x'' + \dfrac{x'}{x''} + \dfrac{x''}{x'} = \dfrac{1}{q}(2q^2 + p^2 - 2q)$;

$$P = \left(x'x'' + \frac{x'}{x''}\right)\left(x''x' + \frac{x''}{x'}\right) = q^2 + p^2 - 2q + 1.$$

Rép. $qx^2 - (2q^2 + p^2 - 2q)x + q(q^2 + p^2 - 2q + 1) = 0$.

10° $S = \dfrac{x'(x'' - 1) + x''(x' - 1)}{(x' - 1)(x'' - 1)} = \dfrac{p + 2q}{p + q + 1}$;

$$P = \frac{x'x''}{(x' - 1)(x'' - 1)} = \frac{q}{p + q + 1}.$$

Rép. $(p + q + 1)x^2 - (p + 2q)x + q = 0$.

478. *L'équation* $ax^2 + bx + c = 0$ *a pour racines* x' *et* x'';

1° *Former l'équation qui admet pour racines* $x' + h$ *et* $x'' + h$.

2° *Pour quelle valeur de* h, *l'équation obtenue est-elle dépourvue de terme en* x?

1° L'équation cherchée est

$$ax^2 - (2ah - b)x + ah^2 - bh + c = 0.$$

2° Cette équation n'aura pas de terme en x, si on a

$$2ah - b = 0 \quad \text{ou} \quad h = \frac{b}{2a}.$$

479. *Former l'équation du second degré dont les racines satisfont aux relations suivantes :*

$$x'x'' + (x' + x'') - m = 0 \quad \textit{et} \quad x'x'' - m(x' + x'') + 1 = 0.$$

Conditions de possibilité.

Les deux équations données forment un système de deux équations linéaires en $x' + x''$ et $x'x''$.

a) Si $m \neq -1$, ce système donne

$$x' + x'' = 1; \quad x'x'' = m - 1.$$

L'équation cherchée est donc

$$x^2 - x + m - 1 = 0.$$

Elle admet des racines si on a

$$1 - 4(m - 1) \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad m \leqslant \frac{5}{4}.$$

b) Si $m = -1$, les relations proposées se réduisent à une seule

$$x'x'' + (x' + x'') + 1 = 0.$$

Désignons par q un nombre arbitraire et soit $x'x'' = q$. On aura $x' + x'' = -(q + 1)$ et l'équation cherchée sera

$$x^2 + (q + 1)x + q = 0.$$

Elle a des racines, quel que soit q, car son réalisant est

$$(q + 1)^2 - 4q = (q - 1)^2.$$

480. *Former une équation du second degré connaissant la somme* p *des racines et la somme* k² *des carrés des racines.*

On a le système

$$x' + x'' = p; \quad x'^2 + x''^2 = k^2.$$

La seconde équation peut s'écrire

$$(x' + x'')^2 - 2x'x'' = k^2; \quad \text{d'où} \quad x'x'' = \frac{1}{2}(p^2 - k^2).$$

L'équation cherchée est

$$2x^2 - 2px + p^2 - k^2 = 0.$$

Cette équation n'a de racines que si on a

$$p^2 - 2(p^2 - k^2) \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad p^2 \leqslant 2k^2.$$

481. *Dans l'équation* $x^2 - 3x + q = 0$, *déterminer* q *de manière que l'une des racines soit égale* : 1° *à* 2; 2° *à* -2; 3° *à* $-\frac{1}{3}$; 4° *à* 0.

1° Une racine est égale à 2, si on a

$$4 - 6 + q = 0 \quad \text{ou} \quad q = 2.$$

2° Une racine est égale à -2, si on a

$$4 + 6 + q = 0 \quad \text{ou} \quad q = -10.$$

3° Une racine est égale à $-\frac{1}{3}$, si on a

$$\frac{1}{9} + 1 + q = 0 \quad \text{ou} \quad q = -\frac{10}{9}.$$

4° Une racine est nulle si $q = 0$.

482. *Dans l'équation* $x^2 - px + 36 = 0$, *déterminer* p *de manière que* :

1° $x' = x''$, 3° $x'^2 + x''^2 = 184$,

2° $x' = -x''$, 4° $\dfrac{1}{x'} + \dfrac{1}{x''} = \dfrac{5}{12}$.

1° L'équation admet une racine double si on a :

$$\rho = p^2 - 144 = 0 \quad \text{ou} \quad p = \pm 12.$$

2° L'équation admet deux racines opposées, si on a :

$$\rho = p^2 - 144 > 0; \quad S = p = 0.$$

Ces deux relations en p sont incompatibles.

3° $x'^2 + x''^2 = 184$. — On doit avoir

$$\rho = p^2 - 144 \geqslant 0; \quad x'^2 + x''^2 = p^2 - 72 = 184.$$

La seconde relation donne $p = \pm 16$.

Ces valeurs de p conviennent, car elles vérifient la première relation.

4° $\dfrac{1}{x'} + \dfrac{1}{x''} = \dfrac{5}{12}$. — On doit avoir

$$\rho = p^2 - 144 \geqslant 0.$$

$$\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{x' + x''}{x'x''} = \frac{5}{12} \quad \text{ou} \quad \frac{p}{36} = \frac{5}{12}.$$

La seconde relation donne $p = 15$. Cette valeur de p vérifie la première relation.

483. *Fixer* q *dans* $x^2 - 5x + q = 0$ *pour que :*

1° $x' = \dfrac{1}{x''}$, 3° $x' = 2x''$,

2° $x' - x'' = 3$, 4° $2x' - x'' = 7$.

1° $x' = \dfrac{1}{x''}$. — On doit avoir

$$\rho = 25 - 4q \geqslant 0; \quad x'x'' = q = 1.$$

Les deux relations sont vérifiées par $q = 1$.

2° $x' - x'' = 3$. — Le système

$$x' - x'' = 3, \quad x' + x'' = 5$$

donne $x' = 4$; $x'' = 1$.

Alors $$q = x'x'' = 4.$$

3° $x' = 2x''$. — Le système

$$x' = 2x'', \quad x' + x'' = 5$$

donne $x' = \dfrac{10}{3}$; $x'' = \dfrac{5}{3}$.

Alors $$q = x'x'' = \frac{50}{9}.$$

4° $2x' - x'' = 7$. — Le système

$$2x' - x'' = 7, \quad x' + x'' = 5$$

donne $x' = 4$; $x'' = 1$.

Alors $$q = x'x'' = 4.$$

484. *Dans l'équation* $8x^2 - (m - 1)x + m - 7 = 0$, *déterminer* m *pour qu'on ait :*

1° $x' = x''$, 3° $x' = \dfrac{1}{x''}$,

2° $x' = -x''$, 4° $x' = -\dfrac{1}{x''}$.

1° L'équation admet deux racines égales si on a :

$$\rho = (m - 1)^2 - 32(m - 7) = m^2 - 34m + 225 = 0.$$

Rép. $m = 9$ ou 25.

2° L'équation admet deux racines opposées si on a :

$$\rho = m^2 - 34m + 225 > 0; \quad x' + x'' = \frac{m-1}{8} = 0.$$

Rép. $m = 1$.

3° L'équation admet deux racines inverses si on a :

$$\rho = m^2 - 34m + 225 \geqslant 0; \quad x'x'' = \frac{m-7}{8} = 1.$$

Rép. Pas de solution.

4° $x' = -\dfrac{1}{x''}$. — On doit avoir $x'x'' = \dfrac{m-7}{8} = -1.$

Rép. $m = -1$.

485. *Fixer* m *dans l'équation* $x^2 - (9 + m)x + 7m - 1 = 0$ *pour qu'on ait*

$$x' + x'' + x'x'' = (x' - x'')^2.$$

On a

$$x' + x'' + x'x'' = (x' + x'')^2 - 4x'x'',$$

ou

$$(9 + m) + (7m - 1) = (9 + m)^2 - 4(7m - 1),$$

ou

$$m^2 - 18m + 77 = 0.$$

Par suite, $m = 7$ ou 11.

Ces réponses conviennent, car elles rendent positif $m^2 - 10m + 85$, qui est le réalisant de l'équation proposée.

486. *Déterminer* m *dans l'équation* $3x^2 - 2x(m + 1) + m - 1 = 0$ *pour que*

$$9x'x''^2 + 3x'^3 + 9x''x'^2 + 3x''^3 = 3.$$

La relation donnée peut s'écrire

$$3(x' + x'')^3 = 3 \quad \text{ou} \quad x' + x'' = 1.$$

Par suite, $\dfrac{2(m+1)}{3} = 1$ ou $m = \dfrac{1}{2}$.

Cette réponse convient, car on peut vérifier qu'elle rend positif le réalisant de l'équation proposée.

487. *Déterminer* m *dans* $(2m - 1)x^2 + 2x(1 - m) + 3m = 0$ *pour que la somme des carrés des racines égale* 4.

On doit avoir

$$(x' + x'')^2 - 2x'x'' = \frac{4(1 - m)^2 - 6m(2m - 1)}{(2m - 1)^2} = 4,$$

ou

$$12m^2 - 7m = 0.$$

Cette équation donne $\quad m'' = 0, \quad m' = \frac{7}{12}.$

La réponse $m' = \frac{7}{12}$ est à écarter, car elle rend négatif le réalisant $-5m^2 + m + 1$ de l'équation proposée.

488. *Déterminer* m *dans l'équation* $(14m - 1)x^2 - 2mx + 1 = 0$ *pour que* $\quad 3x'x'' + x'' = 2x'.$

De la relation donnée on tire, en ajoutant x' aux deux membres,

$$3x' = 3x'x'' + (x' + x'') = \frac{3}{14m - 1} + \frac{2m}{14m - 1} = \frac{2m + 3}{14m - 1}.$$

Par suite, $\quad x' = \frac{2m + 3}{3(14m - 1)}.$ (1)

La relation $\quad x' + x'' = \frac{2m}{14m - 1}$

donne alors $\quad x'' = \frac{4m - 3}{3(14m - 1)}.$ (2)

Remplaçons x' et x'' par leur valeur dans la relation

$$x'x'' = \frac{1}{14m - 1}.$$

Il vient ainsi $\quad 8m^2 - 120m = 0.$
Cette équation donne $\quad m'' = 0, \quad m' = 15.$

Ces deux valeurs de m conviennent; les égalités (1) et (2) permettent de calculer les racines qui correspondent à chacune de ces valeurs.

489. *Déterminer* a *dans l'équation* $4x^2 - 15x + 4a^3 = 0$ *pour qu'on ait :* $\quad 1^o\ x' = x''^2; \qquad 2^o\ \frac{x'}{x''} + \frac{x''}{x'} = -\frac{169}{80}.$

1° Si $x' = x''^2$, la relation $x'x'' = a^3$ devient

$$x''^3 = a^3 \quad \text{ou} \quad x'' = a.$$

Remplaçons x' et x'' par leur valeur dans la relation

$$x' + x'' = \frac{15}{4};$$

nous aurons $\quad a^2 + a = \frac{15}{4} \quad$ ou $\quad 4a^2 + 4a - 15 = 0.$

Par suite, $\quad a' = \frac{3}{2}, \quad a'' = -\frac{5}{2}.$

Pour $a = \frac{3}{2}$, on a $x' = \frac{9}{4}, \quad x'' = \frac{3}{2}.$

Pour $a = -\frac{5}{2}$, on a $x' = \frac{25}{4}, \quad x'' = -\frac{5}{2}.$

2° La relation $\dfrac{x'}{x''} + \dfrac{x''}{x'} = -\dfrac{169}{80}$

donne $$\frac{x'^2 + x''^2}{x'x''} = \frac{225 - 32a^3}{16a^3} = -\frac{169}{80}.$$

On en déduit $a = -5$.

Cette réponse convient, car pour $a = -5$, l'équation proposée devient $4x^2 - 15x - 500 = 0$; et cette équation admet des racines différentes de zéro.

490. *Déterminer* m *de manière que la somme des carrés des racines de l'équation* $x^2 + (m - 2)x - (m + 3) = 0$ *soit égale à* k.

Quelle est la plus petite valeur de k *pour que le problème soit possible?*

La relation $x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x'' = k$

donne $$(m - 2)^2 + 2(m + 3) = k, \qquad (1)$$
ou $$m^2 - 2m - k + 10 = 0.$$

Cette équation en m n'a de racines que si l'on a
$$1 - (10 - k) \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad k \geqslant 9.$$

Si $k \geqslant 9$, l'équation (1) donne deux valeurs pour m,
$$m = 1 \pm \sqrt{k - 9}.$$

Ces réponses conviennent, car le réalisant de l'équation proposée est $m^2 + 16$, et il est positif, quel que soit m.

La plus petite valeur acceptable de k est 9. La valeur correspondante de m est 1.

491. *Dans* $(m + 2n)x^2 - 2x(4m + 5n) + 20n + 3 = 0$, *déterminer* m *et* n *pour que* $x' + x'' = 5{,}75$ *et* $x'x'' = 7{,}875$.

On doit avoir
$$\frac{2(4m + 5n)}{m + 2n} = \frac{23}{4} \quad \text{ou} \quad 3m - 2n = 0;$$
$$\frac{20n + 3}{m + 2n} = \frac{63}{8} \quad \text{ou} \quad 63m - 34n = 24.$$

Ce système donne $m = 2$, $n = 3$. On peut vérifier que cette réponse convient.

492. *Dans* $x^2 + px + q = 0$, *déterminer* p *et* q *pour que :*

1° $x'^2 + x''^2 = 5x'x''$ *et* $x'x'' = 5(x' + x'')$.

2° $x' - x'' = 4$ *et* $x'^3 - x''^3 = 208$.

3° $x' = p$; $x'' = q$.

1° Les deux relations
$$x'^2 + x''^2 = 5x'x'', \quad x'x'' = 5(x' + x'')$$
conduisent au système
$$p^2 - 7q = 0; \quad q + 5p = 0.$$

En éliminant q, on obtient l'équation $p^2 + 35p = 0$.

a) Si $p = 0$, on trouve $q = 0$ et l'équation cherchée est $x^2 = 0$.

b) Si $p = -35$, on trouve $q = 175$ et l'équation cherchée est

$$x^2 + 35x + 175 = 0,$$

qui admet effectivement deux racines.

2° En supposant que x' désigne la plus grande des deux racines, on a :

$$x' - x'' = \sqrt{p^2 - 4q} = 4 \quad \text{ou} \quad p^2 - 4q = 16.$$

$$x'^3 - x''^3 = (x' - x'')\,[(x' + x'')^2 - x'x''] = 4(p^2 - q) = 208.$$

Ce système donne $p = \pm 8$, $q = 12$.

Ces réponses conviennent, car elles vérifient la relation $p^2 > 4q$.

3° La somme des racines étant $-p$ et leur produit q, on a le système :

$$p + q = -p; \quad pq = q.$$

Ce système donne

$$p = 0, \quad q = 0 \quad \text{et} \quad p = 1, \quad q = -2.$$

Les équations demandées sont

$$x^2 = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + x - 2 = 0.$$

493. *Calculer les coefficients et les racines de l'équation* $x^2 + px + q = 0$, *sachant que ces racines augmentées de* 1 *deviennent celles de l'équation*

$$x^2 - p^2x + pq = 0.$$

Soient x' et x'' les racines de l'équation $x^2 + px + q = 0$. On a

$$(x' + 1) + (x'' + 1) = -p + 2 = p^2; \tag{1}$$

$$(x' + 1)(x'' + 1) = q - p + 1 = pq. \tag{2}$$

L'équation (1) donne $p'' = -2$; $p' = 1$.

a) Si $p = -2$, l'équation (2) donne $q = -1$. L'équation donnée est alors $x^2 - 2x - 1 = 0$; ses racines sont $1 \pm \sqrt{2}$.

b) Si $p = 1$, l'équation (2) est indéterminée et q peut prendre des valeurs arbitraires. L'équation $x^2 + px + q = 0$ devient alors

$$x^2 + x + q = 0.$$

Cette dernière équation a des racines si l'on a

$$1 - 4q \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad q \leqslant \frac{1}{4}.$$

494. *Déterminer les coefficients de l'équation* $x^2 + px + q = 0$, *sachant que le rapport de ses racines est égal à* p *et leur différence à* $(n^2 - 1)q$. (p, q, n *sont différents de zéro).*

Les équations $\dfrac{x'}{x''} = p$, $x' - x'' = (n^2 - 1)q$,

donnent, en supposant $p \neq 1$,

$$x' = \frac{(n^2 - 1)pq}{p - 1}; \quad x'' = \frac{(n^2 - 1)q}{p - 1}.$$

Pour calculer p et q, on a alors le système :

$$x' + x'' = \frac{q(n^2 - 1)(p + 1)}{p - 1} = -p; \tag{1}$$

$$x'x'' = \frac{(n^2 - 1)^2 pq^2}{(p - 1)^2} = q. \tag{2}$$

En supposant $n^2 - 1 \neq 0$, l'équation (2) donne

$$q = \frac{(p - 1)^2}{p(n^2 - 1)^2}.$$

Après avoir remplacé q par sa valeur dans l'équation (1), on trouve ensuite

$$p = \pm \frac{1}{n}.$$

Si $p = \frac{1}{n}$, on a $q = \frac{1}{n(n + 1)^2}$;

Si $p = -\frac{1}{n}$, on a $q = \frac{-1}{n(n - 1)^2}$.

Ce sont les deux solutions générales du problème; chacune vérifie la relation $p^2 - 4q > 0$. Examinons les cas particuliers.

1° $p = 1$; $n^2 - 1 \neq 0$. — Le système

$$\frac{x'}{x''} = 1, \quad x' - x'' = (n^2 - 1)q$$

donne $x' = x''$, puis $q = 0$.

Cette solution est inacceptable, car les racines de l'équation $x^2 + x = 0$ ne sont pas égales.

2° $p \neq 1$; $n^2 - 1 = 0$. — Le système correspondant

$$\frac{x'}{x''} = p \neq 1, \quad x' - x'' = 0$$

est impossible.

3° $p = 1$; $n^2 - 1 = 0$. — Le système

$$\frac{x'}{x''} = 1, \quad x' - x'' = 0$$

donne $x' = x''$.

L'équation $x^2 + px + q = 0$ devient dans ce cas

$$x^2 + x + q = 0.$$

Pour qu'elle admette des racines égales, on doit avoir

$$1 - 4q = 0 \quad \text{ou} \quad q = 0{,}25.$$

495. *L'équation* $x^2 + px + q = 0$ *admet comme racines deux nombres entiers consécutifs. Montrer que l'on a* $p^2 - 4q - 1 = 0$.

La différence entre deux nombres consécutifs est 1. La différence entre les racines de l'équation $x^2 + px + q = 0$ est $\sqrt{p^2 - 4q}$. On a donc la relation

$$\sqrt{p^2 - 4q} = 1 \quad \text{ou} \quad p^2 - 4q = 1.$$

496. *Les racines* x' *et* x'' *de l'équation* $ax^2 + bx + c = 0$ *sont différentes de zéro et* $x' > x''$. *A quelle relation doivent satisfaire les coefficients de l'équation si l'on a :*

1° $\dfrac{x'}{x''} = \dfrac{m}{n}$. — On doit supposer $m \neq n$, car on a $x' > x''$; la relation proposée donne alors

$$\frac{x' + x''}{x' - x''} = \frac{m+n}{m-n} \quad \text{ou} \quad \frac{-b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} = \frac{m+n}{m-n};$$

ou encore, $$(m - n)^2 b^2 = (m + n)^2 (b^2 - 4ac).$$

2° $x'^2 - x''^2 = m$. — Cette relation donne

$$(x' + x'')(x' - x'') = \frac{-b\sqrt{b^2 - 4ac}}{a^2} = m$$

ou $$b^2(b^2 - 4ac) = a^4 m^2.$$

3° $x' - x'' = \dfrac{1}{x'} + \dfrac{1}{x''}$. — Cette relation peut s'écrire

$$x' - x'' = \frac{x' + x''}{x'x''} \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} = -\frac{b}{c};$$

ou encore, $$c^2(b^2 - 4ac) = a^2 b^2.$$

4° $2(x'^3 - x''^3) = 7(x'^2x'' - x'x''^2)$. — Cette relation peut s'écrire

$$2(x' - x'')\,[(x' + x'')^2 - x'x''] = 7x'x''(x' - x'');$$

ou encore, $x' - x''$ étant différent de zéro,

$$2[(x' + x'')^2 - x'x''] = 7x'x''.$$

On a donc $$2(x' + x'')^2 = 9x'x'' \quad \text{ou} \quad 2b^2 = 9ac.$$

497. *Étant donnée l'équation* $ax^2 + bx + c = 0$, *montrer que si* $a + b = c$, *on a la relation* $(1 - x')^2.(1 - x'')^2 = 4x'^2x''^2$.

En effet, la relation proposée peut s'écrire

$$[1 - (x' + x'') + x'x'']^2 = (2x'x'')^2;$$

ou, en remplaçant $x' + x''$ et $x'x''$ par leur valeur,

$$\left(\frac{a + b + c}{a}\right)^2 = \left(\frac{2c}{a}\right)^2;$$

ce qui est une identité, si $a + b = c$.

498. *Le trinôme* $ax^2 + bx + c$ *étant donné, déterminer* m *pour que le polynôme* $ax^2 + bx + c + m(x^2 + 1)$ *ait deux racines égales.*
Démontrer que l'équation en m *à laquelle on est conduit, a des racines distinctes.*

a) Le polynôme proposé peut s'écrire

$$x^2(a + m) + bx + (c + m).$$

Cette expression est un trinôme du second degré quand on a $m \neq -a$. Les deux racines sont égales quand on a en plus

$$b^2 - 4(a + m)(c + m) = 0 \quad \text{ou} \quad 4m^2 + 4(a + c)m + 4ac - b^2 = 0. \qquad (1)$$

b) Le réalisant de cette équation en m est

$$\rho = 4[(a + c)^2 - 4ac + b^2] = 4[(a - c)^2 + b^2].$$

Mais la condition $m \neq -a$ exige

$$4a^2 - 4a(a + c) + 4ac - b^2 = -b^2 \neq 0 \quad \text{ou} \quad b \neq 0.$$

Quand cette condition est remplie, on a $\rho > 0$ et l'équation (1) a deux racines distinctes.

499. *Trouver la condition pour que* $(a + bx)^2 + (a' + b'x)^2$ *soit un carré parfait. Montrer que si* $(a + bx)^2 + (a' + b'x)^2$ *et* $(a+cx)^2 + (a' + c'x)^2$ *sont des carrés parfaits, il en est de même de* $(b + cx)^2 + (b' + c'x)^2$.

Nous supposons que a, b, c, a', b', c' ne sont pas nuls.

L'expression $(a + bx)^2 + (a' + b'x)^2$ peut s'écrire

$$(b^2 + b'^2)x^2 + 2(ab + a'b')x + a^2 + a'^2. \qquad (1)$$

Le coefficient de x^2 est positif. Le trinôme (1) est donc un carré parfait si l'on a

$$(ab + a'b')^2 - (a^2 + a'^2)(b^2 + b'^2) = -(ab' - ba')^2 = 0,$$

ou

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}. \qquad (1)$$

Cette condition remplie, l'expression donnée prend la forme

$$\left(x\sqrt{b^2 + b'^2} + \frac{ab + a'b'}{\sqrt{b^2 + b'^2}}\right)^2.$$

Si la deuxième expression donnée est un carré, on a

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}. \qquad (2)$$

Or les relations (1) et (2) entraînent la relation

$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'},$$

qui exprime précisément que la troisième expression est aussi un carré parfait.

500. *Démontrer que les polynômes suivants sont des carrés.*

1° $a^2x^2 - (4a^2 + 2a)x + 4a^2 + 4a + 1$.

2° $9x^2 - 30xy + 25y^2 - 24x + 40y + 16$.

1° Le réalisant de l'équation du second degré obtenue en égalant le premier polynôme à zéro, est

$$(2a^2 + a)^2 - a^2(4a^2 + 4a + 1) = 0.$$

Le polynôme est donc égal à

$$a^2\left(x - \frac{2a + 1}{a}\right)^2 = [ax - (2a + 1)]^2.$$

2° Le polynôme $9x^2 - 30xy + 25y^2 - 24x + 40y + 16$ peut s'écrire

$$9x^2 - 2x(15y + 12) + 25y^2 + 40y + 16.$$

Il a ainsi la forme d'un trinôme du second degré dont le réalisant est nul. Par suite, il est égal à

$$9\left(x - \frac{15y + 12}{9}\right)^2 = (3x - 5y - 4)^2.$$

501. *On donne les équations* $x^2 + ax + 1 = 0$ *et* $x^2 + x + a = 0$. *Déterminer* a *de manière que les deux équations aient une racine commune.*

1re MÉTHODE. — La condition générale pour que deux équations du second degré aient une racine commune est

$$R \equiv (ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb') = 0.$$

Cette condition devient ici

$$R = (a - 1)^2 - (1 - a)(a^2 - 1) = 0$$

ou
$$(a - 1)^2 (a + 2) = 0. \tag{1}$$

D'où
$$a = 1 \quad \text{ou} \quad a = -2.$$

Pour $a = 1$, les deux équations deviennent

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

Cette équation n'a pas de racines.

Pour $a = -2$, les deux équations deviennent

$$x^2 - 2x + 1 = 0; \quad x^2 + x - 2 = 0.$$

La racine commune est 1.

2e MÉTHODE. — Soit x' la racine commune. On a

$$x'^2 + ax' + 1 = 0; \quad x'^2 + x' + a = 0.$$

On peut considérer ces deux équations comme formant un système de deux équations du premier degré en x'^2 et x'. Le déterminant de ce système est $1 - a$.

Si $a \neq 1$, le système donne

$$x'^2 = \frac{a^2 - 1}{1 - a} = -(a + 1); \quad x' = \frac{1 - a}{1 - a} = 1.$$

On doit avoir

$$-(a+1) = 1^2; \quad \text{d'où} \quad a = -2.$$

On voit que pour $a = -2$, les deux équations ont une racine commune qui est 1.

Si $a = 1$, les deux équations se réduisent à l'équation unique

$$x^2 + x + 1 = 0,$$

qui n'a pas de racines.

Les mêmes méthodes sont applicables aux exercices suivants.

502. *Même question pour les équations :*

1° $x^2 - 7x + a + 4 = 0$ et $x^2 - 8x + a + 8 = 0$

2° $x^2 - ax + a + 4 = 0$ et $x^2 - (a+4)x + 4(a+4) = 0$

3° $x^2 - 2(a+1)x + a = 0$ et $x^2 - 2ax - 3 = 0$

4° $3x^2 - (a-1)x + a + 1 = 0$

et $2x^2 - (2a-1)x + 2(a+1) = 0.$

Rép. 1° Pour $a = 8$, la racine commune est 4.

2° Pour $a = -4$, » » est 0;

pour $a = \dfrac{52}{3}$, » » est 16.

3° Pour $a = -1$, » » est 1.

4° Pour $a = -1$, » » est 0;

pour $a = -\dfrac{3}{4}$, » » est $-\dfrac{1}{4}$.

503. *On donne les deux équations*

$$x^2 - kx + 4 = 0 \quad \textit{et} \quad 8x^2 + 4x - k = 0.$$

On demande de déterminer k *pour qu'une racine de la première soit l'inverse d'une racine de la deuxième.*

L'équation aux inverses des racines de l'équation $8x^2 + 4x - k = 0$ est

$$-kx^2 + 4x + 8 = 0 \quad \text{ou} \quad kx^2 - 4x - 8 = 0.$$

La question revient à déterminer k pour que les équations

$$x^2 - kx + 4 = 0 \quad \text{et} \quad kx^2 - 4x - 8 = 0$$

aient une racine commune.

Rép. Pour $k = 4$, la première équation admet la racine $x = 2$, et la seconde, la racine $x = 0{,}5$.

504. *On donne les deux équations*

$$x^2 - 5x + k = 0 \quad \textit{et} \quad x^2 - 7x + 2k = 0.$$

On demande de déterminer k *pour qu'une racine de la seconde soit double d'une racine de la première.*

L'équation dont les racines sont doubles de celle de l'équation

$$x^2 - 5x + k = 0, \quad \text{est} \quad x^2 - 10x + 4k = 0.$$

La question revient à déterminer k pour que les équations

$$x^2 - 10x + 4k = 0 \quad \text{et} \quad x^2 - 7x + 2k = 0$$

aient une racine commune.

Rép. Pour $k = 6$, la première équation admet la racine $x = 2$, et la seconde, la racine $x = 4$.

Pour $k = 0$. chacune des équations données est vérifiée pour $x = 0$.

505. *On demande de déterminer* a *et* b *pour que les équations suivantes aient deux racines communes.*

1° $2x^2 + x - 6 = 0$ et $4x^2 + bx + 4a - 2b = 0$.

On doit avoir

$$\frac{4}{2} = \frac{b}{1} = \frac{4a - 2b}{-6}.$$

Ce système donne $a = -2$, $b = 2$.

Les racines communes sont -2 et $1{,}5$.

2° $(2a + b)x^2 - (6a + 3)x - (5b - 1) = 0$

et $4x^2 - (2a + 1)x - 3 = 0$.

On doit avoir

$$\frac{2a + b}{4} = \frac{6a + 3}{2a + 1} = \frac{5b - 1}{3}.$$

a) Si $2a + 1 \neq 0$, ce système donne $a = 5$, $b = 2$.

Les équations données se ramènent à l'équation $4x^2 - 11x - 3 = 0$, dont les racines sont $-0{,}25$ et 3.

b) Si $2a + 1 = 0$, les deux équations deviennent

$$(b - 1)x^2 - (5b - 1) = 0 \quad \text{et} \quad 4x^2 - 3 = 0.$$

On doit avoir $\dfrac{b - 1}{4} = \dfrac{5b - 1}{3}.$

Cette équation donne $b = \dfrac{1}{17}.$

Les deux équations se ramènent à l'équation $4x^2 - 3 = 0$, dont les racines sont $\pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

CHAPITRE XVI

Équations bicarrées et radicaux doubles.

506. *Résoudre les équations suivantes :*

1° $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ Rép. ± 1; ± 2.
2° $x^4 + 36 = 13x^2$ » ± 2; ± 3.
3° $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ » ± 2; $\pm \sqrt{3}$.
4° $4x^4 - 73x^2 + 144 = 0$ » $\pm 1{,}5$; ± 4.
5° $x^4 + 29x^2 + 100 = 0$ Pas de racines.
6° $x^4 - 5x^2 = 36$ Rép. ± 3.
7° $9x^4 - 40x^2 + 16 = 0$ » $\pm \frac{2}{3}$; ± 2.
8° $x^4 + 42 = 13x^2$ » $\pm \sqrt{6}$; $\pm \sqrt{7}$
9° $x^4 + 9 - 10x^2 = 0$ » ± 1; ± 3.
10° $5x^4 - 7x^2 + 10 = 0$ Pas de racines.
11° $2x^4 - 14x^2 + 24 = 0$ Rép. ± 2; $\pm \sqrt{3}$.
12° $x^4 + 15x^2 - 16 = 0$ » ± 1.
13° $16x^4 - 8a^4x^2 + a^8 = 0$ » $\pm \frac{a^2}{2}$.
14° $x^4 + 4abx^2 - (a^2 - b^2)^2 = 0$ » $\pm (a - b)$.
15° $a^2x^4 - (1 + a^2b^2)x^2 + b^2 = 0$ » $\pm \frac{1}{a}$; $\pm b$.
16° $x^4 - a(a + b)x^2 + a^3b = 0$
Les racines de la résolvante sont a^2 et ab.
Si $ab > 0$, l'équation a quatre racines : $\pm a, \pm \sqrt{ab}$.
Si $ab < 0$, l'équation a deux racines : $\pm a$.

507. *Décomposer en facteurs les trinômes suivants :*

1° $9x^4 - 10x^2 + 1 = (x - 1)(x + 1)(3x - 1)(3x + 1)$
2° $3x^4 - 75x^2 + 432 = 3(x - 3)(x + 3)(x - 4)(x + 4)$
3° $x^4 - 2x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 1)$
4° $x^4 - 8x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)(x^2 + 1)$
5° $25x^4 - 104x^2 + 16 = (x - 2)(x + 2)(5x - 2)(5x + 2)$
6° $2x^4 - 4x^2 + 3 = 2\left((x^2 - 1)^2 + \frac{1}{2}\right) = 2(x^2 - 1)^2 + 1$
7° $x^4 + 4x^2 + 3 = (x^2 + 1)(x^2 + 3)$
8° $x^4 - 18x^2 + 81 = (x - 3)^2 (x + 3)^2$

9° $16x^4 - 17x^2 + 1 = (x - 1)(x + 1)(4x - 1)(4x + 1)$

10° $3x^4 + 6x^2 + 10 = 3\left((x^2 + 1)^2 + \frac{7}{3}\right) = 3(x^2 + 1)^2 + 7$

11° $4x^4 - 17a^2x^2 + 4a^4 = (x - 2a)(x + 2a)(2x - a)(2x + a)$

12° $a^2b^2x^4 - (a^4 + b^4)x^2 + a^2b^2 = (bx - a)(bx + a)(ax - b)(ax + b).$

508. *Former les équations bicarrées ayant pour racines :*

1° $\pm\sqrt{5}$ et $\pm\frac{3}{2}$. — Les racines de la résolvante sont 5 et 2,25.

La résolvante est donc $y^2 - \frac{29}{4}y + \frac{45}{4} = 0.$

L'équation bicarrée est $4x^4 - 29x^2 + 45 = 0.$

2° $\pm(2 \pm \sqrt{3})$. Rép. $x^4 - 14x^2 + 1 = 0$

3° ± 1 et $\pm\sqrt{3}$. » $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

4° ± 6 et $\pm\frac{7}{3}$. » $9x^4 - 373x^2 + 1764 = 0$

5° $\pm(\sqrt{3} \pm \sqrt{2})$. » $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$

6° $\pm a$ et $\pm\sqrt{a}$. » $x^4 - a(a + 1)x^2 + a^3 = 0.$

509. *Transformer les radicaux suivants :*

1° $\sqrt{6 - \sqrt{20}} = \sqrt{5} - 1$

2° $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

3° $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$

4° $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} + 2$

5° $\sqrt{5 - \sqrt{21}} = \frac{1}{2}(\sqrt{14} - \sqrt{6})$

6° $\sqrt{16 + 2\sqrt{55}} = \sqrt{11} + \sqrt{5}$

7° $\sqrt{\frac{1}{6}(7 + \sqrt{13})} = \frac{1}{6}(\sqrt{39} + \sqrt{3})$

8° $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1$

9° $\sqrt{28 - 10\sqrt{3}} = 5 - \sqrt{3}$

10° $\sqrt{28 + 5\sqrt{12}} = 5 + \sqrt{3}$

11° $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$

12° $\sqrt{33 + 20\sqrt{2}} = 5 + 2\sqrt{2}.$

510. *Transformer les radicaux suivants :*

1° $\sqrt{a + b - 2\sqrt{ab}}.$

On a $A = a + b, \quad B = 4ab.$

A et B ne sont positifs que si $a > 0$ et $b > 0$.

On a $A^2 - B = (a - b)^2 = C^2.$

Si $a > b$, on a $C = a - b$ et le radical double est égal à

$$\sqrt{a} - \sqrt{b}.$$

Si $a < b$, on a $C = b - a$ et le radical double est égal à

$$\sqrt{b} - \sqrt{a}.$$

2° $\sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}.$ — On trouve d'une façon analogue

$$\sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b};$$

pourvu que a et b représentent des nombres positifs.

3° $\sqrt{b - \sqrt{b^2 - 4a^2}}.$

On a $A = b; \quad B = b^2 - 4a^2.$

A et B ne sont positifs que si l'on a

$$b > 0; \quad b^2 > 4a^2.$$

On a $A^2 - B = b^2 - (b^2 - 4a^2) = 4a^2.$

Si $a > 0$, on a $C = 2a$ et

$$\sqrt{b - \sqrt{b^2 - 4a^2}} = \sqrt{\frac{b + 2a}{2}} - \sqrt{\frac{b - 2a}{2}} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2(b+2a)} - \sqrt{2(b-2a)}\right]$$

Si $a < 0$, on a $C = -2a$ et

$$\sqrt{b - \sqrt{b^2 - 4a^2}} = \sqrt{\frac{b - 2a}{2}} - \sqrt{\frac{b + 2a}{2}} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2(b-2a)} - \sqrt{2(b+2a)}\right]$$

4° $\sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}}.$

On a $A = x, \quad B = 4(x - 1).$

A et B ne sont positifs que si x est supérieur à 1.

On a $A^2 - B = (x - 2)^2 = C^2.$

Si $x > 2$, on a $C = x - 2$ et

$$\sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = \sqrt{x - 1} - 1.$$

Si x est compris entre 1 et 2, on a $C = 2 - x$ et

$$\sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = 1 - \sqrt{x - 1}.$$

5° $\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{c}{2}\sqrt{a^2 - c^2}}.$ — On doit avoir $a^2 > c^2$.

1er *cas* : $c > 0$. — Alors $\frac{c}{2}\sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{\frac{c^2}{4}(a^2 - c^2)}$.

On a $A = \frac{a^2}{4}$; $B = \frac{c^2}{4}(a^2 - c^2)$. Ils sont positifs.

$$\frac{a^4}{16} - \frac{c^2}{4}(a^2 - c^2) = \left(\frac{a^2 - 2c^2}{4}\right)^2 = C^2.$$

a) Si $a^2 > 2c^2$, on a $C = \frac{a^2 - 2c^2}{4}$ et le radical double vaut

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2 - c^2} + \frac{c}{2}.$$

b) Si $a^2 < 2c^2$, on a $C = \frac{2c^2 - a^2}{4}$ et le radical double a encore la même valeur.

2e *cas* : $c < 0$. — Alors $\frac{a^2}{4} + \frac{c}{2}\sqrt{a^2 - c^2} = \frac{a^2}{4} - \sqrt{\frac{c^2}{4}(a^2 - c^2)}$.
On a encore

$$C^2 = \left(\frac{a^2 - 2c^2}{4}\right)^2.$$

a) Si $a^2 > 2c^2$, on a $C = \frac{a^2 - 2c^2}{4}$ et le radical double est égal à

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2 - c^2} - \frac{1}{2}\sqrt{c^2} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - c^2} + \frac{c}{2}.$$

b) Si $a^2 < 2c^2$, on a $C = \frac{2c^2 - a^2}{4}$ et le radical double est égal à

$$\frac{1}{2}\sqrt{c^2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - c^2} \quad \text{ou} \quad -\frac{c}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - c^2}.$$

6° $\sqrt{a^2 + b + 2a\sqrt{b}}$. — On doit avoir $b > 0$.
En raisonnant comme pour l'exercice précédent, on trouve

$$\sqrt{a^2 + b + 2a\sqrt{b}} = a + \sqrt{b},$$

excepté quand on a $a < 0$; $a^2 > b$.
Dans ce dernier cas, on trouve

$$\sqrt{a^2 + b + 2a\sqrt{b}} = -a - \sqrt{b}.$$

7° $\sqrt{2a - 2\sqrt{a^2 - b^2}}$. — On doit avoir $a > 0$; $a^2 > b^2$.
On a $A = 2a$; $B = 4(a^2 - b^2)$; $C^2 = 4b^2$.
Si $b > 0$, on a $C = 2b$ et le radical double est égal à

$$\sqrt{a + b} - \sqrt{a - b}.$$

Si $b < 0$, on a $C = -2b$ et le radical double est égal à

$$\sqrt{a-b} - \sqrt{a+b}.$$

8° $\sqrt{x + xy - 2x\sqrt{y}}$. — On doit avoir $y > 0$; $x + xy > 0$. Ces deux conditions entraînent $x > 0$ et on a

$$\sqrt{x + xy - 2x\sqrt{y}} = \sqrt{x + xy - \sqrt{4x^2y}}.$$

On a $A = x + xy$; $B = 4x^2y$; $C^2 = (x - xy)^2$.

Si $y < 1$, on aura $x - xy > 0$ et $C = x - xy$. Par suite,

$$\sqrt{x + xy - 2x\sqrt{y}} = \sqrt{x} - \sqrt{xy}.$$

Si $y > 1$, on aura $x - xy < 0$ et $C = xy - x$. Par suite,

$$\sqrt{x + xy - 2x\sqrt{y}} = \sqrt{xy} - \sqrt{x}.$$

9° $X = \sqrt{25a^2 + 4a^2b - 20a^2\sqrt{b}}$.

On doit avoir $b > 0$ ce qui entraîne $25a^2 + 4a^2b > 0$.

Comme $X = \sqrt{25a^2 + 4a^2b - \sqrt{400a^4b}}$,

on a $A = 25a^2 + 4a^2b$; $B = 400a^4b$; $C^2 = (25a^2 - 4a^2b)^2$.

I. Si $25a^2 - 4a^2b > 0$ ou $b < \frac{25}{4}$, on a $C = 25a^2 - 4a^2b$ et

$$X = \sqrt{25a^2} - \sqrt{4a^2b}.$$

Si $a > 0$, il vient $X = 5a - 2a\sqrt{b}$.

Si $a < 0$, il vient $X = -5a + 2a\sqrt{b}$.

II. Si $b > \frac{25}{4}$, on a $C = 4a^2b - 25a^2$ et

$$X = \sqrt{4a^2b} - \sqrt{25a^2}.$$

Si $a > 0$, il vient $X = 2a\sqrt{b} - 5a$.

Si $a < 0$, il vient $X = -2a\sqrt{b} + 5a$.

10° $X = \sqrt{(x+y)^2 - 4(x-y)\sqrt{xy}}$. — On doit avoir $xy > 0$.

I. Si $x > y$, on a

$$X = \sqrt{(x+y)^2 - \sqrt{16(x-y)^2xy}}.$$

Alors $A = (x+y)^2$; $B = 16(x-y)^2xy$; $C^2 = (x^2 - 6xy + y^2)^2$.

Si $x^2 - 6xy + y^2 > 0$, on a $C = x^2 - 6xy + y^2$ et

$$X = x - y - 2\sqrt{xy}.$$

Si $x^2 - 6xy + y^2 < 0$, on a $C = -x^2 + 6xy - y^2$ et

$$X = 2\sqrt{xy} - (x - y).$$

II. Si $x < y$, on a

$$X = \sqrt{(x+y)^2 + \sqrt{16(x-y)^2xy}}.$$

On a encore $C^2 = (x^2 - 6xy + y^2)^2$.

Si $x^2 - 6xy + y^2 > 0$, il vient

$$X = -(x - y) + 2\sqrt{xy}.$$

Si $x^2 - 6xy + y^2 < 0$, il vient

$$X = 2\sqrt{xy} - (x - y).$$

511. *Montrer à priori que les racines des équations bicarrées suivantes peuvent être transformées en une somme ou une différence de deux radicaux simples; puis calculer ces racines.*

1° $x^4 - 6x^2 + 4 = 0$.

Cette équation admettra quatre racines et chacune de celles-ci pourra être décomposée en une somme ou une différence de deux radicaux simples, si sa résolvante admet deux racines irrationnelles positives dont le produit est un carré parfait.

Cette résolvante est $y^2 - 6y + 4 = 0$.

Son réalisant est égal à 5; elle admet donc deux racines irrationnelles. Le produit de ces racines est 4 et leur somme, 6; par suite, les deux racines sont positives et leur produit est un carré parfait. Les racines de la résolvante satisfont donc aux conditions voulues.

Les racines de l'équation bicarrée sont

$$\pm\sqrt{3 \pm \sqrt{5}} \quad \text{ou} \quad \pm\frac{1}{2}(\sqrt{10} \pm \sqrt{2}).$$

2° $3x^4 - 20x^2 + 27 = 0$.

On a (voir 1°) :

$$\rho = 19; \quad S = \frac{20}{3}; \quad P = 9.$$

Les racines de l'équation bicarrée sont

$$\pm\sqrt{\frac{10}{3} \pm \sqrt{\frac{19}{9}}} \quad \text{ou} \quad \pm\frac{1}{6}(\sqrt{114} \pm \sqrt{6}).$$

3° $3x^4 - 42x^2 + 75 = 0$ ou $x^4 - 14x^2 + 25 = 0$.

On a (voir 1°) : $\rho = 24$; $S = 14$; $P = 25$.

Les racines de l'équation bicarrée sont

$$\pm\sqrt{7 \pm \sqrt{24}} \quad \text{ou} \quad \pm(\sqrt{6} \pm 1).$$

4° $2x^4 - 17x^2 + 18 = 0$.

On a (voir 1°) :

$$\rho = 145; \quad S = \frac{17}{2}; \quad P = 9.$$

Les racines de l'équation bicarrée sont

$$\pm\sqrt{\frac{1}{4}(17 \pm \sqrt{145})} \quad \text{ou} \quad \pm\frac{1}{4}(\sqrt{58} \pm \sqrt{10}).$$

5° $x^4 - 2(a + b)x^2 + (a - b)^2 = 0;\quad a > b > 0.$

On a (voir 1°) :

$$\rho = 4ab > 0;\quad S = 2(a + b) > 0;\quad P = (a - b)^2.$$

Les racines de l'équation bicarrée sont

$$\pm\sqrt{a + b \pm \sqrt{4ab}},\quad \text{ou}\quad \pm(\sqrt{a} \pm \sqrt{b}).$$

6° $a^2x^4 - 2b^2x^2 + c^2 = 0;\quad a > 0;\quad c > 0;\quad b^2 > ac.$

On a (voir 1°) :

$$\rho = b^4 - a^2c^2 > 0;\quad S = \frac{2b^2}{a^2};\quad P = \frac{c^2}{a^2}.$$

Les racines de l'équation bicarrée sont

$$\pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2} \pm \sqrt{\frac{b^4 - a^2c^2}{a^4}}} = \pm\frac{1}{2a}\left[\sqrt{2(b^2 + ac)} \pm \sqrt{2(b^2 - ac)}\right].$$

7° $x^4 - px^2 + q^2 = 0;\quad p > 0;\quad q > 0;\quad p > 2q.$

On a (voir 1°) :

$$\rho = p^2 - 4q^2 > 0;\quad S = p;\quad P = q^2.$$

Les racines de l'équation bicarrée sont

$$\pm\sqrt{\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}} = \pm\frac{1}{2}(\sqrt{p + 2q} \pm \sqrt{p - 2q}).$$

512. *Simplifier l'expression*

$$\sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{2}}{17 - 12\sqrt{2}}} - \sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{2}}{17 + 12\sqrt{2}}}.$$

On a

$$\sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{2}}{17 - 12\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(3 - 2\sqrt{2})(17 + 12\sqrt{2})}{(17 - 12\sqrt{2})(17 + 12\sqrt{2})}}$$
$$= \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1.$$

$$\sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{2}}{17 + 12\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(3 + 2\sqrt{2})(17 - 12\sqrt{2})}{(17 + 12\sqrt{2})(17 - 12\sqrt{2})}}$$
$$= \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1.$$

Par suite, l'expression proposée vaut 2.

513. *Si* $m > 0$, *vérifier que l'on a*

$$\sqrt{1 + m + \sqrt{1 + 2m}} + \sqrt{1 + m - \sqrt{1 + 2m}} = \sqrt{2} \times \sqrt{1 + 2m}.$$

Chacun des radicaux doubles du premier membre peut être transformé en radicaux simples, car on a :

$$A = 1 + m > 0;\quad B = 1 + 2m > 0;\quad A^2 - B = m^2.$$

De plus, on a $C_- = m$, car m est positif. Par suite,

$$\sqrt{1 + m + \sqrt{1 + 2m}} = \sqrt{\frac{1 + 2m}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}};$$

$$\sqrt{1 + m - \sqrt{1 + 2m}} = \sqrt{\frac{1 + 2m}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Le premier membre vaut donc

$$2\sqrt{\frac{1 + 2m}{2}} \quad \text{ou} \quad \sqrt{2} \times \sqrt{1 + 2m}.$$

CHAPITRE XVII

Trinôme du second degré.

514. *Pour quelles valeurs de* x *les trinômes suivants sont-ils positifs, négatifs ou nuls?*

1° $y = x^2 - 7x + 6$. — Les racines du trinôme sont 1 et 6 et le coefficient de son premier terme est positif. Donc,

y est positif, pour $x < 1$ ou $x > 6$;
y est négatif, pour $1 < x < 6$;
y est nul, pour $x = 1$ ou 6.

2° $y = 3x^2 - 5x - 2$.

y est positif pour $x < -\frac{1}{3}$ ou $x > 2$;

y est négatif pour $-\frac{1}{3} < x < 2$;

y est nul pour $x = -\frac{1}{3}$ ou 2.

3° $y = 4x^2 - 4x + 1$. — Le trinôme est positif pour toutes les valeurs de x, sauf pour $x = 0{,}5$ qui l'annule.

4° $y = 2 - x^2$.

y est positif pour $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$;
y est négatif pour $x < -\sqrt{2}$ ou $x > \sqrt{2}$;
y est nul pour $x = \pm\sqrt{2}$.

5° $y = (x - 3)(2x+1)$. — Il faut se garder d'effectuer ce produit. On voit immédiatement qu'on a affaire à un trinôme du second degré en x dont les racines sont $-0{,}5$ et 3 et dont le premier terme est $2x^2$.

y est positif pour $x < -0{,}5$ ou $x > 3$.
y est négatif pour $-0{,}5 < x < 3$;
y est nul pour $x = -0{,}5$ ou 3.

6° $y = (2 - 7x)(x + 2)$.

y est positif pour $-2 < x < \frac{2}{7}$;

y est négatif pour $x < -2$ ou $x > \frac{2}{7}$;

y est nul pour $x = -2$ ou $\frac{2}{7}$.

7° $y = -3x^2 - 3x - 1$. — Ce trinôme n'a pas de racines; il est toujours négatif.

8° $y = (1 - 3x)^2 - 1$.
On a $y = (1 - 3x + 1)(1 - 3x - 1) = 3x(3x - 2)$.

y est positif pour $x < 0$ ou $x > \frac{2}{3}$;

y est négatif pour $0 < x < \frac{2}{3}$;

v est nul pour $x = 0$ ou $\frac{2}{3}$.

9° $y = (5 - x)^2 - 4x^2$.
On a $y = (5 - x + 2x)(5 - x - 2x) = (5 - 3x)(x + 5)$.

y est positif pour $-5 < x < \frac{5}{3}$;

y est négatif pour $x < -5$ ou $x > \frac{5}{3}$;

y est nul pour $x = -5$ ou $\frac{5}{3}$.

10° $y = (x - 1)^2 + (x + 1)^2$.
y est une somme de deux carrés; y est donc positif pour toutes les valeurs de x.

515. *Pour quelles valeurs de* x *les expressions suivantes sont-elles positives, négatives ou nulles?*

1° $y = x^4 - 9$.

On a $y = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x^2 + 3)$.

y a donc le même signe que $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$. Par suite,

y est positif pour $x < -\sqrt{3}$ ou $x > \sqrt{3}$;
y est négatif pour $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$;
y est nul pour $x = \pm\sqrt{3}$.

2° $y = (x^3 + 1)(3 - 2x)$.

On a $y = (x + 1)(3 - 2x)(x^2 - x + 1)$.

Le trinôme $x^2 - x + 1$ est essentiellement positif; y a donc le signe du produit $(x + 1)(3 - 2x)$.

y est positif pour $-1 < x < 1{,}5$;
y est négatif pour $x < -1$ ou $x > 1{,}5$;
y est nul pour $x = -1$ ou $1{,}5$.

3° $y = (x^4 - 16)(-3x^2 + 2x - 3)$.

On a $y = (x^2 - 4)(x^2 + 4)(-3x^2 + 2x - 3)$.

Le trinôme $x^2 + 4$ est toujours positif; le trinôme $-3x^2 + 2x - 3$ est toujours négatif; y a donc le signe de $4 - x^2$.

4° $y = (x^2 - 2x - 12)(23 - 5x)$.

On a $y = -5[x - (1 - \sqrt{13})][x - (1 + \sqrt{13})]\left(x - \frac{23}{5}\right)$.

Rangeons les racines par ordre de grandeur croissante en remarquant que $\frac{23}{5} = 4{,}6$, tandis que $1 + \sqrt{13} = 4{,}605...$ On a l'ordre

$$1 - \sqrt{13} \qquad 4{,}6 \qquad 1 + \sqrt{13}.$$

y est positif pour $x < 1 - \sqrt{13}$; $4{,}6 < x < 1 + \sqrt{13}$;
y est négatif pour $1 - \sqrt{13} < x < 4{,}6$; $x > 1 + \sqrt{13}$;
y est nul pour $x = 1 - \sqrt{13}$; $4{,}6$; $1 + \sqrt{13}$.

5° $y = (4x^4 + 11x^2 - 3)(x - x^2)$.

On a $y = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x^2 + 3) \times x(1 - x)$,

et y a le même signe que l'expression

$$-x\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 1),$$

dont les racines rangées par ordre de grandeur croissante sont

$$-\frac{1}{2} \qquad 0 \qquad \frac{1}{2} \qquad 1.$$

y est positif pour $-0,5 < x < 0$; $0,5 < x < 1$;
y est négatif pour $x < -0,5$; $0 < x < 0,5$; $1 < x$;
y est nul pour $x = -0,5,\ 0,\ 0,5,\ 1.$

6° $y = (x^4 - 10x^2 + 24)(5 - 2x)(x + 2).$

On a $y = -2(x + 2)^2 (x - 2)(x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})\left(x - \frac{5}{2}\right),$

et y a le même signe que l'expression

$$-(x - 2)(x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})\left(x - \frac{5}{2}\right).$$

Rangeons ces racines par ordre de grandeur croissante en remarquant que

$$\frac{5}{2} = 2,5 \quad \text{et} \quad \sqrt{6} = 2,449...$$

$$-\sqrt{6} \qquad 2 \qquad \sqrt{6} \qquad 2,5.$$

y est positif pour $-\sqrt{6} < x < 2$; $\sqrt{6} < x < 2,5$;
y est négatif pour $x < -\sqrt{6}$; $2 < x < \sqrt{6}$; $2,5 < x$;
y est nul pour $x = -\sqrt{6},\ -2,\ 2,\ \sqrt{6},\ 2,5.$

7° $y = (x - 1)(x^3 - 3x + 2)(x^2 + 1).$

On a $y = (x - 1)^3 (x + 2)(x^2 + 1)$

et y a le même signe que le trinôme $(x - 1)(x + 2)$.

8° $y = (3 - x)[8 - (2x + 1)^2].$

On a $y = 4(x - 3)\left(x - \frac{-1 - 2\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{-1 + 2\sqrt{2}}{2}\right).$

y est positif pour $\frac{-1-2\sqrt{2}}{2} < x < \frac{-1+2\sqrt{2}}{2}$; $3 < x$;

y est négatif pour $x < \frac{-1-2\sqrt{2}}{2}$; $\frac{-1+2\sqrt{2}}{2} < x < 3$;

y est nul pour chacune des trois racines.

516. *Pour quelles valeurs de* x *les expressions suivantes sont-elles positives négatives ou nulles?*

1° $y = \frac{x}{x^2 - 5x + 4}.$

y a le même signe que l'expression

$$x(x^2 - 5x + 4) = x(x - 1)(x - 4).$$

y est positif pour $0 < x < 1$; $4 < x$;
y est négatif pour $x < 0$; $1 < x < 4$;
y est nul pour $x = 0$.

2° $y = \dfrac{(x-1)^2}{x} - 4x$. — On a $y = \dfrac{-3x^2 - 2x + 1}{x}$,

et y a le même signe que l'expression

$$x(-3x^2 - 2x + 1) = -3x(x+1)\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

y est positif pour $x < -1$; $0 < x < \frac{1}{3}$;

y est négatif pour $-1 < x < 0$; $\frac{1}{3} < x$;

y est nul pour $x = -1$ ou $\frac{1}{3}$.

3° $y = \dfrac{x^4 - 24x^2 - 25}{2 + x - 3x^2}$.

y a le même signe que l'expression

$$(x^4 - 24x^2 - 25)(2 + x - 3x^2)$$
$$= -3(x-5)(x+5)(x^2+1)(x-1)\left(x + \frac{2}{3}\right),$$

ou encore, que l'expression

$$-3(x-5)(x+5)(x-1)\left(x + \frac{2}{3}\right).$$

y est positif pour $-5 < x < -\frac{2}{3}$, $1 < x < 5$;

y est négatif pour $x < -5$; $-\frac{2}{3} < x < 1$; $5 < x$;

y est nul pour $x = \pm 5$.

4° $y = \dfrac{x-1}{x+2} + x - 1$. — On a $y = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x + 2}$,

et y a le même signe que l'expression

$$(x+2)(x^2 + 2x - 3) = (x+3)(x+2)(x-1).$$

y est positif pour $-3 < x < -2$; $1 < x$;
y est négatif pour $x < -3$; $-2 < x < 1$;
y est nul pour $x = -3$ ou 1.

5° $y = \dfrac{x^4 - 3x^2}{2x^2 - 5x + 7}$.

Le dénominateur est toujours positif. y a donc le même signe que

$$x^4 - 3x^2, \quad \text{ou que} \quad x^2 - 3.$$

y est positif pour $x < -\sqrt{3}$ ou $x > \sqrt{3}$;
y est négatif pour $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$;
y est nul pour $x = -\sqrt{3},\ 0,\ \sqrt{3}$.

6° $y = \dfrac{(x-2)^2 - (x+2)^2}{x^4 + 4x^2 + 5}$.

Le dénominateur est égal à $(x^2 + 2)^2 + 1$. Il est donc positif et y a le signe de son numérateur qui vaut $-8x$.

517. *Réduire l'expression*

$$\frac{3(x^6 - 1)}{x^2 - 1} - \frac{x^6 - 2x^3 + 1}{x^2 - 2x + 1}$$

et montrer qu'elle n'est jamais négative.

Si $x = \pm 1$, l'expression proposée est indéterminée.
Si $x \neq \pm 1$, l'expression proposée vaut

$$3(x^4 + x^2 + 1) - (x^2 + x + 1)^2 = 2x^4 - 2x^3 - 2x + 2$$
$$= 2(x-1)^2 (x^2 + x + 1).$$

On voit qu'elle est essentiellement positive, puisque nous supposons $x \neq 1$.

518. *On donne les expressions :*

$$x = \frac{a - 5}{a^2 + 2a - 8} \quad \textit{et} \quad y = \frac{a + 2}{a^2 - 2a - 15}.$$

Pour quelles valeurs de a *ont-elles le même signe?*

La question revient à chercher les valeurs de a qui rendent le produit xy positif. Or, xy a le même signe que

$$(a-5)(a+2)(a^2 + 2a - 8)(a^2 - 2a - 15)$$
$$= (a-5)(a+2)(a+4)(a-2)(a+3)(a-5).$$

Cette dernière expression a le même signe que

$$(a+4)(a+3)(a+2)(a-2),$$

et celle-ci est positive pour

$$a < -4; \quad -3 < a < -2; \quad 2 < a.$$

On doit exclure la valeur $a = 5$.

519. *Ranger par ordre de grandeur croissante, les nombres* -1, 0, 3, *et les racines des équations suivantes, sans résoudre celles-ci.*

Dans ce qui suit, nous désignons par $f(x)$ le premier membre de l'équation considérée et par x' et x'' ses racines, si elle en admet ($x'' < x'$).

1° $x^2 + 2x - 3 = 0$. — On a :

$$f(-1) = -4 < 0; \quad f(0) = -3 < 0; \quad f(3) = 12 > 0.$$

Les signes de ces valeurs de $f(x)$ montrent :

a) que l'équation admet deux racines;

b) que -1 et 0 sont compris entre les racines;

c) que 3 est extérieur et, par le fait, supérieur aux racines.

On a donc l'ordre :

$$x'', \quad -1, \quad 0, \quad x', \quad 3.$$

2° $x^2 + 2x + 5 = 0$. — On a :

$$f(-1) = 4 > 0; \quad f(0) = 5 > 0; \quad f(3) = 20 > 0.$$

Comme ces trois valeurs de $f(x)$ ont le même signe que le coefficient de son premier terme, nous devrons examiner si l'équation $f(x) = 0$ admet des racines. On a

$$\rho = 1 - 5 = -4 < 0.$$

Il en résulte que l'équation n'a pas de racines et que tout classement est impossible.

3° $4x^2 - 4x + 1 = 0$. — On a :

$$f(-1) = 9 > 0; \quad f(0) = 1 > 0; \quad f(3) = 25 > 0.$$

Nous devrons, comme dans l'exercice précédent, calculer le réalisant de l'équation $f(x) = 0$. On a

$$\rho = 4 - 4 = 0.$$

L'équation a une racine double qui est 0,5. On a le classement

$$-1, \quad 0, \quad x'' = x' = 0{,}5, \quad 3.$$

4° $x^2 - 6x - 7 = 0$.

On a : $f(-1) = 0$; $f(0) = -7 < 0$; $f(3) = -16 < 0$.

Ces valeurs de $f(x)$ montrent :

a) que l'équation admet deux racines;

b) que 0 et 3 sont compris entre les racines;

c) que -1 est la plus petite racine.

On a donc l'ordre

$$x'' = -1, \quad 0, \quad 3, \quad x'.$$

On raisonne d'une façon analogue pour les quatre exercices suivants.

5° $x^2 + 2x + 1 = 0$;	Rép.	$x'' = x' = -1, \quad 0, \quad 3.$
6° $x^2 - 6x + 5 = 0$;	»	$-1, \quad 0, \quad x'', \quad 3, \quad x'.$
7° $3x^2 - 13x + 12 = 0$;	»	$-1, \quad 0, \quad x'', \quad x' = 3.$
8° $10x^2 - 11x - 18 = 0$;	»	$-1, \quad x'', \quad 0, \quad x', \quad 3.$

520. *Sans résoudre les équations suivantes, montrer qu'elles admettent deux racines.*

Dans ce qui suit, nous désignerons par $f(x)$ le premier membre de l'équation rendue entière et ramenée à la forme $A = 0$.

1° $(x - 2)(x - 1) - 5 = 0.$

Cette équation admet deux racines distinctes, car le coefficient de x^2 est $+1$, tandis que $f(1) = f(2) = -5$.

D'ailleurs l'équation proposée peut s'écrire $x^2 - 3x - 3 = 0$; son premier terme et son dernier terme ont des signes contraires.

2° $(x - a)(x - b) = k^2.$

Cette équation peut s'écrire

$$(x - a)(x - b) - k^2 = 0.$$

Le coefficient de x^2 est $+1$ et $f(a) = f(b) = -k^2 < 0$, si $k \neq 0$.

Si $k = 0$, les racines sont évidemment a et b.

3° $\dfrac{x + 1}{x - 1} + \dfrac{x - 1}{x + 1} = 4.$

En faisant disparaître les dénominateurs, l'équation devient

$$2x^2 + 2 - 4(x^2 - 1) = 0. \qquad (1)$$

Le coefficient de x^2 est -2, tandis que $f(1) = f(-1) = +4$.

Remarque. — Comme $f(1)$ et $f(-1)$ sont différents de zéro, il résulte du raisonnement précédent non seulement que l'équation (1) admet deux racines distinctes, mais encore, que ces racines diffèrent de -1 et de $+1$. Les racines de l'équation (1) n'annulent donc aucun dénominateur de l'équation donnée et sont acceptables pour cette équation.

Ceux des exercices suivants, où l'équation donnée est fractionnaire, donnent lieu à une remarque analogue.

4° $\dfrac{2x}{x - 2} - \dfrac{3x - 12}{x - 3} = 1.$

Cette équation peut s'écrire

$$2x(x - 3) - (3x - 12)(x - 2) - (x - 2)(x - 3) = 0.$$

On a $\qquad f(2) = -4 \quad$ et $\quad f(3) = +3.$

Ces deux résultats ont des signes contraires.

5° $x - 7 = \dfrac{3}{2x - 1}.$

Cette équation peut s'écrire

$$(x - 7)(2x - 1) - 3 = 0.$$

Le coefficient de x^2 est $+2$, tandis que $f(7) = -3$.

6° $(b - x)^2 - 4(a - x)(c - x) = 0.$

Le coefficient de x^2 est -3 et $f(a) = (b - a)^2 > 0$, si $a \neq b$.

Si $a = b$, on trouve directement que les racines sont a et $\dfrac{4c - a}{3}$.

7° $(x - a) + (x - b) = k(x - a)(x - b).$

Cette équation peut s'écrire

$$k(x - a)(x - b) - (x - a) - (x - b) = 0,$$

et on a $f(a) \times f(b) = -(a-b)^2 < 0$, si $a \neq b$.

Si $a = b$, on trouve que les racines sont a et $\dfrac{ak+2}{k}$, pourvu qu'on ait $k \neq 0$.

8° $\dfrac{(a+b)^2}{c^2(x-a)} + \dfrac{(b+c)^2}{a^2(x-c)} + b = 0.$

Cette équation peut s'écrire

$$a^2bc^2(x-a)(x-c) + a^2(a+b)^2(x-c) + c^2(b+c)^2(x-a) = 0.$$

On a
$$f(a) = a^2(a+b)^2(a-c);$$
$$f(c) = c^2(b+c)^2(c-a).$$

Ces deux résultats ont des signes contraires. (On doit supposer que $f(a)$ et $f(c)$ ne sont pas nuls).

9° $\dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-b} + \dfrac{1}{x-c} = 0.$

Cette équation peut s'écrire

$$(x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) + (x-a)(x-b) = 0. \quad (1)$$

On a :
$$f(a) = (a-b)(a-c);$$
$$f(b) = (b-c)(b-a);$$
$$f(c) = (c-a)(c-b).$$

Par suite, $f(a) \times f(b) \times f(c) = -(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$.

Le produit $f(a) \times f(b) \times f(c)$ est négatif; il renferme donc 1 ou 3 facteurs négatifs. (On doit supposer que a, b, c sont des nombres distincts).

S'il est formé d'un facteur négatif et de deux facteurs positifs, l'équation proposée aura deux racines.

S'il est formé de trois facteurs négatifs, l'équation (1) aura encore des racines, car le coefficient de x^2 est $+3$.

10° $\dfrac{1}{x-a^2} + \dfrac{1}{x-b^2} + \dfrac{1}{x-c^2} = \dfrac{3}{x}.$

Cette équation peut s'écrire

$$3(x-a^2)(x-b^2)(x-c^2) - x(x-a^2)(x-b^2) - x(x-b^2)(x-c^2)$$
$$- x(x-c^2)(x-a^2) = 0.$$

Le coefficient de x^3 est nul; celui de x^2 est négatif et vaut $-(a^2+b^2+c^2)$.

Le produit $f(a^2) \times f(b^2) \times f(c^2)$ est positif, car il vaut

$$a^2b^2c^2(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)^2(c^2-a^2)^2;$$

ce qui indique qu'il renferme 0 ou 2 facteurs négatifs. Dans les deux cas, l'une au moins des trois quantités a^2, b^2, c^2 donne à $f(x)$ un signe contraire à celui du coefficient de son premier terme.

Remarque. — Cette solution suppose a, b et c différents de zéro; puis $a \neq \pm b$; $b \neq \pm c$; $c \neq \pm a$.

521. *Si l'équation* $x^2 + px + q = 0$ *admet des racines, l'équation*

$$x^2 + px + q + (x + a)(2x + p) = 0$$

en admet également, quel que soit a.

Désignons le premier membre de cette dernière équation par $f(x)$.

On a
$$f\left(-\frac{p}{2}\right) = -\frac{p^2 - 4q}{4}.$$

Le numérateur $p^2 - 4q$ est positif par hypothèse. Donc $-\frac{p}{2}$ fait prendre à $f(x)$ un signe contraire à celui du coefficient de x^2, qui est $+3$.

522. *Trouver le maximum ou le minimum des fonctions suivantes et construire leur graphique.*

1° $y = -2x^2$	Max. 0,	pour	$x = 0.$
2° $y = \frac{x^2}{2}$	Min. 0,	»	$x = 0.$
3° $y = 4 - x^2$	Max. 4	»	$x = 0.$
4° $y = x^2 - 8x + 7$	Min. -9	»	$x = 4.$
5° $y = \frac{x^2}{2} - 3$	Min. -3	»	$x = 0.$
6° $y = 2x^2 - 4x + 5$	Min. 3	»	$x = 1.$
7° $y = -4x^2 + 16x - 7$	Max. 9	»	$x = 2.$
8° $y = -\frac{x^2}{9} + \frac{2x}{3} - 1$	Max. 0	»	$x = 3.$
9° $y = 9x^2 - 12x + 4$	Min. 0	»	$x = \frac{2}{3}.$

523. *Trouver la valeur de* x *qui rend maximum ou minimum les expressions suivantes. Chercher ensuite ce maximum ou ce minimum.*

1° $y = (2x - 1)^2 - 5x^2$ ou $y = -x^2 - 4x + 1.$
Rép. Max. 5 pour $x = -2.$

2° $y = (x - 3)^2 + (x + 3)^2$ ou $y = 2x^2 + 18.$
Rép. Min. 18 pour $x = 0.$

3° $y = (ax + b)^2 + (a'x + b')^2$
ou $y = (a^2 + a'^2)x^2 + 2(ab + a'b')x + b^2 + b'^2.$

Rép. Min. $\dfrac{(ab' - a'b)^2}{a^2 + a'^2}$ pour $x = -\dfrac{ab + a'b'}{a^2 + a'^2}.$

4° $y = (ax + b)^2 - (a'x + b')^2$
ou $y = (a^2 - a'^2)x^2 + 2(ab - a'b')x + b^2 - b'^2.$

Si $a^2 > a'^2$, il y a un minimum qui vaut

$$\frac{(ab' - a'b)^2}{a'^2 - a^2} \quad \text{pour} \quad x = \frac{ab - a'b'}{a'^2 - a^2}.$$

Si $a^2 < a'^2$, il y a un maximum qui vaut

$$\frac{(ab' - a'b)^2}{a'^2 - a^2} \quad \text{pour} \quad x = \frac{ab - a'b'}{a'^2 - a^2}.$$

Si $a^2 = a'^2$, il n'y a ni maximum, ni minimum.

524. *Sachant* x + y *est égal à une constante* a, *trouver le maximum ou le minimum des fonctions suivantes :*

1° $z = xy$.

On a $$z = x(a - x) = -x^2 + ax.$$

Rép. Max. $\frac{a^2}{4}$ pour $x = \frac{a}{2}$.

2° $z = x^2 + y^2$.

On a $$z = x^2 + (a - x)^2 = 2x^2 - 2ax + a^2.$$

Rép. Min. $\frac{a^2}{2}$ pour $x = \frac{a}{2}$.

3° $z = (x + y)(x^2 + y^2)$.

On a $$z = a(2x^2 - 2ax + a^2).$$

Si $a > 0$, z admet pour $x = \frac{a}{2}$ le minimum $\frac{a^3}{2}$;

Si $a < 0$, z admet pour $x = \frac{a}{2}$ le maximum $\frac{a^3}{2}$.

4° $z = x^3 + y^3$.

On a $$z = x^3 + (a - x)^3 = 3ax^2 - 3a^2x + a^3.$$

Si $a > 0$, z admet pour $x = \frac{a}{2}$ le minimum $\frac{a^3}{4}$.

Si $a < 0$, z admet pour $x = \frac{a}{2}$ le maximum $\frac{a^3}{4}$.

525. *Trouver les coefficients* p *et* q *du trinôme* $x^2 + px + q$:

1° *S'il admet pour* x = — 2 *un minimum égal à* 3;

2° *S'il admet* 2 *pour racine et devient minimum pour* $x = \frac{5}{4}$;

3° *S'il admet* 1 *pour racine et a un minimum égal à* — 9.

1° On a le système

$$-2 = \frac{-p}{2}; \quad 4 - 2p + q = 3.$$

On en tire $p = 4$; $q = 7$.

2° On a le système

$$4 + 2p + q = 0; \quad \frac{5}{4} = \frac{-p}{2}.$$

On en tire $p = -1{,}5$; $q = 1$.

3° On a le système
$$1 + p + q = 0; \quad \frac{4q - p^2}{4} = -9.$$
Les solutions de ce système sont
$$p' = 4, \quad q' = -5; \quad p'' = -8, \quad q'' = 7.$$

526. *On donne l'équation* $2x^2 + (a + 1)x + a^2 - 1 = 0.$

1° *Quelle valeur faut-il donner à* a *pour que le produit des racines soit minimum ? Trouver ce minimum.*

2° *Quelle valeur faut-il donner à* a *pour que la somme des carrés des racines soit maximum? Trouver ce maximum.*

1° Le produit des racines est $\frac{a^2 - 1}{2}$.

Cette fonction est minimum pour $a = 0$ et le minimum est $-0{,}5$.

2° On a
$$S_2 = (x' + x'')^2 - 2x'x'' = \frac{-3a^2 + 2a + 5}{4}.$$
Cette fonction est maximum pour $a = \frac{1}{3}$ et le maximum est $\frac{4}{3}$.

527. *Déterminer* a, b *et* c *dans les deux cas suivants :*

1° *Le trinôme* $ax^2 + bx + c$ *admet un maximum égal à* 3 *pour* $x = 2$ *et il vaut* -2 *pour* $x = -1$.

2° *Le trinôme* $ax^2 + bx + c$ *à un minimum égal à* -16 *pour* $x = 1$; *la somme des cubes des racines est* $\frac{38}{3}$.

1° On a le système
$$\frac{4ac - b^2}{4a} = 3 \quad \text{ou} \quad 4ac - b^2 = 12a;$$
$$-\frac{b}{2a} = 2 \quad \text{ou} \quad 4a + b = 0;$$
$$a - b + c = -2.$$
En résolvant ce système, on trouve une seule solution acceptable
$$a = -\frac{5}{9}; \quad b = \frac{20}{9}; \quad c = \frac{7}{9}.$$
Le trinôme cherché est $\frac{1}{9}(-5x^2 + 20x + 7)$.

2° On a les équations
$$-\frac{b}{2a} = 1 \quad \text{ou} \quad 2a + b = 0; \qquad (1)$$
$$\frac{4ac - b^2}{4a} = -16 \quad \text{ou} \quad 4ac - b^2 = -64a. \qquad (2)$$

En tenant compte de ce que la somme des racines est 2, on a aussi

$$x'^3 + x''^3 = 2\left(4 - \frac{3c}{a}\right) = \frac{38}{3} \quad \text{ou} \quad 7a + 9c = 0. (3)$$

Le système (1), (2), (3) donne une seule solution acceptable

$$a = 9; \quad b = -18; \quad c = -7.$$

Le trinôme cherché est $9x^2 - 18x - 7$.

528. *Résoudre les systèmes suivants et vérifier graphiquement les solutions trouvées.*

1° $y = x^2 - 4x + 4$; $3y - x = 0$.

Les solutions du système sont

$$x' = 3, \quad y' = 1; \quad x'' = \frac{4}{3}, \quad y'' = \frac{4}{9}.$$

La droite $3y - x = 0$ coupe la parabole $y = x^2 - 4x + 4$ aux deux points $(3, 1)$ et $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{9}\right)$.

2° $y = -x^2 + 4x + 12$; $2x + y - 12 = 0$.

Les solutions du système sont

$$x' = 0, \quad y' = 12; \quad x'' = 6, \quad y'' = 0.$$

La droite $2x + y - 12 = 0$ coupe la parabole $y = -x^2 + 4x + 12$ aux deux points $(0, 12)$ et $(6, 0)$ situés, un sur chaque axe.

3° $y = x^2 - 2x + 3$; $y + 4x - 2 = 0$.

Le système n'admet qu'une solution $x = -1$, $y = 6$. La droite $y + 4x - 2 = 0$ est tangente à la parabole $y = x^2 - 2x + 3$ au point $(-1, 6)$.

4° $y = -x^2 + 4x - 5$; $x - y - 9 = 0$.

Les solutions de ce système sont

$$x' = -1, \quad y' = -10; \quad x'' = 4, \quad y'' = -5.$$

La droite $x - y - 9 = 0$ coupe la parabole $y = -x^2 + 4x - 5$ aux deux points $(-1, -10)$ et $(4, -5)$.

5° $y = x^2 - 4x - 5$; $3x - 2y - 10 = 0$.

Les solutions de ce système sont

$$x' = 0, \quad y' = -5; \quad x'' = \frac{11}{2}; \quad y'' = \frac{13}{4}.$$

La droite $3x - 2y - 10 = 0$ coupe la parabole $y = x^2 - 4x - 5$ aux points $(0, -5)$ et $\left(\frac{11}{2}, \frac{13}{4}\right)$.

6° $3y = x^2$; $4x - 3y = 4$.

Ce système n'admet qu'une solution $x = 2$, $y = \frac{4}{3}$. Donc, la droite $4x - 3y = 4$ est tangente à la parabole $3y = x^2$ au point $\left(2, \frac{4}{3}\right)$.

529. *On donne la parabole* y = $x^2 - 3$. *Déterminer* a *et* b *pour que les droites* $y - 2x + 2a = 0$ *et* $y + (b - 1)x + 7 = 0$ *soient tangentes à cette parabole et calculer chaque fois les coordonnées du point de contact.*

1° L'équation aux abscisses des points d'intersection de la droite $y - 2x + 2a = 0$ avec la parabole $y = x^2 - 3$ est

$$x^2 - 2x + 2a - 3 = 0.$$

On doit avoir $\rho = 1 - (2a - 3) = 0$; d'où $a = 2$.

Le point de contact est $(1, -2)$.

2° L'équation aux abscisses des points d'intersection de la droite $y + (b - 1)x + 7 = 0$ avec la parabole $y = x^2 - 3$ est

$$x^2 + (b - 1)x + 4 = 0.$$

On doit avoir $\rho = (b - 1)^2 - 16 = 0$.

Cette équation donne $b = -3$ ou 5.

Si $b = -3$, l'équation de la tangente est $y - 4x + 7 = 0$. Elle touche la parabole au point $(2, 1)$.

Si $b = 5$, l'équation de la tangente est $y + 4x + 7 = 0$. Elle touche la parabole au point $(-2, 1)$.

530. *Construire la parabole* $4y = x^2$ *et discuter le nombre de ses points d'intersection avec la droite* $y = 2x + p$.

L'équation aux abscisses des points d'intersection de la droite avec la parabole est $x^2 - 8x - 4p = 0$.

On a $= 16 + 4p$.

Si $p > -4$, le réalisant ρ est positif et la droite coupe la parabole en deux points.

Si $p = -4$, le réalisant ρ est nul et la droite est tangente à la parabole. Le point de contact est $(4, 4)$.

Si $p < -4$, la droite ne rencontre pas la courbe.

On remarque que p est l'ordonnée à l'origine de la droite $y = 2x + p$, qui se déplace parallèlement à la droite $y = 2x$.

531. *Étudier les variations de l'aire d'un triangle équilatéral inscrit dans un triangle équilatéral donné.*

Prenons sur les côtés du triangle et dans le même sens les longueurs

$$AE = BF = CD = x.$$

Soient a la longueur d'un côté de ABC et S l'aire du triangle équilatéral DEF.

On a $S = ABC - 3ADE$.

Or, $ABC = \frac{a}{2} \times \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

et $ADE = \frac{AD \times EP}{2}$.

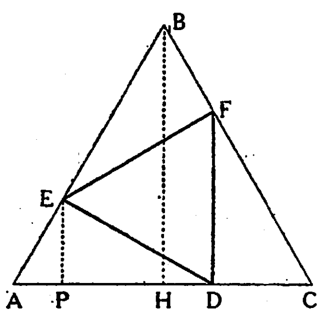


Fig. 15

Mais les triangles semblables AEP et ABH donnent

$$\frac{EP}{AE} = \frac{BH}{AB} \quad \text{ou} \quad \frac{EP}{x} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Par suite, $EP = \frac{x}{2}\sqrt{3}$ et S a comme expression

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2}(a - x)\frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(3x^2 - 3ax + a^2).$$

L'aire S est minimum pour $x = \frac{a}{2}$; le minimum est $\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$.

Comme x ne peut varier que de 0 à a, on a le tableau

x	$-\infty$		0		$\frac{a}{2}$		a		$+\infty$
S	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$ Minimum	$\nearrow$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

On remarque que le triangle équilatéral minimum est celui qui est obtenu en joignant les milieux des côtés du triangle donné, et que sa superficie est le quart de celle de ce même triangle.

MÉTHODE DES PRINCIPES. — On peut écrire

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}[a^2 - 3x(a - x)].$$

S sera minimum absolu lorsque $x(a - x)$ sera maximum absolu, c'est-à-dire lorsque

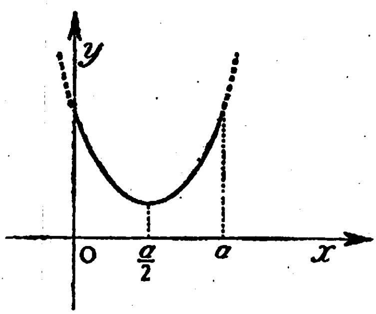


Fig. 16

$$x = a - x \quad \text{ou} \quad x = \frac{a}{2}.$$

532. *On a un rectangle de périmètre constant* 4p. *Sur les quatre côtés pris pour diamètres, on décrit des demi-circonférences extérieures au rectangle. Étudier les variations de la surface ainsi formée.*

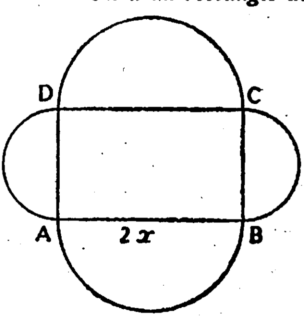


Fig. 17

Soit $2x$ la longueur de la base d'un des rectangles considérés; sa hauteur sera $2(p - x)$. L'aire S de la figure a comme expression

$$S = 4x(p - x) + \pi x^2 + \pi(p - x)^2$$

ou $S = (2\pi - 4)x^2 - 2p(\pi - 2)x + \pi p^2$.

L'aire S de la figure est minimum pour $x = \frac{p}{2}$; le minimum vaut $\frac{p^2}{2}(\pi + 2)$.

Comme x doit rester compris entre 0 et p, on a le tableau

x	$-\infty$		0		$\frac{p}{2}$		p		$+\infty$
S	$+\infty$	$\searrow$	πp^2	$\searrow$	$\frac{p^2}{2}(\pi + 2)$	$\nearrow$	πp^2	$\nearrow$	$+\infty$
					Minimum.				

On remarque que le rectangle qui correspond à l'aire minimum est un carré de côté p.

Méthode des principes. — On peut écrire

$$S = \pi p^2 - (2\pi - 4)(p - x)x.$$

S sera minimum absolu lorsque $x(p - x)$ sera maximum absolu, c'est-à-dire lorsque

$$x = p - x \quad \text{ou} \quad x = \frac{p}{2}.$$

533. ***Étudier les variations de l'aire d'un carré inscrit dans un carré donné.***

A partir des sommets et dans le même sens, prenons les longueurs égales

$$AE = BF = CG = DH = x.$$

Soient a le côté du carré donné et S l'aire du carré EFGH. On a

$$S = EF^2 = x^2 + (a - x)^2$$
$$= 2x^2 - 2ax + a^2.$$

L'aire S est minimum pour $x = \frac{a}{2}$ et le minimum est $S = \frac{a^2}{2}$.

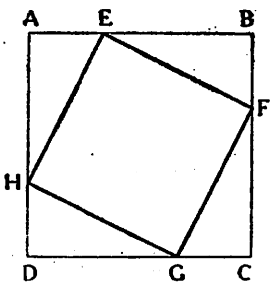


Fig. 18

On a le tableau

x	$-\infty$		0		$\frac{a}{2}$		a		$+\infty$
S	$+\infty$	$\searrow$	a^2	$\searrow$	$\frac{a^2}{2}$	$\nearrow$	a^2	$\nearrow$	$+\infty$
					Minimum.				

Le carré dont l'aire est minimum a comme sommets les milieux des côtés du carré donné.

Méthode des principes. — On peut écrire

$$S = a^2 - 2x(a - x).$$

S sera minimum absolu lorsque $x(a - x)$ sera maximum absolu, c'est-à-dire lorsque

$$x = a - x \quad \text{ou} \quad x = \frac{a}{2}.$$

534. *Les dimensions d'un rectangle sont* a *et* 3a. *A partir de chaque sommet et dans le même sens, on porte une même longueur* x. *Étudier les variations de l'aire du parallélogramme obtenu en joignant les quatre points ainsi trouvés.*

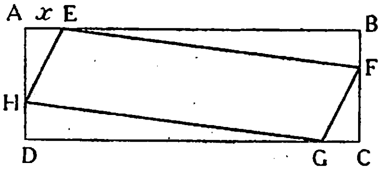


Fig. 19

L'aire S du parallélogramme EFGH a comme expression

$$S = 3a^2 - x(a - x) - x(3a - x)$$

ou $\quad S = 2x^2 - 4ax + 3a^2.$

La fonction est minimum pour $x = a$ et le minimum est a^2. On a le tableau

x	$-\infty$		0		a		$+\infty$
S	$+\infty$	$\searrow$	$3a^2$	$\searrow$	a^2	$\nearrow$	$+\infty$

L'aire S n'a pas de minimum relatif. Quand x croît de 0 à a, l'aire S décroît de $3a^2$ à a^2.

Méthode des principes. — On peut écrire

$$S = 3a^2 - 2x(2a - x).$$

S sera minimum absolu lorsque $x(2a - x)$ sera maximum absolu, c'est-à-dire lorsque

$$x = 2a - x \quad \text{ou} \quad x = a.$$

535. *Étudier les variations de l'aire d'un rectangle inscrit dans un losange donné.*

Soient $2x$ et $2y$ les longueurs des côtés EF et FG du rectangle, $2a$ et $2b$ les longueurs des diagonales AC et BD du losange.

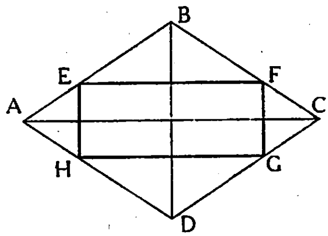


Fig. 20

On a les relations :

$$S = 4xy \quad \text{et} \quad \frac{x}{a} = \frac{b - y}{b}.$$

Ces relations donnent $\qquad S = \frac{4b}{a}(ax - x^2).$

L'aire S est maximum pour $x = \frac{a}{2}$; alors $y = \frac{b}{2}$. L'aire maximum est $S = ab$. On a le tableau

x	$-\infty$		0		$\frac{a}{2}$		a		$+\infty$
S	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	ab	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
					Maximum.				

Le rectangle maximum a ses sommets au milieu des côtés du losange.

Méthode des principes. — On peut écrire

$$S = \frac{4b}{a} \times x(a - x).$$

S est maximum absolu pour la même valeur de x que $x(a - x)$, donc lorsque

$$x = a - x \quad \text{ou} \quad x = \frac{a}{2}.$$

536. *Sur un segment* AB *donné, on marque un point variable* M *et on construit trois demi-cercles, situés d'un même côté de* AB *et ayant respectivement pour diamètres* AB, AM, MB.

Étudier les variations de la surface comprise entre les trois demi-circonférences.

Désignons par $2x$ et $2R$ les longueurs des segments AM et AB. L'aire S de la surface comprise entre les trois demi-circonférences a pour expression

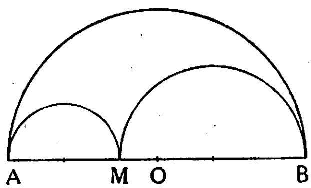


Fig. 21

$$S = \frac{\pi}{2}R^2 - \frac{\pi}{2}x^2 - \frac{\pi}{2}(R - x)^2$$

ou

$$S = \pi(-x^2 + Rx).$$

L'aire S est maximum pour $x = \frac{R}{2}$; le maximum est $\frac{\pi R^2}{4}$. Le point M est alors au milieu du segment AB. On a le tableau

x	$-\infty$		0		$\frac{R}{2}$		R		$+\infty$
S	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi R^2}{4}$ *Maximum*	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Méthode des principes. — On peut écrire

$$S = \pi \times x(R - x).$$

S est maximum absolu pour la même valeur de x que $x(R - x)$, donc lorsque

$$x = R - x \quad \text{ou} \quad x = \frac{R}{2}.$$

537. *Sur les segments* AM *et* MB *de la question précédente, on construit deux triangles équilatéraux. Étudier les variations de la somme des aires de ces deux triangles.*

En désignant par $2x$ et $2d$ les longueurs des segments AM et AB, on a

$$S = x^2\sqrt{3} + (d - x)^2\sqrt{3} = \sqrt{3}(2x^2 - 2dx + d^2).$$

L'aire S est minimum pour $x = \frac{d}{2}$; le minimum est $\frac{d^2\sqrt{3}}{2}$. On a le tableau

x	$-\infty$		0		$\frac{d}{2}$		d		$+\infty$
S	$+\infty$	$\searrow$	$d^2\sqrt{3}$	$\searrow$	$\frac{d^2\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$d^2\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$
					Minimum				

MÉTHODE DES PRINCIPES. — On peut écrire

$$S = \sqrt{3}[d^2 - 2x(d - x)].$$

S sera minimum absolu lorsque $x(d - x)$ sera maximum absolu, c'est-à-dire lorsque

$$x = d - x \quad \text{ou} \quad x = \frac{d}{2}.$$

538. *Dans le triangle donné* ABC, *on inscrit un rectangle dont un côté est parallèle à* AB. *Étudier les variations de l'aire de ce rectangle.*

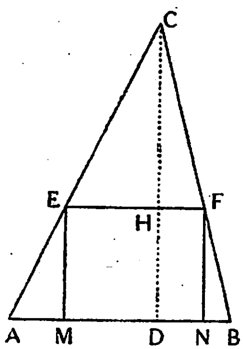


Fig. 22.

Soient AB $= b$ et CD $= h$ la base et la hauteur du triangle donné. Prenons pour variable indépendante la hauteur DH $= x$ du rectangle.

L'expression de l'aire est

$$S = MN \times DH.$$

Or les triangles semblables ABC et EFC donnent

$$\frac{EF}{AB} = \frac{CH}{CD};$$

$$\text{d'où} \quad EF = MN = \frac{b}{h}(h - x).$$

On a alors

$$S = \frac{b}{h}(hx - x^2).$$

L'aire S est maximum pour $x = \frac{h}{2}$; le maximum est $\frac{bh}{4}$. Le rectangle maximum est donc la moitié du triangle donné.

On a le tableau

x	$-\infty$		0		$\frac{h}{2}$		h		$+\infty$
S	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{bh}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
					Maximum.				

Méthode des principes. — On peut écrire

$$S = \frac{b}{h} \times x(h - x).$$

S est maximum absolu pour la même valeur de x que $x(h - x)$, donc lorsque

$$x = h - x \quad \text{ou} \quad x = \frac{h}{2}.$$

539. *Dans un cercle de rayon* R, *on inscrit un trapèze isocèle, dont une des bases est un diamètre. Étudier les variations de la longueur de son périmètre.*

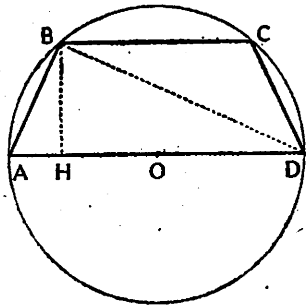


Fig. 23.

Soient x et $2y$ les longueurs des côtés AB et BC, $2p$ la longueur du périmètre du trapèze. On a

$$2p = 2R + 2x + 2y.$$

Le triangle rectangle ABD donne

$$AB^2 = AH.AD \quad \text{ou} \quad x^2 = 2R(R - y).$$

Par suite, on a $y = R - \dfrac{x^2}{2R}$

et
$$2p = \frac{1}{R}(- x^2 + 2Rx + 4R^2).$$

Le périmètre $2p$ est maximum pour $x = R$; le maximum est 5R. Le trapèze correspondant est une moitié d'un hexagone régulier inscrit dans le cercle.

Comme x ne peut pas dépasser $R\sqrt{2}$, qui est le côté du carré inscrit, on a le tableau

x	$-\infty$		0		R		$R\sqrt{2}$		$+\infty$
$2p$	$-\infty$	↗	$4R$	↗	$5R$	↘	$2R(1+\sqrt{2})$	↘	$-\infty$
					Maximum				

Méthode des principes. — On peut écrire

$$2p = \frac{1}{R}[4R^2 + x(2R - x)].$$

$2p$ est maximum absolu pour la même valeur de x que $x(2R - x)$, donc lorsque

$$x = 2R - x \quad \text{ou} \quad x = R.$$

540. *On donne un segment* AB *de longueur* a. *Sur* AB, *on marque un point* M *et on construit le carré de côté* MA *et le triangle équilatéral de côté* MB. *Étudier les variations de la somme de leurs aires.*

Soit x la longueur du segment AM. L'aire du carré est x^2 et celle du triangle équilatéral $\dfrac{(a - x)^2\sqrt{3}}{4}$. Par suite,

$$S = x^2 + \frac{(a-x)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4}[(4+\sqrt{3})x^2 - 2ax\sqrt{3} + a^2\sqrt{3}].$$

On voit que S est minimum pour

$$x = \frac{a\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}} = \frac{a(4\sqrt{3}-3)}{13}.$$

Le minimum est $\frac{a^2}{13}(4\sqrt{3}-3)$.

Avant de dresser le tableau des variations et de tracer le graphique de la fonction, on doit remarquer que x ne peut varier que de 0 à a.

Méthode des principes. — On peut écrire

$$4S = a^2\sqrt{3} - x[2a\sqrt{3} - x(4+\sqrt{3})].$$

S est minimum absolu pour la valeur de x qui rend maximum absolu

$$x[2a\sqrt{3} - x(4+\sqrt{3})] \quad \text{et} \quad x(4+\sqrt{3})[2a\sqrt{3} - x(4+\sqrt{3})];$$

donc pour

$$x(4+\sqrt{3}) = 2a\sqrt{3} - x(4+\sqrt{3}) \quad \text{ou} \quad x = \frac{a\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}.$$

541. *On donne sur une droite deux points* A *et* B, *distants de* a. *On marque sur cette droite un autre point* M *et on demande d'étudier les variations de la somme* $MA^2 + MB^2$.

Soient x la longueur de AM et y la valeur de la somme. On a

$$y = x^2 + (a-x)^2 = 2x^2 - 2ax + a^2.$$

On voit que y est minimum pour $x = \frac{a}{2}$. Le minimum est $\frac{a^2}{2}$. Le point M est alors au milieu du segment AB. Comme x peut varier de $-\infty$ à $+\infty$, on a le tableau

x	$-\infty$		$\frac{a}{2}$		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{a^2}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$
			Minimum		

Méthode des principes. — On peut écrire

$$S = a^2 - 2x(a-x).$$

S est minimum absolu lorsque $x(a-x)$ est maximum absolu, c'est-à-dire lorsque

$$x = a - x \quad \text{ou} \quad x = \frac{a}{2}.$$

CHAPITRE XVIII

Inéquations et Applications.

542. *Résoudre les inéquations suivantes :*

1° $x^2 + 2x - 15 > 0$	**Rép.**	$x < -5;\ x > 3$
2° $x^2 - 5x + 4 < 0$	»	$1 < x < 4$
3° $-2x^2 + 3x + 2 > 0$	»	$-0{,}5 < x < 2$
4° $-3x^2 + 7x - 2 < 0$	»	$x < \frac{1}{3};\ x > 2$
5° $x^2 + 31x + 150 > 0$	»	$x < -25;\ x > -6$
6° $x^2 - 10 > 3x;\ x^2 - 3x - 10 > 0$	»	$x < -2;\ x > 5$
7° $-x^2 < x - 12;\ x^2 + x - 12 > 0$	»	$x < -4;\ x > 3$
8° $x^2 + 7 > 3x;\ x^2 - 3x + 7 > 0$	»	toujours
9° $x^2 < 8 - 7x;\ x^2 + 7x - 8 < 0$	»	$-8 < x < 1$
10° $x^2 < 4;\ x^2 - 4 < 0$	»	$-2 < x < 2$
11° $x^2 > 3x;\ x^2 - 3x > 0$	»	$x < 0;\ x > 3$
12° $100 > x^2;\ x^2 - 100 < 0$	»	$-10 < x < 10$
13° $x(x + 2) < 3x;\ x(x - 1) < 0$	»	$0 < x < 1$

14° $3x(x - 3) > 5(x - 3);\ (x - 3)(3x - 5) > 0$

Rép. $x < \frac{5}{3};\ x > 3.$

15° $(2 - x)(4x - 5) < 0$

Rép. $x < 1{,}25;\ x > 2.$

543. *Résoudre les inéquations suivantes :*

1° $x(x^2 - 2x - 15) > 0$ ou $x(x + 3)(x - 5) > 0$

Rép. $-3 < x < 0;\ x > 5.$

2° $x(2x^2 - 7x + 3)(x^2 + x + 1) < 0$

ou $x(2x - 1)(x - 3) < 0.$

Rép. $x < 0;\ 0{,}5 < x < 3.$

3° $(x^4 - 4x^2 - 5)(7 - 3x) < 0$

ou $-(x^2 + 1)(x^2 - 5)(3x - 7) < 0$

ou $(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})(3x - 7) > 0.$

Rép. $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5};\ x > \frac{7}{3}.$

4° $(x-1)(3-5x)(x^2-1)(x^2+x+7) \geqslant 0$
ou $(x-1)^2(5x-3)(x+1) \leqslant 0$ ou $(x+1)(5x-3) \leqslant 0$.
Rép. $-1 \leqslant x \leqslant \frac{3}{5}$; $x = 1$.

5° $x(x^2+2)(x^2-8x+5)(x^3+6x^2-5x) \leqslant 0$
ou $(x^2-8x+5)(x^2+6x-5) \leqslant 0$.
Les racines des deux facteurs sont $4 \pm \sqrt{11}$ et $-3 \pm \sqrt{14}$.
Rép. $-3-\sqrt{14} \leqslant x \leqslant 4-\sqrt{11}$;
$-3+\sqrt{14} \leqslant x \leqslant 4+\sqrt{11}$.

6° $(3-2x)(x-2)(x^3-2x^2+3) > 0$
ou $(2x-3)(x-2)(x+1)(x^2-3x+3) < 0$
ou $(x+1)(2x-3)(x-2) < 0$.
Rép. $x < -1$; $1{,}5 < x < 2$.

543bis. *Résoudre les inéquations suivantes :*

1° $\frac{x-3}{x+2} < 0$ ou $(x-3)(x+2) < 0$
Rép. $-2 < x < 3$.

2° $\frac{x+5}{5-x} > 0$ ou $(x+5)(5-x) > 0$
Rép. $-5 < x < 5$.

3° $\frac{3x+1}{3-x} \geqslant 0$ ou $(3x+1)(3-x) \geqslant 0$
Rép. $-\frac{1}{3} \leqslant x < 3$.

4° $\frac{1}{4x^2-x-3} < 0$ ou $4x^2-x-3 < 0$
Rép. $-\frac{3}{4} < x < 1$.

5° $\frac{2x+1}{x-3} \geqslant 1$ ou $\frac{2x+1}{x-3} - 1 \geqslant 0$ ou $\frac{x+4}{x-3} \geqslant 0$
Rép. $x \leqslant -4$; $x > 3$.

6° $\frac{x}{2x+3} > \frac{1}{2}$ ou $\frac{x}{2x+3} - \frac{1}{2} > 0$ ou $\frac{-3}{2(2x+3)} > 0$
Rép. $x < -1{,}5$.

7° $\dfrac{2}{2x-3} < \dfrac{1}{x}$ ou $\dfrac{2}{2x-3} - \dfrac{1}{x} < 0$ ou $\dfrac{3}{x(2x-3)} < 0$

Rép. $0 < x < 1{,}5$.

8° $\dfrac{x^2+1}{x^2-2x-3} > 0$ ou $x^2 - 2x - 3 > 0$.

Rép. $x < -1$; $x > 3$.

9° $\dfrac{x-1}{x^2-2x-8} < 0$ ou $(x-1)(x+2)(x-4) < 0$

Rép. $x < -2$; $1 < x < 4$.

10° $\dfrac{3x^2-5x-2}{x} \geqslant 0$ ou $x\left(x+\dfrac{1}{3}\right)(x-2) \geqslant 0$

Rép. $-\dfrac{1}{3} \leqslant x < 0$; $x \geqslant 2$.

544. *Résoudre les inéquations suivantes :*

1° $\dfrac{4x^2-5x+1}{2x^2-5x+3} > 0$ ou $(4x^2-5x+1)(2x^2-5x+3) > 0$

ou $8(x-1)\left(x-\dfrac{1}{4}\right)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)(x-1) > 0$ ou $\left(x-\dfrac{1}{4}\right)\left(x-\dfrac{3}{2}\right) > 0$

Rép. $x < \dfrac{1}{4}$; $x > \dfrac{3}{2}$.

2° $\dfrac{x-1}{x^2+x-6} \leqslant 0$ ou $(x-1)(x-2)(x+3) \leqslant 0$

Rép. $x < -3$; $1 \leqslant x < 2$.

3° $\dfrac{x^2+1}{x^2-5x+6} < 0$ ou $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) < 0$

Rép. $2 < x < 3$.

4° $\dfrac{x^2+3x-10}{x^2+2x-8} > 0$ ou $(x-2)^2(x+5)(x+4) > 0$

Rép. $x < -5$; $x > -4$.

Remarque. — La valeur $x = 2$ ne convient pas.

5° $x + \dfrac{1}{x} > -3$ ou $\dfrac{x^2+1}{x} + 3 > 0$ ou $\dfrac{x^2+3x+1}{x} > 0$

ou $$x\left(x - \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right) > 0$$

Rép. $\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2} < x < \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$; $x > 0$.

6° $\dfrac{x-5}{x-3} > \dfrac{x-2}{x-1}$ ou $\dfrac{(x-5)(x-1)-(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-3)} > 0$

ou $\dfrac{-(x+1)}{(x-1)(x-3)} > 0$ ou $(x+1)(x-1)(x-3) < 0.$

Rép. $x < -1;\ \ 1 < x < 3.$

7° $\dfrac{x^2+14}{x^2+6x+8} \leqslant 1$ ou $\dfrac{-6(x-1)}{x^2+6x+8} \leqslant 0$

ou $(x-1)(x+2)(x+4) \geqslant 0.$

Rép. $-4 < x < -2;\ \ x \geqslant 1.$

8° $\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x-1} > 1$ ou $\dfrac{-x^2+2x-2}{x(x-1)} > 0$ ou $x(x-1) < 0.$

Rép. $0 < x < 1.$

9° $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} > 1$ ou $\dfrac{4x-10}{(x-3)(x-4)} > 0$

ou $(2x-5)(x-3)(x-4) > 0.$

Rép. $\dfrac{5}{2} < x < 3;\ \ x > 4.$

545. *Résoudre les inéquations irrationnelles suivantes :*

1° $\sqrt{x+5} > 2.$

Cette inéquation n'a de sens que si on a $x \geqslant -5.$

Si cette condition est remplie, on peut élever au carré sans changer le sens de l'inéquation, car les deux membres sont positifs. Il vient ainsi

$$x + 5 > 4 \quad \text{ou} \quad x > -1.$$

Rép. $x > -1.$

2° $\sqrt{7-x} < 3.$

On doit avoir $7 - x \geqslant 0$ ou $x \leqslant 7;$

puis, $7 - x < 9$ ou $x > -2.$

Rép. $-2 < x \leqslant 7.$

3° $\sqrt{x^2-x-20} < 4.$

Cette inéquation n'a de sens que si on a $x^2 - x - 20 \geqslant 0,$

ce qui exige $x \leqslant -4$ ou $x \geqslant 5.$ (1)

Si cette condition est remplie, on a :

$$x^2 - x - 20 < 16 \quad \text{ou} \quad x^2 - x - 36 < 0,$$

ou encore, $\dfrac{1-\sqrt{145}}{2} < x < \dfrac{1+\sqrt{145}}{2}.$ (2)

On range les quatre valeurs remarquables de x par ordre de grandeur croissante et on souligne les valeurs qui satisfont aux conditions (1) et (2).

Rép. $\dfrac{1-\sqrt{145}}{2} < x \leqslant -4;\ \ 5 \leqslant x < \dfrac{1+\sqrt{145}}{2}.$

4° $x + 2\sqrt{5 - 4x} > 5$

ou $$2\sqrt{5 - 4x} > 5 - x.$$

Cette inéquation n'a de sens que si on a
$$5 - 4x \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad x \leqslant 1{,}25.$$

Le second membre est positif quand cette condition est remplie. On a donc
$$4(5 - 4x) > (5 - x)^2 \quad \text{ou} \quad x^2 + 6x + 5 < 0$$
ou $$-5 < x < -1.$$

Rép. $-5 < x < -1.$

5° $\sqrt{2x(x + 5)} > 3 - x.$

Cette inéquation n'a de sens que si on a
$$x \leqslant -5 \quad \text{ou} \quad x \geqslant 0.$$

a) Si $x \geqslant 3$, le second membre est négatif ou nul et l'inéquation est vérifiée.

b) Si $x < 3$, les deux membres sont positifs et on a
$$2x(x + 5) > (3 - x)^2 \quad \text{ou} \quad x^2 + 16x - 9 > 0;$$
ce qui exige $$x < -8 - \sqrt{73} \quad \text{ou} \quad x > -8 + \sqrt{73};$$
ou, en tenant compte de ce que x est inférieur à 3,
$$x < -8 - \sqrt{73}; \quad -8 + \sqrt{73} < x < 3.$$

Rép. $x < -8 - \sqrt{73}$; $x > -8 + \sqrt{73}$.

6° $x + 2 > \sqrt{4 - x}$. — Cette inéquation n'a de sens que si l'on a à la fois $$x + 2 > 0 \quad \text{et} \quad 4 - x \geqslant 0$$
ou, en résumé, $$-2 < x \leqslant 4. \tag{1}$$

Si cette condition est remplie, on a
$$(x + 2)^2 > 4 - x \quad \text{ou} \quad x^2 + 5x > 0;$$
ce qui exige $$x < -5 \quad \text{ou} \quad x > 0. \tag{2}$$

On range les valeurs remarquables de x par ordre de grandeur croissante et on souligne les valeurs qui satisfont aux conditions (1) et (2).

Rép. $0 < x \leqslant 4$.

7° $3x - 1 > -\sqrt{2x^2 - 3x + 5}$.

Le trinôme placé sous le radical est toujours positif.

a) Si $3x - 1 \geqslant 0$ ou $x \geqslant \frac{1}{3}$, l'inéquation est vérifiée.

b) Si $3x - 1 < 0$, les deux membres sont négatifs. On a
$$(3x - 1)^2 < 2x^2 - 3x + 5 \quad \text{ou} \quad 7x^2 - 3x - 4 < 0,$$
ce qui exige, eu égard à l'hypothèse,
$$-\frac{4}{7} < x < \frac{1}{3}.$$

Rép. $x > -\frac{4}{7}$.

8° $\sqrt{x^2 - 3x + 1} < 3x - 4$.

Le trinôme placé sous le radical est positif ou nul, si on a

$$x \leqslant \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad x \geqslant \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

D'autre part, l'inéquation est évidemment impossible quand on a $3x - 4 \leqslant 0$ ou $x \leqslant \frac{4}{3}$. On voit que la relation $x \geqslant \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ donne les seules valeurs de x qui puissent être des solutions de l'inéquation proposée.

Supposons donc $x \geqslant \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$. Les deux membres de l'inéquation sont positifs et l'on a

$$x^2 - 3x + 1 < (3x - 4)^2 \quad \text{ou} \quad 8x^2 - 21x + 15 > 0.$$

Cette inéquation est vérifiée pour toutes les valeurs de x. Les solutions de l'inéquation proposée sont donc $x \geqslant \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

9° $\sqrt{2x - 1} - \sqrt{x - 4} < 3$. — On doit avoir $x \geqslant 4$.

L'inéquation peut s'écrire

$$\sqrt{2x - 1} < 3 + \sqrt{x - 4}.$$

Élevons au carré. Après réduction, on trouve

$$x - 6 < 6\sqrt{x - 4}.$$

a) Si $4 \leqslant x \leqslant 6$, l'inéquation est vérifiée.

b) Si $x > 6$, les deux membres sont positifs et on a

$$(x - 6)^2 < 36(x - 4) \quad \text{ou} \quad x^2 - 48x + 180 < 0;$$

ce qui exige, eu égard à l'hypothèse, $6 < x < 24 + \sqrt{396}$.

Rép. $4 \leqslant x < 24 + \sqrt{396}$.

10° $\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 1} > \sqrt{5 - x}$.

Cette inéquation n'a de sens que si l'on a $-0{,}5 \leqslant x \leqslant 5$. (1)

Cette condition étant satisfaite, l'inéquation peut s'écrire

$$\sqrt{2x + 1} > \sqrt{x + 1} + \sqrt{5 - x}$$

ou

$$2x + 1 > 6 + 2\sqrt{(x + 1)(5 - x)}$$

ou

$$2x - 5 > 2\sqrt{(x + 1)(5 - x)}. \qquad (2)$$

Cette inéquation est impossible si l'on a $2x - 5 \leqslant 0$ ou $x \leqslant \frac{5}{2}$.

On doit donc avoir $x > 2{,}5$, ou, en tenant compte de (1),

$$2{,}5 < x \leqslant 5.$$

Les deux membres de (2) sont alors positifs. En élevant au carré et en réduisant, on trouve

$$8x^2 - 36x + 5 > 0.$$

Les solutions de cette inéquation sont

$$x < \frac{18 - \sqrt{284}}{8}; \quad x > \frac{18 + \sqrt{284}}{8}.$$

Rép. $\dfrac{18 + \sqrt{284}}{8} < x \leqslant 5.$

11° $\sqrt{7x - 3} < \sqrt{3x + 2} + \sqrt{2x - 7}.$

On doit avoir $x \geqslant 3{,}5$. Élevons au carré. On trouve

$$7x - 3 < 5x - 5 + 2\sqrt{(3x + 2)(2x - 7)}$$

ou

$$x + 1 < \sqrt{(3x + 2)(2x - 7)}.$$

Le premier membre est positif puisqu'on suppose $x \geqslant 3{,}5$. On a

$$(x + 1)^2 < (3x + 2)(2x - 7) \quad \text{ou} \quad 5x^2 - 19x - 15 > 0;$$

ce qui exige $x < \dfrac{19 - \sqrt{661}}{10}$ ou $x > \dfrac{19 + \sqrt{661}}{10} = 4{,}4...$

Rép. $x > \dfrac{19 + \sqrt{661}}{10}.$

12° $\sqrt{x + 6} + \sqrt{x + 1} < \sqrt{7x + 4}.$

On doit avoir $x \geqslant -\dfrac{4}{7}$. L'inéquation donne alors

$$2x + 7 + 2\sqrt{(x + 6)(x + 1)} < 7x + 4$$

ou

$$2\sqrt{(x + 6)(x + 1)} < 5x - 3.$$

a) Si $x \leqslant \dfrac{3}{5}$, l'inéquation est impossible.

b) Si $x > \dfrac{3}{5}$, on peut élever au carré. On trouve :

$4(x + 6)(x + 1) < (5x - 3)^2$ ou $21x^2 - 58x - 15 > 0.$

Cette inéquation donne $x < -\dfrac{5}{21}$ ou $x > 3.$

Rép. $x > 3.$

546. *Résoudre les systèmes d'inéquations suivants :*

1° $x^2 + 3x - 10 < 0; \quad 5x^2 - 2x - 3 > 0.$

La première inéquation est vérifiée pour $-5 < x < 2.$

La deuxième inéquation est vérifiée pour $x < -0{,}6$; $x > 1$.
Rép. $-5 < x < -0{,}6$; $1 < x < 2$.

2° $x^2 < 9$; $x^2 - 16 > 4(x - 4)$.
La première inéquation peut s'écrire $x^2 - 9 < 0$; elle donne

$$-3 < x < 3.$$

La deuxième inéquation peut s'écrire $x(x - 4) > 0$; elle donne

$$x < 0; \quad x > 4.$$

Rép. $-3 < x < 0$.

3° $(x + 1)(x^2 + 2x - 1) > 0$; $-(x + 1)(x^2 + x - 2) < 0$.
La première inéquation est vérifiée pour

$$-1 - \sqrt{2} < x < -1; \quad x > -1 + \sqrt{2}.$$

La deuxième inéquation est vérifiée pour

$$-2 < x < -1; \quad x > 1.$$

Rép. $-2 < x < -1$; $x > 1$.

4° $2x^2 - 5x - 3 > 0$; $x^2 - 3x - 4 < 0$; $x^2 - 1 > 0$.
La première inéquation est vérifiée pour $x < -0{,}5$; $x > 3$.
La deuxième inéquation est vérifiée pour $-1 < x < 4$.
La troisième inéquation est vérifiée pour $x < -1$; $x > 1$.
Rép. $3 < x < 4$.

5° $\dfrac{12x - 32}{x} < x < \dfrac{11x - 10}{x}$.

L'inéquation $x > \dfrac{12x - 32}{x}$ peut s'écrire $\dfrac{x^2 - 12x + 32}{x} > 0$.
Elle est vérifiée pour $0 < x < 4$; $x > 8$.
La deuxième inéquation donne de même $x < 0$; $1 < x < 10$.
Rép. $1 < x < 4$; $8 < x < 10$.

6° $\dfrac{1}{x - 1} > \dfrac{1}{x - 5} > \dfrac{1}{x - 3}$. — On doit avoir

a) $\dfrac{1}{x - 1} > \dfrac{1}{x - 5}$ ou $\dfrac{-4}{(x - 1)(x - 5)} > 0$;
ce qui exige $1 < x < 5$

b) $\dfrac{1}{x - 5} > \dfrac{1}{x - 3}$ ou $\dfrac{2}{(x - 3)(x - 5)} > 0$;
ce qui exige $x < 3$ ou $x > 5$.
Rép. $1 < x < 3$.

7° $-3\sqrt{-x^2-x+6} < 2(2x+1) < 3.$

I. Résolvons d'abord l'inéquation

$$-3\sqrt{-x^2-x+6} < 2(2x+1).$$

Elle n'a de sens que si l'on a

$$-x^2-x+6 \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad -3 \leqslant x \leqslant 2.$$

a) Si $-0{,}5 \leqslant x \leqslant 2$, le second membre est positif ou nul et l'inéquation est vérifiée.

b) Si $-3 \leqslant x < -0{,}5$, l'inéquation, mise sous la forme

$$3\sqrt{-x^2-x+6} > -2(2x+1),$$

à ses deux membres positifs ou nuls et l'élévation au carré donne

$$9(-x^2-x+6) > 4(2x+1)^2 \quad \text{ou} \quad x^2+x-2 < 0;$$

ce qui exige, eu égard à l'hypothèse,

$$-2 < x < -0{,}5.$$

c) *En résumé*, la première inéquation est vérifiée pour $-2 < x \leqslant 2$.

II. Considérons ensuite l'inéquation

$$2(2x+1) < 3.$$

Elle est vérifiée pour $x < \frac{1}{4}$.

Rép. $-2 < x < \frac{1}{4}$.

8° $x^2+8x-34 < 2-x < \sqrt{2x^2+5x-3}.$

I. L'inéquation $x^2+8x-34 < 2-x$
peut s'écrire $x^2+9x-36 < 0.$
Elle est vérifiée pour $-12 < x < 3.$

II. L'inéquation $2-x < \sqrt{2x^2+5x-3}$
n'a de sens que si on a $2x^2+5x-3 \geqslant 0$; ce qui exige

$$x \leqslant -3 \quad \text{ou} \quad x \geqslant 0{,}5.$$

a) Si $x \geqslant 2$, le premier membre est négatif ou nul et l'inéquation est vérifiée.

b) Si $0{,}5 \leqslant x < 2$, ou encore, si $x \leqslant -3$, les deux membres sont positifs ou nuls et l'élévation au carré donne

$$(2-x)^2 < 2x^2+5x-3 \quad \text{ou} \quad x^2+9x-7 > 0;$$

ce qui exige, eu égard à l'hypothèse,

$$x < \frac{-9-\sqrt{109}}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{-9+\sqrt{109}}{2} < x < 2.$$

c) La 2e inéquation est donc vérifiée pour

$$x < \frac{-9-\sqrt{109}}{2} \quad \text{ou} \quad x > \frac{-9+\sqrt{109}}{2}.$$

Rép. $-12 < x < \dfrac{-9-\sqrt{109}}{2}$; $\dfrac{-9+\sqrt{109}}{2} < x < 3$.

547. *Quelles valeurs faut-il donner à* x *pour que le trinôme* $x^2 - 8x + 20$ *reste compris entre* 5 *et* 8? *Vérification graphique.*

On doit avoir :

1° $x^2 - 8x + 20 > 5$ ou $x^2 - 8x + 15 > 0$; ce qui exige $x < 3$ ou $x > 5$.

2° $x^2 - 8x + 20 < 8$ ou $x^2 - 8x + 12 < 0$; ce qui exige $2 < x < 6$.

Rép. $2 < x < 3$; $5 < x < 6$.

Pour faire la vérification graphique, on trace en premier lieu la parabole $y = x^2 - 8x + 20$; puis les droites $y = 5$ et $y = 8$.

548. *Quelles valeurs faut-il donner à* x *pour que le trinôme* $x^2 - 7x + 10$ *reste compris entre* -2 *et* 4? *Vérification graphique.*

On doit avoir :

1° $x^2 - 7x + 10 > -2$ ou $x^2 - 7x + 12 > 0$; ce qui exige $x < 3$ ou $x > 4$.

2° $x^2 - 7x + 10 < 4$ ou $x^2 - 7x + 6 < 0$; ce qui exige $1 < x < 6$.

Rép. $1 < x < 3$; $4 < x < 6$.

549. *Pour quelles valeurs de* x *la fraction* $\dfrac{x^2 - 3x + 4}{x + 3}$ *est-elle comprise entre* 1 *et* 4?

On doit avoir :

1° $\dfrac{x^2 - 3x + 4}{x + 3} > 1$ ou $\dfrac{x^2 - 4x + 1}{x + 3} > 0$;

ce qui exige $-3 < x < 2 - \sqrt{3}$ ou $x > 2 + \sqrt{3}$.

2° $\dfrac{x^2 - 3x + 4}{x + 3} < 4$ ou $\dfrac{x^2 - 7x - 8}{x + 3} < 0$;

ce qui exige $x < -3$ ou $-1 < x < 8$.

Rép. $-1 < x < 2 - \sqrt{3}$; $2 + \sqrt{3} < x < 8$.

550. *Déterminer* m *pour que les inéquations suivantes soient vérifiées pour toutes les valeurs de* x.

1° $mx^2 + (m-1)x + m - 1 < 0$.

On doit avoir :

a) $m < 0$.
b) $(m-1)^2 - 4m(m-1) < 0$ ou $(m-1)(-3m-1) < 0$;
ce qui exige $m < -\frac{1}{3}$ ou $m > 1$.

Rép. $m < -\frac{1}{3}$.

2° $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3(m-1) < 0$. — On doit avoir :
a) $m + 1 < 0$ ou $m < -1$.
b) $(m-1)^2 - 3(m^2-1) < 0$ ou $(m-1)(-2m-4) < 0$;
ce qui exige $m < -2$ ou $m > 1$.
Rép. $m < -2$.

3° $(m-1)x^2 - 4mx - 2(m+2) \leqslant 0$. — On doit avoir :
a) $m - 1 < 0$ ou $m < 1$.
b) $4m^2 + 2(m+2)(m-1) \leqslant 0$ ou $6m^2 + 2m - 4 \leqslant 0$;
ce qui exige $-1 \leqslant m \leqslant \frac{2}{3}$.

Rép. $-1 \leqslant m \leqslant \frac{2}{3}$.

4° $(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m - 6 > 0$. — On doit avoir :
a) $m - 2 > 0$ ou $m > 2$.
b) $(2m-3)^2 - (5m-6)(m-2) < 0$ ou $-m^2 + 4m - 3 < 0$;
ce qui exige $m < 1$ ou $m > 3$.
Rép. $m > 3$.

5° $x^2 + 2mx + m > \frac{3}{16}$.

Cette inéquation peut s'écrire

$$x^2 + 2mx + m - \frac{3}{16} > 0 \quad \text{ou} \quad 16x^2 + 32mx + 16m - 3 > 0.$$

On doit avoir

$$256m^2 - 16(16m - 3) < 0 \quad \text{ou} \quad 16m^2 - 16m + 3 < 0;$$

ce qui exige $\frac{1}{4} < m < \frac{3}{4}$.

Rép. $\frac{1}{4} < m < \frac{3}{4}$.

551. *Quelles valeurs faut-il attribuer à* m *pour avoir, quel que soit* x,

$$\frac{4x^2 - 6x + 12}{x^2 - 2x + 4} > m.$$

On doit avoir

$$\frac{(4-m)x^2 + 2(m-3)x + 12 - 4m}{x^2 - 2x + 4} > 0.$$

Le dénominateur est toujours positif. Il suffit donc d'avoir, quel que soit x,

$$(4 - m)x^2 + 2(m - 3)x + 12 - 4m > 0.$$

On doit avoir :

a) $4 - m > 0$ ou $m < 4$.

b) $(m - 3)^2 - (4 - m)(12 - 4m) < 0$ ou $3m^2 - 22m + 39 > 0$;

ce qui exige $\quad m < 3 \quad$ ou $\quad m > \frac{13}{3}$.

Rép. $m < 3$.

552. *Quelles valeurs faut-il attribuer à* m *pour que la fraction*

$$\frac{x^2 - mx + 1}{x^2 + x + 1}$$

reste comprise entre -3 *et* $+3$, *pour toutes les valeurs de* x?

On doit avoir, quel que soit x :

a) $\dfrac{x^2 - mx + 1}{x^2 + x + 1} > -3$ ou $\dfrac{4x^2 - (m - 3)x + 4}{x^2 + x + 1} > 0$

ou $\quad 4x^2 - (m - 3)x + 4 > 0;$

ce qui exige $(m - 3)^2 - 64 < 0$ ou $(m + 5)(m - 11) < 0$

ou $\quad -5 < m < 11.$

b) $\dfrac{x^2 - mx + 1}{x^2 + x + 1} < 3$ ou $\dfrac{-2x^2 - (m + 3)x - 2}{x^2 + x + 1} < 0$

ou $\quad 2x^2 + (m + 3)x + 2 > 0;$

ce qui exige $(m + 3)^2 - 16 < 0$ ou $(m - 1)(m + 7) < 0$

ou $\quad -7 < m < 1.$

Rép. $-5 < m < 1$.

553. *Montrer qu'on a :*

1° $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} > 1$, quand a et b ont le même signe.

Multiplions les deux membres par ab qui est positif. On trouve

$$a^2 + b^2 > ab.$$

Cette inégalité a été démontrée dans le Traité (403).

2° $2(a^2 + b^2) > (a + b)^2$ quand $a \neq b$.

L'inégalité peut s'écrire

$$a^2 - 2ab + b^2 > 0 \quad \text{ou} \quad (a - b)^2 > 0.$$

3° $a^2 + b^2 + c^2 > ab + ac + bc$, sauf quand $a = b = c$.

Faisons passer tous les termes dans le premier membre et mettons celui-ci sous la forme d'un trinôme en a.

$$a^2 - (b + c)a + b^2 + c^2 - bc > 0.$$

Le premier terme de ce trinôme est positif et son réalisant est

$$(b + c)^2 - 4(b^2 + c^2 - bc) = -3(b - c)^2.$$

Le trinôme est donc essentiellement positif quand $b \neq c$.

4° $a^2b + b^2c + c^2a > a^2c + b^2a + c^2b$ quand $a > b > c$.

Cette inégalité peut s'écrire

$$a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) > 0.$$

De plus, on montre aisément (**165**, 1°) que le premier membre vaut

$$(a - b)(b - c)(a - c);$$

il est donc positif, car on suppose $a > b > c$.

5° $x^5 + y^5 - x^4y - xy^4 \geqslant 0$ quand $x + y > 0$.

L'inégalité peut s'écrire

$$(x^5 - x^4y) - (xy^4 - y^5) > 0 \quad \text{ou} \quad (x^4 - y^4)(x - y) > 0$$

ou
$$(x^2 + y^2)(x - y)^2(x + y) > 0.$$

Cette inégalité est vraie dès que $x \neq y$. L'égalité a lieu quand $x = y$.

6° $a^3 + b^3 + c^3 > 3abc$ si $a + b + c > 0$ et $b \neq c$.

L'inégalité peut s'écrire $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc > 0$.

Le premier membre est divisible par le binôme $a + (b + c)$ et il peut se mettre sous la forme

$$(a + b + c)[a^2 - (b + c)a + b^2 + c^2 - bc].$$

Le premier facteur est positif par hypothèse; le second l'est également, car on a

$$\rho = (b + c)^2 - 4(b^2 + c^2 - bc) = -3(b - c)^2 < 0.$$

Les deux facteurs étant positifs, leur produit l'est également.

7° $3(1 + a^2 + a^4) \geqslant (1 + a + a^2)^2$. (1)

On a $(1 + a + a^2)^2 = 1 + a^2 + a^4 + 2a(1 + a + a^2)$.

Par suite, $1 + a^2 + a^4 = (1 + a + a^2)^2 - 2a(1 + a + a^2)$.

Dans (1), remplaçons $1 + a^2 + a^4$ par cette valeur et divisons les deux membres par $1 + a + a^2$ qui est toujours positif. L'inégalité à démontrer devient

$$3(1 + a + a^2) - 6a \geqslant 1 + a + a^2 \quad \text{ou} \quad a^2 - 2a + 1 \geqslant 0.$$

Cette relation est toujours vraie, car le premier membre est égal à $(a - 1)^2$. L'égalité a lieu quand $a = 1$.

554. *Dans l'équation* $(\mathrm{m} - 2)\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x}(\mathrm{m} + 1) + 2\mathrm{m} + 1 = 0$, *déterminer* m *pour que les deux racines soient positives.*

On doit avoir :

1° $\rho = (m + 1)^2 - (m - 2)(2m + 1) \geqslant 0$

ou
$$-m^2 + 5m + 3 \geqslant 0;$$

ce qui a lieu pour $\dfrac{5 - \sqrt{37}}{2} \leqslant m \leqslant \dfrac{5 + \sqrt{37}}{2}$.

2° $P = \dfrac{2m+1}{m-2} > 0$; ce qui a lieu pour $m < -0{,}5$ ou $m > 2$.

3° $S = \dfrac{2(m+1)}{m-2} > 0$; ce qui a lieu pour $m < -1$ ou $m > 2$.

Rép. $2 < m \leqslant \dfrac{5+\sqrt{37}}{2}$.

555. *Déterminer* m *pour que les équations suivantes admettent deux racines négatives.*

1° $mx^2 + 2x(m-1) - (m+1) = 0$. — On doit avoir :

a) $\rho = (m-1)^2 + m(m+1) \geqslant 0$ ou $2m^2 - m + 1 > 0$; ce qui a toujours lieu.

b) $P = \dfrac{-(m+1)}{m} > 0$ ou $-1 < m < 0$.

c) $S = \dfrac{-2(m-1)}{m} < 0$ ou $m(m-1) > 0$; ce qui exige $m < 0$ ou $m > 1$.

Rép. $-1 < m < 0$.

2° $(m-2)x^2 + 2x(m-2) + 4m - 7 = 0$. — On doit avoir :

a) $\rho = (m-2)^2 - (m-2)(4m-7) \geqslant 0$

ou $(m-2)(-3m+5) \geqslant 0$;

ce qui exige $\dfrac{5}{3} \leqslant m < 2$.

Nous avons écarté $m = 2$; pour cette valeur de m, l'équation proposée est du premier degré en x.

b) $P = \dfrac{4m-7}{m-2} > 0$; ce qui exige $m < \dfrac{7}{4}$ ou $m > 2$.

c) $S = \dfrac{-2(m-2)}{m-2} < 0$ ou $-2 < 0$, ce qui a toujours lieu.

Rép. $\dfrac{5}{3} \leqslant m < \dfrac{7}{4}$.

3° $(m-3)x^2 + x(m-1) + m + 2 = 0$. — On doit avoir :

a) $\rho = (m-1)^2 - 4(m+2)(m-3) \geqslant 0$

ou $-3m^2 + 2m + 25 \geqslant 0$;

ce qui a lieu pour $\dfrac{1-\sqrt{76}}{3} \leqslant m \leqslant \dfrac{1+\sqrt{76}}{3}$.

b) $P = \dfrac{m+2}{m-3} > 0$; ce qui exige $m < -2$ ou $m > 3$.

c) $S = \dfrac{-(m-1)}{m-3} < 0$; ce qui exige $m < 1$ ou $m > 3$.

Rép. $\dfrac{1-\sqrt{76}}{3} \leqslant m < -2$; $3 < m \leqslant \dfrac{1+\sqrt{76}}{3}$.

556. *Dans l'équation* $(m - 6)x^2 - 4(m - 1)x + m - 3 = 0$, *déterminer* m *pour que les racines soient de signes contraires.*

Il suffit d'avoir $P = \dfrac{m - 3}{m - 6} < 0$ ou $(m - 3)(m - 6) < 0$.

Rép. $3 < m < 6$.

557. *Dans l'équation* $(3m - 4)x^2 - x(2m + 1) - (3m + 1) = 0$, *déterminer* m *pour que les racines soient de signes contraires, la négative ayant la plus grande valeur absolue.*

On doit avoir :

a) $P = \dfrac{-(3m - 1)}{3m - 4} < 0$; ce qui exige $m < -\dfrac{1}{3}$ ou $m > \dfrac{4}{3}$.

b) $S = \dfrac{2m + 1}{3m - 4} < 0$ ou $-\dfrac{1}{2} < m < \dfrac{4}{3}$.

Rép. $-\dfrac{1}{2} < m < -\dfrac{1}{3}$.

558. *Étant donné* $y = \sqrt[3]{(x^2 + x - 6)(x^2 - 6x + 5)}$, *déterminer les limites entre lesquelles* x *doit être compris pour que* y *soit négatif.*

On doit avoir $(x^2 + x - 6)(x^2 - 6x + 5) < 0$

ou $(x + 3)(x - 1)(x - 2)(x - 5) < 0$.

Rép. $-3 < x < 1$; $2 < x < 5$.

559. *Déterminer* m *pour que l'équation* $(m - 1)x^4 - 2mx^2 + m - 2 = 0$ *admette quatre racines.*

La résolvante doit admettre deux racines positives distinctes. On doit donc avoir :

a) $\rho = m^2 - (m - 1)(m - 2) > 0$ ou $3m - 2 > 0$ ou $m > \dfrac{2}{3}$.

b) $P = \dfrac{m - 2}{m - 1} > 0$; ce qui exige $m < 1$ ou $m > 2$.

c) $S = \dfrac{2m}{m - 1} > 0$; ce qui exige $m < 0$ ou $m > 1$.

Rép. $m > 2$.

560. *Déterminer* m *pour que l'équation* $(3m - 1)x^4 - (2m + 1)x^2 + m = 0$ *n'admette pas de racine.*

L'équation proposée n'a pas de racine, lorsque la résolvante n'a pas de racine ou lorsqu'elle a des racines négatives.

1° La résolvante n'a pas de racine lorsqu'on a

$\rho = (2m + 1)^2 - 4m(3m - 1) < 0$ ou $-8m^2 + 8m + 1 < 0$;

ce qui exige $m < \dfrac{2 - \sqrt{6}}{4}$ ou $m > \dfrac{2 + \sqrt{6}}{4}$.

2o La résolvante a des racines négatives lorsqu'on a :

a) $\rho = -8m^2 + 8m + 1 \geqslant 0$ ou $\dfrac{2-\sqrt{6}}{4} \leqslant m \leqslant \dfrac{2+\sqrt{6}}{4}$.

b) $P = \dfrac{m}{3m-1} > 0$; ce qui exige $m < 0$ ou $m > \dfrac{1}{3}$.

c) $S = \dfrac{2m+1}{3m-1} < 0$ ou $-\dfrac{1}{2} < m < \dfrac{1}{3}$.

En résumé, on doit avoir $\dfrac{2-\sqrt{6}}{4} \leqslant m < 0$.

Rép. $m < 0$; $m > \dfrac{2+\sqrt{6}}{4}$.

561. *Déterminer* m *pour que l'équation* $x^4 - mx^2 + m^2 - 1 = 0$ *admette deux racines.*

L'équation bicarrée a deux racines, si la résolvante admet deux racines de signes contraires; ce qui exige

$$P = m^2 - 1 < 0 \quad \text{ou} \quad -1 < m < 1.$$

L'équation bicarrée a deux racines doubles, si la résolvante a une racine double non négative; c'est ce qui a lieu pour $m = \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$.

562. *On donne les équations suivantes et on demande de déterminer* m *pour que leurs racines et un nombre donné soient rangés dans l'ordre indiqué.*

1o $(2m-1)x^2 - x(m+2) + 2m = 0$; $0 < x'' < x'$.

On doit avoir :

a) $\rho = (m+2)^2 - 8m(2m-1) > 0$ ou $-15m^2 + 12m + 4 > 0$

ou $$\frac{6-\sqrt{96}}{15} < m < \frac{6+\sqrt{96}}{15}.$$

b) $(2m-1)f(0) = 2m(2m-1) > 0$; ce qui a lieu quand $m < 0$ ou $m > 0{,}5$.

c) $0 < \dfrac{m+2}{2(2m-1)}$; ce qui a lieu pour $m < -2$ ou $m > \dfrac{1}{2}$.

Rép. $\dfrac{1}{2} < m < \dfrac{6+\sqrt{96}}{15}$.

2o $x(x+1)(m^2+3m+3) + m^2 = 0$; $x'' < -0{,}5 < x'$.

On doit avoir

$$(m^2+3m+3)f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}(m^2+3m+3)(m^2-m-1) < 0$$

ou $$m^2 - m - 1 < 0.$$

Rép. $\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} < m < \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}.$

3° $(m + 1)x^2 + x(2m + 1) + m^2 - 2m = 0;\quad x'' < 0 < x'.$
On doit avoir
$$(m + 1)f(0) = (m + 1)(m^2 - 2m) < 0.$$
Rép. $m < -1;\quad 0 < m < 2.$

4° $(m - 2)x^2 - 2x(m + 1) + 2m + 1 = 0;\quad 0 < x'' < x'.$
On doit avoir :
a) $\rho = (m + 1)^2 - (2m + 1)(m - 2) > 0$ ou $-m^2 + 5m + 3 > 0$

ou $$\frac{5 - \sqrt{37}}{2} < m < \frac{5 + \sqrt{37}}{2}.$$

b) $(m - 2)f(0) = (m - 2)(2m + 1) > 0$; ce qui a lieu quand
$$m < -0{,}5 \quad \text{ou} \quad m > 2.$$

c) $0 < \dfrac{m + 1}{m - 2}$; ce qui a lieu pour $m < -1$ ou $m > 2.$

Rép. $2 < m < \dfrac{5 + \sqrt{37}}{2}.$

5° $mx^2 + (m - 1)x + m^2 + 2 = 0;\quad x'' < -3 < x'.$
On doit avoir
$$mf(-3) = m(m^2 + 6m + 5) = m(m + 1)(m + 5) < 0.$$
Rép. $m < -5;\quad -1 < m < 0.$

6° $(m - 1)x^2 + (m + 1)x + m - 1 = 0;\quad x'' < x' < 5.$
On doit avoir :
a) $\rho = (m + 1)^2 - 4(m - 1)^2 = -3m^2 + 10m - 3 > 0,$

ou $$\frac{1}{3} < m < 3.$$

b) $(m - 1)f(5) = (m - 1)(31m - 21) > 0$; ce qui exige
$$m < \frac{21}{31} \quad \text{ou} \quad m > 1.$$

c) $5 > \dfrac{-(m + 1)}{2(m - 1)}$ ou $\dfrac{11m - 9}{m - 1} > 0;$

ce qui exige $$m < \frac{9}{11} \quad \text{ou} \quad m > 1.$$

Rép. $\dfrac{1}{3} < m < \dfrac{21}{31};\quad 1 < m < 3.$

563. *On donne les équations suivantes et on demande de déterminer* m *pour que leurs racines et deux nombres donnés soient rangés dans l'ordre indiqué.*

1° $(m-6)x^2 - x(m-3) + 2m - 11 = 0; \quad x'' < 0 < x' < 4.$

On doit avoir :

a) $(m-6)f(0) = (m-6)(2m-11) < 0$ ou $5{,}5 < m < 6.$

b) $(m-6)f(4) = (m-6)(14m-95) > 0;$ ce qui exige

$$m < 6 \quad \text{ou} \quad m > \frac{95}{14}.$$

Rép. $\dfrac{11}{2} < m < 6.$

2° $x^2(m+4) - 2x(3m+10) + 3(3m+4) = 0; \quad 0 < x'' < x' < 4.$

On doit avoir :

a) $\rho = (3m+10)^2 - 3(m+4)(3m+4) > 0$ ou $12m + 52 > 0$

ou

$$m > -\frac{13}{3}.$$

b) $(m+4)f(0) = 3(m+4)(3m+4) > 0;$ ce qui exige

$$m < -4 \quad \text{ou} \quad m > -\frac{4}{3}$$

c) $(m+4)f(4) = (m+4)(m-4) > 0;$ ce qui exige

$$m < -4 \quad \text{ou} \quad m > 4.$$

d) $0 < \dfrac{3m+10}{m+4};$ ce qui exige $m < -4$ ou $m > -\dfrac{10}{3}.$

e) $4 > \dfrac{3m+10}{m+4}$ ou $\dfrac{m+6}{m+4} > 0;$ ce qui exige

$$m < -6 \quad \text{ou} \quad m > -4.$$

Rép. $m > 4.$

3° $mx^2 + 2mx + m - 4 = 0; \quad -6 < x'' < 0 < x'.$

On doit avoir :

a) $mf(-6) = m(25m-4) > 0;$ ce qui exige $m < 0$ ou $m > \dfrac{4}{25}.$

b) $mf(0) = m(m-4) < 0$ ou $0 < m < 4.$

Rép. $\dfrac{4}{25} < m < 4.$

4° $(2m-3)x^2 + (m-1)x - 2(m-1) = 0; \quad -5 < x'' < x' < 4.$

On doit avoir :

a) $\rho = (m-1)^2 + 8(m-1)(2m-3) > 0$ ou $17m^2 - 42m + 25 > 0;$

ce qui exige $m < 1$ ou $m > \dfrac{25}{17}.$

b) $(2m - 3)f(-5) = (2m - 3)(43m - 68) > 0;$

ce qui exige $m < \frac{3}{2}$ ou $m > \frac{68}{43}$.

c) $(2m - 3)f(4) = (2m - 3)(34m - 50) > 0;$

ce qui exige $m < \frac{25}{17}$ ou $m > \frac{3}{2}$.

d) $-5 < \frac{-(m-1)}{2(2m-3)}$ ou $\frac{19m - 29}{2(2m-3)} > 0;$

ce qui exige $m < \frac{3}{2}$ ou $m > \frac{29}{19}$.

e) $4 > \frac{-(m-1)}{2(2m-3)}$ ou $\frac{17m - 25}{2(2m-3)} > 0;$

ce qui exige $m < \frac{25}{17}$ ou $m > \frac{3}{2}$.

Rép. $m < 1$ ou $m > \frac{68}{43}$.

5° $(m-3)x^2 - x(3m-2) + m - 1 = 0;\quad x'' < x' < 0 < 5.$

On doit avoir :

a) $\rho = (3m-2)^2 - 4(m-1)(m-3) > 0$ ou $5m^2 + 4m - 8 > 0;$

ce qui exige $m < \frac{-2-\sqrt{44}}{5}$ ou $m > \frac{-2+\sqrt{44}}{5}$.

b) $(m-3)f(0) = (m-3)(m-1) > 0;$ ce qui exige $m < 1$ ou $m > 3$.

c) $0 > \frac{3m-2}{2(m-3)}$ ou $(3m-2)(m-3) < 0$ ou $\frac{2}{3} < m < 3$.

Rép. $\frac{-2+\sqrt{44}}{5} < m < 1$.

6° $(m^2 - m - 2)x^2 + 2x(m-1) + 2 = 0;\quad -1 < x'' < 1 < x'.$

On doit avoir :

a) $(m^2 - m - 2)f(1) = (m^2 - m - 2)(m^2 + m - 2) < 0;$ ce qui a lieu pour $-2 < m < -1;\ 1 < m < 2.$

b) $(m^2 - m - 2)f(-1) = (m^2 - m - 2)(m^2 - 3m + 2) > 0;$ ce qui a lieu pour $m < -1;\ 1 < m < 2;\ m > 2.$

Rép. $-2 < m < -1;\ 1 < m < 2.$

564. *Dans l'équation* $mx^2 - (2m+1)x + 2(m-1) = 0$, *déterminer* m *pour que les racines soient positives et inférieures à* 3.

On doit avoir le classement $0 < x'' < x' < 3$.

a) $\rho = (2m+1)^2 - 8m(m-1) > 0$ ou $-4m^2 + 12m + 1 > 0;$

ce qui exige $\frac{3-\sqrt{10}}{2} < m < \frac{3+\sqrt{10}}{2}$.

b) $mf(0) = 2m(m - 1) > 0$; ce qui exige $m < 0$ ou $m > 1$.

c) $mf(3) = m(5m - 5) > 0$; ce qui exige $m < 0$ ou $m > 1$.

d) $0 < \frac{2m+1}{2m}$; ce qui exige $m < -\frac{1}{2}$ ou $m > 0$.

e) $3 > \frac{2m+1}{2m}$ ou $\frac{4m-1}{2m} > 0$; ce qui exige $m < 0$ ou $m > \frac{1}{4}$.

Rép. $1 < m < \frac{3 + \sqrt{10}}{2}$.

565. *Dans l'équation* $(2m - 3)x^2 - x(3m + 4) + 4m + 1 = 0$, *déterminer* m *pour que les nombres* 0 *et* 5 *comprennent une racine et une seule.*

On doit avoir $f(0) \times f(5) = (4m + 1)(39m - 94) < 0$.

Rép. $-\frac{1}{4} < m < \frac{94}{39}$.

Pour $m = \frac{3}{2}$, l'équation proposée se réduit à une équation du 1er degré $-\frac{17x}{2} + 7 = 0$. La racine de cette dernière équation est $\frac{14}{17}$; elle est encore comprise entre 0 et 5.

566. *Dans l'équation* $(3m^2 - 8m - 4)x^2 + (m^3 + 1)x - 2(m^3 - 1) = 0$, *déterminer* m *pour que l'une des racines et une seule soit comprise entre* 0 *et* 2.

On doit avoir :

$$f(0) \times f(2) = -2(m^3 - 1) \times 4(3m^2 - 8m - 3) < 0$$

ou $$-8(m - 1)(m^2 + m + 1)(3m + 1)(m - 3) < 0$$

ou $$(3m + 1)(m - 1)(m - 3) > 0.$$

Rép. $-\frac{1}{3} < m < 1$; $m > 3$.

567. *Déterminer* m *pour que l'équation* $(m + 1)x^2 - 3(m - 1)x + 4 = 0$ *admette une racine inférieure à* 1 *et l'autre comprise entre* 2 *et* 3.

On doit avoir le classement $x'' < 1 < 2 < x' < 3$.

a) $(m + 1)f(1) = (m + 1)(-2m + 8) < 0$; ce qui exige $m < -1$ ou $m > 4$.

b) $(m + 1)f(2) = (m + 1)(-2m + 14) < 0$; ce qui exige $m < -1$ ou $m > 7$.

c) $(m + 1)f(3) = 22(m + 1) > 0$; ce qui exige $m > -1$.

Rép. $m > 7$.

568. *Combien, suivant les valeurs de* m, *l'équation*

$$(m + 3)x^2 + (2m + 3)x + m + 5 = 0.$$

admet-elle de racines négatives?

a) L'équation admet deux racines et l'une d'elles est négative lorsqu'on a

$$(m+3)f(0) = (m+3)(m+5) < 0 \quad \text{ou} \quad -5 < m < -3.$$

b) L'équation admet deux racines négatives lorsqu'on a

1° $\rho = (2m+3)^2 - 4(m+3)(m+5) > 0$

$$\text{ou} \quad -20m - 51 > 0 \quad \text{ou} \quad m < -\frac{51}{20}.$$

2° $P = \dfrac{m+5}{m+3} > 0$; ce qui exige $m < -5$ ou $m > -3$.

3° $S = \dfrac{-(2m+3)}{m+3} < 0$; ce qui exige $m < -3$ ou $m > -\dfrac{3}{2}$

En résumé, on doit avoir $m < -5$.

c) Résumé.

1° $m < -5$; deux racines négatives.
2° $m = -5$; l'équation devient $2x^2 + 7x = 0$; une racine négative.
3° $-5 < m < -3$; une racine négative.
4° $m = -3$; l'équation devient $3x - 2 = 0$; aucune racine négative.
5° $m > -3$; pas de racine négative.

569. *Combien suivant les valeurs de* m, *l'équation*

$$(m+1)x^2 + 3mx - 1 = 0$$

admet-elle de racines supérieures à 2 *?*

a) L'équation admet deux racines et l'une d'elles est supérieure à 2, lorsqu'on a

$$(m+1)f(2) = (m+1)(10m+3) < 0 \quad \text{ou} \quad -1 < m < -0{,}3.$$

b) L'équation admet deux racines supérieures à 2 lorsqu'on a :

1° $\rho = 9m^2 + 4m + 4 > 0$; condition toujours réalisée.

2° $(m+1)f(2) = (m+1)(10m+3) > 0$;

$$\text{ce qui exige} \quad m < -1 \quad \text{ou} \quad m > -0{,}3.$$

3° $2 < \dfrac{-3m}{2(m+1)}$ ou $\dfrac{7m+4}{m+1} < 0$; ce qui exige $-1 < m < -\dfrac{4}{7}$.

Ces deux dernières conditions sont incompatibles.

c) Résumé.

1° $m < -1$; pas de racine supérieure à 2.

2° $m = -1$; l'équation devient $3x + 1 = 0$.

3° $-1 < m < -0{,}3$; une racine supérieure à 2.

4° $m = -\dfrac{3}{10}$; on a l'équation $7x^2 - 9x - 10 = 0$; racines $-\dfrac{5}{7}$ et 2.

5° $m > -0{,}3$; pas de racine supérieure à 2.

570. *Combien, suivant les valeurs de* m, *les équations suivantes ont-elles de racines comprises entre* — 2 *et* 2*?*

1° $mx^2 - mx + 1 = 0.$

I. L'équation admet deux racines et l'une d'elles est comprise entre — 2 et + 2, si on a

$f(-2).f(2) = (6m + 1)(2m + 1) < 0$ ou $-\frac{1}{2} < m < -\frac{1}{6}.$

II. L'équation a deux racines comprises entre — 2 et + 2 si on a :

a) $\rho = m^2 - 4m > 0$; ce qui exige $m < 0$ ou $m > 4.$

b) $mf(-2) = m(6m + 1) > 0$; ce qui exige $m < -\frac{1}{6}$ ou $m > 0.$

c) $mf(2) = m(2m + 1) > 0$; ce qui exige $m < -0{,}5$ ou $m > 0.$

d) $-2 < \frac{m}{2m}$ ou $\frac{-5m}{2m} < 0$; ce qui exige $m \neq 0.$

e) $2 > \frac{m}{2m}$ ou $\frac{3m}{2m} > 0$; ce qui exige $m \neq 0.$

En résumé, on doit avoir $m < -0{,}5$ ou $m > 4.$

III. Résumé.

a) $m < -0{,}5$; $-2 < x'' < x' < 2.$

b) $m = -0{,}5$; l'équation devient $x^2 - x - 2 = 0$; les racines de cette équation sont 2 et — 1.

c) $-\frac{1}{2} < m < -\frac{1}{6}$; une racine convient.

d) $m = -\frac{1}{6}$; l'équation devient $x^2 - x - 6 = 0$; racines — 2 et 3.

e) $-\frac{1}{6} < m < 4$; pas de racine comprise entre — 2 et + 2.

f) $m = 4$; l'équation devient $4x^2 - 4x + 1 = 0$; $x' = x'' = 0{,}5.$

g) $m > 4$; $-2 < x'' < x' < 2.$

2° $(m - 1)x^2 + 2(2m + 3)x + 12m = 0.$

I. L'équation admet deux racines et l'une d'elles est comprise entre — 2 et + 2 si on a

$f(-2).f(2) = (8m - 16)(24m + 8) < 0$; ce qui exige $-\frac{1}{3} < m < 2.$

II. L'équation admet deux racines convenables si on a :

a) $\rho = (2m + 3)^2 - 12m(m - 1) = -8m^2 + 24m + 9 > 0$

$$\text{ou} \quad \frac{3}{4}(2 - \sqrt{6}) < m < \frac{3}{4}(2 + \sqrt{6}).$$

b) $(m - 1)f(-2) = (m - 1)(8m - 16) > 0;$

ce qui exige $m < 1$ ou $m > 2$.

c) $(m - 1)f(2) = (m - 1)(24m + 8) > 0;$

ce qui exige $m < -\frac{1}{3}$ ou $m > 1$.

d) $-2 < \frac{-(2m + 3)}{m - 1}$ ou $\frac{5}{m - 1} < 0$; ce qui exige $m < 1$.

e) $2 > \frac{-(2m + 3)}{m - 1}$ ou $\frac{4m + 1}{m - 1} > 0;$

ce qui exige $m < -\frac{1}{4}$ ou $m > 1$.

En résumé, on doit avoir $\frac{3}{4}(2 - \sqrt{6}) < m < -\frac{1}{3}$.

III. Résumé.

a) $m = \frac{3}{4}(2 - \sqrt{6})$; on trouve $-2 < x' = x'' = \frac{6}{5}(\sqrt{6} - 1) < 2$.

b) $\frac{3}{4}(2 - \sqrt{6}) < m < -\frac{1}{3}$; $-2 < x'' < x' < 2$.

c) $m = -\frac{1}{3}$; l'équation devient $2x^2 - 7x + 6 = 0$; racines $\frac{3}{2}$ et 2.

d) $-\frac{1}{3} < m < 2$; une racine comprise entre -2 et $+2$.

e) $m = 2$; l'équation devient $x^2 + 14x + 24 = 0$; racines -2 et -12.

571. *Résoudre les inéquations* :

1° $x^2 - 2mx + 2 - m > 0$.

On a $\rho = m^2 + m - 2 = (m - 1)(m + 2)$.

Si $m < -2$ ou $m > 1$, le premier membre admet deux racines x'' et x', et, comme le coefficient de x^2 est positif, on devra avoir

$$x < x'' \quad \text{ou} \quad x > x'.$$

Si $m = -2$ ou 1, le trinôme admet une racine double $x = x'$, et on devra avoir $x \neq x'$.

Si $-2 < m < 1$, le trinôme n'a pas de racine et il est positif, quel que soit x.

2° $m^2x^2 - (1 + m^2)x + 1 < 0$.

a) Si $m = 0$, on a $-x + 1 < 0$ ou $x > 1$.

b) Si $m \neq 0$, on a une inéquation du second degré. Le réalisant du premier membre est $(1 - m^2)^2$ et les racines sont $x' = \frac{1}{m^2}$ et 1.

Si $m < -1$ ou $m > 1$, on a $x' < 1$ et les réponses sont $x' < x < 1$.

Si $-1 < m < 0$ ou $0 < m < 1$, on a $x' > 1$ et les réponses sont $1 < x < x'$.

Si $m = \pm 1$, le trinôme premier membre a une racine double $x = 1$ et il n'est jamais négatif.

3° $mx^2 - 2(m - 3)x + m - 9 \leqslant 0$.

On a $\rho = (m - 3)^2 - m(m - 9) = 3m + 9$.

a) Si $m < -3$, le trinôme n'a pas de racine et il est négatif, quel que soit x.

b) Si $m = -3$, le trinôme a une racine double, et la relation donnée est encore vraie, quel que soit x.

c) Si $m > -3$, mais différent de zéro, le trinôme a deux racines distinctes, x'' et x' $(x'' < x')$.

Soit $-3 < m < 0$. Le coefficient du premier terme du trinôme est négatif et on doit avoir $x \leqslant x''$ ou $x \geqslant x'$.

Soit $m > 0$. Le coefficient du premier terme est positif et on doit avoir $x'' \leqslant x \leqslant x'$.

d) Si $m = 0$, on a $6x - 9 \leqslant 0$ ou $x \leqslant 1,5$.

4° $(2m - 1)x^2 - 2mx + 1 > 0$.

I. Si $m = 0,5$, on a $-x + 1 > 0$ ou $x < 1$.

II. Si $m \neq \frac{1}{2}$, on a $\rho = (m - 1)^2$ et les racines sont 1 et $\frac{1}{2m - 1}$.

La racine 1 est la plus grande si l'on a

$$1 > \frac{1}{2m - 1} \quad \text{ou} \quad \frac{2 - 2m}{2m - 1} < 0,$$

ce qui exige $m < 0,5$ ou $m > 1$.

La racine 1 est la plus petite si $\frac{1}{2} < m < 1$; les deux racines sont égales si $m = 1$.

a) Si $m < \frac{1}{2}$, on doit avoir $\frac{1}{2m - 1} < x < 1$.

b) Si $\frac{1}{2} < m < 1$, on doit avoir $x < 1$ ou $x > \frac{1}{2m - 1}$.

c) Si $m = 1$, l'inégalité est vraie, quel que soit x, sauf pour $x = 1$.

d) Si $m > 1$, on doit avoir $x < \frac{1}{2m - 1}$ ou $x > 1$.

572. *Résoudre les systèmes suivants :*

1° $(m-1)x^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0; \quad x < 2.$

a) L'équation a une racine acceptable (sa plus petite racine), si 2 est compris entre ses racines; ce qui a lieu quand

$$(m-1)f(2) = (m-1)(m+1) < 0 \quad \text{ou} \quad -1 < m < 1.$$

b) L'équation a également une racine acceptable quand on a le classement $x'' < x' = 2$; ce qui a lieu quand :

$$f(2) = m + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad m = -1;$$

et $$2 > \frac{S}{2} = \frac{m-2}{m-1} \quad \text{ou} \quad \frac{m}{m-1} > 0.$$

Ces deux relations sont vérifiées par $m = -1$.

c) L'équation a deux racines acceptables quand on a le classement $x'' < x' < 2$; ce qui a lieu quand

$$\rho = 1 > 0; \quad (m-1)f(2) > 0; \quad 2 > \frac{S}{2} = \frac{m-2}{m-1}.$$

Ce système exige $m < -1$ ou $m > 1$.

d) Si $m = 1$, l'équation devient $x - 1 = 0$; sa racine $x = 1$ est inférieure à 2.

2° $x^2 - x(m+2) + m - 8 = 0; \quad 0 < x < 2.$

a) Les deux racines x'' et x' de l'équation vérifient le système, si on a le classement $0 < x'' < x' < 2$, ce qui exige, en particulier,

$$f(0) = m - 8 > 0 \quad \text{ou} \quad m > 8;$$
$$f(2) = -m - 8 > 0 \quad \text{ou} \quad m < -8.$$

Ces deux inéquations sont incompatibles. Il est donc inutile d'examiner les autres conditions requises pour avoir le classement indiqué, et le système n'a jamais deux solutions.

b) Une des racines de l'équation est acceptable, si 0 et 2 séparent les racines de l'équation; ce qui a lieu quand

$$f(0) \times f(2) = (m-8)(-m-8) < 0.$$

Cette inéquation exige $m < -8$ ou $m > 8$.

Si $m < -8$, on a $f(0) = m - 8 < 0$; donc 0 est compris entre les racines et on a le classement $x'' < 0 < x' < 2$; c'est la plus grande racine qui convient.

Si $m > 8$, on a $f(0) = m - 8 > 0$; donc 0 est extérieur aux racines et on a le classement $0 < x'' < 2 < x'$; c'est la plus petite racine qui convient.

c) Pour $m = -8$, l'équation devient $x^2 + 6x - 16 = 0$; ses racines sont 2 et -8; elles sont inacceptables.

Pour $m = 8$, l'équation devient $x^2 - 10x = 0$; ses racines sont 0 et 10; elles sont inacceptables.

3° $2x^2 + (m - 3)x + 3 - m = 0$; $x^2 - 1 > 0$.

Une racine de l'équation convient, si elle vérifie l'inéquation $x^2 - 1 > 0$; donc si elle est inférieure à -1 ou supérieure à 1.

On a :

$$\rho = (m-3)(m+5);\quad f(-1) = -2m + 8;\quad f(1) = 2.$$

I. L'équation admet une racine acceptable si -1 et 1 séparent les racines; donc si

$$f(-1) \times f(1) = 2(-2m + 8) < 0 \quad \text{ou} \quad m > 4.$$

Comme $f(1) = 2 > 0$, on a le classement $x'' < -1 < x' < 1$ et c'est la plus petite racine qui convient.

II. L'équation admet deux racines acceptables :

a) Si -1 et 1 sont inférieurs aux racines, ce qui exige :

$$\rho = (m-3)(m+5) > 0; \quad m < -5 \quad \text{ou} \quad m > 3;$$
$$f(1) = 2 > 0;$$
$$1 < \frac{3-m}{4} \quad \text{ou} \quad m + 1 < 0;\ m < -1.$$

En résumé, on doit avoir $m < -5$.

b) Si -1 et 1 sont supérieurs aux racines; ce qui exige :

$$\rho = (m-3)(m+5) > 0; \quad m < -5 \quad \text{ou} \quad m > 3;$$
$$f(-1) = -2m + 8 > 0; \quad m < 4$$
$$-1 > \frac{3-m}{4} \quad \text{ou} \quad m - 7 > 0;\ m > 7.$$

Ces inéquations sont incompatibles.

c) Si -1 et 1 sont compris entre les racines; ce qui est impossible, car $f(1) = 2 > 0$.

III. Pour $m = 4$, l'équation devient $2x^2 + x - 1 = 0$; les racines de cette équation ne conviennent pas.

Pour $m = -5$, l'équation devient $x^2 - 4x + 4 = 0$; la racine double $x = 2$ convient.

573. *Trouver, suivant les diverses valeurs attribuées à* m, *le nombre des racines des équations suivantes, ces racines remplissant les conditions indiquées. On suppose* m *positif.*

1° $x^2 - 3mx + 2m^2 = 0$; racines positives et inférieures à $m + 1$.

I. L'équation admet deux racines et l'une d'elles est comprise entre 0 et $m + 1$, si on a

$$f(0) \times f(m+1) = 2m^2(1 - m) < 0 \quad \text{ou} \quad m > 1.$$

II. L'équation admet deux racines convenables si on a :

a) $\rho = 9m^2 - 8m^2 = m^2 > 0$; condition toujours réalisée.

b) $f(0) > 0$ ou $2m^2 > 0$; condition toujours réalisée.

c) $f(m + 1) = 1 - m > 0$ ou $m < 1$.

d) $0 < \dfrac{3m}{2}$ ou $m > 0$.

e) $m + 1 > \dfrac{3m}{2}$ ou $\dfrac{-m+2}{2} > 0$ ou $m < 2$.

En résumé, on doit avoir $m < 1$.

III. Si $m = 1$, l'équation devient $x^2 - 3x + 2 = 0$; ses racines sont 1 et 2; aucune ne convient.

2° $2x^2 - 2mx + 5m - 10 = 0$; racines positives et inférieures à m.

I. L'équation admet une racine convenable si on a

$$f(0) \times f(m) = (5m - 10)^2 < 0; \text{ ce qui n'a jamais lieu.}$$

II. L'équation admet deux racines convenables si on a :

a) $\rho = m^2 - 2(5m - 10) = m^2 - 10m + 20 > 0$;

ce qui exige $m < 5 - \sqrt{5}$ ou $m > 5 + \sqrt{5}$.

b) $f(0) = f(m) = 5m - 10 > 0$ ou $m > 2$.

c) La demi-somme $\dfrac{m}{2}$ est évidemment comprise entre 0 et m quand m est positif.

En résumé, on doit avoir $2 < m < 5 - \sqrt{5}$ ou $m > 5 + \sqrt{5}$.

III. RÉSUMÉ.

a) $m = 2$; l'équation devient $x^2 - 2x = 0$; aucune racine ne convient.

b) $2 < m < 5 - \sqrt{5}$; $0 < x'' < x' < m$.

c) $m = 5 - \sqrt{5}$; on a $0 < x' = x'' = \dfrac{5 - \sqrt{5}}{2} < 5 - \sqrt{5}$.

d) $5 - \sqrt{5} < m < 5 + \sqrt{5}$; l'équation n'a pas de racine.

e) $m = 5 + \sqrt{5}$; on a $0 < x' = x'' = \dfrac{5 + \sqrt{5}}{2} < 5 + \sqrt{5}$.

f) $m > 5 + \sqrt{5}$; $0 < x'' < x' < m$.

3° $x^2 - 2(m - 3)x + m^2 - 9 = 0$; racines positives et inférieures à m.

I. L'équation admet une racine convenable, si on a

$f(0) \times f(m) = (m^2 - 9)(6m - 9) < 0$ ou $(m - 3)(2m - 3) < 0$, car $m + 3$ est positif. On doit donc avoir $1{,}5 < m < 3$.

II. L'équation admet deux racines convenables, si on a :

$\rho = (m - 3)^2 - (m^2 - 9) = (m - 3)(-6) > 0$ ou $m < 3$.

$f(0) = m^2 - 9 > 0$ ou $m - 3 > 0$ ou $m > 3$.

Ces deux conditions étant déjà contradictoires, il est inutile de continuer.

III. Si $m = 1{,}5$, l'équation devient $4x^2 + 12x - 27 = 0$. Les racines sont $-4{,}5$ et $1{,}5$; aucune ne convient.

IV. Si $m = 3$, l'équation devient $x^2 = 0$. La racine double ne convient pas.

574. *Trouver, suivant les diverses valeurs de* a *et de* m, *le nombre des racines des équations suivantes, ces racines remplissant les conditions indiquées; les paramètres* a *et* m *représentent des nombres positifs.*

1° $x^2(16m - 3) - 32amx + 4a^2(4m + 3) = 0$; racines supérieures à a.

I. L'équation donne une racine acceptable si l'on a :

$$(16m - 3)f(a) = 9a^2(16m - 3) < 0 \quad \text{ou} \quad m < \frac{3}{16}.$$

II. L'équation donne deux racines acceptables si on a :

a) $\rho = 256a^2m^2 - 4a^2(4m + 3)(16m - 3) = -144a^2m + 36a^2 > 0$

ou $$36a^2(1 - 4m) > 0 \quad \text{ou} \quad m < \frac{1}{4}.$$

b) $(16m - 3)f(a) = 9a^2(16m - 3) > 0$ ou $m > \dfrac{3}{16}$.

c) $a < \dfrac{16am}{16m - 3}$ ou $\dfrac{-3a}{16m - 3} < 0$ ou $m > \dfrac{3}{16}$.

On voit qu'on doit avoir $\dfrac{3}{16} < m < \dfrac{1}{4}$.

III. Résumé.

a) $m < \dfrac{3}{16}$; une racine supérieure à a.

b) $m = \dfrac{3}{16}$; l'équation devient $2x - 5a = 0$. La racine $\dfrac{5a}{2}$ convient.

c) $\dfrac{3}{16} < m < \dfrac{1}{4}$; deux racines supérieures à a.

d) $m = 0{,}25$; on trouve $x' = x'' = 4a$.

2° $x^2 - ax + m^2 - 20a^2 = 0$; racines positives et inférieures à $4a$.

I. L'équation admet une racine acceptable si on a

$$f(0) \times f(4a) = (m^2 - 20a^2)(m^2 - 8a^2) < 0$$

ou $(m + 2a\sqrt{5})(m - 2a\sqrt{5})(m + 2a\sqrt{2})(m - 2a\sqrt{2}) < 0$

ou $$(m - 2a\sqrt{5})(m - 2a\sqrt{2}) < 0,$$

car les deux facteurs supprimés sont positifs.

On doit donc avoir $2a\sqrt{2} < m < 2a\sqrt{5}$.

II. L'équation aura deux racines acceptables si on a :

a) $\rho = a^2 - 4(m^2 - 20a^2) = 81a^2 - 4m^2 > 0$

ou $(9a + 2m)(9a - 2m) > 0$ ou $9a - 2m > 0$ ou $m < \frac{9}{2}a$.

b) $f(0) = m^2 - 20a^2 > 0$ ou $m > 2a\sqrt{5}$.

c) $f(4a) = m^2 - 8a^2 > 0$ ou $m > 2a\sqrt{2}$.

On doit avoir encore $0 < \frac{a}{2} < 4a$; mais cette double condition est toujours réalisée quand $a > 0$.

En résumé, on doit avoir $2a\sqrt{5} < m < \frac{9}{2}a$.

III. Résumé.

a) $m = 2a\sqrt{2}$; l'équation devient $x^2 - ax - 12a^2 = 0$; ses racines $4a$ et $-3a$ ne conviennent pas.

b) $2a\sqrt{2} < m < 2a\sqrt{5}$; une racine convient.

c) $m = 2a\sqrt{5}$; l'équation devient $x^2 - ax = 0$; $x'' = 0, x' = a$.

d) $2a\sqrt{5} < m < \frac{9}{2}a$; deux racines acceptables.

e) $m = \frac{9}{2}a$; $x' = x'' = \frac{a}{2}$.

3° $ax^2 - (a^2 + m^2)x + am^2 = 0$; racines supérieures à $2a$.

I. L'équation admet une racine supérieure à $2a$, si on a :

$f(2a) = 2a^3 - am^2 = a(a\sqrt{2} + m)(a\sqrt{2} - m) < 0$

ou $a\sqrt{2} - m < 0$ ou $m > a\sqrt{2}$.

II. L'équation admettra deux racines supérieures à $2a$, si on a :

a) $\rho = (a^2 + m^2)^2 - 4a^2m^2 = (a^2 - m^2)^2 > 0$. Cette condition est toujours réalisée dès que $m \neq a$.

b) $f(2a) = 2a^3 - am^2 > 0$ ou $m < a\sqrt{2}$.

c) $2a < \dfrac{a^2 + m^2}{2a}$ ou $m^2 - 3a^2 > 0$ ou $m > a\sqrt{3}$.

Ces deux dernières conditions sont contradictoires.

III. Pour $m = a\sqrt{2}$, l'équation devient $x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$; les racines sont a et $2a$.

575. *Dans les trinômes suivants, déterminer* m *pour que ces trinômes aient un signe indépendant de* x. *Quel est alors ce signe?*

1° $(m^2 - 1)x^2 + 2(m + 1)x + 1$.

Les fonctions à étudier sont :

$a = m^2 - 1$; ses racines sont $+1$ et -1.

$\rho = (m + 1)^2 - (m^2 - 1) = 2m + 2$; sa racine est -1.

m	a	ρ	CONCLUSIONS
	$+$	$-$	Trinôme toujours positif.
-1	0	0	Trinôme égal à 1.
	$-$	$+$	L'expression proposée est positive,
$+1$	0	$+$	négative ou nulle, suivant les
	$+$	$+$	valeurs de x.

2° $(m - 4)x^2 + 2(m - 1)x + 2m - 3$.

Les fonctions à étudier sont :

$a = m - 4$; sa racine est 4.

$\rho = (m - 1)^2 - (2m - 3)(m - 4) = -m^2 + 9m - 11$. Ses racines sont $\dfrac{9 \pm \sqrt{37}}{2}$.

En dressant un tableau, comme dans l'exercice précédent, on trouve :

a) Le trinôme est toujours négatif pour $m < \dfrac{9 - \sqrt{37}}{2}$.

b) Le trinôme est toujours positif pour $m > \dfrac{9 + \sqrt{37}}{2}$.

c) Pour les valeurs de m, faisant partie de l'intervalle

$$\frac{9 - \sqrt{37}}{2}, \quad \frac{9 + \sqrt{37}}{2},$$

le trinôme est positif, négatif ou nul, suivant les valeurs attribuées à x.

576. *Discuter le nombre et les signes des racines des équations suivantes :*

1° $(m - 6)x^2 - 4x(m - 1) + m - 3 = 0$.

Les fonctions à étudier sont :

a) $\rho = 4(m - 1)^2 - (m - 3)(m - 6) = 3m^2 + m - 14$;

ses racines sont 2 et $-\dfrac{7}{3}$.

b) $P = \dfrac{m - 3}{m - 6}$ a le signe de $(m - 3)(m - 6)$.

c) $S = \dfrac{4(m - 1)}{m - 6}$ a le signe de $(m - 1)(m - 6)$.

m	ρ	P	S	Conclusions
	+	+	+	racines positives
$-\frac{7}{3}$	0	+	+	$x' = x'' = \frac{4}{5}$
	—	+	+	pas de racine
1	—	+	0	pas de racine
	—	+	—	pas de racine
2	0	+	—	$x' = x'' = -0,5$
	+	+	—	racines négatives
3	+	0	—	$x' = 0;\ x'' = -\frac{8}{3}$
	+	—	—	racines de signes contraires
6	———	———	———	équation du 1er degré
	+	+	+	racines positives.

2° $(m-2)x^2 + 2x(m-3) + 5m - 6 = 0$. — On a :

$$\rho = -4m^2 + 10m - 3;\quad P = \frac{5m-6}{m-2};\quad S = \frac{-2(m-3)}{m-2}$$

m	ρ	P	S	Conclusions
	—	+	—	pas de racine
$\frac{5-\sqrt{13}}{4}$	0	+	—	$x' = x'' = 2 - \sqrt{13}$
	+	+	—	racines négatives
1,2	+	0	—	$x' = 0;\ x'' = -4,5$
	+	—	—	racines de signes contraires
2	———	———	———	équation du 1er degré
	+	+	+	racines positives
$\frac{5+\sqrt{13}}{4}$	0	+	+	$x' = x'' = 2+\sqrt{13}$
	—	+		pas de racine

3° $(m - 1)x^2 + 2x(2m - 3) + 4m - 5 = 0.$

Les fonctions à étudier sont :

$$\rho = (2m - 3)^2 - (m - 1)(4m - 5) = -3m + 4;$$

$$P = \frac{4m - 5}{m - 1} \quad \text{et} \quad S = \frac{-2(2m - 3)}{m - 1}.$$

m	ρ	P	S	Conclusions
	$+$	$+$	$-$	racines négatives
1				équation du 1er degré
	$+$	$-$	$+$	racines de signes contraires
$\frac{5}{4}$	$+$	0	$+$	$x' = 4;\quad x'' = 0$
	$+$	$+$	$+$	racines positives
$\frac{4}{3}$	0	$+$	$+$	$x' = x'' = 1$
	$-$	$+$	$+$	
$\frac{3}{2}$	$-$	$+$	0	pas de racine.
	$-$	$+$	$-$	

4° $x^2 - 2x(m - 1) + 3m^2 - 4m + 1 = 0.$

Les fonctions à étudier sont :

$$\rho = -2m^2 + 2m; \quad P = 3m^2 - 4m + 1; \quad S = 2(m - 1).$$

m	ρ	P	S	Conclusions
	$-$	$+$	$-$	pas de racine
0	0	$+$	$-$	$x' = x'' = -1$
	$+$	$+$	$-$	racines négatives
$\frac{1}{3}$	$+$	0	$-$	$x' = 0;\quad x'' = -\frac{4}{3}$
	$+$	$-$	$-$	racines de signes contraires
1	0	0	0	$x' = x'' = 0$
	$-$	$+$	$+$	pas de racine.

5° $(m^2 + m - 2)x^2 + 2x(m + 1) - (m + 1) = 0.$

Les fonctions à étudier sont :

a) $\rho = (m + 1)^2 + (m + 1)(m^2 + m - 2)$
$= (m + 1)(m^2 + 2m - 1)$; racines : -1 et $-1 \pm \sqrt{2}$.

b) $P = \dfrac{-(m + 1)}{m^2 + m - 2}$ qui a le signe contraire de
$(m + 1)(m^2 + m - 2) = (m + 1)(m - 1)(m + 2)$.

c) $S = \dfrac{-2(m + 1)}{m^2 + m - 2}$ qui a le même signe que P.

m	ρ	P	S	Conclusions
	$-$	$+$	$+$	pas de racine
$-1-\sqrt{2}$	0	$+$	$+$	$x' = x'' = 1$
	$+$	$+$	$+$	racines positives
-2	——	——	——	équation du 1^er degré
	$+$	$-$	$-$	racines de signes contraires
-1	0	0	0	$x' = x'' = 0$
	$-$	$+$	$+$	pas de racine
$-1+\sqrt{2}$	0	$+$	$+$	$x' = x'' = 1$
	$+$	$+$	$+$	racines positives
1	——	——	——	équation du 1^er degré
	$+$	$-$	$-$	racines de signes contraires.

577. *Discuter le nombre des racines des équations suivantes :*

1° $x^4 - 2x^2(m - 5) + m^2 - 1 = 0.$

Le nombre des racines de cette équation dépend du nombre et des signes des racines de la résolvante.

Désignons par ρ le réalisant de la résolvante; par y' et y'' les racines de la résolvante; par S et P la somme et le produit de ces racines.

a) $\rho = (m - 5)^2 - (m^2 - 1) = -10m + 26$; racine : 2,6.

b) $P = m^2 - 1$; racines : -1 et $+1$.

c) $S = 2(m - 5)$; racine : 5.

m	ρ	P	S	Conclusions
	+	+	—	$y' < 0; y'' < 0$; pas de racine
-1	+	0	—	$y' = 0; y'' < 0$; une rac. double nulle
	+	—	—	$y' > 0; y'' < 0$; deux racines
1	+	0	—	$y' = 0; y'' < 0$; une rac. double nulle
	+	+	—	$y' < 0; y'' < 0$; pas de racine
$\frac{13}{5}$	0	+	—	$y' = y'' < 0$; pas de racine
	—	+	—	
5	—	+	0	pas de racine.
	—	+	+	

2° $(3m + 2)x^4 - 10mx^2 + 3m - 2 = 0$. — On a :

a) $\rho = 25m^2 - (9m^2 - 4) = 16m^2 + 4$; toujours positif.

b) $P = \dfrac{3m - 2}{3m + 2}$ a le même signe que $(3m - 2)(3m + 2)$.

c) $S = \dfrac{10m}{3m + 2}$ a le même signe que $m(3m + 2)$.

m	ρ	P	S	Conclusions
	+	+	+	$y' > 0; y'' > 0$; 4 racines
$-\frac{2}{3}$				l'éq. devient $5x^2 - 3 = 0$; 2 racines
	+	—	—	
0	+	—	0	$y' > 0; y'' < 0$; 2 racines
	+	—	+	
$\frac{2}{3}$	+	0	+	$y' > 0; y'' = 0$; 2 rac. et 1 rac. nulle
	+	+	+	$y' > 0; y'' > 0$; 4 racines.

3° $(m - 2)x^4 - 2mx^2 + m - 3 = 0$. — On a :

$$\rho = 5m - 6; \quad P = \frac{m - 3}{m - 2}; \quad S = \frac{2m}{m - 2}.$$

m	ρ	P	S	CONCLUSIONS
	$-$	$+$	$+$	pas de racine
0	$-$	$+$	0	
	$-$	$+$	$-$	
$\frac{6}{5}$	0	$+$	$-$	$y' = y'' < 0$; pas de racine
	$+$	$+$	$-$	$y' < 0; y'' < 0$; pas de racine
2	—	—	—	l'éq. devient $4x^2 + 1 = 0$; pas de racine
	$+$	$-$	$+$	$y' > 0; y'' < 0$; deux racines
3	$+$	0	$+$	$y' > 0; y'' = 0$; 2 rac.; 1 rac. doub. nulle
	$+$	$+$	$+$	$y' > 0; y'' > 0$; quatre racines.

578. *Comparer le nombre* 1 *aux racines des équations suivantes :*

1° $mx^2 + 7x + 1 = 0$.

Les fonctions à étudier sont :

$$\rho = 49 - 4m; \quad mf(1) = m(m + 8); \quad 1 + \frac{b}{2a} = \frac{2m + 7}{2m}.$$

m	ρ	$mf(1)$	$1 + \frac{b}{2a}$	CONCLUSIONS
	$+$	$+$	$+$	$x'' < x' < 1$
-8	$+$	0	$+$	$x'' < x' = 1$
	$+$	$-$	$+$	$x'' < 1 < x'$
$-\frac{7}{2}$	$+$	$-$	0	
	$+$	$-$	$-$	
0	—	—	—	équation du 1er degré
	$+$	$+$	$+$	$x'' < x' < 1$
$\frac{49}{4}$	0	$+$	$+$	$x'' = x' = -\frac{2}{7} < 1$
	$-$	$+$	$+$	problème impossible.

2° $m^3x^2 - m^2x + m - 1 = 0$.

Les fonctions à étudier sont :

a) $\rho = m^4 - 4m^3(m - 1)$ a le même signe que $m(4 - 3m)$.

b) $m^3f(1) = m^3(m^3 - m^2 + m - 1) = m^3(m - 1)(m^2 + 1)$.

Cette fonction a le même signe que $m(m - 1)$, car les facteurs supprimés m^2 et $m^2 + 1$ sont positifs, en supposant $m \neq 0$.

c) $1 + \dfrac{b}{2a} = 1 + \dfrac{-m^2}{2m^3} = \dfrac{2m^3 - m^2}{2m^3}$.

Si l'on suppose $m \neq 0$, cette fraction a le même signe que le produit $m(2m - 1)$, dont les racines sont 0 et 0,5.

m	ρ	$m^3f(1)$	$1 + \dfrac{b}{2a}$	CONCLUSIONS
	$-$	$+$	$+$	problème impossible
0	—	—	—	équation impossible
	$+$	$-$	$-$	
$\dfrac{1}{2}$	$+$	$-$	0	$x'' < 1 < x'$
	$+$	$-$	$+$	
1	$+$	0	$+$	$x'' < x' = 1$
	$+$	$+$	$+$	$x'' < x' < 1$
$\dfrac{4}{3}$	0	$+$	$+$	$x'' = x' = \dfrac{3}{8} < 1$
	$-$	$+$	$+$	problème impossible.

3° $x^2 - (2m + 1)x - 2m^2 = 0$.

Les fonctions à étudier sont :

a) $\rho = (2m + 1)^2 + 8m^2 = 12m^2 + 4m + 1$; ce trinôme est toujours positif, car son réalisant est -8.

b) $f(1) = -2m^2 - 2m = -2m(m + 1)$; racines : 0 et -1.

c) $1 + \dfrac{b}{2a} = 1 - \dfrac{2m + 1}{2} = \dfrac{1 - 2m}{2}$.

Cette fraction a le même signe que le binôme $1 - 2m$, dont la racine est 0,5.

m	ρ	$f(1)$	$1+\dfrac{b}{2a}$	CONCLUSIONS
	$+$	$-$	$+$	$x'' < 1 < x'$
-1	$+$	0	$+$	$x'' < x' = 1$
	$+$	$+$	$+$	$x'' < x' < 1$
0	$+$	0	$+$	$x'' < x' = 1$
	$+$	$-$	$+$	
$\dfrac{1}{2}$	$+$	$-$	0	$x'' < 1 < x'$.
	$+$	$-$	$-$	

4° $(3 - 2m)x^2 + 2mx + 2(3 + 2m) = 0$. — On a :

$$\rho = 9m^2 - 8; \quad (3 - 2m)f(1) = (3 - 2m)(4m + 9);$$
$$1 + \frac{b}{2a} = \frac{3 - m}{3 - 2m}.$$

m	ρ	$af(1)$	$1+\dfrac{b}{2a}$	CONCLUSIONS
	$+$	$-$	$+$	$x'' < 1 < x'$
$-\dfrac{9}{4}$	$+$	0	$+$	$x'' < x' = 1$
	$+$	$+$	$+$	$x'' < x' < 1$
$-\sqrt{2}$	0	$+$	$+$	$x'' = x' < 1$
	$-$	$+$	$+$	problème impossible
$-\sqrt{2}$	0	$+$	$+$	$x'' = x' < 1$
	$+$	$+$	$+$	$x'' < x' < 1$
$\dfrac{3}{2}$				équation du 1^er^ degré
	$+$	$-$	$-$	
3	$+$	$-$	0	$x'' < 1 < x'$.
	$+$	$-$	$+$	

5° $(m^2 - 1)x^2 + 2m(x + 1) = 0$. — Les fonctions à étudier sont :

a) $\rho = m^2 - 2m(m^2 - 1) = -m(2m^2 - m - 2)$; racines : 0 et $\dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$.

b) $(m^2 - 1)f(1) = (m^2 - 1)(m^2 + 4m - 1)$; racines : ± 1 et $-2 \pm \sqrt{5}$.

c) $1 + \dfrac{b}{2a} = 1 + \dfrac{m}{m^2 - 1} = \dfrac{m^2 + m - 1}{m^2 - 1}$ a le même signe que

$$(m^2 + m - 1)(m^2 - 1); \quad \text{racines : } \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ et } \pm 1.$$

m	ρ	$af(1)$	$1 + \dfrac{b}{2a}$	CONCLUSIONS
	+	+	+	$x'' < x' < 1$
$-2-\sqrt{5}$	+	0	+	$x'' < x' = 1$
	+	—	+	
$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$	+	—	0	$x'' < 1 < x'$
	+	—	—	
— 1	—	—	—	équation du 1er degré
	+	+	+	$x'' < x' < 1$
$\dfrac{1-\sqrt{17}}{4}$	0	+	+	$x'' = x' < 1$
	—	+	+	problème impossible
0	0	+	+	$x'' = x' = 0 < 1$
	+	+	+	$x'' < x' < 1$
$-2+\sqrt{5}$	+	0	+	$x'' < x' = 1$
	+	—	+	
$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$	+	—	0	$x'' < 1 < x'$
	+	—	—	
1	—	—	—	équation du 1er degré
	+	+	+	$x'' < x' < 1$
$\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$	0	+	+	$x'' = x' < 1$
	—	+	+	problème impossible.

579. *Classer les nombres* 0 *et* 1 *par rapport aux racines des équations suivantes :*

1° $(m + 1)x^2 - x(m - 5) + m - 1 = 0.$

Les fonctions à étudier sont :

a) $\rho = (m - 5)^2 - 4(m^2 - 1) = -3m^2 - 10m + 29;$

racines : $\dfrac{-5 \pm 4\sqrt{7}}{3}.$

b) $(m + 1)f(0) = (m + 1)(m - 1);$ racines : $\pm 1.$

c) $0 + \dfrac{b}{2a} = \dfrac{-(m-5)}{2(m+1)}$ a le même signe que $(m + 1)(5 - m).$

d) $(m + 1)f(1) = (m + 1)(m + 5);$ racines : -1 et $-5.$

e) $1 + \dfrac{b}{2a} = 1 + \dfrac{-(m-5)}{2(m+1)} = \dfrac{m+7}{2(m+1)};$

Cette fraction a le même signe que $(m + 7)(m + 1).$

m	ρ	$af(0)$	$0+\frac{b}{2a}$	$af(1)$	$1+\frac{b}{2a}$	CONCLUSIONS
	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	
-7	$-$	$+$	$-$	$+$	0	problème impossible
	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	
$\frac{-5-4\sqrt{7}}{3}$	0	$+$	$-$	$+$	$-$	$0 < 1 < x'' = x'$
	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$0 < 1 < x'' < x'$
-5	$+$	$+$	$-$	0	$-$	$0 < 1 = x'' < x'$
	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$0 < x'' < 1 < x'$
-1	—	—	—	—	—	équation du 1er degré
	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$x'' < 0 < x' < 1$
1	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$x'' < x' = 0 < 1$
	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$x'' < x' < 0 < 1$
$\frac{-5+4\sqrt{7}}{3}$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$x'' = x' < 0 < 1$
	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	
5	$-$	$+$	0	$+$	$+$	problème impossible.
	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	

2° $(m - 4)x^2 - 2x(m - 2) + m - 3 = 0$.

Les fonctions à étudier sont :

a) $\rho = (m - 2)^2 - (m - 3)(m - 4) = 3m - 8$; racine : $\frac{8}{3}$.

b) $(m - 4)f(0) = (m - 4)(m - 3)$; racines : 4 et 3.

c) $0 + \frac{b}{2a} = \frac{-(m - 2)}{m - 4}$ a le même signe que $-(m - 2)(m - 4)$.

d) $(m - 4)f(1) = -3(m - 4)$; racine : 4.

e) $1 + \frac{b}{2a} = 1 - \frac{m - 2}{m - 4} = \frac{-2}{m - 4}$;

Cette fraction a le même signe que $-(m - 4)$.

m	ρ	$af(0)$	$0+\frac{b}{2a}$	$af(1)$	$1+\frac{b}{2a}$	CONCLUSIONS
	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	problème impossible
2	$-$	$+$	0	$+$	$+$	problème impossible
	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	problème impossible
$\frac{8}{3}$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$x'' = x' < 0 < 1$
	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$x'' < x' < 0 < 1$
3	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$x'' < x' = 0 < 1$
	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$x'' < 0 < x' < 1$
4						équation du 1er degré
	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$0 < x'' < 1 < x'$.

580. *Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :*

1° $x^2 - 5x + 6 - y < 0$.

Pour résoudre graphiquement cette inéquation, on construit d'abord la parabole

$$y = x^2 - 5x + 6.$$

On détermine ensuite la région positive et la région négative de cette parabole. A cette effet, il suffit de faire un essai en remplaçant x et y par les coordonnées d'un point du plan dans le premier membre $x^2 - 5x + 6 - y$ de l'inéquation à résoudre.

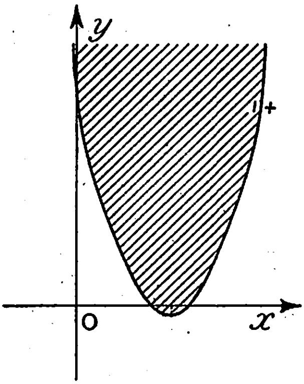


Fig. 24

Si on remplace x et y par zéro dans l'expression $x^2 - 5x + 6 - y$, on trouve 6.

Le point (0, 0) se trouve à l'extérieur de la parabole; la région extérieure est donc la région positive et la région intérieure, la région négative.

L'inégalité proposée est vérifiée par les coordonnées de tout point situé à l'intérieur de la parabole (Fig. 24).

2° $x^2 + 3x + 4 + y > 0$.

Construire la parabole $y = -x^2 - 3x - 4$ et déterminer les signes des deux régions.

Les coordonnées des points situés à l'extérieur de la parabole, vérifient l'inéquation proposée.

3° $8y - 3x^2 < 0$.

Construire la parabole $y = \frac{3}{8}x^2$. Les coordonnées des points situés à l'extérieur de la parabole, vérifient l'inéquation.

4° $3y < 6 - x^2$.

L'inéquation peut s'écrire $3y - 6 + x^2 < 0$.

Construire la parabole $y = \frac{1}{3}(-x^2 + 6)$. Les coordonnées des points situés à l'intérieur de la parabole vérifient l'inéquation.

5° $(x + y)(2y + x^2 - 4x - 12) < 0$.

Construire la parabole (Fig. 25)

$$y = 0{,}5(-x^2 + 4x + 12)$$

et la droite $x + y = 0$.

Déterminer pour chacune de ces lignes, la région positive et la région négative.

L'examen de la figure montre que les coordonnées des points situés dans la région hachurée vérifient l'inéquation.

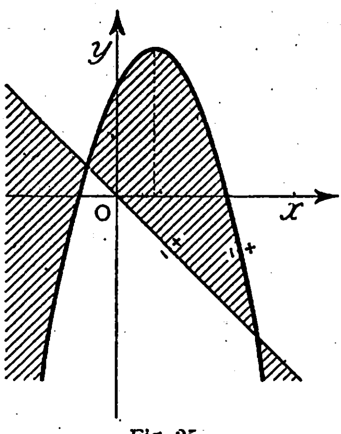


Fig. 25

6° $(y - x^2 + 2x)(y - 2x + 4) < 0$.

Construire la parabole $y = x^2 - 2x$ et la droite $y = 2x - 4$. Cette dernière est une tangente à la parabole au point (2, 0).

Les coordonnées des points situés dans la région hachurée (Fig. 26) vérifient l'inéquation.

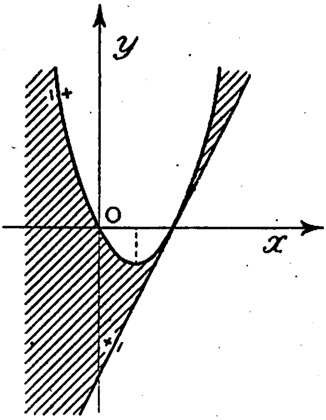


Fig. 26

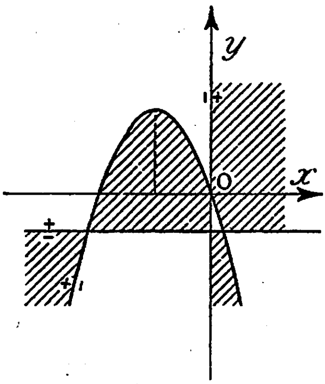


Fig. 27

7° $x(y + 2)(x^2 + 6x + 2y) > 0$.
Construire la parabole $y = 0,5(-x^2 - 6x)$ et les droites
$$x = 0, \quad y + 2 = 0.$$
Les coordonnées des points situés dans la région hachurée (Fig. 27) vérifient l'inéquation.

581. *Dans les équations suivantes,* a *et* b *sont les coordonnées d'un point du plan. Trouver quelle doit être la position du point* (a, b), *pour que les racines de ces équations satisfassent aux conditions indiquées.*

1° $(b - a)x^2 - (a + b)x + 3a - 1 = 0$; 1 est compris entre les racines.

On doit avoir $(b - a)f(1) = (b - a)(a - 1) < 0$.

Construire les droites $y - x = 0$; $x - 1 = 0$.

Les coordonnées des points situés dans les deux angles obtus, formés par les deux droites, répondent à la question.

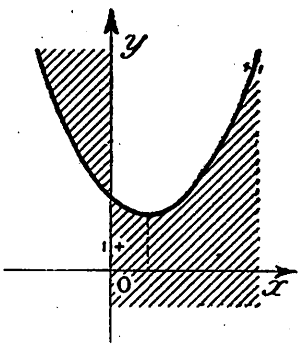


Fig. 28.

2° $ax^2 + bx - a^2 - 1 = 0$; 1 est compris entre les racines.

On doit avoir
$$af(1) = a(b - a^2 + a - 1) < 0.$$
Construire la parabole (Fig. 28)
$$y = x^2 - x + 1$$
et considérer l'axe Oy.

Les coordonnées des points situés dans la région hachurée répondent à la question.

3° $bx^2 + (a - 1)x + a^2 = 0$; -2 et $+2$ séparent une racine.
On doit avoir $f(-2) \times f(2) < 0$
ou $$(4b - 2a + 2 + a^2)(4b + 2a - 2 + a^2) < 0.$$

Construire les deux paraboles

$$y = \frac{1}{4}(-x^2 + 2x - 2);$$

$$y = \frac{1}{4}(-x^2 - 2x + 2).$$

Les coordonnées des points situés dans la région hachurée répondent à la question.

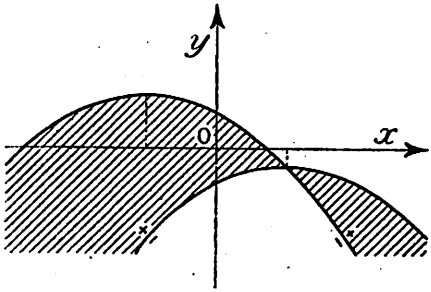


Fig. 29.

4° $x^2 + 2x(a - 2) + b + 9 = 0$; racines négatives.

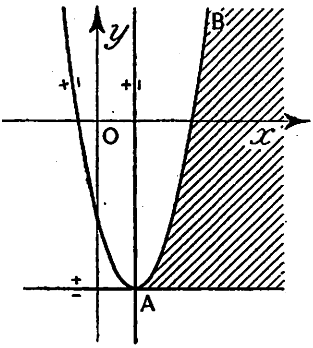


Fig. 30.

On doit avoir :

$$\rho = (a - 2)^2 - (b + 9)$$
$$= a^2 - 4a - 5 - b \geqslant 0;$$
$$P = b + 9 > 0;$$
$$S = -2(a - 2) < 0.$$

Construire la parabole (Fig. 30)

$$y = x^2 - 4x - 5$$

et les droites

$$y + 9 = 0; \quad x - 2 = 0.$$

L'équation proposée a deux racines négatives, lorsque le point $M(a, b)$ se trouve dans la région hachurée ou sur l'arc de parabole AB.

5° $x^2 - 2(b - 3)x - a^2 + b^2 = 0$; racines négatives.
On doit avoir :

$$\rho = (b - 3)^2 + a^2 - b^2 = a^2 + 9 - 6b \geqslant 0;$$
$$P = b^2 - a^2 = (b + a)(b - a) > 0;$$
$$S = 2(b - 3) < 0.$$

Construire la parabole (Fig. 31)

$$y = \frac{1}{6}(x^2 + 9),$$

puis les droites

$$y + x = 0; \; y - x = 0;$$
$$y - 3 = 0.$$

L'équation proposée a deux racines négatives, lorsque le point $M(a, b)$ se trouve dans la région hachurée ou sur l'arc de parabole ABC.

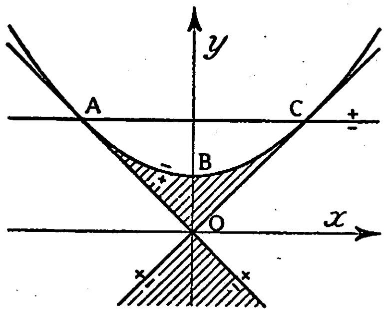


Fig. 31.

6° $ax^2 - 2ax + 2b - 1 = 0$; racines de signes contraires.

On doit avoir $$P = \frac{2b-1}{a} < 0.$$

Construire les droites $x = 0$, $2y - 1 = 0$. Ces droites forment deux angles droits. Les points situés dans les angles qui correspondent aux 2e et 4e angles des axes, répondent à la question.

582. *Discuter le nombre et les signes des racines des équations suivantes,* a *et* b *étant les coordonnées d'un point du plan.*

1° $x^2 - ax + b = 0$.

Les fonctions à étudier sont :

$\rho = a^2 - 4b$; $P = b$; $S = a$.

Construire la parabole $y = \frac{x^2}{4}$ et considérer les droites $x = 0$; $y = 0$.

On aboutit aux conclusions suivantes :

a) M(a, b) est dans la région I : deux racines positives.

b) M est dans la région II : deux racines négatives.

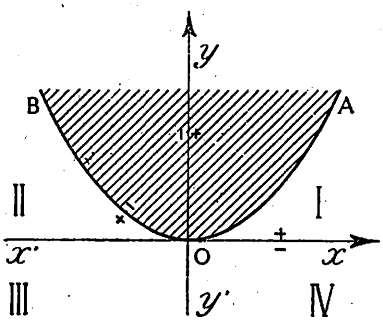


Fig. 32

c) M est dans III ou IV : deux racines de signes contraires.

d) M est sur la branche OA : une racine double positive.

e) M est sur la branche OB : une racine double négative.

f) M est sur Ox : une racine nulle et une racine positive.

g) M est sur Ox' : une racine nulle et une racine négative.

h) M est sur Oy' : deux racines opposées.

i) M est en O : une racine double nulle.

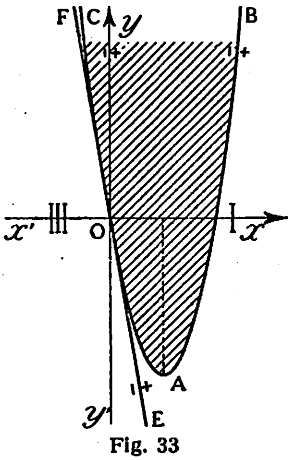


Fig. 33

2° $x^2 - 2ax + 6a + b = 0$.

Les fonctions à étudier sont
$$\rho = a^2 - 6a - b;$$
$$P = 6a + b; \quad S = 2a.$$

Construire la parabole
$$y = x^2 - 6x$$
et la droite $y + 6x = 0$, qui est tangente à la parabole au point O(0, 0); considérer aussi la droite $x = 0$.

On aboutit aux conclusions suivantes :

a) M(a, b) est dans la région I : deux racines positives.

b) M est dans la région II : deux racines négatives.

La région II est limitée par la demi-droite OF et par la branche de parabole OC.

c) M est dans la région III : deux racines de signes contraires.
d) M est sur la branche OAB : une racine double positive.
e) M est sur la branche OC : une racine double négative.
f) M est sur OE : une racine nulle et une racine positive.
g) M est sur OF : une racine nulle et une racine négative.
h) M est sur Oy' : deux racines opposées.
i) M est en O : une racine double nulle.

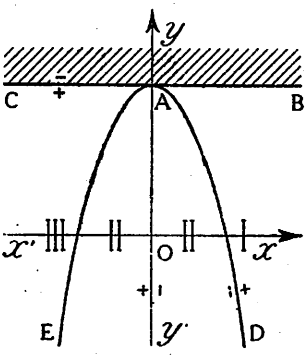


Fig. 34.

3° $x^2 + 2ax + a^2 + b - 4 = 0$.

Les fonctions à étudier sont :

$\rho = a^2 - (a^2 + b - 4) = 4 - b$;
$P = a^2 + b - 4$;
$S = -2a$.

Construire la droite $y = 4$ et la parabole

$$y = -x^2 + 4;$$

considérer aussi la droite $x = 0$.

On aboutit aux conclusions suivantes :

a) M (a, b) est dans la région I : deux racines négatives.

b) M est dans la région II : deux racines de signes contraires.

c) M est dans la région III : deux racines positives.
d) M est sur AB : une racine double négative.
e) M est sur AC : une racine double positive.
f) M est sur la branche AD : une racine nulle et une racine négative.
g) M est sur la branche AE : une racine nulle et une racine positive.
h) M est sur Oy' : deux racines opposées.
i) M est en A : une racine double nulle.

4° $x^2 - 2(a - 1)x + a^2 - b = 0$.

Les fonctions à étudier sont :

$$\rho = (a - 1)^2 - (a^2 - b)$$
$$= -2a + 1 + b;$$
$$P = a^2 - b;$$
$$S = 2(a - 1).$$

Construire la parabole

$$y = x^2$$

et les droites

$$y = 2x - 1; \quad x = 1.$$

On aboutit aux conclusions suivantes :

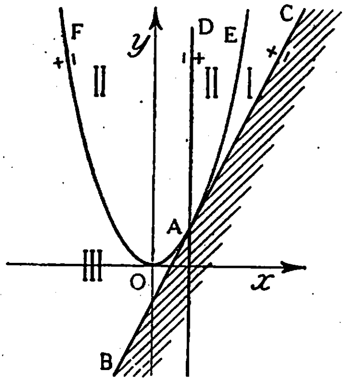


Fig. 35.

a) M (a, b) est dans la région I : deux racines positives.
b) M est dans la région II : deux racines de signes contraires.
c) M est dans la région III : deux racines négatives.
d) M est sur AC : une racine double positive.
e) M est sur AB : une racine double négative.
f) M est sur la branche AE : une racine nulle et une racine positive.
g) M est sur la branche AOF : une racine nulle et une racine négative.
h) M est sur AD : deux racines opposées.
i) M est en A : une racine double nulle.

CHAPITRE XIX

Équations réductibles au second degré.

583. *Résoudre les équations réciproques suivantes :*

1° $6x^3 - 7x^2 - 7x + 6 = 0$; **Rép.** $-1, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}$.

2° $3x^3 + 7x^2 - 7x - 3 = 0$; » $1, -\frac{1}{3}, -3$.

3° $5x^3 - 31x^2 + 31x - 5 = 0$; » $1, \frac{1}{5}, 5$.

4° $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$; » $-1, -0{,}5, -2$.

584. *Résoudre les équations réciproques suivantes :*

1° $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$; **Rép.** $1, 1, \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

2° $x^4 - 6x^3 + 6x - 1 = 0$; » $\pm 1, 3 \pm 2\sqrt{2}$.

3° $6x^4 - 5x^3 - 13x^2 - 5x + 6 = 0$; » $0{,}5, 2$.

4° $x^4 - 5x^3 + 5x - 1 = 0$; » $\pm 1, \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$.

5° $5x^4 - 26x^3 + 26x - 5 = 0$; » $\pm 1, 0{,}2, 5$.

6° $4x^4 + 8x^3 - 37x^2 + 8x + 4 = 0$ » $\frac{1}{2}, 2, \frac{-9 \pm \sqrt{65}}{4}$.

7° $x^4 - x^3 - x + 1 = 0$; » $1, 1$.

8° $2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0$; » $1, 1, 0{,}5, 2$.

585. *Résoudre les équations réciproques :*

1° $6x^5 - 41x^4 + 97x^3 - 97x^2 + 41x - 6 = 0;$

Rép. $1, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{2}, 2.$

2° $x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = 0;$

Rép. $1, 1, -1, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$

3° $x^6 + 8x^5 - 8x^4 + 8x^2 - 8x - 1 = 0;$

Rép. $\pm 1, \frac{-9 \pm \sqrt{77}}{2}.$

4° $6x^7 - 41x^6 + 103x^5 - 138x^4 + 138x^3 - 103x^2 + 41x - 6 = 0.$

Cette équation se décompose en deux autres :

a) L'équation $x - 1 = 0$ donne $x = 1.$

b) L'équation $6x^6 - 35x^5 + 68x^4 - 70x^3 + 68x^2 - 35x + 6 = 0$ peut s'écrire $6\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 35\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 68\left(x + \frac{1}{x}\right) - 70 = 0.$

En posant $x + \frac{1}{x} = y,$ on trouve

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2; \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = y\left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right) = y^3 - 3y.$$

En remplaçant, il vient

$$6y^3 - 35y^2 + 50y = 0.$$

Cette équation donne : $y = x + \frac{1}{x} = 0, \frac{5}{2}$ ou $\frac{10}{3}.$

La racine $y = 0$ est à écarter.

La racine $y = \frac{5}{2}$ donne : $x = 2$ ou $\frac{1}{2}.$

La racine $y = \frac{10}{3}$ donne : $x = 3$ ou $\frac{1}{3}.$

Rép. $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3.$

5° $abx^3 - (a^2 + b^2 - ab)x^2 - (a^2 + b^2 - ab)x + ab = 0.$

Rép. $-1, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}.$

585*bis*. ***Résoudre et discuter les équations suivantes.***

1° $x^4 + 2x^3 + 2mx^2 + 2x + 1 = 0.$

La résolvante est

$$f(y) = y^2 + 2y + 2m - 2 = 0. \tag{1}$$

Une racine de cette équation n'est acceptable que si elle vérifie la relation $y^2 - 4 \geqslant 0$; c'est-à-dire si elle est extérieure à l'intervalle $(-2, 2)$ ou si elle est égale à ± 2.

I. L'équation (1) a une racine acceptable et l'équation proposée a deux racines inverses quand -2 et 2 séparent les racines de (1), c'est-à-dire quand on a

$$f(-2)\,f(2) = 4(m-1)(m+3) < 0,$$

ce qui exige $-3 < m < 1$.

II. L'équation (1) peut avoir deux racines acceptables dans trois cas :

a) Si -2 et 2 sont compris entre les racines de (1), c'est-à-dire quand on a

$$f(-2) = 2(m-1) < 0 \quad \text{et} \quad f(2) = 2(m+3) < 0,$$

ce qui a lieu pour $m < -3$.

b) Si -2 est supérieur aux racines de (1). — Ce cas ne se présente pas, car -2 devrait être supérieur à la demi-somme des racines et celle-ci est -1.

c) Si 2 est inférieur aux racines de (1). — Ce cas ne se présente pas, car 2 devrait être inférieur à -1.

III. Si $m = -3$, (1) devient $y^2 + 2y - 8 = 0$. Cette équation a deux racines acceptables, -4 et 2; d'où $x = -2 \pm \sqrt{3}$ ou 1.

Si $m = 1$, (1) devient $y^2 + 2y = 0$; d'où $y = -2$ et $x = -1$.

2° $x^4 + 2mx^3 + (m-1)x^2 + 2mx + 1 = 0.$

La résolvante est

$$f(y) = y^2 + 2my + m - 3 = 0. \tag{2}$$

I. L'équation (2) a une racine acceptable quand on a

$$f(-2) \times f(2) = (-3m+1)(5m+1) < 0,$$

ce qui exige $m < -\frac{1}{5}$ ou $m > \frac{1}{3}$.

II. Pour voir si l'équation (2) peut avoir deux racines acceptables, on doit examiner les mêmes trois cas que dans l'exercice précédent. On aboutit ainsi aux trois systèmes :

$$f(-2) = -3m + 1 < 0;\quad f(2) = 5m + 1 < 0.$$
$$\rho = m^2 - m + 3 > 0;\quad f(-2) = -3m + 1 > 0;\quad -2 > -m.$$
$$\rho = m^2 - m + 3 > 0;\quad f(2) = 5m + 1 > 0;\quad 2 < -m.$$

Chacun de ces trois systèmes est impossible et l'équation (2) n'a jamais deux racines acceptables.

III. Si $m = -0{,}2$, (2) devient $5y^2 - 2y - 16 = 0$; d'où $y = 2$ et $x = 1$.

Si $m = \frac{1}{3}$, (2) devient $3y^2 + 2y - 8 = 0$; d'où $y = -2$ et $x = -1$.

3° $mx^4 + 2(m-3)x^3 + 6x^2 + 2(m-3)x + m = 0.$

La résolvante est

$$f(y) = my^2 + 2(m-3)y - 2m + 6 = 0. \qquad (3)$$

I. L'équation (3) a une racine acceptable quand on a

$$f(-2)\,f(2) = 12(-m + 9)(m - 1) < 0,$$

ce qui exige $m < 1$ ou $m > 9$.

II. L'examen des trois cas où (3) peut admettre deux racines acceptables, conduit aux trois systèmes :

$$mf(-2) = 2m(-m + 9) < 0;\quad mf(2) = 6m(m - 1) < 0.$$
$$\rho = 3(m^2 - 4m + 3) > 0;\quad mf(-2) > 0;\quad -2 > \frac{3-m}{m}.$$
$$\rho = 3(m^2 - 4m + 3) > 0;\quad mf(2) > 0;\quad 2 < \frac{3-m}{m}.$$

Chacun de ces trois systèmes est impossible.

III. Si $m = 1$, l'équation (3) devient $y^2 - 4y + 4 = 0$; d'où $y = 2$ et $x = 1$.

Si $m = 9$, (3) devient $9y^2 + 12y - 12 = 0$; d'où $y = -2$ et $x = -1$.

586. *Résoudre les équations trinômes suivantes :*

1° $x^6 - 19x^3 - 216 = 0$; **Rép.** $-2,\ 3.$

2° $8x^6 - 63x^3 - 8 = 0$; » $-0{,}5,\ 2.$

3° $8x^6 + 65x^3 + 8 = 0$; **Rép.** $-0{,}5,\ -2$.
4° $x^8 - 97x^4 + 1296 = 0$; » $\pm 2,\ \pm 3$.
5° $x^8 - 626x^4 + 625 = 0$; » $\pm 1,\ \pm 5$.
6° $x^{10} + 31x^5 - 32 = 0$; » $-2,\ 1$.

587. *Résoudre en faisant usage d'inconnues auxiliaires.*

1° $(3x^2 - 5x + 1)^2 - 3x^2 + 5x - \frac{21}{16} = 0$.

Cette équation peut s'écrire

$$(3x^2 - 5x + 1)^2 - (3x^2 - 5x + 1) - \frac{5}{16} = 0.$$

D'où $3x^2 - 5x + 1 = \frac{5}{4}$ ou $-\frac{1}{4}$.

Rép. $x = \frac{5 \pm 2\sqrt{7}}{6}$ ou $\frac{5 \pm \sqrt{10}}{6}$.

2° $(x^2 - 16)^2 - 2(x^2 - 16) = 8$.
On a $x^2 - 16 = 4$ ou -2.
Rép. $x = \pm\sqrt{14}$ ou $\pm 2\sqrt{5}$.

3° $x^2 + 3x - \frac{20}{x^2 + 3x} = 8$.
Cette équation peut s'écrire
$(x^2 + 3x)^2 - 8(x^2 + 3x) - 20 = 0$; d'où $x^2 + 3x = -2$ ou 10.
Rép. $-5,\ -2,\ -1,\ 2$.

4° $(x^2 - x + 1)^4 - 10x^2(x^2 - x + 1)^2 + 9x^4 = 0$.
En divisant par x^4, il vient

$$\left(\frac{x^2 - x + 1}{x}\right)^4 - 10\left(\frac{x^2 - x + 1}{x}\right)^2 + 9 = 0.$$

D'où $\frac{x^2 - x + 1}{x} = \pm 1$ ou ± 3.

Rép. $1,\ 1,\ -1,\ -1,\ 2 \pm \sqrt{3}$.

5° $\left(\frac{a - x}{x - b}\right)^2 = 8\left(\frac{a - x}{x - b}\right) - 15$.

Cette équation donne $\frac{a - x}{x - b} = 3$ ou 5.

Rép. $x = \frac{a + 3b}{4}$ ou $\frac{a + 5b}{6}$.

588. *Résoudre les équations irrationnelles suivantes :*

1° $x + \sqrt{5x + 10} = 8$.

L'équation peut s'écrire $\sqrt{5x + 10} = 8 - x$. (1)

Le premier membre est positif ou nul. On doit donc avoir

$$8 - x \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad x \leqslant 8.$$

Élevons (1) au carré. On trouve

$$x^2 - 21x + 54 = 0; \quad \text{d'où} \quad x' = 18; \quad x'' = 3.$$

La racine $x' = 18$ est à écarter, car elle est supérieure à 8.

Rép. $x = 3$.

2° $\sqrt{169 - x^2} = x - 17$.

On doit avoir $x - 17 \geqslant 0$ ou $x \geqslant 17$.

Élevons au carré. On trouve

$$x^2 - 17x + 60 = 0; \quad \text{d'où} \quad x' = 12; \quad x'' = 5.$$

Il n'y a pas de solution.

3° $x - \sqrt{7 - x} = 3$,

ou $$\sqrt{7 - x} = x - 3.$$

On doit avoir $x - 3 \geqslant 0$ ou $x \geqslant 3$.

Élevons au carré. On trouve

$$x^2 - 5x + 2 = 0; \quad \text{d'où} \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Rép. $x = \dfrac{5 + \sqrt{17}}{2}$.

4° $x - 2 = \sqrt{x^2 - 3x + 1}$.

On doit avoir $x - 2 \geqslant 0$ ou $x \geqslant 2$.

Élevons au carré. On trouve $x - 3 = 0$.

Rép. $x = 3$.

5° $\sqrt{2x^2 + 2} = 2x + 2$.

On doit avoir $2x + 2 \geqslant 0$ ou $x \geqslant -1$.

Élevons au carré. On trouve

$$x^2 + 4x + 1 = 0; \quad \text{d'où} \quad x = -2 \pm \sqrt{3}.$$

Rép. $x = -2 + \sqrt{3}$.

6° $\sqrt{2x^2 - 5x + 7} = 7 + x$.

On doit avoir $7 + x \geqslant 0$ ou $x \geqslant -7$.

Élevons au carré. On trouve

$$x^2 - 19x - 42 = 0; \quad \text{d'où} \quad x' = 21; \quad x'' = -2.$$

Rép. $x = -2$ ou 21.

7° $x - 2 = \sqrt{x^2 - x + 1}$.

On doit avoir $x - 2 \geqslant 0$ ou $x \geqslant 2$.

Élevons au carré. On trouve $3x = 3$ ou $x = 1$.

Il n'y a pas de réponse.

8° $\sqrt{x^2 + 1} - 2x + 1 = 0$,

ou $\sqrt{x^2 + 1} = 2x - 1$.

On doit avoir $2x - 1 \geqslant 0$ ou $x \geqslant \frac{1}{2}$.

Élevons au carré. On trouve

$$3x^2 - 4x = 0; \text{ d'où } x' = \frac{4}{3}; \quad x'' = 0.$$

Rép. $x = \frac{4}{3}$.

589. *Résoudre les équations irrationnelles :*

1° $\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{19 - 3x^2}$. — On doit avoir

$$9 - x^2 \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad -3 \leqslant x \leqslant 3$$

et $\quad 19 - 3x^2 \geqslant 0$ ou $-\sqrt{\frac{19}{3}} \leqslant x \leqslant \sqrt{\frac{19}{3}}$;

ou, en résumé, $\quad -\sqrt{\frac{19}{3}} \leqslant x \leqslant \sqrt{\frac{19}{3}}$.

Élevons au carré. On trouve

$$2x^2 = 10 \quad \text{ou} \quad x = \pm\sqrt{5}.$$

Rép. $x = \pm\sqrt{5}$.

2° $\sqrt{2 + \sqrt{x - 5}} = \sqrt{13 - x}$.

On doit avoir $x - 5 \geqslant 0$ et $13 - x \geqslant 0$;

ou, en résumé, $5 \leqslant x \leqslant 13$.

Élevons au carré; on trouve l'équation

$$\sqrt{x - 5} = 11 - x, \quad \text{qui exige } x \leqslant 11.$$

Élevons une seconde fois au carré. Il vient

$$x^2 - 23x + 126 = 0; \text{ d'où } x' = 14; \quad x'' = 9.$$

Rép. $x = 9$.

3° $\sqrt{6x + 1} = \sqrt{7x + 4}$.

On doit avoir $6x + 1 \geqslant 0$ et $7x + 4 \geqslant 0$,

ou, en résumé, $x \geqslant -\frac{1}{6}$.

Élevons au carré. On trouve

$$x + 3 = 0 \quad \text{ou} \quad x = -3.$$

Il n'y a pas de réponse.

4° $\sqrt{1 + \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 1.$

On doit avoir $x^4 - x^2 \geqslant 0$ et $x - 1 \geqslant 0,$
ou, en résumé, $x \geqslant 1.$

Élevons au carré. Il vient

$$\sqrt{x^4 - x^2} = x^2 - 2x.$$

Cette équation exige que l'on ait $x^2 - 2x \geqslant 0$, ou, en tenant compte de l'inéquation $x \geqslant 1$,

$$x \geqslant 2.$$

Élevons une deuxième fois au carré. On trouve

$$4x^3 - 5x^2 = 0; \quad \text{d'où} \quad x' = 1{,}25, \quad x'' = 0.$$

Il n'y a pas de réponse.

5° $\sqrt{-x^2} + \sqrt{2 - x} = 0.$

Cette équation peut s'écrire

$$(\sqrt{2 + x} + 1)\sqrt{2 - x} = 0.$$

Elle est vérifiée pour $x = 2$ et n'a pas d'autre racine.

Rép. $x = 2.$

6° $2\sqrt{x(x - 3)} = \sqrt{8x - x^2}.$

On doit avoir $x(x - 3) \geqslant 0$ et $8x - x^2 \geqslant 0,$
ce qui exige $3 \leqslant x \leqslant 8$ ou $x = 0.$

En élevant au carré, on trouve

$$4x(x - 3) = x(8 - x).$$

Rép. $x = 0$ et $x = 4.$

590. *Résoudre les équations irrationnelles suivantes :*

1° $\sqrt{x + 5} - \sqrt{x + 2} = 1.$

L'équation peut s'écrire

$$\sqrt{x + 5} = \sqrt{x + 2} + 1. \qquad (1)$$

On doit avoir $x + 5 \geqslant 0$ et $x + 2 \geqslant 0,$
ou, en résumé, $x \geqslant -2.$

Les deux membres de l'équation (1) sont positifs et on peut élever au carré. Il vient ainsi

$$x + 5 = x + 3 + 2\sqrt{x + 2} \quad \text{ou} \quad \sqrt{x + 2} = 1.$$

Rép. $x = -1.$

2° $\sqrt{36 + x} = 2 + \sqrt{x}.$

On doit avoir $36 + x \geqslant 0$ et $x \geqslant 0,$
ou, en résumé, $x \geqslant 0.$

En élevant au carré, on obtient l'équation

$$\sqrt{x} = 8 \quad \text{ou} \quad x = 64.$$

Rép. $x = 64.$

3° $\sqrt{x-3} = 3 - \sqrt{x}$,

ou $$\sqrt{x-3} + \sqrt{x} = 3.$$

On doit avoir $x - 3 \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$,

ou, en résumé, $$x \geqslant 3. \qquad (1)$$

En élevant au carré, on obtient l'équation

$$\sqrt{x(x-3)} = 6 - x.$$

On doit avoir $6 - x \geqslant 0$ ou $x \leqslant 6$. $\qquad$ (2)

Une deuxième élévation au carré donne

$$9x = 36 \quad \text{ou} \quad x = 4.$$

Cette racine convient, car elle satisfait aux conditions (1) et (2).

Rép. $x = 4$.

4° $\sqrt{x-2} - \sqrt{x-14} = 1$,

ou $$\sqrt{x-2} = 1 + \sqrt{x-14}.$$

On doit avoir $x - 2 \geqslant 0$ et $x - 14 \geqslant 0$,

ou, en résumé, $$x \geqslant 14.$$

En élevant au carré, on obtient l'équation

$$2\sqrt{x-14} = 11 \quad \text{ou} \quad 4x = 177.$$

Rép. $x = \dfrac{177}{4}$.

5° $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-1} = 2$,

ou $$\sqrt{2x+1} = 2 + \sqrt{x-1}.$$

On doit avoir $2x + 1 \geqslant 0$ et $x - 1 \geqslant 0$,

ou, en résumé, $$x \geqslant 1.$$

En élevant au carré, on obtient l'équation

$$4\sqrt{x-1} = x - 2,$$

qui exige $x - 2 \geqslant 0$ ou $x \geqslant 2$.

Une deuxième élévation au carré donne

$$x^2 - 20x + 20 = 0; \quad \text{d'où} \quad x = 10 \pm \sqrt{80}.$$

Rép. $x = 10 + 4\sqrt{5}$.

6° $\sqrt{2x - \dfrac{1}{4}} + \sqrt{x+1} = 3$.

On doit avoir $2x - \dfrac{1}{4} \geqslant 0$ et $x + 1 \geqslant 0$,

ou, en résumé, $$x \geqslant \frac{1}{8}.$$

En élevant au carré, on obtient l'équation

$$\sqrt{(8x-1)(x+1)} = \frac{33}{4} - 3x,$$

qui exige $\dfrac{33}{4} - 3x \geqslant 0$ ou $x \leqslant \dfrac{11}{4}$.

Une deuxième élévation au carré donne

$$16x^2 - 904x + 1105 = 0; \quad \text{d'où} \quad x' = \frac{221}{4}; \quad x'' = \frac{5}{4}.$$

Rép. $x = 1{,}25$.

7° $\sqrt{x^2 - 3x + 4} + \sqrt{x^2 - 3x + 1} = 3$.

Le trinôme $x^2 - 3x + 4$ est toujours positif. Il suffit donc d'avoir

$$x^2 - 3x + 1 \geqslant 0.$$

En élevant au carré, on obtient l'équation

$$\sqrt{(x^2 - 3x + 4)(x^2 - 3x + 1)} = 2 + 3x - x^2,$$

qui exige $$2 + 3x - x^2 \geqslant 0.$$

Une deuxième élévation au carré donne

$$9x^2 - 27x = 0; \quad \text{d'où} \quad x' = 3; \quad x'' = 0.$$

Ces deux réponses conviennent, car elles rendent positifs les trinômes

$$2 + 3x - x^2 \quad \text{et} \quad x^2 - 3x + 1.$$

Rép. $x = 0$ ou 3.

8° $2\sqrt{3x - 5} - \sqrt{x + 2} = 5$,

ou $$2\sqrt{3x - 5} = 5 + \sqrt{x + 2}.$$

On doit avoir $3x - 5 \geqslant 0$ et $x + 2 \geqslant 0$,

ou, en résumé, $$x \geqslant \frac{5}{3}.$$

En élevant au carré, on obtient l'équation

$$10\sqrt{x + 2} = 11x - 47,$$

qui exige $$11x - 47 \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad x \geqslant \frac{47}{11}.$$

Une deuxième élévation au carré donne

$$121x^2 - 1134x + 2009 = 0; \quad \text{d'où} \quad x' = 7; \quad x'' = \frac{287}{121}.$$

Rép. $x = 7$.

9° $\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x(x - 1)} = x - 1$.

Les radicaux ne sont définis que si on a

$$x^2 - 1 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad x(x - 1) \geqslant 0,$$

ce qui exige $$x \leqslant -1 \quad \text{ou} \quad x \geqslant 1.$$

a) Si $x \geqslant 1$, on a $x - 1 = \sqrt{(x - 1)^2}$

et l'équation peut s'écrire, après avoir mis $\sqrt{x - 1}$ en évidence,

$$[\sqrt{x + 1} - \sqrt{x} - \sqrt{x - 1}]\sqrt{x - 1} = 0.$$

L'équation $\sqrt{x - 1} = 0$ donne $x = 1$.

L'équation $$\sqrt{x + 1} - \sqrt{x} - \sqrt{x - 1} = 0$$

peut s'écrire $$\sqrt{x + 1} = \sqrt{x} + \sqrt{x - 1},$$

ou, en élevant au carré,

$$x + 1 = 2x - 1 + 2\sqrt{x(x - 1)} \quad \text{ou} \quad 2\sqrt{x(x - 1)} = 2 - x.$$

Cette équation exige $x \leqslant 2$. Une nouvelle élévation au carré donne

$$3x^2 = 4 \quad \text{et} \quad x = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

b) Si $x \leqslant -1$, on a $x - 1 = -\sqrt{(x-1)^2}$. En divisant par $\sqrt{1-x}$, qui est positif par hypothèse, l'équation donnée devient

$$\sqrt{-x-1} - \sqrt{-x} + \sqrt{1-x} = 0.$$

Cette équation peut s'écrire aussi

$$\sqrt{-1-x} + \sqrt{1-x} = \sqrt{-x},$$

ou, en élevant au carré,

$$-2x + 2\sqrt{x^2-1} = -x \quad \text{ou} \quad 2\sqrt{x^2-1} = x.$$

Cette dernière équation est impossible, car on suppose $x \leqslant -1$.

Rép. $x = 1$ et $x = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

591. *Résoudre les équations irrationnelles :*

1° $\sqrt{2x+9} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-4}$.

On doit avoir $2x + 9 \geqslant 0$; $x + 1 \geqslant 0$; $x - 4 \geqslant 0$;
ou, en résumé, $x \geqslant 4$.

En élevant au carré, on obtient l'équation

$$\sqrt{(x+1)(x-4)} = 6.$$

Une deuxième élévation au carré donne

$$x^2 - 3x - 40 = 0; \quad \text{d'où} \quad x' = 8; \quad x'' = -5.$$

Rép. $x = 8$.

2° $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+20} = 2\sqrt{x+1}$.

On doit avoir $x + 4 \geqslant 0$; $x + 20 \geqslant 0$; $x + 1 \geqslant 0$;
ou, en résumé, $x \geqslant -1$.

En élevant au carré, on obtient l'équation

$$\sqrt{(x+4)(x+20)} = x - 10,$$

qui exige $x - 10 \geqslant 0$ ou $x \geqslant 10$.

Une deuxième élévation au carré donne

$$44x = 20 \quad \text{ou} \quad x = \frac{5}{11}.$$

Il n'y a pas de réponse.

3° $x\sqrt{5x-1} = x + 1$.

On doit avoir $5x - 1 \geqslant 0$ et $x(x+1) \geqslant 0$,
ou, en résumé, $x \geqslant 0{,}2$.

En élevant au carré, il vient

$$5x^3 - 2x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad (x-1)(5x^2+3x+1) = 0.$$

Rép. $x = 1$.

4o $\sqrt{x+6} - \sqrt{7x+4} = \sqrt{x+1}$,

ou $$\sqrt{x+6} = \sqrt{7x+4} + \sqrt{x+1}.$$

On doit avoir $x + 6 \geqslant 0$; $7x + 4 \geqslant 0$; $x + 1 \geqslant 0$;

ou, en résumé, $$x \geqslant -\frac{4}{7}.$$

En élevant au carré, on obtient l'équation
$$2\sqrt{(7x+4)(x+1)} = 1 - 7x,$$
qui exige $$1 - 7x \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad x \leqslant \frac{1}{7}.$$

Une deuxième élévation au carré donne
$$21x^2 - 58x - 15 = 0; \quad \text{d'où} \quad x' = 3; \quad x'' = -\frac{5}{21}.$$

Rép. $x = -\dfrac{5}{21}$.

5o $\sqrt{2-x} = \sqrt{1-x} + \sqrt{3-x}$.

On doit avoir $2 - x \geqslant 0$; $1 - x \geqslant 0$; $3 - x \geqslant 0$;

ou, en résumé, $$x \leqslant 1. \qquad (1)$$

En élevant au carré, on obtient l'équation
$$2\sqrt{(1-x)(3-x)} = x - 2,$$
qui exige $$x - 2 \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad x \geqslant 2. \qquad (2)$$

Les conditions (1) et (2) sont contradictoires. Donc,

Il n'y a pas de réponse.

6o $(x+2)\sqrt{x+5} = (x+3)\sqrt{x+2}$.

On doit avoir $x + 5 \geqslant 0$, $x + 2 \geqslant 0$, $(x + 2)(x + 3) \geqslant 0$,

ou, en résumé, $$x \geqslant -2.$$

En élevant au carré, il vient
$$x^2 + 3x + 2 = 0.$$

Rép. $x = -1$ et $x = -2$.

592. *Résoudre les équations suivantes :*

1o $\sqrt{2x-3} = \sqrt{2x+4} + \sqrt{x-5} - \sqrt{x-2}$.

On doit avoir
$$2x - 3 \geqslant 0; \quad 2x + 4 \geqslant 0; \quad x - 5 \geqslant 0; \quad x - 2 \geqslant 0;$$
ou, en résumé, $$x \geqslant 5.$$

L'équation peut s'écrire
$$\sqrt{2x-3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{2x+4} + \sqrt{x-5}.$$

En élevant au carré, on obtient l'équation
$$\sqrt{(2x-3)(x-2)} = 2 + \sqrt{(2x+4)(x-5)}.$$

Une deuxième élévation au carré donne l'équation
$$22 - x = 4\sqrt{(2x+4)(x-5)},$$
qui exige $$22 - x \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad x \leqslant 22.$$

Élevons au carré. Il vient

$$31x^2 - 52x - 804 = 0; \quad \text{d'où} \quad x' = 6; \quad x'' = -\frac{134}{31}.$$

Rép. $x = 6$.

2° $\sqrt{x+6} + \sqrt{x-10} = \sqrt{x+17} + \sqrt{x-15}$.

On doit avoir, en résumé, $x \geqslant 15$.

Deux élévations au carré donnent l'équation

$$\sqrt{(x+17)(x-15)} = 31 - x,$$

qui exige $\quad 31 - x \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad x \leqslant 31.$

En élevant au carré, on trouve

$$64x = 1216 \quad \text{ou} \quad x = 19.$$

Rép. $x = 19$.

3° $\sqrt{x} + \sqrt{2-x} + \sqrt{5-x} = \sqrt{x+15}$.

On doit avoir $\quad 0 \leqslant x \leqslant 2. \qquad (1)$

L'équation donnée peut s'écrire

$$\sqrt{x} + \sqrt{5-x} = \sqrt{x+15} - \sqrt{2-x}. \qquad (2)$$

Le second membre de cette équation est positif comme le premier, si on a

$$\sqrt{x+15} > \sqrt{2-x} \quad \text{ou} \quad 2x > -13.$$

Nous conviendrons de n'accepter pour x que des valeurs satisfaisant aux inéquations (1). Dans ces conditions on a aussi $2x > -13$ et en élevant (2) au carré, on obtient l'équation équivalente

$$\sqrt{(2-x)(x+15)} = 6 - \sqrt{x(5-x)}. \qquad (3)$$

Le second membre de cette équation est positif comme le premier, si on a

$$6 \geqslant \sqrt{x(5-x)} \quad \text{ou} \quad x^2 - 5x + 36 \geqslant 0.$$

Le trinôme $x^2 - 5x + 36$ est toujours positif; par suite, en élevant (3) au carré, on obtient une équation équivalente

$$2\sqrt{x(5-x)} = 1 + 3x.$$

Le second membre est positif, quand x satisfait aux inéquations (1). On peut donc élever une 3e fois au carré. Il vient ainsi

$$13x^2 - 14x + 1 = 0; \quad \text{d'où} \quad x' = 1; \quad x'' = \frac{1}{13}.$$

Rép. $x = 1$ ou $\frac{1}{13}$.

593. *Résoudre les équations suivantes :*

1° $\dfrac{\sqrt{4x+20}}{4+\sqrt{x}} = \dfrac{4-\sqrt{x}}{2}$.

On doit avoir $x \geqslant 0$. Multiplions par $2(4+\sqrt{x})$ qui est positif, quand $x \geqslant 0$. Il vient ainsi

$$2\sqrt{4x+20} = 16 - x.$$

Cette équation montre qu'on doit avoir $x \leqslant 16$. Élevons au carré et il vient

$$x^2 - 48x + 176 = 0; \quad \text{d'où} \quad x' = 44; \quad x'' = 4.$$

Rép. $x = 4$.

2° $\dfrac{\sqrt{6+x} + \sqrt{6-x}}{\sqrt{6+x} - \sqrt{6-x}} = \sqrt{5}.$

On doit avoir $\quad 6 + x \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad x \geqslant -6$

et $\quad 6 - x \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad x \leqslant 6.$

De plus, le dénominateur doit être positif, ce qui exige

$$\sqrt{6+x} > \sqrt{6-x} \quad \text{ou} \quad x > 0.$$

En résumé, on doit avoir

$$0 < x \leqslant 6.$$

Les propriétés des proportions donnent

$$\frac{\sqrt{6+x}}{\sqrt{6-x}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} \quad \text{ou} \quad \frac{6+x}{6-x} = \frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}.$$

De cette équation, on déduit la racine $x = 2\sqrt{5}$, qui convient.

Rép. $x = 2\sqrt{5}$.

3° $\sqrt{x+12} - \dfrac{10}{\sqrt{x+12}} = \sqrt{5x - 56}.$

On doit avoir $\quad x \geqslant \dfrac{56}{5}. \qquad (1)$

En transformant le premier membre, l'équation devient

$$\frac{x+2}{\sqrt{x+12}} = \sqrt{5x-56} \quad \text{ou} \quad x + 2 = \sqrt{(x+12)(5x-56)}.$$

Le premier membre de cette équation est positif, à cause de (1). En élevant au carré, il vient

$$x^2 = 169 \quad \text{ou} \quad x = \pm 13.$$

Rép. $x = 13$.

4° $\dfrac{1}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}} + \dfrac{1}{\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}} = 1.$

On doit avoir $2 + x \geqslant 0$ et $2 - x \geqslant 0$, c'est-à-dire

$$-2 \leqslant x \leqslant 2.$$

En réduisant les deux termes du premier membre au même dénominateur, l'équation devient

$$\frac{\sqrt{2+x}}{x} = 1,$$

qui exige, en plus, $x > 0$.

En élevant au carré, il vient $x^2 - x - 2 = 0$.

Cette équation donne $x' = 2$, $x'' = -1$.
Rép. $x = 2$.

5° $\dfrac{2}{x + \sqrt{2 - x^2}} + \dfrac{2}{x - \sqrt{2 - x^2}} = x.$

On doit avoir

$$2 - x^2 \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad -\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2};$$
$$x \neq \pm \sqrt{2 - x^2} \quad \text{ou} \quad x \neq \pm 1.$$

En réduisant les deux termes du premier membre au même dénominateur, il vient

$$\frac{2x}{x^2 - 1} = x \quad \text{ou} \quad x^3 - 3x = 0.$$

Cette équation donne $x' = 0$; $x'' = -\sqrt{3}$; $x''' = \sqrt{3}$.
Rép. $x = 0$.

6° $\sqrt{3 + \sqrt{x}} + \sqrt{4 - \sqrt{x}} = \sqrt{7 + 2\sqrt{x}}.$

On doit avoir $x \geqslant 0$; $4 \geqslant \sqrt{x}$;
ou, en résumé, $0 \leqslant x \leqslant 16$.
En élevant au carré, on obtient l'équation

$$\sqrt{(3 + \sqrt{x})(4 - \sqrt{x})} = \sqrt{x}.$$

Une deuxième élévation au carré donne

$$\sqrt{x} = 2x - 12.$$

Cette équation n'est possible que si on a

$$2x - 12 \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad x \geqslant 6.$$

Élevons au carré. Il vient

$$4x^2 - 49x + 144 = 0; \quad \text{d'où} \quad x = \frac{49 \pm \sqrt{97}}{8}.$$

Rép. $x = \dfrac{49 + \sqrt{97}}{8}.$

594. *Résoudre en faisant usage d'inconnues auxiliaires.*

1° $x^2 + 4x - 6 = 2\sqrt{x^2 + 4x - 3}.$

En posant $\sqrt{x^2 + 4x - 3} = y$, l'équation devient

$$y^2 - 2y - 3 = 0; \quad \text{d'où} \quad y' = 3; \quad y'' = -1.$$

La racine $y'' = -1$ est à écarter; la racine $y' = 3$ donne

$$x^2 + 4x - 12 = 0; \quad \text{d'où} \quad x' = 2, \quad x'' = -6.$$

Rép. $x = 2$ ou -6.

2° $3x^2 - 4x + \sqrt{3x^2 - 4x + 6} = 6.$

En posant $\sqrt{3x^2 - 4x + 6} = y$, l'équation devient

$$y^2 + y - 12 = 0; \quad \text{d'où} \quad y' = 3; \quad y'' = -4.$$

La racine négative doit être écartée; la racine positive donne

$$3x^2 - 4x - 3 = 0; \quad \text{d'où} \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{13}}{3}.$$

Rép. $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{13}}{3}$.

3° $\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 3 = \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 7}{2\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$.

Posons $y = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$, puis faisons disparaître les dénominateurs. Il vient ainsi

$$2y^2 + 5y - 7 = 0; \quad \text{d'où} \quad y' = 1; \quad y'' = -3{,}5.$$

La racine négative doit être écartée. La racine positive donne

$$x^2 - 2x - 4 = 0; \quad \text{d'où} \quad x = 1 \pm \sqrt{5}.$$

Rép. $x = 1 \pm \sqrt{5}$.

4° $2x - x^2 + \sqrt{6x^2 - 12x + 7} = 0$.

Le trinôme $6x^2 - 12x + 7$ est toujours positif. En posant $x^2 - 2x = y$, l'équation devient

$$\sqrt{6y + 7} = y. \tag{1}$$

On voit qu'on doit avoir $y > 0$. En élevant l'équation (1) au carré, il vient

$$y^2 - 6y - 7 = 0; \quad \text{d'où} \quad y' = 7; \quad y'' = -1.$$

La racine $y'' = -1$ doit être écartée. La racine $y' = 7$ donne

$$x^2 - 2x - 7 = 0; \quad \text{d'où} \quad x = 1 \pm 2\sqrt{2}.$$

Rép. $x = 1 \pm 2\sqrt{2}$.

5° $2\sqrt{x} - \dfrac{x - 8}{\sqrt{x}} = 6$.

On pose $\sqrt{x} = y$. On trouve $y = 2$ ou 4; puis $x = 4$ ou 16.

Rép. $x = 4$ ou 16.

6° $\dfrac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{2} = \dfrac{12 - \sqrt{x^2 - 5x + 6}}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$.

Posons $y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$. L'équation devient

$$y^2 + 2y - 24 = 0; \quad \text{d'où} \quad y' = 4; \quad y'' = -6 \text{ (à écarter).}$$

L'équation $\sqrt{x^2 - 5x + 6} = 4$ donne $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{65}}{2}$.

Rép. $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{65}}{2}$.

7° $(2x + \sqrt{x})^4 - 4(2x + \sqrt{x})^2 = 5.$
Posons $y = 2x + \sqrt{x}$. L'équation devient
$$y^4 + 4y^2 - 5 = 0; \quad \text{d'où} \quad y = \pm 1.$$
a) L'équation $2x + \sqrt{x} = 1$ exige $x \geqslant 0$ et $1 - 2x \geqslant 0$.
Elle peut s'écrire $\sqrt{x} = 1 - 2x$. En élevant au carré, on trouve
$$4x^2 - 5x + 1 = 0; \quad \text{d'où} \quad x'' = \frac{1}{4}; \quad x' = 1 \text{ (à écarter).}$$
b) L'équation $2x + \sqrt{x} = -1$ exige $x \geqslant 0$ et $2x + 1 \leqslant 0$.
Ces deux inéquations sont contradictoires et l'équation est impossible.
Rép. $x = 0{,}25$.

8° $(x + \sqrt{x})^4 - (x + \sqrt{x})^2 = 159\,600.$
En posant $x + \sqrt{x} = y$, l'équation devient
$$y^4 - y^2 - 159\,600 = 0; \quad \text{d'où} \quad y = \pm 20.$$
a) L'équation $x + \sqrt{x} = 20$ exige $x \geqslant 0$ et $20 - x \geqslant 0$.
Elle peut s'écrire $\sqrt{x} = 20 - x$. En élevant au carré, on trouve
$$x^2 - 41x + 400 = 0; \quad \text{d'où} \quad x'' = 16; \quad x' = 25 \text{ (à écarter).}$$
b) L'équation $x + \sqrt{x} = -20$ exige $x \geqslant 0$ et $x + 20 \leqslant 0$.
Ces deux inéquations sont contradictoires et l'équation est impossible.
Rép. $x = 16$.

595. *Résoudre et discuter les équations suivantes :*

1° $\sqrt{x^2 + 2} = x - m.$
On doit avoir $x - m \geqslant 0$ ou $x \geqslant m$.
En élevant au carré, on trouve
$$2mx = m^2 - 2; \quad \text{d'où} \quad x = \frac{m^2 - 2}{2m},$$
en supposant m différent de zéro. Cette réponse ne convient que si on a
$$\frac{m^2 - 2}{2m} \geqslant m \quad \text{ou} \quad \frac{m^2 + 2}{2m} \leqslant 0.$$
Cette inégalité exige qu'on ait $m < 0$.

2° $\sqrt{x^2 - 4} = x + m.$
On doit avoir $x + m \geqslant 0$ ou $x \geqslant -m$.
Élevons au carré; il vient ainsi
$$2mx = -(m^2 + 4); \quad \text{d'où} \quad x = -\frac{m^2 + 4}{2m},$$
en supposant m différent de zéro. Cette réponse ne convient que si on a
$$-\frac{m^2 + 4}{2m} \geqslant -m \quad \text{ou} \quad \frac{m^2 - 4}{2m} \geqslant 0.$$
Cette inégalité exige qu'on ait
$$-2 \leqslant m < 0 \quad \text{ou} \quad m \geqslant 2.$$

3° $\sqrt{m - mx^2} = x + 1$.

On doit avoir $x + 1 \geqslant 0$ ou $x \geqslant -1$.

En élevant au carré, l'équation devient

$$f(x) = x^2(m+1) + 2x + 1 - m = 0.$$

Les racines de cette équation conviennent si elles sont supérieures ou égales à -1. Calculons d'abord $f(-1)$. On a

$$f(-1) = 0.$$

Il en résulte que -1 est une racine de l'équation $f(x) = 0$; cette racine convient; l'autre racine est $\dfrac{1-m}{1+m} : (-1) = \dfrac{m-1}{m+1}$.

Cette racine convient si on a

$$\frac{m-1}{m+1} \geqslant -1 \quad \text{ou} \quad \frac{2m}{m+1} \geqslant 0;$$

ce qui exige $m < -1$ ou $m \geqslant 0$.

4° $2 - x = \sqrt{m^2 - x^2}$.

On doit avoir $2 - x \geqslant 0$ ou $x \leqslant 2$.

L'élévation au carré donne

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 4 - m^2 = 0. \tag{1}$$

a) L'équation (1) admet deux racines et la plus petite convient, si on a

$$f(2) = 4 - m^2 < 0;$$

ce qui exige $m < -2$ ou $m > 2$.

b) L'équation (1) admet deux racines acceptables, si on a :

$\rho = 2m^2 - 4 > 0$; ce qui exige $m < -\sqrt{2}$ ou $m > \sqrt{2}$;

$f(2) = 4 - m^2 > 0$; ce qui exige $-2 < m < 2$;

$2 > \dfrac{4}{4} = 1$, condition toujours réalisée.

En résumé, on doit avoir

$$-2 < m < -\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad \sqrt{2} < m < 2.$$

c) Si $m = \pm 2$, on a $x = 0$ ou 2.

Si $m = \pm\sqrt{2}$, on a $x = 1$.

5° $\sqrt{x + a} = a - \sqrt{x}$.

Cette équation peut s'écrire

$$\sqrt{x+a} + \sqrt{x} = a.$$

On doit avoir $a \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$.

Si $a = 0$, on trouve $x = 0$.

Supposons ensuite $a > 0$. En élevant au carré, l'équation devient

$$2\sqrt{x(x+a)} = a^2 - a - 2x.$$

On devra avoir $a^2 - a - 2x \geqslant 0$ ou $x \leqslant \dfrac{a^2 - a}{2}$.

En élevant une deuxième fois au carré, il vient

$$4a^2x = a^2(a^2 - 2a + 1) \quad \text{ou} \quad x = \frac{(a-1)^2}{4}.$$

Cette réponse n'est pas négative. Elle conviendra donc si on a

$$\frac{(a-1)^2}{4} \leqslant \frac{a^2 - a}{2} \quad \text{ou} \quad a^2 - 1 \geqslant 0.$$

Cette inégalité exige $a \geqslant 1$, car nous avons supposé que a est positif.

6° $x + \sqrt{x(3-x)} = m$.

Cette équation peut s'écrire

$$\sqrt{x(3-x)} = m - x,$$

et on doit avoir $m - x \geqslant 0$ ou $x \leqslant m$.

En élevant au carré, on trouve

$$f(x) = 2x^2 - (2m+3)x + m^2 = 0.$$

a) Cette équation admet deux racines et la plus petite convient si on a

$$f(m) = m^2 - 3m < 0 \quad \text{ou} \quad 0 < m < 3.$$

b) L'équation admet deux racines acceptables, si on a :

$\rho = -4m^2 + 12m + 9 > 0$; ce qui exige

$$\frac{3}{2}(1 - \sqrt{2}) < m < \frac{3}{2}(1 + \sqrt{2});$$

$f(m) = m^2 - 3m > 0$; ce qui exige $m < 0$ ou $m > 3$;

$m > \dfrac{2m+3}{4}$; ce qui exige $m > \dfrac{3}{2}$.

En résumé, on doit avoir

$$3 < m < \frac{3}{2}(1 + \sqrt{2}).$$

c) Si $m = 0$, on a $x'' = 0$; $x' = \dfrac{3}{2}$ (à écarter);

Si $m = 3$, on a $x = \dfrac{3}{2}$ ou 3;

Si $m = \dfrac{3}{2}(1 + \sqrt{2})$, on a $x' = x'' = \dfrac{3}{4}(2 + \sqrt{2})$.

596. *Résoudre et discuter les équations suivantes :*

1° $x + \sqrt{(x+2)(2m-x)} = m$.

Cette équation peut s'écrire

$$\sqrt{(x+2)(2m-x)} = m - x$$

et on doit avoir $m - x \geqslant 0$ ou $x \leqslant m$.

L'élévation au carré donne

$$f(x) = 2x^2 - 2x(2m-1) + m^2 - 4m = 0.$$

a) Cette équation admet deux racines et la plus petite convient si on a :

$$f(m) = -m(m+2) < 0;$$

ce qui exige $\quad m < -2 \quad \text{ou} \quad m > 0.$

b) Elle admet deux racines acceptables, si on a :

$$= 2m^2 + 4m + 1 > 0; \text{ ce qui exige } m < \frac{-2-\sqrt{2}}{2} \text{ ou } m > \frac{-2+\sqrt{2}}{2};$$

$$f(m) > 0 \quad \text{ou} \quad -2 < m < 0;$$

$$m > \frac{2m-1}{2} = m - \frac{1}{2} \quad \text{ce qui est toujours.}$$

En résumé, on doit avoir

$$-2 < m < \frac{-2-\sqrt{2}}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{-2+\sqrt{2}}{2} < m < 0.$$

c) Si $m = -2$, on a $x' = -2$; $x'' = -3$;

Si $m = \dfrac{-2-\sqrt{2}}{2}$, on a $x' = x'' = \dfrac{-3-\sqrt{2}}{2}$;

Si $m = \dfrac{-2+\sqrt{2}}{2}$, on a $x' = x'' = \dfrac{-3+\sqrt{2}}{2}$;

Si $m = 0$, on a $x' = 0$; $x'' = -1$.

2° $\sqrt{m + 2(m+1)x - x^2} = x - m.$

On doit avoir $x - m \geqslant 0$ ou $x \geqslant m$.

L'élévation au carré donne

$$f(x) = 2x^2 - 2(2m+1)x + m(m-1) = 0.$$

a) Cette équation admet deux racines et la plus grande convient, si on a

$$f(m) = -m(m+3) < 0;$$

ce qui exige $\quad m < -3 \quad \text{ou} \quad m > 0.$

b) L'équation admet deux racines acceptables, si on a

$\rho = 2m^2 + 6m + 1 > 0;$ ce qui exige

$$m < \frac{-3-\sqrt{7}}{2} \quad \text{ou} \quad m > \frac{-3+\sqrt{7}}{2};$$

$$f(m) > 0 \quad \text{ou} \quad -3 < m < 0;$$

$$m < \frac{2m+1}{2} = m + \frac{1}{2}; \quad \text{ce qui est toujours.}$$

En résumé, on doit avoir

$$-3 < m < \frac{-3-\sqrt{7}}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{-3+\sqrt{7}}{2} < m < 0.$$

c) Si $m = -3$, on a $x' = -2$; $x'' = -3$;

Si $m = \dfrac{-3-\sqrt{7}}{2}$, on a $x' = x'' = \dfrac{-2-\sqrt{7}}{2}$;

Si $m = \dfrac{-3+\sqrt{7}}{2}$, on a $x' = x'' = \dfrac{-2+\sqrt{7}}{2}$;

Si $m = 0$, on a $x' = 1$; $x'' = 0$.

3° $\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} = a$.

Les deux trinômes $x^2 + x + 1$ et $x^2 - x + 1$ sont toujours positifs. Le second membre doit être positif comme le premier; aussi nous supposerons a positif.

L'élévation au carré donne

$$2\sqrt{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)} = a^2 - 2(x^2 + 1).$$

On doit avoir $a^2 - 2(x^2 + 1) \geqslant 0$ ou $x^2 + 1 \leqslant \dfrac{a^2}{2}$.

En élevant une deuxième fois au carré, on trouve

$$x^2(4a^2 - 4) = a^4 - 4a^2 \quad \text{ou} \quad x^2 = \frac{a^2(a^2 - 4)}{4(a^2 - 1)},$$

en supposant $a \neq 1$.

Les deux racines de cette équation sont acceptables, si l'on a :

a) $x^2 > 0$; ce qui exige $a^2 < 1$ ou $a^2 > 4$.

b) $x^2 + 1 < \dfrac{a^2}{2}$, ou, en remplacant x^2 par sa valeur,

$$\frac{a^4 - 4}{4(a^2 - 1)} < \frac{a^2}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{a^4 - 2a^2 + 4}{4(a^2 - 1)} > 0.$$

Le numérateur est toujours positif, car il vaut $(a^2 - 2)^2 + 2a^2$. On doit donc avoir $a^2 - 1 > 0$ ou $a^2 > 1$.

En résumé, on doit avoir

$$a^2 > 4 \quad \text{ou} \quad a > 2.$$

Dans le cas particulier où $a = 2$, on trouve $x = 0$.

4° $2x + 2\sqrt{a^2 + x^2} = \dfrac{5a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.

Cette équation peut s'écrire

$$2x\sqrt{a^2 + x^2} = 3a^2 - 2x^2; \tag{1}$$

on voit que les valeurs de x qui vérifient l'équation doivent satisfaire à l'inéquation

$$x(3a^2 - 2x^2) > 0. \tag{2}$$

Élevons (1) au carré. On trouve

$$16a^2x^2 = 9a^4; \quad \text{d'où} \quad x = \pm \frac{3a}{4}, \text{ si } a \neq 0.$$

Ces valeurs de x ne conviennent que si elles rendent positive l'expression $x(3a^2 - 2x^2)$. Or, pour $x = \pm \dfrac{3a}{4}$, le second facteur vaut $\dfrac{15a^2}{8}$; il est donc positif et le premier facteur devra l'être également. Par suite :

Si $a > 0$, la seule racine acceptable est $\frac{3a}{4}$;

Si $a < 0$, la seule racine acceptable est $-\frac{3a}{4}$.

Dans le cas particulier où $a = 0$, l'équation donnée devient

$$x + \sqrt{x^2} = 0.$$

Cette équation est indéterminée, car elle est vérifiée par toute valeur négative de x et par $x = 0$. Ainsi, si $x = -3$, on a $\sqrt{x^2} = 3$ et $x + \sqrt{x^2} = 0$. Toutefois, la racine $x = 0$ est inacceptable, car pour $x = a = 0$, l'équation proposée n'a pas de sens.

5° $\sqrt{5a + x} + \sqrt{5a - x} = \dfrac{12a}{\sqrt{5a + x}}$.

On doit avoir $\quad 5a + x > 0; \quad 5a - x \geqslant 0; \quad a > 0;$
ou, en résumé, $\quad -5a < x \leqslant 5a$ avec $a > 0$. (1)

En multipliant les deux membres par $\sqrt{5a + x}$, il vient

$$\sqrt{25a^2 - x^2} = 7a - x.$$

Le second membre est positif, eu égard aux conditions (1). En élevant au carré, on trouve

$$x^2 - 7ax + 12a^2 = 0; \quad \text{d'où} \quad x' = 4a; \quad x'' = 3a.$$

Ces deux racines conviennent et la seule condition est $a > 0$.

6° $\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x - 1} = a$.

On doit avoir $\quad 2x + 1 \geqslant 0$ et $x - 1 \geqslant 0$,
ou, en résumé, $\quad x \geqslant 1$.

Si cette condition est remplie, on a $\sqrt{2x + 1} > \sqrt{x - 1}$ et a doit être positif.

L'équation peut s'écrire

$$\sqrt{2x + 1} = \sqrt{x - 1} + a.$$

Élevons au carré; on obtient l'équation

$$2a\sqrt{x - 1} = x - a^2 + 2,$$

qui exige $(a > 0)$

$$x - a^2 + 2 \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad x \geqslant a^2 - 2.$$

Élevons une deuxième fois au carré. Il vient ainsi

$$f(x) = x^2 - 2x(3a^2 - 2) + a^4 + 4 = 0. \qquad (1)$$

Les racines de cette équation ne conviennent que si elles satisfont aux conditions

$$x \geqslant 1 \quad \text{et} \quad x \geqslant a^2 - 2.$$

Comparons les nombres $a^2 - 2$ et 1. On a $(a > 0)$

$$a^2 - 2 > 1, \quad \text{si} \quad a^2 - 3 > 0 \quad \text{ou} \quad a > \sqrt{3};$$
$$a^2 - 2 < 1, \quad \text{si} \quad a^2 - 3 < 0 \quad \text{ou} \quad 0 < a < \sqrt{3}.$$

I. Si $a < \sqrt{3}$, on a $a^2 - 2 < 1$ et une racine de l'équation (1) convient si elle est supérieure à 1.

a) L'équation (1) admet une racine supérieure à 1, si on a
$$f(1) = (a^2 - 3)^2 < 0,$$
ce qui n'a lieu pour aucune valeur de a.

b) L'équation (1) admet deux racines supérieures à 1, si on a :
$$\rho = 4a^2(2a^2 - 3) > 0 \quad \text{ou} \quad a > \frac{1}{2}\sqrt{6}$$
$$f(1) = (a^2 - 3)^2 > 0 \quad \text{ou} \quad a \neq \sqrt{3}.$$
$$1 < 3a^2 - 2 \quad \text{ou} \quad a > 1.$$

En résumé, on doit avoir $\frac{1}{2}\sqrt{6} < a < \sqrt{3}$.

II. Si $a > \sqrt{3}$, on a $1 < a^2 - 2$, et une racine de l'équation (1) convient si elle est supérieure à $a^2 - 2$.

a) L'équation (1) admet une racine supérieure à $a^2 - 2$ si l'on a
$$f(a^2 - 2) = -4a^2(a^2 - 3) < 0 \quad \text{ou} \quad a > \sqrt{3}.$$

b) Elle n'admet jamais deux racines supérieures à $a^2 - 2$, car on devrait avoir
$$\rho > 0; \quad f(a^2 - 2) > 0; \quad a^2 - 2 < 3a^2 - 2;$$
et l'inéquation $f(a^2 - 2) > 0$ exigerait $a < \sqrt{3}$.

Résumé : $a < \frac{1}{2}\sqrt{6}$; pas de racine.

$a = \frac{1}{2}\sqrt{6}$; $x' = x'' = \frac{5}{2}$; ces racines conviennent.

$\frac{1}{2}\sqrt{6} < a < \sqrt{3}$; deux racines acceptables.

$a = \sqrt{3}$; $x' = 13$; $x'' = 1$; ces racines conviennent.

$a > \sqrt{3}$; la plus grande racine de (1) convient.

597. *Résoudre les équations suivantes :*

1° $\sqrt[3]{x + 3} + \sqrt[3]{4 - x} = 1$.

En élevant au cube, on trouve
$$7 + 3\sqrt[3]{(x + 3)(4 - x)}\,[\sqrt[3]{x + 3} + \sqrt[3]{4 - x}] = 1;$$
ou, en remplaçant les crochets par 1 et en réduisant,
$$\sqrt[3]{(x + 3)(4 - x)} = -2 \quad \text{ou} \quad x^2 - x - 20 = 0.$$
Rép. $x = -4$ ou 5.

2° $\sqrt[3]{x + 49} - \sqrt[3]{x - 49} = 2$.

On raisonne comme pour l'exercice précédent.

Rép. $x = \pm 76$.

3° $\sqrt[3]{(x+1)^2} + 2\sqrt[3]{(x-1)^2} = 3\sqrt[3]{1-x^2}$.

En élevant au cube, on trouve

$$(x+1)^2 + 8(x-1)^2 + 6\sqrt[3]{(x^2-1)^2}\left[\sqrt[3]{(x+1)^2} + 2\sqrt[3]{(x-1)^2}\right] = 27(1-x^2).$$

Remplaçons les crochets par

$$3\sqrt[3]{1-x^2} = -3\sqrt[3]{x^2-1}.$$

Il vient ainsi

$$(x+1)^2 + 8(x-1)^2 - 18(x^2-1) = 27(1-x^2)$$

ou

$$18x^2 - 14x = 0.$$

Rép. $x = 0$ ou $\frac{7}{9}$.

4° $\sqrt[3]{x+a} + \sqrt[3]{x-a} = \sqrt[3]{2x}$.

En élevant au cube, il vient

$$2x + 3\sqrt[3]{x^2-a^2}\left[\sqrt[3]{x+a} + \sqrt[3]{x-a}\right] = 2x$$

ou

$$\sqrt[3]{2x(x^2-a^2)} = 0.$$

On a donc l'équation $x(x^2 - a^2) = 0$.

Rép. $x = 0$ ou $\pm a$.

CHAPITRE XX

Équations simultanées d'un degré supérieur au premier.

§ I. — SYSTÈMES A DEUX INCONNUES.

598. 1° $x^2 + y^2 = 585$; $x = 8y$.

L'élimination de x donne l'équation

$$65y^2 = 585; \quad \text{d'où} \quad y = \pm 3.$$

Rép. $x' = 24$, $y' = 3$; $x'' = -24$, $y'' = -3$.

On résout d'une façon analogue les autres exercices des nos **598** et **599**.

2° $x^2 + 2y^2 = 297$; $x - y = 5$.

Rép. $x' = 13$, $y' = 8$; $x'' = -\frac{19}{3}$, $y'' = -\frac{34}{3}$.

3° $x + y = 13$; $(x+3)(y+10) = 120$.

Rép. $x' = 3$, $y' = 10$; $x'' = 17$, $y'' = -4$.

4° $x + y = 11$; $(x + 9)(y + 2) = 72$.
Rép. $x' = 9$, $y' = 2$; $x'' = -5$, $y'' = 16$.

599. 1° $x^2 + y^2 + 8y - 6x - 1 = 0$; $3x - 2y = 4$.
Rép. $x' = 2$, $y' = 1$; $x'' = -2$, $y'' = -5$.

2° $x^2 + y^2 + xy + y - x - 18 = 0$; $3x - 2y = 5$.
Rép. $x' = 3$, $y' = 2$; $x'' = -1$, $y'' = -4$.

3° $x^2 - y^2 + 2xy + 3x + y - 6 = 0$; $5x - 4y + 3 = 0$.
Rép. $x' = 1$, $y' = 2$; $x'' = -3$, $y'' = -3$.

4° $2x^2 - y^2 + 3x + 2y + 2xy + 6 = 0$; $2x + 3y = 2$.
Rép. $x' = -2$, $y' = 2$; $x'' = -15{,}5$; $y'' = 11$.

5° $x^2 + 4xy - 5y^2 + 12x + 92 = 0$; $8x - y = 3$.
Rép. $x' = 1$, $y' = 5$; $x'' = -\dfrac{47}{287}$; $y'' = -\dfrac{1237}{287}$.

600. 1° $x^2 + 2y^2 = 43$; $x^2 - y^2 = 16$.
On additionne les équations membre à membre, après avoir multiplié la seconde par 2.

Rép. $\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -5 \\ y = 3 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -5 \\ y = -3. \end{cases}$

2° $3xy - 4x = 6$; $x^2 + 9xy = 63$.
On multiplie la première équation par 3, puis on soustrait membre à membre.

Rép. $x' = 3$, $y' = 2$; $x'' = -15$, $y'' = \dfrac{6}{5}$.

3° $2xy - 3y - 3 = 0$; $y^2 - 4xy + 15 = 0$.
On multiplie la première équation par 2, puis on additionne membre à membre.
Rép. $x = 2$, $y = 3$.

4° $y^2 - xy - 4x = 0$; $x^2 - xy + 4y - 12 = 0$.
On tire x de la première équation et on remplace dans la seconde.

Rép. $x' = 2$, $y' = 4$; $x'' = \dfrac{18}{5}$, $y'' = -\dfrac{12}{5}$.

5° $x^2 + y^2 + x + y = 62$; $x^2 - y^2 + x - y = 50$.
On additionne et on soustrait membre à membre.

Rép. $\begin{cases} x = 7 \\ y = 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 7 \\ y = -3 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -8 \\ y = 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -8 \\ y = -3. \end{cases}$

6° $xy - y^2 + 4 = 0$; $x^2 - xy + 3x - 3y = 0$.
On tire x de la première équation et on remplace dans la seconde.
Rép. $x' = -3$, $y' = 1$; $x'' = -3$, $y'' = -4$.

On peut aussi décomposer la seconde équation en deux autres, car elle peut s'écrire

$$x(x - y) + 3(x - y) = 0 \quad \text{ou} \quad (x + 3)(x - y) = 0.$$

601. 1° $x - y = 7;\quad xy = 30.$

On peut tirer x de la première équation et le remplacer par sa valeur dans la seconde.

On peut aussi poser $z = -y$. Le système

$$x + z = 7, \quad xz = -30$$

montre alors que x et z sont racines de l'équation

$$X^2 - 7X - 30 = 0.$$

Rép. $x' = 10,\ y' = 3;\quad x'' = -3,\ y'' = -10.$

2° $x + y = 15;\quad x^2 + y^2 = 125.$

La seconde équation peut s'écrire

$$(x + y)^2 - 2xy = 125; \quad \text{d'où} \quad xy = 50.$$

Rép. $x' = 5,\ y' = 10;\quad x'' = 10,\ y'' = 5.$

3° $x - y = 10;\quad x^2 + y^2 = 148.$

La seconde équation peut s'écrire

$$\frac{1}{2}[(x + y)^2 + (x - y)^2] = 148 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}[(x + y)^2 + 100] = 148.$$

Par suite, $(x + y)^2 = 196$ et $x + y = \pm 14.$

Rép. $x' = 12,\ y' = 2;\quad x'' = -2,\ y'' = -12.$

4° $x + y = 16;\quad x^2 - y^2 = 128.$

La seconde équation donne

$$(x + y)(x - y) = 128 \quad \text{ou} \quad x - y = \frac{128}{16} = 8.$$

Rép. $x = 12,\ y = 4.$

5° $x - y = 7;\quad x^2 - y^2 = 161.$

Rép. $x = 15,\ y = 8.$

6° $x^2 + y^2 = 100;\quad xy = 48.$

La première équation peut s'écrire

$$(x + y)^2 - 2xy = 100 \quad \text{ou} \quad (x + y)^2 - 96 = 100.$$

Rép. $\begin{cases} x = 8 \\ y = 6 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -8 \\ y = -6 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -6 \\ y = -8. \end{cases}$

7° $x^2 - y^2 = 48;\quad xy = 32.$

On tire y de la deuxième équation et on le remplace par sa valeur dans la première. On trouve ainsi

$$x^4 - 48x^2 - 1024 = 0; \quad \text{d'où} \quad x = \pm 8.$$

Rép. $x' = 8,\ y' = 4;\quad x'' = -8,\ y'' = -4.$

8° $x^2 - y^2 = 48$; $x^2 + y^2 = 80$.
On additionne et on soustrait membre à membre.

Rép. $\begin{cases} x = 8 \\ y = 4 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 8 \\ y = -4 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -8 \\ y = 4 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -8. \\ y = -4. \end{cases}$

602. 1° $x + y = 12$; $x^2 + xy + y^2 = 109$.
La deuxième équation peut s'écrire

$$(x + y)^2 - xy = 109; \quad \text{d'où} \quad xy = 35.$$

Rép. $x' = 5$, $y' = 7$; $x'' = 7$, $y'' = 5$.

2° $x - y = 7$; $x^2 + xy + y^2 = 139$.
La deuxième équation peut s'écrire

$$(x - y)^2 + 3xy = 139; \quad \text{d'où} \quad xy = 30.$$

Rép. $x' = 10$, $y' = 3$; $x'' = -3$, $y'' = -10$.

3° $x^2 + xy + y^2 = 13$; $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 34$.
La deuxième équation donne $x^2 + y^2 = 17$.
En remplaçant dans la 1re équation, on trouve $xy = -4$.

Rép. $\begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 1 \\ y = -4. \end{cases}$

4° $x^2 + y^2 - (x + y) = 48$; $x + y + xy = 31$.
On prend comme inconnues auxiliaires

$$x + y = u \quad \text{et} \quad xy = t.$$

On trouve ainsi

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ xy = 21 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x + y = -11 \\ xy = 42. \end{cases}$$

Le second de ces systèmes ne donne pas de racine, car

$$(-11)^2 - 4.42 < 0.$$

Rép. $x' = 7$, $y' = 3$; $x'' = 3$, $y'' = 7$.

5° $x^2 + y^2 + 3xy = 40$; $x + y + 2xy = 14$.
On trouve, comme dans l'exercice précédent

$$x + y = 6, \quad xy = 4 \quad \text{ou} \quad x + y = -\frac{11}{2}, \quad xy = \frac{39}{4}.$$

Rép. $x' = 3 + \sqrt{5}$, $y' = 3 - \sqrt{5}$; $x'' = 3 - \sqrt{5}$, $y'' = 3 + \sqrt{5}$.

6° $x(x + y) + y(x - y) = 158$; $7x(x + y) = 72y(x - y)$.
On peut considérer ces deux équations comme formant un système de deux équations du premier degré en $x(x + y)$ et $y(x - y)$. La résolution de ce système donne

$$x(x + y) = 144 \quad \text{ou} \quad x^2 + xy = 144, \qquad (1)$$
$$y(x - y) = 14 \quad \text{ou} \quad xy - y^2 = 14. \qquad (2)$$

En tirant x de l'équation (2) et en remplaçant dans l'équation (1), on obtient l'équation bicarrée

$$y^4 - 51y^2 + 98 = 0.$$

Elle donne quatre valeurs pour y. L'équation $xy - y^2 = 14$ donne les valeurs correspondantes de x.

Rép. $\begin{cases} x = 9 \\ y = 7 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -9 \\ y = -7 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 8\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -8\sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2}. \end{cases}$

603. 1° $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6}$; $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{97}{36}$.

On prend $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$ comme inconnues auxiliaires.

Rép. $x' = \dfrac{2}{3}$, $y' = \dfrac{3}{2}$; $x'' = -\dfrac{3}{2}$, $y'' = -\dfrac{2}{3}$.

2° $x + y = 3$; $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = -\dfrac{29}{10}$.

La deuxième équation peut s'écrire

$$\frac{x^2 + y^2}{xy} = -\frac{29}{10} \quad \text{ou} \quad \frac{9 - 2xy}{xy} = -\frac{29}{10}.$$

On trouve ainsi $xy = -10$.

Rép. $x' = 5$, $y' = -2$; $x'' = -2$, $y'' = 5$.

3° $\dfrac{x + y}{x - y} + \dfrac{x - y}{x + y} = \dfrac{5}{2}$; $x^2 + y^2 = 90$.

La première équation peut s'écrire

$$\frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 - y^2} = \frac{5}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{180}{x^2 - y^2} = \frac{5}{2}.$$

On trouve ainsi $x^2 - y^2 = 72$.

Rép. $\begin{cases} x = 9 \\ y = 3 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 9 \\ y = -3 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -9 \\ y = 3 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -9 \\ y = -3. \end{cases}$

4° $\dfrac{x + y}{x - y} - \dfrac{x - y}{x + y} = \dfrac{15}{4}$; $xy = 15$.

La première équation peut s'écrire

$$\frac{4xy}{x^2 - y^2} = \frac{15}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{60}{x^2 - y^2} = \frac{15}{4}.$$

On trouve ainsi $x^2 - y^2 = 16$.

Rép. $x' = 5$, $y' = 3$; $x'' = -5$, $y'' = -3$.

604. 1° $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 25$; $x + y = 533$.

On prend comme inconnues auxiliaires $u = \sqrt{x}$, $t = \sqrt{y}$.
Le système $u + t = 25$, $u^2 + t^2 = 533$ donne alors

$$u' = 23, \quad t' = 2; \quad u'' = 2, \quad t'' = 23.$$

Rép. $x' = 529$, $y' = 4$; $x'' = 4$, $y'' = 529$.

2° $x + y = 1 + 2\sqrt{xy}$; $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$.

En posant $u = \sqrt{x}$, $t = \sqrt{y}$,
le système devient
$$(u - t)^2 = 1;\quad u + t = 5.$$
Rép. $x' = 9$, $y' = 4$; $x'' = 4$, $y'' = 9$.

3° $xy + \sqrt{xy} = 90$; $x + y = 30$.

La première équation donne $\sqrt{xy} = 9$, en écartant la solution -10.
Rép. $x' = 3$, $y' = 27$; $x'' = 27$, $y'' = 3$.

4° $x + y - 5(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 62$; $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy} = 23$.

En posant $u = \sqrt{x}$, $t = \sqrt{y}$,
le système devient
$$u^2 + t^2 - 5(u + t) = 62;\quad u + t + ut = 23.$$
La première équation peut s'écrire
$$(u + t)^2 - 2ut - 5(u + t) = 62,$$
ou, en remplaçant ut par sa valeur $23 - (u + t)$,
$$(u + t)^2 - 3(u + t) - 108 = 0.$$
Cette équation donne $u + t = 12$; on écarte la solution négative $u + t = -9$. On trouve ensuite $ut = 11$.
Rép. $x' = 1$, $y' = 121$; $x'' = 121$, $y'' = 1$.

605. 1° $xy + x^2 - 5x - 10 = 0$; $y^2 - 3y + 2 = 0$.

La seconde équation donne $y = 1$ ou 2. La première équation permet de calculer les valeurs correspondantes de x.

Rép. $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 2 + \sqrt{14} \\ y = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 2 - \sqrt{14} \\ y = 1. \end{cases}$

2° $11(x - y) = x^2 - y^2$; $xy = 28$.

La première équation se décompose en deux autres
$$x - y = 0;\quad x + y = 11.$$
Rép. $\begin{cases} x = 4 \\ y = 7 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 2\sqrt{7} \\ y = 2\sqrt{7} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -2\sqrt{7} \\ y = -2\sqrt{7}. \end{cases}$

3° $(y - 2x)^2 + 2(y - 2x) - 8 = 0$; $xy + 2x - y - 2 = 0$.

La première équation donne
$$y - 2x = 2 \quad \text{ou} \quad -4.$$
La question revient alors à résoudre les deux systèmes :
$$\begin{cases} y - 2x = 2 \\ xy + 2x - y - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y - 2x = -4 \\ xy + 2x - y - 2 = 0. \end{cases}$$
Rép. $\begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2. \end{cases}$

4° $x^2 + 4xy + 4y^2 = 4$; $3x^2 + 2xy - 2y - 8 = 0$.

La 1re équation donne $x + 2y = \pm 2$.

Le système proposé peut ainsi être décomposé en deux autres plus simples.

Rép.

$$\begin{matrix} x = 2 \\ y = -2 \end{matrix} \text{ ou } \left\{\begin{matrix} x = -\dfrac{3}{2} \\ y = -\dfrac{1}{4} \end{matrix}\right. \text{ ou } \left\{\begin{matrix} x = \dfrac{-3 + \sqrt{89}}{4} \\ y = \dfrac{11 - \sqrt{89}}{8} \end{matrix}\right. \text{ ou } \left\{\begin{matrix} x = \dfrac{-3 - \sqrt{89}}{4} \\ y = \dfrac{11 + \sqrt{89}}{8}. \end{matrix}\right.$$

5° $3x^2 + 5xy + 4y^2 = 16$; $x^2 + 2xy + 5y^2 = 8$.

Multiplions la seconde équation par 2, puis égalons les premiers membres. Il vient ainsi, après réduction,

$$x^2 + xy - 6y^2 = 0.$$

En posant $x = ty$, cette équation devient

$$t^2 + t - 6 = 0; \quad \text{d'où} \quad t' = -3; \quad t'' = 2.$$

a) $t' = -3$ ou $x = -3y$.

L'équation $x^2 + 2xy + 5y^2 = 8$ devient, après substitution,

$$y^2 = 1; \quad \text{d'où} \quad y = \pm 1 \quad \text{et} \quad x = \mp 3.$$

b) $t'' = 2$ ou $x = 2y$.

On trouve de même

$$y = \pm \frac{2}{13}\sqrt{26}; \quad x = \pm \frac{4}{13}\sqrt{26}.$$

Rép. $$\left\{\begin{matrix} x = 3 \\ y = -1 \end{matrix}\right. \text{ ou } \left\{\begin{matrix} x = -3 \\ y = 1 \end{matrix}\right. \text{ ou } \left\{\begin{matrix} x = \dfrac{4}{13}\sqrt{26} \\ y = \dfrac{2}{13}\sqrt{26} \end{matrix}\right. \text{ ou } \left\{\begin{matrix} x = -\dfrac{4}{13}\sqrt{26} \\ y = -\dfrac{2}{13}\sqrt{26}. \end{matrix}\right.$$

6° $(x + y)^2 + x^2 = 17$; $(x - y)^2 - 3y^2 = 6$.

On procède comme pour l'exercice précédent.

Rép. $$\left\{\begin{matrix} x = 4 \\ y = -5 \end{matrix}\right. \text{ ou } \left\{\begin{matrix} x = -4 \\ y = 5 \end{matrix}\right. \text{ ou } \left\{\begin{matrix} x = \dfrac{10}{13}\sqrt{13} \\ y = \dfrac{1}{13}\sqrt{13} \end{matrix}\right. \text{ ou } \left\{\begin{matrix} x = -\dfrac{10}{13}\sqrt{13} \\ y = -\dfrac{1}{13}\sqrt{13}. \end{matrix}\right.$$

606. 1° $x^3 + y^3 = 189$; $xy = 20$.

L'équation $xy = 20$ peut s'écrire $x^3y^3 = 8000$. Il en résulte que x^3 et y^3 sont les racines de l'équation

$$X^2 - 189X + 8000 = 0.$$

D'où : $x^3 = 125$, $y^3 = 64$ ou $x^3 = 64$, $y^3 = 125$.

Rép. $x' = 5$, $y' = 4$; $x'' = 4$, $y'' = 5$.

2° $x^3 - y^3 = 448;\quad xy = 32.$
En éliminant y, on obtient l'équation trinôme
$$x^6 - 448x^3 - 32768 = 0;\quad \text{d'où}\quad x^3 = 512 \quad \text{ou} \quad -64.$$
Rép. $x' = 8,\ y' = 4;\ x'' = -4,\ y'' = -8.$

3° $x + y = 10;\quad x^3 + y^3 = 370.$
La seconde équation peut s'écrire
$$(x+y)\,[(x+y)^2 - 3xy] = 370 \quad \text{ou} \quad 10(100 - 3xy) = 370.$$
Par suite, $xy = 21.$
Rép. $x' = 3,\ y' = 7;\ x'' = 7,\ y'' = 3.$

4° $x - y = 3;\quad x^4 + y^4 = 2657.$
On a $x^4 + y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 = [(x-y)^2 + 2xy]^2 - 2x^2y^2.$
La seconde équation pourra s'écrire
$$(9 + 2xy)^2 - 2x^2y^2 = 2657 \quad \text{ou} \quad x^2y^2 + 18xy - 1288 = 0.$$
Par suite, $xy = 28$ ou $-46.$
Rép. $x' = 7,\ y' = 4;\ x'' = -4,\ y'' = -7.$

5° $x + y = 8;\quad x^4 + y^4 = 1312.$
On procède comme pour l'exercice précédent.
Rép. $x' = 2,\ y' = 6;\ x'' = 6,\ y'' = 2.$

6° $x^4 + y^4 = 706;\quad xy = 15.$
On a $x^4 + y^4 = [(x+y)^2 - 2xy]^2 - 2x^2y^2 = [(x+y)^2 - 30]^2 - 450.$
La première équation devient
$$(x+y)^4 - 60(x+y)^2 - 256 = 0;\quad \text{d'où}\quad x + y = \pm 8.$$
Rép. $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -3 \\ y = -5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -5 \\ y = -3. \end{cases}$

7° $x + y = 7;\quad x^4y + xy^4 = 1092.$
On a
$$x^4y + xy^4 = xy(x+y)(x^2 - xy + y^2) = xy(x+y)\,[(x+y)^2 - 3xy].$$
La seconde équation devient
$$7xy(49 - 3xy) = 1092 \quad \text{ou} \quad 3x^2y^2 - 49xy + 156 = 0.$$
D'où $xy = 12$ ou $\dfrac{13}{3}.$

Rép.
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x = \frac{1}{6}(21 + \sqrt{285}) \\ y = \frac{1}{6}(21 - \sqrt{285}) \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x = \frac{1}{6}(21 - \sqrt{285}) \\ y = \frac{1}{6}(21 + \sqrt{285}). \end{cases}$$

8° $xy(x + y) = 30;\quad x^3 + y^3 = 35.$
En ajoutant à la seconde équation le triple de la première, on trouve
$$(x+y)^3 = 125 \quad \text{ou} \quad x + y = 5.$$
La première équation donne alors $xy = 6.$
Rép. $x' = 2,\ y' = 3;\ x'' = 3,\ y'' = 2.$

607. 1° $15(x - y) = 2xy;\quad x^2y - xy^2 = 30.$

La seconde équation peut s'écrire

$$xy(x - y) = 30 \quad \text{ou} \quad 15(x - y)^2 = 60.$$

Par suite, $x - y = \pm 2;\quad xy = \pm 15.$

Dans ces deux formules, les signes supérieurs et les signes inférieurs sont en correspondance.

Rép. $x' = 5,\ y' = 3;\quad x'' = -3,\ y'' = -5.$

2° $x^4 + y^4 = 12(x^2 + y^2) - 59;\quad x^2 + y^2 - xy = 19.$

Posons $x^2 + y^2 = u;\quad xy = t.$

Le système devient

$$u^2 - 2t^2 = 12u - 59;\quad u - t = 19.$$

D'où $u' = 13,\ t' = -6;\quad u'' = 51,\ t'' = 32.$

Rép. $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3. \end{cases}$

3° $(x + y)(x^3 + y^3) = 19;\quad x^2 + y^2 = 13.$

En posant $x + y = u,\quad xy = t,$

le système devient

$$u^2(u^2 - 3t) = 19;\quad u^2 - 2t = 13.$$

En éliminant u^2, il vient

$$(2t + 13)(13 - t) = 19 \quad \text{ou} \quad 2t^2 - 13t - 150 = 0.$$

On trouve ainsi

$$t = \frac{25}{2},\quad u = \pm\sqrt{38} \quad \text{et} \quad t = -6,\quad u = \pm 1.$$

Rép. $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3. \end{cases}$

4° $x^4 + y^4 - x^2y^2 = 73;\quad x^2 + y^2 - xy = 13.$

Posons $x^2 + y^2 = u;\quad xy = t.$

Le système devient

$$u^2 - 3t^2 = 73;\quad u - t = 13.$$

Ce système donne

$$u' = 10;\quad t' = -3;\quad u'' = 29;\quad t'' = 16.$$

Rép. $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -3 \\ y = 1. \end{cases}$

5° $x^5 - y^5 = 3093;\quad x - y = 3.$

On a
$$\begin{aligned} x^5 - y^5 &= (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) \\ &= (x - y)[(x - y)^4 + 5x^3y - 5x^2y^2 + 5xy^3] \\ &= (x - y)\{(x - y)^4 + 5xy[(x - y)^2 + xy]\}. \end{aligned}$$

La première équation pourra s'écrire

$$3[81 + 5xy(9 + xy)] = 3093 \quad \text{ou} \quad x^2y^2 + 9xy - 190 = 0.$$

Par suite, $xy = 10 \quad \text{ou} \quad -19.$

Rép. $x' = 5,\ y' = 2;\quad x'' = -2,\ y'' = -5.$

6° $(x + y)(x^2 + y^2) = 85$; $(x - y)(x^2 - y^2) = 45$.

Multiplions la 1re équation par 9 et la 2e par 17; puis égalons les 1ers membres. Il vient

$$9(x + y)(x^2 + y^2) = 17(x - y)(x^2 - y^2),$$

ou
$$9(x^2 + y^2) = 17(x - y)^2,$$

en observant que les équations proposées exigent $x + y \neq 0$.

En remplaçant x par ty, il vient

$$4t^2 - 17t + 4 = 0; \quad \text{d'où} \quad t' = 4, \quad t'' = 0,25.$$

L'équation $(x + y)(x^2 + y^2) = 85$ peut s'écrire

$$y^3(t + 1)(t^2 + 1) = 85.$$

Cette équation permet de calculer les diverses valeurs de y. L'équation $x = ty$ donnera les valeurs correspondantes de x.

Rép. $x' = 4$, $y' = 1$; $x'' = 1$, $y'' = 4$.

7° $x^2y(x + y) = 90$; $xy^2(x - y) = 12$.

On procède comme pour l'exercice précédent.

Rép.

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 5\sqrt[4]{\dfrac{3}{5}} \\ y = \sqrt[4]{\dfrac{3}{5}} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -5\sqrt[4]{\dfrac{3}{5}} \\ y = -\sqrt[4]{\dfrac{3}{5}}. \end{cases}$$

8° $6x^2y + y^3 = 7$; $2x^3 + 3x^2y = 5$.

Multiplions la 1re équation par 5 et la 2e par 7, puis égalons les 1ers membres. On trouve

$$30x^2y + 5y^3 = 14x^3 + 21x^2y.$$

Remplaçons x par ty et divisons les deux membres par y^3. Il vient

$$14t^3 - 9t^2 - 5 = 0$$

ou
$$(t - 1)(14t^2 + 5t + 5) = 0.$$

La racine unique de cette équation est $t = 1$.

Rép. $x = 1$, $y = 1$.

§ II. — SYSTÈMES A PLUSIEURS INCONNUES.

608. 1° $x^2 + y^2 + z^2 = 374$; $x - y = 6$; $x - z + 11 = 0$.

Les deux dernières équations donnent

$$y = x - 6; \quad z = x + 11.$$

On remplace dans la première.

Rép. $x' = 7$, $y' = 1$, $z' = 18$; $x'' = -\dfrac{31}{3}$, $y'' = -\dfrac{49}{3}$; $z'' = \dfrac{2}{3}$.

2° $x^2 + y^2 + z^2 = 14; \quad x + y = 3; \quad z + x = 4.$

Les deux dernières équations donnent

$$y = 3 - x; \quad z = 4 - x.$$

On remplace dans la première.

Rép. $x' = 1, \quad y' = 2, \quad z' = 3; \quad x'' = \frac{11}{3}, \quad y'' = -\frac{2}{3}, \quad z'' = \frac{1}{3}.$

3° $x^2 + y^2 = 26; \quad xy = z; \quad x + y = 4.$

La première équation peut s'écrire

$$(x + y)^2 - 2xy = 26 \quad \text{ou} \quad 16 - 2z = 26.$$

On aura le système $z = -5, \quad xy = -5; \quad x + y = 4.$

Rép. $x' = 5, \ y' = -1, \ z' = -5; \ x'' = -1, \ y'' = 5, \ z'' = -5.$

4° $xy = 6; \quad x^2 - y^2 = 35; \quad x + y = z.$

La 2e équation peut s'écrire

$$(x - y)(x + y) = 35 \quad \text{ou} \quad x - y = \frac{35}{z}.$$

On aura $x = \dfrac{z^2 + 35}{2z}$ et $y = \dfrac{z^2 - 35}{2z}.$

La première équation devient

$$z^4 - 24z^2 - 1225 = 0.$$

Cette équation donne $z = \pm 7.$

Rép. $x' = 6, y' = 1, z' = 7; \quad x'' = -6, \quad y'' = -1, \ z'' = -7.$

5° $x + y + z = 4; \quad x^2 = y^2 + z^2; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 50.$

Ajoutons les deux dernières équations. On trouve

$$2x^2 = 50 \quad \text{et} \quad x = \pm 5.$$

Les deux premières deviennent

$$y + z = -1; \quad y^2 + z^2 = 25;$$

ou $\qquad y + z = 9; \quad y^2 + z^2 = 25.$ (pas de solution).

Rép. $x' = 5, \quad y' = -4, \quad z' = 3; \quad x'' = 5, \quad y'' = 3, \quad z'' = -4.$

6° $x^2 + z^2 = 85; \quad x^2 + y^2 = 29; \quad y^2 + z^2 = 106.$

En additionnant les trois équations membre à membre, et en divisant par 2, il vient

$$x^2 + y^2 + z^2 = 110.$$

On trouve ensuite $x^2 = 4, \quad y^2 = 25, \quad z^2 = 81.$

Rép. $x = \pm 2, \quad y = \pm 5, \quad z = \pm 9;$ il y a en tout 8 solutions.

609. 1° $xy = 5; \quad x + y - z = 8; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 30.$

La 3e équation peut s'écrire

$$(x + y)^2 - 2xy + z^2 = 30,$$

ou, en remplaçant $x + y$ et xy par leur valeur,

$$z^2 + 8z + 12 = 0; \quad \text{d'où} \quad z' = -2; \quad z'' = -6.$$

Les deux premières équations donnent alors x et y.

Rép. $x' = 1, \quad y' = 5, \quad z' = -2; \quad x'' = 5, \quad y'' = 1, \quad z'' = -2.$

2° $x + y + z = 6, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 14; \quad x(y + z) - 2yz = 5.$

Élevons la 1re équation au carré et remplaçons $x^2 + y^2 + z^2$ et $xy + xz$ par leur valeur. On trouve ainsi

$$yz = 2.$$

La seconde équation peut s'écrire

$$(y + z)^2 - 2yz + x^2 = 14 \quad \text{ou} \quad (6 - x)^2 - 4 + x^2 = 14.$$

D'où $$x = 3.$$

Le système $y + z = 3, \quad yz = 2$ donnera y et z.

Rép. $x' = 3, \quad y' = 1, \quad z' = 2; \quad x'' = 3, \quad y'' = 2, \quad z'' = 1.$

3° $x + y + z = 4, \quad x^3 + y^3 + z^3 = 34, \quad xy + z = 1.$

La première équation peut s'écrire

$$x + y = 4 - z.$$

Élevons au cube. On trouve

$$x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = (4 - z)^3.$$

Remplaçons $x^3 + y^3, \quad xy, \quad x + y$ par leur valeur en fonction de z et réduisons. Il vient

$$3z^2 - 11z + 6 = 0; \quad \text{d'où} \quad z = 3 \quad \text{ou} \quad \frac{2}{3}.$$

Les équations $x + y = 4 - z$ et $xy = 1 - z$ donneront x et y.

Rép.

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x = \frac{1}{3}(5 + \sqrt{22}) \\ y = \frac{1}{3}(5 - \sqrt{22}) \\ z = \frac{2}{3} \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x = \frac{1}{3}(5 - \sqrt{22}) \\ y = \frac{1}{3}(5 + \sqrt{22}) \\ z = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

4° $yz = 2(y + z); \quad 4xz = 3(x + z); \quad xy + 6(x + y) = 0.$

Ce système admet évidemment la solution $x = y = z = 0$. En écartant cette solution et en divisant respectivement par $yz, \quad xz, \quad xy,$ on obtient le système

$$\frac{2}{y} + \frac{2}{z} = 1; \quad \frac{3}{x} + \frac{3}{z} = 4; \quad \frac{6}{x} + \frac{6}{y} = -1,$$

qui donne $\frac{1}{x} = \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{y} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{z} = 1.$

Rép. $x = 3, \quad y = -2, \quad z = 1; \quad x = y = z = 0.$

610. 1° $x + y - z = 17; x^2 + y^2 + z^2 = 269; xy - xz - 2yz + 40 = 0.$

Élevons la première équation au carré; remplaçons ensuite $x^2 + y^2 + z^2$ et $xy - xz$ par leur valeur. On trouve

$$yz = 50.$$

La deuxième équation peut s'écrire

$$x^2 + (y - z)^2 + 2yz = 269 \quad \text{ou} \quad x^2 + (17 - x)^2 + 100 = 269.$$

On trouve ainsi

$$x^2 - 17x + 60 = 0; \quad \text{d'où} \quad x = 12 \quad \text{ou} \quad 5.$$

Les équations $y - z = 17 - x$ et $yz = 50$ donneront y et z.

Rép.

$$\begin{cases} x = 12 \\ y = 10 \\ z = 5 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x = 12 \\ y = -5 \\ z = -10 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x = 5 \\ y = 6 + \sqrt{86} \\ z = -6 + \sqrt{86} \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x = 5 \\ y = 6 - \sqrt{86} \\ z = -6 - \sqrt{86}. \end{cases}$$

2° $y^2 = xz, \quad xyz = 64, \quad x + y + z = 14.$

Remplaçons dans la seconde équation xz par y^2. On trouve

$$y^3 = 64; \quad \text{d'où} \quad y = 4.$$

Les équations $xz = 16$ et $x + z = 10$ donnent x et z.

Rép. $x' = 2, \quad y' = 4, \quad z' = 8; \quad x'' = 8, \quad y'' = 4, \quad z'' = 2.$

3° $y^3 + z^3 = 7x^3; \quad y + z = 3x; \quad y - z = 2 - x.$

Les deux dernières équations donnent

$$y = x + 1 \quad \text{et} \quad z = 2x - 1.$$

En remplaçant dans la 1re, on trouve

$$2x^3 - 9x^2 + 9x = 0; \quad \text{d'où} \quad x = 0, \ 3 \ \text{ou} \ \frac{3}{2}.$$

On calcule ensuite les valeurs correspondantes de y et de z.

Rép. $$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 5 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{5}{2} \\ z = 2. \end{cases}$$

4° $x^2 - y^4 = 33; \quad y^2 + z = 14; \quad x + y + z = 19.$

Les deux dernières équations donnent

$$z = 14 - y^2, \quad x = y^2 - y + 5.$$

Remplaçons x par sa valeur dans la première équation. On trouve

$$2y^3 - 11y^2 + 10y + 8 = 0$$

ou

$$(y - 2)(2y^2 - 7y - 4) = 0.$$

D'où

$$y = 2, \ 4 \ \text{ou} \ -0{,}5.$$

On calcule ensuite les valeurs correspondantes de x et de z.

Rép. $$\begin{cases} x = 7 \\ y = 2 \\ z = 10 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x = 17 \\ y = 4 \\ z = -2 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x = \frac{23}{4} \\ y = -0{,}5 \\ z = \frac{55}{4}. \end{cases}$$

§ III. — SYSTÈMES LITTÉRAUX.

610bis. *Résoudre et discuter les systèmes suivants dans lesquels* a *et* b *représentent des nombres différents de zéro.*

1° $x^2 + y^2 = a^2; \quad xy = b^2.$

Additionnons les deux équations membre à membre, après avoir multiplié successivement les deux membres de la seconde par $+ 2$ et par $- 2$. On obtient ainsi le système équivalent

$$(x + y)^2 = a^2 + 2b^2; \quad (x - y)^2 = a^2 - 2b^2. \qquad (1)$$

a) Si $a^2 - 2b^2 > 0$, le système peut s'écrire

$$x + y = \pm \sqrt{a^2 + 2b^2}; \quad x - y = \pm \sqrt{a^2 - 2b^2}.$$

Les doubles signes sont indépendants l'un de l'autre. Le dernier système comprend donc quatre systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues. En les résolvant, on obtient les quatre solutions du système.

b) Si $a^2 - 2b^2 = 0$, le système (1) devient

$$(x + y)^2 = 4b^2; \quad (x - y)^2 = 0.$$

Par suite, $$x = y = \pm b.$$

2° $x^2 + y^2 = a^2; \quad x + y = b.$

La première équation donne

$$(x + y)^2 - 2xy = a^2 \quad \text{ou} \quad b^2 - 2xy = a^2.$$

Par suite, $$xy = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

x et y sont les racines de l'équation

$$2X^2 - 2bX + b^2 - a^2 = 0, \qquad (1)$$

dont le réalisant est $2a^2 - b^2$.

a) Si $2a^2 - b^2 > 0$, le système admet deux solutions.

b) Si $2a^2 - b^2 = 0$, l'équation (1) donne

$$x = y = \frac{b}{2}.$$

3° $x^2 + y^2 = a^2; \quad x - y = b.$

La première équation peut s'écrire

$$(x - y)^2 + 2xy = a^2 \quad \text{ou} \quad b^2 + 2xy = a^2.$$

Par suite, $$xy = \frac{1}{2}(a^2 - b^2).$$

Posons $z = - y$. Nous aurons le système

$$x + z = b; \quad xz = - \frac{1}{2}(a^2 - b^2).$$

x et z sont les racines de l'équation

$$2X^2 - 2bX + b^2 - a^2 = 0.$$

a) Si $2a^2 - b^2 > 0$, le système admet deux solutions.

b) Si $2a^2 - b^2 = 0$, on trouve

$$x = \frac{b}{2}, \quad y = - \frac{b}{2}.$$

4° $x^2 - y^2 = a^2$; $x + y = b$.

La première équation peut s'écrire

$$(x + y)(x - y) = a^2 \quad \text{ou} \quad b(x - y) = a^2.$$

Par suite, $$x - y = \frac{a^2}{b}.$$

Quels que soient a et b, on trouve

$$x = \frac{b^2 + a^2}{2b}; \quad y = \frac{b^2 - a^2}{2b}.$$

5° $x^2 - y^2 = a^2$; $xy = b^2$. — Voir au n° 611, 1°.

6° $x^2 + y^2 = a^2$; $2x^2 = ay$. — Voir au n° 611, 3°.

611. *Résoudre et discuter les systèmes suivants :*

1° $x^2 - y^2 = a^2$; $xy = b^2$.

a) Supposons $b \neq 0$. La 2e équation montre que x et y ne peuvent être nuls dans ce cas. Tirons y de cette équation et remplaçons-le par sa valeur dans la première équation. Il vient ainsi

$$x^4 - a^2x^2 - b^4 = 0.$$

Cette équation donne pour x^2 deux valeurs de signes contraires, car le coefficient de x^4 et le terme indépendant ont des signes contraires.

La négative est à écarter. La positive donne pour x deux valeurs différentes de zéro

$$x = \pm \sqrt{\frac{a^2 + \sqrt{a^4 + 4b^4}}{2}}.$$

A chaque valeur de x, l'équation $xy = b^2$ fait correspondre une valeur de y. Le système admet donc deux solutions.

b) Si $b = 0$ et $a \neq 0$, on trouve

$$x = \pm a; \quad y = 0.$$

c) Si $a = b = 0$, on trouve $x = y = 0$.

2° $x + y = axy$; $x^2 + y^2 = ax^2y^2$.

Écartons la solution évidente $x = y = 0$. La deuxième équation peut s'écrire

$$(x + y)^2 - 2xy = ax^2y^2 \quad \text{ou} \quad (a^2 - a)xy = 2.$$

Supposons a différent de 0 et de 1. On aura

$$xy = \frac{2}{a^2 - a}; \quad \text{puis,} \quad x + y = \frac{2a}{a^2 - a}.$$

x et y seront les racines de l'équation

$$(a^2 - a)X^2 - 2aX + 2 = 0.$$

Celle-ci admet des racines, si on a

$$\rho = a^2 - 2(a^2 - a) = -a(a - 2) \geqslant 0;$$

ce qui exige qu'on ait

$$0 < a \leqslant 2, \quad a = 1 \text{ étant exclu.}$$

En résumé, si l'on écarte la solution $x = y = 0$, on est conduit aux conclusions suivantes :

a) Si $a = 0$ ou 1, le système est impossible;
b) Si $0 < a < 2$, le système admet deux solutions;
c) Si $a = 2$, on a $x = y = 1$.

3° $x^2 + y^2 = m^2$; $2x^2 = my$.
Éliminons x^2. Il vient $2y^2 + my - 2m^2 = 0$.
Cette équation admet deux racines, qui sont
$$y = \frac{m(-1 \pm \sqrt{17})}{4}.$$
Les valeurs correspondantes de x^2 sont
$$(x^2)' = \frac{m^2(-1 + \sqrt{17})}{8}; \quad (x^2)'' = \frac{m^2(-1 - \sqrt{17})}{8}.$$
Si $m \neq 0$, la valeur $(x^2)''$ est à écarter, car elle est négative. Le système admet donc deux solutions
$$x = \pm \frac{m}{4}\sqrt{-2 + 2\sqrt{17}}; \quad y = \frac{m}{4}(-1 + \sqrt{17}).$$
Si $m = 0$, on a $x = y = 0$.

4° $x + y + xy = 2a$; $x^2y + xy^2 = a^2 - 4$.
En prenant comme inconnues $x + y$ et xy, on trouve
$$x + y \quad \text{ou} \quad xy = a \pm 2.$$
a) $x + y = a + 2$; $xy = a - 2$.
x et y sont les racines de l'équation
$$X^2 - (a + 2)X + a - 2 = 0,$$
qui admet toujours deux racines, car $\rho = a^2 + 12 > 0$.
b) $x + y = a - 2$; $x + y = a + 2$.
x et y sont les racines de l'équation
$$X^2 - (a - 2)X + a + 2 = 0.$$
Son réalisant est $a^2 - 8a - 4$; par suite, on doit avoir
$$a \leqslant 4 - \sqrt{20} \quad \text{ou} \quad a \geqslant 4 + \sqrt{20}.$$
En résumé,
Si $a < 4 - \sqrt{20}$ ou $a > 4 + \sqrt{20}$, on a quatre solutions;
Si $a = 4 \pm \sqrt{20}$, on a trois solutions;
Si $4 - \sqrt{20} < a < 4 + \sqrt{20}$, on a deux solutions.

612. *Résoudre et discuter les systèmes suivants :*

1° $x - y = m$; $x^3 - y^3 = b^3$; $(b > 0)$.
Dans la deuxième équation, remplaçons x par sa valeur tirée de la première; il vient ainsi $3my^2 + 3m^2y + m^3 - b^3 = 0$. (1)
On a $\rho = 9m^4 - 12m(m^3 - b^3) = -3m^4 + 12mb^3$
$$= -3m(m - b\sqrt[3]{4})(m^2 + mb\sqrt[3]{4} + 2b^2\sqrt[3]{2}).$$

Le dernier facteur est toujours positif, car il est de la forme $a^2 + ab + b^2$. ρ sera donc positif, si on a ($b > 0$)

$$0 < m < b\sqrt[3]{4}.$$

Quand cette condition est remplie, on aura deux valeurs pour y. A chacune correspond une valeur de x et le système admet deux solutions.

Quand $m = b\sqrt[3]{4}$, le système admet une solution, qui est

$$x = \frac{b\sqrt[3]{4}}{2}; \quad y = \frac{-b\sqrt[3]{4}}{2}.$$

Quand $m = 0$, l'équation (1) et le système sont impossibles.

2° $xy = a^2; \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{b}.$

Le système est évidemment impossible quand $b = 0$. Nous supposerons donc $b \neq 0$. Nous devrons également supposer $a \neq 0$; car si a était nul, la première équation donnerait $x = 0$ ou $y = 0$ et la deuxième équation deviendrait absurde.

La seconde équation peut s'écrire

$$\frac{x + y}{xy} = \frac{1}{b}; \quad \text{d'où} \quad x + y = \frac{a^2}{b}.$$

x et y seront les racines de l'équation

$$bX^2 - a^2X + a^2b = 0.$$

On devra avoir $\rho = a^2(a^2 - 4b^2) \geqslant 0$;
ce qui exige, en supposant b positif,

$$a \leqslant -2b \quad \text{ou} \quad a \geqslant 2b.$$

a) Si $a < -2b$ ou $a > 2b$, le système a deux solutions;

b) Si $a = \pm 2b$, on a $x = y = 2b$.

On aboutirait à des conclusions analogues, en supposant b négatif.

3° $x + y = a; \quad xy - 3x - 3y = b.$

Dans la seconde équation, remplaçons y par sa valeur tirée de la première; il vient ainsi $x^2 - ax + 3a + b = 0.$

A chaque racine de cette équation correspond une solution du système. Le nombre des solutions dépend donc de

$$\delta = a^2 - 4(3a + b) = a^2 - 12a - 4b.$$

Considérons a et b comme étant les coordonnées d'un point du plan et construisons la parabole

$$b = \frac{1}{4}(a^2 - 12a).$$

Les coordonnées du point (0, 3) rendent négative l'expression $a^2 - 12a - 4b$. Par suite :

Si le point (a, b) est à l'extérieur de la parabole, il y a deux solutions;

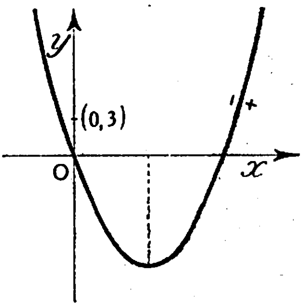


Fig. 36.

Si le point (a, b) est sur la parabole, il y a une solution;
Si le point (a, b) est à l'intérieur de la parabole, il n'y a pas de solution.

4° $x + \frac{1}{y} = a$; $y + \frac{1}{x} = b$.

a) Supposons que a et b soient différents de zéro. On a
$$xy + 1 = ay; \quad xy + 1 = bx.$$
Par suite,
$$ay = bx \quad \text{ou} \quad \frac{x}{a} = \frac{y}{b}.$$
Soit t la valeur commune des deux rapports. On aura
$$x = at; \quad y = bt;$$
et la première équation devient
$$at + \frac{1}{bt} = a \quad \text{ou} \quad abt^2 - abt + 1 = 0.$$
Cette équation admet deux racines si $ab(ab - 4) > 0$; et une seule si $ab(ab - 4) = 0$. Ces valeurs de t sont différentes de zéro; à chacune correspondent une valeur de x et une valeur de y, formant une solution du système.

b) Soit $a = 0$; la première équation donne $x = -\frac{1}{y}$. La seconde devient après substitution $0.y = b$.

Par suite,
Si $b \neq 0$, le système est impossible;
Si $a = b = 0$, il est indéterminé et il se réduit à l'équation
$$x + \frac{1}{y} = 0.$$

613. *Déterminer* p *pour que le système*
$$y + 2mx - p = 0, \quad x^2 + 2xy + y + 1 = 0$$
admette deux solutions, quel que soit m.

Éliminons y. On trouve
$$x^2(1 - 4m) + 2x(p - m) + p + 1 = 0. \qquad (1)$$
Cette équation donne deux valeurs pour x et le système admet deux solutions, si on a
$$\rho = m^2 + 2m(p + 2) + p^2 - p - 1 > 0.$$
ρ est un trinôme du second degré en m, dont le premier terme est positif. Par suite, ρ sera positif, quel que soit m, si on a
$$(p + 2)^2 - (p^2 - p - 1) < 0 \quad \text{ou} \quad p + 1 < 0.$$
Toutefois, l'équation (1) montre que m doit être différent de 0,25.
Rép. $p < -1$.

614. *On donne le système*
$$x^2 - 2xy + y^2 = 4m^2; \quad y = 3x^2 - 4x + 1.$$
Après avoir décomposé la première équation en deux autres du premier degré, déterminer le nombre de solutions, suivant les valeurs de m.

La première équation donne

$$x - y = \pm 2m,$$

et le système se décompose en deux autres.

a) $x - y = 2m; \quad y = 3x^2 - 4x + 1.$

L'élimination de y donne

$$3x^2 - 5x + 2m + 1 = 0.$$

Cette équation a deux racines et le système a deux solutions, si on a

$$25 - 12(2m + 1) = -24m + 13 > 0 \quad \text{ou} \quad m < \frac{13}{24}.$$

b) $x - y = -2m; \quad y = 3x^2 - 4x + 1.$

L'élimination de y donne

$$3x^2 - 5x - 2m + 1 = 0.$$

Cette équation a deux racines et le système a deux solutions, si on a

$$25 - 12(1 - 2m) = 24m + 13 > 0 \quad \text{ou} \quad m > -\frac{13}{24}.$$

c) *En résumé,*

Si $m < -\frac{13}{24}$ ou $m > \frac{13}{24}$, on a deux solutions;

Si $m = \pm\frac{13}{24}$, on a trois solutions;

Si $-\frac{13}{24} < m < \frac{13}{24}$, on a quatre solutions.

615. *Résoudre et discuter le système* (m > 0)

$$y^2 - 2x = 0; \quad y^2 + (x - m)^2 = 4.$$

L'élimination de y^2 entre ces deux équations donne

$$x^2 - 2x(m - 1) + m^2 - 4 = 0. \tag{1}$$

Les racines de cette équation ne conviennent que si elles sont positives, car on a $y^2 = 2x$. Mais il est à remarquer qu'à toute racine positive de (1) correspondent deux valeurs de y et par suite, deux solutions du système.

a) L'équation (1) admet deux racines positives, si on a :

$\rho = (m - 1)^2 - (m^2 - 4) > 0$ ou $m < 2{,}5$;
$P = m^2 - 4 > 0$ ou $m > 2$, car m est positif;
$S = 2(m - 1) > 0$ ou $m > 1$.

En résumé, on doit avoir $2 < m < 2{,}5$.
Le système admet alors quatre solutions.

b) L'équation (1) a deux racines de signes contraires, si on a

$$P = m^2 - 4 < 0 \quad \text{ou} \quad m < 2.$$

Le système admet alors deux solutions.

c) L'équation a une racine positive double, si on a

$$\rho = -2m + 5 = 0 \quad \text{ou} \quad m = \frac{5}{2};$$
$$S = 2(m-1) > 0 \quad \text{ou} \quad m > 1.$$

En résumé, on doit avoir $m = 2{,}5$. Le système admet alors deux solutions qui sont

$$x = 1{,}5; \quad y = \pm\sqrt{3}.$$

616. *Trouver le nombre des solutions positives de chacun des deux systèmes suivants, dans lesquels* a *et* m *représentent des nombres positifs.*

1° $x + y = am; \quad 2x(y - x) = a^2.$

La première équation donne $y = am - x.$ (1)

La seconde devient après substitution

$$4x^2 - 2amx + a^2 = 0. \tag{2}$$

Les racines de cette équation ne conviennent que si elles sont positives; de plus, elles doivent être inférieures à am, à cause de l'équation (1).

a) L'équation (2) ne peut avoir deux racines de signes contraires, car

$$P = \frac{a^2}{4} > 0.$$

b) L'équation (2) admet deux racines acceptables, si on a :

$\rho = a^2m^2 - 4a^2 = a^2(m-2)(m+2) > 0$ ou $m > 2$;

$f(0) = a^2 > 0$; ce qui a toujours lieu;

$f(am) = 2a^2m^2 + a^2 > 0$; ce qui a toujours lieu.

$0 < \dfrac{am}{4} < am$; ce qui a toujours lieu, car a et m sont positifs.

En résumé, on doit avoir $m > 2$.

c) Si $m = 2$, on trouve la solution acceptable

$$x = \frac{a}{2}; \quad y = \frac{3a}{2}.$$

2° $x^2 + y^2 - 2mx = 0; \quad 9xy^2 + x^3 = 6my^2.$

Nous n'avons pas à considérer la solution évidente $x = y = 0$. Dans ces conditions, l'élimination de y^2 donne

$$2x^2 - 6mx + 3m^2 = 0.$$

Cette équation admet deux racines positives, car on a :

$$\rho = 3m^2 > 0; \quad P = \frac{3m^2}{2} > 0; \quad S = 3m > 0.$$

Ces racines sont $x = \dfrac{m}{2}(3 \pm \sqrt{3}).$

Si $x = \frac{m}{2}(3 + \sqrt{3})$, on a $y^2 = -\frac{m^2\sqrt{3}}{2}$. A cette valeur de x ne correspond donc aucune valeur de y.

Si $x = \frac{m}{2}(3 - \sqrt{3})$, on a $y^2 = \frac{m^2}{2}\sqrt{3}$ et on a la solution positive

$$x = \frac{m}{2}(3 - \sqrt{3}); \quad y = \frac{m}{2}\sqrt[4]{12}.$$

617. *Résoudre et discuter les systèmes suivants :*

1° $x^2 - y^2 - z^2 = 0$; $x + y + z = a$; $x^2 + y^2 + z^2 = 2b^2$.

La première et la troisième équation donnent par addition

$$2x^2 = 2b^2 \quad \text{ou} \quad x = \pm b.$$

a) Si $x = b$, la deuxième et la troisième équation deviennent

$$y + z = a - b; \quad y^2 + z^2 = b^2. \tag{1}$$

De ce système, on déduit

$$2yz = a(a - 2b).$$

On aura deux systèmes de valeurs pour y et z et, par suite, deux solutions pour le système proposé, si on a

$$(y + z)^2 - 4yz = -a^2 + 2ab + b^2 > 0.$$

En supposant b positif, cette inégalité exige

$$b(1 - \sqrt{2}) < a < b(1 + \sqrt{2}).$$

b) Si $x = -b$, la deuxième et la troisième équation deviennent

$$y + z = a + b; \quad y^2 + z^2 = b^2. \tag{2}$$

On en déduit $2yz = a(a + 2b)$.

On aura deux nouvelles solutions pour le système, si on a $(b > 0)$

$$-a^2 - 2ab + b^2 > 0$$

ou $$-b(1 + \sqrt{2}) < a < -b(1 - \sqrt{2}).$$

c) *En résumé* $(b > 0)$:

Si $-b(1 + \sqrt{2}) < a < b(1 - \sqrt{2})$, on a deux solutions;

Si $b(1 - \sqrt{2}) < a < b(\sqrt{2} - 1)$, on a quatre solutions;

Si $b(\sqrt{2} - 1) < a < b(1 + \sqrt{2})$, on a deux solutions;

Si $a = -b(1 + \sqrt{2})$, on trouve $x = -b$; $y = z = -\frac{b\sqrt{2}}{2}$;

Si $a = b(1 - \sqrt{2})$, on a, en dehors des deux solutions du système (2), encore la solution $x = b$; $y = z = -\frac{b\sqrt{2}}{2}$;

Si $a = b(\sqrt{2} - 1)$, on a, en dehors des deux solutions du système (1), encore la solution $x = -b$; $y = z = \frac{b\sqrt{2}}{2}$;

Si $a = b(1 + \sqrt{2})$, on trouve $x = b$; $y = z = \frac{b\sqrt{2}}{2}$.

d) On aboutirait à des conclusions analogues, si on supposait b négatif.

e) Si $b = 0$, on trouve $x = 0$ et les deux dernières équations deviennent

$$y + z = a; \quad y^2 + z^2 = 0. \tag{3}$$

Si $a = 0$, on trouve $x = y = z = 0$.

Si $a \neq 0$, le système (3) conduit à l'équation

$$2z^2 - 2az + a^2 = 0,$$

dont le réalisant est négatif. Le système est donc impossible dans ce cas.

2° $x + y + z = a; \quad xy = b^2; \quad x^2 + y^2 = z^2.$

La dernière équation peut s'écrire

$$(x + y)^2 - 2xy = z^2;$$

ou, en remplaçant $x + y$ et xy,

$$2az = a^2 - 2b^2; \quad \text{d'où} \quad z = \frac{a^2 - 2b^2}{2a},$$

en supposant a différent de zéro.

Les deux premières équations deviennent

$$x + y = \frac{a^2 + 2b^2}{2a}; \quad xy = b^2.$$

Le système proposé aura deux solutions, si on a

$$(x + y)^2 - 4xy = \left(\frac{a^2 + 2b^2}{2a}\right)^2 - 4b^2 > 0$$

ou
$$a^4 - 12a^2b^2 + 4b^4 > 0;$$

il a une solution, si l'on a

$$a^4 - 12a^2b^2 + 4b^4 = 0 \quad \text{ou} \quad a = \pm b(2 \pm \sqrt{2}).$$

Si $a = 0$, l'équation $2az = a^2 - 2b^2$ devient $0.z = -2b^2$.

On voit que le système est impossible quand $a = 0$, $b \neq 0$. Il est indéterminé quand $a = b = 0$. Toutefois, dans ce cas, l'une des inconnues x, y est nulle; l'autre et z sont des nombres opposés.

3° $x + y + z = 2; \quad x^2 + y^2 = z^2; \quad m(x + y) = xy.$

La troisième équation peut s'écrire

$$2m(x + y) = 2xy = (x + y)^2 - (x^2 + y^2).$$

Remplaçons $x + y$ et $x^2 + y^2$. Il vient

$$z(m - 2) = 2(m - 1).$$

a) Si $m = 2$, cette équation et le système sont impossibles.

b) Si $m \neq 2$, on a $z = \dfrac{2(m - 1)}{m - 2}$.

La première et la troisième équation donnent alors

$$x + y = \frac{-2}{m - 2}; \quad xy = \frac{-2m}{m - 2}.$$

Le système proposé aura deux solutions, si on a

$$(x + y)^2 - 4xy = \frac{4(2m^2 - 4m + 1)}{(m - 2)^2} > 0 \quad \text{ou} \quad 2m^2 - 4m + 1 > 0;$$

ce qui exige $m < \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ ou $m > \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}.$

c) Pour $m = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$, la solution double est

$$x = y = 2 - \sqrt{2};\quad z = -2(1-\sqrt{2}).$$

Pour $m = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$, la solution double est

$$x = y = 2 + \sqrt{2};\quad z = -2(1+\sqrt{2}).$$

4° $x + y + z = 2a;\quad xy = b^2;\quad y = mz.$

La première et la troisième équation donnent

$$y = mz;\quad x = 2a - (m+1)z. \tag{1}$$

En remplaçant x et y par leur valeur dans la deuxième équation, il vient

$$m(m+1)z^2 - 2amz + b^2 = 0. \tag{2}$$

Supposons $m(m+1) \neq 0$. A toute racine de l'équation (2), les équations (1) font correspondre une solution du système. Or le réalisant de l'équation (2) est

$$a^2m^2 - b^2m(m+1) = (a^2 - b^2)m^2 - b^2m.$$

Le système admet donc deux solutions, si on a

$$m[(a^2 - b^2)m - b^2] > 0.$$

Si $a^2 > b^2$, cette inégalité exige

$$m < 0 \quad \text{ou} \quad m > \frac{b^2}{a^2 - b^2}.$$

Si $a^2 < b^2$, on devra avoir

$$\frac{b^2}{a^2 - b^2} < m < 0.$$

CAS PARTICULIERS. — Nous supposons a et b différents de zéro.

a) Si $a^2 = b^2$, le réalisant devient $-b^2m$ et le nombre de solutions dépend du signe de m.

b) Si $a \neq b$ et $m = \dfrac{b^2}{a^2 - b^2}$, le système admet une solution

$$x = a;\quad y = \frac{b^2}{a};\quad z = \frac{a^2 - b^2}{a}.$$

c) Si $m = 0$, l'équation (2) et le système sont impossibles.

d) Si $m = -1$, on trouve $x = 2a;\ y = \dfrac{b^2}{2a};\ z = -\dfrac{b^2}{2a}.$

618. *Résoudre et discuter les systèmes suivants :*

1° $a^2(y + z) = xyz;\quad b^2(z + x) = xyz;\quad c^2(x + y) = xyz.$

En écartant la solution évidente $x = y = z = 0$, et en supposant a, b et c différents de zéro, le système peut s'écrire

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} = \frac{1}{a^2}; \quad \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} = \frac{1}{b^2}; \quad \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} = \frac{1}{c^2}.$$

On en déduit facilement $\frac{1}{xy}$, $\frac{1}{xz}$, $\frac{1}{yz}$; puis xy, xz, yz.

Posons $xy = \mathrm{A}$, $xz = \mathrm{B}$; $yz = \mathrm{C}$.

Ce nouveau système donne $x^2y^2z^2 = \mathrm{ABC}$.

On aura $xyz = \pm\sqrt{\mathrm{ABC}}$ quand $\mathrm{ABC} > 0$; puis

$$x = \pm\frac{1}{\mathrm{C}}\sqrt{\mathrm{ABC}}; \quad y = \pm\frac{1}{\mathrm{B}}\sqrt{\mathrm{ABC}}; \quad z = \pm\frac{1}{\mathrm{A}}\sqrt{\mathrm{ABC}}.$$

Les signes supérieurs se correspondent, ainsi que les signes inférieurs. Le système a donc deux solutions quand $\mathrm{ABC} > 0$.

2° $xy + 1 = ay$; $yz + 1 = bz$; $xz + 1 = cx$.

La première et la troisième équation donnent

$$y = \frac{1}{a - x}; \quad z = \frac{cx - 1}{x}. \tag{1}$$

En remplaçant dans la deuxième, il vient

$$x^2(bc - 1) + (a - b + c - abc)x + ab - 1 = 0. \tag{2}$$

Le réalisant de cette équation est

$$= (a - b + c - abc)^2 - 4(bc - 1)(ab - 1)$$
$$= (a + b + c - abc)^2 - 4.$$

Supposons que l'on ait $bc \neq 1$. Si $\quad > 0$, l'équation (2) admet deux racines. Si ces racines sont différentes de 0 et de a, les équations (1) font correspondre à chacune d'elles une valeur pour y et pour z et le système admet deux solutions.

Si $bc \neq 1$ et $\quad = 0$, l'équation (2) a une racine. Si elle est différente de 0 et de a, le système aura une solution. On aboutit à la même conclusion, si l'on suppose

$$bc = 1; \quad a - b + c - abc \neq 0.$$

3° $yz = a(y + z)$; $xz = a^2(x + z)$; $xy = a^3(x + y)$.

Après avoir écarté la solution évidente $x = y = z = 0$, on peut diviser les deux membres des diverses équations respectivement par yz, xz, xy et on obtient un système du premier degré en $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$. En supposant $a \neq 0$ et $a \neq \frac{\pm 1 \pm \sqrt{5}}{2}$, on trouve

$$x = \frac{2a^3}{-a^2 + a + 1}; \quad y = \frac{2a^3}{a^2 - a + 1}; \quad z = \frac{2a^3}{a^2 + a - 1}.$$

4° $x(y + z) = 2a$; $y(x + z) = 2b$; $z(x + y) = 2c$.

On a $$xy + yz + zx = a + b + c.$$

On calcule alors xy, yz, zx, puis xyz, puis x, y, z.

En supposant que le produit
$$(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)$$
soit positif, et en le représentant par A^2, on trouve deux solutions
$$x = \frac{\pm A}{-a + b + c}; \quad y = \frac{\pm A}{a - b + c}; \quad z = \frac{\pm A}{a + b - c}.$$

CHAPITRE XXI

Problèmes d'un degré supérieur au premier.

§ I. — PROBLÈMES A UNE INCONNUE.

619. *Trouver deux nombres consécutifs, tels que la somme de leurs carrés soit* 545.

Soit x le plus petit des deux nombres. On a
$$x^2 + (x + 1)^2 = 545 \quad \text{ou} \quad x^2 + x - 272 = 0.$$
Rép. 16 et 17; — 17 et — 16.

620. *Deux nombres sont entre eux comme* 4 *est à* 7 *et la somme de leurs carrés est* 3185. *Trouver ces nombres.*

Soit x le premier nombre. Le second sera $\frac{7x}{4}$ et l'on aura
$$x^2 + \left(\frac{7x}{4}\right)^2 = 3185 \quad \text{ou} \quad x^2 = 784.$$
Cette équation donne $x = \pm 28$.

Rép. 28 et 49; — 28 et — 49.

621. *Trouver deux nombres tels que la somme de leurs carrés soit* 180 *et la différence de leurs carrés* 108.

Soit x le premier nombre; le carré du second sera $180 - x^2$. On a
$$x^2 - (180 - x^2) = 108 \quad \text{ou} \quad x^2 = 144 \quad \text{ou} \quad x = \pm 12.$$
Rép. 12 et 6; 12 et — 6; — 12 et 6; — 12 et — 6.

622. *Par quel nombre faut-il diviser* 333 *pour avoir un quotient double du reste et égal au diviseur ?*

Soit x la valeur commune du diviseur et du quotient. On a

$$333 = x^2 + \frac{x}{2} \quad \text{ou} \quad 2x^2 + x - 666 = 0.$$

Rép. 18 ou $-\frac{37}{2}$.

623. *Un nombre est formé de deux chiffres dont la somme est* 12; *en augmentant son carré de* 48, *on obtient le tiers du carré du nombre renversé. Quel est ce nombre ?*

Soit x le chiffre des dizaines; celui des unités sera $12 - x$. On a

$$(10x + 12 - x)^2 + 48 = \frac{1}{3}[10(12 - x) + x]^2,$$

ou

$$3x^2 + 52x - 256 = 0.$$

Cette équation donne $x' = 4$; $x'' = -\frac{64}{3}$ (à écarter).

Rép. Le nombre est 48.

624. *Dans un nombre de deux chiffres, le chiffre des unités est double de celui des dizaines. Si on multiplie le tiers du nombre par le quart du nombre renversé, on obtient* 336. *Trouver ce nombre.*

Soit x le chiffre des dizaines; celui des unités sera $2x$. On a

$$\frac{10x + 2x}{3} \times \frac{20x + x}{4} = 336 \quad \text{ou} \quad x^2 = 16.$$

Rép. 48.

625. *J'ai acheté des livres pour* 60 *fr. Si j'en avais eu trois de plus pour ce même prix, chacun coûterait un franc de moins. Combien de livres ai-je achetés?*

Soit x le nombre cherché. Le prix d'un livre est $\frac{60}{x}$ fr. On a

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x + 3} = 1 \quad \text{ou} \quad x^2 + 3x - 180 = 0.$$

D'où $x' = 12$; $x'' = -15$ (à écarter).

Rép. 12 livres.

626. *Un héritage qui s'élève à* 405 000 *fr. doit être partagé également entre un certain nombre de personnes. Trois héritiers viennent à être exclus, et par ce fait la part de chacun des autres est augmentée de* 22 500 *fr. Combien y avait-il d'héritiers ?*

Soit x le nombre des héritiers. Si trois héritiers se retirent, les parts qui valaient $\frac{405\,000}{x}$ deviennent $\frac{405\,000}{x - 3}$. On a

$$\frac{405\,000}{x - 3} - \frac{405\,000}{x} = 22\,500 \quad \text{ou} \quad x^2 - 3x - 54 = 0.$$

D'où $x' = 9$; $x'' = -6$ (à écarter).

Rép. 9 personnes.

627. *Deux mobiles partent du sommet d'un angle droit en suivant chacun un côté de l'angle. L'un part une seconde avant l'autre et parcourt* 6 *m. par seconde, tandis que l'autre ne parcourt que* 5 *m. par seconde. A quel moment seront-ils éloignés de* 75 *m.?*

Supposons que, x secondes après le départ du premier, les deux mobiles soient à une distance de 75 m. l'un de l'autre. On a

$$(6x)^2 + [5(x-1)]^2 = 75^2 \quad \text{ou} \quad 61x^2 - 50x - 5600 = 0.$$

D'où $x' = 10$; $x'' = -9\frac{11}{61}$.

Rép. 10 secondes après le départ du premier.

Si les deux mobiles se déplaçaient depuis un temps indéfini sur les côtés de l'angle droit prolongés, ils auraient été éloignés de 75 m. l'un de l'autre, $9\frac{11}{61}$ secondes avant l'arrivée du premier au sommet de l'angle.

628. *Une lumière électrique se trouve à* 40 *m. d'un bec de gaz. En quel point de la droite joignant les deux lumières faut-il placer un écran, pour qu'il soit également éclairé par les deux lumières, la* 1^re *étant* 16 *fois plus intense que l'autre?*

Soit x la distance de la lampe électrique à l'écran; la distance de l'écran au bec de gaz sera $40 - x$.

On démontre que l'éclairement produit en un point donné par une source lumineuse est égal au quotient de l'intensité de la source par le carré de la distance. On aura

$$\frac{16}{x^2} = \frac{1}{(40-x)^2} \quad \text{ou} \quad x = \pm 4(40-x).$$

D'où $x' = 32$; $x'' = 53\frac{1}{3}$.

Deux points répondent à la question. Ils sont situés d'un même côté de la lampe électrique; l'un à $53\frac{1}{3}$ m., donc à $13\frac{1}{3}$ m. au-delà du bec de gaz; l'autre à 32 m. de la lampe électrique, donc entre les deux lumières.

629. *Deux voyageurs* A *et* B *distants de* 66 *km., vont l'un vers l'autre.* A *part* 3 *heures après* B. *Après la rencontre,* B *met* 1 *h.* 36 *m. pour achever le trajet, et* A 6 *h.* 15 *m. Déterminer le point de rencontre.*

Supposons que les deux voyageurs se rencontrent à x km. de la position initiale de A. Pour parcourir les $(66 - x)$ km. restants, A met 6 h. 15 m. ou 375 minutes. Il en résulte que A parcourt les 66 km. en $\frac{375 \times 66}{66 - x}$ minutes. On montrerait de même que B met $\frac{96 \times 66}{x}$ minutes.

La différence de ces deux durées est $375 - 96 - 180 = 99$ minutes et on a

$$\frac{375 \times 66}{66 - x} - \frac{96 \times 66}{x} = 99 \quad \text{ou} \quad x^2 + 248x - 4224 = 0.$$

D'où $x' = 16$; $x'' = -264$ (à écarter).

Rép. Le point de rencontre se trouve à 16 km. de la position initiale de A.

630. *Un rentier a placé* 20 000 *fr. à un certain taux, pendant cinq ans; après ce temps, il retire le capital et les intérêts simples, place le tout à un taux inférieur d'un franc au premier, et retire annuellement* 1300 *fr. d'intérêts. Trouver le premier taux.*

Soit x le premier taux. Après 5 années, le capital est devenu $20000 + 1000x$. On a

$$\frac{(20000 + 1000x)(x - 1)}{100} = 1300 \quad \text{ou} \quad x^2 + 19x - 150 = 0.$$

D'où $x' = 6$; $x'' = -25$ (à écarter).

Rép. Le taux primitif était 6 %.

631. *Quelle longueur ont les deux aiguilles d'une horloge, si la distance de leurs extrémités est* 17 *cm. à midi et* 85 *cm. à* 9 *heures?*

A midi les deux aiguilles se trouvent l'une sur l'autre. Si la petite aiguille mesure x cm., la grande mesurera $(x + 17)$cm. A 9 h. les deux aiguilles forment un angle droit et on aura

$$x^2 + (x + 17)^2 = 85^2 \quad \text{ou} \quad x^2 + 17x - 3468 = 0.$$

D'où $x' = 51$; $x'' = -68$ (à écarter).

Rép. La petite aiguille a 51 cm. et la grande, 68 cm.

632. *Trouver les trois côtés d'un triangle rectangle, sachant que les mesures de ses côtés sont trois nombres entiers consécutifs.*

Soit $x + 2$ la longueur de l'hypoténuse. On a

$$x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2 \quad \text{ou} \quad x^2 - 2x - 3 = 0.$$

D'où $x' = 3$; $x'' = -1$ (à écarter).

Rép. 3, 4, 5.

633. *La base et la hauteur d'un rectangle mesurent* 50 *m. et* 24 *m. Mener une parallèle au petit côté, de manière que les deux rectangles qu'elle détermine soient semblables.*

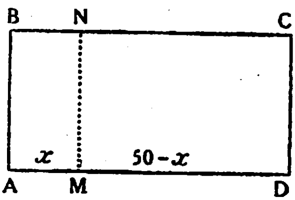


Fig. 37.

Soient x et $50 - x$ les portions de la base. On doit avoir

$$\frac{x}{24} = \frac{24}{50 - x} \quad \text{ou } x^2 - 50x + 576 = 0.$$

D'où $x' = 32$; $x'' = 18$.

Ces deux réponses conduisent à la même division; mais le petit rectangle peut être placé à droite ou à gauche.

634. *Deux cordes qui se coupent dans un cercle ont chacune* 80 *pour produit de ses segments. Trouver la distance du point d'intersection au centre, le rayon mesurant* 12 *cm.*

Par le point d'intersection M des deux cordes, traçons un diamètre AA′ et supposons que le segment OM mesure x cm. Le produit des mesures des deux segments de AA′ vaut également 80 et on a

$$(12 + x)(12 - x) = 80 \quad \text{ou} \quad x^2 = 64.$$

D'où $x = \pm 8$. Le double signe marque que le point M peut être, par rapport à O, du côté de A ou du côté de A′.

635. *Un trapèze rectangle* ABCD *a pour hauteur* BC = 3*m. et pour base* AB = 8*m. La distance* CH *du sommet* C *au côté* AD *mesure* 2,4 *m. Calculer la longueur de la base* CD.

Supposons que la base CD mesure x mètres. Le double de l'aire du triangle ACD est

$$CD \times BC = 3x \quad \text{et aussi}$$
$$AD \times CH = 2{,}4 \times AD.$$

Mais le triangle rectangle AED donne

$$AD = \sqrt{DE^2 + AE^2} = \sqrt{9 + (8 - x)^2}.$$

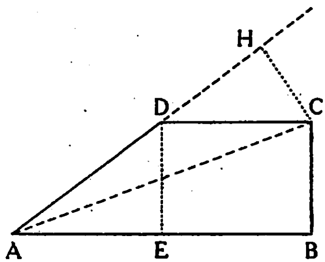


Fig. 38

On a donc l'équation

$$3x = 2{,}4\sqrt{9 + (8 - x)^2} \quad (1) \quad \text{ou} \quad 9x^2 + 256x - 1168 = 0.$$

D'où $x' = 4$; $x'' = -\dfrac{292}{9}$.

La réponse négative est à écarter, car dans l'équation (1) le premier membre doit être positif, comme le second.

Rép. CD mesure 4 m.

636. *Par un point* M *situé à* 12 *m. du centre* O *d'un cercle dont le rayon est* 8 *m., on mène une sécante. Quelle est la longueur de cette sécante, sachant que l'un des segments déterminés sur elle par la circonférence est double de l'autre*?

Soient x et $2x$ les longueurs des deux segments de la sécante. Traçons le diamètre AA′ passant par M. Le point M le divise en deux segments qui mesurent 12 + 8 ou 20 m. et 12 — 8 ou 4 m. On a

$$4 \times 20 = 2x^2; \quad \text{d'où} \quad x = \pm 2\sqrt{10}.$$

Rép. La sécante mesure $4\sqrt{10}$ mètres.

637. *Dans un triangle* ABC, *on donne* AB = 20 *m.*, BC = 18 *m. l'angle* BAC *mesure* 60°. *Trouver la longueur du* 3^e *côté.*

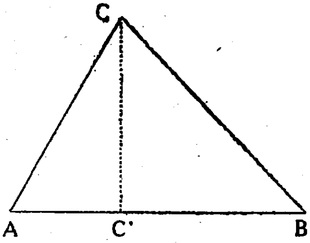


Fig. 39

Soit x la longueur du côté AC. L'angle BAC mesurant 60°, la projection AC′ du côté AC sur AB est la moitié de AC. D'autre part, on sait que

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC' \times AB.$$

Remplaçons et il vient

$$18^2 = 20^2 + x^2 - 20x$$

ou $x^2 - 20x + 76 = 0.$

D'où $x = 10 \pm 2\sqrt{6}.$

Les deux réponses sont positives et conviennent; on peut le vérifier facilement par les constructions du cas douteux, vu en Géométrie.

638. *On lance un projectile verticalement de bas en haut avec une vitesse initiale de* 39,24 *m. par seconde. On demande :*

1° *Au bout de combien de temps la vitesse du projectile s'annulera et quelle sera la hauteur atteinte à ce moment;*

2° *Au bout de combien de temps le projectile se trouvera à une hauteur de* 58,86 *m. au-dessus de son point de départ.*

Construire le graphique du mouvement pendant les 8 *premières secondes, en portant en abscisses les temps, et en ordonnées les hauteurs atteintes.*

La hauteur h atteinte après t secondes est donnée par la formule

$$h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2.$$

La vitesse v après t secondes est $v = v_0 - gt$ et g est égal à 9,81.

1° Si la vitesse est nulle après t secondes, on aura

$$0 = 39{,}24 - 9{,}81t; \quad \text{d'où} \quad t = 4.$$

2° Supposons que le projectile se trouve à une hauteur de 58,86 m. après x secondes. On aura

$$58{,}86 = 39{,}24x - \frac{1}{2} \times 9{,}81x^2 \quad \text{ou} \quad x^2 - 8x + 12 = 0.$$

D'où $x' = 6;\ x'' = 2.$

Rép. 1° Après 4 secondes; 2° après 2 ou 6 secondes.

§ II. — PROBLÈMES A DEUX OU PLUSIEURS INCONNUES.

639. *Partager* 16 *en deux parties telles que si à leur produit, on ajoute la somme de leurs carrés, le résultat soit* 208.

On a $x + y = 16;\ xy + x^2 + y^2 = 208.$

La seconde équation peut s'écrire

$$(x + y)^2 - xy = 208 \quad \text{ou} \quad xy = 16^2 - 208 = 48.$$

x et y sont donc les racines de l'équation $X^2 - 16X + 48 = 0.$

Rép. Les deux parties sont 4 et 12.

640. *Partager* 39 *en deux parties telles que la somme de leurs cubes soit* 17 199.

On a $x + y = 39;$

$$x^3 + y^3 = 17\,199 \quad \text{ou} \quad (x + y)\,[(x + y)^2 - 3xy] = 17\,199.$$

Rép. Les deux parties sont 15 et 24.

641. *Trouver deux nombres, sachant que leur somme, leur produit et la différence de leurs carrés sont égaux entre eux.*

Soient x le 1er nombre et y le second. On a :

$$x + y = xy \qquad (1)$$

$$x + y = x^2 - y^2. \qquad (2)$$

L'équation (2) se décompose en deux autres.

1° $x + y = 0$. — On trouve alors $x = y = 0$.

2° $x - y = 1$. — En éliminant x entre cette équation et l'équation (1), on trouve

$$y^2 - y - 1 = 0; \quad \text{d'où} \quad y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Rép. 0 et 0; $\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$; $\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

642. *Un nombre est formé de deux chiffres; si on lui ajoute* 9, *on trouve le même nombre renversé, et si on divise le nombre par le produit des deux chiffres, on a* 6 *pour quotient; trouver le nombre.*

Soient x le chiffre des dizaines et y celui des unités. On a :

$$10x + y + 9 = 10y + x \quad \text{ou} \quad y - x = 1;$$

$$\frac{10x + y}{xy} = 6 \qquad \text{ou} \quad 10x + y = 6xy.$$

La résolution de ce système donne $x = 1$; $y = 2$.

Rép. Le nombre est 12.

643. *Trouver un nombre de deux chiffres, sachant que la somme des carrés de ces deux chiffres est égale au nombre augmenté du produit de ces mêmes chiffres, et qu'en outre, si l'on ajoute* 36 *au nombre, on obtient le nombre renversé.*

Soient x le chiffre des dizaines et y celui des unités. On a

$$x^2 + y^2 = 10x + y + xy \quad \text{et} \quad 10x + y + 36 = 10y + x.$$

On tire y de la 2e équation et on remplace dans la 1re.

Rép. 48 et 37.

644. *Deux marchands ont mis ensemble* 500 *fr. dans une entreprise; l'un a laissé son argent* 5 *mois et l'autre,* 2 *mois. L'affaire terminée, chacun a* 450 *fr. Déterminer les deux mises.*

Soient x et y les deux mises.

Le bénéfice total est 400 fr. Le bénéfice de chaque marchand est proportionnel à sa mise et à la durée de sa mise. Comme ces bénéfices sont égaux à $450 - x$ et à $450 - y$, on aura l'équation

$$\frac{450 - x}{5x} = \frac{450 - y}{2y}.$$

En éliminant y entre cette équation et $x + y = 500$, on trouve

$$x^2 + 550x - 150\,000 = 0;$$

d'où $x' = 200$; $x'' = -750$ (à écarter).

Rép. 1re mise = 200 fr.; 2e mise = 300 fr.

645. *Deux personnes ont mis ensemble* 2000 *fr. dans une entreprise; l'une a laissé son argent* 17 *mois et a retiré* 1710 *fr.; l'autre a retiré après un an* 1040 *fr. en tout. Quelle était la mise de chacun ?*

Soient x et y les deux mises. En raisonnant comme dans l'exercice précédent, on obtient le système

$$x + y = 2000; \quad \frac{1710 - x}{17x} = \frac{1040 - y}{12y}.$$

Rép. 1re mise = 1200 fr.; 2e mise = 800 fr.

646. *Deux ouvriers reçoivent l'un* 400 *fr., l'autre,* 225 *fr.; le premier a travaillé cinq jours de plus que l'autre. Si chacun avait travaillé le nombre de jours qu'a travaillé l'autre, ils auraient reçu la même somme; on demande le nombre de journées de travail de chaque ouvrier et le prix de sa journée.*

Appelons x le nombre de jours de travail du second et z le prix de sa journée; le premier a travaillé pendant $(x + 5)$ journées; soit y le prix de sa journée. On a le système

$$(x + 5)y = 400; \quad xz = 225; \quad (x + 5)z = xy.$$

En remplaçant dans la 3e équation y et z par leurs valeurs tirées des deux premières équations, on trouve

$$9(x + 5)^2 = 16x^2; \quad \text{d'où} \quad x' = 15; \quad x'' = -\frac{15}{7} \text{ (à écarter).}$$

Rép. Le 1er a travaillé pendant 20 jours, à 20 fr. par jour.
Le 2e a travaillé pendant 15 jours, à 15 fr. par jour.

647. *Deux capitaux sont placés à des taux différents; le premier capital, qui produit* 500 *fr. par an, surpasse de* 4000 *fr. le second capital, qui produit* 390 *fr.; mais le taux de ce dernier surpasse de* 1,5 *le taux du premier; déterminer ces deux capitaux.*

Soient x le premier capital et y le taux correspondant; $x - 4000$ est le 2e capital et $y + 1,5$ son taux. On a le système :

$$\frac{xy}{100} = 500; \quad \frac{(x - 4000)(y + 1,5)}{100} = 390.$$

En éliminant y, on obtient l'équation

$$3x^2 + 10\,000x - 400\,000\,000 = 0;$$

d'où $$x' = 10\,000; \quad x'' = -\frac{40\,000}{3}.$$

Rép. Le 1er capital = 10 000 fr.; il est placé à 5 %;
Le 2e capital = 6 000 fr.; il est placé à 6,5 %.

648. *Deux capitaux sont prêtés à des taux différents. La somme de ces deux capitaux est* 60 000 *fr., la somme des taux est* 12. *Le premier capital produit* 1320 *fr. et le deuxième* 2340 *fr. l'an; déterminer ces deux capitaux.*

Soient x le premier capital et y le taux correspondant; $60\,000 - x$ est le 2e capital et $12 - y$, le taux correspondant. On a :

$$\frac{xy}{100} = 1320; \quad \frac{(60\,000 - x)(12 - y)}{100} = 2340.$$

En éliminant y, on obtient l'équation

$$x^2 - 51\,500x + 660\,000\,000 = 0; \quad \text{d'où} \quad x' = 27\,500; \quad x'' = 24\,000.$$

1re rép. Le premier capital est 27 500 fr., le taux est 4,8 %;
Le deuxième capital est 32 500 fr., le taux est 7,2 %.

2e rép. Le premier capital est 24 000 fr., le taux est 5,5 %;
Le deuxième capital est 36 000 fr:, le taux est 6,5 %.

649. *Trois enfants reçoivent de leurs parents un certain nombre d'oranges. La somme de ces trois nombres est* 18; *la somme de leurs carrés est* 126; *le produit des deux derniers est* 54. *Trouver ces trois nombres.*

Soient x, y, z, les trois nombres. On a le système :

$$x + y + z = 18; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 126; \quad yz = 54.$$

La 2e équation peut s'écrire

$$x^2 + (y + z)^2 - 2yz = 126 \quad \text{ou} \quad x^2 - 18x + 45 = 0.$$

D'ou $x' = 3$; $x'' = 15$.

Rép. 3, 6, 9 oranges.

A la racine $x = 15$ ne correspond pas de solution du problème. On le voit de suite en remarquant que le carré de 15 est déjà supérieur à 126.

650. *Trouver quatre nombres en proportion, connaissant la somme de leurs carrés* 62,5; *sachant de plus que le premier surpasse le deuxième de* 4, *et que le troisième surpasse le quatrième de* 3.

Soit $\dfrac{x}{x-4} = \dfrac{y}{y-3}$ la proportion demandée. On a

$$x(y - 3) = y(x - 4) \quad \text{ou} \quad 3x = 4y \qquad (1)$$

et $$x^2 + (x - 4)^2 + y^2 + (y - 3)^2 = 62{,}5. \qquad (2)$$

Tirons y de l'équation (1) et remplaçons dans (2). On trouve

$$x^2 - 4x - 12 = 0; \quad \text{d'où} \quad x' = 6; \quad x'' = -2.$$

Rép. $6 : 2 = \frac{9}{2} : \frac{3}{2}$ et $(-2) : (-6) = \left(-\frac{3}{2}\right) : \left(-\frac{9}{2}\right)$.

651. *Dans une proportion continue, la somme des trois termes est* 28, *la différence entre les deux premiers termes est* 8; *déterminer cette proportion.*

Soit $\frac{x}{x-8} = \frac{x-8}{y}$ la proportion demandée. On a

$$xy = (x-8)^2 \tag{1}$$

$$x + (x-8) + y = 28 \quad \text{ou} \quad 2x + y = 36. \tag{2}$$

Tirons y de l'équation (2) et remplaçons dans (1). On trouve

$$3x^2 - 52x + 64 = 0; \quad \text{d'où} \quad x' = 16; \quad x'' = \frac{4}{3}.$$

Rép. $16 : 8 = 8 : 4$ et $\frac{4}{3} : \left(-\frac{20}{3}\right) = \left(-\frac{20}{3}\right) : \frac{100}{3}$.

652. *Trouver quatre nombres en proportion, sachant que la somme des extrêmes est* 19, *la somme des moyens* 17, *et la somme des carrés des quatre nombres*, 410.

Soit $\frac{x}{y} = \frac{17-y}{19-x}$ la proportion demandée. On a

$$x(19-x) = y(17-y) \quad \text{ou} \quad x^2 - 19x = y^2 - 17y$$

$$x^2 + y^2 + (17-y)^2 + (19-x)^2 = 410$$

ou

$$2(x^2 - 19x) + 2(y^2 - 17y) + 240 = 0.$$

Dans la 2^e équation, remplaçons $y^2 - 17y$ par $x^2 - 19x$. Il vient

$$x^2 - 19x + 60 = 0; \quad \text{d'où} \quad x' = 15; \quad x'' = 4.$$

Rép. $\frac{15}{12} = \frac{5}{4}$; $\frac{15}{5} = \frac{12}{4}$; $\frac{4}{12} = \frac{5}{15}$; $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$.

653. *Trois fontaines coulant ensemble dans un bassin, le rempliraient en un certain nombre d'heures. La première seule mettrait le double de temps; la deuxième seule,* 6 *heures de plus que les trois ensemble; la troisième seule,* 15 *heures de plus. En combien d'heures le bassin peut-il être rempli par chacune des trois fontaines et par les trois réunies ?*

Soit x le nombre d'heures employées par les trois fontaines réunies. La 1^re remplirait le bassin en $2x$ heures, la 2^e en $x + 6$ heures et la 3^e en $x + 15$ heures.

On a l'équation

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+15} = \frac{1}{x} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+15} = \frac{1}{2x}.$$

Cette équation donne $x^2 + 7x - 30 = 0$; d'où $x = 3$.

Rép. Les trois fontaines réunies emploient 3 heures; la 1^re demande 6 heures, la 2^e 9 heures et la 3^e 18 heures.

654. *Le périmètre d'un triangle rectangle est de* 48 *m. et la médiane tombant sur l'hypoténuse mesure* 10 *m. Calculer la longueur des trois côtés.*

L'hypoténuse mesure $10 \times 2 = 20$ m. Si l'on désigne par x et y les côtés de l'angle droit, on aura donc

$$x + y + 20 = 48; \quad x^2 + y^2 = 400.$$

Rép. 12, 16, 20.

655. *Déterminer les côtés d'un triangle rectangle dont le périmètre mesure* 30 *m. et la superficie* 30 *m*^{2}.

Soient x et y les côtés de l'angle droit. On a :

$$xy = 60; \quad x^2 + y^2 = (30 - x - y)^2.$$

Rép. 5, 12, 13.

656. *Un triangle rectangle a une superficie de* 726 *m*^{2} *et son hypoténuse mesure* 55 *m. Trouver la longueur des côtés de l'angle droit.*

Soient x et y ces côtés. On a le système

$$xy = 1452; \quad x^2 + y^2 = 3025.$$

Rép. 33 et 44.

657. *Deux carrés ont ensemble une superficie de* 325 *m*^{2}; *le produit de leurs diagonales est* 300. *Déterminer le côté de chacun de ces carrés.*

Soient x et y ces côtés. On a le système :

$$x^2 + y^2 = 325; \quad x\sqrt{2} \times y\sqrt{2} = 2xy = 300.$$

Rép. 10 et 15.

658. *Les deux côtés d'un champ rectangulaire sont dans le rapport de* 2 *à* 5 1/4. *Si l'on diminue de moitié chacun des côtés, la superficie n'est plus que de* 168 *m*^{2}. *Déterminer les dimensions de ce champ.*

Soient x et y les deux dimensions. On a le système :

$$\frac{x}{y} = \frac{8}{21}; \quad \frac{xy}{4} = 168.$$

Rép. 16 et 42.

659. *Le produit des deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle est* 1512. *L'hypoténuse égale la somme des deux autres côtés, moins* 18. *Trouver les trois côtés.*

Soient x et y les côtés de l'angle droit. On a le système :

$$xy = 1512; \quad x^2 + y^2 = (x + y - 18)^2.$$

Rép. 21, 72, 75.

660. *Trouver le périmètre d'un triangle rectangle isocèle, sachant que la hauteur abaissée sur l'hypoténuse mesure* 4 *mètres.*

La hauteur est en même temps médiane par rapport à l'hypoténuse. Donc l'hypoténuse mesure 8 m. Soit x l'un des côtés égaux de l'angle droit. On a

$$2x^2 = 64; \quad x = 4\sqrt{2}.$$

Rép. Le périmètre mesure $8(1 + \sqrt{2})$ mètres.

661. *Calculer les côtés d'un triangle rectangle, sachant que la hauteur relative à l'hypoténuse mesure 7 m. et que la somme des côtés de l'angle droit est 24 m.*

Soient x et y les côtés de l'angle droit et z l'hypoténuse. On a le système :

$$x + y = 24; \quad x^2 + y^2 = z^2: \quad xy = 7z.$$

La 2e équation peut s'écrire

$$(x + y)^2 - 2xy = z^2 \quad \text{ou} \quad z^2 + 14z - 576 = 0.$$

D'où $z' = 18$; $z'' = -32$ (à écarter).

Rép. $z = 18$; $x = 12 + 3\sqrt{2}$; $y = 12 - 3\sqrt{2}$.

662. *Deux cordes parallèles placées de part et d'autre du centre d'un cercle mesurent respectivement* 6 *m. et* 10 *m. Leur distance égale* 8*m. Trouver le rayon du cercle.*

Soient x et y les distances du centre aux deux cordes. On a :

$$x + y = 8; \quad R^2 = x^2 + 9 = y^2 + 25.$$

On trouve $x = 5$; $y = 3$.

Rép. $R = \sqrt{34}$ m.

663. *Deux côtés d'un triangle ont* 666 *pour somme de leurs carrés. Trouver ces côtés, sachant que la bissectrice de l'angle compris détermine sur le* 3e *côté deux segments qui mesurent* 14 *m. et* 10 *m.*

Soient x et y les deux côtés. On a .

$$x^2 + y^2 = 666; \quad \frac{x}{14} = \frac{y}{10}.$$

Rép. 21 et 15 m.

664. *Aux extrémités d'un segment* AB *qui mesure* 18 *m., on élève deux perpendiculaires de même sens, l'une de* 4 *m., l'autre de* 8 *m. Trouver sur le segment* AB *un point tel qu'en le joignant aux extrémités des perpendiculaires, on forme un angle droit.*

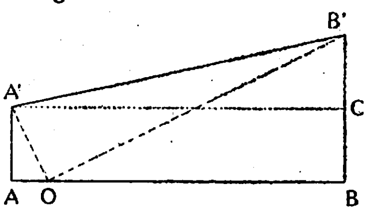


Fig. 40.

Soit O le point cherché. Posons

$$AO = x, \quad BO = y.$$

On a $A'B'^2 = A'C^2 + CB'^2$
$= A'O^2 + B'O^2$,

ou $18^2 + 4^2 = (4^2 + x^2) + (8^2 + y^2)$

ou $x^2 + y^2 = 260$;

et $x + y = 18$.

Rép. AO = 2, OB = 16; ou bien, AO = 16, OB = 2.

665. *Deux circonférences tangentes extérieurement ont leur tangente commune longue de* 15 *m. Trouver les rayons respectifs, sachant que leur différence égale quatre fois l'excès de leur somme sur la tangente.*

Soient x le rayon du grand cercle O et y le rayon du petit cercle O′. En menant par O′ une parallèle à la tangente commune, on voit que cette tangente commune est un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle, dont l'autre côté est $x - y$ et l'hypoténuse $x + y$. On a le système :

$$15^2 = (x + y)^2 - (x - y)^2 \quad \text{ou} \quad 225 = 4xy;$$
$$x - y = 4(x + y - 15).$$

Rép. $x = \frac{25}{2}$, $y = \frac{9}{2}$; ou bien $x = y = \frac{15}{2}$.

666. *Trouver les quatre côtés d'un trapèze isocèle circonscrit à un cercle dont le rayon mesure* 2 *m., sachant que le périmètre du trapèze mesure* 20 *m.*

Soient $2x$ et $2y$ les bases du trapèze. Le triangle rectangle AOD donne

$$DH \times AH = OH^2 \quad \text{ou} \quad xy = 4.$$

On a aussi

$$4x + 4y = 20 \quad \text{ou} \quad x + y = 5.$$

Rép. Les bases mesurent 8 et 2 m.; les côtés égaux mesurent 5 m.

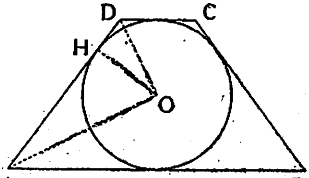


Fig. 41.

667. *Calculer les trois côtés d'un triangle rectangle connaissant le périmètre* 132 *m. et la somme* 6050 *des carrés des trois côtés.*

Soient x et y les côtés de l'angle droit, z l'hypoténuse.

On a le système :

$$x + y + z = 132; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 6050; \quad x^2 + y^2 = z^2.$$

Rép. 33, 44, 55.

668. *Calculer les côtés d'un triangle rectangle connaissant la différence* 5 *m. entre les côtés de l'angle droit et la différence* 7*m. entre les segments que la hauteur détermine sur l'hypoténuse.*

Posons $AB = x$, $AC = y$ et soient BH et CH les projections des côtés AB et AC sur l'hypoténuse BC. On a :

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{BH}{CH} \quad \text{ou} \quad \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{BH - CH}{BH + CH} \quad \text{ou} \quad x^2 - y^2 = 7\sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1)$$

On a aussi $$x - y = 5. \quad (2)$$

L'équation (1) peut s'écrire

$$(x - y)(x + y) = 7\sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{ou} \quad 5(x + y) = 7\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Élevons au carré et remplaçons y par $x - 5$. Il vient

$$x^2 - 5x - 300 = 0; \quad \text{d'où} \quad x' = 20; \quad x'' = -15 \text{ (à écarter)}.$$

Rép. 15, 20, 25.

§ III. — PROBLÈMES A DISCUTER

669. *Sur la droite* AB, *déterminer un point* M *tel que le vecteur* AM *soit moyenne proportionnelle entre le vecteur* BM *et un autre vecteur donné* AK.

Prenons le point A pour origine et adoptons comme sens positif, le sens de A vers B (B est à droite de A).

Posons $\overline{AB} = d; \quad \overline{AM} = x; \quad \overline{AK} = k.$

On doit avoir $\overline{AM}^2 = \overline{BM}.\overline{AK}.$

Or, $\overline{BM} = \overline{AM} - \overline{AB} = x - d.$

L'équation du problème sera donc

$$x^2 = k(x - d) \quad \text{ou} \quad x^2 - kx + kd = 0. \tag{1}$$

Discussion. — L'équation (1) admet des racines quand on a

$$\rho = k^2 - 4kd \geqslant 0,$$

ce qui exige $k \leqslant 0$ ou $k \geqslant 4d$.

Le signe des racines dépend du signe des expressions $P = kd$ et $S = k$. On voit que ces expressions ont toujours le signe de k.

Désignons l'équation (1) par $f(x) = 0$ et calculons $f(d)$ en vue de classer par ordre de grandeur les nombres 0, d et les racines de l'équation (1).

On trouve $f(d) = d^2$, qui est toujours positif.

1° $k < 0$. — L'équation (1) admet deux racines de signes contraires et on a le classement

$$x'' < 0 < x' < d.$$

En effet, $f(d) > 0$ indique que d est extérieur aux racines; or, d est supérieur à x'' qui est négatif; donc d est supérieur aux deux racines.

Les deux points qui répondent à la question sont l'un à gauche de A, l'autre entre A et B.

2° $k > 4d$. — L'équation (1) admet deux racines positives.

$f(d) > 0$ indique que d est extérieur aux racines. Leur demi-somme $\frac{k}{2}$ est supérieure à $2d$, donc à d. Par suite, d est inférieur aux deux racines et on a le classement

$$0 < d < x'' < x'.$$

Les deux points qui répondent à la question sont placés à droite de B.

3° $k = 0$. — On trouve $x' = x'' = 0$ et le point M est en A.

4° $k = 4d$. — On trouve $x' = x'' = \frac{k}{2} = 2d.$

Le point M est placé à droite de B; c'est le point milieu du segment AK.

670. *Un corps est lancé verticalement, de bas en haut, avec une vitesse initiale* a. *Au bout de quel temps sera-t-il à la hauteur* h?

Le corps est animé d'un mouvement uniformément retardé. Sa hauteur h et sa vitesse v sont données au bout d'un temps x, par les formules

$$h = ax - \frac{1}{2} gx^2; \quad v = a - gx.$$

La première de ces formules donne l'équation du problème

$$gx^2 - 2ax + 2h = 0. \tag{1}$$

Discussion. — L'équation (1) n'a de racines que si on a

$$a^2 - 2gh \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad h \leqslant \frac{a^2}{2g}.$$

Il en résulte que $\frac{a^2}{2g}$ est la hauteur maximum à laquelle le corps puisse s'élever.

1er cas : Si $h = \frac{a^2}{2g}$, les racines de (1) sont égales à $\frac{a}{g}$. C'est le temps requis pour que le mobile arrive le plus haut possible. La 2e formule montre que sa vitesse est alors nulle.

2e cas : Si $0 < h < \frac{a^2}{2g}$, l'équation (1) admet deux racines distinctes. Ces racines sont positives, car leur somme et leur produit sont positifs. Elles conviennent, car le corps passe deux fois à la même hauteur, une fois en montant et une fois en descendant. $\frac{a}{g}$ est la moyenne arithmétique des deux racines; les deux instants où le mobile se trouve à la même hauteur sont donc équidistants de l'instant où il atteint sa hauteur maximum.

Les deux valeurs de x donnent à v des valeurs opposées.

3e cas : Si $h = 0$, l'équation (1) donne $x' = \frac{2a}{g}$; $x'' = 0$.

x' représente l'instant où le corps revient au point de départ.

On voit encore que la durée de la montée est égale à celle de la descente.

4e cas : Si on supposait $h < 0$, l'équation (1) admettrait deux racines de signes contraires. La négative doit être écartée.

671. *Deux points lumineux* A *et* B, *placés à une distance* d *l'un de l'autre, ont des intensités lumineuses* a *et* b. *Trouver sur la droite* AB *le point* C *également éclairé par* A *et* B.

Supposons le point B à droite du point A et orientons la droite AB positivement de A vers B; soient

$$\overline{AB} = d > 0 \quad \text{et} \quad \overline{AC} = x.$$

On aura $\quad \overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = x - d.$

On démontre que l'éclairement produit en un point donné par une source lumineuse est égal au quotient de l'intensité de la source par le carré de la distance.

Les éclairements produits en C seront donc

$$\frac{a}{x^2} \quad \text{et} \quad \frac{b}{(x-d)^2}$$

et on aura l'équation

$$\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(x-d)^2} \quad \text{ou} \quad (a-b)x^2 - 2adx + ad^2 = 0. \tag{1}$$

Cette équation admet deux racines, car $\rho = abd^2 > 0$.

Proposons-nous d'étudier leurs signes et de les classer par rapport à d. On a :

$$P = \frac{ad^2}{a-b}; \quad S = \frac{2ad}{a-b}; \quad f(d) = -bd^2.$$

1^er^ cas : $a > b$. — Les deux racines sont positives et on a l'ordre

$$0 < x'' < d < x',$$

car $(a-b)f(d) = -(a-b)bd^2 < 0$.

Deux points sont également éclairés : l'un entre A et B; l'autre au-delà de B.

2^e^ cas : $a = b$. — L'équation (1) devient

$$-2adx + ad^2 = 0; \quad \text{d'où} \quad x = \frac{d}{2}.$$

Il n'y a qu'un point également éclairé : c'est le point milieu du segment AB.

3^e^ cas : $a < b$. — Les deux racines sont de signes contraires. La positive est inférieure à d, car $(a-b)f(d) > 0$ indique que d est extérieur et, par suite, supérieur aux racines (d, qui est positif, ne peut être inférieur aux racines, puisque l'une d'elles est négative). On a donc l'ordre

$$x'' < 0 < x' < d.$$

Deux points sont également éclairés : l'un entre A et B, l'autre à gauche de A.

REMARQUES. — I. On a

$$(a-b)\, f\left(\frac{d}{2}\right) = (a-b)^2\, \frac{d^2}{4},$$

et $\frac{d}{2}$ est extérieur aux racines de l'équation (1). Par suite :

Si $a > b$, $\frac{d}{2}$ est inférieur aux racines, car d est compris entre ces racines.

Si $a < b$, $\frac{d}{2}$ est supérieur aux racines, car l'une d'elles est négative.

Il en résulte que, s'il y a deux points également éclairés, ceux-ci se trouvent d'un même côté du point milieu du segment AB.

II. Pour résoudre l'équation

$$\frac{x^2}{(x-d)^2} = \frac{a}{b},$$

on peut procéder comme suit : on égale les racines carrées des deux membres

$$\frac{x}{x-d} = \pm\sqrt{\frac{a}{b}};$$

ensuite on isole x et on trouve, si $a \neq b$,

$$x' = \frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{\ }}; \quad x'' = \frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.$$

672. *D'un point* A, *pris à une distance* a *du centre d'un cercle de rayon* R, *on mène une tangente à ce cercle. Trouver la longueur de cette tangente.*

Soit x la longueur de la tangente. On a

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC \times AC' \\ &= (AO - R)(AO + R) \end{aligned}$$

ou $$x^2 = a^2 - R^2.$$

Cette équation donne une valeur pour x (la racine positive), si on a

$$a^2 - R^2 = (a - R)(a + R) > 0,$$

ou $a > R$, car $a + R$ est positif.

Si $a = R$, on a $x = 0$.

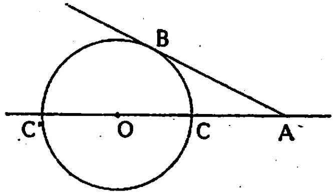


Fig. 42.

673. *Étant donné un quart de cercle* AOB *de rayon* R, *trouver sur l'arc* AB *un point* M *tel que sa distance au point* A *soit égale à sa distance au rayon* OB. (x = MA).

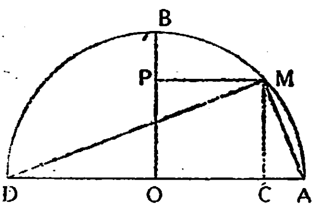


Fig. 43.

Soit $MA = MP = x$.

Le triangle rectangle AMD donne

$$AM^2 = AD \times AC$$

ou $$x^2 = 2R(R - x).$$

On obtient ainsi l'équation

$$x^2 + 2Rx - 2R^2 = 0. \qquad (1)$$

Discussion. — L'inconnue x doit être positive et plus petite que R. Or l'équation (1) admet deux racines de signes contraires. La positive conviendra, si R est extérieur et par le fait supérieur aux racines.

On doit donc avoir $f(R) = R^2 > 0$, ce qui a toujours lieu. L'équation (1) a donc toujours une racine acceptable qui est

$$x = -R + R\sqrt{3}.$$

674. *Un trapèze convexe a pour bases* a *et* b (a > b) *et pour hauteur* h. *A quelle distance* x *de la base* a *faut-il mener une parallèle aux bases pour partager la surface en deux parties équivalentes?*

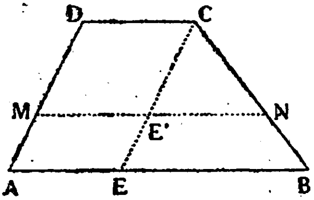


Fig. 44.

Si la droite MN divise le trapèze en deux parties équivalentes, on aura

$$\frac{(a+\mathrm{MN})x}{2}=\frac{(\mathrm{MN}+b)(h-x)}{2}. \quad (1)$$

Le triangle BCE donne

$$\frac{\mathrm{E'N}}{\mathrm{EB}} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{MN}-b}{a-b}=\frac{h-x}{h};$$

d'où
$$\mathrm{MN}=\frac{ah-(a-b)x}{h}.$$

Remplaçons dans la relation (1). Elle devient

$$2(a-b)x^2-4ahx+(a+b)h^2=0. \quad (2)$$

Discussion. — Une racine de l'équation (2) ne convient que si elle est positive et plus petite que h.

L'équation (2) admet une racine acceptable, si on a

$$f(0)\times f(h)=-(a+b)^2h^4<0.$$

Cette relation étant toujours vraie, l'équation (2) admet toujours deux racines, séparées par 0 et h. Ces racines sont positives, car leur somme et leur produit sont positifs, et comme

$$(a-b)f(h)=-(a^2-b^2)h^3$$

est négatif $(a>b)$, on a l'ordre suivant :

$$0 \quad x'' \quad h \quad x'.$$

La plus petite racine de l'équation (2) convient toujours. Elle est

$$\frac{2ah-h\sqrt{2(a^2+b^2)}}{2(a-b)}.$$

675. *Inscrire dans un triangle* ABC, *de base* BC = a *et de hauteur* AH = h, *un rectangle ayant deux de ses sommets sur* BC *et les deux autres sur* AB *et* AC, *de façon que son aire ait pour mesure un nombre donné* k². (x = *distance du sommet* A *au côté supérieur du rectangle*).

Soit AH′ = x. On a

$$\frac{\mathrm{M'N'}}{\mathrm{BC}}=\frac{\mathrm{AH'}}{\mathrm{AH}} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{M'N'}}{a}=\frac{x}{h}.$$

L'équation du problème est

$$\frac{ax}{h}(h-x)=k^2$$

ou
$$ax^2-ahx+hk^2=0. \quad (1)$$

Discussion. — Une solution de cette équation ne convient au problème que si elle est positive et inférieure à h.

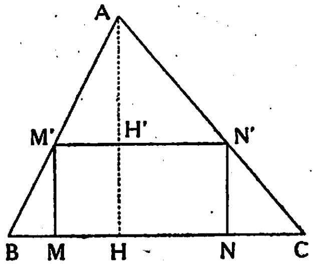


Fig. 45.

Mais la première forme de l'équation (1) montre que toute solution de cette équation rend positive l'expression $x(h - x)$, puisqu'elle la rend égale à $\dfrac{hk^2}{a}$. Or, $x(h - x)$ n'est positif que si x est compris entre 0 et h. Dès lors, toute solution de l'équation (1) convient au problème et on a les deux cas suivants :

1° Le problème admet deux solutions, si on a

$$\rho = a^2h^2 - 4ahk^2 = ah(ah - 4k^2) > 0,$$

ou

$$ah > 4k^2.$$

2° Le problème admet une solution, si on a

$$ah = 4k^2.$$

La solution unique est $x = \dfrac{h}{2}$.

676. *Sur le diamètre* AOB = 2R *d'un cercle, on porte les segments* AA', A'B', B'B. *Les segments* AA' *et* B'B *sont égaux et l'aire comprise entre le cercle donné et les trois cercles construits sur* AA', A'B', B'B *comme diamètres, égale* πm^2. *Calculer la longueur du segment* OA'.

Soit OA' $= x$.

L'équation du problème est

$$\pi R^2 - \pi x^2 - 2\pi\left(\frac{R - x}{2}\right)^2 = \pi m^2,$$

ou

$$f(x) = 3x^2 - 2Rx + 2m^2 - R^2 = 0. \quad (1)$$

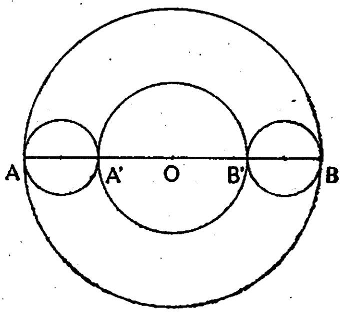


Fig. 46.

Discussion. — Les racines de cette équation ne conviennent que si elles sont positives et inférieures à R. A remarquer qu'on a

$$f(0) = 2m^2 - R^2; \quad f(R) = 2m^2.$$

1° Le problème aura une solution, si on a

$$f(0) \times f(R) = 2m^2(2m^2 - R^2) < 0,$$

ce qui exige $\quad m^2 < \dfrac{R^2}{2} \quad$ ou $\quad m < \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

2° Le problème aura deux solutions, si l'on a :

a) $\rho = R^2 - 3(2m^2 - R^2) = 2(2R^2 - 3m^2) > 0 \quad$ ou $\quad m < \dfrac{R\sqrt{6}}{3}$;

b) $f(0)$ et $f(R)$ sont positifs, ce qui exige

$$2m^2 - R^2 > 0 \quad \text{ou} \quad m > \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

c) Zéro est inférieur à la demi-somme des racines et R est supérieur à cette même demi-somme; ce qui exige

$$0 < \frac{R}{3} < R,$$

condition toujours réalisée.

En résumé, on doit avoir

$$\frac{R\sqrt{2}}{2} < m < \frac{R\sqrt{6}}{3}.$$

3° Cas particuliers.

a) Si $m = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, on trouve $x'' = 0$; $x' = \frac{2R}{3}$. Ces deux solutions conviennent.

b) Si $m = \frac{R\sqrt{6}}{3}$, on trouve $x' = x'' = \frac{R}{3}$, qui est une solution acceptable.

677. *Par un point* C, *situé sur la bissectrice de l'angle droit* BOE, *mener une droite qui rencontre les côtés* OB *et* OE (*et non leurs prolongements*) *en deux points* B *et* E *tels que l'aire du triangle* BOE *ait pour mesure* a². (*Poser* OB = x).

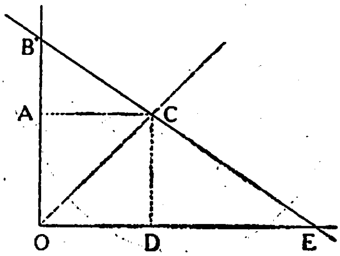


Fig. 47

Soient $OA = OD = d$ et $OB = x$. On a

$$\frac{OB \times OE}{2} = a^2 \quad \text{ou} \quad OE \times \frac{x}{2} = a^2.$$

Les triangles semblables BOE et CDE donnent

$$\frac{OE}{DE} = \frac{OB}{CD} \quad \text{ou} \quad \frac{OE}{OE - d} = \frac{x}{d}.$$

Par suite, $OE = \frac{dx}{x - d}$ et l'équation du problème est $\frac{dx^2}{2(x-d)} = a^2$

ou $$dx^2 - 2a^2x + 2a^2d = 0. \qquad (1)$$

Discussion. — Les racines de cette équation ne conviennent que si elles sont positives et supérieures à d. La première forme de l'équation (1) montre que toute racine de cette équation rend positive l'expression $x - d$, car elle la rend égale à $\frac{dx^2}{2a^2}$ qui est positif. Il en résulte que toute racine de l'équation (1) est supérieure à d et, par le fait, positive.

1° Le problème a deux solutions, si on a

$$\rho = a^4 - 2a^2d^2 > 0 \quad \text{ou} \quad a > d\sqrt{2}.$$

2° Il a une solution, si l'on a

$$\rho = a^4 - 2a^2d^2 = 0 \quad \text{ou} \quad a = d\sqrt{2}.$$

Cette solution unique est $x = 2d.$

678. *Dans un triangle* ABC, *on donne* BC = a, AB = c, A = 60°. *Calculer la longueur* x *du* 3ᵉ *côté et déterminer pour quelles valeurs de* a *le problème est possible.*

Soit x la longueur du 3ᵉ côté AC. L'angle BAC valant 60°, la projection AC′ du côté AC sur AB est la moitié de AC. D'autre part, on sait que

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC'.$$

En remplaçant, on obtient l'équation

$$a^2 = c^2 + x^2 - cx \quad \text{ou} \quad x^2 - cx + c^2 - a^2 = 0.$$

DISCUSSION. — Les racines de cette équation conviennent si elles sont positives.

1° Si $a > c$, l'équation admet deux racines de signes contraires. La racine positive forme la solution unique du problème.

2° Le problème aura deux solutions, si l'on a :

$$\rho = c^2 - 4(c^2 - a^2) = 4a^2 - 3c^2 > 0 \quad \text{ou} \quad a > \frac{c}{2}\sqrt{3};$$

$$P = c^2 - a^2 > 0 \quad \text{ou} \quad a < c;$$

$S = c$, qui est positif.

En résumé, on doit avoir

$$\frac{c}{2}\sqrt{3} < a < c.$$

3° CAS PARTICULIERS.

a) Si $a = c$, on trouve $x' = c$, $x'' = 0$ (solutions limites).

b) Si $a = \frac{c}{2}\sqrt{3}$, on trouve $x' = x'' = \frac{c}{2}$ (solution double).

679. *Calculer la profondeur d'un puits, sachant qu'il s'est écoulé un nombre* t *de secondes entre l'instant où l'on a laissé tomber une pierre et celui où le bruit qu'elle a fait en frappant le fond est arrivé à l'oreille. La vitesse du son dans l'air est* v *mètres à la seconde.*

Soit x la profondeur du puits. Le temps t se compose de deux parties :

1° Du temps t' que la pierre met pour arriver au fond du puits. La formule $x = \frac{gt'^2}{2}$ donne $t' = \sqrt{\frac{2x}{g}}.$

2° Du temps t'' que met le son pour monter du fond du puits. La formule

$$x = vt'' \quad \text{donne} \quad t'' = \frac{x}{v}.$$

L'équation du problème sera

$$\sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{x}{v} = t \quad \text{ou} \quad \frac{x}{v} + \sqrt{\frac{2x}{g}} - t = 0.$$

C'est une équation du second degré par rapport à $\sqrt{x}$. On voit immédiatement qu'elle admet deux racines distinctes, de signes contraires. La valeur qu'on cherche est la racine positive, donnée par la formule

$$\sqrt{x} = \left(-\sqrt{\frac{2}{g}} + \sqrt{\frac{2}{g} + \frac{4t}{v}}\right)\frac{v}{2} = -\sqrt{\frac{v^2}{2g}} + \sqrt{\frac{v^2}{2g} + vt}.$$

On en déduit

$$x = vt + \frac{v^2}{g} - v\sqrt{\frac{v^2}{g^2} + \frac{2vt}{g}}.$$

680. *Tracer dans un cercle de rayon* R, *une corde* AB *telle que la somme de sa longueur et de sa distance* OM *au centre soit égale à une longueur donnée* l. (OM = x).

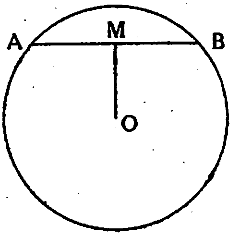


Fig. 48.

Soit $OM = x$. L'équation du problème est

$$x + 2\sqrt{R^2 - x^2} = l \quad \text{ou} \quad 2\sqrt{R^2 - x^2} = l - x. \qquad (1)$$

Si $l - x \geqslant 0$ ou $x \leqslant l$, l'équation (1) est équivalente à l'équation

$$4(R^2 - x^2) = (l - x)^2, \qquad (2)$$

ou $$f(x) = 5x^2 - 2lx + l^2 - 4R^2 = 0. \qquad (3)$$

Discussion. — Les racines de cette équation ne conviennent au problème que si elles sont positives, inférieures à l et à R.

L'équation (3) écrite sous la forme (2) montre que les racines de l'équation (3) rendent positive l'expression $R^2 - x^2$; elles sont donc comprises entre $-R$ et $+R$.

Il reste à classer les racines de l'équation (3) par rapport à 0 et l. On a : $f(0) = l^2 - 4R^2$; $f(l) = 4(l^2 - R^2)$.

1° Le problème admet une solution, si on a

$$f(0) \times f(l) = 4(l^2 - 4R^2)\,(l^2 - R^2) < 0$$

ou $$(l - 2R)\,(l - R) < 0;$$

ce qui exige $R < l < 2R$.

2° Le problème aura deux solutions, si on a :

$$\rho = l^2 - 5(l^2 - 4R^2) = -4(l^2 - 5R^2) > 0 \quad \text{ou} \quad l < R\sqrt{5};$$
$$f(0) = l^2 - 4R^2 > 0 \quad \text{ou} \quad l > 2R;$$
$$f(l) = 4(l^2 - R^2) > 0 \quad \text{ou} \quad l > R.$$

Il faut en plus que 0 soit inférieur à la demi-somme des racines et l supérieur à la même demi-somme. Cette condition est toujours satisfaite, car la demi-somme des racines est égale à $\frac{l}{5}$.

En résumé, on doit avoir

$$2R < l < R\sqrt{5}.$$

3° CAS PARTICULIERS.

a) $l = R$; on a $x' = R$ (solution limite) et $x'' = -\frac{3R}{5}$ (à écarter).

b) $l = 2R$; on trouve $x' = 0$ (solution limite) et $x'' = \frac{4R}{5}$.

c) $l = R\sqrt{5}$; on trouve $x' = x'' = \frac{R}{5}\sqrt{5}$.

681. *On donne un demi-cercle* AB *de rayon* R *et la tangente* AC *à l'extrémité du diamètre. Trouver sur la demi-circonférence un point* M *tel que, en abaissant une perpendiculaire* MC *sur la tangente et en joignant* MB, *on ait* $MB + 2MC = l$. (*Poser* $x = MC$).

Soit $MC = AP = x$. On a

$$MB = \sqrt{2R(2R - x)}.$$

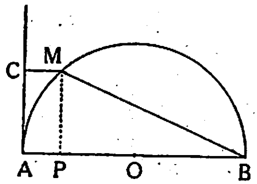


Fig. 49.

L'équation du problème sera

$$2x + \sqrt{2R(2R - x)} = l$$

ou

$$\sqrt{2R(2R - x)} = l - 2x. \qquad (1)$$

On voit qu'on doit avoir

$$l - 2x \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad x \leqslant \frac{l}{2}.$$

En élevant au carré, on trouve

$$2R(2R - x) = (l - 2x)^2,$$

ou

$$f(x) = 4x^2 - 2x(2l - R) + l^2 - 4R^2 = 0. \qquad (2)$$

DISCUSSION. — Les racines de l'équation (2) doivent être positives, inférieures à $\frac{l}{2}$ et à 2R.

La première forme de l'équation (2) montre que ses racines rendent positive l'expression $2R(2R - x)$ et aussi $2R - x$. Ces racines sont donc inférieures à 2R.

Il reste à classer les racines de l'équation (2) par rapport aux nombres 0 et $\frac{l}{2}$. On a

$$f(0) = l^2 - 4R^2; \quad f\left(\frac{l}{2}\right) = R(l - 4R).$$

1° Le problème admet une solution, si on a

$$f(0) \times f\left(\frac{l}{2}\right) = R(l + 2R)(l - 2R)(l - 4R) < 0;$$

ce qui exige $(l - 2R)(l - 4R) < 0$ ou $2R < l < 4R$.

2° Le problème admet deux solutions, si l'on a :

$$\rho = (2l - R)^2 - 4(l^2 - 4R^2) = R(17R - 4l) > 0; \quad \text{ou} \quad l < \frac{17R}{4};$$

$$f(0) = (l - 2R)\,(l + 2R) > 0 \quad \text{ou} \quad l > 2R;$$

$$f\left(\frac{l}{2}\right) = R(l - 4R) > 0 \quad \text{ou} \quad l > 4R;$$

$$0 < \frac{2l - R}{4} \quad \text{ou} \quad l > \frac{R}{2};$$

$$\frac{l}{2} > \frac{2l - R}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{l}{2} > \frac{l}{2} - \frac{R}{4}; \quad \text{ce qui est toujours le cas.}$$

En résumé, on doit avoir

$$4R < l < \frac{17R}{4}.$$

CAS PARTICULIERS.

a) $l = 2R$; on trouve $x' = \frac{3R}{2}$, $x'' = 0$; ces racines conviennent.

b) $l = 4R$; on trouve $x' = 2R$; $x'' = \frac{3R}{2}$; ces racines conviennent.

c) $l = \frac{17R}{4}$; on trouve $x' = x'' = \frac{15R}{8}$, qui convient.

682. *Dans un demi-cercle de diamètre* $AB = 2R$, *inscrire un trapèze isocèle* ABCD, *dont le périmètre soit égal à* $2p + 2R$. (*Prendre comme inconnue la projection de* BC *sur* AB).

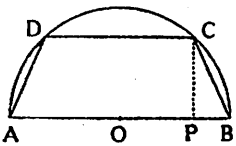


Fig. 50.

Soit $PB = x$. On a

$$CD = 2R - 2x; \quad BC = \sqrt{2Rx}.$$

L'équation du problème sera

$$2R + (2R - 2x) + 2\sqrt{2Rx} = 2p + 2R$$

ou

$$\sqrt{2Rx} = x + p - R. \tag{1}$$

Supposons que l'on ait

$$x + p - R \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad x \geqslant R - p.$$

On trouve après élévation au carré

$$2Rx = (x + p - R)^2$$

ou

$$f(x) = x^2 + 2x(p - 2R) + (p - R)^2 = 0. \tag{2}$$

DISCUSSION. — Les racines de l'équation (2) ne conviennent au problème que si elles sont positives, supérieures à $R - p$ et inférieures à R.

La première forme de l'équation (2) montre que ses racines rendent positive l'expression $2Rx$. Ces racines sont donc positives.

D'autre part, on a, d'après l'énoncé

$$BC + CD + AD = 2p.$$

L'inégalité

$$BC + CD + AD \geqslant AB$$

peut donc s'écrire $2p \geqslant 2R$ ou $R - p \leqslant 0$.

Il en résulte que les racines de l'équation (2) sont supérieures à $R - p$, puisque nous avons montré qu'elles sont positives. Dès lors, la discussion revient à classer les racines de l'équation (2) par rapport à R.

1° L'équation (2) admet deux racines et la plus petite convient au problème, si on a

$$f(R) = p^2 - 2R^2 = (p - R\sqrt{2})(p + R\sqrt{2}) < 0 \quad \text{ou} \quad p < R\sqrt{2}.$$

2° Le problème admet deux solutions, si on a :

$$\rho = (p - 2R)^2 - (p - R)^2 = -R(2p - 3R) > 0 \quad \text{ou} \quad p < \frac{3R}{2};$$

$$f(R) = p^2 - 2R^2 > 0 \quad \text{ou} \quad p > R\sqrt{2};$$

$$R > 2R - p \quad \text{ou} \quad p > R.$$

En résumé, on doit avoir

$$R\sqrt{2} < p < \frac{3R}{2}.$$

CAS PARTICULIERS.

a) $p = R\sqrt{2}$; on trouve : $x' = R$; solution limite;
$x'' = R(3 - 2\sqrt{2})$; solution acceptable.

b) $p = \frac{3R}{2}$; on trouve : $x' = x'' = \frac{R}{2}$; le trapèze se réduit dans ce cas à un demi-hexagone régulier.

683. *Étant donné un carré* ABCD *de côté* a, *trouver sur la diagonale* AC, *entre* A *et* C, *un point* M *tel que la somme de ses distances au côté* AB *et au sommet* B *ait une valeur donnée* m.

Posons $AP = MP = x$; on aura

$$MB = \sqrt{x^2 + (a - x)^2},$$

et l'équation du problème est

$$x + \sqrt{x^2 + (a - x)^2} = m. \qquad (1)$$

Comme m est évidemment positif, l'équation

$$x - \sqrt{x^2 + (a - x)^2} = m$$

est impossible et l'équation (1) est équivalente à l'équation

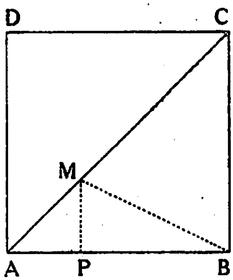


Fig. 51

$$x^2 + (a - x)^2 = (m - x)^2$$

ou $$x^2 - 2(a - m)x + a^2 - m^2 = 0. \qquad (2)$$

DISCUSSION. — Les racines de l'équation (2) conviennent au problème, si elles sont positives et inférieures à a. On a

$$f(0) = a^2 - m^2; \quad f(a) = m(2a - m).$$

1° Le problème admet une solution, si on a

$$f(0) \times f(a) = m(a + m)(a - m)(2a - m) < 0;$$

ce qui exige $$a < m < 2a.$$

2° Pour que le problème admette deux solutions, on doit avoir :

$$\rho = (a - m)^2 - (a^2 - m^2) > 0 \quad \text{ou} \quad m > a;$$
$$f(0) = a^2 - m^2 > 0 \quad \text{ou} \quad m < a.$$

Ces deux inégalités étant contradictoires, il est superflu d'examiner les autres conditions : le problème n'admet jamais deux solutions.

3° Cas particuliers.

$a)$ $m = a$; on trouve $x' = x'' = 0$; M est en A.
$b)$ $m = 2a$; on trouve $x' = a$; M est en C; $x'' = -3a$ (à écarter).

684. *Inscrire dans un demi-cercle de diamètre* AB = 2R, *un rectangle dont un côté soit sur* AB *et dont l'aire ait une valeur donnée* a^2.

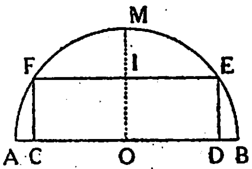


Fig. 52

Soit $OI = x$. On doit avoir

$$a^2 = EF \times OI = 2EI \times OI.$$

L'équation du problème sera

$$a^2 = 2x\sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{ou} \quad a^4 = 4x^2(R^2 - x^2), \quad (1)$$

ou encore,

$$4x^4 - 4R^2x^2 + a^4 = 0. \quad (2)$$

Discussion. — Les racines de l'équation (2) conviennent au problème, si elles sont positives et inférieures à R. Mais cette dernière condition est remplie par toute racine de l'équation (2), car l'équation équivalente (1) exprime que toute racine de l'équation (2) rend positive l'expression $R^2 - x^2$, et par suite, $R - x$.

D'autre part, l'équation (2) est une équation bicarrée; par suite, le nombre de ses racines positives est égal au nombre des racines positives de la résolvante

$$4y^2 - 4R^2y + a^4 = 0. \quad (3)$$

Le réalisant de l'équation (3) est

$$\rho = 4(R^4 - a^4) = 4(R^2 + a^2)(R + a)(R - a);$$

de plus, le produit et la somme des racines sont positifs. Par suite :

1° Si $a < R$, le problème admet deux solutions, qui sont

$$x = \sqrt{\frac{R^2 \pm \sqrt{R^4 - a^4}}{2}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{R^2 + a^2} \pm \sqrt{R^2 - a^2}\right).$$

2° Si $a = R$, on trouve $x = \frac{R}{2}\sqrt{2}$. Le rectangle correspondant est la moitié du carré inscrit dans le cercle.

685. *Étant donné un triangle rectangle, mener une parallèle à l'hypoténuse telle que le segment intercepté par les deux côtés de l'angle droit soit la moitié du segment intercepté par la circonférence du cercle circonscrit.*

Soient $BC = a$, $AH = h$, $OI = x$.

Les triangles semblables ADE et ABC donnent

$$\frac{DE}{BC} = \frac{h - x}{h}; \quad \text{d'où} \quad DE = \frac{a(h - x)}{h}.$$

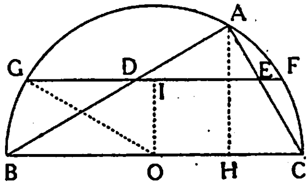


Fig. 53.

Le triangle rectangle OIG donne

$$GI = \frac{GF}{2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - x^2}.$$

L'équation du problème sera

$$\sqrt{\frac{a^2}{4} - x^2} = \frac{a(h - x)}{h}.$$

Supposons $h - x \geqslant 0$ ou $x \leqslant h$ et élevons au carré. Il vient

$$\frac{a^2}{4} - x^2 = \frac{a^2(h - x)^2}{h^2}$$

ou $$f(x) = 4(a^2 + h^2)x^2 - 8a^2hx + 3a^2h^2 = 0. \tag{1}$$

Discussion. — Les racines de l'équation (1) conviennent, si elles sont positives, inférieures à h et à $\frac{a}{2}$.

Remarquons d'abord que dans le triangle rectangle ABC, on a

$$a \geqslant 2h \quad \text{ou} \quad h \leqslant \frac{a}{2}.$$

Les racines de l'équation (1) sont donc inférieures à $\frac{a}{2}$, si elles sont inférieures à h et la question revient à classer les racines par rapport aux nombres 0 et h. On a :

$$f(0) = 3a^2h^2 \quad \text{et} \quad f(h) = h^2(4h^2 - a^2).$$

Comme $a \geqslant 2h$, l'expression $f(h)$ est toujours négative, alors que $f(0)$ est toujours positif. L'équation (1) admet donc toujours deux racines, séparées par 0 et h.

Mais le produit et la somme des racines de l'équation (1) sont positifs. Donc les racines sont positives et on a l'ordre

$$0 \quad x'' \quad h \quad x'.$$

Le problème admet toujours une solution, donnée par

$$x'' = \frac{ah\left(2a - \sqrt{a^2 - 3h^2}\right)}{2(a^2 + h^2)}$$

Remarque. — On peut montrer que x' est plus petit que $\frac{a}{2}$. A x' correspond également une solution du problème; seulement comme $x' > h$, la parallèle ne rencontrera pas les côtés de l'angle droit du triangle rectangle, mais leurs prolongements.

CAS PARTICULIER. — Si $a = 2h$, on trouve les deux solutions acceptables

$$x' = h; \quad x'' = \frac{3h}{5}.$$

686. *Calculer les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse et le rayon du cercle inscrit.*

On a le système

$$x^2 + y^2 = a^2; \quad x + y = a + 2r,$$

r étant le rayon du cercle inscrit. La première équation peut s'écrire

$$(x + y)^2 - 2xy = a^2 \quad \text{ou} \quad (a + 2r)^2 - 2xy = a^2.$$

Par suite, $$xy = 2ar + 2r^2.$$

x et y sont donc les racines de l'équation

$$X^2 - (a + 2r)X + 2ar + 2r^2 = 0.$$

Les racines de cette équation conviennent si elles sont positives. Il suffit donc d'avoir

$$\rho = a^2 - 4ar - 4r^2 > 0 \quad \text{ou} \quad a > 2r(1 + \sqrt{2}),$$

car la somme et le produit des racines de l'équation en X sont positifs.

Si $a = 2r(1 + \sqrt{2})$, on trouve $x = y = r(2 + \sqrt{2})$. Le triangle rectangle est isocèle.

687. *Calculer les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse et la différence des deux côtés.*

On a le système $\quad x^2 + y^2 = a^2; \quad x - y = d.$

En posant $z = -y$, il devient

$$x^2 + z^2 = a^2; \quad x + z = d.$$

On en tire $$2xz = d^2 - a^2.$$

x et z sont donc les racines de l'équation

$$X^2 - dX + \frac{d^2 - a^2}{2} = 0. \tag{1}$$

On doit avoir $x > 0$, $z < 0$. Pour que le problème admette une solution, il faut donc que l'équation (1) admette deux racines de signes contraires; ce qui exige qu'on ait

$$d^2 - a^2 < 0 \quad \text{ou} \quad d < a.$$

688. *A un cercle de rayon* R, *on circonscrit un trapèze isocèle dont l'aire égale* a². *Calculer les côtés de ce trapèze.*

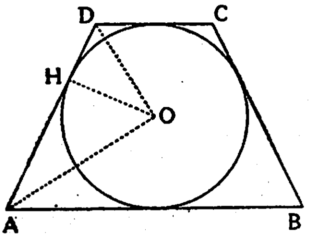


Fig. 54

Posons $\quad AB = 2x; \quad CD = 2y.$

On a

$$(x + y)2R = a^2.$$

Le triangle rectangle AOD donne

$$xy = R^2.$$

Par suite, x et y sont les racines de l'équation

$$X^2 - \frac{a^2}{2R}X + R^2 = 0 \quad \text{ou} \quad 2RX^2 - a^2X + 2R^3 = 0.$$

Les racines de cette équation doivent être positives. Il suffira d'avoir $\rho = a^4 - 16R^4 = (a^2 + 4R^2)(a + 2R)(a - 2R) > 0$ ou $a > 2R$, car la somme et le produit des racines sont positifs. On trouve

$$x \quad \text{ou} \quad y = \frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 16R^4}}{4R}.$$

Si $a = 2R$, on trouve $x = y = R$ et le trapèze devient le carré circonscrit au cercle.

689. *Un triangle rectangle est circonscrit à un cercle de rayon* R. *Calculer la longueur des côtés de l'angle droit, sachant que le périmètre mesure* 2p.

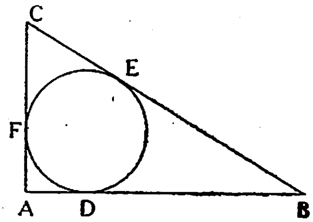


Fig. 55.

Posons AB $= x$, AC $= y$. On voit facilement que

$$x + y = p + R.$$

D'autre part, le double de l'aire du triangle est xy et aussi $2pR$. On a donc l'équation

$$xy = 2pR.$$

Par suite, x et y sont les racines de l'équation

$$X^2 - (p + R)X + 2pR = 0.$$

Discussion. — Les racines de cette équation ne conviennent au problème que si elles sont toutes deux supérieures à 2R. L'une des racines représentera x et l'autre y, et leur ensemble sera une solution du problème.

On doit avoir :

1° $\rho = (p + R)^2 - 8pR = p^2 - 6Rp + R^2 > 0$; ce qui exige

$$p < R(3 - \sqrt{8}) \quad \text{ou} \quad p > R(3 + \sqrt{8}).$$

2° $f(2R) = 2R^2 > 0$, ce qui a toujours lieu.

3° $2R < \dfrac{p + R}{2}$ ou $p > 3R$.

En résumé, le problème n'a de solution que si on a

$$p > R(3 + \sqrt{8}).$$

Si $p = R(3 + \sqrt{8})$, on a $x = y = R(2 + \sqrt{2})$.

690. *Inscrire dans un cercle de rayon* R *un triangle isocèle, connaissant la somme* l *de la base et de la hauteur correspondante.*

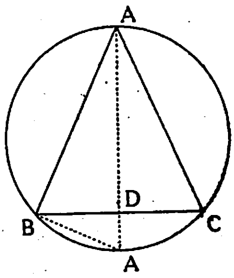


Fig. 56.

Posons $AD = x$ et $BC = 2y$.
Le triangle rectangle ABA' donne

$$y^2 = x(2R - x). \quad (1)$$

On a aussi $x + 2y = l.$ (2)

En éliminant y, on trouve

$$5x^2 - 2x(l + 4R) + l^2 = 0. \quad (3)$$

Discussion. — Les valeurs de x doivent être positives et inférieures à $2R$. De plus, l'équation (2) montre qu'on doit avoir aussi

$$0 < \frac{l - x}{2} < R \quad \text{ou} \quad l - 2R < x < l.$$

Les deux premières conditions ($0 < x < 2R$) sont vérifiées par toute racine de l'équation (3). En effet, l'équation (1) montre que ces racines rendent le produit $x(2R - x)$ positif. Par suite, elles sont comprises entre 0 et $2R$.

En résumé, à toute racine de l'équation (3) comprise entre $l - 2R$ et l correspond une solution du problème.

1° Le problème admet une solution, si on a :

$$f(l)f(l - 2R) = 4l(l - 2R) \times 4(l - 3R)^2 < 0 \quad \text{ou} \quad l < 2R.$$

2° Le problème aura deux solutions, si on a :

a) $\rho = (l + 4R)^2 - 5l^2 = [l(1 + \sqrt{5}) + 4R][l(1 - \sqrt{5}) + 4R] > 0;$
ce qui exige que l'on ait

$$l(1 - \sqrt{5}) + 4R > 0 \quad \text{ou} \quad l < R(1 + \sqrt{5}).$$

b) $f(l) = 4l(l - 2R) > 0$ ou $l > 2R.$

c) $f(l - 2R) = 4(l - 3R)^2 > 0$ ou $l \neq 3R.$

d) $l - 2R < \dfrac{l + 4R}{5} < l$ ou $R < l < \dfrac{7R}{2}.$

En résumé, on doit avoir

$$2R < l < R(1 + \sqrt{5}) \text{ avec } l \neq 3R.$$

3° Cas particuliers.

Si $l = 2R$, on a les deux solutions :

$$x' = 2R, \quad y' = 0; \quad x'' = \frac{2R}{5}, \quad y'' = \frac{4R}{5}.$$

Si $l = R(1 + \sqrt{5})$, on trouve

$$x' = x'' = \frac{R}{5}(5 + \sqrt{5}); \quad y' = y'' = \frac{2R\sqrt{5}}{5}.$$

Si $l = 3R$, on trouve $x' = y' = R$ et $x'' = \dfrac{9R}{5}$, $y'' = \dfrac{3R}{5}.$

691. *Calculer les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, connaissant la somme de chacun de ses côtés et de sa projection sur l'hypoténuse.*

Proposons-nous de calculer les projections des côtés de l'angle droit sur l'hypoténuse. Ces projections trouvées, on pourra calculer les côtés de l'angle droit.

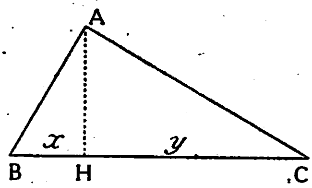


Fig. 57.

Soient $\quad AB + BH = m$

et $\quad AC + CH = p.$

Posons $BH = x$ et $CH = y.$

On a $\quad AB = \sqrt{x(x+y)} \quad$ et $\quad AC = \sqrt{y(x+y)}.$

Par suite, les équations du problème sont :

$$x + \sqrt{x(x+y)} = m \quad \text{ou} \quad \sqrt{x(x+y)} = m - x;$$
$$y + \sqrt{y(x+y)} = p \quad \text{ou} \quad \sqrt{y(x+y)} = p - y.$$

Ces équations montrent qu'on doit avoir

$$x < m \quad \text{et} \quad y < p.$$

Élevons au carré. On trouve

$$x(x+y) = (m-x)^2 \quad \text{et} \quad y(x+y) = (p-y)^2.$$

La seconde équation donne $\quad y = \dfrac{p^2}{x+2p}.$

En remplaçant y par sa valeur dans la première équation, on trouve

$$f(x) = 2mx^2 - x(m^2 - p^2 - 4mp) - 2m^2p = 0. \qquad (1)$$

Discussion. — On doit avoir

$$0 < x < m \quad \text{et} \quad 0 < y < p.$$

Remarquons qu'à toute valeur positive de x, la relation $y = \dfrac{p^2}{x+2p}$ fait correspondre pour y une valeur positive et inférieure à p.

En effet, d'abord $\dfrac{p^2}{x+2p}$ est positif; et ensuite $\dfrac{p^2}{x+2p}$ est inférieur à p, car on a

$$p - \frac{p^2}{x+2p} = \frac{p^2+px}{x+2p} > 0.$$

Le problème aura donc autant de solutions que l'équation (1) admet de racines comprises entre 0 et m. On a

$$f(0) = -2m^2p < 0 \quad \text{et} \quad f(m) = m(m+p)^2 > 0.$$

Comme le coefficient de x^2 dans l'équation (1) est positif, nous voyons que cette équation a toujours deux racines et qu'on a l'ordre suivant

$$x'' \qquad 0 \qquad x' \qquad m.$$

Le problème a donc toujours une solution et une seule.

692. *Calculer les quatre côtés d'un trapèze isocèle circonscrit à un cercle de rayon inconnu* R, *sachant que la somme des bases parallèles est* 2a *et que son aire égale celle d'un carré de côté* b.

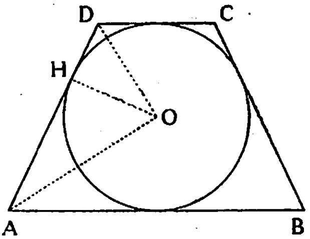


Fig. 58.

Soient $AB = 2x$ et $CD = 2y$. On a

$$x + y = a; \quad (1)$$

$$(x + y)2R = b^2. \quad (2)$$

Le triangle rectangle AOD donne en plus

$$xy = R^2. \quad (3)$$

Dans l'équation (2) remplaçons $x + y$ par a.

On trouve ainsi $2aR = b^2$ et l'équation (3) devient après substitution

$$xy = \frac{b^4}{4a^2}.$$

On voit que x et y sont les racines de l'équation

$$4a^2X^2 - 4a^3X + b^4 = 0. \quad (4)$$

Cette équation admet deux racines positives, si on a

$$\rho = 4a^6 - 4a^2b^4 = 4a^2(a^4 - b^4) > 0 \quad \text{ou} \quad a > b,$$

car la somme et le produit des racines sont positifs. De plus, elles sont inférieures à a, puisque leur somme est a. Par suite :

1° Si $a > b$, le problème admet une solution. Les bases sont

$$2x = \frac{a^2 + \sqrt{a^4 - b^4}}{a}; \quad 2y = \frac{a^2 - \sqrt{a^4 - b^4}}{a};$$

et les côtés obliques, $x + y = a$.

2° Si $a = b$, on trouve $2x = 2y = a$. Le trapèze est alors un carré circonscrit à un cercle de rayon $\frac{a}{2}$.

693. *Calculer les trois côtés d'un triangle rectangle, connaissant son périmètre* 2p *et son aire* a².

Soient x et y les côtés de l'angle droit et z l'hypoténuse. Les équations du problème sont :

$$x + y + z = 2p; \quad xy = 2a^2; \quad x^2 + y^2 = z^2.$$

La dernière équation peut s'écrire

$$(x + y)^2 - 2xy = z^2.$$

En y remplaçant $x + y$ et xy, il vient

$$pz - p^2 + a^2 = 0; \quad \text{d'où} \quad z = \frac{p^2 - a^2}{p}.$$

a) z doit être positif; ce qui exige $p > a$.

b) z doit être inférieur à p; ce qui donne $p - \frac{p^2 - a^2}{p} > 0$ ou $a^2 > 0$; condition toujours remplie.

On trouve ensuite $x + y = 2p - z = \dfrac{p^2 + a^2}{p}$.

Et comme $xy = 2a^2$, x et y seront les racines de l'équation

$$pX^2 - (p^2 + a^2)X + 2a^2p = 0.$$

Les racines de cette équation ne conviennent que si elles sont positives et plus petites que p. Mais le produit et la somme des racines sont positifs. Le problème aura donc une solution, si on a :

1° $\rho = p^4 - 6a^2p^2 + a^4 > 0$, ou

$[p+a(\sqrt{2}-1)][p-a(\sqrt{2}-1)][p+a(\sqrt{2}+1)][p-a(\sqrt{2}+1)]>0$,

ce qui exige $p < a(\sqrt{2} - 1)$ ou $p > a(\sqrt{2} + 1)$.

2° $f(p) = a^2p > 0$; condition toujours vérifiée.

3° $p > \dfrac{p^2 + a^2}{2p}$ ou $p^2 - a^2 > 0$ ou $p > a$.

En résumé,

a) si $p > a(\sqrt{2} + 1)$, le problème admet une solution;

b) si $p = a(\sqrt{2} + 1)$, on trouve

$$x = y = \frac{p^2 + a^2}{2p} = a\sqrt{2};\quad z = 2a.$$

694. *Calculer les trois côtés d'un triangle rectangle, connaissant la somme* l *des deux côtés de l'angle droit et la hauteur* h *relative à l'hypoténuse.*

Soient x et y les côtés de l'angle droit, z l'hypoténuse. Les équations du problème sont :

$$x + y = l;\quad xy = hz;\quad x^2 + y^2 = z^2.$$

La dernière équation peut s'écrire

$$(x + y)^2 - 2xy = z^2 \quad \text{ou} \quad z^2 + 2hz - l^2 = 0.$$

On voit immédiatement que cette équation admet toujours deux racines de signes contraires. La négative doit être écartée. La positive convient si elle est supérieure à $2h$ et inférieure à l.

A cet effet, il suffit d'avoir

$$f(2h) = 8h^2 - l^2 < 0 \quad \text{ou} \quad h < \frac{l\sqrt{2}}{4}, \tag{1}$$

car $f(l) = 2hl$ est toujours positif.

Supposons que la condition (1) soit remplie. On aura

$$z = -h + \sqrt{h^2 + l^2}.$$

On connaît alors $x + y$ et xy. Par suite, x et y seront les racines de l'équation

$$f(X) = X^2 - lX - h^2 + h\sqrt{h^2 + l^2} = 0.$$

Le problème n'a de solution que si cette équation admet deux racines comprises entre h et l. On doit donc avoir :

1° $\rho = l^2 + 4h^2 - 4h\sqrt{h^2 + l^2} > 0$ ou $l^2 + 4h^2 > 4h\sqrt{h^2 + l^2}$.

Les deux membres de cette inégalité sont positifs. On peut donc élever au carré. Après réduction, on retrouve la condition (1), qu'on suppose remplie.

2° $f(h) = h\sqrt{h^2 + l^2} - hl > 0$; condition évidemment vérifiée.

3° $f(l) = h\sqrt{h^2 + l^2} - h^2 > 0$; condition évidemment vérifiée.

4° $h < \frac{l}{2}$; condition vérifiée à cause de (1).

5° $l > \frac{l}{2}$; condition évidemment vérifiée.

On voit que le problème admet une solution quand la condition (1) est satisfaite.

Si $h = \frac{l\sqrt{2}}{4}$, on trouve $x = y = \frac{l}{2}$; $z = \frac{l\sqrt{2}}{2}$.

On a affaire, dans ce cas particulier, à un triangle rectangle isocèle.

695. *Calculer les trois côtés d'un triangle rectangle, connaissant la différence* a *entre les côtés de l'angle droit et la différence* b *entre l'hypoténuse et la hauteur correspondante.*

Soient x et y les côtés de l'angle droit, z l'hypoténuse et h la hauteur correspondante. On a le système

$$x - y = a; \quad z - h = b; \quad x^2 + y^2 = z^2; \quad xy = zh.$$

Éliminons h. On trouve le système

$$x - y = a; \quad x^2 + y^2 = z^2; \quad xy = z(z - b).$$

La deuxième équation peut s'écrire

$$(x - y)^2 + 2xy = z^2 \quad \text{ou} \quad z^2 - 2bz + a^2 = 0. \tag{1}$$

Pour que cette équation admette des racines, on doit avoir

$$b^2 - a^2 > 0 \quad \text{ou} \quad b > a.$$

Cette condition remplie, l'équation (1) aura deux racines positives, car la somme et le produit des racines sont positifs.

D'autre part, on a le système

$$x + (-y) = a; \quad x(-y) = z(b - z).$$

On voit que x et $-y$ sont les racines de l'équation

$$X^2 - aX + z(b - z) = 0.$$

Cette équation donnera pour x et $-y$ des valeurs acceptables, si elle admet deux racines de signes contraires; pour cela on doit avoir

$$z(b - z) < 0.$$

Comme nous supposons $b > a$, on a $z > 0$ et l'inégalité précédente sera vérifiée, si on a $z > b$.

Dès lors le problème admet autant de solutions que l'équation (1) admet de racines supérieures à b. Or, en remplaçant z par b dans le premier membre de cette équation, on trouve $a^2 - b^2$, qui est négatif, puisque nous supposons $b > a$. Donc b est compris entre les racines de l'équation (1) et la plus grande seule est acceptable.

En résumé :

1° Si $b > a$, le problème admet une solution :

$$z = b + \sqrt{b^2 - a^2}; \quad x = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4z(b - z)}}{2};$$

$$y = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4z(b - z)}}{2}.$$

2° Si $b = a$, on trouve

$$z = a; \quad x = a; \quad y = 0.$$

Le triangle se réduit à une droite.

696. *Trouver quatre nombres en proportion, connaissant la somme* a *des extrêmes, la somme* b *des moyens et la somme* c⁴ *des quatrièmes puissances des termes.*

Soit $\dfrac{x}{y} = \dfrac{z}{t}$ la proportion demandée. On a le système

$$xt = yz; \quad x + t = a; \quad y + z = b; \quad x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = c^4.$$

Au premier membre de la dernière équation, ajoutons $2x^2t^2$ et retranchons l'expression égale $2y^2z^2$. L'équation devient successivement

$$(x^2 + t^2)^2 + (y^2 - z^2)^2 = c^4$$

$$(a^2 - 2xt)^2 + b^2(b^2 - 4yz) = c^4,$$

ou, en remplaçant yz par son égal xt,

$$4(xt)^2 - 4(a^2 + b^2)(xt) + a^4 + b^4 - c^4 = 0.$$

Le réalisant de cette équation est positif et vaut $4c^4 + 8a^2b^2$. L'équation admet donc deux racines qui sont

$$xt = yz = \frac{2(a^2 + b^2) \pm \sqrt{4c^4 + 8a^2b^2}}{4}$$

et que nous représentons, la plus petite par k'', et la plus grande par k'.

1° Soit $xt = yz = k'' = \dfrac{a^2 + b^2 - \sqrt{c^4 + 2a^2b^2}}{2}$.

Le système $x + t = a$, $xt = k''$ montre que x et t sont les racines de l'équation $\quad X^2 - aX + k'' = 0. \qquad (1)$

De même y et z sont les racines de l'équation

$$X^2 - bX + k'' = 0. \qquad (2)$$

L'équation (1) admet deux racines, si on a

$$a^2 - 4k'' \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad \sqrt{4c^4 + 8a^2b^2} \geqslant a^2 + 2b^2,$$

ou $\quad 4c^4 + 8a^2b^2 \geqslant (a^2 + 2b^2)^2, \quad$ ou $\quad 4c^4 \geqslant (a^2 - 2b^2)^2. \qquad (3)$

L'équation (2) admet deux racines, si on a

$$b^2 - 4k'' \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad \sqrt{4c^4 + 8a^2b^2} \geqslant 2a^2 + b^2,$$

ou $\quad 4c^4 + 8a^2b^2 \geqslant (2a^2 + b^2)^2 \quad$ ou $\quad 4c^4 \geqslant (2a^2 - b^2)^2. \qquad (4)$

Quand les relations (3) et (4) sont satisfaites, l'équation (1) donne deux systèmes de valeurs pour x et t, et l'équation (2), deux systèmes de valeurs pour y et z. Le problème admet donc, dans ce cas, quatre solutions. Les quatre proportions trouvées se ramènent d'ailleurs à une seule, en permutant les extrêmes ou les moyens.

2° Soit $xt = yz = k' = \dfrac{a^2 + b^2 + \sqrt{c^4 + 2a^2b^2}}{2}$.

x et t sont alors les racines de l'équation

$$X^2 - aX + k' = 0.$$

y et z sont les racines de l'équation

$$X^2 - bX + k' = 0.$$

En calculant les réalisants de ces équations, on voit qu'ils sont négatifs. A $xt = yz = k'$ ne correspond donc aucune solution du problème.

CHAPITRE XXII

Progressions.

§ I. — PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES.

697. *Trouver le* 20e *terme des progressions arithmétiques suivantes, puis calculer la somme des* 20 *premiers termes.*

1° 2, 6, 10, 14, ... Rép. $l = 78$; $S_{20} = 800$.
2° -5; $-3{,}5$; -2; $-0{,}5$; ... » $l = 23{,}5$; $S_{20} = 185$.

698. *Trouver le* n^e^ *terme des progressions arithmétiques suivantes, puis calculer la somme des* n *premiers termes.*

1° 4, 6, 8, 10, ...
Rép. $l = 2n + 2$; $S_n = n(n + 3)$.

2° 1; $\dfrac{n-1}{n}$; $\dfrac{n-2}{n}$; $\dfrac{n-3}{n}$; ...

Rép. $l = \dfrac{1}{n}$; $S_n = \dfrac{n+1}{2}$.

3° 17, 14, 11, 8, ...

Rép. $l = 20 - 3n$; $S_n = \dfrac{n}{2}(37 - 3n)$.

4° $\dfrac{n^2-1}{n}$; n; $\dfrac{n^2+1}{n}$; $\dfrac{n^2+2}{n}$; ...

Rép. $l = \dfrac{n^2+n-2}{n}$; $S_n = \dfrac{2n^2+n-3}{2}$.

699. *Dans une progression arithmétique on donne :*

1° a = 4, r = 2, n = 8; *trouver* l *et* S.
Rép. $l = 18$; $S = 88$.

2° r = 4, l = 39, n = 10; *trouver* a *et* S.
Rép. $a = 3$; $S = 210$.

3° a = 3, l = 21, S = 120; *trouver* r *et* n.
Rép. $r = 2$; $n = 10$.

4° l = 199, n = 100, S = 10 000; *trouver* a *et* r.
Rép. $a = 1$; $r = 2$.

5° a = 23, r = — 2, S = 140; *trouver* l *et* n.
On a le système

$$l = 23 - 2(n-1);\quad 140 = (23+l)\frac{n}{2}.$$

On élimine l et on obtient l'équation

$$n^2 - 24n + 140 = 0;\quad \text{d'où}\quad n' = 14;\quad n'' = 10.$$

Rép. $n' = 14$; $l' = -3$; $n'' = 10$; $l'' = 5$.

6° r = 2, n = 13, S = 195; *trouver* a *et* l.
Rép. $a = 3$; $l = 27$.

7° l = 20, r = 5, S = 20; *trouver* a *et* n.
On a le système

$$20 = a + 5(n-1);\quad 20 = (a+20)\frac{n}{2}.$$

L'élimination de a conduit à l'équation

$$n^2 - 9n + 8 = 0;\quad \text{d'où}\quad n' = 8;\quad n'' = 1.$$

Rép. $n' = 8$; $a' = -15$; $n'' = 1$; $a'' = 20$.

8° a = — 7, r = 3, S = 430; *trouver* l *et* n.
On a le système

$$l = -7 + 3(n-1);\quad 430 = (-7+l)\frac{n}{2}.$$

En éliminant l, on obtient l'équation

$$3n^2 - 17n - 860 = 0;\quad \text{d'où}\quad n' = 20;\quad n'' = -\frac{43}{3}\ \text{(à écarter).}$$

Rép. $n = 20$; $l = 50$.

700. *Trouver cinq termes consécutifs de la progression*

$$\frac{3}{2};\ \frac{9}{2};\ \frac{15}{2};\ \frac{21}{2};\ \ldots$$

ayant pour somme 187,5.

Soit x le premier de ces termes. Le dernier sera $x + 4 \times 3$ et on aura l'équation

$$187\frac{1}{2} = \frac{5}{2}(2x + 12); \quad \text{d'où} \quad x = \frac{63}{2}.$$

Rép. $\frac{63}{2}, \frac{69}{2}, \frac{75}{2}, \frac{81}{2}, \frac{87}{2}.$

701. *Former une progression arithmétique dont le* 4e *terme soit* 40 *et le* 12e, 52.

On a le système

$$40 = a + 3r; \quad 52 = a + 11r.$$

Rép. $r = \frac{3}{2}; \; a = 35\frac{1}{2}.$

702. *Dans une progression arithmétique, la somme du* 8e *et du* 14e *terme est égale à* 50 *et le* 5e *terme est* 13. *Déterminer cette progression.*

On a le système

$$50 = (a + 7r) + (a + 13r); \quad 13 = a + 4r.$$

Rép. $a = 5; \; r = 2.$

703. *Insérer* 5 *moyens arithmétiques entre* 1 *et* 9.

Si r est la raison de la progression à former, on a

$$9 = 1 + 6r; \quad \text{d'où} \quad r = \frac{4}{3}.$$

Rép. $1, \frac{7}{3}, \frac{11}{3}, 5, \frac{19}{3}, \frac{23}{3}, 9.$

704. *Insérer* 8 *moyens arithmétiques entre* -2 *et* $\frac{1}{4}$.

Rép. $-2, -\frac{7}{4}, -\frac{6}{4}, -\frac{5}{4}, -1, -\frac{3}{4}, -\frac{2}{4}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}.$

705. *Trouver une progression arithmétique dont font partie les nombres* 3, 7 *et* 13.

Soient $m - 1$ le nombre des moyens entre 3 et 7 et $n - 1$ le nombre des moyens entre 3 et 13; on aura

$$7 = 3 + mr; \quad 13 = 3 + nr.$$

D'où

$$\frac{m}{n} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Si on prend $m = 2$ et $n = 5$, on trouve

$$7 = 3 + 2r; \quad \text{d'où} \quad r = 2.$$

Rép. 3, 5, 7, 9, 11, 13.

706. *Quelle est la condition pour que la somme de deux termes quelconques d'une progression arithmétique fasse partie de la même progression?*

Soient a le premier terme et r la raison de la progression. Considérons le $(m+1)^e$ et le $(n+1)^e$ terme. Leur somme est $2a+(m+n)r$. Elle fera partie de la même progression, s'il existe un nombre entier k, tel qu'on ait

$$2a+(m+n)r = a+kr \quad \text{ou} \quad a = (k-m-n)r.$$

On voit que a doit être un multiple de r.

707. *Dans une progression arithmétique de* 10 *termes, la somme des termes est* 245 *et la différence des extrêmes est* 45. *Quelle est cette progression?*

On a le système

$$245 = 5(a+l); \quad l-a = 45.$$

Ce système donne $a = 2; \quad l = 47.$

On a aussi

$$47 = 2+9r; \quad \text{d'où} \quad r = 5.$$

Rép. 2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47.

708. *La somme des* n *premiers nombres entiers est* 496. *Trouver* n.

On a l'équation

$$496 = \frac{n(n+1)}{2}; \quad \text{d'où} \quad n' = 31, \quad n'' = -32 \text{ (à écarter).}$$

Rép. $n = 31$.

709. *Trouver* x *nombres entiers consécutifs, sachant que le premier est* 8 *et que leur somme est* x^3.

On a $$[16+(x-1)]\frac{x}{2} = x^3.$$

Écartons la racine $x = 0$. Il reste l'équation

$$2x^2 - x - 15 = 0; \quad \text{d'où} \quad x' = 3; \quad x'' = -2{,}5 \text{ (à écarter).}$$

Rép. 8, 9, 10.

710. *La somme de trois nombres en progression arithmétique est* 33 *et leur produit est* 1287. *Quels sont ces nombres?*

Soient $x-r$, x et $x+r$ les trois nombres. Comme leur somme est 33, on a $x = 11$.

L'équation $$(x-r)\,x(x+r) = 1287$$

donne, en remplaçant x par 11,

$$11(121-r^2) = 1287; \quad \text{d'où} \quad r = \pm 2.$$

Rép. 9, 11, 13.

711. *Le produit de cinq nombres en progression arithmétique est* 1155 *et leur somme est* 15. *Quels sont ces nombres?*

Soient $x-2r$, $x-r$, x, $x+r$, $x+2r$ les cinq nombres cherchés.

On a le système

$$5x = 15; \quad x(x^2 - r^2)(x^2 - 4r^2) = 1155.$$

Ce système donne : $x = 3, \quad r = \pm 4.$

Rép. $-5, -1, 3, 7, 11.$

712. *La somme de cinq nombres entiers en progression arithmétique est* 45; *celle de leurs inverses est* $\frac{137}{180}$. *Quels sont ces nombres?*

La somme 45 est égale au quintuple du terme milieu qui vaut donc 9.

Soient $9 - 2x, \quad 9 - x, \quad 9, \quad 9 + x, \quad 9 + 2x$ les nombres cherchés. On a

$$\frac{1}{9 - 2x} + \frac{1}{9 - x} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9 + x} + \frac{1}{9 + 2x} = \frac{137}{180},$$

ou

$$\frac{2}{81 - 4x^2} + \frac{2}{81 - x^2} = \frac{13}{180}.$$

Cette équation conduit à l'équation bicarrée

$$52x^4 - 3465x^2 + 26973 = 0,$$

dont les solutions entières sont $x = \pm 3.$

Rép. 3, 6, 9, 12, 15.

713. *La somme de quatre nombres rationnels en progression arithmétique est* 24 *et leur produit est* 945. *Quels sont ces nombres?*

Soient $a - 3r, \quad a - r, \quad a + r, \quad a + 3r$ les nombres cherchés. On a

$$4a = 24; \quad \text{d'où} \quad a = 6.$$

L'équation $(36 - 9r^2)(36 - r^2) = 945$

donne $r^4 - 40r^2 + 39 = 0.$

Les solutions rationnelles de cette équation sont $r = \pm 1.$

Rép. 3, 5, 7, 9.

714. *Calculer* x *pour que les carrés de* $1 + x, \quad q + x, \quad q^2 + x$ *soient trois termes consécutifs d'une progression arithmétique*; q *est un nombre donné.*

On doit avoir $2(q + x)^2 = (1 + x)^2 + (q^2 + x)^2,$

ou $2(q - 1)^2 x = -(q^2 - 1)^2.$

Si $q \neq 1$, on trouve $x = -\frac{1}{2}(q + 1)^2.$

Si $q = 1$, les trois nombres donnés sont égaux.

715. *Si* $\frac{1}{a + b}, \quad \frac{1}{a + c}, \quad \frac{1}{b + c}$ *sont trois termes consécutifs d'une progression arithmétique, il en sera de même de* a^2, b^2, c^2.

Par hypothèse, on a

$$\frac{2}{a+c} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} \quad \text{ou} \quad 2(a+b)(b+c) = (a+c)(a+2b+c),$$

ou

$$2b^2 = a^2 + c^2.$$

Cette égalité montre que a^2, b^2, c^2 sont trois termes consécutifs d'une progression arithmétique.

716. *Si* a, b, c *sont trois termes consécutifs d'une progression arithmétique, il en sera de même de* $a^2 + ab + b^2$, $c^2 + ac + a^2$, $b^2 + bc + c^2$.

Posons $a = b - r$ et $c = b + r$; puis, remplaçons a et c par leur valeur dans l'égalité à démontrer

$$2(c^2 + ac + a^2) = (a^2 + ab + b^2) + (b^2 + bc + c^2).$$

En effectuant les calculs, on voit que chaque membre se réduit à

$$6b^2 + 2r^2.$$

717. *Si* a, b, c, d *sont quatre termes consécutifs d'une progression arithmétique, l'expression* $abcd + (b - c)^4$ *est un carré.*

Posons $a = x - 3y$, $b = x - y$, $c = x + y$, $d = x + 3y$.

L'expression proposée devient après substitution

$$(x^2 - y^2)(x^2 - 9y^2) + 16y^4 = x^4 - 10x^2y^2 + 25y^4 = (x^2 - 5y^2)^2.$$

718. *Trouver cinq termes consécutifs d'une progression arithmétique, connaissant le produit* p *des deux extrêmes et la somme* s *des trois autres.*

Soient $a - 2r$, $a - r$, a, $a + r$, $a + 2r$ les cinq termes cherchés. On a le système

$$(a - r) + a + (a + r) = s, \quad \text{ou} \quad 3a = s;$$
$$(a - 2r)(a + 2r) = p.$$

Ce système donne

$$a = \frac{s}{3}, \quad \text{puis} \quad r^2 = \frac{1}{4}(a^2 - p) = \frac{1}{36}(s^2 - 9p).$$

Le problème ne sera possible que si on a $s^2 - 9p \geqslant 0$. Si cette condition est réalisée, on trouvera pour r deux valeurs opposées, mais qui ne donnent qu'une seule progression. On prendra donc

$$r = \frac{1}{6}\sqrt{s^2 - 9p}.$$

719. *Trouver trois termes consécutifs d'une progression arithmétique, connaissant leur somme* a *et la somme* b^2 *de leurs carrés.*

Soient $x - y$, x, $x + y$ les nombres cherchés. On a le système

$$(x - y) + x + (x + y) = a \quad \text{ou} \quad x = \frac{a}{3};$$

$$(x - y)^2 + x^2 + (x + y)^2 = b^2 \quad \text{ou} \quad 3x^2 + 2y^2 = b^2.$$

En remplaçant x par sa valeur dans la seconde équation, on trouve

$$y^2 = \frac{1}{6}(3b^2 - a^2).$$

Le problème aura une solution quand

$$3b^2 - a^2 \geqslant 0,$$

les deux valeurs opposées de y fournissant deux progressions identiques, à part l'ordre des termes.

720. *Trouver quatre termes consécutifs d'une progression arithmétique, connaissant leur produit* p *et la somme* s *des deux moyens.*

Soient $x - 3y$, $x - y$, $x + y$, $x + 3y$ les quatre termes cherchés. On a

$$(x - y) + (x + y) = s; \quad \text{d'où} \quad x = \frac{s}{2}.$$

Le produit des quatre termes est

$$(x^2 - 9y^2)(x^2 - y^2) = p.$$

En remplaçant x par sa valeur, on obtient l'équation bicarrée

$$9y^4 - 10\frac{s^2}{4}y^2 + \frac{s^4}{16} - p = 0. \tag{1}$$

Deux valeurs opposées de y fournissent deux progressions identiques, à part l'ordre des termes. Le nombre des solutions différentes du problème est donc égal au nombre de valeurs positives de y^2, fournies par l'équation (1).

1° Le problème aura une solution, si on a

$$\frac{s^4}{16} - p < 0 \quad \text{ou} \quad p > \frac{s^4}{16}.$$

2° Le problème aura deux solutions, si on a :

$$\rho = \frac{25}{16}s^4 - \frac{9}{16}s^4 + 9p > 0 \quad \text{ou} \quad p > -\frac{s^4}{9};$$

$$\mathrm{P} = \frac{s^4}{16} - p > 0 \quad \text{ou} \quad p < \frac{s^4}{16};$$

$$\mathrm{S} = \frac{5s^2}{18} > 0; \quad \text{condition toujours réalisée.}$$

En résumé, on doit avoir

$$-\frac{s^4}{9} < p < \frac{s^4}{16}.$$

3° Cas particuliers.

a) $p = -\dfrac{s^4}{9}$; on trouve $y^2 = \dfrac{5s^2}{36}$; d'où $y = \dfrac{s}{6}\sqrt{5}$.

b) $p = \dfrac{s^4}{16}$; on trouve $y^2 = 0$ ou $y^2 = \dfrac{5}{18}s^2$.

721. *Dans les équations bicarrées suivantes, déterminer* m, *pour que les racines soient en progression arithmétique.*

1° $x^4 - (3m + 1)x^2 + m^2 = 0$. — Les racines d'une équation bicarrée sont opposées deux à deux. Soient

$$-a, \quad -b, \quad +b, \quad +a,$$

les racines de l'équation bicarrée proposée, rangées par ordre de grandeur croissante. Elles forment une progression arithmétique, si les trois différences

$$-b-(-a) = a-b, \quad b-(-b) = 2b, \quad a-b$$

sont égales. Pour cela, il suffit d'avoir

$$a - b = 2b \quad \text{ou} \quad a = 3b.$$

D'autre part a^2 et b^2 doivent être les racines de l'équation

$$y^2 - (3m + 1)y + m^2 = 0.$$

On a donc $\qquad a^2 + b^2 = 3m + 1, \quad a^2b^2 = m^2,$

ou, en remplaçant a par sa valeur $3b$,

$$10b^2 = 3m + 1, \quad 9b^4 = m^2.$$

En éliminant b^2, il vient

$$9(3m + 1)^2 = 100m^2 \quad \text{ou} \quad 3(3m + 1) = \pm 10m.$$

D'où $\qquad m' = 3, \quad m'' = -\frac{3}{19}.$

Rép. $m' = 3$; racines : $\pm 1, \ \pm 3$.

$$m'' = -\frac{3}{19}; \quad \text{racines} : \pm \frac{1}{19}\sqrt{19}, \quad \pm\frac{3}{19}\sqrt{19}.$$

2° $3x^4 - (4m + 2)x^2 + m + 1 = 0$.

En raisonnant comme dans l'exercice précédent, on trouve

$$m' = 2; \quad m'' = -\frac{11}{12}.$$

A $m' = 2$ correspondent les racines $\pm \sqrt{3}, \quad \pm \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Pour $m'' = -\frac{11}{12}$, l'équation bicarrée n'a pas de racines.

722. *Quelle relation existe entre* p *et* q *lorsque les racines de l'équation* $x^4 + px^2 + q = 0$ *sont en progression arithmétique.*

En raisonnant comme au numéro précédent, on trouve que l'on doit avoir

$$a^2 + b^2 = -p; \quad a^2b^2 = q; \quad a^2 = 9b^2.$$

L'élimination de a^2 et b^2 donne la relation

$$9p^2 = 100q.$$

§ II. — PROGRESSIONS GÉOMÉTRIQUES.

723. *Dans une progression géométrique, on donne :*

1° $a = 3$; $q = 4$; $n = 5$; *trouver* l *et* S.

Rép. $l = 768$; $S = 1023$.

2° $l = 32$· $q = -2$; $n = 5$; *trouver* a *et* S.
Rép. $a = 2$; $S = 22$.

3° $l = \frac{3}{64}$; $a = 12$; $n = 9$; *trouver* q *et* S.
La formule $l = aq^{n-1}$ donne $q = \pm 0,5$.
La formule $S = \frac{lq - a}{q - 1}$ donne les valeurs correspondantes de S.

Rép. $q = \frac{1}{2}$, $S = \frac{1533}{64}$; $q = -\frac{1}{2}$, $S = \frac{513}{64}$.

4° $n = 6$, $q = \frac{1}{4}$, $S = 2730$; *trouver* a *et* l.
La formule $S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$ donne $a = 2048$.
La formule $l = aq^{n-1}$ donne ensuite $l = 2$.

5° $l = \frac{32}{81}$, $a = 3$, $q = \frac{2}{3}$; *trouver* n *et* S.
La formule $l = aq^{n-1}$ donne $n = 6$.
La formule $S = \frac{lq - a}{q - 1}$ donne ensuite $S = \frac{665}{81}$.

724. *Trouver la somme :*

1° *des* 8 *premiers termes de la progression* 2, — 4, 8, ...
La raison de cette progression est -2. On a

$$S_8 = \frac{2[(-2)^8 - 1]}{-2 - 1} = -170.$$

2° *des* 6 *premiers termes de la progression* $-\frac{8}{25}$; $\frac{4}{5}$; -2; ...
Rép. $S_6 = 22,23$.

3° *des* 8 *premiers termes de la progression* $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 1; $\frac{3}{\sqrt{3}}$; ...

Rép. $S_8 = \frac{40}{3}(3 + \sqrt{3})$.

4° *des* n *premiers termes de la suite* $a^2 + 2b$, $a^4 + 4b$, $a^6 + 6b$, ...
En considérant la progression géométrique a^2, a^4, a^6, ..., on a

$$S_n = \frac{a^2(a^{2n} - 1)}{a^2 - 1}.$$

En considérant la progression arithmétique $2b$, $4b$, $6b$, ..., on a

$$S_n = bn(n + 1).$$

Rép. $\frac{a^2(a^{2n} - 1)}{a^2 - 1} + bn(n + 1)$.

5° *des* n *premiers termes de la suite* 2n — 1, 4n + 2, 6n — 4, ...
En considérant la progression arithmétique $2n$, $4n$, $6n$, ..., on a

$$S_n = n^2(n+1).$$

En considérant la progression géométrique — 1, 2, — 4, ..., on a

$$S_n = \frac{1}{3}[(-2)^n - 1].$$

Rép. $n^2(n+1) + \frac{1}{3}[(-2)^n - 1)$.

725. *Dans une progression géométrique le premier et le troisième terme sont* 8 *et* 18. *Trouver le cinquième terme.*

La formule $18 = 8q^2$ donne $q = \pm\frac{3}{2}$.

Le cinquième terme vaudra $8\left(\pm\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{2}$.

726. *Dans une progression géométrique, le premier terme est* 32 *et le produit du* 3e *par le* 6e *est égal à* 17496. *Calculer le* 8e *terme.*

On a $$aq^2 \times aq^5 = 17496.$$

Par suite, $$aq^7 = \frac{17496}{32} = \frac{2187}{4}.$$

727. *Insérer* 1 *ou* 3 *moyens géométriques entre* 2 *et* 8.

a) Un moyen. — L'équation $8 = 2q^2$ donne $q = \pm 2$.
Rép. 2, 4, 8 ou 2, — 4, 8.
b) Trois moyens. — L'équation $8 = 2q^4$ donne $q = \pm\sqrt{2}$.
Rép. 2, $2\sqrt{2}$, 4, $4\sqrt{2}$, 8 ou 2, $-2\sqrt{2}$, 4, $-4\sqrt{2}$, 8.

728. *Former une progression géométrique dont font partie les nombres* 2, 10, 250.

On a $$\left(\frac{10}{2}\right)^3 = \left(\frac{250}{2}\right)^1.$$

Cette égalité montre que la progression la plus simple qui répond à la question n'a qu'un terme avant 10. Sa raison est donc égale à 5.
Rép. 2, 10, 50, 250.

729. *Trouver la somme des carrés et la somme des cubes des termes d'une progression géométrique limitée.*

Considérons la progression géométrique limitée

$$a,\quad b,\quad c,\quad \ldots,\quad k,\quad l.$$

Soient q sa raison et n le nombre de ses termes.
Somme des carrés des termes. — On a :

$$S_2 = a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + k^2 + l^2$$
$$S_2q^2 = a^2q^2 + b^2q^2 + c^2q^2 + \ldots + k^2q^2 + l^2q^2.$$

Par suite, $S_2(q^2 - 1) = l^2q^2 - a^2$ et $S_2 = \dfrac{l^2q^2 - a^2}{q^2 - 1}$.

Somme des cubes des termes. — On trouve d'une façon analogue

$$S_3 = \frac{l^3q^3 - a^3}{q^3 - 1}.$$

730. *La somme de trois nombres en progression géométrique est* 21 *et la somme de leurs carrés est* 189. *Trouver ces nombres.*

Soient x, xy, xy^2 les trois nombres. On a le système

$$(1) \qquad x(1 + y + y^2) = 21; \quad x^2(1 + y^2 + y^4) = 189. \qquad (2)$$

Divisant (2) par (1), on trouve

$$x(1 - y + y^2) = 9. \qquad (3)$$

L'élimination de x entre (1) et (3) conduit à l'équation

$$2y^2 - 5y + 2 = 0,$$

qui admet pour racines 2 et $0{,}5$.

Rép. 3, 6, 12.

731. *Trouver trois termes consécutifs d'une progression géométrique, connaissant leur somme* $\dfrac{26}{3}$ *et la somme* $\dfrac{13}{6}$ *de leurs inverses.*

Soient x le premier des trois termes, q la raison de la progression. On a le système

$$x(1 + q + q^2) = \frac{26}{3}$$

$$\frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2}\right) = \frac{13}{6} \quad \text{ou} \quad 1 + q + q^2 = \frac{13q^2x}{6}.$$

En éliminant $1 + q + q^2$ on trouve

$$q^2x^2 = 4; \quad \text{d'où} \quad qx = \pm 2.$$

a) $qx = 2$. — En éliminant x entre les équations

$$qx = 2 \quad \text{et} \quad x(1 + q + q^2) = \frac{26}{3},$$

on trouve $3q^2 - 10q + 3 = 0$; d'où $q' = 3$; $q'' = \dfrac{1}{3}$.

b) $qx = -2$. — On trouve

$$3q^2 + 16q + 3 = 0; \quad \text{d'où} \quad q = \frac{-8 \pm \sqrt{55}}{3}.$$

Rép. $\dfrac{2}{3}$, 2, 6 et $\dfrac{2(8 - \sqrt{55})}{3}$, -2, $\dfrac{2(8 + \sqrt{55})}{3}$.

732. *Une progression géométrique a* 5 *termes. La raison est égale au quart du premier terme, et la somme des deux premiers est* 24. *Trouver les cinq termes.*

Soit x le premier terme. La raison est $\frac{x}{4}$ et le second terme $\frac{x^2}{4}$. On aura

$$x + \frac{x^2}{4} = 24 \quad \text{ou} \quad x^2 + 4x - 96 = 0.$$

Par suite, $x' = 8; \quad x'' = -12.$

Rép. 8, 16, 32, 64, 128; — 12, 36, — 108, 324, — 972.

733. *La somme des termes d'une progression géométrique de cinq termes est* 484; *celle des termes de rang pair est* 120. *Trouver la progression.*

Soient x le terme moyen et q la raison. On a le système

$$x\left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q} + 1 + q + q^2\right) = 484; \quad x\left(q + \frac{1}{q}\right) = 120.$$

La seconde équation donne

$$q + \frac{1}{q} = \frac{120}{x} \quad \text{et} \quad q^2 + \frac{1}{q^2} = \frac{120^2}{x^2} - 2.$$

En remplaçant dans la première équation, on trouve

$$x^2 + 364x - 14400 = 0; \quad \text{d'où} \quad x' = 36, \quad x'' = -400.$$

Pour $x' = 36$, on trouve $q = 3$ ou $\frac{1}{3}$; $x'' = -400$ ne donne pas de valeur pour q.

Rép. 4, 12, 36, 108, 324.

734. *Si* a, b, c, d *sont quatre termes consécutifs d'une progression géométrique, montrer que* $(b - c)^2 = ac + bd - 2ad.$

En effet, la relation à démontrer peut s'écrire

$$b^2 - 2bc + c^2 = ac + bd - 2ad$$

et on a $b^2 = ac; \quad c^2 = bd; \quad bc = ad.$

735. *Si* $\frac{1}{b - a}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{b - c}$, *sont en progression arithmétique, montrer que* a, b, c *sont en progression géométrique.*

En effet, les trois nombres donnés étant en progression arithmétique, on a

$$\frac{1}{2b} - \frac{1}{b - a} = \frac{1}{b - c} - \frac{1}{2b}.$$

En faisant disparaître les dénominateurs et en réduisant les termes semblables, on trouve $b^2 = ac.$

Cette égalité montre que a, b, c sont en progression géométrique.

736. *Si* a, b, c *sont en progression géométrique, montrer que :*

$$a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) = a^3 + b^3 + c^3.$$

En effet, en multipliant les deux membres par abc, on trouve

$$b^3c^3 + c^3a^3 + a^3b^3 = abc(a^3 + b^3 + c^3).$$

En remplaçant b par aq et c par aq^2, on obtient l'identité
$$a^6(q^9 + q^6 + q^3) = a^6q^3(1 + q^3 + q^6).$$

737. *Calculer les nombres* x, y, z, *sachant que* x, y, z *est une progression arithmétique,* y, x, z *une progression géométrique et que le produit* xyz *vaut* 216.

On a le système $2y = x + z;\quad x^2 = yz;\quad xyz = 216.$

En remplaçant dans la troisième équation yz par x^2, il vient
$$x^3 = 216;\quad \text{d'où}\quad x = 6.$$
Le système $\quad 2y - z = 6,\quad yz = 36,$
donne ensuite $\quad y' = 6,\quad z' = 6;\quad y'' = -3,\quad z'' = -12.$

Rép. $x = y = z = 6;$
$x = 6,\quad y = -3,\quad z = -12.$

738. *Partager* a *en trois parties formant une progression géométrique, sachant que la troisième partie dépasse la première de* d.

Soient x, xy, xy^2 les trois parties. On a le système
$$x(1 + y + y^2) = a;\quad x(y^2 - 1) = d.$$
Divisons ces deux équations membre à membre; il vient
$$\frac{1 + y + y^2}{y^2 - 1} = \frac{a}{d};\quad \text{puis}\quad (a - d)y^2 - dy - (a + d) = 0.$$
Le réalisant de cette équation en y est
$$\rho = d^2 + 4(a^2 - d^2) = 4a^2 - 3d^2.$$
Si $\rho \geqslant 0$, on pourra calculer y, puis x.

739. *Trouver cinq termes consécutifs d'une progression géométrique, connaissant leur somme* a *et leur produit* b^5.

Soient $\frac{x}{y^2}$, $\frac{x}{y}$, x, xy, xy^2 les termes demandés. On a le système
$$x^5 = b^5,\quad \text{ou}\quad x = b;$$
$$x\left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y} + 1 + y + y^2\right) = a.$$
Posons $y + \frac{1}{y} = z$. La deuxième équation devient
$$f(z) = bz^2 + bz - (a + b) = 0. \qquad (1)$$
Après avoir cherché les valeurs de z qui vérifient cette équation, on calcule les valeurs correspondantes de y.

Discussion. — L'équation $y + \frac{1}{y} = z$ peut s'écrire $y^2 - yz + 1 = 0$.
A une valeur de z ne correspondent des racines de cette équation que si l'on a
$$z^2 - 4 \geqslant 0,$$
ce qui exige $\quad z \leqslant -2 \quad \text{ou} \quad z \geqslant 2.$

Par suite, pour déterminer le nombre de solutions du problème, il faudra étudier les positions des nombres -2 et 2 par rapport aux racines de l'équation (1). Pour faire cette étude, nous supposerons b positif; les raisonnements seraient analogues si b était négatif. On a

$$f(-2) = b - a \quad \text{et} \quad f(2) = 5b - a.$$

1° Le problème admet une solution, si

$$f(-2)f(2) = (b - a)(5b - a) < 0 \quad \text{ou} \quad b < a < 5b.$$

Quand ces conditions sont remplies, on a $f(-2) < 0$ et $f(2) > 0$.

On a donc le classement z'', -2, z', 2 et c'est la plus petite racine de (1) qui convient.

2° Le problème admet deux solutions, quand on a l'un des classements :

$$z'',\ -2,\ 2,\ z'; \quad z'',\ z',\ -2,\ 2; \quad -2,\ 2,\ z'',\ z'.$$

Le classement z'', -2, 2, z' se présente si l'on a :

$$f(-2) = b - a < 0 \quad \text{ou} \quad a > b;$$
$$f(2) = 5b - a < 0 \quad \text{ou} \quad a > 5b;$$

ou, en résumé, $a > 5b$.

En raisonnant d'une façon analogue, on montrerait que les classements z'', z', -2, 2 et -2, 2, z'', z' ne se présentent jamais.

3° Si $a = b$, l'équation (1) devient $z^2 + z - 2 = 0$; cette équation a une racine acceptable $z = -2$, qui donne $y = -1$.

4° Si $a = 5b$, l'équation (1) devient $z^2 + z - 6 = 0$ et on a $z = -3$ ou 2. Pour $z = 2$, on a $y = 1$; pour $z = -3$, on trouve

$$y = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Application numérique : $a = 15{,}5$; $b^5 = 32$.

On a $x = 2$ et l'équation (1) devient

$$2z^2 + 2z - \frac{35}{2} = 0; \quad \text{d'où} \quad z' = 2{,}5; \quad z'' = -3{,}5.$$

a) $z' = \frac{5}{2}$. — On a $y + \frac{1}{y} = \frac{5}{2}$ et $y = 2$ ou $\frac{1}{2}$.

b) $z'' = -\frac{7}{2}$. — On a $y + \frac{1}{y} = -\frac{7}{2}$ et $y = \frac{-7 \pm \sqrt{33}}{4}$.

Rép. Si $z = 2{,}5$, les cinq termes sont $0{,}5$, 1, 2, 4, 8.

Si $z = -3{,}5$, les cinq termes sont

$$\frac{41 + 7\sqrt{33}}{4}, \quad \frac{-7 - \sqrt{33}}{2}, \quad 2, \quad \frac{-7 + \sqrt{33}}{2}, \quad \frac{41 - 7\sqrt{33}}{4}$$

740. *Trouver cinq termes consécutifs d'une progression géométrique, connaissant le produit* p *des deux termes extrêmes et la somme* s *des trois moyens.*

Soient $\frac{x}{y^2}$, $\frac{x}{y}$, x, xy, xy^2 les cinq termes cherchés. On a le système

$$\frac{x}{y^2} \times xy^2 = x^2 = p$$
$$\frac{x}{y} + x + xy = s.$$

Nous supposerons p positif. Alors la 1re équation donne $x = \pm\sqrt{p}$.

La deuxième équation peut s'écrire

$$xy^2 + y(x - s) + x = 0 \qquad (1)$$

et son réalisant est

$$(x - s)^2 - 4x^2 = (s + x)(s - 3x).$$

a) $x = \sqrt{p}$. — L'équation (1) aura deux racines, si on a

$$(s + \sqrt{p})(s - 3\sqrt{p}) \geqslant 0;$$

ce qui exige $\quad s \leqslant -\sqrt{p} \quad$ ou $\quad s \geqslant 3\sqrt{p}$.

Mais les deux racines sont inverses; elles ne donnent donc qu'une seule progression.

b) $x = -\sqrt{p}$. — L'équation (1) aura deux racines, si on a

$$(s - \sqrt{p})(s + 3\sqrt{p}) \geqslant 0;$$

ce qui exige $\quad s \leqslant -3\sqrt{p} \quad$ ou $\quad s \geqslant \sqrt{p}$.

Ces deux racines sont inverses et les progressions correspondantes ne diffèrent que par l'ordre des termes.

En résumé,

$s \leqslant -3\sqrt{p}$: deux progressions;
$-3\sqrt{p} < s \leqslant -\sqrt{p}$: une progression;
$\sqrt{p} \leqslant s < 3\sqrt{p}$: une progression;
$s \geqslant 3\sqrt{p}$: deux progressions.

APPLICATION NUMÉRIQUE : $p = \frac{4}{9}$; $s = 1$. — On a $x = \pm\frac{2}{3}$.

a) $x = \frac{2}{3}$. — L'équation correspondante $2y^2 - y + 2 = 0$ n'a pas de racine.

b) $x = -\frac{2}{3}$. — L'équation correspondante $2y^2 + 5y + 2 = 0$ a pour racines -2 et $-0{,}5$.

Rép. $-\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, $-\frac{8}{3}$.

741. *Trouver* 6 *termes consécutifs d'une progression géométrique, connaissant la somme* a *des deux extrêmes et la somme* b *des deux moyens.*

Soient $x, xq, xq^2, xq^3, xq^4, xq^5$ les termes cherchés. On a le système

$$x(1 + q^5) = a; \quad xq^2(1 + q) = b.$$

L'élimination de x conduit à l'équation réciproque

$$bq^4 - bq^3 + (b - a)q^2 - bq + b = 0,$$

après avoir écarté la solution inacceptable $q = -1$.

En posant $q + \frac{1}{q} = z$, on obtient l'équation

$$bz^2 - bz - (a + b) = 0. \tag{1}$$

L'équation $q + \frac{1}{q} = z$ peut s'écrire $q^2 - qz + 1 = 0$ et son réalisant est $z^2 - 4$. Par suite, une racine de l'équation (1) n'est acceptable que si elle est inférieure à -2 ou supérieure à 2. En raisonnant comme au n° **739**, on aboutit aux conclusions suivantes ($b > 0$) :

a) Si $a > 5b$, le problème a deux solutions.

b) Si $b < a < 5b$, le problème a une solution.

c) Si $a = b$, on trouve $z = 2$, $q = 1$.

d) Si $a = 5b$, on trouve $z = 3$, $q = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

742. *Une progression géométrique a un nombre impair de termes. Montrer que la somme des carrés des termes est égale à la somme des termes, multipliée par l'excès de la somme des termes de rang impair sur la somme des termes de rang pair.*

Considérons la progression $a, b, c, \ldots, l$; sa raison est q et elle compte n termes. Désignons par S_1 la somme des termes et par S_2 la somme de leurs carrés. On a (**729**)

$$S_2 = \frac{l^2q^2 - a^2}{q^2 - 1} = \frac{a^2(q^{2n} - 1)}{q^2 - 1} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} \times \frac{a(q^n + 1)}{q + 1}$$
$$= S_1 \times \frac{a(q^n + 1)}{q + 1}.$$

Nous supposons n impair. L'expression $q^n + 1$ est donc divisible par $q + 1$ et on a

$$\frac{a(q^n + 1)}{q + 1} = a(q^{n-1} - q^{n-2} + \ldots\ldots - q + 1)$$
$$= (a + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}) - (aq + aq^3 + \ldots + aq^{n-2});$$

ce qui démontre le théorème.

§ III. — LIMITES.

743. *Quelles sont les limites des sommes des* n *premiers termes des progressions géométriques illimitées :*

1° $8;\ 2;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{8};\ \ldots;$

La raison de cette progression est $\frac{1}{4}$. La limite de la somme des n premiers termes est donnée par l'expression $\frac{a}{1-q}$. On trouve, dans le cas actuel,

$$\lim S_n = \frac{32}{3}.$$

2° $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{9}$; $\frac{4}{27}$; $\frac{8}{81}$; ... ;

La raison est $\frac{2}{3}$; la limite de S_n est 1.

3° 8; $\frac{24}{10}$; $\frac{72}{100}$; ... ;

La raison est $\frac{3}{10}$. La limite de S_n est $\frac{80}{7}$.

4° $\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$; 1; $\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}$; ... ;

La raison est $\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}$; la limite cherchée est $\frac{(3+2\sqrt{2})^3\sqrt{2}}{8}$.

5° $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$; $\frac{1}{2-\sqrt{2}}$; $\frac{1}{2}$; ... ;

La raison est $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$. La limite cherchée est $(\sqrt{2}+1)^2\sqrt{2}$.

6° $\sqrt{\frac{3}{2}}$; $\frac{1}{3}\sqrt{2}$; $\frac{2}{9}\sqrt{\frac{2}{3}}$; ...

La raison est $\frac{2}{9}\sqrt{3}$. La limite cherchée est $\frac{3\sqrt{6}\,(9+2\sqrt{3})}{46}$.

744. *Dans un carré dont le côté est* a, *on joint les milieux des quatre côtés et on forme un autre carré dont on joint encore les milieux des côtés pour former un nouveau carré, et ainsi de suite. Calculer la limite de la somme des aires de ces carrés.*

L'aire de chaque carré vaut la moitié de l'aire du carré précédent. Les aires des carrés successifs sont donc

$$a^2, \quad \frac{a^2}{2}, \quad \frac{a^2}{4}, \quad \ldots\ldots .$$

Elles forment une progression géométrique décroissante de raison 0,5.
Rép. $2a^2$, en comptant le carré donné.
a^2, en ne comptant pas le carré donné.

745. *Dans un cercle de rayon* R *on inscrit un carré; dans ce carré on inscrit un cercle, dans celui-ci un autre carré; et ainsi de suite indéfiniment. On demande :*

1° *la limite de la somme des aires des cercles;* 2° *la limite de la somme des aires des carrés.*

1° CERCLES. — L'aire du premier cercle est πR^2. Le second cercle a pour rayon $\frac{R}{2}\sqrt{2}$ et pour aire $\frac{\pi}{2}R^2$. Le rapport des aires des cercles est $\frac{1}{2}$, qui est aussi le rapport des aires de deux cercles consécutifs quelconques.
Rép. $2\pi R^2$.

2° CARRÉS. — L'aire du premier carré est $2R^2$ et les aires des carrés successifs forment une progression géométrique dont la raison est 0,5.
Rép. $4R^2$.

746. *On considère une suite de triangles* ABC, $A_1B_1C_1, \ldots, A_nB_nC_n$, *dont chacun a pour sommets les milieux des côtés du précédent. Calculer la limite de la somme des aires de ces triangles, lorsque* n *croît indéfiniment. On suppose connue l'aire* S *du premier triangle.*

Deux triangles consécutifs sont semblables et leur rapport de similitude est $\frac{1}{2}$. Le rapport de leurs aires est donc égal à $\frac{1}{4}$.

Rép. $\frac{4S}{3}$, si on compte le triangle donné, et $\frac{S}{3}$, si on ne compte pas le triangle donné.

747. *Dans un triangle équilatéral de côté* a_1, *on inscrit un cercle dont le rayon est désigné par* r_1; *dans ce cercle on inscrit un triangle équilatéral et on désigne son côté par* a_2; *puis par* r_2, *le rayon du cercle inscrit dans ce second triangle; et ainsi de suite indéfiniment. Calculer :*

1° *La limite de la somme des rayons des cercles inscrits.* — On trouve

$$r_1 = \frac{a_1}{6}\sqrt{3};\quad r_2 = \frac{a_1}{12}\sqrt{3};\quad r_3 = \frac{a_1}{24}\sqrt{3}; \ldots$$

On voit que les rayons forment une progression géométrique de raison 0,5.
Rép. $\frac{a_1}{3}\sqrt{3}$.

2° *La limite de la somme des côtés des triangles équilatéraux.* — On a

$$a_2 = \frac{a_1}{2};\quad a_3 = \frac{a_1}{4}; \ldots$$

Rép. $2a_1$.

3° *La limite de la somme des aires des cercles.* — Ces aires sont
$\frac{\pi}{12}(a_1)^2;\quad \frac{\pi}{48}(a_1)^2;\quad \frac{\pi}{192}(a_1)^2; \ldots$ **Rép.** $\frac{\pi}{9}(a_1)^2$.

4° *La limite de la somme des aires des triangles.* — Ces aires sont

$$\frac{(a_1)^2\sqrt{3}}{4};\quad \frac{(a_1)^2\sqrt{3}}{16};\quad \frac{(a_1)^2\sqrt{3}}{64};\ \dots$$

Rép. $\frac{(a_1)^2\sqrt{3}}{3}$.

748. *Sur les côtés du carré* ABCD, *on porte à partir de chaque sommet et dans le même sens une longueur égale au tiers de* AB. *Sur les côtés du carré* A'B'C'D' *ainsi obtenu, on porte de même une longueur égale au tiers de* A'B', *et ainsi de suite indéfiniment. Calculer en fonction de* AB = a, *la limite de la somme des aires de ces carrés, y compris le premier, et la limite de la somme des aires des cercles inscrits dans ces carrés.*

1° CARRÉS. — L'aire du premier carré est a^2; celle du second est

$$a^2 - \frac{4}{9}a^2 = \frac{5}{9}a^2.$$

Les aires des carrés successifs forment la progression géométrique

$$a^2;\quad \frac{5}{9}a^2;\quad \frac{25}{81}a^2;\ \dots\dots\dots$$

Rép. $\frac{9}{4}a^2$.

2° CERCLES. — L'aire du premier cercle est $\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}a^2$. Le rapport des aires des cercles inscrits dans deux carrés consécutifs est égal au rapport des aires des carrés. Il vaut donc $\frac{5}{9}$.

Rép. $\frac{9\pi}{16}a^2$.

749. *On considère le carré* ABCD, *de côté a. Par des parallèles aux côtés équidistantes, on le partage en* n^2 *carrés égaux, ayant au total* $(n + 1)^2$ *sommets. Calculer la somme des carrés des distances de* A *aux sommets de ces carrés, et la limite du quotient de cette somme par* n^2, *lorsque* n *croît indéfiniment.*

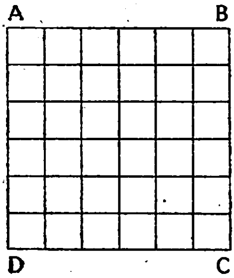


Fig. 59.

La somme des carrés des distances de A aux sommets situés sur AB est

$$S = \frac{a^2}{n^2}(1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$$

$$= \frac{a^2}{n^2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

La somme des carrés des distances de A aux sommets situés sur la 2^e horizontale est

$$S + (n + 1)\frac{a^2}{n^2},$$

car le carré de chaque distance est égal au carré de la distance au point correspondant de AB, augmenté de $\frac{a^2}{n^2}$.

De même, la somme des carrés des distances aux points de la $(p+1)^e$ horizontale est égale à

$$S + (n+1)\frac{p^2a^2}{n^2}.$$

On a donc en tout

$$(n+1)S + (n+1)\frac{a^2}{n^2}(1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = 2(n+1)S$$
$$= \frac{a^2}{3} \times \frac{(n+1)^2(2n+1)}{n}.$$

Le quotient de cette expression par n^2 est

$$\frac{a^2}{3} \times \frac{(n+1)^2(2n+1)}{n^3} = \frac{a^2}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

Or $\frac{1}{n}$ tend vers zéro. La limite cherchée est donc $\frac{2a^2}{3}$.

§ IV. — SUITES.

750. *Calculer la somme des nombres d'une table de multiplication formée de neuf lignes et de neuf colonnes; ou de* n *lignes et de* n *colonnes.*

a) 9 *lignes et* 9 *colonnes.* — La somme des nombres de la p^e colonne est

$$p(1 + 2 + 3 + \dots + 9) = 45p.$$

La somme des nombres des 9 colonnes sera

$$45(1 + 2 + 3 + \dots + 9) = 45 \times 45 = 2025.$$

b) n *lignes et* n *colonnes.* — On trouve d'une façon analogue que la somme des nombres est $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

751. *On range les nombres impairs successifs en groupes, comme suit :*

$$1;\quad (3, 5);\quad (7, 9, 11);\ \dots$$

de manière que chaque groupe renferme un nombre de plus que le groupe précédent.

1° *Trouver le premier nombre du* n^e *groupe.*

Les $n-1$ premiers groupes renferment

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} \text{ termes.}$$

Le premier terme du n^e groupe est le $\left[\frac{n(n-1)}{2} + 1\right]^e$ nombre impair.

Il vaut donc

$$2\left[\frac{n(n-1)}{2}+1\right]-1=n(n-1)+1.$$

2° *Trouver la somme des nombres du* n° *groupe.*

Le n^e groupe est une progression arithmétique. Son premier terme est $n(n-1)+1$, sa raison est 2 et elle compte n termes. Son dernier terme sera $n(n-1)+1+2(n-1)=(n-1)(n+2)+1$.

Par suite, la somme des n nombres est

$$[n(n-1)+1+(n-1)(n+2)+1]\frac{n}{2}=n^3.$$

3° *Trouver la somme des nombres contenus dans les* n *premiers groupes.*
Cette somme est

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

752. *Trouver la somme des* n *premiers termes des suites suivantes :*

1° 1.2.3, 2.3.4, ..., $n(n+1)(n+2)$, ...
Le terme général est $n(n+1)(n+2)=n^3+3n^2+2n$.
On a :

$$\begin{aligned} S &= S_3+3S_2+2S_1 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{3n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{2n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}. \end{aligned}$$

2° 1.2.3, 3.4.5, ..., $(2n-1).2n.(2n+1)$, ...
Le terme général est $(2n-1).2n.(2n+1)=8n^3-2n$.
On a :

$$\begin{aligned} S &= 8S_3-2S_1 \\ &= \frac{8n^2(n+1)^2}{4}-\frac{2n(n+1)}{2}=n(n+1)(2n^2+2n-1). \end{aligned}$$

3° 1.3.5, 3.5.7, ..., $(2n-1)(2n+1)(2n+3)$, ...
Le n^e terme est $(2n-1)(2n+1)(2n+3)=8n^3+12n^2-2n-3$.
On a :

$$\begin{aligned} S &= 8S_3+12S_2-2S_1-3n \\ &= \frac{8n^2(n+1)^2}{4}+\frac{12n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{2n(n+1)}{2}-3n \\ &= n(n+2)(2n^2+4n-1). \end{aligned}$$

753. *Calculer la somme des* n *premiers termes de la suite*

1, 7, 10, ...

sachant que le n° *terme est un trinôme du second degré en* n.

Posons $u_n=an^2+bn+c$.

On a, pour $n=1$, $a+b+c=1$;
pour $n=2$, $4a+2b+c=7$;
pour $n=3$, $9a+3b+c=10$.

Ce système donne

$$a = -\frac{3}{2}, \quad b = \frac{21}{2}, \quad c = -8; \quad \text{et} \quad u_n = -\frac{3n^2}{2} + \frac{21n}{2} - 8.$$

Par suite, $$S = -\frac{3}{2}S_2 + \frac{21}{2}S_1 - 8n = -\frac{n(n^2 - 9n + 6)}{2}.$$

754. *On considère la progression arithmétique*

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad k, \quad l.$$

Elle a n *termes et sa raison est* r. *Calculer les sommes suivantes :*

1° $\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \ldots + \dfrac{1}{kl}$.

On a :

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$
$$\frac{1}{bc} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{kl} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{l}\right).$$

En additionnant membre à membre, il vient

$$S = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{l}\right) = \frac{l - a}{alr} = \frac{n - 1}{al}.$$

2° $\dfrac{1}{abc} + \dfrac{1}{bcd} + \ldots + \dfrac{1}{hkl}$.

On a :

$$\frac{1}{abc} = \frac{1}{2r^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{2}{b} + \frac{1}{c}\right)$$
$$\frac{1}{bcd} = \frac{1}{2r^2}\left(\frac{1}{b} - \frac{2}{c} + \frac{1}{d}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{hkl} = \frac{1}{2r^2}\left(\frac{1}{h} - \frac{2}{k} + \frac{1}{l}\right).$$

En additionnant membre à membre, il vient

$$S = \frac{1}{2r^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{k} + \frac{1}{l}\right) = \frac{1}{2r}\left(\frac{1}{ab} - \frac{1}{kl}\right).$$

3° $a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + k^2 + l^2$.

On a :

$$b^3 = (a + r)^3 = a^3 + 3a^2r + 3ar^2 + r^3$$
$$c^3 = (b + r)^3 = b^3 + 3b^2r + 3br^2 + r^3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$l^3 = (k + r)^3 = k^3 + 3k^2r + 3kr^2 + r^3$$
$$(l + r)^3 = l^3 + 3l^2r + 3lr^2 + r^3.$$

Additionnons membre à membre et désignons par S la somme cherchée et par S_1 la somme des termes de la progression donnée. Il vient

$$(l + r)^3 = a^3 + 3rS + 3r^2S_1 + nr^3.$$

Cette égalité permet de calculer S.

4° $ab + bc + cd + \dots + hk + kl$.

On a : $ab = a^2 + ar;\quad bc = b^2 + br;\ \dots;\quad kl = k^2 + kr.$

Donc $S = (a^2 + b^2 + c^2 + \dots + k^2) + r(a + b + c + \dots + k). \quad (1)$

D'après l'exercice précédent, on a

$$l^3 = a^3 + 3r(a^2 + b^2 + \dots + k^2) + 3r^2(a + b + \dots + k) + (n - 1)r^3.$$

Par suite, $a^2 + b^2 + c^2 + \dots + k^2$

$$= \frac{1}{3r}[l^3 - a^3 - 3r^2(a + b + \dots + k) - (n - 1)r^3]$$

$$= \frac{1}{3r}[l^3 - a^3 - (n - 1)r^3] - r(a + b + \dots + k).$$

En remplaçant dans (1), on trouve

$$S = \frac{1}{3r}[l^3 - a^3 - (n - 1)r^3].$$

755. *Calculer la somme des* n *premiers termes des suites suivantes :*

1° $\frac{1}{2};\ \frac{2}{4};\ \frac{3}{8};\ \frac{4}{16};\ \dots\dots;\ \frac{n}{2^n};\ \dots\dots$

Soit $$S = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}.$$

On a $$\frac{S}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} + \dots + \frac{n-1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}}.$$

D'où $$S\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}}$$

et $$S = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} = \frac{2^{n+1} - 2 - n}{2^n}.$$

2° $r,\ 2rq,\ 3rq^2,\ \dots\dots,\ nrq^{n-1},\ \dots$

Soit $S = r + 2rq + 3rq^2 + \dots + nrq^{n-1}.$

On a $Sq = rq + 2rq^2 + 3rq^3 + \dots + nrq^n.$

D'où $$S(1 - q) = r + rq + rq^2 + \dots + rq^{n-1} - nrq^n$$
$$= \frac{r(q^n - 1)}{q - 1} - nrq^n.$$

et $$S = \frac{nrq^n}{q - 1} - \frac{r(q^n - 1)}{(q - 1)^2}.$$

756. *Calculer la somme des* n *premiers termes de la suite*

3, 33, 333, 3333, ...

Le terme général u_n est un nombre entier formé de n chiffres 3. On a

$$u_n = 3 + 3.10 + 3.10^2 + \dots + 3.10^{n-1} = \frac{10^n - 1}{3}.$$

Appliquons cette formule aux divers nombres.

$$3 = \frac{10-1}{3};\quad 33 = \frac{10^2-1}{3};\quad 333 = \frac{10^3-1}{3};\quad \dots;\quad u_n = \frac{10^n-1}{3}.$$

Additionnons membre à membre. Il vient

$$S = \frac{1}{3}(10 + 10^2 + \dots + 10^n) - \frac{n}{3} = \frac{10(10^n-1)}{27} - \frac{n}{3}.$$

757. *Calculer les sommes suivantes :*

1° $n + (n-1)a + (n-2)a^2 + \dots + a^{n-1}$.

On a $S = n + (n-1)a + (n-2)a^2 + \dots + 2a^{n-2} + a^{n-1}$

et $aS = na + (n-1)a^2 + (n-2)a^3 + \dots + 2a^{n-1} + a^n$.

Par suite,

$$S(a-1) = a^n + a^{n-1} + \dots + a^2 + a - n = \frac{a(a^n-1)}{a-1} - n.$$

On trouve ainsi $S = \dfrac{a(a^n-1)}{(a-1)^2} - \dfrac{n}{a-1}$.

2° $\dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{2.4} + \dfrac{1}{3.5} + \dots + \dfrac{1}{n(n+2)}$.

On a
$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right).$$

En appliquant cette formule à tous les termes, on trouve :

$$\frac{1}{1.3} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right)$$
$$\frac{1}{2.4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right).$$

Additionnons membre à membre. Il vient ainsi

$$S = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}.$$

3° $\dfrac{1}{2^2-1} + \dfrac{1}{3^2-1} + \dots + \dfrac{1}{n^2-1}$.

Le terme général peut s'écrire $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$.

En appliquant cette formule à tous les termes et en additionnant ensuite membre à membre, on trouve

$$S = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{3}{4} - \frac{2n+1}{2n(n+1)}.$$

758. *Calculer la somme des* n *premiers termes de la suite*

$$1^2.2, \quad 2^2.3, \quad 3^2.4, \quad \ldots\ldots$$

Déterminer n *pour que* S_n *soit égal à* $2(3n + 1)$.

a) **Calcul de S_n.** — On a

$$u_n = n^2(n+1) = n^3 + n^2.$$

Par suite, $$S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}.$$

b) **Calcul de n** quand $S_n = 2(3n+1)$.

On doit avoir

$$\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12} = 2(3n+1).$$

On peut diviser par $3n + 1$, qui est différent de zéro, car n est un nombre entier. Il vient ainsi

$$n(n+1)(n+2) = 24. \tag{1}$$

Cette équation est vérifiée par $n = 2$, car $24 = 2 \times 3 \times 4$. L'équation (1) peut s'écrire $(n-2)(n^2 + 5n + 12) = 0$.

Le second facteur du premier membre est toujours positif et l'équation (1) n'a pas d'autre racine que $n = 2$.

759. *On considère la progression arithmétique*

$$1, \ 5, \ 9, \ 13, \ \ldots\ldots$$

et on range les termes successifs en groupes, de manière que chaque groupe renferme deux termes en plus que le précédent.

$$1; \quad (5, 9, 13); \quad (17, 21, 25, 29, 33); \quad \ldots$$

1° *Trouver le premier nombre du* n^e *groupe.*

Les $n - 1$ premiers groupes renferment

$$1 + 3 + 5 + \ldots + [2(n-1) - 1] = (n-1)^2 \text{ termes.}$$

Le premier terme du n^e groupe est le terme de rang $(n-1)^2 + 1$ de la progression donnée. Il vaut donc

$$1 + 4(n-1)^2.$$

2° *Trouver la somme des nombres du* n^e *groupe.*

Les termes du n^e groupe forment une progression arithmétique.

Le premier terme est $1 + 4(n - 1)^2$, la raison est 4 et il y a $2n - 1$ termes. En appliquant la formule

$$S = \frac{(a + l)n}{2} = \frac{[2a + (n - 1)r]n}{2},$$

on trouve

$$S = \frac{[2 + 8(n - 1)^2 + 4(2n - 2)](2n - 1)}{2} = (2n - 1)^3.$$

On voit que la somme des nombres du n^e groupe est égale au cube du n^e nombre impair.

3° *Trouver la somme des nombres contenus dans les* n *premiers groupes.*

On a $$S = 1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2n - 1)^3.$$

Comme $$(2n - 1)^3 = 8n^3 - 12n^2 + 6n - 1,$$

on peut écrire $$S = 8S_3 - 12S_2 + 6S_1 - 1.$$

En remplaçant S_3, S_2 et S_1 par leur valeur, on trouve

$$S = n^2(2n^2 - 1).$$

760. *Trouver la somme des termes des suites limitées suivantes.*

1° $1.(2n - 1)$, $2(2n - 3)$, $3(2n - 5)$, ..., $n.1$.

Le terme général est $a_p = p(2n - 2p + 1) = (2n + 1)p - 2p^2$.

On a $$S_p = (2n + 1)\frac{p(p + 1)}{2} - \frac{p}{3}(p + 1)(2p + 1).$$

Faisons $p = n$. Il vient ainsi

$$S_n = \frac{n}{2}(n + 1)(2n + 1) - \frac{n}{3}(n + 1)(2n + 1)$$

$$= \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1).$$

2° $n(n + 1)$, $(n + 1)(n + 2)$, $(n + 2)(n + 3)$, ..., $(2n - 1)2n$.

Le terme général est

$$a_p = (n + p - 1)(n + p) = p^2 + (2n - 1)p + n^2 - n.$$

On a

$$S_p = \frac{p}{6}(p + 1)(2p + 1) + (2n - 1)\frac{p}{2}(p + 1) + n^2p - np.$$

Faisons $p = n$. Il vient ainsi

$$S_n = \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1) + \frac{n}{2}(n + 1)(2n - 1) + n^2(n - 1)$$

$$= \frac{n}{3}(7n^2 - 1).$$

3° $1.(2n - 1)$, $3(2n - 3)$, $5(2n - 5)$, ..., $(2n - 1).1$.

Le terme général est

$$a_p = (2p - 1)(2n - 2p + 1) = -4p^2 + 4p(n + 1) - 2n - 1.$$

On a

$$S_p = -\frac{4p}{6}(p+1)(2p+1) + 4(n+1)\frac{p}{2}(p+1) - (2n+1)p.$$

Faisons $p = n$. Il vient ainsi

$$S_n = -\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1)^2 - n(2n+1) = \frac{n}{3}(2n^2+1).$$

4° $1.(1+n)n,\ 3(2+n)(n-1),\ \dots,\ (2p-1)(n+p)(n-p+1).$
$\dots,\ (2n-1)2n.1,$

On a $\qquad a_p = (n^2+n)(2p-1) - (p-1)p(2p-1).$

$$S_p = (n^2+n)[1+3+5+\dots+(2p-1)]$$
$$-[0+1.2.3+2.3.5+\dots+(p-1)p(2p-1)].$$

La première partie est le produit par n^2+n de la somme des p premiers nombres impairs. Elle vaut donc $(n^2+n)p^2$.

La deuxième partie a pour terme général

$$(p-1)p(2p-1) = 2p^3 - 3p^2 + p.$$

Elle vaut donc

$$2\frac{p^2}{4}(p+1)^2 - 3\frac{p}{6}(p+1)(2p+1) + \frac{p}{2}(p+1) = \frac{p^2}{2}(p^2-1).$$

Par suite, $\qquad S_p = (n^2+n)p^2 - \frac{p^2}{2}(p^2-1).$

Faisons $p = n$. Il vient ainsi

$$S_n = (n^2+n)n^2 - \frac{n^2}{2}(n^2-1) = \frac{n^2}{2}(n+1)^2.$$

CHAPITRE XXIII

Logarithmes.

761. *Trouver les logarithmes des nombres suivants :*

1° $\log 375{,}21 = 2{,}57\,427$	6° $\log 0{,}0209 = \bar{2}{,}32\,015$
2° $\log 527\,209 = 5{,}72\,199$	7° $\log 0{,}598\,37 = \bar{1}{,}77\,697$
3° $\log 23{,}875 = 1{,}37\,794$	8° $\log 0{,}007\,207 = \bar{3}{,}85\,775$
4° $\log 6309{,}25 = 3{,}79\,998$	9° $\log 0{,}046\,792 = \bar{2}{,}67\,017$
5° $\log 1{,}978\,57 = 0{,}29\,636$	10° $\log 0{,}000\,901 = \bar{4}{,}95\,472.$

762. *Trouver les antilogarithmes des nombres suivants :*

1° 3,84 938 $x = 7069,33$
2° 4,94 041 $x = 87\,178$
3° 1,76 235 $x = 57,856\,25$
4° 5,42 085 $x = 263\,541$
5° 2,99 132 $x = 980,22$
6° $\overline{3},75\,024$ $x = 0,005\,626\,5$
7° $\overline{1},20\,202$ $x = 0,159\,229$
8° $\overline{4},83\,281$ $x = 0,000\,680\,471$
9° 0,94 912 $x = 8,894\,4$
10° $\overline{2},14\,320$ $x = 0,013\,9059$
11° $\overline{1},07\,710$ $x = 0,119\,427$
12° 0,49 086 $x = 3,096\,43$.

763. *Trouver les cologarithmes des nombres suivants :*

1° colog 0,005 = 2,30 103
2° colog 36 = $\overline{2},44\,370$
3° colog 523 = $\overline{3},28\,150$
4° colog 3420,5 = $\overline{4},46\,591$
5° colog 0,876 = 0,05 750
6° colog 5,6717 = $\overline{1},24\,628$.

764. *Exprimer en fonction de log* a, *log* b *et log* c *les logarithmes des expressions suivantes :*

1° $\log ab^2c = \log a + 2\log b + \log c$;
2° $\log 0,1a^3bc^2 = -1 + 3\log a + \log b + 2\log c$;
3° $\log \dfrac{a^2\sqrt{b}}{c} = 2\log a + \dfrac{1}{2}\log b - \log c$;
4° $\log \sqrt[3]{a^5b^3c} = \dfrac{5}{3}\log a + \log b + \dfrac{1}{3}\log c$;
5° $\log (10a^2b\sqrt[3]{c^2})^2 = 2 + 4\log a + 2\log b + \dfrac{4}{3}\log c$;
6° $\log \sqrt[5]{\dfrac{ab^2}{c^3}} = \dfrac{1}{5}\log a + \dfrac{2}{5}\log b - \dfrac{3}{5}\log c$;
7° $\log a^2\sqrt[5]{b^2c^3} = 2\log a + \dfrac{2}{5}\log b + \dfrac{3}{5}\log c$;
8° $\log \sqrt[3]{a^4b\sqrt{c}} = \dfrac{4}{3}\log a + \dfrac{1}{3}\log b + \dfrac{1}{6}\log c$;
9° $\log \left(\dfrac{a}{b^2}\right)^3 \sqrt[3]{\dfrac{a^2}{b}} = \dfrac{11}{3}\log a - \dfrac{19}{3}\log b$.

765. *Trouver, sans le secours des tables, les nombres dont les logarithmes sont :*

1° $\log 3 + \log 5 = \log 15$
2° $\log 7 - \log 2 = \log 3,5$
3° $\dfrac{1}{3}\log 27 = \log 3$
4° $\log 4 + 2 = \log 400$
5° $\log 7 - 3 = \log 0,007$
6° $1 - \dfrac{3}{2}\log 9 = \log \dfrac{10}{27}$
7° $3\log 2 + \log 5 = \log 40$
8° $1 + \log 5 - 2\log 6 = \log \dfrac{25}{18}$
9° $2\log 4 - \dfrac{1}{3}\log 8 = \log 8$.

766. 1° *Étant donné* $\log 2 = 0{,}30\,103$, *trouver* $\log 5$.

On a $\log 5 = \log \dfrac{10}{2} = 1 - \log 2 = 0{,}69\,897.$

2° *Étant donné* $\log 5 = 0{,}69\,897$, *trouver* $\log 8$.

On a $\log 8 = \log \dfrac{1000}{125} = 3 + 3 \operatorname{colog} 5 = 0{,}90\,309.$

3° *Étant donné* $\log 0{,}8 = \bar{1}{,}90\,309$, *trouver* $\log 1250$.

On a : $\log 8 = 0{,}90\,309;$

$$\log 1250 = \log \frac{10\,000}{8} = 4 + \operatorname{colog} 8 = 3{,}09\,691.$$

4° *Étant donnés* $\log 2 = 0{,}30\,103$ *et* $\log 3 = 0{,}47\,712$, *trouver* $\log 2{,}88$.

On a :

$$\log 2{,}88 = \log \frac{2^5 \times 3^2}{100} = 5 \log 2 + 2 \log 3 - 2 = 0{,}45\,939.$$

5° *Étant donnés* $\log 7 = 0{,}84\,510$ *et* $\log 17 = 1{,}23\,045$, *trouver* $\log 119$, $\log \dfrac{17}{7}$ *et* $\log \dfrac{289}{343}$.

On a : $\log 119 = \log 7 \times 17 = \log 7 + \log 17 = 2{,}07\,555;$

$$\log \frac{17}{7} = \log 17 + \operatorname{colog} 7 = 0{,}38\,535;$$

$$\log \frac{289}{343} = \log \frac{17^2}{7^3} = 2 \log 17 + 3 \operatorname{colog} 7 = \bar{1}{,}92\,560.$$

6° *De* $\log 6 = 0{,}77\,815$, $\log 4{,}4 = 0{,}64\,345$ *et* $\log 1{,}8 = 0{,}25\,527$, *déduire* $\log 2$, $\log 3$ *et* $\log 11$.

On a : $\log 3 = \log \dfrac{18}{6} = \log 18 + \operatorname{colog} 6 = 0{,}47\,712;$

$$\log 2 = \log \frac{6}{3} = \log 6 + \operatorname{colog} 3 = 0{,}30\,103;$$

$$\log 11 = \log \frac{44}{4} = \log 44 + 2 \operatorname{colog} 2 = 1{,}04\,139.$$

7° *De* $\log 3{,}5 = 0{,}54\,407$, $\log 3{,}25 = 0{,}51\,188$ *et* $\log 2{,}45 = 0{,}38\,917$, *déduire* $\operatorname{colog} 5$, $\log 7$ *et* $\log 13$.

On a : $\log 7 = \log \dfrac{245}{35} = \log 245 + \operatorname{colog} 35 = 0{,}84\,510;$

$$\log 5 = \log \frac{35}{7} = \log 35 + \operatorname{colog} 7 = 0{,}69\,897;$$

$$\operatorname{colog} 5 = \bar{1}{,}30\,103;$$

$$\log 13 = \log \frac{325}{25} = \log 325 + 2 \operatorname{colog} 5 = 1{,}11\,394.$$

8° *Étant donnés* $\log \frac{1025}{1024} = p$ *et* $\log 2 = q$, *montrer que l'on a*

$$\log 4100 = p + 12q.$$

En effet, on a : $\frac{1025}{1024} \times 2^{12} = 1025 \times 4 = 4100.$

767. *Vérifier :* $\log \frac{133}{65} + 2 \log \frac{13}{7} + \text{colog} \frac{143}{90} + \log \frac{77}{171} = \log 2.$

En effet, on a :

$$\left[\frac{133}{65} \times \left(\frac{13}{7}\right)^2 \times \frac{77}{171}\right] : \frac{143}{90} = 2.$$

768. *Trouver le nombre de chiffres de* 2^{60}.

On a : $\log 2^{60} = 0{,}30\,103 \times 60 = 18{,}0618.$

Rép. 19 chiffres.

769. *Calculer par logarithmes les expressions suivantes :*

1° $x = 23\,571 \times 0{,}027\,38.$

On a : $\log x = \log 23\,571 + \log 0{,}027\,38.$

$$\begin{aligned} \log 23\,571 &= 4{,}37\,238 \\ \log 0{,}027\,38 &= \bar{2}{,}43\,743 \\ \log x &= \bar{2{,}80\,981}; \quad x = 645{,}371. \end{aligned}$$

2° $x = 0{,}839\,57 \times 94\,005 \times 0{,}03.$

On a : $\log x = \log 0{,}839\,57 + \log 94\,005 + \log 0{,}03.$

$$\begin{aligned} \log 0{,}839\,57 &= \bar{1}{,}92\,406 \\ \log 94\,005 &= 4{,}97\,315 \\ \log 0{,}03 &= \bar{2}{,}47\,712 \\ \log x &= 3{,}37\,433; \quad x = 2367{,}72. \end{aligned}$$

3° $x = (2{,}81)^7.$

On a : $\log x = 7 \log 2{,}81 = 3{,}14\,097; \quad x = 1383{,}47.$

4° $x = \frac{7{,}901\,75}{0{,}000\,374\,17}$

On a : $\log x = \log 7{,}901\,75 + \text{colog}\,0{,}000\,374\,17$

$$\begin{aligned} \log 7{,}901\,75 &= 0{,}89\,773 \\ \text{colog}\,0{,}000\,374\,17 &= 3{,}42\,693 \\ \log x &= 4{,}32\,466; \quad x = 21\,118{,}50. \end{aligned}$$

5° $x = (0{,}830\,57)^3.$

On a : $\log x = 3 \log 0{,}830\,57 = \bar{1}{,}75\,814; \quad x = 0{,}572\,986.$

6° $x = (0{,}067\,005)^2.$

On a : $\log x = 2 \log 0{,}067\,005 = \bar{3}{,}65\,222; \quad x = 0{,}004\,4897.$

7° $x = 0{,}007 \times (341{,}94)^2$.

On a : $\log x = \log 0{,}007 + 2 \log 341{,}94$.

$$\begin{array}{ll} \log 0{,}007 & = \overline{3}{,}84\ 510 \\ 2 \log 341{,}94 & = 5{,}06\ 790 \\ \hline \log x & = \overline{2{,}91\ 300}; \quad x = 818{,}46. \end{array}$$

8° $x = \dfrac{3^2 \times 0{,}076}{457{,}61}$.

On a : $\log x = 2 \log 3 + \log 0{,}076 + \text{colog}\ 457{,}61$.

$$\begin{array}{ll} 2 \log 3 & = 0{,}95\ 424 \\ \log 0{,}076 & = \overline{2}{,}88\ 081 \\ \text{colog}\ 457{,}61 & = \overline{3}{,}33\ 950 \\ \hline \log x & = \overline{3}{,}17\ 454; \quad x = 0{,}001\ 494\ 31. \end{array}$$

9° $x = \sqrt[4]{937507}$.

On a : $\log x = \dfrac{1}{4} \log 937\ 507 = 1{,}49\ 299; \quad x = 31{,}1164.$

10° $x = \sqrt[5]{0{,}006\ 429\ 5}$.

On a : $\log x = \dfrac{1}{5} \log 0{,}006\ 429\ 5 = \overline{1}{,}56\ 164; \quad x = 0{,}364\ 45.$

11° $x = 41\sqrt{0{,}004\ 276\ 81}$.

On a : $\log x = \log 41 + \dfrac{1}{2} \log 0{,}004\ 276\ 81$.

$$\begin{array}{ll} \log 41 & = 1{,}61\ 278 \\ \dfrac{1}{2} \log 0{,}004\ 276\ 81 & = \overline{2}{,}81\ 556 \\ \hline \log x & = 0{,}42\ 834; \quad x = 2{,}681\ 25. \end{array}$$

12° $x = \dfrac{0{,}078\ 189}{0{,}0085 \times 460{,}314}$.

On a : $\log x = \log 0{,}078\ 189 + \text{colog}\ 0{,}0085 + \text{colog}\ 460{,}314$.

$$\begin{array}{ll} \log 0{,}078\ 189 & = \overline{2}{,}89\ 315 \\ \text{colog}\ 0{,}0085 & = 2{,}07\ 058 \\ \text{colog}\ 460{,}314 & = \overline{3}{,}33\ 695 \\ \hline \log x & = \overline{2}{,}30\ 068; \quad x = 0{,}019\ 9838. \end{array}$$

770. *Calculer par logarithmes les expressions suivantes :*

1° $x = \sqrt[4]{\dfrac{48 \times 0{,}081}{4{,}9447}}$

On a : $\log x = \dfrac{1}{4} \log 48 + \dfrac{1}{4} \log 0{,}081 + \dfrac{1}{4}\ \text{colog}\ 4{,}9447.$

$$\frac{1}{4}\log 48 = 0{,}42\,031$$
$$\frac{1}{4}\log 0{,}081 = \bar{1}{,}72\,712$$
$$\frac{1}{4}\operatorname{colog} 4{,}9447 = \bar{1}{,}82\,647$$
$$\log x = \bar{1}{,}97\,390; \quad x = 0{,}941\,675.$$

2° $x = \dfrac{(0{,}378\,45)^2}{706{,}34}.$

On a : $\log x = 2 \log 0{,}378\,45 + \operatorname{colog} 706{,}34.$

$$2\log 0{,}378\,45 = \bar{1}{,}15\,602$$
$$\operatorname{colog} 706{,}34 = \bar{3}{,}15\,099$$
$$\log x = \bar{4}{,}30\,701; \quad x = 0{,}000\,202\,773.$$

3° $x = \left(\dfrac{\sqrt{37{,}406}}{0{,}017}\right)^3.$

On a : $\log x = \dfrac{3}{2}\log 37{,}406 + 3 \operatorname{colog} 0{,}017.$

$$\frac{3}{2}\log 37{,}406 = 2{,}35\,941$$
$$3\operatorname{colog} 0{,}017 = 5{,}30\,865$$
$$\log x = 7{,}66\,806; \quad x = 46\,565\,000.$$

4° $x = 6{,}71\sqrt[3]{\dfrac{17\,841}{0{,}307}}.$

On a : $\log x = \log 6{,}71 + \dfrac{1}{3}\log 17\,841 + \dfrac{1}{3}\operatorname{colog} 0{,}307.$

$$\log 6{,}71 = 0{,}82\,672$$
$$\frac{1}{3}\log 17\,841 = 1{,}41\,714$$
$$\frac{1}{3}\operatorname{colog} 0{,}307 = 0{,}17\,095$$
$$\log x = 2{,}41\,481; \quad x = 259{,}90.$$

5° $x = \sqrt[5]{\dfrac{(238{,}4)^2}{(2{,}6345)^3}}.$

On a : $\log x = \dfrac{2}{5}\log 238{,}4 + \dfrac{3}{5}\operatorname{colog} 2{,}6345.$

$$0{,}4\log 238{,}4 = 0{,}95\,092$$
$$0{,}6\operatorname{colog} 2{,}6345 = \bar{1}{,}74\,758$$
$$\log x = 0{,}69\,850; \quad x = 4{,}994\,56.$$

6° $x = \dfrac{0{,}000\ 925}{\sqrt{(4{,}015\ 62)^3}}$.

On a : $\log x = \log 0{,}000\ 925 + \dfrac{3}{2} \operatorname{colog} 4{,}015\ 62$.

$$\begin{array}{ll} \log 0{,}000\ 925 & = \bar{4},96\ 614 \\ 1{,}5 \operatorname{colog} 4{,}015\ 62 & = \bar{1},09\ 437 \\ \hline \log x & = \bar{4},06\ 051; \quad x = 0{,}000\ 114\ 95. \end{array}$$

7° $x = \dfrac{(401{,}29)^2}{93{,}24} \sqrt[4]{6129{,}43}$.

On a : $\log x = 2 \log 401{,}29 + \dfrac{1}{4} \log 6129{,}43 + \operatorname{colog} 93{,}24$.

$$\begin{array}{ll} 2 \log 401{,}29 & = 5{,}20\ 692 \\ \dfrac{1}{4} \log 6129{,}43 & = 0{,}94\ 686 \\ \operatorname{colog} 93{,}24 & = \bar{2},03\ 040 \\ \hline \log x & = 4{,}18\ 418; \quad x = 15\ 282{,}1. \end{array}$$

8° $x = \dfrac{0{,}0329 \sqrt[5]{6087{,}3}}{(0{,}086\ 986)^2}$.

On a : $\log x = \log 0{,}0329 + \dfrac{1}{5} \log 6087{,}3 + 2 \operatorname{colog} 0{,}086\ 986$.

$$\begin{array}{ll} \log 0{,}0329 & = \bar{2},51\ 720 \\ 0{,}2 \log 6087{,}3 & = 0{,}75\ 688 \\ 2 \operatorname{colog} 0{,}086\ 986 & = 2{,}12\ 110 \\ \hline \log x & = 1{,}39\ 518; \quad x = 24{,}8417. \end{array}$$

9° $x = \dfrac{41{,}9}{(3{,}4115)^2} \sqrt[3]{(0{,}049)^2}$.

On a : $\log x = \log 41{,}9 + \dfrac{2}{3} \log 0{,}049 + 2 \operatorname{colog} 3{,}4115$.

$$\begin{array}{ll} \log 41{,}9 & = 1{,}62\ 221 \\ \dfrac{2}{3} \log 0{,}049 & = \bar{1},12\ 680 \\ 2 \operatorname{colog} 3{,}4115 & = \bar{2},93\ 410 \\ \hline \log x & = \bar{1},68\ 311; \quad x = 0{,}482\ 067. \end{array}$$

10° $x = \left[\dfrac{(4{,}1327)^3 \times 3{,}706}{\pi \sqrt{0{,}921}}\right]^3$.

On a :

$$\log x = 9 \log 4{,}1327 + 3 \log 3{,}706 + 3 \operatorname{colog} \pi + \frac{3}{2} \operatorname{colog} 0{,}921.$$

$$
\begin{aligned}
&9 \log 4{,}1327 &&= 5{,}54\ 616\\
&3 \log 3{,}706 &&= 1{,}70\ 673\\
&3 \operatorname{colog} \pi &&= \overline{2}{,}50\ 855\\
&\frac{3}{2} \operatorname{colog} 0{,}921 &&= 0{,}05\ 361\\
&\log x &&= 5{,}81\ 505; \quad x = 653\ 200.
\end{aligned}
$$

11° $x = \sqrt[3]{0{,}263\ 09 \sqrt{\dfrac{2{,}307}{(3{,}2)^3}}}.$

On a : $\log x = \dfrac{1}{3} \log 0{,}263\ 09 + \dfrac{1}{6} \log 2{,}307 + \dfrac{1}{2} \operatorname{colog} 3{,}2.$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{3} \log 0{,}263\ 09 &&= \overline{1}{,}80\ 670\\
&\frac{1}{6} \log 2{,}307 &&= 0{,}06\ 051\\
&\frac{1}{2} \operatorname{colog} 3{,}2 &&= \overline{1}{,}74\ 743\\
&\log x &&= \overline{1}{,}61\ 464; \quad x = 0{,}411\ 755.
\end{aligned}
$$

12° $x = \dfrac{\sqrt[4]{19} \times \sqrt[3]{(0{,}201)^2}}{9371{,}5 \times \sqrt{3{,}7408}}.$

On a :

$$\log x = \frac{1}{4} \log 19 + \frac{2}{3} \log 0{,}201 + \operatorname{colog} 9371{,}5 + \frac{1}{2} \operatorname{colog} 3{,}7408.$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4} \log 19 &&= 0{,}31\ 969\\
&\frac{2}{3} \log 0{,}201 &&= \overline{1}{,}53\ 547\\
&\operatorname{colog} 9371{,}5 &&= \overline{4}{,}02\ 819\\
&\frac{1}{2} \operatorname{colog} 3{,}7408 &&= \overline{1}{,}71\ 352\\
&\log x &&= \overline{5}{,}59\ 687; \quad x = 0{,}000\ 039\ 545.
\end{aligned}
$$

771. *Calculer par logarithmes les expressions suivantes.*

1° $x = \dfrac{7 \log 2}{(3{,}27)^2}.$

On a : $\log x = \log 7 + \log \log 2 + 2 \operatorname{colog} 3{,}27.$

$$
\begin{aligned}
&\log 7 &&= 0{,}84\ 510\\
&\log 0{,}30\ 103 &&= \overline{1}{,}47\ 861\\
&2 \operatorname{colog} 3{,}27 &&= \overline{2}{,}97\ 090\\
&\log x &&= \overline{1}{,}29\ 461; \quad x = 0{,}197\ 064.
\end{aligned}
$$

2° $x = \dfrac{(\log 31,5)^2}{0,017\sqrt[3]{0,009}}$.

On a :

$$\log x = 2 \log \log 31,5 + \operatorname{colog} 0,017 + \frac{1}{3} \operatorname{colog} 0,009.$$

$$\begin{array}{ll} 2 \log 1,49\ 831 & = 0,35\ 120 \\ \operatorname{colog} 0,017 & = 1,76\ 955 \\ \frac{1}{3} \operatorname{colog} 0,009 & = \underline{0,68\ 192} \\ \qquad \log x & = 2,80\ 267; \quad x = 634,834. \end{array}$$

3° $x = \sqrt[3]{\dfrac{(0,017\ 46)^2\pi}{\log 0,006\ 27}}$.

Le radicand est négatif,, à cause de log 0,006 27. Changeons le signe des deux membres avant de prendre leurs logarithmes. On a :

$$-x = \sqrt[3]{\frac{(0,017\ 46)^2\pi}{-\log 0,006\ 27}} = \sqrt[3]{\frac{(0,017\ 46)^2\pi}{2,202\ 73}}.$$

Par suite, $\log(-x) = \dfrac{2}{3} \log 0,017\ 46 + \dfrac{1}{3} \log \pi + \dfrac{1}{3} \operatorname{colog} 2,202\ 73.$

$$\begin{array}{ll} \frac{2}{3} \log 0,017\ 46 & = \bar{2},82\ 803 \\ \frac{1}{3} \log \pi & = 0,16\ 572 \\ \frac{1}{3} \operatorname{colog} 2,202\ 73 & = \underline{\bar{1},88\ 568} \\ \log(-x) & = \bar{2},87\ 943 \\ \qquad -x & = 0,075\ 7583; \\ \qquad x & = -0,075\ 7583. \end{array}$$

4° $x = \sqrt[3]{\log 0,081 \sqrt{\dfrac{64,3}{(3,07)^3}}}$.

On a :

$$-x = \sqrt[3]{(-\log 0,081)\sqrt{\frac{64,3}{(3,07)^3}}} = \sqrt[3]{1,091\ 51 \sqrt{\frac{46,3}{(3,07)^3}}}.$$

De là, on déduit :

$$\log(-x) = \frac{1}{3} \log 1,091\ 51 + \frac{1}{6} \log 64,3 + \frac{1}{2} \operatorname{colog} 3,07.$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\log 1{,}091\,51 &= 0{,}01\,267\\
\frac{1}{6}\log 64{,}3 &= 0{,}30\,137\\
0{,}5 \text{ colog } 3{,}07 &= \bar{1}{,}75\,643\\
\log(-x) &= 0{,}07\,047
\end{aligned}$$

$$-x = 1{,}176\,16; \quad x = -1{,}176\,16.$$

772. *On donne* a = 3,7937, b = 5,293, c = 4,601 *et on demande de calculer par logarithmes les expressions suivantes.*

1° $x = a^3 - 3a + 2.$

On a : $x = (a-1)^2(a+2) = (2{,}7937)^2 \times 5{,}7937,$

et $\log x = 2\log 2{,}7937 + \log 5{,}7937.$

$$\begin{aligned}
2\log 2{,}7937 &= 0{,}89\,236\\
\log 5{,}7937 &= 0{,}76\,296\\
\log x &= 1{,}65\,532; \quad x = 45{,}219.
\end{aligned}$$

2° $x = a^2b + 1 - a^2 - b.$

On a : $x = (a^2-1)(b-1) = 4{,}7937 \times 2{,}7937 \times 4{,}293,$

et, par suite, $\log x = \log 4{,}7937 + \log 2{,}7937 + \log 4{,}293.$

$$\begin{aligned}
\log 4{,}7937 &= 0{,}68\,067\\
\log 2{,}7937 &= 0{,}44\,618\\
\log 4{,}293 &= 0{,}63\,276\\
\log x &= 1{,}75\,961; \quad x = 57{,}4925.
\end{aligned}$$

3° *L'aire du triangle ayant pour côtés* a, b, c.

On a : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$= \sqrt{6{,}843\,85 \times 3{,}050\,15 \times 1{,}550\,85 \times 2{,}242\,85}.$

$$\log S = \frac{1}{2}[\log 6{,}843\,85 + \log 3{,}050\,15 + \log 1{,}550\,85 + \log 2{,}242\,85].$$

$$\begin{aligned}
\log 6{,}843\,85 &= 0{,}83\,530\\
\log 3{,}050\,15 &= 0{,}48\,432\\
\log 1{,}550\,85 &= 0{,}19\,057\\
\log 2{,}242\,85 &= 0{,}35\,080\\
2\log S &= 1{,}86\,099\\
\log S &= 0{,}93\,050; \quad S = 8{,}5212.
\end{aligned}$$

773. *Résoudre les équations :*

1° $\log(x^2 - 7) = 2\log(x+3).$

On a : $x^2 - 7 = (x+3)^2$ ou $6x + 9 = -7.$

Rép. $x = -\dfrac{8}{3}.$

2° $2\log x - 1 = \log\left(x - \dfrac{25}{10}\right).$

On a : $\dfrac{x^2}{10} = x - \dfrac{25}{10}$ ou $x^2 - 10x + 25 = 0;$ d'où $x = 5.$

3° $\log(x^2 - 1) - \log(x^2 - 7x + 12) = \log 4.$

On a : $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 7x + 12} = 4$ ou $3x^2 - 28x + 49 = 0.$

D'où $x' = 7;\ x'' = \dfrac{7}{3}.$

Ces réponses conviennent, car elles rendent positives les expressions $x^2 - 1$ et $x^2 - 7x + 12.$

Rép. $x = 7$ ou $\dfrac{7}{3}.$

4° $\dfrac{\log(35 - x^3)}{\log(5 - x)} = 3.$

On a : $\log(35 - x^3) = 3\log(5 - x)$ ou $35 - x^3 = (5 - x)^3,$
ou encore, $x^2 - 5x + 6 = 0.$

D'où $x' = 3;\ x'' = 2.$ Ces racines conviennent, car elles rendent positives les expressions $35 - x^3$ et $5 - x$ et n'annulent pas $\log(5 - x).$

Rép. $x = 2$ ou $3.$

5° $4\log\dfrac{x}{2} + 3\log\dfrac{x}{3} = 5\log x - \log 12.$

On a : $\left(\dfrac{x}{2}\right)^4 \times \left(\dfrac{x}{3}\right)^3 = \dfrac{x^5}{12}$ ou $x^2 = 36,$

car la racine $x = 0$ doit être écartée. Cette dernière équation donne $x = \pm 6;$ seulement la racine négative ne convient pas.

Rép. $x = 6.$

6° $\log\sqrt{7x + 5} + \log\sqrt{2x + 3} = 1 + \log 4{,}5.$

On a : $\sqrt{(7x + 5)(2x + 3)} = 45$ ou $14x^2 + 31x - 2010 = 0.$

Les valeurs approchées des racines de cette équation sont 10,9 et $-$ 13,1. La racine $x = -13{,}1$ ne convient pas, car elle rend négatives les expressions $7x + 5$ et $2x + 3.$

Rép. $x = 10{,}9.$

7° $\log(7x - 9)^2 + \log(3x - 4)^2 = 2.$

Cette équation peut s'écrire

$2\log(7x - 9)(3x - 4) = 2$ ou $(7x - 9)(3x - 4) = 10.$

On a $21x^2 - 55x + 26 = 0;$ d'où $x' = 2;\ x'' = \dfrac{13}{21}.$

Ces racines conviennent, car les expressions $(7x - 9)^2$ et $(3x - 4)^2$ sont essentiellement positives.

Rép. $x = 2$ ou $\dfrac{13}{21}.$

8° $\log\sqrt{5x + 8} + \dfrac{1}{2}\log(2x + 3) = \log 15.$

Cette équation peut s'écrire

$$\log (5x + 8)(2x + 3) = 2 \log 15 = \log 225.$$

Par suite, $(5x + 8)(2x + 3) = 225$ ou $10x^2 + 31x - 201 = 0$.

Cette équation donne

$$x' = \frac{-31 + \sqrt{9001}}{20}; \quad x'' = \frac{-31 - \sqrt{9001}}{20}.$$

La racine positive convient; la racine négative n'est acceptable que si elle rend positifs les binômes $5x + 8$ et $2x + 3$. En posant $f(x) = 10x^2 + 31x - 201$, on a :

$$f\left(-\frac{8}{5}\right) < 0 \quad \text{et} \quad f\left(-\frac{3}{2}\right) < 0.$$

On a donc le classement

$$x'', \quad -\frac{8}{5}, \quad -\frac{3}{2}, \quad x'.$$

Il en résulte que la racine x'' rend les binômes négatifs; cette racine doit donc être écartée.

774. *Résoudre les systèmes suivants.*

1° $x + y = 70$; $\log x + \log y = 3$.

Ce système peut s'écrire

$$x + y = 70; \quad xy = 1000.$$

Rép. $x' = 20$, $y' = 50$; $x'' = 50$, $y'' = 20$.

2° $\log x = \log y + 1$; $\log x + \log y = 1{,}95\,424$.

Ce système peut s'écrire $x = 10y$; $xy = 90$.

Rép. $x = 30$; $y = 3$.

3° $\log x - \log 5 = 1$; $\log x^3 + \log y^2 = \log 32$.

Ce système peut s'écrire

$$\frac{x}{5} = 10; \quad x^3y^2 = 32.$$

Rép. $x = 50$; $y = \pm\, 0{,}016$,

4° $\log \sqrt{x} - \log \sqrt{5} = 0{,}5$; $2 \log x - \log y = 1{,}39\,794$.

La première équation peut s'écrire

$$\frac{1}{2} \log x - \frac{1}{2} \log 5 = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \log \frac{x}{5} = 1; \quad \text{d'où} \quad x = 50.$$

La deuxième équation donne

$$\log \frac{x^2}{y} = \log 25, \quad \text{ou} \quad x^2 = 25y, \quad \text{ou} \quad y = 100.$$

Rép. $x = 50$; $y = 100$.

5° $\log x + \log y = 3$; $5x^2 - 3y^2 = 11\,300$.

On a le système $xy = 1000$; $5x^2 - 3y^2 = 11\,300$.

Rép. $x = 50$; $y = 20$.

6° $2 \log x - \log y = 2; \quad x^2 - 32y^2 = 23.$

On a le système $\dfrac{x^2}{y} = 100; \quad x^2 - 32y^2 = 23.$

Rép. $x' = 5, \quad y' = \dfrac{1}{4}; \quad x'' = \dfrac{5}{2}\sqrt{46}, \quad y'' = \dfrac{23}{8}.$

775. *Résoudre les équations suivantes :*

1° $7^x = 87{,}848.$

On a $x = \dfrac{\log 87{,}848}{\log 7} = \dfrac{1{,}94\,373}{0{,}84\,510} = 2{,}3.$

Rép. $x = 2{,}3.$

2° $\left(\dfrac{225}{28}\right)^x = \dfrac{8000}{7}.$

On a $x = \dfrac{\log 8000 + \operatorname{colog} 7}{\log 225 + \operatorname{colog} 28} = \dfrac{3{,}05\,799}{0{,}90\,502} = 3{,}379.$

Rép. $x = 3{,}379.$

3° $24^{3x-2} = 10\,000.$

On a : $(3x - 2) \log 24 = 4$ ou $3x - 2 = \dfrac{4}{1{,}38\,021}.$

Rép. $x = 1{,}633.$

4° $3.3^x + \dfrac{18}{3^x} = 29.$

On a $3.3^{2x} - 29.3^x + 18 = 0;$ d'où $3^x = 9$ ou $\dfrac{2}{3}.$

a) L'équation $3^x = 9$ peut s'écrire $3^x = 3^2;$ d'où $x = 2.$

b) L'équation $3^x = \dfrac{2}{3}$ donne

$$x = \frac{\log 2 - \log 3}{\log 3} = -\frac{0{,}17\,609}{0{,}47\,712} = -0{,}369.$$

Rép. $x = 2$ ou $-0{,}369.$

5° $2^x + 4^x = 272.$

Cette équation peut s'écrire $2^{2x} + 2^x - 272 = 0.$
D'où $2^x = 16$ ou -17 (à écarter).
L'équation $2^x = 16$ peut s'écrire $2^x = 2^4;$ d'où $x = 4.$
Rép. $x = 4.$

6° $4^{x+1} + \dfrac{64}{4^x} = 257.$

Cette équation peut s'écrire $4.4^{2x} - 257.4^x + 64 = 0.$

D'où $4^x = 64$ ou $\dfrac{1}{4}.$

Rép. $x = 3$ ou $-1.$

CHAPITRE XXIV

Intérêts composés.

776. *Calculer la valeur acquise par un certain capital.*

1° 2000 *fr. placés à intérêts composés à* 5 % *pendant* 8 *ans.*

a) PAR LES TABLES.

$$C = 2000 \times 1{,}477\,4554 = 2954{,}91 \text{ fr.}$$

b) PAR LOGARITHMES. — On a :

$$C = 2000(1{,}05)^8; \quad \text{d'où} \quad \log C = \log 2000 + 8 \log 1{,}05.$$

$$\begin{aligned} \log 2000 &= 3{,}30\,103 \\ 8 \log 1{,}05 &= \underline{0{,}16\,951} \\ \log C &= 3{,}47\,054; \quad C = 2954{,}87 \text{ fr.} \end{aligned}$$

2° 18 400 *fr. placés à intérêts composés à* 6 % *pendant* 10 *ans.*

a) PAR LES TABLES.

$$C = 18\,400 \times 1{,}790\,8477 = 32\,951{,}60 \text{ fr.}$$

b) PAR LOGARITHMES. — On a :

$$C = 18\,400(1{,}06)^{10}; \quad \text{d'où} \quad \log C = \log 18\,400 + 10 \log 1{,}06.$$

$$\begin{aligned} \log 18\,400 &= 4{,}26\,482 \\ 10 \log 1{,}06 &= \underline{0{,}25\,306} \\ \log C &= 4{,}51\,788; \quad C = 32\,951{,}54 \text{ fr.} \end{aligned}$$

3° 14 112 *fr. placés à intérêts composés à* 4 % *pendant* 4 *ans,* 6 *mois.*

a) PAR LES TABLES. — Après 4 ans, le capital est devenu

$$14\,112 \times 1{,}169\,8586 = 16\,509{,}04 \text{ fr.}$$

L'intérêt simple de cette somme en 6 mois est

$$165{,}09 \times 2 = 330{,}18 \text{ fr.}$$

La valeur finale est $16\,509{,}04 + 330{,}18 = 16\,839{,}22$ fr.

b) PAR LOGARITHMES. — On a :

$$C = 14\,112(1{,}04)^{\frac{9}{2}}; \quad \text{d'où} \quad \log C = \log 14\,112 + \frac{9}{2} \log 1{,}04.$$

$$\begin{aligned} \log 14\,112 &= 4{,}14\,959 \\ \frac{9}{2} \log 1{,}04 &= \underline{0{,}07\,665} \\ \log C &= 4{,}22\,624; \quad C = 16\,836{,}15 \text{ fr.} \end{aligned}$$

4° 27 050 *fr. placés à intérêts composés à* 5,5 % *pendant* 2 *ans,* 11 *mois.*

a) PAR LES TABLES. — Après 2 ans, le capital est devenu

$$27\,050 \times 1{,}113\,025 = 30\,107{,}33 \text{ fr.}$$

L'intérêt simple de cette somme en 11 mois est

$$\frac{30\,107{,}33 \times 5{,}5 \times 11}{1200} = 1517{,}91 \text{ fr.}$$

La valeur finale est $30\,107{,}33 + 1517{,}91 = 31\,625{,}24$ fr.

b) Par logarithmes. — On a :

$$C = 27\,050(1{,}055)^{\frac{35}{12}};\quad \text{d'où } \log C = \log 27\,050 + \frac{35}{12}\log 1{,}055.$$

$$\begin{aligned}
\log 27\,050 &= 4{,}43\,217 \\
\frac{35}{12}\log 1{,}055 &= 0{,}06\,782 \\
\log C &= 4{,}49\,999;\quad C = 31\,622{,}14 \text{ fr.}
\end{aligned}$$

5° 324 000 fr. placés à 5,5 % pendant 4 ans, 7 mois.

a) Par les tables — Après 4 ans le capital est devenu

$$324\,000 \times 1{,}238\,8247 = 401\,379{,}20 \text{ fr.}$$

L'intérêt simple de cette somme en 7 mois est

$$\frac{401\,379{,}20 \times 5{,}5 \times 7}{1200} = 12\,877{,}58 \text{ fr.}$$

La valeur finale est

$$401\,379{,}20 + 12\,877{,}58 = 414\,256{,}78 \text{ fr.}$$

b) Par logarithmes. — On a

$$C = 324\,000(1{,}055)^{\frac{55}{12}};\quad \text{d'où}\quad \log C = \log 324\,000 + \frac{55}{12}\log 1{,}055.$$

$$\begin{aligned}
\log 324\,000 &= 5{,}51\,055 \\
\frac{55}{12}\log 1{,}055 &= 0{,}10\,657 \\
\log C &= 5{,}61\,712;\quad C = 414\,110 \text{ fr.}
\end{aligned}$$

777. *Calculer les intérêts composés produits par un capital de* 25 000 fr. *placé au taux semestriel de* 3 % *pendant* 8 *ans*, 6 *mois*.

a) Par les tables. — La valeur acquise après 8 ans, 6 mois est

$$25\,000 \times (1{,}03)^{17} = 25\,000 \times 1{,}652\,8476 = 41\,321{,}19 \text{ fr.}$$

L'intérêt composé sera

$$41\,321{,}19 - 25\,000 = 16\,321{,}19 \text{ fr.}$$

b) Par logarithmes. — On a

$$C = 25\,000(1{,}03)^{17};\quad \text{d'où}\quad \log C = \log 25\,000 + 17\log 1{,}03.$$

$$\begin{aligned}
\log 25\,000 &= 4{,}39\,794 \\
17\log 1{,}03 &= 0{,}21\,823 \\
\log C &= 4{,}61\,617;\quad C = 41\,320{,}91 \text{ fr.}
\end{aligned}$$

L'intérêt composé est $41\,320{,}91 - 25\,000 = 16\,320{,}91$ fr.

778. *Une personne emprunte aujourd'hui une somme de* 4200 fr. *Quelle somme doit-elle payer dans* 8 *ans pour acquitter sa dette? Le taux de l'intérêt composé est de* 6 %.

a) PAR LES TABLES. — La valeur acquise après 8 ans est

$$4200 \times (1{,}06)^8 = 4200 \times 1{,}593\,8481 = 6694{,}16 \text{ fr.}$$

b) PAR LOGARITHMES. — On a

$$C = 4200(1{,}06)^8; \quad \text{d'où} \quad \log C = \log 4200 + 8 \log 1{,}06.$$

$$\begin{aligned} \log 4200 &= 3{,}62\,325 \\ 8 \log 1{,}06 &= \underline{0{,}20\,245} \\ \log C &= 3{,}82\,570; \quad C = 6694{,}17 \text{ fr.} \end{aligned}$$

779. *Un capital de* 30 000 *fr. a été placé au taux de* 4% *pendant* 10 *années. Calculer l'intérêt produit pendant les* 5 *dernières années.*

a) PAR LES TABLES. — L'intérêt produit est

$$I = 30\,000\,[(1{,}04)^{10} - (1{,}04)^5] = 30\,000 \times 0{,}263\,5914 = 7907{,}74 \text{ fr.}$$

b) PAR LOGARITHMES. — On a :

$$\begin{aligned} 10 \log 1{,}04 &= 0{,}17\,033; \quad \text{d'où} \quad (1{,}04)^{10} = 1{,}480\,23; \\ 5 \log 1{,}04 &= 0{,}08\,517; \quad \text{d'où} \quad (1{,}04)^5 = 1{,}216\,67. \end{aligned}$$

Par suite, $(1{,}04)^{10} - (1{,}04)^5 = 0{,}263\,56$

et $I = 30\,000 \times 0{,}263\,56 = 7906{,}80$ fr.

780. 1° *Calculer le capital, qui, placé à intérêts composés au taux* 5 %, *est devenu* 4332,98 *fr. après* 5 *ans.*

a) PAR LES TABLES. — On applique la formule $c = Cv^n$ et on trouve

$$c = 4332{,}98 \times 0{,}783\,5262 = 3395 \text{ fr.}$$

b) PAR LOGARITHMES — On applique la formule $c = \dfrac{C}{u^n}$.

$$\begin{aligned} \log 4332{,}98 &= 3{,}63\,679 \\ 5 \operatorname{colog} 1{,}05 &= \underline{\overline{1},89\,405} \\ \log c &= 3{,}53\,084; \quad c = 3395 \text{ fr.} \end{aligned}$$

2° *Même question pour un capital, qui, placé à* 5,5 %, *est devenu* 8214,37 *fr. après* 4 *ans.*

a) PAR LES TABLES. $c = 8214{,}37 \times 0{,}807\,2167 = 6\,630{,}78$ fr.

b) PAR LOGARITHMES.

$$\begin{aligned} \log 8214{,}37 &= 3{,}91\,457 \\ 4 \operatorname{colog} 1{,}055 &= \underline{\overline{1},90\,699} \\ \log c &= 3{,}82\,156; \quad c = 6\,630{,}71 \text{ fr.} \end{aligned}$$

3° *Même question pour un capital qui, placé au taux de* 4 %, *est devenu* 52 000 *fr. après* 7 *ans.*

a) PAR LES TABLES. $c = 52\,000 \times 0{,}759\,9178 = 39\,515{,}73$ fr.

b) PAR LOGARITHMES.

$$\begin{aligned} \log 52\,000 &= 4{,}71\,600 \\ 7 \operatorname{colog} 1{,}04 &= \underline{\overline{1},88\,077} \\ \log c &= 4{,}59\,677; \quad c = 39\,515{,}50 \text{ fr.} \end{aligned}$$

781. 1° *Calculer la valeur actuelle d'une dette de* 30 000 *fr. exigible dans* 8 *années; taux* 6 %.

a) PAR LES TABLES. — On applique la formule $c = Cv^n$ et on trouve

$$c = 30\,000 \times 0{,}627\,4124 = 18\,822{,}37 \text{ fr.}$$

b) PAR LOGARITHMES. — On applique la formule $c = \dfrac{C}{u^n}$.

$$\begin{aligned} \log 30\,000 &= 4{,}47\,712 \\ 8 \operatorname{colog} 1{,}06 &= \bar{1}{,}79\,755 \\ \log c &= 4{,}27\,467; \quad c = 18\,822{,}20 \text{ fr.} \end{aligned}$$

2° *Même question pour une dette de* 8395 *fr. exigible dans* 4 *ans,* 6 *mois; taux* 5,5 %.

On a $c = 8395 : (1{,}055)^{\frac{9}{2}}$ et $\log c = \log 8395 + \dfrac{9}{2} \operatorname{colog} 1{,}055.$

$$\begin{aligned} \log 8395 &= 3{,}92\,402 \\ \frac{9}{2} \operatorname{colog} 1{,}055 &= \bar{1}{,}89\,536 \\ \log c &= 3{,}81\,938; \quad c = 6\,597{,}50 \text{ fr.} \end{aligned}$$

782. *En payant une dette douze ans avant l'échéance, on a obtenu une réduction de* 2570,62 *fr. Calculer la valeur nominale de la dette et la somme payée pour l'acquitter. Le taux de l'intérêt composé est* 5 %.

a) PAR LES TABLES. — La réduction est égale à l'excès de la valeur nominale sur la valeur actuelle. On a donc

$$2570{,}62 = C(1 - v^{12}) = C \times 0{,}443\,1626.$$

Par suite, $C = \dfrac{2570{,}62}{0{,}443\,1626} = 5800{,}62$ fr.

et $c = 3230$ fr.

b) PAR LOGARITHMES. — On a

$$2570{,}62 = \frac{C(u^{12} - 1)}{u^{12}} \quad \text{et} \quad C = \frac{2570{,}62 u^{12}}{u^{12} - 1}.$$

Mais $12 \log 1{,}05 = 0{,}25\,427$ et $u^{12} - 1 = 0{,}795\,84$.

Par suite, $\log C = \log 2570{,}62 + 12 \log 1{,}05 + \operatorname{colog} 0{,}795\,84.$

$$\begin{aligned} \log 2570{,}62 &= 3{,}41\,004 \\ 12 \log 1{,}05 &= 0{,}25\,427 \\ \operatorname{colog} 0{,}795\,84 &= 0{,}09\,918 \\ \log C &= 3{,}76\,349. \end{aligned}$$

On trouve $C = 5800{,}86$ fr. et $c = 3230{,}24$ fr.

783. *Si on acquittait dans* 7 *ans un emprunt contracté aujourd'hui, on devrait payer* 1146,80 *fr. de plus que si on l'acquittait dans* 5 *ans. Le taux de l'intérêt composé est* 4 %. *Trouver le montant de l'emprunt.*

a) Par les tables. — La différence entre la valeur acquise après 7 ans et la valeur acquise après 5 ans est 1146,80 fr. On a donc

$$\begin{aligned} 1146,80 &= c[(1,04)^7 - (1,04)^5] \\ &= c(1,315\ 9318 - 1,216\ 6529) = c \times 0,099\ 2789. \end{aligned}$$

Par suite, $$c = \frac{1146,80}{0,099\ 2789} = 11\ 551,30 \text{ fr.}$$

b) Par logarithmes. — On a

$$c = \frac{1146,80}{(1,04)^7 - (1,04)^5}.$$

Mais, $$7 \log 1,04 = 0,11\ 923 \quad \text{et} \quad (1,04)^7 = 1,315\ 91;$$
$$5 \log 1,04 = 0,08\ 517 \quad \text{et} \quad (1,04)^5 = 1,216\ 67.$$

Par suite, $$c = \frac{1146,80}{0,099\ 24},$$

et $$\log c = \log 1146,80 + \text{colog}\ 0,099\ 24.$$

$$\begin{aligned} \log 1146,80 &= 3,05\ 948 \\ \text{colog}\ 0,099\ 24 &= 1,00\ 331 \\ \log c &= 4,06\ 279; \quad c = 11\ 555,50 \text{ fr.} \end{aligned}$$

784. *Une dette de* 25 000 *fr. est payable dans* 9 *années. Le taux de l'intérêt composé est* 5 %. *Quelle somme doit-on payer, si on l'acquitte,* 1° *dans* 3 *ans;* 2° *dans* 12 *ans,* 3 *mois?*

1° *Dans* 3 *ans.*

a) Par les tables. — Six années avant l'échéance, la valeur de la dette est

$$x = 25\ 000 v^6 = 25\ 000 \times 0,746\ 2154 = 18\ 655,39 \text{ fr.}$$

b) Par logarithmes. — On a

$$x = \frac{25000}{(1,05)^6} \quad \text{et} \quad \log x = \log 25\ 000 + 6 \text{ colog } 1,05.$$

$$\begin{aligned} \log 25\ 000 &= 4,39\ 794 \\ 6 \text{ colog } 1,05 &= \bar{1},87\ 286 \\ \log x &= 4,27\ 080; \quad x = 18\ 655,22 \text{ fr.} \end{aligned}$$

2° *Dans* 12 *ans,* 3 *mois.*

a) Par les tables. — Trois ans après l'échéance la valeur de la dette est

$$25\ 000(1,05)^3 = 25\ 000 \times 1,157\ 6250 = 28\ 940,625 \text{ fr.}$$

L'intérêt simple de cette somme en 3 mois est

$$289,406\ 25 \times 5 \times \frac{1}{4} = 361,76 \text{ fr.}$$

La valeur cherchée est 29 302,38 fr.

b) Par logarithmes. — La valeur cherchée est

$$y = 25\ 000(1,05)^{\frac{13}{4}} \quad \text{et on a} \quad \log y = \log 25\ 000 + \frac{13}{4} \log 1,05.$$

$$\begin{aligned}\log 25\,000 &= 4{,}39\,794\\ \frac{13}{4}\log 1{,}05 &= \underline{0{,}06\,887}\\ \log y &= 4{,}46\,681; \quad y = 29\,296 \text{ fr.}\end{aligned}$$

785. *Dans deux ans, un capital, placé autrefois à intérêts composés au taux 4 °/₀, sera devenu 41 500 fr.*

1° *Quelle sera sa valeur dans 5 ans ?*

a) PAR LES TABLES. — On a

$$x = 41\,500(1{,}04)^3 = 41\,500 \times 1{,}124\,864 = 46\,681{,}86.$$

b) PAR LOGARITHMES. — On a

$$\begin{aligned}\log 41\,500 &= 4{,}61\,805\\ 3\log 1{,}04 &= \underline{0{,}05\,110}\\ \log x &= 4{,}66\,915; \quad x = 46\,682{,}22 \text{ fr.}\end{aligned}$$

2° *Quelle était sa valeur, il y a 4 ans ?*

a) PAR LES TABLES. — On a

$$y = 41\,500 v^6 = 41\,500 \times 0{,}790\,3145 = 32\,798{,}05 \text{ fr.}$$

b) PAR LOGARITHMES. — On a

$$y = \frac{41\,500}{(1{,}04)^6} \quad \text{et} \quad \log y = \log 41\,500 + 6 \operatorname{colog} 1{,}04.$$

$$\begin{aligned}\log 41\,500 &= 4{,}61\,805\\ 6 \operatorname{colog} 1{,}04 &= \underline{\bar{1}{,}89\,780}\\ \log y &= 4{,}51\,585; \quad y = 32\,798{,}46 \text{ fr.}\end{aligned}$$

786. 1° *Quel est le temps nécessaire pour qu'un capital, placé à intérêts composés au taux 6 %, soit doublé?*

a) PAR LES TABLES. — On a $(1{,}06)^x = 2.$

La table I, colonne 6 %, donne

$$(1{,}06)^{11} = 1{,}898\,2986; \quad (1{,}06)^{12} = 2{,}012\,1965.$$

L'inconnue x est donc comprise entre 11 et 12. A la suite d'une interpolation, on trouve 11 ans, 10 mois, 21 jours.

b) PAR LOGARITHMES. — On a

$$x = \frac{\log 2}{\log 1{,}06} = \frac{0{,}30\,103}{0{,}02\,531} = \frac{30\,103}{2531}.$$

On trouve 11 ans, 10 mois, 22 jours.

2° *Quel est le temps nécessaire pour qu'un capital, placé à intérêts composés au taux 4,5 °/₀, soit triplé?*

a) PAR LES TABLES. — On a $(1{,}045)^x = 3.$

La table I, colonne 4,5 °/₀, donne

$$(1{,}045)^{24} = 2{,}876\,0138; \quad (1{,}045)^{25} = 3{,}005\,4335.$$

On trouve 24 ans, 11 mois, 15 jours.

b) Par logarithmes. — On a

$$x = \frac{\log 3}{\log 1{,}045} = \frac{0{,}47\,712}{0{,}01\,912} = \frac{47\,712}{1912}.$$

On trouve 24 ans, 11 mois, 14 jours.

787. *Une somme de* 3450 *fr. est devenue* 5352,08 *fr. par la capitalisation des intérêts annuels pendant* 9 *ans. Trouver le taux.*

a) Par les tables. — On a

$$u^9 = \frac{5352{,}08}{3450} = 1{,}551\,3275.$$

La table I, 9e ligne, montre que le taux est approximativement 5 %

b) Par logarithmes. — On a

$$\log u = \frac{\log 5352{,}08 + \operatorname{colog} 3450}{9} = \frac{0{,}19\,071}{9} = 0{,}02\,119.$$

Par suite, $u = 1{,}05$ et le taux est 5 %.

788. *Pour acquitter une dette de* 24 000 fr. *trois ans avant son échéance, j'ai dû payer* 21 000 *fr. Trouver le taux de l'intérêt composé.*

a) Par les tables. — On a

$$u^3 = \frac{24}{21} = \frac{8}{7} = 1{,}142\,8571.$$

A la table I, 3e ligne, on trouve

$$(1{,}045)^3 = 1{,}141\,1661; \quad (1{,}05)^3 = 1{,}157\,6250.$$

A la suite d'une interpolation, on trouve que le taux est approximativement 4,55 %.

b) Par logarithmes. — On a

$$\log u = \frac{\log 8 + \operatorname{colog} 7}{3} = \frac{0{,}05\,799}{3} = 0{,}01\,933.$$

On a donc $u = 1{,}0455$ et le taux est 4,55 %.

789. *De combien faut-il avancer le paiement d'une dette pour ne devoir payer que la moitié de la valeur nominale? Le taux de l'intérêt composé est* 5,5 %.

a) Par les tables. — On a

$$1 \times v^x = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad (1{,}055)^x = 2.$$

La table I, colonne 5,5 %, donne

$$(1{,}055)^{12} = 1{,}901\,2075; \quad (1{,}055)^{13} = 2{,}005\,7739.$$

A la suite d'une interpolation, on trouve 12 ans, 11 mois, 11 jours.

b) Par logarithmes. — On a

$$x = \frac{\log 2}{\log 1{,}055} = \frac{0{,}30\,103}{0{,}02\,325} = \frac{30\,103}{2325}.$$

On trouve 12 ans, 11 mois, 12 jours.

790. *Deux capitaux égaux sont placés à intérêts composés, le premier à* 3 °/₀, *le second à* 6 °/₀. *Après combien de temps le second sera-t-il devenu le double du premier?*

On a l'équation

$$(1{,}06)^x = 2(1{,}03)^x \quad \text{ou} \quad \left(\frac{1{,}06}{1{,}03}\right)^x = 2.$$

Les logarithmes donnent

$$x = \frac{\log 2}{\log 1{,}06 + \operatorname{colog} 1{,}03} = \frac{0{,}30\ 103}{0{,}01\ 247}.$$

On trouve 24 ans, 1 mois, 21 jours.

791. *Un capital de* 20 000 *fr. placé à intérêts composés est devenu* 29 549,11 *fr. après* 8 *années. Combien de temps faut-il encore le laisser placé pour qu'il devienne* 35 000 *fr.?*

a) Par les tables. — L'équation

$$20\ 000u^8 = 29\ 549{,}11 \quad \text{ou} \quad u^8 = 1{,}477\ 4555$$

montre que le taux est 5 °/₀ (Table I, 8e ligne).

Soit x la durée totale du placement. On a

$$20\ 000(1{,}05)^x = 35\ 000 \quad \text{ou} \quad (1{,}05)^x = \frac{35}{20} = 1{,}75.$$

La table I, colonne 5 °/₀, donne

$$(1{,}05)^{11} = 1{,}710\ 3394; \quad (1{,}05)^{12} = 1{,}795\ 8563.$$

A la suite d'une interpolation, on trouve 11 ans, 5 mois, 17 jours.

Rép. 3 ans, 5 mois, 17 jours.

b) Par logarithmes. — L'équation

$$20\ 000u^8 = 29\ 549{,}11$$

donne

$$\log u = \frac{\log 29\ 549{,}11 + \operatorname{colog} 20\ 000}{8}$$

$$= \frac{4{,}47\ 055 + \overline{5}{,}69\ 897}{8} = 0{,}02\ 119.$$

Par suite, $u = 1{,}05$ et le taux est 5 °/₀.

Soit x la durée totale du placement. On a l'équation

$$20\ 000(1{,}05)^x = 35\ 000 \quad \text{ou} \quad (1{,}05)^x = 1{,}75.$$

On en déduit $$x = \frac{\log 1{,}75}{\log 1{,}05} = \frac{0{,}24\ 304}{0{,}02\ 119}.$$

On trouve ainsi 11 ans, 5 mois, 20 jours.

Rép. 3 ans, 5 mois, 20 jours.

792. *Une dette de* 6083,26 *fr. exigible dans* 5 *ans, et une dette de* 6579,66 *fr. exigible dans* 7 *ans ont même valeur actuelle. Trouver le taux de l'intérêt composé et la valeur actuelle.*

On a l'équation
$$6083{,}26v^5 = 6579{,}66v^7;$$
d'où
$$u^2 = \frac{6579{,}66}{6083{,}26}.$$
Les logarithmes et les tables donnent très approximativement $u = 1{,}04$. Le taux est donc 4 %.

La valeur actuelle est donnée par l'équation
$$x = 6083{,}26 \times v^5 = \frac{6083{,}26}{u^5}.$$
On trouve $x = 5000$.

Rép. Le taux est 4 %; la valeur actuelle est 5000 fr.

793. *Deux capitaux ayant pour somme* 168 200 *fr. ont été placés à* 5 %, *le premier pendant* 6 *ans, le second pendant* 8 *ans. Trouver ces deux capitaux, sachant que les valeurs acquises sont égales.*

Soient x et y les deux capitaux. On a le système
$$x + y = 168\,200;$$
$$x(1{,}05)^6 = y(1{,}05)^8.$$
La seconde équation peut s'écrire
$$x = y(1{,}05)^2 \quad \text{ou} \quad x = 1{,}1025y.$$
Le système donne
$$x = 88\,200; \quad y = 80\,000.$$

794. *Une personne doit* 8000 *fr. payables dans deux ans,* 7000 *fr. payables dans* 5 *ans et* 9000 *fr. payables dans* 6 *ans. Que doit-elle payer dans* 3 *ans pour acquitter les trois dettes? Le taux de l'intérêt composé est* 6 %.

Évaluons les trois capitaux et le paiement unique x au moment de l'échéance commune. On a
$$x = 8000u + 7000v^2 + 9000v^3. \qquad (1)$$
a) Par les tables. — En se servant des tables I et II, on trouve
$$x = 22\,266{,}54.$$
b) Par logarithmes. — En multipliant l'équation (1) par u^3, on trouve
$$xu^3 = 8000u^4 + 7000u + 9000;$$
ou
$$x = \frac{8000u^4 + 7000u + 9000}{u^3}.$$
On a
$$\log 8000u^4 = 3{,}90\,309 + 0{,}10\,122; \quad 8000u^4 = 10\,099{,}77.$$
Remplaçons dans (1) et effectuons. Il vient ainsi
$$x = \frac{26\,519{,}77}{u^3} \quad \text{et} \quad \log x = \log 26\,519{,}77 + 3 \operatorname{colog} u.$$
$$\begin{aligned} \log 26\,519{,}77 &= 4{,}42\,357 \\ 3 \operatorname{colog} u &= \bar{1}{,}92\,408 \\ \log x &= 4{,}34\,765; \quad x = 22\,266{,}30. \end{aligned}$$

795. *Deux dettes de* 12 000 *fr. chacune sont exigibles, la première dans* 7 *ans la seconde dans* 30 *ans. Trouver le moment de l'échéance moyenne, si le taux de l'intérêt composé est* 4 %.

Supposons que l'on puisse acquitter les deux dettes en payant 24 000 fr. dans x années. Prenons comme époque d'évaluation l'échéance du premier capital. On a

$$24\,000 v^{x-7} = 12\,000 + 12\,000 v^{23}. \tag{1}$$

a) Par les tables. — On a

$$v^{x-7} = \frac{12\,000 + 12\,000 v^{23}}{24\,000} = 0{,}702\,8632.$$

La table II, colonne 4 %, donne

$$v^8 = 0{,}730\,6902; \quad v^9 = 0{,}702\,5867.$$

Une interpolation donne $x - 7 = 8\frac{55\,654}{56\,207}$.

Rép. 15 ans, 11 mois, 27 jours.

b) Par logarithmes. — En multipliant les deux membres de l'équation (1) par u^{23}, on trouve

$$24\,000 u^{30-x} = 12\,000 u^{23} + 12\,000.$$

Par suite,
$$u^{30-x} = \frac{u^{23}+1}{2},$$

et
$$30 - x = \frac{\log (u^{23} + 1) + \operatorname{colog} 2}{\log 1{,}04}.$$

On a : $23 \log 1{,}04 = 0{,}39\,177; \quad u^{23} = 2{,}464\,72;$
$\log (u^{23} + 1) = \log 3{,}464\,72 = 0{,}53\,967.$

En remplaçant, il vient

$$30 - x = \frac{0{,}238\,64}{0{,}017\,03}; \quad x = \frac{27\,226}{1703}.$$

Rép. 15 ans, 11 mois, 26 jours.

796. *Trouver l'échéance moyenne de deux dettes, l'une de* 18 000 *fr. payable dans* 4 *ans,* 6 *mois, l'autre de* 7800 *fr. payable dans* 8 *ans,* 6 *mois, si le taux de l'intérêt composé est* 4,5 %.

Supposons que l'on puisse acquitter les deux dettes en payant 25 800 fr. dans x années. En prenant comme époque d'évaluation l'échéance du second capital, on a

$$25\,800 u^{\frac{17}{2}-x} = 18\,000 u^4 + 7800$$

ou
$$u^{\frac{17}{2}-x} = \frac{30u^4 + 13}{43}.$$

a) Par les tables. — En remplaçant u^4 par sa valeur, il vient

$$u^{\frac{17}{2}-x} = \frac{48{,}775\,558}{43} = 1{,}134\,3153.$$

La table I, colonne 4,5 °/o donne

$$u^2 = 1,092\ 025; \quad u^3 = 1,141\ 1661.$$

Une interpolation donne

$$\frac{17}{2} - x = 2 + \frac{422\ 903}{491\ 411}; \quad x = \frac{5\ 542\ 537}{982\ 822}.$$

Rép. 5 ans, 7 mois, 21 jours.

b) PAR LOGARITHMES. — On a

$$\frac{17}{2} - x = \frac{\log (30u^4 + 13) + \operatorname{colog} 43}{\log 1,045}.$$

Mais, $\log 30u^4 = \log 30 + 4 \log 1,045 = 1,55\ 359;$

$$30u^4 + 13 = 35,7758; \quad \log (30u^4 + 13) = 1,68\ 820.$$

En remplaçant, il vient

$$\frac{17}{2} - x = \frac{0,05\ 473}{0,01\ 912}; \quad x = \frac{10\ 779}{1912}.$$

Rép. 5 ans, 7 mois, 20 jours.

797. *Quelle somme a été empruntée par un négociant, s'il a dû s'engager à payer* 10 000 *fr. dans* 2 *ans et* 20 000 *fr. dans* 4 *ans? Le taux de l'intérêt composé est* 4,5 °/o.

a) PAR LES TABLES. — La valeur actuelle de la somme empruntée x est égale à la somme des valeurs actuelles des deux paiements.

$$x = 10\ 000v^2 + 20\ 000v^4.$$

La table II, colonne 4,5 °/o, donne les valeurs de v^2 et de v^4.

Rép. 25 928,53 fr.

b) PAR LOGARITHMES. — On a :

$$x = \frac{10\ 000u^2 + 20\ 000}{u^4} = \frac{30\ 920,25}{(1,045)^4};$$

$$\log x = \log 30\ 920,25 + 4 \operatorname{colog} 1,045.$$

$$\log 30\ 920,25 = 4,49\ 024$$

$$4 \operatorname{colog} 1,045 = \overline{1},92\ 353$$

$$\log x = 4,41\ 377; \quad x = 25\ 928,20.$$

Rép., 25 928,20 fr.

798. *Un effet de* 40 000 *fr. ayant été protesté, le tiré s'engage à payer* 50 000 *fr. dans* 5 *ans. Quelle somme doit-il débourser actuellement pour compléter le paiement, le taux de l'intérêt composé étant* 5 °/o ?

a) PAR LES TABLES. — On a

$$x = 40\ 000 - 50\ 000v^5.$$

Rép. 823,69 fr.

b) Par logarithmes. — On a

$$x = \frac{40\,000u^5 - 50\,000}{u^5}.$$

Les tables donnent

$$\begin{array}{ll} \log 40\,000 & = 4{,}60\,206 \\ 5 \log 1{,}05 & = \underline{0{,}10\,595} \\ \log 40\,000u^5 & = 4{,}70\,801; \quad 40\,000u^5 = 51\,051{,}25. \end{array}$$

Par suite, $$x = \frac{1051{,}25}{(1{,}05)^5}.$$

$$\begin{array}{ll} \log\ 1051{,}25 & = 3{,}02\,171 \\ 5 \operatorname{colog} 1{,}05 & = \underline{\bar{1}{,}89\,405} \\ \log x & = 2{,}91\,576; \quad x = 823{,}68. \end{array}$$

Rép. 823,68 fr.

799. *Trois dettes de* 6000 *fr.,* 7500 *fr.,* 9300 *fr. sont respectivement payables dans* 2 *ans,* 4 *ans,* 5 *ans. Le débiteur paie de suite* 10 000 *fr. et souscrit pour le reste un billet payable dans* 4 *ans. Quel est le montant de ce billet, si le taux de l'intérêt composé est* 6 %?

a) Par les tables. — Soit x le montant du billet. Prenons comme époque d'évaluation, l'échéance du billet souscrit par le débiteur. On a

$$x + 10\,000u^4 = 6000u^2 + 7500 + 9300v,$$

ou $$x = 6000u^2 + 7500 + 9300v - 10\,000u^4.$$

En remplaçant u^2, v et u^4 par leur valeur, il vient

$$x = 6741{,}60 + 7500 + 8773{,}58 - 12\,624{,}77 = 10\,390{,}41.$$

Rép. 10 390,41 fr.

b) Par logarithmes. — On a

$$x = \frac{6000u^3 + 7500u + 9300 - 10\,000u^5}{u}. \qquad (1)$$

Les tables donnent :

$$\log 6000u^3 = 3{,}77\,815 + 0{,}07\,592 = 3{,}85\,407;$$
$$6000u^3 = 7146{,}17.$$
$$\log 10\,000u^5 = 4 + 0{,}12\,653 = 4{,}12\,653;$$
$$10\,000u^5 = 13\,382{,}20.$$

Remplaçons dans (1) et effectuons. Il vient

$$x = \frac{7146{,}17 + 7950 + 9300 - 13\,382{,}20}{1{,}06} = \frac{11\,013{,}97}{1{,}06}.$$

$$\begin{array}{ll} \log 11\,013{,}97 & = 4{,}04\,194 \\ \operatorname{colog} 1{,}06 & = \underline{\bar{1}{,}97\,469} \\ \log x & = 4{,}01\,663; \quad x = 10\,390{,}20. \end{array}$$

Rép. 10 390,20 fr.

800. *Un débiteur acquitte deux dettes de* 20 000 *fr. chacune, l'une exigible après* 4 *ans, l'autre après* 6 *ans, en payant* 45 029,17 *fr. après* 8 *ans. Quel est le taux de l'intérêt composé?*

En prenant comme époque d'évaluation l'échéance du paiement unique, on a l'équation

$$20\,000u^4 + 20\,000u^2 = 45\,029{,}17.$$

Cette équation donne

$$u^2 = 1{,}0816 = (1{,}04)^2.$$

Rép. 4 %.

801. *On m'a prêté, au taux de* 5 % *et à intérêts composés, une somme de* 40 000 *fr. Deux ans après l'emprunt, je rembourse* 20 000 *fr.;* 2 *ans plus tard, encore* 20 000 *fr.; puis après* 2 *nouvelles années, le reste. Quel est le montant de ce dernier paiement?*

a) Par les tables. — Prenons comme moment d'évaluation l'époque du dernier paiement. On a

$$x = 40\,000u^6 - 20\,000u^4 - 20\,000u^2$$
$$= 53\,603{,}82 - 24\,310{,}13 - 22\,050.$$

Rép. 7 243,69 fr.

b) Par logarithmes. — On a :

$$\log 40\,000u^6 = 4{,}60\,206 + 0{,}12\,714 = 4{,}72\,920;$$
$$40\,000u^6 = 53\,604{,}40.$$
$$\log 20\,000u^4 = 4{,}30\,103 + 0{,}08\,476 = 4{,}38\,579;$$
$$20\,000u^4 = 24\,310{,}50.$$
$$\log 20\,000u^2 = 4{,}30\,103 + 0{,}04\,238 = 4{,}34\,341;$$
$$20\,000u^2 = 22\,050.$$

Par suite, $x = 53\,604{,}40 - 24\,310{,}50 - 22\,050.$

Rép. 7243,90 fr.

802. *Deux sommes qui valaient ensemble* 60 000 *fr. ont été placées à intérêts composés, la* 1re *à* 4 % *il y a* 8 *ans, la* 2e *à* 6 % *il y a* 5 *ans. Aujourd'hui elles valent ensemble* 80 900,40 *fr. Trouver ces deux sommes.*

a) Par les tables. — Soient x et y les deux sommes. On a le système :

$$x + y = 60\,000; \quad x(1{,}04)^8 + y(1{,}06)^5 = 80\,900{,}40.$$

En éliminant y, on obtient l'équation

$$x[(1{,}04)^8 - (1{,}06)^5] = 80\,900{,}40 - 60\,000(1{,}06)^5. \tag{1}$$

Remplaçons $(1{,}04)^8$ et $(1{,}06)^5$. Il vient ainsi

$$x \times 0{,}030\,3435 = 606{,}87 \quad \text{ou} \quad x = 20\,000.$$

Rép. 20 000 fr. et 40 000 fr.

b) Par logarithmes. — On a

$$\log(1{,}04)^8 = 0{,}13\,627; \qquad (1{,}04)^8 = 1{,}368\,58.$$
$$\log(1{,}06)^5 = 0{,}12\,653; \qquad (1{,}06)^5 = 1{,}338\,22.$$
$$\log 60\,000(1{,}06)^5 = 4{,}90\,468; \quad 60\,000(1{,}06)^5 = 80\,293{,}30.$$

En remplaçant dans l'équation (1), il vient

$$x \times 0{,}030\ 36 = 607{,}10 \quad \text{ou} \quad x = \frac{607{,}10}{0{,}030\ 36}.$$

$$\begin{aligned} \log 607{,}10 &= 2{,}78\ 326 \\ \text{colog } 0{,}030\ 36 &= \underline{\bar{1}{,}51\ 770} \\ \log x &= 4{,}30\ 096; \quad x = 19\ 996{,}80. \end{aligned}$$

Rép. 19 996,80 fr. et 40 003, 20 fr.

803. *Un héritage de* 100 000 *fr. doit être partagé entre trois enfants respectivement âgés de* 11, 15, 17 *années, de façon que les trois parts, placées à intérêts composés au taux* 4,5 °/₀, *aient la même valeur acquise quand chaque enfant atteindra l'âge de* 21 *ans. Trouver les trois parts et la somme dont chaque enfant disposera à l'âge de* 21 *ans.*

a) Par les tables. — Soit x la valeur de chacune des trois parts quand les enfants les toucheront. On a :

$$x(v^{10} + v^6 + v^4) = 100\ 000, \tag{1}$$

ou

$$x \times 2{,}250\ 3847 = 100\ 000.$$

Par suite, $x = 44\ 436{,}847$.

On trouve ensuite :

$$\begin{aligned} &\text{la } 1^{\text{re}} \text{ part} = xv^{10} = x \times 0{,}643\ 9277 = 28\ 614{,}12 \text{ fr.} \\ &\text{la } 2^{\text{e}} \text{ part} = xv^{6} = x \times 0{,}767\ 8957 = 34\ 122{,}86 \text{ fr.} \\ &\text{la } 3^{\text{e}} \text{ part} = xv^{4} = x \times 0{,}838\ 5613 = 37\ 263{,}02 \text{ fr.} \end{aligned}$$

b) Par logarithmes. — L'équation (1) peut s'écrire

$$x = \frac{100\ 000u^{10}}{1 + u^4 + u^6}.$$

Les tables donnent :

$$\begin{aligned} \log u^{10} &= 0{,}19\ 116; & u^{10} &= 1{,}552\ 96. \\ \log u^{6} &= 0{,}11\ 470; & u^{6} &= 1{,}302\ 27. \\ \log u^{4} &= 0{,}07\ 647; & u^{4} &= 1{,}192\ 53. \end{aligned}$$

On trouve ainsi $x = \dfrac{155\ 296}{3{,}4948}$.

$$\begin{aligned} \log 155\ 296 &= 5{,}19\ 116 \\ \text{colog } 3{,}4948 &= \underline{\bar{1}{,}45\ 658} \\ \log x &= 4{,}64\ 774; \quad x = 44\ 436{,}70. \end{aligned}$$

La 1^re part est $\dfrac{x}{u^{10}} = \dfrac{44\ 436{,}70}{(1{,}045)^{10}}$;

$$\log \frac{x}{u^{10}} = \log x + \text{colog } u^{10} = 4{,}64\ 774 + \bar{1}{,}80\ 884 = 4{,}45\ 658;$$

d'où

$$\frac{x}{u^{10}} = 28\ 614.$$

La 2e part est $\qquad \dfrac{x}{u^6} = \dfrac{44\,436{,}70}{(1{,}045)^6};$

$$\log \frac{x}{u^6} = \log x + \text{colog } u^6 = 4{,}64\,774 + \bar{1}{,}88\,530 = 4{,}53\,304;$$

d'où $\qquad \dfrac{x}{u^6} = 34\,122{,}30.$

La 3e part est $\qquad \dfrac{x}{u^4} = \dfrac{44\,436{,}70}{(1{,}045)^4};$

$$\log \frac{x}{u^4} = \log x + \text{colog } u^4 = 4{,}64\,774 + \bar{1}{,}92\,353 = 4{,}57\,127;$$

d'où $\qquad \dfrac{x}{u^4} = 37\,262{,}50.$

CHAPITRE XXV

Annuités.

§ I. — CONSTITUTION D'UN CAPITAL — EMPRUNTS.

804. *Quel est le capital constitué par une annuité de* 10 *termes égaux à* 2000 *fr., le taux de l'intérêt composé étant* 5 °/o :

1° *Au moment du dernier versement ?*

a) Par les tables. — On a (table III) :

$$x = 2000 \times \frac{u^{10} - 1}{i} = 2000 \times 12{,}577\,8925 = 25\,155{,}79 \text{ fr.}$$

b) Par logarithmes. — On a :

$$\log u^{10} = 0{,}21\,189; \quad u^{10} = 1{,}628\,89; \quad u^{10} - 1 = 0{,}628\,89.$$

On a donc $\qquad x = \dfrac{2000 \times 0{,}628\,89}{0{,}05}.$

$$\begin{aligned} \log 2000 &= 3{,}30\,103 \\ \log 0{,}628\,89 &= \bar{1}{,}79\,857 \\ \text{colog } 0{,}05 &= 1{,}30\,103 \\ \hline \log x &= 4{,}40\,063; \quad x = 25\,155{,}30 \text{ fr.} \end{aligned}$$

2° *Un an après le dernier versement?*

a) Par les tables. — On a :

$$y = 2000 \times \frac{u(u^{10} - 1)}{i} = 2000\left[\frac{u^{11} - 1}{i} - 1\right]$$
$$= 2000 \times 13{,}206\,7872 = 26\,413{,}57 \text{ fr.}$$

b) Par logarithmes. — On a

$$y = 2000 \times \frac{u(u^{10} - 1)}{i} = x \times u = 25\,155{,}30 \times 1{,}05.$$

$$\begin{aligned} \log 25\,155{,}30 &= 4{,}40\,063 \\ \log 1{,}05 &= \underline{0{,}02\,119} \\ \log y &= 4{,}42\,182; \quad y = 26\,413{,}10 \text{ fr.} \end{aligned}$$

3° *Dix ans après le dernier versement?*

a) Par les tables. — On a :

$$z = 2000 \times \frac{u^{10} - 1}{i} \times u^{10} = 2000\left[\frac{u^{20} - 1}{i} - \frac{u^{10} - 1}{i}\right]$$

ou $z = 40\,976{,}12$ fr.

b) Par logarithmes. — On a

$$z = xu^{10} = 25\,155{,}30 \times (1{,}05)^{10}.$$

$$\begin{aligned} \log 25\,155{,}30 &= 4{,}40\,063 \\ 10 \log 1{,}05 &= \underline{0{,}21\,189} \\ \log z &= 4{,}61\,252; \quad z = 40\,975 \text{ fr.} \end{aligned}$$

4° *Quelle est la valeur actuelle de cette annuité ?*

a) Par les tables. — On a (table IV)

$$V = 2000 f(10.0{,}05) = 2000 \times 7{,}721\,7349 = 15\,443{,}47 \text{ fr.}$$

b) Par logarithmes. — On a

$$V = \frac{x}{u^{10}} = \frac{25\,155{,}79}{(1{,}05)^{10}}.$$

$$\begin{aligned} \log 25\,155{,}79 &= 4{,}40\,063 \\ 10 \operatorname{colog} 1{,}05 &= \underline{\overline{1},78\,811} \\ \log V &= 4{,}18\,874; \quad V = 15\,443{,}20 \text{ fr.} \end{aligned}$$

805. *Le* 31 *décembre de chaque année,* 18 *fois de suite, vous avez placé dans une banque la somme de* 5000 *fr. Le taux de l'intérêt composé est* 4 %.

1° *Quelle sera la valeur acquise par cette annuité, au moment du dernier versement?*

a) Par les tables. — On a (table III)

$$x = 5000 \times \frac{u^{18} - 1}{i} = 5000 \times 25{,}645\,4129 = 128\,227{,}06 \text{ fr.}$$

b) Par logarithmes. — On a

$$\log (1{,}04)^{18} = 0{,}30\,660; \quad (1{,}04)^{18} = 2{,}025\,81.$$

Par suite, $$x = \frac{5000 \times 1{,}025\,81}{0{,}04}.$$

$$\begin{aligned} \log 5000 &= 3{,}69\,897 \\ \log 1{,}025\,81 &= 0{,}01\,107 \\ \operatorname{colog} 0{,}04 &= \underline{1{,}39\,794} \\ \log x &= 5{,}10\,798; \quad x = 128\,226 \text{ fr.} \end{aligned}$$

2° *Quelle sera la valeur acquise par cette annuité,* 8 *ans après le dernier versement ?*

a) PAR LES TABLES. — On a

$$y = 5000 \times \frac{u^{18} - 1}{i} \times u^8 = 5000\left[\frac{u^{26} - 1}{i} - \frac{u^8 - 1}{i}\right]$$

ou $y = 175\ 487{,}59$ fr.

b) PAR LOGARITHMES. — On a

$$y = xu^8 = 128\ 226 \times (1{,}04)^8.$$

$$\begin{array}{ll} \log 128\ 226 & = 5{,}10\ 798 \\ 8 \log 1{,}04 & = \underline{0{,}13\ 627} \\ \log y & = 5{,}24\ 425 \quad y = 175\ 488 \text{ fr.} \end{array}$$

3° *Quelle somme la banque aurait-elle pu vous avancer,* 3 *ans avant le premier versement, contre l'engagement de fournir cette annuité ?*

a) PAR LES TABLES. — Un an avant le premier versement, la valeur de l'annuité est $5000f(18.0{,}04)$.

Trois ans avant le premier versement, elle est

$$z = 5000f(18.0{,}04) \times v^2 = 5000 \times 12{,}659\ 297 \times 0{,}924\ 5562.$$

Par suite, $z = 58\ 521{,}16$ fr.

b) PAR LOGARITHMES. — On a

$$z = \frac{x}{u^{20}} = \frac{128\ 226}{(1{,}04)^{20}}.$$

$$\begin{array}{ll} \log 128\ 226 & = 5{,}10\ 798 \\ 20 \operatorname{colog} 1{,}04 & = \underline{\bar{1}{,}65\ 933} \\ \log z & = 4{,}76\ 731; \quad z = 58\ 521{,}25 \text{ fr.} \end{array}$$

806. *Dans les exercices suivants, on désigne par* n *le nombre de versements annuels et par* A *le capital constitué au moment du dernier versement. Le terme annuel est* a *fr. et le taux* p %. *Calculer chaque fois l'élément inconnu.*

1° $a = 1200$; $n = 15$; $p = 6$.

a) PAR LES TABLES. — On a (table III) :

$$A = 1200 \times \frac{u^{15} - 1}{i} = 1200 \times 23{,}275\ 9699.$$

Par suite, $A = 27\ 931{,}16$ fr.

b) PAR LOGARITHMES. — On a

$\log u^{15} = 0{,}37\ 959$; $u^{15} = 2{,}396\ 56$; $u^{15} - 1 = 1{,}396\ 56$.

On a donc $A = \dfrac{1200 \times 1{,}396\ 56}{0{,}06}$.

$$\begin{array}{ll} \log 1200 & = 3{,}07\ 918 \\ \log 1{,}396\ 56 & = 0{,}14\ 506 \\ \operatorname{colog} 0{,}06 & = \underline{1{,}22\ 185} \\ \log A & = 4{,}44\ 609; \quad A = 27\ 931{,}25 \text{ fr.} \end{array}$$

2° $a = 8000$; $n = 17$; $p = 5$.

a) PAR LES TABLES. — On a

$$A = 8000 \times \frac{u^{17} - 1}{i} = 8000 \times 25{,}840\ 3664.$$

Par suite, $A = 206\ 722{,}93$ fr.

b) PAR LOGARITHMES. — On a :

$\log u^{17} = 0{,}36\ 022$; $u^{17} = 2{,}292\ 05$; $u^{17} - 1 = 1{,}292\ 05$.

Par suite, $A = \dfrac{8000 \times 1{,}292\ 05}{0{,}05}$.

$$\begin{aligned} \log 8000 &= 3{,}90\ 309 \\ \log 1{,}292\ 05 &= 0{,}11\ 128 \\ \operatorname{colog} 0{,}05 &= 1{,}30\ 103 \\ \log A &= 5{,}31\ 540; \quad A = 206\ 729 \text{ fr.} \end{aligned}$$

3° $a = 20\ 000$; $n = 8$; $p = 5{,}6$.

On a $A = 20\ 000 \times \dfrac{u^8 - 1}{0{,}056}$.

Les logarithmes donnent :

$\log u^8 = 0{,}18\ 931$; $u^8 = 1{,}546\ 36$; $u^8 - 1 = 0{,}546\ 36$.

On a donc $A = \dfrac{20\ 000 \times 0{,}546\ 36}{0{,}056}$.

$$\begin{aligned} \log 20\ 000 &= 4{,}30\ 103 \\ \log 0{,}546\ 36 &= \bar{1}{,}73\ 748 \\ \operatorname{colog} 0{,}056 &= 1{,}25\ 181 \\ \log A &= 5{,}29\ 032; \quad A = 195\ 127 \text{ fr.} \end{aligned}$$

4° $A = 200\ 000$; $n = 10$; $p = 4{,}5$.

a) PAR LES TABLES. — On a (table V) :

$$a = 200\ 000 \times \frac{i}{u^{10} - 1} = 200\ 000 \times 0{,}081\ 3788.$$

Par suite, $a = 16\ 275{,}76$ fr.

b) PAR LOGARITHMES. — On a :

$\log u^{10} = 0{,}19\ 116$; $u^{10} = 1{,}552\ 96$; $u^{10} - 1 = 0{,}552\ 96$.

On a donc $a = \dfrac{200\ 000 \times 0{,}045}{0{,}552\ 96} = \dfrac{9000}{0{,}552\ 96}$.

$$\begin{aligned} \log 9000 &= 3{,}95\ 424 \\ \operatorname{colog} 0{,}552\ 96 &= 0{,}25\ 730 \\ \log a &= 4{,}21\ 154; \quad a = 16\ 275{,}80 \text{ fr.} \end{aligned}$$

5° $A = 150\ 000$; $n = 30$; $p = 5{,}5$.

a) PAR LES TABLES. — On a

$$a = 150\ 000 \times \frac{i}{u^{30} - 1} = 150\ 000 \times 0{,}013\ 8054.$$

Par suite, $a = 2070{,}81$ fr.

b) PAR LOGARITHMES. — On a :

$$\log u^{30} = 0{,}69\ 7575; \quad u^{30} = 4{,}983\ 94; \quad u^{30} - 1 = 3{,}983\ 94.$$

Par suite, $a = \dfrac{150\ 000 \times 0{,}055}{3{,}983\ 94} = \dfrac{8250}{3{,}983\ 94}$.

$$\begin{aligned} \log 8250 &= 3{,}91\ 645 \\ \text{colog } 3{,}983\ 94 &= \bar{1}{,}39\ 969 \\ \log a &= 3{,}31\ 614; \quad a = 2070{,}81 \text{ fr.} \end{aligned}$$

6° $A = 120\ 000$; $n = 10$; $p = 4{,}3$.

On a $a = 120\ 000 \times \dfrac{i}{u^{10} - 1}$.

Les tables de logarithmes donnent :

$$\log u^{10} = 0{,}18\ 284; \quad u^{10} = 1{,}5235; \quad u^{10} - 1 = 0{,}5235.$$

En remplaçant, il vient

$$a = \frac{120\ 000 \times 0{,}043}{0{,}5235} = \frac{5160}{0{,}5235}.$$

$$\begin{aligned} \log 5160 &= 3{,}71\ 265 \\ \text{colog } 0{,}5235 &= 0{,}28\ 108 \\ \log a &= 3{,}99\ 373; \quad a = 9856{,}75 \text{ fr.} \end{aligned}$$

7° $A = 137\ 189{,}33$; $a = 7500$; $p = 4$.

a) PAR LES TABLES. — On a

$$\frac{u^n - 1}{i} = \frac{A}{a} = \frac{137\ 189{,}33}{7500} = 18{,}291\ 9106.$$

En consultant la table III, colonne 4 %, on voit que $n = 14$.

b) PAR LOGARITHMES. — On applique la formule

$$n = \frac{\log (Ai + a) + \text{colog } a}{\log u}.$$

On a :

$$Ai + a = 12\ 987{,}57; \quad \log (Ai + a) = 4{,}11\ 353; \quad \text{colog } a = \bar{4}{,}12\ 494.$$

On en déduit $n = \dfrac{0{,}23\ 847}{0{,}01\ 703} = 14$(environ).

8° $A = 100\ 000$; $a = 3024{,}26$; $p = 5$.

a) PAR LES TABLES. — On a

$$\frac{u^n - 1}{i} = \frac{100\ 000}{3024{,}26} \quad \text{ou} \quad \frac{i}{u^n - 1} = \frac{3024{,}26}{100\ 000} = 0{,}030\ 2426.$$

En consultant la table V, colonne 5 %, on voit que $n = 20$.

b) PAR LOGARITHMES. — On applique la formule

$$n = \frac{\log (Ai + a) + \text{colog } a}{\log u}.$$

On a

$Ai + a = 8024,26$; $\log(Ai + a) = 3,90\,441$; $\operatorname{colog} a = \bar{4},51\,938$.

Par suite, $n = \dfrac{0,42\,379}{0,02\,119} = 20$ (environ).

9° $A = 300\,000$; $a = 5864,82$; $p = 5,5$.

a) PAR LES TABLES. — On a

$$\frac{u^n - 1}{i} = \frac{300\,000}{5864,82} \quad \text{ou} \quad \frac{i}{u^n - 1} = \frac{5864,82}{300\,000} = 0,019\,5494.$$

En consultant la table V, colonne 5,5 %, on voit que $n = 25$.

b) PAR LOGARITHMES. — On applique la formule

$$n = \frac{\log(Ai + a) + \operatorname{colog} a}{\log u}.$$

On a :

$Ai + a = 22\,364,82$; $\log(Ai + a) = 4,34\,957$; $\operatorname{colog} a = \bar{4},23\,174$.

Par suite, $n = \dfrac{0,58\,131}{0,02\,325} = 25$ (environ).

10° $A = 216\,042,28$; $a = 20\,000$; $n = 9$.

On a $$\frac{u^9 - 1}{i} = \frac{216\,042,28}{20\,000} = 10,802\,114.$$

En consultant la table III, 9e ligne, on voit que le taux est 4,5 %.

11° $A = 75\,000$; $a = 4600$; $n = 12$.

On a $$\frac{u^{12} - 1}{i} = \frac{75\,000}{4600} = 16,304\,3478.$$

La table III donne :

$$\frac{(1,05)^{12} - 1}{0,05} = 15,917\,1265; \quad \frac{(1,055)^{12} - 1}{0,055} = 16,385\,5906.$$

En faisant une interpolation, on trouve

$$\frac{p - 5}{5,5 - 5} = \frac{3\,872\,213}{4\,684\,641}.$$

De cette égalité, on déduit que le taux est 5,413 %.

12° $A = 200\,000$; $a = 2000$; $n = 40$.

On a $$\frac{u^{40} - 1}{i} = \frac{200\,000}{2000} = 100.$$

La table III donne

$$\frac{(1,04)^{40} - 1}{0,04} = 95,025\,5157; \quad \frac{(1,045)^{40} - 1}{0,045} = 107,030\,3231.$$

En faisant une interpolation, on trouve

$$\frac{p - 4}{4,5 - 4} = \frac{49\,744\,843}{120\,048\,074}.$$

De cette égalité, on déduit que le taux est 4,207 %.

807. *Par 20 placements annuels, on veut former un capital de 160 000 fr. Le taux de l'intérêt composé est 6 °/₀. Calculer le terme de l'annuité dans les trois cas suivants :*

1° *Le capital doit être constitué au moment du dernier versement.*

a) Par les tables. — On a (table V) :

$$a = 160\,000 \times \frac{i}{u^{20} - 1} = 160\,000 \times 0{,}027\,1846 = 4349{,}536 \text{ fr.}$$

b) Par logarithmes. — On a :

$\log u^{20} = 0{,}50\,612;\quad u^{20} = 3{,}207\,15;\quad u^{20} - 1 = 2{,}207\,15.$

Par suite, $$a = \frac{160\,000 \times 0{,}06}{2{,}207\,15}.$$

$$\begin{aligned} \log 160\,000 &= 5{,}20\,412 \\ \log 0{,}06 &= \bar{2}{,}77\,815 \\ \text{colog } 2{,}207\,15 &= \bar{1}{,}65\,617 \\ \log a &= 3{,}63\,844; \quad a = 4349{,}50 \text{ fr.} \end{aligned}$$

2° *Le capital doit être constitué un an après le dernier versement.*

On doit avoir $$160\,000 = a' \times \frac{u^{20} - 1}{i} \times u.$$

D'où $$a' = \frac{a}{u} = av.$$

a) Par les tables. — On a (table II) :

$$a' = 4349{,}536 \times 0{,}943\,3962 = 4103{,}34 \text{ fr.}$$

b) Par logarithmes. — On a

$$a' = \frac{a}{u} = \frac{4349{,}50}{1{,}06}.$$

$$\begin{aligned} \log 4349{,}50 &= 3{,}63\,844 \\ \text{colog } 1{,}06 &= \bar{1}{,}97\,469 \\ \log a' &= 3{,}61\,313; \quad a' = 4103{,}27 \text{ fr.} \end{aligned}$$

3° *Le capital doit être constitué cinq ans après le dernier versement.*

On doit avoir $$160\,000 = a'' \times \frac{u^{20} - 1}{i} \times u^5.$$

D'où $$a'' = \frac{a}{u^5} = av^5.$$

a) Par les tables. — On a (table II) :

$$a'' = av^5 = 4349{,}536 \times 0{,}747\,2582 = 3250{,}23 \text{ fr.}$$

b) Par logarithmes. — On a

$$a'' = \frac{a}{u^5} = \frac{4349{,}50}{(1{,}06)^5}.$$

$$\begin{aligned} \log 4349{,}50 &= 3{,}63\,844 \\ 5 \text{ colog } 1{,}06 &= \bar{1}{,}87\,347 \\ \log a'' &= 3{,}51\,191; \quad a'' = 3250{,}21 \text{ fr.} \end{aligned}$$

808. *On veut constituer un capital de* 100 000 *fr. par des versements annuels de* 10 000 *fr. Le taux de l'intérêt composé est* 4,5 °/₀. *Trouver le nombre de termes que l'annuité doit comprendre dans chacun des cas indiqués ci-après. On trouve des réponses fractionnaires. Calculer chaque fois le versement supplémentaire à effectuer au moment du versement du dernier terme complet.*

1° *Le capital doit être constitué au moment du dernier versement.*

a) PAR LES TABLES. — On a

$$100\,000 = 10\,000 \times \frac{u^x - 1}{i}.$$

D'où

$$\frac{u^x - 1}{i} = 10. \qquad (1)$$

La table III, colonne 4,5 °/₀, montre que x est compris entre 8 et 9. Il y aura donc 8 versements de 10 000 fr. dont le dernier devra être augmenté d'un versement supplémentaire égal à

$$100\,000 - 10\,000 \times \frac{u^8 - 1}{i} = 6199,86 \text{ fr.}$$

b) PAR LOGARITHMES. — L'égalité (1) donne

$$u^x = 1,45,$$

ou

$$x = \frac{\log 1,45}{\log 1,045} = \frac{0,16\,137}{0,01\,912} = 8,4....$$

Il y aura donc 8 versements de 10 000 fr. dont le dernier devra être augmenté d'un versement supplémentaire égal à

$$100\,000 - 10\,000 \times \frac{u^8 - 1}{i}.$$

$$\log u^8 = 0,15\,293; \quad u^8 = 1,4221; \quad u^8 - 1 = 0,4221.$$

$$\log \frac{u^8 - 1}{i} = \log 0,4221 + \text{colog } 0,045 = 0,97\,221.$$

On a donc $\dfrac{u^8 - 1}{i} = 9,3802$ et le versement supplémentaire est

$$100\,000 - 93\,802 = 6198 \text{ fr.}$$

2° *Le capital doit être constitué un an après le dernier versement.*

a) PAR LES TABLES. — On doit avoir

$$100\,000 = 10\,000 \times \frac{(u^x - 1)u}{i},$$

ou

$$\frac{u^x - 1}{i} = 10v = 9,569\,378. \qquad (1)$$

La table III, colonne 4,5 °/₀, montre que x est compris entre 8 et 9. Le versement supplémentaire à effectuer en même temps que le versement du 8ᵉ terme est égal à l'excès de la valeur du capital à constituer sur la valeur de l'annuité, les deux étant évaluées au moment du versement du 8ᵉ terme de 10 000 fr. Il vaut donc

$$100\,000v - 10\,000 \times \frac{u^8 - 1}{i} = 95\,693,78 - 93\,800,14 = 1893,64 \text{ fr.}$$

b) PAR LOGARITHMES. — L'égalité (1) donne

$$u^x = \frac{10i}{u} + 1 = \frac{1,495}{1,045}.$$

D'où $x = \dfrac{\log 1,495 + \text{colog } 1,045}{\log 1,045} = \dfrac{0,15\ 552}{0,01\ 912} = 8,1....$

Le versement supplémentaire à ajouter au 8^e terme est

$$\frac{100\ 000}{u} - 10\ 000 \times \frac{u^8 - 1}{i}.$$

Les tables donnent :

$$\log \frac{100\ 000}{u} = 5 + \bar{1},98\ 088 = 4,98\ 088; \quad \frac{100\ 000}{u} = 95\ 692,50.$$

Le versement supplémentaire est donc

$$95\ 692,50 - 93\ 802 = 1890,50 \text{ fr.}$$

3^o *Le capital doit être constitué trois ans après le dernier versement.*

a) PAR LES TABLES. — On doit avoir

$$100\ 000 = 10\ 000 \times \frac{(u^x - 1)u^3}{i},$$

ou
$$\frac{u^x - 1}{i} = 10v^3 = 8,762\ 966.$$

La table III, colonne 4,5 %, montre que x est compris entre 7 et 8. Le versement supplémentaire à ajouter au 7^e terme est

$$100\ 000v^3 - 10\ 000 \times \frac{u^7 - 1}{i} = 7438,14 \text{ fr.}$$

b) PAR LOGARITHMES. — Le versement supplémentaire à ajouter au 7^e terme est

$$\frac{100\ 000}{u^3} - 10\ 000 \times \frac{u^7 - 1}{i}.$$

Les tables donnent :

$$\log \frac{100\ 000}{u^3} = 5 + \bar{1},94\ 265 = 4,94\ 265; \quad \frac{100\ 000}{u^3} = 87\ 630;$$

$$\log u^7 = 0,13\ 381; \quad u^7 = 1,360\ 84; \quad u^7 - 1 = 0,360\ 84;$$

$$\log 10\ 000 \times \frac{u^7 - 1}{i} = \log \frac{3608,40}{0,045} = 4,90\ 411;$$

$$10\ 000 \times \frac{u^7 - 1}{i} = 80\ 188.$$

Le versement supplémentaire est donc

$$87\ 630 - 80\ 188 = 7442 \text{ fr.}$$

809. *Une personne a placé* 105 000 *fr. dans une banque au taux de* 6 %. *Elle retire chaque année* 1200 *fr. et le reste des intérêts se cumule avec le capital. Quelle sera la valeur de son dépôt après* 6 *années?*

La valeur du dépôt après le 6^e retrait de 1200 fr. est égale à l'excès de la valeur acquise par le capital de 105 000 fr., sur la valeur acquise par l'annuité que forment les 6 retraits de 1200 fr., l'époque d'évaluation du capital et de l'annuité étant le moment du 6^e retrait. La valeur du dépôt est donc

$$x = 105\,000u^6 - 1200 \times \frac{u^6 - 1}{i}.$$

a) PAR LES TABLES. — On a :

$$105\,000u^6 = 105\,000 \times 1{,}418\,5191 = 148\,944{,}51.$$
$$1200 \times \frac{u^6 - 1}{i} = 1200 \times 6{,}975\,3185 = 8370{,}38.$$

Rép. $x = 140\,574{,}13$ fr.

b) PAR LOGARITHMES. — On a :

$\log\ 105\,000u^6 = 5{,}02\,119 + 0{,}15\,184 = 5{,}17\,303;$
$105\,000u^6 = 148\,947;$
$\log u^6 = 0{,}15\,184;\quad u^6 = 1{,}418\,53;\quad u^6 - 1 = 0{,}418\,53;$

$$1200 \times \frac{u^6 - 1}{i} = \frac{1200 \times 0{,}418\,53}{0{,}06} = 20\,000 \times 0{,}418\,53 = 8370{,}60.$$

Par suite, $x = 148\,947 - 8370{,}60.$
Rép. $x = 140\,576{,}40$ fr.

810. *Après combien d'années, cette personne* (**809**) *a-t-elle retiré son dépôt, sachant qu'il était devenu* 172 222 fr. ?

On a l'équation

$$172\,222 = 105\,000u^x - 1200\,\frac{u^x - 1}{0{,}06}.$$

Cette équation donne $u^x = 1{,}790\,8471.$
La table I ou les logarithmes donnent alors $x = 10.$
Rép. Après 10 années.

811. *Dans les exercices suivants, on désigne par* V *le capital emprunté et par* n *le nombre de termes de l'annuité qui sert à le rembourser. Le terme annuel est* a *fr. et le taux* p °/₀. *Le* 1^er *versement a lieu un an après l'emprunt. Calculer chaque fois l'élément inconnu.*

1° $a = 3000;\quad n = 20;\quad p = 6.$

a) PAR LES TABLES. — On a (table IV) :

$$V = 3000\,f(n, i) = 3000 \times 11{,}469\,9212.$$

On trouve ainsi $V = 34\,409{,}76$ fr.

b) PAR LOGARITHMES. — On a

$$V = 3000 \times \frac{1 - v^{20}}{i} = 3000 \times \frac{u^{20} - 1}{iu^{20}}.$$

Les logarithmes donnent :
$\log u^{20} = 0{,}50\,612;\quad u^{20} = 3{,}207\,15;\quad u^{20} - 1 = 2{,}207\,15.$

En remplaçant, il vient

$$V = \frac{3000 \times 2{,}207\ 15}{0{,}06 \times 3{,}207\ 15} = \frac{220\ 715}{6{,}4143}.$$

$$\begin{aligned} \log 220\ 715 &= 5{,}34\ 383 \\ \text{colog}\ 6{,}4143 &= \bar{1}{,}19\ 285 \\ \log V &= 4{,}53\ 668; \quad V = 34\ 410 \text{ fr.} \end{aligned}$$

2° $a = 9700$; $n = 15$; $p = 4$.

a) Par les tables. — On a

$$V = 9700 f(n,i) = 9700 \times 11{,}118\ 3874.$$

Par suite, $V = 107\ 848{,}36$ fr.

b) Par logarithmes. — On a

$$V = 9700 \times \frac{u^{15} - 1}{iu^{15}}.$$

Les logarithmes donnent

$$\log u^{15} = 0{,}25\ 550; \quad u^{15} = 1{,}800\ 96; \quad u^{15} - 1 = 0{,}800\ 96.$$

En remplaçant, il vient

$$V = \frac{9700 \times 0{,}800\ 96}{0{,}04 \times 1{,}800\ 96}.$$

$$\begin{aligned} \log 9700 &= 3{,}98\ 677 \\ \log 0{,}800\ 96 &= \bar{1}{,}90\ 361 \\ \text{colog}\ 0{,}04 &= 1{,}39\ 794 \\ \text{colog}\ 1{,}800\ 96 &= \bar{1}{,}74\ 450 \\ \log V &= 5{,}03\ 282; \quad V = 107\ 850 \text{ fr.} \end{aligned}$$

3° $a = 520$; $n = 60$; $p = 5$.

a) Par les tables. — On a

$$V = 520 \times \frac{1 - v^{60}}{i}.$$

La table II donne

$$v^{60} = v^{50} \times v^{10} = 0{,}053\ 5355.$$

Par suite,
$$V = \frac{520}{0{,}05} \times 0{,}946\ 4645.$$

On en déduit $V = 9843{,}23$ fr.

b) Par logarithmes. — On a

$$V = 520 \times \frac{u^{60} - 1}{iu^{60}}.$$

Les logarithmes donnent

$$\log u^{60} = 1{,}27\ 136; \quad u^{60} = 18{,}6792; \quad u^{60} - 1 = 17{,}6792.$$

Par suite,
$$V = \frac{520 \times 17{,}6792}{0{,}05 \times 18{,}6792}.$$

$$\begin{aligned} \log 520 &= 2{,}71\ 600 \\ \log 17{,}6792 &= 1{,}24\ 746 \\ \text{colog}\ 0{,}05 &= \bar{1}{,}30\ 103 \\ \text{colog}\ 18{,}6792 &= \bar{2}{,}72\ 864 \\ \log V &= 3{,}99\ 313; \quad V = 9843 \text{ fr.} \end{aligned}$$

4° $V = 60\ 000$; $n = 8$; $p = 3$.

a) PAR LES TABLES. — La table V donne

$$a = V \times \frac{1}{f(n,i)} = 60\ 000 \times 0{,}142\ 4564.$$

Par suite, $a = 8547{,}38$ fr.

b) PAR LOGARITHMES. — On a

$$a = V \times \frac{i}{1 - v^8} = \frac{Viu^8}{u^8 - 1}.$$

Les logarithmes donnent

$\log u^8 = 0{,}10\ 270$; $u^8 = 1{,}266\ 77$; $u^8 - 1 = 0{,}266\ 77$.

Par suite,

$$a = \frac{60\ 000 \times 0{,}03 \times 1{,}266\ 77}{0{,}266\ 77} = \frac{1800 \times 1{,}266\ 77}{0{,}266\ 77}.$$

$$\begin{aligned}
\log 1800 &= 3{,}25\ 527 \\
\log 1{,}266\ 77 &= 0{,}10\ 270 \\
\text{colog } 0{,}266\ 77 &= 0{,}57\ 386 \\
\log a &= 3{,}93\ 183; \quad a = 8547{,}40 \text{ fr.}
\end{aligned}$$

5° $V = 250\ 000$; $n = 12$; $p = 6$.

a) PAR LES TABLES. — La table V donne

$$a = V \times \frac{1}{f(n,i)} = 250\ 000 \times 0{,}119\ 2770.$$

En effectuant, on trouve $a = 29\ 819{,}25$ fr.

b) PAR LOGARITHMES. — On a

$$a = V \times \frac{i}{1 - v^{12}} = \frac{Viu^{12}}{u^{12} - 1}.$$

Les logarithmes donnent

$\log u^{12} = 0{,}30\ 367$; $u^{12} = 2{,}012\ 19$; $u^{12} - 1 = 1{,}012\ 19$.

Par suite,

$$a = \frac{250\ 000 \times 0{,}06 \times 2{,}012\ 19}{1{,}012\ 19} = \frac{15\ 000 \times 2{,}012\ 19}{1{,}012\ 19}.$$

$$\begin{aligned}
\log 15\ 000 &= 4{,}17\ 609 \\
\log 2{,}012\ 19 &= 0{,}30\ 367 \\
\text{colog } 1{,}012\ 19 &= \bar{1}{,}99\ 474 \\
\log a &= 4{,}47\ 450; \quad a = 29\ 819{,}30 \text{ fr.}
\end{aligned}$$

6° $V = 100\ 000$; $n = 5$; $p = 5{,}2$.

On a
$$a = \frac{Viu^5}{u^5 - 1}.$$

Les logarithmes donnent

$\log u^5 = 0{,}11\ 008$; $u^5 = 1{,}288\ 48$; $u^5 - 1 = 0{,}288\ 48$.

On a donc $$a = \frac{5200 \times 1{,}288\ 48}{0{,}288\ 48}.$$

$$\begin{array}{ll}
\log 5200 & = 3{,}71\ 600 \\
\log 1{,}288\ 48 & = 0{,}11\ 008 \\
\operatorname{colog} 0{,}288\ 48 & = \underline{0{,}53\ 988} \\
\log a & = 4{,}36\ 596; \quad a = 23\ 225{,}30 \text{ fr.}
\end{array}$$

7° $V = 83\ 037{,}26$; $a = 8000$; $p = 5$.

a) PAR LES TABLES. — La formule $V = af(n,i)$ donne

$$f(n,i) = \frac{83\ 037{,}26}{8000} = 10{,}379\ 658\ 75.$$

En consultant la table IV, colonne 5 %, on voit que $n = 15$.

b) PAR LOGARITHMES. — On applique la formule

$$n = \frac{\log a + \operatorname{colog}(a - Vi)}{\log u}.$$

$$\begin{array}{rl|rl}
a = & 8000 & \log a = & 3{,}90\ 309 \\
Vi = & \underline{4151{,}863} & \operatorname{colog}(a - Vi) = & \underline{\bar{4}{,}41\ 474} \\
a - Vi = & 3848{,}137 & & 0{,}31\ 783.
\end{array}$$

Par suite, $n = \dfrac{0{,}31\ 783}{0{,}02\ 119} = 15.$

8° $V = 22\ 800$; $a = 4420{,}43$; $p = 4{,}5$.

a) PAR LES TABLES. — La formule $V = af(n,i)$ donne

$$\frac{1}{f(n,i)} = \frac{4420{,}43}{22\ 800} = 0{,}193\ 8785.$$

En consultant la table V, colonne 4,5 %, on voit que $n = 6$.

b) PAR LOGARITHMES. — On applique la formule

$$n = \frac{\log a + \operatorname{colog}(a - Vi)}{\log u}.$$

$$\begin{array}{rl|rl}
a = & 4420{,}43 & \log a = & 3{,}64\ 546 \\
Vi = & \underline{1026} & \operatorname{colog}(a - Vi) = & \underline{\bar{4}{,}46\ 923} \\
a - Vi = & 3394{,}43 & & 0{,}11\ 469.
\end{array}$$

Par suite, $n = \dfrac{0{,}11\ 469}{0{,}01\ 912} = 6.$

9° $V = 1\ 000\ 000$; $a = 135\ 868$; $p = 6$.

a) PAR LES TABLES. — On a

$$\frac{1}{f(n,i)} = \frac{135\ 868}{1\ 000\ 000} = 0{,}135\ 868.$$

En consultant la table V, colonne 6 %, on voit que $n = 10$.

b) PAR LOGARITHMES. — On a :

$$\begin{array}{rl|rl}
a = & 135\ 868 & \log a = & 5{,}13\ 312 \\
Vi = & \underline{60\ 000} & \operatorname{colog}(a - Vi) = & \underline{\bar{5}{,}11\ 994} \\
a - Vi = & 75\ 868 & & 0{,}25\ 306.
\end{array}$$

On a donc $n = \frac{0,25\ 306}{0,02\ 53059} = 10.$

10° $V = 100\ 000$; $a = 10\ 129,42$; $n = 15$.
On a

$$100\ 000 = 10\ 129,42 \times f(15,i) \quad \text{et} \quad \frac{1}{f(15,i)} = 0,101\ 2942.$$

A la table V, 15e ligne, on voit que le taux est compris entre 5,5 % et 6 %. Une interpolation donne comme réponse 5,75 %.

11° $V = 350\ 000$; $a = 35\ 000$; $n = 14$.
On a

$$350\ 000 = 35\ 000 f(14,i) \quad \text{et} \quad \frac{1}{f(14,i)} = 0,1.$$

Dans la table V, 14e ligne, on trouve

$$\frac{1}{f(14.0,045)} = 0,097\ 8203 \quad \text{et} \quad \frac{1}{f(14.0,05)} = 0,101\ 0240.$$

On en déduit l'équation

$$\frac{p - 4,5}{5 - 4,5} = \frac{21\ 797}{32\ 037}.$$

En résolvant cette équation, on trouve que le taux est 4,84 %.

12° $V = 255\ 000$; $a = 15\ 000$; $n = 40$.
On a

$$255\ 000 = 15\ 000 f(40,i) \quad \text{et} \quad f(40,i) = \frac{255}{15} = 17.$$

Dans la table IV, 40e ligne, on trouve

$$f(40.0,05) = 17,159\ 0864 \quad \text{et} \quad f(40.0,055) = 16,046\ 1247.$$

On en déduit l'équation

$$\frac{p - 5}{5,5 - 5} = \frac{0,159\ 0864}{1,112\ 9617}.$$

En résolvant cette équation, on trouve que le taux est 5,071 %

812. *Un particulier emprunte* 80 000 *fr. à* 4 % *contre l'engagement de verser une annuité de* 15 *termes. Calculer les versements annuels dans les deux cas suivants :*

1° *Le premier versement doit être effectué un an après l'emprunt.*

a) Par les tables. — On a (table V)

$$a = 80\ 000 \times \frac{1}{f(15.0,04)} = 80\ 000 \times 0,089\ 9411.$$

Rép. $a = 7195,29$ fr.

b) Par logarithmes. — La formule

$$a = \frac{Viu^n}{u^n - 1} \quad \text{donne} \quad a = \frac{80\,000 \times 0{,}04 \times (1{,}04)^{15}}{(1{,}04)^{15} - 1}.$$

Les tables donnent :

$$\log u^{15} = 0{,}25\,550; \quad u^{15} = 1{,}800\,95; \quad u^{15} - 1 = 0{,}800\,95.$$

Par suite, $$a = \frac{80\,000 \times 0{,}04 \times 1{,}800\,95}{0{,}800\,95}.$$

$$\begin{aligned}
\log 80\,000 &= 4{,}90\,309 \\
\log 0{,}04 &= \bar{2}{,}60\,206 \\
\log 1{,}800\,95 &= 0{,}25\,550 \\
\text{colog } 0{,}800\,95 &= 0{,}09\,639 \\
\log a &= 3{,}85\,704; \quad a = 7195{,}17 \text{ fr.}
\end{aligned}$$

2° *Le premier versement doit être effectué* 4 *ans après l'emprunt.*

Un an avant le versement du 1er terme, que nous désignons par a', la valeur de l'annuité est $a'f(15;0{,}04)$.

Quatre ans avant le versement du 1er terme, la valeur de l'annuité est $a'f(15{,}0{,}04)v^3$ ou 80 000.

Par suite, $$80\,000 = a'f(15{,}0{,}04)v^3,$$

et $$a' = 80\,000u^3 \times \frac{1}{f(15{,}0{,}04)}.$$

En somme, on obtient le terme en multipliant le terme trouvé au 1° par u^3.

a) Par les tables. — On a

$$a' = 7195{,}29u^3 = 7195{,}29 \times 1{,}124\,864.$$

D'où $a' = 8093{,}72$ fr.

b) Par logarithmes. — On a $a' = 7195{,}17 \times (1{,}04)^3$.

$$\begin{aligned}
\log 7195{,}17 &= 3{,}85\,704 \\
\log (1{,}04)^3 &= 0{,}05\,110 \\
\log a' &= 3{,}90\,814; \quad a' = 8093{,}60 \text{ fr.}
\end{aligned}$$

813. *Un emprunt de* 110 000 *fr. doit être remboursé par des versements annuels de* 20 000 *fr., plus, le cas échéant, un versement supplémentaire à effectuer un an après le versement du dernier terme. Calculer le nombre de termes et le versement supplémentaire, le taux de l'intérêt composé étant* 6 %.

a) Par les tables. — L'équation $110\,000 = 20\,000f(x.0{,}06)$ donne

$$f(x.0{,}06) = 5{,}5.$$

La table IV, colonne 6 %, montre que x est compris entre 6 et 7. L'annuité comprendra 6 termes plus un versement supplémentaire.

Le versement supplémentaire à effectuer à la fin de la 7e année est égal à l'excès de la valeur de la somme empruntée sur la valeur de l'annuité déjà versée, la fin de la 7^e année étant l'époque d'évaluation. Le versement supplémentaire vaut donc

$$110\,000u^7 - 20\,000 \times \frac{u(u^6-1)}{i}.$$

Les tables I et III donnent :

$$110\,000u^7 = 110\,000 \times 1{,}503\,6303 = 165\,399{,}33;$$

$$20\,000 \times \frac{u(u^6-1)}{i} = 20\,000\left[\frac{u^7-1}{i} - 1\right] = 147\,876{,}75.$$

Le montant du versement supplémentaire est 17 522,58 fr.

b) PAR LOGARITHMES. — L'équation

$$110\,000 = 20\,000\, f(x.0{,}06)$$

donne

$$u^x = \frac{20\,000}{20\,000 - 110\,000i} = \frac{100}{67}.$$

Par suite, $x = \dfrac{\log 100 + \operatorname{colog} 67}{\log 1{,}06} = \dfrac{0{,}17\,393}{0{,}02\,531} = 6{,}8\ldots$

L'annuité comprendra 6 termes de 20 000 fr. Le versement supplémentaire vaut

$$110\,000u^7 - 20\,000\,\frac{u(u^6-1)}{i}.$$

Les tables donnent

$\log 110\,000u^7 = 5{,}04\,139 + 0{,}17\,714 = 5{,}21\,853;\quad 110\,000u^7 = 165\,396$

$\log u^7 = 0{,}17\,714;\quad u^7 = 1{,}503\,62;\quad u^7 - u = 0{,}443\,62;$

$$20\,000\,\frac{u(u^6-1)}{i} = \frac{20\,000 \times 0{,}443\,62}{0{,}06} = \frac{443\,620}{3} = 147\,873{,}33.$$

Le montant du versement supplémentaire est 17 522,67 fr.

814. *Quel serait le montant du terme, si on voulait rembourser l'emprunt précédent par une annuité de 8 termes?*

a) PAR LES TABLES. — On a

$$a = 110\,000 \times \frac{1}{f(8.0{,}06)} = 110\,000 \times 0{,}161\,0359.$$

D'où $a = 17\,713{,}95$ fr.

b) PAR LOGARITHMES. — La formule $a = \dfrac{Viu^n}{u^n - 1}$ donne

$$a = \frac{110\,000 \times 0{,}06 \times (1{,}06)^8}{(1{,}06)^8 - 1}.$$

Les tables donnent :

$\log (1{,}06)^8 = 0{,}20\,245;\quad (1{,}06)^8 = 1{,}593\,85;\quad (1{,}06)^8 - 1 = 0{,}593\,85.$

On a donc $$a = \frac{6600 \times 1{,}593\ 85}{0{,}593\ 85}.$$

$$\begin{aligned}
&\log 6600 &&= 3{,}81\ 954\\
&\log 1{,}593\ 85 &&= 0{,}20\ 245\\
&\text{colog } 0{,}593\ 85 &&= 0{,}22\ 632\\
&\log a &&= 4{,}24\ 831; \quad a = 17\ 713{,}75 \text{ fr.}
\end{aligned}$$

815. *Un emprunt contracté au taux de* 5 °/₀ *doit être remboursé par une annuité dont le terme égale les* 8 °/₀ *de l'emprunt. Trouver le nombre de termes.*

a) Par les tables. — On a
$$\frac{1}{f(n.0{,}05)} = \frac{8}{100}.$$
La table V, colonne 5 °/₀, donne
$$\frac{1}{f(20.0{,}05)} = 0{,}080\ 2426; \quad \frac{1}{f(21.0{,}05)} = 0{,}077\ 9961.$$
On voit qu'il faudra 20 termes, plus un versement supplémentaire.

b) Par logarithmes. — L'équation
$$\frac{1}{f(n,\ 0{,}05)} = 0{,}08 \quad \text{donne} \quad \frac{iu^n}{u^n - 1} = 0{,}08,$$
et par suite, $$u^n = \frac{8}{3},$$
ou $$n = \frac{\log 8 + \text{colog } 3}{\log 1{,}05} = \frac{0{,}42\ 597}{0{,}02\ 119} = 20{,}1\ldots$$
Il faudra 20 termes, plus un versement supplémentaire.

816. *Une ville a emprunté* 150 000 *fr. au taux de* 4 °/₀. *Elle se propose de l'amortir en* 20 *années.*

1° *Trouver le terme de l'annuité.*

a) Par les tables. — On a
$$a = 150\ 000 \times \frac{1}{f(20.0{,}04)} = 150\ 000 \times 0{,}073\ 5818 = 11\ 037{,}27 \text{ fr.}$$

b) Par logarithmes. — On a
$$a = \frac{150\ 000 \times 0{,}04 \times (1{,}04)^{20}}{(1{,}04)^{20} - 1}.$$
Les tables donnent

$\log (1{,}04)^{20} = 0{,}34\ 067$; $(1{,}04)^{20} = 2{,}191\ 15$; $(1{,}04)^{20} - 1 = 1{,}191\ 15$.

Par suite, $$a = \frac{6000 \times (1{,}04)^{20}}{1{,}191\ 15}.$$

$$\begin{aligned}
&\log 6000 &&= 3{,}77\ 815\\
&\log (1{,}04)^{20} &&= 0{,}34\ 067\\
&\text{colog } 1{,}191\ 15 &&= \bar{1}{,}92\ 403\\
&\log a &&= 4{,}04\ 285; \quad a = 11\ 036{,}90 \text{ fr.}
\end{aligned}$$

2° *Quelle somme doit-elle ajouter au* 12e *terme pour éteindre la partie restante de la dette?*

a) Par les tables. — Au moment où l'on verse le 12e terme, la valeur des 8 termes non échus est

$$11\,037{,}27 f(8.0{,}04) = 11\,037{,}27 \times 6{,}732\,7449 = 74\,311{,}12 \text{ fr.}$$

b) Par logarithmes. — Le versement supplémentaire vaut cette fois

$$x = 11\,036{,}90 f(8.0{,}04) = 11\,036{,}90 \times \frac{(1{,}04)^8 - 1}{0{,}04 \times (1{,}04)^8}.$$

Les tables donnent :

$$\log (1{,}04)^8 = 0{,}13\,627; \quad (1{,}04)^8 = 1{,}368\,58.$$

On a donc $$x = \frac{11\,036{,}90 \times 0{,}368\,58}{0{,}04 \times (1{,}04)^8}.$$

$$\begin{aligned} \log 11\,036{,}90 &= 4{,}04\,285 \\ \log 0{,}368\,58 &= \bar{1}{,}56\,654 \\ \text{colog } 0{,}04 &= 1{,}39\,794 \\ \text{colog } (1{,}04)^8 &= \bar{1}{,}86\,373 \\ \hline \log x &= 4{,}87\,106; \quad x = 74\,311{,}70 \text{ fr.} \end{aligned}$$

817. *Une personne possède un capital de* 10 000 *fr. dans une banque et elle y ajoute* 500 *fr. chaque année. Une autre a un dépôt de* 23 700 *fr., mais elle retire chaque année* 448 *fr. Le taux de l'intérêt composé est* 4 %. *Trouver quand les deux capitaux seront égaux.*

Après x années, le dépôt de la première personne vaudra

$$10\,000 u^x + 500 \times \frac{u^x - 1}{i};$$

et celui de la seconde

$$23\,700 u^x - 448 \times \frac{u^x - 1}{i}.$$

On a l'équation

$$10\,000 u^x + 500 \times \frac{u^x - 1}{i} = 23\,700 u^x - 448 \frac{u^x - 1}{i}.$$

Cette équation donne

$$\frac{u^x - 1}{i u^x} = f(x,i) = \frac{13\,700}{948} = 14{,}451\,4768.$$

On en déduit que les deux dépôts ont même valeur après 22 années (approximativement).

818. *Une personne met en vente une maison. A offre* 25 000 *fr. comptant et* 35 000 *fr. à la fin de la* 3e *année. B offre* 20 000 *fr. comptant,* 30 000 *fr. à la fin de la* 1re *année et* 2000 *fr. à la fin de chacune des quatre années suivantes. Quelle est l'offre la plus avantageuse, en tenant compte de l'intérêt composé à* 4,5 %?

a) PAR LES TABLES. — La valeur actuelle de l'offre A est

$$25\,000 + 35\,000v^3 = 25\,000 + 30\,670{,}38 = 55\,670{,}38.$$

La valeur actuelle de l'offre B est (en considérant 30 000 fr. comme formé d'un versement de 28 000 fr. et d'un autre de 2 000 fr.)

$$20\,000 + 28\,000v + 2000f(5.0{,}045)$$
$$= 20\,000 + 26\,794{,}26 + 8\,779{,}95 = 55\,574{,}21.$$

L'offre A est donc la plus avantageuse pour le vendeur.

b) PAR LOGARITHMES. — La valeur actuelle de l'offre A est

$$25\,000 + \frac{35\,000}{u^3}.$$

$$\begin{aligned} \log 35\,000 &= 4{,}54\,407 \\ \text{colog}\,(1{,}045)^3 &= \bar{1}{,}94\,265 \\ \log \frac{35\,000}{u^3} &= 4{,}48\,672; \quad \frac{35\,000}{u^3} = 30\,670{,}70. \end{aligned}$$

Par suite, $$25\,000 + \frac{35\,000}{u^3} = 55\,670{,}70.$$

La valeur actuelle de l'offre B est

$$20\,000 + \frac{28\,000}{u} + \frac{2000(u^5 - 1)}{iu^5}.$$

Désignons les trois parties de cette somme par a, b, c. Les tables donnent successivement :

$$\log b = 4{,}44\,716 + \bar{1}{,}98\,088 = 4{,}42\,804; \quad b = 26\,794{,}40.$$

On a ensuite :

$$\log u^5 = 0{,}09\,558; \quad u^5 = 1{,}246\,17; \quad u^5 - 1 = 0{,}246\,17.$$

Par suite, $$c = \frac{2000 \times 0{,}246\,17}{0{,}045 \times 1{,}246\,17}.$$

$$\begin{aligned} \log 2000 &= 3{,}30\,103 \\ \log 0{,}246\,17 &= \bar{1}{,}39\,124 \\ \text{colog}\,0{,}045 &= 1{,}34\,679 \\ \text{colog}\,1{,}246\,17 &= \bar{1}{,}90\,442 \\ \log c &= 3{,}94\,348; \quad c = 8779{,}75. \end{aligned}$$

La valeur actuelle de l'offre B est donc

$$a + b + c = 20\,000 + 26\,794{,}40 + 8779{,}75 = 55\,574{,}15.$$

On voit qu'elle est moins avantageuse que l'offre A.

819. *Un emprunt de* 150 000 *fr. doit être remboursé par une annuité de* 15 *termes, dont le premier est payable* 6 *ans après l'emprunt. Calculer le montant de chaque terme, le taux de l'intérêt composé étant* 6 %.

a) PAR LES TABLES. — On a

$$150\,000 = xf(15.0{,}06)v^5;$$

d'où $$x = 150\,000u^5 \times \frac{1}{f(15.0{,}06)} = 150\,000 \times 1{,}338\,2256 \times 0{,}102\,9628.$$

En effectuant, on trouve $x = 20\,668{,}12$ fr.

b) PAR LOGARITHMES. — L'équation

$$150\,000 = xf(15.0{,}06)v^5$$

donne $$x = \frac{150\,000iu^{20}}{u^{15}-1} = \frac{9000u^{20}}{u^{15}-1}.$$

$$\log u^{15} = 0{,}37\,959;\quad u^{15} = 2{,}396\,56;\quad u^{15}-1 = 1{,}396\,56.$$

Par suite, $x = \dfrac{9000u^{20}}{1{,}396\,56}$.

$$\begin{aligned}
\log 9000 &= 3{,}95\,424\\
\log u^{20} &= 0{,}50\,612\\
\text{colog } 1{,}396\,56 &= \bar{1}{,}85\,494\\
\log x &= 4{,}31\,530;\quad x = 20\,668{,}10 \text{ fr.}
\end{aligned}$$

820. *Un emprunt de* 185 000 *fr. doit être remboursé par une annuité dont le terme est* 44 654,31 *fr. et dont le premier terme est payable* 7 *ans après l'emprunt. Trouver le nombre de termes, sachant que le taux est* 4 °/o.

a) PAR LES TABLES. — Soit x le nombre de termes. Au moment de l'emprunt, la valeur de l'annuité est

$$44\,654{,}31f(x.0{,}04) \times v^6.$$

On a donc l'équation

$$185\,000 = 44\,654{,}31f(x.0{,}04) \times v^6$$

qui donne $$f(x.0{,}04) = \frac{185\,000u^6}{44\,654{,}31}. \qquad (1)$$

En effectuant, on trouve

$$f(x.0{,}04) = \frac{234\,084{,}015}{44\,654{,}31} = 5{,}242\,1370.$$

En consultant la table IV, colonne 4 °/o, on voit que $n = 6$.

b) PAR LOGARITHMES. — L'égalité (1) peut s'écrire

$$\frac{1-v^x}{i} = \frac{u^x-1}{iu^x} = \frac{185\,000u^6}{44\,654{,}31}.$$

En résolvant par rapport à u^x, on trouve

$$u^x = \frac{44\,654{,}31}{44\,654{,}31 - 7400u^6}.$$

Les logarithmes donnent :

$$\log 7400 = 3{,}86\,923;\quad \log u^6 = 0{,}10\,220;$$
$$\log 7400u^6 = 3{,}97\,143;\quad 7400u^6 = 9363{,}20.$$

Par suite, $(1{,}04)^x = \dfrac{44\,654{,}31}{35\,291{,}11}$

et $$x = \frac{\log 44\,654{,}31 + \text{colog } 35\,291{,}11}{\log 1{,}04}$$

$$= \frac{4{,}64\,986 + \bar{5}{,}45\,234}{0{,}01\,703\,33} = \frac{0{,}10\,220}{0{,}01\,703\,33} = 6.$$

821. *Une personne a effectué* 4 *versements annuels de* 5000 *fr. pour recevoir une rente de* 4 *termes annuels, dont le premier est payable* 10 *ans après le dernier versement. Calculer le terme de cette rente, sachant que le taux est* 5,5 %.

a) PAR LES TABLES. — Soit x le terme cherché. Évaluons les deux annuités au moment où l'on retire le dernier terme x. En ce moment leurs valeurs sont égales. On a

$$5000 \times \frac{u^4 - 1}{i} \times u^{13} = x \times \frac{u^4 - 1}{i}.$$

On en déduit $x = 5000u^{13} = 5000 \times 2{,}005\ 7739 = 10\ 028{,}87$ fr.

b) PAR LOGARITHMES. — L'égalité $x = 5000u^{13}$ donne

$$\log x = \log 5000 + 13 \log u.$$

$$\begin{aligned} \log 5000 &= 3{,}69\ 897 \\ 13 \log 1{,}055 &= \underline{0{,}30\ 228} \\ \log x &= 4{,}00\ 125; \quad x = 10\ 029 \text{ fr.} \end{aligned}$$

822. *Une ville a acheté le* 1er *janvier* 1920 *un réseau de tramways, en s'engageant à verser une annuité de* 10 *termes égaux à* 20 000 *fr.; le* 1er *terme est payable immédiatement.*

Le même jour, elle cède l'exploitation à un concessionnaire qui doit verser en retour une annuité de 10 *termes, dont le* 1er *est payable le* 31 *décembre* 1920.

Quel doit être le terme de cette 2^e *annuité, pour qu'au* 31 *décembre* 1929, *la ville ait réalisé un bénéfice de* 15 820 *fr.? Les calculs sont faits à intérêts composés au taux de* 6 %.

a) PAR LES TABLES. — Au 31 décembre 1929, la valeur de la 1re annuité est

$$20\ 000\, \frac{u(u^{10} - 1)}{i} = 20\ 000 \left[\frac{u^{11} - 1}{i} - 1\right] = 279\ 432{,}85 \text{ fr.}$$

Au même moment, la valeur de la 2^e annuité est

$$\frac{x(u^{10} - 1)}{i}.$$

On doit avoir

$$\frac{x(u^{10} - 1)}{i} = 279\ 432{,}85 + 15\ 820.$$

D'où
$$\begin{aligned} x &= 295\ 252{,}85 \times \frac{i}{u^{10} - 1} \\ &= 295\ 252{,}85 \times 0{,}075\ 868 \text{ (table V)} \\ &= 22\ 400{,}24 \text{ fr.} \end{aligned}$$

b) PAR LOGARITHMES. — Calculons la valeur de l'expression

$$A = \frac{20\ 000(u^{11} - u)}{i}.$$

$\log u^{11} = 0{,}27\ 836$; $u^{11} = 1{,}898\ 27$; $u^{11} - u = 0{,}838\ 27$.

Par suite, $A = \dfrac{20\,000 \times 0{,}838\,27}{0{,}06} = 279\,423{,}33$ fr.

L'équation du problème devient

$$\frac{x(u^{10}-1)}{i} = 279\,423{,}33 + 15\,820;$$

ou

$$x = 295\,243{,}33 \times \frac{i}{u^{10}-1}.$$

On a : $\log u^{10} = 0{,}25\,306; \quad u^{10} = 1{,}790\,84;$

par suite,

$$x = \frac{295\,243{,}33i}{0{,}790\,84}.$$

$$\begin{aligned} \log 295\,243{,}33 &= 5{,}47\,018 \\ \log 0{,}06 &= \bar{2}{,}77\,815 \\ \operatorname{colog} 0{,}790\,84 &= 0{,}10\,191 \\ \log x &= 4{,}35\,024; \quad x = 22\,399{,}50 \text{ fr.} \end{aligned}$$

823. *Une personne place annuellement et* 10 *fois de suite, une somme de* 1000 *fr. dans une banque. Elle retire ensuite annuellement et* 10 *fois de suite,* 1000 *fr. Que lui reste-t-il alors de placé? Le premier retrait a lieu un an après le dernier versement. Le taux de l'intérêt composé est* 4 %.

Au moment du dernier retrait, la valeur des 10 placements est

$$1000 \times \frac{u^{10}-1}{i} \times u^{10}.$$

Au même moment, la valeur des 10 retraits est

$$1000 \times \frac{u^{10}-1}{i},$$

et on a $\quad x = 1000 \times \dfrac{u^{10}-1}{i} \times u^{10} - 1000 \times \dfrac{u^{10}-1}{i}.$

a) Par les tables. — On a

$$x = 1000\left[\frac{u^{20}-1}{i} - \frac{u^{10}-1}{i}\right] - 1000\,\frac{u^{10}-1}{i} = 5765{,}86 \text{ fr.}$$

b) Par logarithmes. — On a

$$x = \frac{1000(u^{10}-1)^2}{i}.$$

$\log u^{10} = 0{,}17\,033; \quad u^{10} = 1{,}480\,23; \quad u^{10} - 1 = 0{,}480\,23.$

Par suite,

$$x = \frac{1000(0{,}480\,23)^2}{i}.$$

$$\begin{aligned} \log 1000 &= 3 \\ 2 \log 0{,}480\,23 &= \bar{1}{,}36\,290 \\ \operatorname{colog} 0{,}04 &= 1{,}39\,794 \\ \log x &= 3{,}76\,084; \quad x = 5765{,}57 \text{ fr.} \end{aligned}$$

824. *Un employé a placé chaque année et* 25 *fois de suite une somme de* 2500 *fr. dans une banque. Il laisse écouler une année, puis retire chaque année, d'abord* 10 *fois* 5000 *fr., puis* 5 *fois* 7500 *fr. Que lui reste-t-il de placé? Le taux de l'intérêt composé est* 4,5 °/o.

Au moment du dernier retrait,

a) la valeur des 25 placements est

$$2500 \times \frac{u^{15}(u^{25}-1)}{i} = 2500\left[\frac{u^{40}-1}{i} - \frac{u^{15}-1}{i}\right] = 215\ 615{,}67 \text{ fr.};$$

b) la valeur des 10 retraits de 5000 fr. est

$$5000 \times \frac{u^{5}(u^{10}-1)}{i} = 5000\left[\frac{u^{15}-1}{i} - \frac{u^{5}-1}{i}\right] = 76\ 566{,}72 \text{ fr.};$$

c) la valeur des 5 retraits de 7500 fr. est

$$7500 \times \frac{u^{5}-1}{i} = 7500 \times 5{,}470\ 7097 = 41\ 030{,}32 \text{ fr.}$$

Par suite, la somme restant en dépôt est

$$215\ 615{,}67 - 76\ 566{,}72 - 41\ 030{,}32 = 98\ 018{,}63 \text{ fr.}$$

825. *Le* 1er *janvier* 1920, *on a contracté un emprunt de* 200 000 *fr. au taux de* 5 °/o. *L'emprunt est remboursable par une annuité de* 10 *termes, dont le* 1er *est payable le* 1er *janvier* 1921.

1° *Calculer le versement à effectuer le* 1er *janvier* 1925 *pour éteindre complètement la dette.*

2° *En supposant que l'emprunteur n'ait rien versé le* 1er *janvier* 1925 *ni le* 1er *janvier* 1926, *quelle somme constante devrait-il verser au commencement des années suivantes, pour que le remboursement soit terminé au* 1er *janvier* 1930?

a) Calcul du terme de l'annuité. — En le désignant par x, on a (table V)

$$x = 200\ 000 \times \frac{1}{f(10.0{,}05)} = 25\ 900{,}92 \text{ fr.}$$

b) Somme a verser le 1er janvier 1925 pour éteindre la dette. — Cette somme est égale au 5e terme augmenté de la valeur actuelle des 5 termes non échus. Elle vaut donc

$$25\ 900{,}92 + 25\ 900{,}92 \times f(5.0{,}05) = 138\ 038{,}35 \text{ fr.}$$

c) Calcul du terme de la nouvelle annuité. — Si l'emprunteur ne verse rien au 1er janvier 1925 et au 1er janvier 1926, sa dette au 1er janvier 1926 sera 138 038,35u. C'est aussi la valeur actuelle de la nouvelle annuité de 4 termes. On a donc, en désignant son terme par y,

$$138\ 038{,}35u = yf(4.0{,}05).$$

D'où $$y = 138\ 038{,}35 \times \frac{1{,}05}{f(4.0{,}05)} = 40\ 874{,}86 \text{ fr.}$$

§ II. — AMORTISSEMENT PROGRESSIF.

826. *Un emprunt de* 1 200 000 *fr. est remboursable par une annuité de* 30 *termes égaux. Le taux de l'intérêt est* 5 %. *Calculer :*

1° Le fonds d'amortissement. — On a

$$m = \frac{Vi}{u^n - 1} = 1\,200\,000 \times 0{,}015\,0514 = 18\,061{,}68 \text{ fr.}$$

2° Le terme de l'annuité. — Ce terme est égal au fonds d'amortissement plus l'intérêt simple de la somme empruntée. On a donc

$$a = 18\,061{,}68 + 1\,200\,000 \times 0{,}05 = 78\,061{,}68 \text{ fr.}$$

827. *Un emprunt de* 900 000 *fr. a été contracté au taux de* 5 % *et est remboursable en* 20 *années. L'emprunteur paie chaque année l'intérêt simple de la somme empruntée et place la partie restante du terme d'annuité dans une banque. Après combien d'années pourra-t-il rembourser le capital emprunté, si la banque lui accorde un intérêt composé de* 6 %?

Le fonds d'amortissement de cet emprunt est (table V) :

$$m = 900\,000 \times \frac{0{,}05}{(1{,}05)^{20} - 1} = 27\,218{,}34 \text{ fr.}$$

C'est cette somme que l'emprunteur place chaque année dans une banque au taux de 6 %. La question revient à chercher le nombre de termes, égaux à 27 218,34 fr., que doit comprendre une annuité, pour que le capital constitué au moment du dernier versement soit égal à 900 000 fr., le taux de l'intérêt composé étant 6 %.

Soit x le nombre de termes. On a

$$900\,000 = 27\,218{,}34 \times \frac{(1{,}06)^x - 1}{0{,}06}.$$

D'où
$$\frac{0{,}06}{(1{,}06)^x - 1} = \frac{27\,218{,}34}{900\,000} = 0{,}030\,2426.$$

La table V, colonne 6 %, montre que x est compris entre 18 et 19.

L'emprunteur pourrait opérer comme suit :

Il verse 18 fois l'intérêt de 45 000 fr. au prêteur et il place 18 fois la somme de 27 218,34 fr. en banque.

Un an après le dernier placement, c'est-à-dire à la fin de la 19e année à partir de l'emprunt, la valeur acquise par l'annuité placée en banque est

$$27\,218{,}34 \times \frac{(1{,}06)^{18} - 1}{0{,}06} \times 1{,}06 = 27\,218{,}34 \left[\frac{(1{,}06)^{19} - 1}{0{,}06} - 1\right]$$
$$= 27\,218{,}34 \times 32{,}759\,9917 = 891\,672{,}59 \text{ fr.}$$

A la fin de la 19e année, on retire cette somme de la banque; on y joint 8327,41 fr. pour parfaire les 900 000 fr. empruntés. On remet les 900 000 fr. au prêteur, ainsi que le dernier intérêt, qui est toujours 45 000 fr.

A la fin de la 19e année, l'emprunteur devra débourser

$$8327,41 + 45\,000 = 53\,327,41 \text{ fr.}$$

828. *Dresser le tableau d'amortissement d'un emprunt de* 1 000 000 *fr. remboursable en* 10 *années. Le taux de l'intérêt est* 5 %; *le terme de l'annuité par laquelle on peut amortir un capital de* 1 *fr. après* 10 *années est* 0,129 504 58.

Le terme de l'annuité est

$$a = 1\,000\,000 \times \frac{1}{f(10.0,05)} = 129\,504,58 \text{ fr.}$$

Le fonds d'amortissement sera

$$129\,504,58 - 50\,000 = 79\,504,58 \text{ fr.}$$

Calculons les amortissements successifs.

1er amortissement	79 504,58
5 % ou $\frac{1}{20}$ du précédent	3 975,229
2e amortissement	83 479,809
	4 173,990
3e amortissement	87 653,799
	4 382,690
4e amortissement	92 036,489
	4 601,824
5e amortissement	96 638,313
	4 831,916
6e amortissement	101 470,229
	5 073,511
7e amortissement	106 543,740
	5 327,187
8e amortissement	111 870,927
	5 593,546
9e amortissement	117 464,473
	5 873,224
10e amortissement	123 337,697.

En supprimant dans chaque amortissement le 3e chiffre décimal et en calculant ensuite leur total, on trouve 1 000 000 fr.

En utilisant ces résultats, on pourra calculer le capital restant à amortir au commencement de chaque année, et les intérêts à payer à la fin de chaque année; puis, dresser le tableau suivant.

TABLEAU D'AMORTISSEMENT.

ANNÉES	CAPITAL RESTANT A AMORTIR AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE	INTÉRÊTS A PAYER A LA FIN DE L'ANNÉE	AMORTISSEMENTS A PAYER A LA FIN DE L'ANNÉE
1	1 000 000	50 000	79 504,58
2	920 495,42	46 024,78	83 479,80
3	837 015,62	41 850,79	87 653,79
4	749 361,83	37 468,10	92 036,48
5	657 325,35	32 866,27	96 638,31
6	560 687,04	28 034,36	101 470,22
7	459 216,82	22 960,84	106 543,74
8	352 673,08	17 633,66	111 870,92
9	240 802,16	12 040,11	117 464,47
10	123 337,69	6 166,89	123 337,69

829. *Dresser le tableau d'amortissement d'un emprunt de* 500 000 *fr. remboursable en* 8 *années. Le taux de l'intérêt est* 6 °/₀*; le terme de l'annuité par laquelle on peut amortir un capital de* 1 *fr. après* 8 *années est* 0,161 035 94.

Le terme de l'annuité est

$$a = 500\,000 \times \frac{1}{f(8.0{,}06)} = 80\,517{,}97 \text{ fr.}$$

Le fonds d'amortissement sera

$$80\,517{,}97 - 30\,000 = 50\,517{,}97 \text{ fr.}$$

Calculons les amortissements successifs.

1er amortissement	50 517,97
6 °/₀ du précédent	3 031,078
2e amortissement	53 549,048
	3 212,943
3e amortissement	56 761,991
	3 405,719
4e amortissement	60 167,710

	3 610,063
5e amortissement	63 777,773
	3 826,666
6e amortissement	67 604,439
	4 056,266
7e amortissement	71 660,705
	4 299,642
8e amortissement	75 960,347.

La somme des amortissements trouvés, en s'arrêtant aux centimes, est 499 999,95 fr. Nous ajouterons un centime aux 2e, 5e, 6e, 7e et 8e amortissements.

TABLEAU D'AMORTISSEMENT.

ANNÉES	CAPITAL RESTANT A AMORTIR AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE	INTÉRÊTS A PAYER A LA FIN DE L'ANNÉE	AMORTISSEMENTS A PAYER A LA FIN DE L'ANNÉE
1	500 000	30 000	50 517,97
2	449 482,03	26 968,92	53 549,05
3	395 932,98	23 755,98	56 761,99
4	339 170,99	20 350,26	60 167,71
5	279 003,28	16 740,19	63 777,78
6	215 225,50	12 913,53	67 604,44
7	147 621,06	8 857,26	71 660,71
8	75 960,35	4 557,62	75 960,35

830. *Un emprunt de* 750 000 *fr. est remboursable en* 20 *années. Le taux de l'intérêt est* 6 %.

1° *Quelle est la partie du capital amortie après* 10 *années?*

Le fonds d'amortissement vaut (table V)

$$750\ 000 \times \frac{0{,}06}{(1{,}06)^{20} - 1} = 750\ 000 \times 0{,}027\ 1846 = 20\ 388{,}45 \text{ fr.}$$

Le capital amorti après le paiement du 10e terme est

$$m(1 + u + \dots + u^9) = m \times \frac{u^{10} - 1}{i} = 20\,388{,}45 \times 13{,}180\,7949$$
$$= 268\,735{,}98 \text{ fr.}$$

2° *Calculer la partie non amortie après* 15 *années?*

La partie amortie après le paiement du 15e terme est

$$m \times \frac{u^{15} - 1}{i} = 20\,388{,}45 \times 23{,}275\,9699 = 474\,560{,}95 \text{ fr.}$$

La partie non amortie est donc

$$750\,000 - 474\,560{,}95 = 275\,439{,}05 \text{ fr.}$$

831. *Une société a émis un emprunt de* 500 000 *fr. divisé en* 1000 *obligations de* 500 *fr. et remboursable en* 8 *années. Le taux de l'intérêt est* 5 %. *Construire le tableau d'amortissement.*

Le terme d'annuité théorique est

$$500\,000 \times \frac{1}{f(8.0{,}05)} = 500\,000 \times 0{,}154\,7218 = 77\,360{,}90 \text{ fr.}$$

Le premier amortissement théorique sera

$$77\,360{,}90 - 25\,000 = 52\,360{,}90 \text{ fr.}$$

a) Recherche du nombre d'obligations à amortir chaque année.

ANNÉES	AMORTISSEMENTS THÉORIQUES	QUOTIENTS PAR 500	NOMBRE D'OBLIGATIONS A AMORTIR
1	52 360,90	104,72	105
2	54 978,95	109,96	110
3	57 727,90	115,45	116
4	60 614,30	121,23	121
5	63 645,01	127,29	127
6	66 827,26	133,65	134
7	70 168,63	140,33	140
8	73 677,05	147,35	147
	500 000,00	996,	1000

b) *Tableau d'amortissement.*

ANNÉES	NOMBRE D'OBLIGATIONS		INTÉRÊTS RÉELS	AMORTISSEMENTS RÉELS	TERMES D'ANNUITÉ RÉELS
	VIVANTES AU DÉBUT DE L'ANNÉE	A AMORTIR A LA FIN DE L'ANNÉE			
1	1000	105	25 000	52 500	77 500
2	895	110	22 375	55 000	77 375
3	785	116	19 625	58 000	77 625
4	669	121	16 725	60 500	77 225
5	548	127	13 700	63 500	77 200
6	421	134	10 525	67 000	77 525
7	287	140	7 175	70 000	77 175
8	147	147	3 675	73 500	77 175
		1000	118 800	500 000	618 800

832. *Même question pour un emprunt de* 1 000 000 *fr. divisé en* 2000 *obligations de* 500 *fr. et remboursable en* 10 *années. Le taux de l'intérêt est* 4 %; *le terme de l'annuité pour un capital de* 1 *fr. est* 0,123 290 94.

Le terme d'annuité théorique est 123 290,94 fr.

Le premier amortissement théorique sera 83 290,94 fr.

a) *Recherche du nombre d'obligations à amortir chaque année.*

ANNÉES	AMORTISSEMENTS THÉORIQUES	QUOTIENTS PAR 500	NOMBRE D'OBLIGATIONS A AMORTIR
1	83 290,94	166,58	167
2	86 622,58	173,24	173
3	90 087,48	180,17	180
4	93 690,99	187,38	187
5	97 438,63	194,87	195
6	101 336,17	202,67	203
7	105 389,62	210,78	211
8	109 605,20	219,21	219
9	113 989,41	227,98	228
10	118 548,98	237,09	237
	1 000 000,00	1995,	2000

b) *Tableau d'amortissement.*

ANNÉES	NOMBRE D'OBLIGATIONS		INTÉRÊTS RÉELS	AMORTISSEMENTS RÉELS	TERMES D'ANNUITÉ RÉELS
	VIVANTES AU DÉBUT DE L'ANNÉE	A AMORTIR A LA FIN DE L'ANNÉE			
1	2000	167	40 000	83 500	123 500
2	1833	173	36 660	86 500	123 160
3	1660	180	33 200	90 000	123 200
4	1480	187	29 600	93 500	123 100
5	1293	195	25 860	97 500	123 360
6	1098	203	21 960	101 500	123 460
7	895	211	17 900	105 500	123 400
8	684	219	13 680	109 500	123 180
9	465	228	9 300	114 000	123 300
10	237	237	4 740	118 500	123 240
		2000	232 900	1 000 000	1 232 900

Exercices de récapitulation

PREMIÈRE SÉRIE

CALCUL ALGÉBRIQUE.

833. *Effectuer les divisions suivantes :*

1° $\left(12a^3 - 5a^4 + \frac{1}{6} - \frac{a}{3} - \frac{31a^2}{6}\right) : \left(\frac{a^2}{2} + \frac{1}{6} - a\right)$.

Ordonner par rapport à a, puis, multiplier le dividende et le diviseur par 6 pour faire disparaître les dénominateurs.

Rép. $-10a^2 + 4a + 1$.

2° $\left(3b^5 + \frac{3}{4}a^5 - \frac{11}{6}a^3b^2 - ab^4 - \frac{1}{2}a^2b^3\right) : \left(\frac{a^3}{4} - \frac{b^3}{2} - \frac{a^2b}{6}\right)$.

Ordonner par rapport à a et multiplier le dividende et le diviseur par 12.

Rép. $3a^2 + 2ab - 6b^2$.

3° $(a-b)x^3 - (ab - 2b^2)x^2 - 2b^3x + (a^2+b^2)^2 - a^2b^2$ à diviser par $(a-b)x + a^2 + b^2 - ab$.

Rép. $x^2 - (a+b)x + a^2 + ab + b^2$.

4° $(a^2-b^2)x^4 - 2(a^2+b^2)x^3 + (5a^2-3b^2)x^2 - 2(2a^2+b^2)x + 4a^2 - b^2$ à diviser par $(a+b)x^2 - (a-b)x + 2a + b$.

Rép. $(a-b)x^2 - (a+b)x + 2a - b$.

834. *La somme des coefficients de* x^4 *et de* x^3 *dans le produit réduit de* $2x^3 - 3x^2 + ax + 4$ *par* $3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + bx + 3$ *est* 43; *leur différence est* 11. *Calculer* a *et* b.

Le coefficient de x^4 est $12 + 2a + 15 + 2b$ ou $2a + 2b + 27$; celui de x^3 est $8 - 5a - 3b + 6$ ou $-5a - 3b + 14$.

On obtient donc le système

$$3a + b = -2; \quad 7a + 5b = -2.$$

Rép. $a = -1$; $b = 1$.

835. *Calculer les expressions suivantes et ordonner par rapport à* x.

1° $(x^2+x+1)(x^2-x+1) = (x^2+1)^2 - x^2 = x^4 + x^2 + 1$.

2° $(x^2-3x+1)(x^2+2x+3) = x^4 - x^3 - 2x^2 - 7x + 3$.

Calculer successivement les termes en x^4, x^3,...

3° $(1 + x + x^2 + x^3)^2 + (1 - x + x^2 - x^3)^2 = 2 + 6x^2 + 6x^4 + 2x^6$.

4° $(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x^2 + 2x + 1)$.

En remplaçant $x^2 + 2x + 1$ par $(x + 1)^2$, on voit que cette expression vaut $(x^5 + 1)(x + 1) = x^6 + x^5 + x + 1$.

5° $(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1)(x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1)$.

Cette expression est égale à $x^8 - (2x^3 - 3x^2 + 2x - 1)^2$.

Rép. $x^8 - 4x^6 + 12x^5 - 17x^4 + 16x^3 - 10x^2 + 4x - 1$.

836. *Si* $x - \frac{1}{x} = 3$, *calculer les expressions suivantes :*

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 = 11;$$

$$x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}\right) = 36;$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = 119.$$

837. *Si* $x + y = 4$ *et* $xy = -5$, *calculer les expressions suivantes :*

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 26;$$
$$x^3 + y^3 = (x + y)[(x + y)^2 - 3xy] = 124;$$
$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = 626.$$

838. *Ordonner le polynôme* $(x + h)^4 - 2(x + h)^3 + 3(x + h) - 4$ *par rapport à* x *et déterminer* h *pour que le coefficient de* x^2 *soit nul.*

On trouve

$$x^4 + (4h - 2)x^3 + (6h^2 - 6h)x^2 + (4h^3 - 6h^2 + 3)x + h^4 - 2h^3 + 3h - 4.$$

On a $6h^2 - 6h = 0$ pour $h = 0$ et pour $h = 1$.

Pour $h = 0$, le polynôme devient $x^4 - 2x^3 + 3x - 4$; pour $h = 1$, il devient $x^4 + 2x^3 + x - 2$.

839. *Si* $x + \frac{1}{x} = 2$, *montrer que* $x^2 + \frac{1}{x^2} = x^3 + \frac{1}{x^3} = x^4 + \frac{1}{x^4}$.

En effet, on a :

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 2;$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right) = 2;$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = 2.$$

840. *Effectuer les divisions suivantes :*

1° $(2x^3 - x^2 + 9) : \left(\frac{2}{3}x + 1\right)$

2° $(3x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 9x + 3) : \left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right)$

3° $\left(\frac{8}{3}x^4 - 6x^3 + \frac{13}{3}x^2 + 3x - 3\right) : \left(\frac{4}{3}x - 1\right)$.

La première division est possible, car le polynôme $2x^3 - x^2 + 9$ s'annule pour $x = -\frac{3}{2}$. D'autre part, on a

$$(2x^3 - x^2 + 9) : \left(\frac{2}{3}x + 1\right) = \left(3x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{27}{2}\right) : \left(x + \frac{3}{2}\right)$$

et en appliquant la règle générale, on trouve $3x^2 - 6x + 9$ pour quotient. — On raisonne d'une façon analogue pour les deux autres exercices.

Rép. 1° $3x^2 - 6x + 9$; 2° $2x^3 - 4x^2 + 6$; 3° $2x^3 - 3x^2 + x + 3$.

841. *Montrer que l'expression*

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2$$

peut se mettre sous la forme d'une somme de trois carrés. Déterminer ensuite les valeurs de x *et de* y *qui annulent cette expression quand* $z = 1$ *et* $c \neq 0$.

En effectuant les calculs et en groupant les termes, on trouve

$$(ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2.$$

En supposant $z = 1$, cette expression ne sera nulle, que quand on aura

$$ay - bx = 0; \quad b - cy = 0; \quad cx - a = 0.$$

Les deux dernières égalités donnent $(c \neq 0)$

$$x = \frac{a}{c} \quad \text{et} \quad y = \frac{b}{c};$$

ces valeurs de x et y vérifient la première équation.

842. *Que faut-il pour que la division de* $x^3 + ax^2 + bx + 1$ *par* $x^2 + cx + 1$ *soit possible?*

Si cette division est possible, le quotient est $x + 1$ et on peut écrire

$$x^3 + ax^2 + bx + 1 = (x^2 + cx + 1)(x + 1).$$

En effectuant le second membre et en égalant les coefficients des mêmes puissances de x, on trouve

$$c + 1 = a; \quad c + 1 = b.$$

Ces égalités peuvent s'écrire

$$a = b = c + 1.$$

843. *Déterminer* a *pour que* $a + 1$ *soit le reste de la division de* $x^4 + ax^3 - 3x^2 - ax - 3$ *par* $x + 3$.

On doit avoir

$$81 - 27a - 27 + 3a - 3 = a + 1 \quad \text{ou} \quad 25a = 50 \quad \text{ou} \quad a = 2.$$

844. *Montrer que* $(3x^2 - 2x + 6)^2 - (x^2 - 2x + 4)^2$ *est divisible par* $x^2 + 1$.

L'expression est une différence de deux carrés et elle vaut

$$(4x^2 - 4x + 10)(2x^2 + 2).$$

Elle est donc divisible par $x^2 + 1$ et le quotient est $8x^2 - 8x + 20$.

845. *Déterminer* a *pour que la division de* $3x^3 - 2x^2 - 6x + 4$ *par* $ax + 2$ *soit possible.*

En remplaçant x par $-\frac{2}{a}$, on obtient l'équation

$$a^3 + 3a^2 - 2a - 6 = 0,$$

qui peut s'écrire $(a^2 - 2)(a + 3) = 0$. Ses racines sont -3 et $\pm\sqrt{2}$.

846. *Décomposer en facteurs :*

1° $6x^3 + 7x^2 - 1 = 6x^2(x + 1) + (x^2 - 1)$

$$= (x + 1)(6x^2 + x - 1) = (x + 1)(2x + 1)(3x - 1).$$

2° $x^{12} + x^6 - 2 = (x^{12} - 1) + (x^6 - 1) = (x^6 - 1)(x^6 + 2)$

$$= (x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^6 + 2).$$

3° $(a + b + c)(ab + bc + ca) - abc$.

Effectuer et ordonner par rapport à a. On trouve

$$(b + c)[a^2 + a(b + c) + bc] = (b + c)(a + b)(a + c).$$

4° $(a - 2b)^2 - a + 2b - 2$

L'expression peut être considérée comme un trinôme du second degré en $a - 2b$. On a

$$(a - 2b)^2 - (a - 2b) - 2 = (a - 2b - 2)(a - 2b + 1).$$

847. *Sachant que* $a + b + c = 0$, *calculer les expressions :*

1° $abc(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)$

$$- (b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2).$$

Remplacer a par $-b - c$; on trouve

$$-8b^2c^2(b + c)^2 + 8b^2c^2(b + c)^2 = 0.$$

2° $a(a - b)(a - c) + b(b - c)(b - a) + c(c - a)(c - b)$.

En remplaçant c par $-a - b$, on trouve

$$a(a - b)(2a + b) + b(a + 2b)(b - a) - (a + b)(2a + b)(a + 2b),$$

ou, en groupant les deux premiers termes,

$$(a - b)(2a^2 - 2b^2) - (a + b)(2a + b)(a + 2b)$$

$$= (a + b)[2(a - b)^2 - (2a + b)(a + 2b)] = -9ab(a + b) = 9abc.$$

848. *Simplifier les fractions suivantes :*

1° $$\frac{[(a+b)(a+b+c)+c^2](a^2-c^2+b^2+2ab)}{[(a+b)^3-c^3](a+b+c)}$$
$$=\frac{[(a+b)^2+(a+b)c+c^2]\cdot(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b-c)[(a+b)^2+(a+b)c+c^2](a+b+c)}=1.$$

2° $$\frac{a^2b^2+c^2(2ab-a^2)-b^2(2ac+b^2)+c^4}{(b^2-c^2)a+(b^2+c^2)(b-c)}.$$

Le numérateur est égal à

$(c^2+ab)^2-(b^2+ac)^2=(b^2+c^2+ab+ac)(b-c)(a-b-c).$

Le dénominateur est égal à

$$(b-c)(b^2+c^2+ab+ac).$$

La fraction se réduit donc à $a-b-c$.

3° $$\frac{ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2)}{ab(c^2-d^2)+cd(a^2-b^2)}=\frac{(ac+bd)(bc+ad)}{(ac-bd)(bc+ad)}=\frac{ac+bd}{ac-bd}.$$

849. *Calculer* $\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right):\left(x-1+\frac{1}{x}\right).$

Le dividende peut s'écrire $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1$ et le diviseur $\left(x+\frac{1}{x}\right)-1.$

Rép. $x+\frac{1}{x}+1.$

850. *Si* $p=a+b+c$, *montrer que* $(ap+bc)(bp+ca)(cp+ab)$ *est un carré.*

On a : $$\begin{aligned}ap+bc&=a^2+ab+ac+bc=(a+c)(a+b);\\ bp+ca&=ab+b^2+bc+ac=(b+c)(a+b);\\ cp+ab&=ac+bc+c^2+ab=(a+c)(b+c).\end{aligned}$$

Le produit vaut donc $(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$.

851. *Trouver les valeurs de* x *qui annulent en même temps les polynômes :*

$$2x^4+3x^3-12x^2-7x+6 \quad et \quad 4x^4-5x^2+1.$$

Ces deux polynômes peuvent s'écrire :

$$2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)(x-2)(x+3) \quad \text{et} \quad 4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)(x+1).$$

Rép. -1 et $0,5$.

852. *Le polynôme* $(a+b+c)^m-a^m-b^m-c^m$ *est divisible par* $(a+b)(b+c)(c+a)$ *quand* m *est impair.*

En effet, si m est impair, le polynôme s'annule quand on remplace

a par $-b$, a par $-c$ ou b par $-c$. Ainsi, en remplaçant a par $-b$, on trouve $c^m - (-b)^m - b^m - c^m = 0$, car $(-b)^m = -b^m$ quand m est impair.

853. *Est-il possible d'avoir*

$$(a + b)^2 + (a + c)^2 + (a + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 ?$$

En effectuant et en réduisant, on voit que la relation précédente peut s'écrire $2a^2 + 2ab + 2ac + 2ad = 0$ ou $2a(a + b + c + d) = 0$.

Elle est donc exacte quand on a

$$a = 0 \quad \text{ou} \quad a + b + c + d = 0.$$

854. *Calculer la valeur de l'expression* $y^3 + y^2 + 7y - 1$ *sachant que*

$$y = \frac{1 + x}{1 - x} \quad \textit{et} \quad x^3 + 1 = x^2.$$

En remplaçant y par sa valeur et en réduisant, l'expression devient

$$\frac{8(x^3 - x^2 + 1)}{(1 - x)^3}.$$

Cette fraction est nulle, car l'égalité $x^3 + 1 = x^2$ entraîne

$$x^3 - x^2 + 1 = 0 \quad \text{et} \quad x \neq 1.$$

855. *Montrer que l'on a :*

1° $(x^2 + 3x + 1)^2 = x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1$.

Le polynôme $(x^2 + 3x + 1)^2 - 1$ est du 4e degré en x; il s'annule pour $x = 0$, -1, -2 ou -3; le coefficient de x^4 est 1.

On a donc

$$(x^2 + 3x + 1)^2 - 1 = x(x + 1)(x + 2)(x + 3).$$

2° $(x + y + z)^2 - (x + y - z)^2 + (x - y + z)^2 - (y + z - x)^2 = 8xz$.

On a : $(x + y + z)^2 - (x + y - z)^2 = 2(x + y) \times 2z$;
$(x - y + z)^2 - (y + z - x)^2 = 2z \times 2(x - y)$.

L'expression proposée vaut donc

$$4z(x + y) + 4z(x - y) = 8xz.$$

856. *Sachant que* $b = a - 1$ *et* $c = a + 2$, *calculer la fraction*

$$\frac{a^2b^4c^2 - a^2b^4 - b^2c^2 + b^2}{a^2b^3c - bc + b(a^2b^2 - 1)}.$$

Le numérateur vaut $b^2(c^2 - 1)(a^2b^2 - 1)$ et le dénominateur $b(c + 1)(a^2b^2 - 1)$. En simplifiant par $b(c + 1)(a^2b^2 - 1)$ et en remplaçant b et c, la fraction devient

$$b(c - 1) = a^2 - 1.$$

La simplification précédente n'est permise que si b, $c + 1$ et $a^2b^2 - 1$ sont différents de zéro.

857. *Montrer que* $(x + 1)^{2m} - x^{2m} - 2x - 1$ *est divisible par* $x(x + 1)(2x + 1)$. *Trouver le quotient, sans faire la division, quand* $m = 2$.

Le polynôme s'annule pour $x = 0, \ -1$ ou $-\frac{1}{2}$.

Quand $m = 2$, l'expression peut être réduite à un polynôme du 3e degré en x. Le coefficient de x^3 est 4; c'est aussi le quotient cherché.

858. *Montrer que* $x^8 - x^2y^6$ *est divisible par* $x^4 - y^4 + xy(x^2 - y^2)$.

On a :

$$x^8 - x^2y^6 = x^2(x^2 - y^2)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2);$$
$$x^4 - y^4 + xy(x^2 - y^2) = (x^2 - y^2)(x^2 + xy + y^2).$$

La division est donc possible et le quotient est $x^2(x^2 - xy + y^2)$.

859. *Transformer les expressions suivantes :*

1° $$\frac{a^2 + b^2 - 2ab}{a^3 + b^3 - a^2b - ab^2} + \frac{a^3 - b^3 - ab^2 + a^2b}{a^4 - b^4 - 2ab^3 + 2a^3b}.$$

Décomposer les termes de chaque fraction en facteurs. Il vient

$$\frac{(a - b)^2}{(a - b)^2(a + b)} + \frac{(a + b)^2(a - b)}{(a + b)^3(a - b)} = \frac{1}{a + b} + \frac{1}{a + b} = \frac{2}{a + b}.$$

2° $$\frac{x^2y^2}{a^2b^2} + \frac{(x^2 - a^2)(y^2 - a^2)}{a^2(a^2 - b^2)} + \frac{(x^2 - b^2)(y^2 - b^2)}{b^2(b^2 - a^2)}.$$

Réduire les deux dernières fractions au même dénominateur et transformer le numérateur de la fraction ainsi obtenue. L'expression devient

$$\frac{x^2y^2}{a^2b^2} + \frac{(x^2y^2 - a^2b^2)(b^2 - a^2)}{a^2b^2(a^2 - b^2)} = \frac{x^2y^2 - (x^2y^2 - a^2b^2)}{a^2b^2} = 1.$$

3° $$\frac{4a^2 + 4ab + b^2}{2a^2 + 3ab + b^2} - \frac{2a^2 + 3ab - 2b^2}{2a^2 + ab - b^2} - \frac{a^2 - 3ab + 2b^2}{a^2 - ab - 2b^2}.$$

Décomposer en facteurs et simplifier. Il vient

$$\frac{(2a + b)^2}{(a + b)(2a + b)} - \frac{(a + 2b)(2a - b)}{(a + b)(2a - b)} - \frac{(a - b)(a - 2b)}{(a + b)(a - 2b)}$$
$$= \frac{2a + b}{a + b} - \frac{a + 2b}{a + b} - \frac{a - b}{a + b} = 0.$$

4° $$\left(\frac{a}{b^2} + 1\right)\left(\frac{a}{b^2} - 1\right)\left(\frac{a^2}{b^4} + 1\right) : \left(1 + \frac{a}{b^2} + \frac{a^2}{b^4} + \frac{a^3}{b^6}\right) = \frac{a}{b^2} - 1,$$

car le produit du 1er et du 3e facteur du dividende est égal au diviseur.

860. *Décomposer en facteurs :*

1° $$(x - y)^6 - (y - x)^3 = (x - y)^3 [(x - y)^3 + 1]$$
$$= (x - y)^3 (x - y + 1) [(x - y)^2 - (x - y) + 1].$$

2° $[(x + a)^2 + 3(x + a) + 1]^2 - 1$
$$= [(x + a)^2 + 3(x + a)]\,[(x + a)^2 + 3(x + a) + 2]$$
$$= (x + a)\,(x + a + 3)\,(x + a + 1)\,(x + a + 2).$$

3° $3(1 + a^2 + a^4) - (1 + a + a^2)^2$.

On a $1 + a^2 + a^4 = (1 + a^2)^2 - a^2 = (1 - a + a^2)\,(1 + a + a^2)$.

L'expression devient
$$(1 + a + a^2)\,[3(1 - a + a^2) - (1 + a + a^2)]$$
$$= (1 + a + a^2)\,(2 - 4a + 2a^2) = 2(1 - a)^2\,(1 + a + a^2).$$

4° $(a - b)^2x^2 + 2(a^2 + b^2)xy + (a + b)^2y^2$.

En remplaçant le second terme par $(a - b)^2xy + (a + b)^2xy$, on trouve
$$(x + y)\,[(a - b)^2x + (a + b)^2y].$$

5° $a^4 - b^4 + 2b(a^3 + b^3) - 2a^2b(a + b)$
$$= (a + b)\,[(a^2 + b^2)\,(a - b) + 2b(b^2 - ab)]$$
$$= (a + b)\,(a - b)\,(a^2 + b^2 - 2b^2) = (a + b)^2\,(a - b)^2.$$

6° $2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4$
$$= 4a^2b^2 - (a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2)$$
$$= 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = (a^2 + b^2 + 2ab - c^2)\,(2ab - a^2 - b^2 + c^2)$$
$$= (a + b + c)\,(-a + b + c)\,(a - b + c)\,(a + b - c).$$

861. *Quand* a + b + c = 0, *montrer qu'on a*
$$4(a^6 + b^6 + c^6) = 12a^2b^2c^2 + (a^2 + b^2 + c^2)^3.$$

L'identité classique
$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)\,(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$
montre que $a^6 + b^6 + c^6 - 3a^2b^2c^2$ est égal à
$$(a^2 + b^2 + c^2)\,(a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2).$$

En tenant compte de cette relation, l'identité à démontrer devient
$$4(a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2) = (a^2 + b^2 + c^2)^2,$$
ou $$3(a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2) = 0,$$
ou, en tenant compte de l'exercice **860**, 6°,
$$3(a + b + c)\,(-a + b + c)\,(a - b + c)\,(a + b - c) = 0,$$
ce qui est exact, car $a + b + c = 0$, par hypothèse.

862. *Du théorème qui donne le reste de la division d'un polynôme entier en* x *par* x ± a, *déduire les caractères de divisibilité d'un nombre entier par* 9 *et par* 11.

Considérons à titre d'exemple le nombre N = 395 421, qui peut s'écrire
$$3.10^5 + 9.10^4 + 5.10^3 + 4.10^2 + 2.10 + 1.$$

Le reste de la division de N par 9 = 10 — 1 est
$$R = 3 + 9 + 5 + 4 + 2 + 1;$$
celui de la division de N par 11 = 10 + 1 est
$$R' = 3(-1)^5 + 9(-1)^4 + 5(-1)^3 + 4(-1)^2 + 2(-1) + 1$$
$$= (9 + 4 + 1) - (3 + 5 + 2).$$

N est divisible par 9, si R = 0; et par 11, si R' = 0.

863. *Calculer l'expression* (xy — 1) (xz — 1) *au moyen de* x *seulement, sachant que* xyz = x + y + z + 3.

On a $(xy - 1)(xz - 1) = x^2yz - xy - xz + 1$

$$= x(x + y + z + 3) - xy - xz + 1 = x^2 + 3x + 1.$$

864. *Trouver, sans faire la division, le quotient de la division de*

$$(ac + bd)^2 - (ad + bc)^2 \quad par \quad (a - b)(c - d).$$

Le dividende est du second degré en a; il s'annule pour $a = b$ et pour $a = -b$; le coefficient de a^2 est $c^2 - d^2$. Le dividende est donc égal à $(c^2 - d^2)(a^2 - b^2)$ et le quotient cherché est $(a + b)(c + d)$.

865. *Si* 2p = a + b + c, *calculer les expressions suivantes :*

1° $p(p - a) + (p - b)(p - c)$. — Cette expression vaut

$$\frac{1}{4}[(a + b + c)(-a + b + c) + (a - b + c)(a + b - c)]$$

$$= \frac{1}{4}[(b + c)^2 - a^2 + a^2 - (b - c)^2] = bc.$$

2° $p^2 + (p - a)^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2$. — On a :

$$p^2 = \frac{1}{4}(a + b + c)^2 = \frac{1}{4}[a^2 + (b + c)^2 + 2a(b + c)];$$

$$(p - a)^2 = \frac{1}{4}(-a + b + c)^2 = \frac{1}{4}[a^2 + (b + c)^2 - 2a(b + c)];$$

$$(p - b)^2 = \frac{1}{4}(a - b + c)^2 = \frac{1}{4}[a^2 + (b - c)^2 - 2a(b - c)];$$

$$(p - c)^2 = \frac{1}{4}(a + b - c)^2 = \frac{1}{4}[a^2 + (b - c)^2 + 2a(b - c)].$$

En additionnant, on voit que l'expression vaut :

$$\frac{1}{4}[4a^2 + 2(b + c)^2 + 2(b - c)^2] = a^2 + b^2 + c^2.$$

3° $p(p - a)(p - b) + p(p - b)(p - c) + p(p - c)(p - a)$
$- (p - a)(p - b)(p - c)$.

En groupant le 1er et le 3e, le 2e et le 4e termes, l'expression devient :

$$p(p - a)[(p - b) + (p - c)] + (p - b)(p - c)[p - (p - a)]$$
$$= ap(p - a) + a(p - b)(p - c) = a[p(p - a) + (p - b)(p - c)],$$

ou encore abc, en tenant compte du 1°.

866. *Si* $\frac{a + x}{b + x} = \frac{b^3}{a^3}$ *et* $\frac{a + y}{b + y} = \frac{a^4}{b^4}$, *on a aussi* a = b *ou* xy = ab.

Les données nous permettent d'écrire

$$\frac{b(a + x)}{a(b + x)} \times \frac{a + y}{b + y} = 1,$$

ou $$b(a + x)(a + y) - a(b + x)(b + y) = 0,$$

ou encore, en décomposant en facteurs,
$$(a - b)(xy - ab) = 0,$$
ce qui exige $a = b$ ou $xy = ab$.

867. *Calculer* $\dfrac{3x + 2y + bz}{ax + by - b^2z}$, *sachant qu'on a*
$$(a + b)x = (a - b)y = (a^2 - b^2)z = 1.$$
En supposant $a \neq \pm b$, on a :
$$x = \frac{1}{a + b}; \quad y = \frac{1}{a - b}; \quad z = \frac{1}{a^2 - b^2}.$$
Remplaçons x, y, z et l'expression devient
$$\frac{3(a - b) + 2(a + b) + b}{a(a - b) + b(a + b) - b^2} = \frac{5a}{a^2} = \frac{5}{a}.$$

868. *Quand* $ax - b = 0$, *on a*
$$\frac{bx - a}{bx + a} + \frac{ay + b}{ay - b} - \frac{2(a^2x + b^2y)}{(bx + a)(ay - b)} = 0.$$
Réduire au même dénominateur. Le numérateur sera
$$(bx - a)(ay - b) + (ay + b)(bx + a) - 2(a^2x + b^2y)$$
$$= 2(abxy + ab - a^2x - b^2y) = 2(ax - b)(by - a).$$
On voit qu'il s'annule quand $ax - b = 0$.

869. *Quelle est la condition pour que* $x^5 - my^5$ *soit divisible par* $x + ay$? *Écrire le quotient.*

En remplaçant x par $-ay$, on trouve la condition
$$-a^5y^5 - my^5 = 0 \quad \text{ou} \quad a^5 + m = 0.$$
Le quotient est
$$x^4 - ax^3y + a^2x^2y^2 - a^3xy^3 + a^4y^4.$$

870. *Déterminer* p *et* q *pour que* $x^5 + px + q$ *soit divisible par* $x^2 - 2ax + a^2$.

Le diviseur peut s'écrire $(x - a)^2$. Le polynôme $x^5 + px + q$ est divisible par $x - a$, si on a
$$a^5 + ap + q = 0, \tag{1}$$
et le quotient est
$$x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4 + p.$$
Ce quotient est divisible par $x - a$, si on a
$$5a^4 + p = 0. \tag{2}$$
Les équations (1) et (2) donnent p et q;
$$p = -5a^4; \quad q = 4a^5.$$
Le quotient final sera
$$x^3 + 2ax^2 + 3a^2x + 4a^3.$$

871. *Si* $\dfrac{ax + by + cz}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 1$, *on a* $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$, *quand* a, b, c *sont différents de zéro.*

De l'égalité donnée, on peut déduire

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2 = 0,$$

ou, en transformant (identité de Lagrange),

$$(ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 = 0.$$

Cette égalité exige

$$ay - bx = bz - cy = cx - az = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

872. *Si* $x = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ *et* $y = \dfrac{(a - b + c)(a + b - c)}{(a + b + c)(-a + b + c)}$, *on a*

$$(x + 1)(y + 1) = 2.$$

On a :

$$x + 1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2 + 2bc}{2bc} = \frac{(a + b + c)(-a + b + c)}{2bc};$$

$$y + 1 = \frac{(a - b + c)(a + b - c) + (a + b + c)(-a + b + c)}{(a + b + c)(-a + b + c)};$$

et par suite,

$$(x + 1)(y + 1) = \frac{(a - b + c)(a + b - c) + (a + b + c)(-a + b + c)}{2bc}$$

$$= \frac{a^2 - (b - c)^2 + (b + c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{4bc}{2bc} = 2.$$

873. *Calculer* $(x + y + z)^3 - 3(x + y + z)(xy + yz + zx) + 3xyz$.

On peut écrire

$$(x + y + z)^3 - 3(x + y + z)(xy + yz + zx)$$
$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz,$$

en tenant compte de l'identité classique

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

L'expression se réduit donc à $x^3 + y^3 + z^3$.

874. *Si* $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = 1$, *on a* $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c^2}{d^2} = \dfrac{c}{d} + \dfrac{a^2}{b^2}$.

En effet, l'égalité à démontrer peut s'écrire

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a^2}{b^2} - \frac{c^2}{d^2} = \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)$$

et le dernier facteur du second membre est égal à 1, par hypothèse.

875. *Si* $b^2 = ac$, *on a* $\dfrac{1}{a^3} + \dfrac{1}{b^3} + \dfrac{1}{c^3} = \dfrac{a^3 + b^3 + c^3}{a^2b^2c^2}$.

En effet, le second membre peut s'écrire, en tenant compte de l'hypothèse,

$$\frac{a}{b^2c^2}+\frac{b}{a^2c^2}+\frac{c}{a^2b^2}=\frac{a}{ac^3}+\frac{b}{b^4}+\frac{c}{a^3c}=\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}.$$

876. *Valeur de* $\frac{x+2a}{2b-x}+\frac{x-2a}{2b+x}+\frac{4ab}{x^2-4b^2}$ *pour* $x=\frac{ab}{a+b}$.

En réduisant au même dénominateur, on trouve

$$f(x)=\frac{4(a+b)x-4ab}{4b^2-x^2}.$$

Or, $x=\frac{ab}{a+b}$ est la racine du numérateur de $f(x)$. Par suite, cette même valeur de x annule $f(x)$, en supposant toutefois qu'elle n'est pas une racine du dénominateur de $f(x)$.

877. *Déterminer* a *et* b *pour que l'expression* $9x^3-7x+b$ *soit divisible par* $9x^2+9ax+2a^2$.

Le diviseur peut s'écrire $(3x+a)(3x+2a)$. Dans le dividende, remplaçons x, d'abord par $-\frac{a}{3}$, puis par $-\frac{2a}{3}$. On obtient le système

$$a^3-7a=3b,\quad 8a^3-14a=3b,$$

dont on déduit

$$a^3-7a=8a^3-14a \quad \text{ou} \quad a(a^2-1)=0.$$

Les racines de cette équation sont $a=\pm 1$; $a=0$.

Si $a=1$, on a $b=-2$ et le quotient est $x-1$;
Si $a=-1$, on a $b=2$ et le quotient est $x+1$;
Si $a=0$, on a $b=0$. On voit aisément que cette solution ne convient pas.

878. *Calculer l'expression*

$$E=\frac{1-x+x^2-x^3+\dots+x^{2m}-x^{2m+1}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}+\dots+\frac{1}{x^{2m-1}}+\frac{1}{x^{2m+1}}}.$$

Le numérateur est égal à $\frac{1-x^{2m+2}}{1+x}$.

Le dénominateur peut s'écrire

$$\frac{1}{x^{2m+1}}(x^{2m}+x^{2m-2}+\dots+x^2+1)=\frac{x^{2m+2}-1}{x^{2m+1}(x^2-1)}.$$

On a donc

$$E=\frac{(1-x^{2m+2})(1-x^2)x^{2m+1}}{(1-x^{2m+2})(1+x)}=(1-x)x^{2m+1}.$$

879. *Calculer les expressions*

$$bd - ce + ad - ab \quad et \quad b(a - 2c) - 2c(b - 2d) + d(c - 2e),$$

sachant que a, b, c, d, e *sont cinq nombres entiers consécutifs croissants.*

Poser $a = n - 2,\ \ b = n - 1,\ \ c = n,\ \ d = n + 1,\ \ e = n + 2$ et remplacer; on trouve

$$bd - ce + ad - ab = -5;$$
$$b(a - 2c) - 2c(b - 2d) + d(c - 2e) = -2.$$

880. *Si deux des nombres* x, y, z *sont égaux, on a*

$$\frac{x - y}{x + y} + \frac{y - z}{y + z} + \frac{z - x}{z + x} = 0.$$

Le premier membre de cette égalité peut s'écrire

$$\frac{(x-y)(y+z)(z+x) + (y-z)(z+x)(x+y) + (z-x)(x+y)(y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

ou
$$\frac{(x-y)(x-z)(y-z)}{(x+y)(x+z)(y+z)}, \tag{1}$$

car le numérateur est du second degré en x; il s'annule pour $x = y$ et $x = z$ et le coefficient de x^2 est $y - z$.

La fraction (1) s'annule évidemment quand deux des nombres x, y, z sont égaux; il faut toutefois que parmi ces nombres, il n'y en ait pas deux qui soient nuls ou opposés.

881. *Si* $x^2 - a^2 = y^2 - b^2 = z^2 - c^2$, *on a*

$$\frac{bz - cy}{a - x} + \frac{cx - az}{b - y} + \frac{ay - bx}{c - z} = 0.$$

Multiplier les deux termes des fractions du premier membre respectivement par $a + x$, $b + y$, $c + z$. Les dénominateurs deviennent égaux et la somme des numérateurs se réduit à zéro.

882. *Si deux des nombres* x, y, z *sont opposés, on a*

$$\frac{1}{x + y + z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

L'égalité à démontrer peut s'écrire

$$\frac{(x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz}{xyz(x + y + z)} = 0. \tag{1}$$

Ordonner le numérateur par rapport à x; il devient

$$x^2(y + z) + x(y + z)^2 + yz(y + z) \quad \text{ou} \quad (y + z)(x + y)(x + z).$$

L'égalité (1) est donc vérifiée quand deux des nombres x, y, z sont opposés; toutefois, il faut que les trois nombres soient différents de zéro et que leur somme ne soit pas nulle.

On pourrait aussi se borner à vérifier la propriété, en supposant par exemple $x = -y$. L'égalité à démontrer devient alors

$$\frac{1}{z} = -\frac{1}{y} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

883. *Un polynôme homogène par rapport à deux ou plusieurs lettres, est* **symétrique par rapport à ces lettres**, *lorsqu'il ne change pas quand on permute deux quelconques de ces lettres.*

Trouver l'expression générale d'un polynôme homogène symétrique et du premier degré en a *et* b, *ou en* a, b *et* c; *même question quand il est du second ou du troisième degré.*

1er degré : $A(a + b)$; $A(a + b + c)$.

2e degré : $A(a^2 + b^2) + Bab$.
$A(a^2 + b^2 + c^2) + B(ab + bc + ca)$.

3e degré : $A(a^3 + b^3) + B(a^2b + ab^2)$.
$A(a^3 + b^3 + c^3) + B(a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2) + Cabc$.

A, B, C sont des constantes indépendantes de a, b, c.

884. *Le polynôme* f(x,y,z) *est homogène symétrique et du second degré en* x, y *et* z. *Déterminer ce polynôme sachant que l'on a*

$$f(0,1,1) = 5 \quad \textit{et} \quad f(0,0,1) = 6.$$

La forme générale de ces polynômes est

$$f(x,y,z) = A(x^2 + y^2 + z^2) + B(xy + yz + zx).$$

On a $f(0,1,1) = 2A + B = 5$; $f(0,0,1) = A = 6$.

Le polynôme cherché est $6(x^2 + y^2 + z^2) - 7(xy + yz + zx)$.

885. *Montrer que l'on a*

$$(a + b + c)^3 - (b + c - a)^3 - (c + a - b)^3 - (a + b - c)^3 = 24abc.$$

Le premier membre est un polynôme homogène symétrique et du troisième degré en a, b et c. Il s'annule pour $a = 0$; il est donc divisible par a. En raison de sa symétrie, il est également divisible par b et c. Par conséquent, il sera divisible par le produit abc. Comme ce produit est aussi du troisième degré en a, b et c, le quotient sera une constante, c'est-à-dire une quantité indépendante de a, b et c. Si on désigne cette constante par k, on a

$$(a + b + c)^3 - (b + c - a)^3 - (c + a - b)^3 - (a + b - c)^3 = kabc.$$

Cette égalité est une identité; les deux membres prennent des valeurs numériques égales, quelles que soient les valeurs attribuées à a, b et c.

Pour trouver k, il suffit de donner à a, b, c trois valeurs quelconques, mais n'annulant aucun des deux membres. Pour $a = b = c = 1$, on trouve $27 - 3 = k$; donc $k = 24$.

886. *Montrer que l'on a :*

1° $a(b + c - a)^2 + b(c + a - b)^2 + c(a + b - c)^2$
$$+ (b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) = 4abc.$$

On raisonne comme pour l'exercice précédent (885).

2° $(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4)$
$$= (a + b + c)(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c).$$

Le premier membre est un polynôme du 4e degré en a; il s'annule pour $a = \pm(b + c)$ et $a = \pm(b - c)$; le coefficient de a^4 est -1. Il est donc égal à

$$-[a - (b + c)][a + (b + c)][a - (b - c)][a + (b - c)]$$

ou $$(a + b + c)(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c).$$

On peut raisonner aussi comme pour l'exercice précédent.

3° $a^2(b^3 - c^3) + b^2(c^3 - a^3) + c^2(a^3 - b^3)$
$$= (a - b)(b - c)(c - a)(ab + bc + ca).$$

Le premier membre est un polynôme F(a, b, c) du troisième degré en a, en b, ou en c; homogène et du cinquième degré par rapport à a, b et c.

Il s'annule pour $a = b$, $a = c$, $b = c$. Il est donc divisible par le produit $(a - b)(b - c)(c - a)$ et on peut écrire

$$F(a, b, c) = (a - b)(b - c)(c - a)Q.$$

Le diviseur est homogène et du troisième degré en a, b, c; il est du second par rapport à l'une de ces lettres. Donc le quotient Q est homogène et du second degré en a, b, c; il est du premier degré par rapport à une de ces lettres. D'autre part, F(a, b, c) et le diviseur changent seulement de signe quand on permute deux lettres. Par suite, Q est symétrique en a, b, c.

De ce qui précède, il résulte que Q est de la forme $k(ab + bc + ca)$ et

$$F(a, b, c) = (a - b)(b - c)(c - a) \times k(ab + bc + ca).$$

En faisant $a = 0$, $b = 1$, $c = -1$, on trouve $k = 1$.

887. *Transformer les expressions suivantes :*

1° $$\frac{1}{a(a - b)(a - c)} + \frac{1}{b(b - a)(b - c)} + \frac{1}{c(c - a)(c - b)}.$$

Cette somme peut s'écrire

$$\frac{bc(b - c) - ac(a - c) + ab(a - b)}{abc(a - b)(a - c)(b - c)} = \frac{1}{abc},$$

car on a

$$bc(b - c) - ac(a - c) + ab(a - b) = (a - b)(a - c)(b - c).$$

Pour démontrer cette dernière relation, on peut raisonner comme au numéro précédent, 2° ou 3°.

2° $\dfrac{a^2+1}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^2+1}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c^2+1}{(c-a)(c-b)}$.

Cette somme peut s'écrire

$$\frac{(a^2+1)(b-c)-(b^2+1)(a-c)+(c^2+1)(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = 1,$$

car on peut démontrer qu'on a

$$(a^2+1)(b-c)-(b^2+1)(a-c)+(c^2+1)(a-b) = (a-b)(a-c)(b-c).$$

3° $\dfrac{1}{a^2(a-b)(a-c)} + \dfrac{1}{b^2(b-a)(b-c)} + \dfrac{1}{c^2(c-a)(c-b)}$.

Cette somme peut s'écrire

$$\frac{b^2c^2(b-c)-a^2c^2(a-c)+a^2b^2(a-b)}{a^2b^2c^2(a-b)(a-c)(b-c)} = \frac{ab+bc+ca}{a^2b^2c^2},$$

car on peut montrer que l'on a

$$b^2c^2(b-c)-a^2c^2(a-c)+a^2b^2(a-b) = (a-b)(b-c)(a-c)(ab+bc+ca).$$

888. *Calculer les expressions* $a^2x+b^2y-c^2$ *et* $a^3x+b^3y-c^3$, *quand* x *et* y *sont la solution du système* $ax+by=c$, $x+y=1$.

La solution du système $ax+by=c$, $x+y=1$ est

$$x = \frac{c-b}{a-b}, \quad y = \frac{a-c}{a-b},$$

en supposant $a \neq b$.

1° On a

$$a^2x+b^2y-c^2 = \frac{1}{a-b}[a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)] = (b-c)(c-a),$$

car on peut montrer qu'on a

$$a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a) = (a-b)(b-c)(c-a).$$

2° On trouve de même

$$a^3x+b^3y-c^3 = (b-c)(c-a)(a+b+c),$$

après avoir démontré qu'on a

$$a^3(c-b)+b^3(a-c)+c^3(b-a) = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

889. *Quelles valeurs entières faut-il donner à* a *et à* b, *pour que le polynôme* $2x^3-10x^2+bx-5$ *soit divisible par* $x-a$?

Le quotient sera de la forme $2x^2+cx+d$ et on peut écrire

$$2x^3-10x^2+bx-5 = (x-a)(2x^2+cx+d) = 2x^3+x^2(c-2a)+x(d-ac)-ad;$$

et aussi $ad=5;\quad 2a-c=10;\quad d-ac=b.$

Comme a doit être entier, on peut avoir :

$$a = 1; \quad d = 5; \quad \text{alors} \quad c = -8; \quad b = 13;$$
$$a = 5; \quad d = 1; \quad \text{alors} \quad c = 0; \quad b = 1;$$
$$a = -1; \quad d = -5; \quad \text{alors} \quad c = -12; \quad b = -17;$$
$$a = -5; \quad d = -1; \quad \text{alors} \quad c = -20; \quad b = -101.$$

890. *Déterminer* m *et* n *pour que le polynôme*

$$\mathrm{x}^5 + (\mathrm{a} + \mathrm{m})\mathrm{x}^4 + (\mathrm{b} + \mathrm{am} + \mathrm{n})\mathrm{x}^3 + (\mathrm{bm} + \mathrm{an})\mathrm{x}^2 + \mathrm{ax} + \mathrm{bm} - \mathrm{a}^2$$

soit divisible par $\mathrm{x}^3 + \mathrm{mx}^2 + \mathrm{nx}$.

1° Le polynôme doit être divisible par x, ce qui donne

$$bm - a^2 = 0 \quad \text{ou} \quad m = \frac{a^2}{b}.$$

2° Le polynôme $x^4 + (a + m)x^3 + (b + am + n)x^2 + (bm + an)x + a$ doit être divisible par $x^2 + mx + n$. En désignant le quotient par $x^2 + cx + d$, on obtient le système :

$$c + m = a + m \tag{1}$$
$$d + cm + n = b + am + n \tag{2}$$
$$dm + cn = bm + an \tag{3}$$
$$dn = a. \tag{4}$$

Les équations (1) et (2) donnent $c = a$; $d = b$; et ces valeurs de c et d vérifient l'équation (3). L'équation (4) donne alors $n = \frac{a}{b}$ et le quotient est $x^2 + ax + b$.

Le raisonnement précédent suppose $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Si $a = b = 0$, le dividende devient

$$x^5 + mx^4 + nx^3 = x^2(x^3 + mx^2 + nx),$$

et par suite, m et n sont indéterminés.

Le problème est impossible quand un seul des deux nombres a et b est nul.

891. *Calculer le produit des trois nombres* x, y *et* z, *connaissant leur somme* a, *la somme* b^2 *de leurs carrés et la somme* c^3 *de leurs cubes.*

On a l'identité

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

Le dernier facteur du second membre peut s'écrire

$$\frac{1}{2}[3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - (x + y + z)^2].$$

En remplaçant et en tenant compte des données, il vient

$$2c^3 - 6xyz = a(3b^2 - a^2).$$

Par suite,

$$xyz = \frac{2c^3 - 3ab^2 + a^3}{6}.$$

892. *Montrer que les polynômes suivants sont divisibles par* $(x-1)^3$ *et trouver le quotient.*

1° $nx^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + (n+2)x - n$.

a) Le polynôme donné s'annule pour $x = 1$; le quotient de la division par $x - 1$ est

$$Q(x) = nx^{n+1} - 2x^n - 2x^{n-1} - \dots - 2x + n.$$

b) On a $Q(1) = n - 2n + n = 0$.

Le quotient de $Q(x)$ par $x - 1$ est

$$Q'(x) = nx^n + (n-2)x^{n-1} + (n-4)x^{n-2} + \dots \\ + [n-(n-1)2]x - n.$$

c) On a $Q'(1) = n + (n-2) + (n-4) + \dots$

$$+ (-n+4) + (-n+2) + (-n) = 0.$$

Le quotient de $Q'(x)$ par $x - 1$ est

$$Q''(x) = nx^{n-1} + (2n-2)x^{n-2} + (3n-6)x^{n-3} + \dots + (2n-2)x + n.$$

2° $x^{2n+1} - (2n+1)x^{n+1} + (2n+1)x^n - 1$.

a) Le polynôme s'annule pour $x = 1$; le quotient de la division par $x - 1$ est

$$Q(x) = x^{2n} + x^{2n-1} + \dots + x^{n+1} - 2nx^n + x^{n-1} + \dots + x + 1.$$

b) On a $Q(1) = n - 2n + n = 0$.

Le quotient de $Q(x)$ par $x - 1$ est

$$Q'(x) = x^{2n-1} + 2x^{2n-2} + \dots + nx^n - nx^{n-1} \\ - (n-1)x^{n-2} - \dots - 2x - 1.$$

c) On a $Q'(1) = (1 + 2 + \dots + n) - (n + \dots + 2 + 1) = 0$.

Le quotient de $Q'(x)$ par $x - 1$ est

$$Q''(x) = x^{2n-2} + 3x^{2n-3} + \dots + \frac{n(n+1)}{2}x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} \\ + \dots + 3x + 1.$$

893. *Si* $abc = 1$, *montrer qu'on a*

$$\frac{1}{a(1+b+bc)} + \frac{1}{b(1+c+ca)} + \frac{1}{c(1+a+ab)} \\ = \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+ca} + \frac{1}{1+a+ab}$$

Réduisons les trois termes du premier membre au même dénominateur, ainsi que les trois termes du second membre. Les deux dénominateurs communs sont égaux, car $abc = 1$; il suffit donc de montrer que les deux numérateurs sont égaux.

Le numérateur du premier membre est une somme de trois termes qui sont :

$$bc(1+c+ca)(1+a+ab) = (1+c+ca)(bc+abc+ab^2c) \\ = (1+c+ca)(1+b+bc);$$

$$ac(1 + a + ab)(1 + b + bc) = (1 + a + ab)(ac + abc + abc^2)$$
$$= (1 + a + ab)(1 + c + ca);$$
$$ab(1 + b + bc)(1 + c + ca) = (1 + b + bc)(ab + abc + a^2bc)$$
$$= (1 + b + bc)(1 + a + ab).$$

On voit que le numérateur du premier membre est égal au numérateur du second.

894. *Calculer l'expression*

$$\frac{a + b}{ab}(a^2 + b^2 - c^2) + \frac{b + c}{bc}(b^2 + c^2 - a^2) + \frac{c + a}{ca}(c^2 + a^2 - b^2).$$

Cette expression peut s'écrire

$$\frac{1}{abc}[c(a + b)(a^2 + b^2 - c^2) + a(b + c)(b^2 + c^2 - a^2)$$
$$+ b(c + a)(c^2 + a^2 - b^2)].$$

On décompose chacun des termes entre crochets en une somme de deux autres. En groupant ensuite les termes, il vient

$$ac(a^2 + b^2 - c^2) + ac(b^2 + c^2 - a^2) = 2ab^2c;$$
$$bc(a^2 + b^2 - c^2) + bc(c^2 + a^2 - b^2) = 2a^2bc;$$
$$ab(b^2 + c^2 - a^2) + ab(c^2 + a^2 - b^2) = 2abc^2.$$

L'expression peut donc s'écrire

$$\frac{1}{abc}(2ab^2c + 2a^2bc + 2abc^2) = 2(a + b + c).$$

895. *Sachant que* $a + b + c = 0$, *calculer l'expression*

$$\left(\frac{b - c}{a} + \frac{c - a}{b} + \frac{a - b}{c}\right)\left(\frac{a}{b - c} + \frac{b}{c - a} + \frac{c}{a - b}\right).$$

Le premier facteur peut s'écrire

$$\frac{bc(b - c) + ca(c - a) + ab(a - b)}{abc} = \frac{-(a - b)(b - c)(c - a)}{abc}.$$

L'expression proposée devient donc

$$\frac{a(c - a)(a - b) + b(a - b)(b - c) + c(b - c)(c - a)}{-abc}.$$

En remplaçant a par $-b - c$ dans le numérateur, celui-ci devient

$$(b + c)(b + 2c)(2b + c) - b(2b + c)(b - c) + c(b - c)(b + 2c)$$
$$= (b + c)(b + 2c)(2b + c) - (b - c)(2b^2 - 2c^2)$$
$$= (b + c)[(b + 2c)(2b + c) - 2(b - c)^2] = 9bc(b + c).$$

L'expression proposée est donc égale à

$$\frac{9bc(b + c)}{-abc} = \frac{9bc(b + c)}{bc(b + c)} = 9.$$

896. *Quelles sont les relations qui existent entre* p, q *et* r *lorsque le polynôme* $x^5 + 10px^2 + 5qx + r$ *a une racine triple.*

Supposons que α soit une racine triple du polynôme, ou, ce qui revient au même, que le polynôme soit divisible par $(x - \alpha)^3$.

a) α annule le polynôme donné; on a donc

$$\alpha^5 + 10p\alpha^2 + 5q\alpha + r = 0. \tag{1}$$

Le quotient de la division du polynôme par $x - \alpha$ est

$$Q(x) = x^4 + \alpha x^3 + \alpha^2x^2 + (\alpha^3 + 10p)x + \alpha^4 + 10p\alpha + 5q.$$

b) $Q(x)$ est divisible par $x - \alpha$; on a donc

$$Q(\alpha) = 5\alpha^4 + 20p\alpha + 5q = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha^4 + 4p\alpha + q = 0. \tag{2}$$

Le quotient de la division de $Q(x)$ par $x - \alpha$ est

$$Q'(x) = x^3 + 2\alpha x^2 + 3\alpha^2x + 4\alpha^3 + 10p.$$

c) $Q'(x)$ est divisible par $x - \alpha$. On a donc

$$Q'(\alpha) = 10\alpha^3 + 10p = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha^3 + p = 0. \tag{3}$$

d) Éliminons α entre (1), (2) et (3). En remplaçant α^3 dans (2) par $-p$, on trouve, si $p \neq 0$,

$$3p\alpha + q = 0 \quad \text{et} \quad \alpha = -\frac{q}{3p}.$$

On aura aussi $\quad -p = \left(\frac{-q}{3p}\right)^3 \quad$ ou $\quad 27p^4 = q^3. \qquad (4)$

Remplaçons ensuite α et α^3 par leur valeur dans (1). Il vient

$$-\frac{pq^2}{9p^2} + \frac{10pq^2}{9p^2} - \frac{5q^2}{3p} + r = 0 \quad \text{ou} \quad 3pr = 2q^2. \tag{5}$$

Les égalités (4) et (5) expriment les conditions nécessaires cherchées. Si $p = 0$, on trouve $\alpha = q = r = 0$.

897. *Montrer qu'on a*

$$(a + b)^9 - a^9 - b^9 - 3a^3b^3(a + b)^3 = 9ab(a + b)(a^2 + ab + b^2)^3.$$

En supposant $x = (a + b)^3$, $y = -a^3$, $z = -b^3$, on voit que l'identité classique

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

donne, en désignant par E le premier membre de l'égalité à démontrer,

$$\begin{aligned} E = {} & [(a + b)^3 - a^3 - b^3] \\ & [(a + b)^6 + a^6 + b^6 + a^3(a + b)^3 + b^3(a + b)^3 - a^3b^3] \\ = {} & 3ab(a + b)[(a + b)^6 + a^6 + b^6 + a^3(a + b)^3 + b^3(a + b)^3 - a^3b^3]. \end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} (a + b)^6 - a^3b^3 &= [(a + b)^2 - ab][(a + b)^4 + ab(a + b)^2 + a^2b^2] \\ &= (a^2 + ab + b^2)[(a + b)^4 + ab(a + b)^2 + a^2b^2]. \\ a^6 + b^3(a + b)^3 &= [a^2 + b(a + b)][a^4 - a^2b(a + b) + b^2(a + b)^2] \\ &= (a^2 + ab + b^2)[a^4 - a^2b(a + b) + b^2(a + b)^2]. \\ b^6 + a^3(a + b)^3 &= (a^2 + ab + b^2)[b^4 - ab^2(a + b) + a^2(a + b)^2]. \end{aligned}$$

Il vient donc

$$E = 3ab(a+b)(a^2+ab+b^2)[(a+b)^4+ab(a+b)^2+a^2b^2 + a^4 - a^2b(a+b) + b^2(a+b)^2 + b^4 - ab^2(a+b) + a^2(a+b)^2].$$

Groupons les termes entre crochets. On a :

$$(a+b)^4 + a^2(a+b)^2 + b^2(a+b)^2 = (a+b)^2(2a^2+2b^2+2ab);$$
$$ab(a+b)^2 - a^2b(a+b) - ab^2(a+b) = 0;$$
$$a^4+b^4+a^2b^2 = (a^2+b^2)^2 - a^2b^2 = (a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2).$$

En remplaçant, il vient

$$E = 3ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2[2(a+b)^2+(a^2-ab+b^2)]$$

ou

$$E = 9ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^3.$$

898. *Si* $x+y+z=a$ et $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$, *l'un au moins des nombres* x, y, z *est égal à* a (*E. M. Armes simples*, 1910).

Il suffit de montrer que $(x-a)(y-a)(z-a)$ est nul.

En tenant compte de la première relation donnée, on trouve

$$(x-a)(y-a)(z-a) = xyz - a(xy+yz+zx).$$

Or la seconde relation donnée peut s'écrire

$$xyz - a(xy+yz+zx) = 0.$$

On a donc $(x-a)(y-a)(z-a) = 0$

et l'un au moins des nombres x, y, z est égal à a.

REMARQUES. — I. La question proposée n'a de sens que si on suppose a, x, y et z différents de zéro.

II. Si l'on suppose l'un des nombres, x par exemple, égal à a, le système se réduit à $y+z=0$ et les deux autres nombres sont opposés.

899. *Démontrer les deux questions suivantes par la méthode de récurrence.*

1° Si l'on pose $x+\frac{1}{x}=y$, l'expression $x^n+\frac{1}{x^n}$ peut se mettre sous la forme d'un polynôme entier en y, quand n est un entier positif.

En effet, on peut écrire

$$x^p+\frac{1}{x^p} = \left(x^{p-1}+\frac{1}{x^{p-1}}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right) - \left(x^{p-2}+\frac{1}{x^{p-2}}\right).$$

Le théorème est donc vrai pour $n=p$, s'il est vrai pour $n=p-1$ et $n=p-2$. Or, il est vrai pour $n=1$ et $n=2$, car on a :

$$x^2+\frac{1}{x^2} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 2 = y^2 - 2.$$

Il est donc vrai, quel que soit n.

2° La somme des puissances n^{es} de deux nombres x et y peut se mettre sous la forme d'un polynôme entier en $x + y$ et xy.

En effet, on peut écrire

$$(x^{p-1} + y^{p-1})(x + y) = x^p + y^p + xy(x^{p-2} + y^{p-2})$$

ou

$$x^p + y^p = (x^{p-1} + y^{p-1})(x + y) - xy(x^{p-2} + y^{p-2}).$$

Le théorème est donc vrai pour $n = p$, s'il est vrai pour $n = p - 1$ et $n = p - 2$. Or, il est vrai pour $n = 1$ et $n = 2$, car on a

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy.$$

Le théorème est donc vrai, quel que soit n.

DEUXIÈME SÉRIE

Premier degré.

900. *Résoudre les équations suivantes :*

1° $(x + 1)(x - 2)\dfrac{x}{x^2 - 1} = 0.$

Cette équation se décompose immédiatement en trois autres dont les racines sont $x = -1$; $x = 0$; $x = 2$. Seulement, la racine $x = -1$ est inacceptable pour l'équation proposée, car le 3e facteur du premier membre n'est pas défini pour $x = -1$.

2° $\dfrac{x - 2}{x - 3} - \dfrac{x - 10}{x - 11} = \dfrac{x - 3}{x - 4} - \dfrac{x - 11}{x - 12}.$

Cette équation peut s'écrire successivement

$$\frac{x - 2}{x - 3} - \frac{x - 3}{x - 4} = \frac{x - 10}{x - 11} - \frac{x - 11}{x - 12};$$

$$\frac{-1}{(x - 3)(x - 4)} = \frac{-1}{(x - 11)(x - 12)};$$

$$(x - 3)(x - 4) = (x - 11)(x - 12); \quad 16x = 120.$$

On a donc $x = 7{,}5$ et cette racine convient, car elle n'annule aucun dénominateur de l'équation proposée.

3° $\left(\dfrac{x + 1}{x} - 2\right)\left(1 + \dfrac{3x}{x + 1}\right) = \left(\dfrac{x + 1}{x} + 2\right)\left(1 - \dfrac{3x}{x + 1}\right).$

Rendre l'équation entière; effectuer et réduire. On obtient l'équation $2x^2 + 2x = 0$, dont les racines sont $x = -1$ et $x = 0$.

Ces racines sont inacceptables pour l'équation proposée et celle-ci est impossible.

4° $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} = 0.$

L'équation peut s'écrire

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3}\right) + \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}\right) = 0;$$

$$\frac{2x+3}{x(x+3)} + \frac{2x+3}{(x+1)(x+2)} = 0.$$

On voit qu'elle se décompose en deux autres :

a) $2x + 3 = 0;$

b) $\frac{1}{x(x+3)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{2(x^2+3x+1)}{x(x+1)(x+2)(x+3)} = 0.$

Les racines de ces équations sont

$$-\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2};$$

elles sont acceptables, car aucune de ces racines n'annule un dénominateur de l'équation proposée.

901. *Résoudre les systèmes suivants en les ramenant à des systèmes du premier degré au moyen d'inconnues auxiliaires.*

1° $x^2 - 2y^2 = 7; \quad 3x^2 + 2y^2 = 29.$

C'est un système du premier degré en x^2 et y^2. On trouve $x^2 = 9;\ y^2 = 1;$ puis $x = \pm 3;\ y = \pm 1.$

Le système admet quatre solutions, car les doubles signes sont indépendants l'un de l'autre.

2° $4xy - 2x + y = 0; \quad 5xy - 4x - y = 0.$

Ce système admet la solution évidente $x = y = 0.$

D'autre part, en divisant par xy, on trouve

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{y} = -4; \quad \frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 5.$$

Ce système donne :

$$\frac{1}{x} = -1; \quad \frac{1}{y} = \frac{3}{2}; \quad \text{puis} \quad x = -1; \quad y = \frac{2}{3}.$$

3° $3x^2y^2 - x^2 + 4y^2 = 0; \quad 14x^2y^2 - 3x^2 - 8y^2 = 0.$

Prendre $\frac{1}{x^2}$ et $\frac{1}{y^2}$ comme inconnues auxiliaires. Le système admet cinq solutions :

$$0,\ 0; \quad 2,\ 0{,}5; \quad -2,\ 0{,}5; \quad 2,\ -0{,}5; \quad -2,\ -0{,}5.$$

4° $5x - 6y^2 + 3z^3 = 0; \quad 3x + 6y^2 + z^3 = 16; \quad x - 4y^2 - 2z^3 = 18.$

Ce système donne $\quad x = 6; \ y^2 = 1; \ z^3 = -8.$

Le système admet deux solutions, qui sont

$$x = 6, \quad y = 1, \quad z = -2; \quad x = 6, \quad y = -1, \quad z = -2.$$

902. *Montrer qu'un triangle est rectangle lorsque ses côtés sont une solution du système*

$$\frac{\mathrm{x}+\mathrm{y}}{17} = \frac{\mathrm{y}+\mathrm{z}}{18} = \frac{\mathrm{z}+\mathrm{x}}{25}.$$

Soit t la valeur commune des trois rapports. On a

$$x + y = 17t; \quad y + z = 18t; \quad z + x = 25t;$$

puis

$$x = 12t; \quad y = 5t; \quad z = 13t.$$

Le triangle dont les côtés sont $12t$, $5t$, $13t$ (supposer $t \neq 0$) est rectangle, car on a

$$(12t)^2 + (5t)^2 = (13t)^2.$$

903. *Chercher la condition nécessaire et suffisante pour que la fraction rationnelle* $\frac{\mathrm{ax}+\mathrm{b}}{\mathrm{a'x}+\mathrm{b'}}$ *soit indépendante de* x. — *Utiliser les résultats de la discussion de l'équation canonique du premier degré à une inconnue.*

Supposons que la fraction soit égale à la constante k pour toutes les valeurs de x, différentes de $-\frac{b'}{a'}$. On aura pour les mêmes valeurs de x,

$$ax + b = k(a'x + b')$$

ou

$$x(a - a'k) + b - b'k = 0. \tag{1}$$

Une équation du premier degré peut être déterminée, indéterminée ou impossible. Or, par hypothèse, l'équation (1) admet plus d'une solution. Elle est donc indéterminée et on a

$$a = a'k \quad \text{et} \quad b = b'k.$$

Ainsi, les coefficients des mêmes puissances de x sont égaux à un facteur constant près.

On vérifiera aisément que cette condition nécessaire est suffisante.

904. *Résoudre les équations suivantes :*

1° $x^3(a - b) + a^3(b - x) + b^3(x - a) = 0.$

Si $a = b$, l'équation est indéterminée. Supposons donc $a \neq b$.

Le premier membre, que nous désignons par $F(x, a, b)$, est homogène et du 4e degré en x, a et b. Il s'annule pour $x = a$, $x = b$ et $a = b$. On a donc

$$F(x, a, b) = (a - b)(x - a)(x - b)f(x, a, b), \tag{1}$$

$f(x, a, b)$ étant homogène et du 1er degré en x, a et b.

$F(x, a, b)$ et $(a - b)(x - a)(x - b)$ changent de signe quand on permute deux des lettres x, a, b. Par suite, $f(x, a, b)$ ne change pas quand on permute deux de ces lettres; $f(x, a, b)$ est symétrique par rapport à ces lettres et de la forme $mx + ma + mb$. En égalant les coefficients de x^3 dans (1), on trouve $m = 1$.

L'équation proposée devient
$$(a - b)(x - a)(x - b)(x + a + b) = 0.$$
Ses racines sont
$$x = a; \quad x = b; \quad x = -a - b.$$

2° $x(a - b)^3 + a(b - x)^3 + b(x - a)^3 = 0.$

On raisonne comme dans l'exercice précédent. Si $a \neq b$, l'équation peut s'écrire
$$-(a - b)(x - a)(x - b)(x + a + b) = 0$$
et ses racines sont encore a, b, $-a-b$.

3° $(x - a)^3 + (x - b)^3 + (x - c)^3 = 3(x - a)(x - b)(x - c).$

En appliquant l'identité
$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca),$$
l'équation devient
$$[3x - (a + b + c)](a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0.$$
Si $a = b = c$, le second facteur est nul et l'équation est indéterminée. Dans le cas contraire, on trouve
$$x = \frac{1}{3}(a + b + c).$$

4° $(x - a)^3(x + a + 2b) = (x + b)^3(x - 2a - b).$

Effectuer et réduire. Il vient ainsi
$$2(a + b)^3x = (a + b)^3(a - b).$$
Si $a + b \neq 0$, on a $x = \dfrac{a - b}{2}$.

Si $a + b = 0$, l'équation est indéterminée.

5° $\dfrac{a^2x}{(a - b)(a - c)} + \dfrac{b^2x}{(b - a)(b - c)} + \dfrac{c^2x}{(c - a)(c - b)} = abc.$

Cette équation n'a de sens que si a, b et c sont différents.

Réduire les trois termes du premier membre au même dénominateur $(a - b)(b - c)(c - a)$. On montre aisément que le coefficient de x peut s'écrire alors $(a - b)(b - c)(c - a)$. L'équation devient donc
$$x = abc.$$

905. *Résoudre les équations suivantes :*

1° $\dfrac{(x - a)^2}{x} = \dfrac{x^2}{x + 2a}.$

Faire disparaître les dénominateurs. On trouve
$$3a^2x = 2a^3.$$

Si $a \neq 0$, on a $x = \dfrac{2a}{3}$. Cette réponse convient, car elle n'annule aucun dénominateur de l'équation proposée.

Si $a = 0$, l'équation est indéterminée. Toutefois pour $x = 0$, les deux membres ne sont pas définis.

2° $\dfrac{(a+x)^2}{1+ax} = a^2 - x.$

Faire disparaître le dénominateur. On trouve

$$x^2(a+1) - x(a^3 - 2a - 1) = 0.$$

La racine $x = 0$ convient toujours.

Si $a \neq -1$, on a $x = \dfrac{a^3 - 2a - 1}{a+1} = a^2 - a - 1.$

Cette racine ne convient que si on a

$$1 + a(a^2 - a - 1) = (a-1)^2(a+1) \neq 0,$$

ce qui exige, en dehors de $a \neq -1$, encore $a \neq 1$.

Si $a = -1$, l'équation proposée devient

$$\frac{(1-x)^2}{1-x} = 1 - x.$$

L'équation est indéterminée; toutefois, il convient d'écarter $x = 1$, car le premier membre n'est pas défini pour cette valeur de x.

3° $\dfrac{x-a}{x-b} = c.$

L'équation peut s'écrire $x(1-c) = a - bc$.

Si $c \neq 1$, on a $x = \dfrac{a-bc}{1-c}$ et cette racine convient si l'on a

$$\frac{a-bc}{1-c} \neq b \quad \text{ou} \quad a \neq b.$$

Si $c = 1$, l'équation proposée devient

$$\frac{x-a}{x-b} = 1.$$

Cette équation est impossible si $a \neq b$. Elle est indéterminée si $a = b$; toutefois la racine $x = a$ est inacceptable.

4° $x - 1 = \dfrac{bx^2 - b}{b(x+b)}.$

Nous supposerons $b \neq 0$; sinon, l'équation n'a pas de sens. L'équation peut s'écrire, après avoir simplifié par b,

$$(x-1)\left(1 - \frac{x+1}{x+b}\right) = 0. \qquad (1)$$

Elle se décompose donc en deux autres.

a) $x - 1 = 0$ ou $x = 1$.

Cette racine ne convient que si elle donne une valeur définie au second facteur du premier membre de l'équation (1). Or, pour $x = 1$, il devient

$$1 - \frac{2}{b+1}.$$

On voit que b doit être différent de -1.

b) L'équation $1 - \dfrac{x+1}{x+b} = 0$ peut s'écrire

$$0.x = 1 - b.$$

Cette équation est impossible ou indéterminée, suivant qu'on a

$$b \neq 1 \quad \text{ou} \quad b = 1.$$

5° $\dfrac{a}{ax-1} + \dfrac{b}{bx-1} = \dfrac{a+b}{(a+b)x-1}$.

Réduisons les deux termes du premier membre au même dénominateur, puis écrivons que la somme des antécédents est à la somme des conséquents comme un antécédent est à son conséquent. Il vient ainsi

$$\frac{2abx - (a+b)}{abx^2 - (a+b)x + 1} = \frac{a+b}{(a+b)x-1}; \quad \frac{2abx}{abx^2} = \frac{a+b}{(a+b)x-1}.$$

a) Supposons $ab \neq 0$ et simplifions par abx, après avoir remarqué que, dans ce cas, $x = 0$ est une première solution de l'équation proposée. Il vient

$$\frac{2}{x} = \frac{a+b}{(a+b)x-1} \quad \text{ou} \quad (a+b)x = 2.$$

Si $a + b \neq 0$, on a $x = \dfrac{2}{a+b}$. Cette racine convient si elle n'annule pas $ax - 1$, $bx - 1$, $(a+b)x - 1$, ce qui exige $a \neq b$.

Si $a = -b \neq 0$, l'équation proposée devient

$$\frac{a}{ax-1} + \frac{a}{ax+1} = 0 \quad \text{ou} \quad 2a^2x = 0.$$

Elle n'est vérifiée que par $x = 0$.

b) Si $ab = 0$, trois cas peuvent se présenter.

Si $a = 0 \neq b$, l'équation devient $\dfrac{b}{bx-1} = \dfrac{b}{bx-1}$.

Cette équation est vérifiée par n'importe quel nombre, excepté par $x = \dfrac{1}{b}$.

Si $a \neq 0 = b$, l'équation devient $\dfrac{a}{ax-1} = \dfrac{a}{ax-1}$; elle est vérifiée par n'importe quel nombre, excepté par $x = \dfrac{1}{a}$.

Si $a = b = 0$, l'équation se réduit à $0 = 0$. Elle est indéterminée.

6° $\dfrac{a+b}{x+b} + \dfrac{a+c}{x+c} = \dfrac{2(a+b+c)}{x+b+c}$. (1)

L'équation peut s'écrire

$$\frac{a+b}{x+b} - \frac{a+b+c}{x+b+c} = \frac{a+b+c}{x+b+c} - \frac{a+c}{x+c}$$

ou

$$\frac{-c(x-a)}{(x+b)(x+b+c)} = \frac{b(x-a)}{(x+c)(x+b+c)}.$$

L'équation se décompose en deux autres :

a) $x - a = 0$ ou $x = a$. Cette racine convient si on a

$$a + b \neq 0; \quad a + c \neq 0; \quad a + b + c \neq 0.$$

b) $$\frac{-c}{(x+b)(x+b+c)} = \frac{b}{(x+c)(x+b+c)}$$

ou $$\frac{-c}{x+b} = \frac{b}{x+c}, \tag{2}$$

car l'équation (1) n'est pas vérifiée par la racine de $x + b + c = 0$.

L'équation (2) peut s'écrire

$$(b + c)x = -(b^2 + c^2).$$

Si $b + c \neq 0$, on a $x = \dfrac{-(b^2 + c^2)}{b + c}$.

Cette racine ne convient que si elle diffère de $-b$, de $-c$ et de $-(b + c)$, ce qui exige

$$b \neq 0; \quad c \neq 0; \quad b \neq c.$$

Remarque. — On pourrait considérer un assez grand nombre de cas particuliers.

906. *On donne le système* $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ *et on demande d'examiner s'il est équivalent aux systèmes*

$$A - B + C = 0; \quad 2B + 3C = 0; \quad 2A + 7C = 0;$$

et $$A + B - C = 0; \quad A - B + C = 0; \quad A + 5B - 5C = 0.$$

I. Considérons les systèmes :

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases} \begin{cases} A - B + C = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases} \begin{cases} A - B + C = 0 \\ 2B + 3C = 0 \\ C = 0 \end{cases} \begin{cases} A - B + C = 0 \\ 2B + 3C = 0 \\ 2A + 7C = 0. \end{cases}$$

Chacun d'eux est équivalent au suivant. Le second a été obtenu en remplaçant dans le premier $A = 0$ par $A - B + C = 0$; le troisième, en remplaçant dans le second $B = 0$ par $2B + 3C = 0$; le dernier, en remplaçant dans le troisième $C = 0$ par

$$2(A - B + C) + (2B + 3C) + 2C = 0 \quad \text{ou} \quad 2A + 7C = 0.$$

II. Considérons les systèmes :

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases} \begin{cases} A + B - C = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases} \begin{cases} A + B - C = 0 \\ A - B + C = 0 \\ C = 0 \end{cases} \begin{cases} A + B - C = 0 \\ A - B + C = 0 \\ A + 5B - 5C = 0. \end{cases}$$

On passe du second au troisième en remplaçant $B = 0$ par

$$(A + B - C) - 2B + 2C = 0 \quad \text{ou} \quad A - B + C = 0.$$

On voit que les trois premiers systèmes sont équivalents.

La dernière équation du 4e système s'obtient en remplaçant dans le troisième système $C = 0$ par $3(A + B - C) - 2(A - B + C) = 0$.

L'équation que l'on remplace ne se trouve donc pas parmi les équations que l'on combine pour la remplacer. Par suite, on ne peut pas affirmer que le 4e système, qui se réduit d'ailleurs aux équations $A + B - C = 0$ et $A - B + C = 0$, est équivalent au système proposé.

907. *Résoudre les systèmes suivants :*

1° $(a^2 + b^2)x + (a^2 - b^2)y = a^2;\quad (a + b)x + (a - b)y = a.$

Le déterminant du système est $D = -2ab(a - b)$.

Si $D \neq 0$, on trouve $x = y = \frac{1}{2}$.

Si $a = 0 \neq b$, le système se réduit à $x - y = 0$.
Si $a \neq 0 = b$, le système se réduit à $x + y = 1$.
Si $a = b = 0$, le système est complètement indéterminé.
Si $a = b \neq 0$, le système se réduit à l'équation $2x = 1$. On a $x = \frac{1}{2}$ et y peut être pris arbitrairement.

2° $(a + b)x + (a - b)y = a^2 + b^2;\quad (a - b)x + (a + b)y = a^2 - b^2.$

Additionner et soustraire. On obtient le système équivalent

$$ax + ay = a^2, \quad bx - by = b^2,$$

dont le déterminant est $-2ab$.

Si $ab \neq 0$, on trouve $x = \frac{a + b}{2};\quad y = \frac{a - b}{2}$.

Si $a = 0 \neq b$, le système se réduit à $x - y = b$.
Si $a \neq 0 = b$, le système se réduit à $x + y = a$.
Si $a = b = 0$, le système est complètement indéterminé.

3° $a(b + 1)x + (ab - 1)y = a;\quad a(b - 1)x + (ab + 1)y = -a.$

Le déterminant est $D = 2ab(a + 1)$.

Si $D \neq 0$, on trouve $x = \frac{a}{a + 1};\quad y = -\frac{a}{a + 1}$.

Si $a = 0 \neq b$, on trouve $y = 0$; x est arbitraire.
Si $a \neq 0 = b$, le système se réduit à $ax - y = a$.
Si $a = b = 0$, le système se réduit à $y = 0$.
Si $a = -1$, le système devient

$$(b + 1)x + (b + 1)y = 1; \quad (b - 1)x + (b - 1)y = -1;$$

il est impossible quand $b \neq 0$ et se réduit à l'équation $x + y = 1$ quand b est nul.

4° $(a - b)(x + y) = c;\quad (a^2 - b^2)(x + y) = d.$

Si $a \neq \pm b$, le système peut s'écrire

$$(a^2 - b^2)(x + y) = c(a + b); \quad (a^2 - b^2)(x + y) = d.$$

Il est impossible quand $d \neq c(a+b)$ et se réduit à la première équation quand $d = c(a+b)$.

Si $a = b$, le système devient

$$0.(x+y) = c; \quad 0.(x+y) = d.$$

Il est impossible quand c ou d est différent de zéro et complètement indéterminé quand $c = d = 0$.

Si $a = -b$, le système devient

$$(a-b)(x+y) = c; \quad 0.x + 0.y = d.$$

Le système est impossible quand $d \neq 0$ et se réduit à la première équation quand $d = 0$.

5° $m^2(x-y) + m(2x+3y) - 3 = 0;$

$$m^2(x-y) - m(3x+2y) + 2 = 0.$$

Par addition et soustraction, on obtient le système équivalent

$$m(2m-1)(x-y) = 1; \quad m(x+y) = 1.$$

Si m est différent de 0 et de 0,5, on peut calculer $x+y$ et $x-y$; puis x et y. On trouve

$$x = \frac{1}{2m-1}; \quad y = \frac{m-1}{m(2m-1)}.$$

Si $m = 0$, le système se réduit à $0.x + 0.y = 1$ et il est impossible. Il est également impossible quand $m = 0,5$.

6° $\dfrac{x}{a+b} + \dfrac{y}{a-b} = \dfrac{1}{a-b}; \quad \dfrac{x}{a+b} - \dfrac{y}{a-b} = \dfrac{1}{a+b}.$

On doit supposer $a \neq \pm b$ pour que le système ait un sens. Par addition et soustraction, on obtient le système équivalent

$$\frac{x}{a+b} = \frac{a}{a^2-b^2}; \quad \frac{y}{a-b} = \frac{b}{a^2-b^2}.$$

Il donne $$x = \frac{a}{a-b}; \quad y = \frac{b}{a+b}.$$

7° $\dfrac{x-a}{3y-2a} = \dfrac{1}{3a}; \quad \dfrac{x+a}{3y+4a} = \dfrac{1}{3}.$

On doit supposer $a \neq 0$, pour que le système ait un sens. Il peut s'écrire

$$3ax - 3y = 3a^2 - 2a; \quad 3x - 3y = a. \tag{1}$$

Par soustraction, il vient $3x(a-1) = 3a(a-1)$.

Si $a \neq 1$, on trouve $x = a$; $y = \dfrac{2a}{3}$. Mais cette solution n'est pas acceptable pour le système proposé, car le dénominateur de la première équation s'annule pour $y = \dfrac{2a}{3}$.

Si $a = 1$, le système (1) se réduit à l'équation $3x - 3y = 1$. Cette équation a une infinité de solutions, qui sont acceptables pour le système proposé, sauf les deux suivantes

$$x = 1;\quad y = \frac{2}{3};\quad x = -1;\quad y = -\frac{4}{3}.$$

8° $\dfrac{x}{x-a} + \dfrac{y}{y-b} = 2;\quad (a+b)(x-3y) = a^2 + 3b^2.$

Le système peut s'écrire

$$bx + ay = 2ab;\quad (a+b)x - 3(a+b)y = a^2 + 3b^2. \qquad (1)$$

Le déterminant du système (1) est $D = -(a+b)(a+3b)$.

Si $D \neq 0$, on trouve $x = \dfrac{a(a+3b)}{a+b};\quad y = \dfrac{b(a-b)}{a+b}.$

Cette solution ne convient au système proposé que si l'on a

$$\frac{a(a+3b)}{a+b} \neq a \quad \text{ou} \quad ab \neq 0;$$

et

$$\frac{b(a-b)}{a+b} \neq b \quad \text{ou} \quad b^2 \neq 0.$$

On doit donc avoir $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Si $a = -b$ le système (1) devient

$$bx - by = -2b^2;\quad 0.x + 0.y = 4b^2.$$

Il est impossible quand $b \neq 0$ et complètement indéterminé quand $b = 0$. Toutefois, dans ce dernier cas, il convient d'écarter la solution $x = y = 0$.

Si $a = -3b$, le système (1) devient

$$bx - 3by = -6b^2;\quad 2bx - 6by = -12b^2.$$

Ce système est complètement indéterminé quand $b = 0$, mais la solution $x = y = 0$ doit être écartée; il se réduit à l'équation $x - 3y = -6b$ quand $b \neq 0$, mais la solution $x = -3b$, $y = b$ doit être écartée.

908. *Résoudre le système*

$$\mathrm{ax} = \mathrm{by} = \mathrm{cz} = \mathrm{du};\quad \frac{1}{\mathrm{x}} + \frac{1}{\mathrm{y}} + \frac{1}{\mathrm{z}} + \frac{1}{\mathrm{u}} = \frac{1}{\mathrm{m}}.$$

On doit supposer $m \neq 0$ pour que le système ait un sens; on doit supposer a, b, c et d différents de zéro, si on veut qu'il y ait autant d'équations que d'inconnues.

On peut écrire

$$\frac{a}{\frac{1}{x}} = \frac{b}{\frac{1}{y}} = \frac{c}{\frac{1}{z}} = \frac{d}{\frac{1}{u}} = \frac{a+b+c+d}{\frac{1}{m}},$$

ou

$$ax = by = cz = du = m(a+b+c+d).$$

Ces équations donnent x, y, z et u. La solution n'est acceptable que si l'on a $a + b + c + d \neq 0$; sinon on aurait $x = y = z = u = 0$, ce qui est inadmissible.

909. *Résoudre le système*

$$\mathrm{xyz} = \frac{\mathrm{y + z}}{\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{z + x}}{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{x + y}}{\mathrm{c}},$$

sachant que a, b *et* c *sont les côtés d'un triangle.*

Le système a un sens puisqu'on suppose a, b et c différents de zéro. Il admet la solution $x = y = z = 0$; de plus, on voit aisément qu'il n'admet pas comme solution un autre groupe de nombres parmi lesquels il y aurait un zéro. Cherchons les autres solutions; on peut diviser par xyz et il vient

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} = a; \quad \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} = b; \quad \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} = c.$$

Ce système donne

$$\frac{1}{xy} = \frac{a + b - c}{2}; \quad \frac{1}{yz} = \frac{-a + b + c}{2}; \quad \frac{1}{xz} = \frac{a - b + c}{2}.$$

Comme les seconds membres sont positifs par hypothèse, on peut poser

$$\frac{a + b - c}{2} = \frac{1}{C^2}; \quad \frac{-a + b + c}{2} = \frac{1}{A^2}; \quad \frac{a - b + c}{2} = \frac{1}{B^2};$$

et il vient $\quad xy = C^2; \quad yz = A^2; \quad xz = B^3.$

Ce système donne d'abord $xyz = \pm ABC$; puis

$$x = \pm \frac{BC}{A}; \quad y = \pm \frac{AC}{B}; \quad z = \pm \frac{AB}{C}.$$

Il y a deux solutions, car les signes supérieurs se correspondent ainsi que les signes inférieurs.

910. *Résoudre les systèmes* :

1° $x + y + z = 1; \quad x - y + z + 1 = 0; \quad m^2x + my + z = m^3.$

Les deux premières équations donnent $x = -z$; $y = 1$. La troisième devient après substitution

$$z(m^2 - 1) = -m(m^2 - 1).$$

Si $m^2 - 1 \neq 0$, on a la solution $x = m$; $y = 1$; $z = -m$.

Si $m = 1$, le système se réduit aux deux premières équations, car la troisième équation devient identique à la première.

Si $m = -1$, le système se réduit également aux deux premières équations, car la troisième équation devient identique à la seconde.

Dans ces deux derniers cas, on a donc $x = -z$, $y = 1$ et l'une des inconnues x, z est arbitraire.

2° $x + y + az = 1$; $x + ay + z = 2$; $x - y + z = 3$.

La première et la troisième équation donnent

$$x = \frac{4 - (a + 1)z}{2}; \quad y = \frac{-2 - (a - 1)z}{2}.$$

La seconde devient après substitution

$$z(1 - a^2) = 2a.$$

Si $a \neq \pm 1$, on trouve

$$z = \frac{2a}{1 - a^2}; \quad x = \frac{3a - 2}{a - 1}; \quad y = \frac{-1}{a + 1}.$$

Si $a = 1$, les deux premières équations sont incompatibles.

Si $a = -1$, les deux dernières équations sont incompatibles.

3° $x + y + z = 0$; $(b + c)x + (c + a)y + (a + b)z = 0$;

$$bcx + cay + abz = d^3.$$

Tirer x de la première équation et substituer. Il vient

$$y(a - b) + z(a - c) = 0 \qquad (1)$$

$$cy(a - b) + bz(a - c) = d^3. \qquad (2)$$

Le déterminant du système (1), (2) est

$$D = (b - c)(a - b)(a - c).$$

a) Si $D \neq 0$, on trouve

$$y = \frac{d^3}{(b - a)(b - c)}; \quad z = \frac{d^3}{(c - a)(c - b)}; \quad x = \frac{d^3}{(a - b)(a - c)}.$$

b) Soit $a = b \neq c$. Le système (1), (2) devient

$$z = 0; \quad bz(b - c) = d^3. \qquad (3)$$

Si $b \neq 0 = d$, le système donné se réduit à $z = 0$; $x = -y$.

Si $b \neq 0$ et $d \neq 0$, le système (3) et le système proposé sont impossibles.

Si $b = d = 0$, le système proposé se réduit à $z = 0$; $x = -y$.

Si $b = 0 \neq d$, l'équation $bz(a - c) = d^3$ et le système proposé sont impossibles.

c) On examinerait d'une façon analogue les cas

$$a = c \neq b; \quad b = c \neq a; \quad a = b = c.$$

4° $2x + 3y - 4z = 5$; $2ax + 3by + (b - 5a)z = 2a + 3b$;

$$bx + 3ay + (a - b)z = a + 4b.$$

Tirer z, par exemple, de la première équation et substituer. On trouve

$$z = \frac{2x + 3y - 5}{4}; \quad (1) \quad (b - a)(2x + 15y) = 17(b - a); \quad (2)$$

$$2x(a + b) + 3y(5a - b) = 9a + 11b. \qquad (3)$$

a) Si $a \neq b$, l'équation (2) devient $2x + 15y = 17$. Les équations (1) et (2) donnent alors

$$x = \frac{17 - 15y}{2}; \quad z = 3 - 3y;$$

et l'équation (3) devient après substitution

$$9by = 4a + 3b. \qquad (4)$$

Si $b \neq 0$, on trouve

$$x = \frac{18b - 10a}{3b}; \quad y = \frac{4a + 3b}{9b}; \quad z = \frac{6b - 4a}{3b}.$$

Si $b = 0$, l'équation (4) et le système sont impossibles.

b) Si $a = b$, le système (1), (2), (3) se réduit à

$$2x + 3y - 4z = 5; \quad ax + 3ay = 5a.$$

Si $a \neq 0$, on a les deux équations $2x + 3y - 4z = 5$; $x + 3y = 5$; une inconnue peut être prise arbitrairement.

Si $a = 0$, il reste l'équation $2x + 3y - 4z = 5$; deux inconnues peuvent être prises arbitrairement.

5º $x + ay + az = b$; $ax + y + az = b$; $ax + ay + z = b$.

Additionnons membre à membre. Il vient

$$(2a + 1)(x + y + z) = 3b.$$

a) Si $2a + 1 \neq 0$, on a le système équivalent

$$x + y + z = \frac{3b}{2a + 1}; \quad ax + y + az = b; \quad ax + ay + z = b. \qquad (1)$$

Retranchons la première équation successivement de la deuxième et de la troisième. On trouve

$$(a - 1)(x + z) = \frac{2b(a - 1)}{2a + 1}; \quad (a - 1)(x + y) = \frac{2b(a - 1)}{2a + 1}.$$

Si $a \neq 1$, le système donne :

$$x + z = \frac{2b}{2a + 1}; \quad x + y = \frac{2b}{2a + 1};$$

puis

$$x = y = z = \frac{b}{2a + 1}.$$

Si $a = 1$, le système (1) se réduit à l'équation

$$x + y + z = b.$$

b) Si $2a + 1 = 0$ et $b \neq 0$ l'équation $(2a + 1)(x + y + z) = 3b$ et le système sont impossibles.

Si $2a + 1 = b = 0$, le système se réduit aux deux équations

$$2x - y - z = 0; \quad -x + 2y - z = 0.$$

Ces équations donnent $x = y = z$.

6º $ax + by - bz = c$; $bx + ay - bz = c$; $-bx + by + az = c$.

Remplaçons la 2e équation par celle que l'on obtient en retranchant la 2e de la 1re; et la 1re par celle que l'on obtient en retranchant la 3e de la 1re. On trouve ainsi le système équivalent

$$(a - b)x - (a - b)y = 0; \quad (1) \quad (a + b)x - (a + b)z = 0; \qquad (2)$$

$$-bx + by + az = c. \qquad (3)$$

a) Supposons $a \neq \pm b$; (1) et (2) donnent $x = y = z$; l'équation (3) devient $az = c$. (4)

Si $a \neq 0$, on trouve $x = y = z = \dfrac{c}{a}$.

Si $a = 0$, l'équation (4) et le système sont impossibles quand $c \neq 0$; le système se réduit à $x = y = z$ quand $c = 0$.

b) Supposons $a = b$. Le système (1), (2), (3) se réduit à

$$ax - az = 0; \quad -ax + ay + az = c;$$

ou à

$$ax - az = 0; \quad ay = c.$$

Si $a \neq 0$, on a $x = z$; $y = \dfrac{c}{a}$. Si $a = 0$, le système est impossible quand $c \neq 0$ et complètement indéterminé quand $c = 0$.

c) Supposons $a = -b$. Le système se réduit à

$$ax - ay = 0; \quad ax - ay + az = c;$$

ou à

$$ax - ay = 0; \quad az = c.$$

Si $a \neq 0$, on a $x = y$; $z = \dfrac{c}{a}$. Si $a = 0$, le système est impossible quand $c \neq 0$ et complètement indéterminé quand $c = 0$.

911. *Résoudre le système*

$$cx + by + az = d, \quad ax + cy + bz = d, \quad bx + ay + cz = d,$$

en commençant par montrer que l'on a $x = y = z$.

Retranchons successivement la seconde et la troisième équation de la première. On trouve

$$(c - a)x + (b - c)y + (a - b)z = 0; \qquad (1)$$
$$(c - b)x + (b - a)y + (a - c)z = 0. \qquad (2)$$

a) Supposons que a, b, c soient des nombres différents.

Multiplions la première équation par $a - c$ et la seconde par $a - b$, puis soustrayons membre à membre. On trouve

$$[-(c - a)^2 - (c - b)(a - b)]x + [(b - c)(a - c) + (a - b)^2]y = 0$$

ou

$$(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)(x - y) = 0.$$

Le premier facteur est différent de zéro, car a, b et c sont différents. On a donc $x = y$ et on montrerait d'une façon analogue que l'on a $x = z$.

Additionnons ensuite membre à membre les équations proposées. Il vient

$$(a + b + c)(x + y + z) = 3d.$$

Si $a + b + c \neq 0$, on a $x = y = z = \dfrac{d}{a + b + c}$.

Si $a + b + c = 0$, le système se réduit à $x = y = z$ quand $d = 0$, et il est impossible quand $d \neq 0$.

b) Supposons $a = b \neq c$. Le système (1), (2) devient

$$(c - a)x + (a - c)y = 0; \quad (c - a)x + (a - c)z = 0;$$

et on a encore $x = y = z$.

On continue comme dans le cas précédent et on traite d'une façon analogue les cas

$$a = c \neq b \quad \text{et} \quad b = c \neq a.$$

c) Si $a = b = c$, le système se réduit à l'équation

$$a(x + y + z) = d.$$

912. *Déterminer* a *pour que la solution du système*

$$(2a - 3)x + 9(a - 1)y + 4 = 0, \quad (a^2 + a + 1)x + (2a + 3)y - 7 = 0$$

vérifie la relation $x + 3y = 1$.

La question revient à déterminer a pour que les trois équations soient compatibles. Le système

$$(2a - 3)x + 9(a - 1)y = -4, \quad x + 3y = 1 \qquad (1)$$

a comme déterminant $-3a$.

a) Si $a \neq 0$, il donne

$$x = \frac{9a + 3}{3a}; \quad y = -\frac{2a + 1}{3a}.$$

Remplaçons dans l'équation restante. On trouve ainsi que la condition de compatibilité est

$$9a^3 + 8a^2 - 17a = a(9a^2 + 8a - 17) = 0.$$

Comme $a \neq 0$, les valeurs cherchées de a sont 1 et $-\frac{17}{9}$.

Pour $a = 1$, on trouve $x = 4$; $y = -1$.

Pour $a = -\frac{17}{9}$, on trouve $x = \frac{42}{17}$; $y = -\frac{25}{51}$.

b) Si $a = 0$, le système (1) devient

$$3x + 9y = 4; \quad x + 3y = 1.$$

Ces deux équations sont incompatibles et le système proposé est impossible.

913. *Dans quels cas, les équations*

$$ax + by = c, \quad a^2x + b^2y = c^2, \quad a^3x + b^3y = c^3$$

sont-elles compatibles?

Le déterminant du système formé par les deux premières équations est

$$D = ab(b - a).$$

a) Si $D \neq 0$, on trouve $x = \frac{c(b - c)}{a(b - a)}$; $y = \frac{c(c - a)}{b(b - a)}$.

En remplaçant dans la troisième équation, on trouve la condition générale

$$a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) = (b - c)(a - b)(a - c) = 0.$$

En somme, on doit avoir

$$a \neq 0; \quad b \neq 0; \quad a \neq b; \quad c = a \text{ ou } b.$$

b) Si $a = 0 \neq b$, le système se réduit à
$$by = c;\quad b^2y = c^2;\quad b^3y = c^3.$$
Ces équations sont compatibles dans deux cas :
Si $c = 0$; alors $y = 0$ et x est indéterminé;
Si $b = c \neq 0$; alors $y = 1$ et x est indéterminé.

c) Le cas $a \neq 0 = b$ se traite d'une façon analogue.

d) Si $a = b = 0$, le système est complètement indéterminé quand $c = 0$, et impossible quand $c \neq 0$.

e) Si $a = b \neq 0$, le système devient
$$ax + ay = c;\quad a^2x + a^2y = c^2;\quad a^3x + a^3y = c^3.$$
Ces équations sont compatibles quand $c = a$ ou $c = 0$. Le système se réduit à l'équation $x + y = 1$ dans le premier cas et à l'équation $x + y = 0$ dans le second.

914. *Chercher la condition de compatibilité des équations :*
$$\mathrm{a}\mathrm{x} + \mathrm{y} + \mathrm{z} = \mathrm{a};\quad \mathrm{a}\mathrm{x} + \mathrm{a}\mathrm{y} + \mathrm{z} = 1;$$
$$\mathrm{x} + \mathrm{a}\mathrm{y} + \mathrm{a}\mathrm{z} = 1;\quad \mathrm{x} + \mathrm{y} + \mathrm{a}\mathrm{z} = \mathrm{a}.$$
(Ec. M. Armes simples, 1902).

Par addition, la première et la troisième équation (ou la deuxième et la quatrième) donnent $(a + 1)(x + y + z) = a + 1$.

a) Si $a + 1 \neq 0$, le système se réduit à
$$x + y + z = 1;\quad ax + ay + z = 1;\quad x + ay + az = 1.$$
La première et la deuxième équation donnent
$$(a - 1)(x + y) = 0.$$
Si $a \neq 1$, on a $z = 1$; puis $x = 1$; $y = -1$.
Si $a = 1$, le système se réduit à l'équation $x + y + z = 1$.

b) Si $a = -1$, le système se réduit à
$$x - y - z = 1;\quad x + y - z = -1.$$
Ce système donne $y = -1$; $x = z$.

915. *Résoudre le système*
$$(\mathrm{m} + 2)\mathrm{x} - 6\mathrm{y} = 8,\quad (\mathrm{m} - 2)\mathrm{x} + 2\mathrm{y} = 0$$
et déterminer m *pour que* x *et* y *soient positifs et inférieurs à* 3.

Le déterminant du système est $8(m - 1)$.

a) Si $m \neq 1$, on trouve $x = \dfrac{2}{m-1}$; $y = \dfrac{-m+2}{m-1}$.

On doit supposer $m > 1$. On doit avoir en plus :
$$-m + 2 > 0 \quad \text{ou} \quad m < 2;$$
$$\frac{2}{m-1} < 3 \quad \text{ou} \quad m > \frac{5}{3};$$
$$\frac{-m+2}{m-1} < 3 \quad \text{ou} \quad m > \frac{5}{4}.$$

En résumé, on doit avoir $\frac{5}{3} < m < 2.$

b) Si $m = 1$, le système devient

$$3x - 6y = 8; \quad x - 2y = 0.$$

Il est impossible

916. *Résoudre le système*

$$x + y + z = 1; \quad x + 9y + 25z = 10a; \quad x + 81y + 625z = 100b;$$

et déterminer pour a *et* b *des valeurs entières telles que les valeurs des inconnues soient positives.* (*Éc. M. Armes simples*, 1921).

La solution du système est

$$x = \frac{100b - 340a + 225}{192}; \quad y = \frac{260a - 100b - 25}{128};$$

$$z = \frac{100b - 100a + 9}{384}.$$

On doit avoir :

$$100b - 340a + 225 > 0; \quad 260a - 100b - 25 > 0;$$
$$100b - 100a + 9 > 0;$$

ou encore,

$$b > \frac{340a}{100} - \frac{225}{100}; \quad b < \frac{260a}{100} - \frac{25}{100}; \quad b > a - \frac{9}{100}. \qquad (1)$$

Ces inégalités (1) exigent que l'on ait :

$$\frac{340a}{100} - \frac{225}{100} < \frac{260a}{100} - \frac{25}{100} \quad \text{ou} \quad a < \frac{5}{2};$$

$$a - \frac{9}{100} < \frac{260a}{100} - \frac{25}{100} \quad \text{ou} \quad a > \frac{1}{10}.$$

Les valeurs acceptables de a sont donc 1 et 2.

a) Si $a = 1$, les inégalités (1) donnent

$$b > \frac{115}{100}; \quad b < \frac{235}{100}; \quad b > \frac{91}{100}.$$

On doit prendre $b = 2$. On a alors

$$x = \frac{85}{192}; \quad y = \frac{35}{128}; \quad z = \frac{109}{384}.$$

Si $a = 2$, les inégalités (1) donnent

$$b > \frac{455}{100}; \quad b < \frac{495}{100}; \quad b > \frac{191}{100};$$

et aucune valeur entière de b n'est acceptable.

917. *Montrer que les solutions du système*

$$\frac{x + y + z}{abc} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}; \quad (b + c)x + (a + c)y + (a + b)z = 0,$$

vérifient la relation

$$\frac{x}{1 + a^2} + \frac{y}{1 + b^2} + \frac{z}{1 + c^2} = 0.$$

Le système proposé est homogène et du premier degré en x, y et z. Il peut s'écrire

$$(b + c)x + (a + c)y + (a + b)z = 0 \qquad (1)$$
$$(bc - 1)x + (ac - 1)y + (ab - 1)z = 0. \qquad (2)$$

En appliquant les formules générales établies dans le Traité d'Algèbre (**240**), on trouve

$x = (a^2 + 1)(b - c)k$; $y = (b^2 + 1)(c - a)k$; $z = (c^2 + 1)(a - b)k$;

k étant un nombre arbitraire. On voit aisément que ces valeurs de x, y et z vérifient la relation donnée.

REMARQUE. — Le système proposé n'a de sens que si a, b et c sont différents de zéro. De plus, il faut qu'au moins l'un des déterminants du second degré que l'on peut déduire du tableau des coefficients des équations (1) et (2), soit différent de zéro. En faisant les calculs, on voit que parmi les trois nombres a, b, c, au moins deux doivent être différents.

918. *Sans recourir aux propriétés du trinôme du second degré, montrer qu'on a, en général, les relations suivantes :*

1° $a^2 + ab + b^2 > 0$.

On a $$a^2 + 2ab + b^2 \geqslant 0$$
et, si a et b ne sont pas nuls, $a^2 + b^2 > 0$.

Ces deux inégalités donnent par addition

$$2a^2 + 2ab + 2b^2 > 0 \quad \text{ou} \quad a^2 + ab + b^2 > 0.$$

Ce n'est que dans le cas particulier où $a = b = 0$, qu'on a

$$a^2 + ab + b^2 = 0.$$

2° $a^2 - ab + b^2 > 0$.

On raisonne comme pour l'exercice précédent, en partant de $(a - b)^2 \geqslant 0$.

3° $3(1 + a^2 + a^4) - (1 + a + a^2)^2 > 0$.

Le premier membre est égal à

$$2a^4 - 2a^3 - 2a + 2 = 2(a - 1)^2 (a^2 + a + 1).$$

Le facteur $a^2 + a + 1$ est toujours positif (1°). Le premier membre est donc positif quand $a \neq 1$, et nul quand $a = 1$.

919. *Si* a, b, *et* c *sont positifs et différents, on a :*

1° $a^3 + b^3 > ab(a + b)$,

car la différence $a^3 + b^3 - (a^2b + ab^2)$ est égale au produit

$$(a - b)^2 (a + b).$$

2° $3(a^3 + b^3 + c^3) > (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)$.

En effectuant, on voit que l'inégalité à démontrer peut s'écrire

$$2(a^3 + b^3 + c^3) - (ab^2 + ac^2 + a^2b + bc^2 + a^2c + b^2c) > 0;$$

et il suffit d'ajouter membre à membre les trois inégalités (1°)

$$a^3 + b^3 - (a^2b + ab^2) > 0, \quad b^3 + c^3 - (b^2c + bc^2) > 0,$$
$$c^3 + a^3 - (ac^2 + a^2c) > 0,$$

pour démontrer l'inégalité proposée.

920. *Démontrer que si* a, b *et* c *sont positifs et différents, on a*

$$(a + b)(b + c)(c + a) > 8abc.$$

On sait que la moyenne arithmétique de deux nombres positifs différents est supérieure à leur moyenne géométrique. On a donc

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}; \quad \frac{b+c}{2} > \sqrt{bc}; \quad \frac{c+a}{2} > \sqrt{ca}.$$

Multiplier membre à membre, puis par 8.

921. *Si* x *et* h *sont positifs et* m *entier, montrer par la méthode de récurrence qu'on a*

$$(x + h)^m > x^m + mhx^{m-1}.$$

a) Pour $m = 2$, on a

$$(x + h)^2 = x^2 + 2hx + h^2 > x^2 + 2hx.$$

b) Supposons que la propriété soit vraie pour $n = p$. On aura

$$(x + h)^p > x^p + phx^{p-1},$$

et, en multipliant par $x + h$,

$$(x + h)^{p+1} > x^{p+1} + (p + 1)hx^p + ph^2x^{p-1}.$$

On peut donc écrire à fortiori

$$(x + h)^{p+1} > x^{p+1} + (p + 1)hx^p.$$

c) Le théorème est donc vrai pour $n = p + 1$, s'il est vrai pour $n = p$. Or il est vrai pour $n = 2$; il est donc général.

922. *Un négociant a deux sortes de vin. Il vend en tout* m *litres pour* p *fr. Un litre de la première sorte coûte* a *fr. et un litre de la deuxième sorte* b *fr. Combien de litres de chaque sorte a-t-il vendus?*

Supposons qu'il ait vendu x litres de la première sorte et y litres de la deuxième. On a le système

$$x + y = m; \quad ax + by = p.$$

Le déterminant de ce système est $b - a$.

1° Si $b - a \neq 0$, on trouve

$$x = \frac{bm - p}{b - a}; \quad y = \frac{p - am}{b - a}.$$

Ces réponses conviennent si elles sont positives ou nulles, ce qui a lieu dans quatre cas :

a) $b - a > 0$; $bm - p > 0$; $p - am > 0$. — Ces hypothèses peuvent s'écrire $a < b$; $a < \frac{p}{m} < b$. Le prix moyen d'un litre est supérieur au prix d'un litre de la sorte la moins chère et inférieur au prix d'un litre de la sorte la plus chère.

b) $b - a < 0$; $bm - p < 0$; $p - am < 0$. — L'interprétation est analogue à celle du cas précédent.

c) $bm - p = 0$ ou $p = bm$. — On a alors

$$x = 0; \quad y = \frac{m(b-a)}{b-a} = m.$$

d) $p - am = 0$ ou $p = am$. — On a alors

$$x = \frac{m(b-a)}{b-a} = m; \quad y = 0.$$

2° Si $a = b \neq 0$, le système devient

$$x + y = m; \quad x + y = \frac{p}{a}.$$

a) Si $m \neq \frac{p}{a}$ ou $p \neq am$, le système est impossible; le problème l'est également, car le prix total p doit égaler m fois le prix d'un litre de l'une ou l'autre espèce.

b) Si $p = am$, le système est simplement indéterminé et il se réduit à l'équation $x + y = m$. Pour qu'une solution de cette équation convienne au problème, il faut prendre x positif et inférieur à m.

923. *On donne les côtés* BC = a, CA = b *et* AB = c *d'un triangle. Mener une parallèle* B'C' *au côté* BC *de manière que le périmètre du trapèze* BB'C'C *mesure* 2p.

Prenons $B'C' = x$. On a

$$\frac{x}{a} = \frac{AB'}{c} = \frac{AC'}{b}.$$

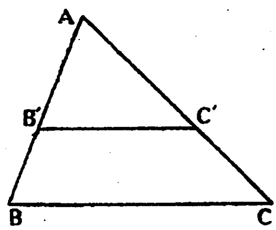


Fig. 60.

On a donc :

$$AB' = \frac{cx}{a}; \quad BB' = c - \frac{cx}{a};$$

$$AC' = \frac{bx}{a}; \quad CC' = b - \frac{bx}{a}.$$

Par suite, l'équation du problème est

$$\left(c - \frac{cx}{a}\right) + x + \left(b - \frac{bx}{a}\right) + a = 2p$$

ou

$$x(b + c - a) = a(a + b + c - 2p).$$

Comme $b + c > a$, on peut écrire

$$x = \frac{a(a + b + c - 2p)}{b + c - a}.$$

On doit avoir $0 \leqslant x \leqslant a$, ce qui exige :

a) $a + b + c - 2p \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad 2p \leqslant a + b + c;$

b) $\dfrac{a(a + b + c - 2p)}{b + c - a} \leqslant a \quad \text{ou} \quad 2p \geqslant 2a.$

Le périmètre donné $2p$ ne peut donc pas être inférieur au double de la base, ni supérieur au périmètre du triangle.

924. *D'un point* M *de l'hypoténuse d'un triangle rectangle on abaisse des perpendiculaires sur les côtés de l'angle droit. Déterminer* M *pour que le périmètre du rectangle obtenu soit* 2m. *Les côtés de l'angle droit mesurent* b *et* c.

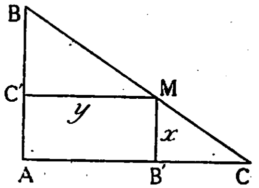


Fig. 61.

Posons $MB' = x$ et $MC' = y$.

Les équations du problème sont :

$$\frac{y}{b} = \frac{c - x}{c}; \quad 2x + 2y = 2m;$$

ou $$bx + cy = bc; \quad x + y = m.$$

1° Si $b - c$ est différent de zéro, on trouve :

$$x = \frac{c(b - m)}{b - c}; \quad y = \frac{b(m - c)}{b - c}.$$

Cette solution n'est acceptable que si x et y sont positifs ou nuls, ce qui a lieu dans quatre cas :

a) $b - c > 0;\ b - m > 0;\ m - c > 0.$ — Ces hypothèses peuvent s'écrire $c < m < b.$

b) $b - c < 0;\ b - m < 0;\ m - c < 0.$ — Ces hypothèses peuvent s'écrire $b < m < c.$

c) $b - m = 0.$ — On a alors $x = 0$ et $y = \dfrac{b(m - c)}{m - c} = b.$

d) $c - m = 0.$ — On a alors $y = 0$ et $x = c.$

2° Si $b = c$, le système devient

$$x + y = b = c; \quad x + y = m.$$

Il n'est possible que si l'on a $m = b$ ou $2m = b + c.$

Dans ce cas, il est indéterminé et se réduit à l'équation

$$x + y = b = c = m.$$

Pour qu'une solution de cette équation convienne au problème, il faut prendre x positif et inférieur à c.

925. *La somme des trois chiffres d'un nombre est* 17. *La différence entre le nombre et le nombre renversé est* 495. *En ajoutant le chiffre des dizaines au double du chiffre des centaines, on trouve* 22. *Quel est ce nombre?*

Désignons les trois chiffres par c, d et u. On a le système

$$c + d + u = 17 \tag{1}$$
$$c - u = 5 \tag{2}$$
$$2c + d = 22, \tag{3}$$

en remarquant que l'équation

$$(100c + 10d + u) - (100u + 10d + c) = 495$$

peut s'écrire $c - u = 5$. En additionnant membre à membre les équations (1) et (2) on obtient l'équation (3). Le système se réduit donc aux équations (1) et (2) qui donnent

$$c = 5 + u; \quad d = 12 - 2u.$$

Le nombre u doit être entier et satisfaire aux inéquations :

$$0 \leqslant u < 10;$$
$$0 < 5 + u < 10 \quad \text{ou} \quad -5 < u < 5;$$
$$0 \leqslant 12 - 2u < 10 \quad \text{ou} \quad 1 < u \leqslant 6.$$

Ces inéquations se résument en $1 < u < 5$. Les valeurs acceptables de u sont donc 2, 3 et 4.

Les nombres qui répondent à la question sont 782, 863 et 944.

926. *Déterminer* m *pour que les équations*

$$mx - 6y = 5m - 3, \quad 2x + (m - 7)y = 29 - 7m$$

soient : 1° *compatibles et distinctes;* 2° *incompatibles;* 3° *équivalentes.* — *Vérification graphique.*

1° Le déterminant du système est

$$D = m(m - 7) + 12 = (m - 3)(m - 4).$$

Les équations sont donc compatibles et distinctes si m est différent de 3 et de 4. Dans les mêmes conditions, les droites qui représentent les deux équations, sont concourantes.

En effet, si $m \neq 7$, la relation $D \neq 0$ donne

$$\frac{m}{6} \neq -\frac{2}{m-7},$$

et les deux droites ont des coefficients angulaires différents. Elles sont donc sécantes. Il en est de même quand $m = 7$, car le système devient pour cette valeur de m

$$6y = 7x - 32; \quad x + 10 = 0.$$

2° Si $m = 3$, le système devient

$$3x - 6y = 12; \quad 2x - 4y = 8.$$

Il est simplement indéterminé. Les deux droites $3x - 6y = 12$ et $2x - 4y = 8$ sont confondues, car leur coefficient angulaire est 0,5 et leur ordonnée à l'origine, -2.

3° Si $m = 4$, le système devient

$$4x - 6y = 17; \quad 2x - 3y = 1.$$

Il est impossible. Les droites $4x - 6y = 17$ et $2x - 3y = 1$ sont parallèles; elles ont le même coefficient angulaire $\frac{2}{3}$, mais des ordonnées à l'origine $-\frac{17}{6}$ et $-\frac{1}{3}$ différentes.

927. *Sur un axe, on prend quatre points quelconques* O, A, B, C. *Montrer que l'on a*

$$\overline{OA}^2.\overline{BC} + \overline{OB}^2.\overline{CA} + \overline{OC}^2.\overline{AB} + \overline{AB}.\overline{BC}.\overline{CA} = 0.$$

Prendre O comme origine et désigner les abscisses de A, B, C par a, b, c. La relation proposée devient

$$a^2(c - b) + b^2(a - c) + c^2(b - a) + (b - a)(c - b)(a - c) = 0.$$

Pour la démontrer, il suffit de décomposer en facteurs l'expression

$$a^2(c - b) + b^2(a - c) + c^2(b - a).$$

928. *Par l'origine, on mène deux droites rectangulaires dont aucune ne coïncide avec* Ox. *Chercher la relation qui existe entre leurs coefficients angulaires, après avoir mené par le point* A(1, 0) *une parallèle à l'axe des* y.

L'une des droites passe dans le premier angle; soit M(1, m) son intersection avec la parallèle à Oy. L'autre passe dans le quatrième angle; soit M'(1, m') son intersection avec la parallèle à Oy.

Le triangle rectangle MOM' donne en valeur absolue

$$\overline{OA}^2 = AM \times AM'.$$

Or on a $\overline{OA} = 1$; $\overline{AM} = m$; $\overline{AM'} = m'$. Comme m' est négatif, on aura, en remplaçant,

$$1^2 = m \times (-m') \quad \text{ou} \quad mm' + 1 = 0.$$

C'est la relation cherchée.

929. *Sur un axe on donne deux points fixes* A *et* B *tels que* $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, *et un point variable* M *dont l'abscisse est* x. *Étudier les variations de la fonction* $\overline{MA} + 3\overline{MB}$.

On a $\overline{MA} = a - x$ et $\overline{MB} = b - x$.

En désignant la fonction proposée par y, on a donc

$$y = a - x + 3(b - x) = -4x + (a + 3b).$$

Le coefficient de x est négatif. Donc, quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$, la fonction décroît de $+\infty$ à $-\infty$. Elle s'annule pour $x = \frac{a + 3b}{4}$.

930. *Dans un triangle* ABC *de base* BC = a *et de hauteur* AH = h, *on inscrit un rectangle* B'C'ED *dont le côté* DE *se trouve sur la base* BC. *Après avoir posé* B'C' = x, *on demande d'étudier les variations du périmètre du rectangle quand* x *croît de* 0 *à* a.

Les triangles semblables ABC et AB'C' donnent

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{AH'}{AH} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{a} = \frac{AH'}{h}.$$

On a donc

$$AH' = \frac{hx}{a} \quad \text{et} \quad HH' = \frac{ah - hx}{a}.$$

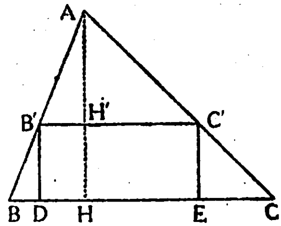


Fig. 62.

Le périmètre y du rectangle est

$$y = 2x + \frac{2(ah - hx)}{a} = \frac{2}{a}[(a - h)x + ah].$$

1° Si $a > h$, y croît de $2h$ à $2a$ quand x croît de 0 à a.
2° Si $a < h$, y décroît de $2h$ à $2a$ quand x croît de 0 à a.
3° Si $a = h$, y se réduit à la constante $2h$.

931. *Trouver les conditions pour que les droites*

$$(2a + b + 1)y + (a - b)x + 2 = 0$$
$$(a + 2b - 1)y + (a - b)x + 4 = 0$$

soient parallèles ou confondues; a *et* b *sont les coordonnées d'un point du plan.*

Pour que les deux droites soient parallèles, il faut et il suffit que le système soit impossible; pour que les droites soient confondues, il faut et il suffit que le système soit partiellement indéterminé.

Le déterminant du système est $D = -(a - b)(a - b + 2)$; le numérateur de y est $-2(a - b)$. Les deux expressions $a - b$ et $a - b + 2$ ne sont jamais nulles en même temps. Il y a donc deux cas à distinguer.

I. Si $a - b + 2 = 0$, on a $a - b \neq 0$ et le système est impossible.

II. Si $a - b = 0$, le système devient

$$(3b + 1)y + 2 = 0; \quad (3b - 1)y + 4 = 0. \qquad (1)$$

Ce système est partiellement indéterminé quand on a

$$\frac{3b + 1}{3b - 1} = \frac{2}{4} \quad \text{ou} \quad b = -1.$$

Il est impossible pour les autres valeurs de b.

III. En résumé, les droites sont confondues quand (a, b) est en $(-1, -1)$; elles sont parallèles quand (a, b) est un autre point de la droite $x - y = 0$, ou quand (a, b) est un point de la droite $x - y + 2 = 0$.

REMARQUE. — En examinant les équations (1), on voit que les points $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ et $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ de la droite $x - y = 0$ sont des points singuliers. Quand (a, b) est un de ces points, l'une des équations proposées ne représente plus une droite.

932. *Même problème pour les droites :*
$(a-1)x + (a+2b+2)y - 2 = 0;\ (a-1)x + (3a-b-1)y - 5 = 0.$
On a $D = (a-1)(2a-3b-3)$; $N_y = 3(a-1)$.

I. Si $a - 1 \neq 0$, le système n'est jamais indéterminé; il est impossible quand $2a - 3b - 3 = 0$.

II. Si $a - 1 = 0$, le système devient

$$(2b+3)y = 2; \quad (-b+2)y = 5.$$

Ce système est indéterminé quand on a

$$\frac{2b+3}{-b+2} = \frac{2}{5} \quad \text{ou} \quad b = -\frac{11}{12}.$$

Il est impossible pour les autres valeurs de b.

III. En résumé, les droites sont confondues quand (a, b) est en $\left(1, -\frac{11}{12}\right)$; elles sont parallèles quand (a, b) est un autre point de la droite $x = 1$, ou quand (a, b) est un point de la droite

$$2x - 3y - 3 = 0.$$

REMARQUE. — Les points $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$ et $(1, 2)$ de la droite $x = 1$ sont des points singuliers, analogues à ceux que nous avons considérés dans l'exercice précédent.

933. *Déterminer* a *pour que le système*

$$x + y - 1 > 0, \quad x - y - 1 > 0, \quad x - a < 0$$

soit impossible. — Vérification graphique.

Le système donne

$$x > 1 - y; \quad x > 1 + y; \quad x < a.$$

On voit qu'on doit avoir :

$$1 - y < a \quad \text{ou} \quad y > 1 - a; \quad 1 + y < a \quad \text{ou} \quad y < a - 1;$$

ou, en résumé, $\quad 1 - a < y < a - 1.$

Le système proposé est donc impossible si on a

$$1 - a \geqslant a - 1 \quad \text{ou} \quad a \leqslant 1.$$

Pour effectuer la vérification, construire les droites $x + y - 1 = 0$ et $x - y - 1 = 0$; elles se coupent au point $(1, 0)$. Déterminer ensuite les régions positive et négative pour chacune de ces droites, puis les points dont les coordonnées vérifient les deux premières inéquations. Ces points se trouvent dans l'angle des deux droites, qui est traversé par la partie positive de l'axe $x'x$.

La droite $x - a = 0$ est une parallèle à $y'y$; elle coupe $x'x$ au point $(a, 0)$. On voit aisément alors que le système est impossible, quand $(a, 0)$ est en $(1, 0)$ ou à gauche de ce point.

934. *Même question pour le système*

$$x - 4y + 2 > 0; \quad 2x + 2y - 1 < 0; \quad x + 2y - a > 0.$$

Le système donne

$$x > 4y - 2; \quad x < \frac{1 - 2y}{2}; \quad x > a - 2y.$$

On voit qu'on doit avoir :

$$4y - 2 < \frac{1 - 2y}{2} \quad \text{ou} \quad 10y < 5;$$

$$a - 2y < \frac{1 - 2y}{2} \quad \text{ou} \quad 2y > 2a - 1;$$

ou, en résumé,
$$\frac{2a - 1}{2} < y < \frac{1}{2}.$$

Le système proposé est donc impossible si on a

$$\frac{2a - 1}{2} \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad a \geqslant 1.$$

Pour effectuer la vérification, construire les droites $x - 4y + 2 = 0$ et $2x + 2y - 1 = 0$, qui se coupent au point (0, 0,5); puis chercher les points dont les coordonnées vérifient les deux premières inéquations.

La droite $x + 2y - a = 0$ a pour pente $-0{,}5$; $\frac{a}{2}$ est son ordonnée à l'origine. On voit aisément que le système est impossible quand cette ordonnée à l'origine est supérieure ou égale à 0,5, ou, ce qui revient au même, quand $a \geqslant 1$.

935. *Résoudre le système*

$$x + 3y = a, \quad 2x - 3y = b,$$

et déterminer a *et* b *pour que les valeurs de* x *et de* y *soient inférieures à* 1 *en valeur absolue. — Vérification graphique.*

La solution du système est

$$x = \frac{a + b}{3}; \quad y = \frac{2a - b}{9}.$$

On doit avoir

$$-1 < \frac{a+b}{3} < 1 \quad \text{et} \quad -1 < \frac{2a-b}{9} < 1.$$

On est ainsi conduit au système

$$a+b > -3; \; a+b < 3; \quad 2a-b > -9; \quad 2a-b < 9.$$

En résolvant ces inéquations par rapport à b et en comparant ensuite les limites supérieures et inférieures de b, on voit que l'on doit avoir

$$-4 < a < 4.$$

En résolvant par rapport à a, et en comparant les limites de a, on trouve

$$-5 < b < 5.$$

Pour effectuer la vérification graphique, construire le carré dont les sommets sont

$$A(1, 1); \quad B(-1, 1); \quad C(-1, -1); \quad D(1, -1).$$

Une solution du système proposé n'est acceptable que si les droites $x + 3y - a = 0$ et $2x - 3y - b = 0$ se rencontrent à l'intérieur de ce carré. Or :

a) Les parallèles à la droite $x + 3y = 0$ menées par les points C et A ont respectivement pour équation

$$y + 1 = -\frac{1}{3}(x+1) \quad \text{ou} \quad y = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3};$$

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x-1) \quad \text{ou} \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}.$$

L'ordonnée à l'origine de la droite $x + 3y = a$ est $\frac{a}{3}$.

On doit donc avoir

$$-\frac{4}{3} < \frac{a}{3} < \frac{4}{3} \quad \text{ou} \quad -4 < a < 4.$$

b) Les parallèles à la droite $2x - 3y = 0$ menées par les points B et D ont respectivement pour équation

$$y - 1 = \frac{2}{3}(x+1) \quad \text{ou} \quad y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3};$$

$$y + 1 = \frac{2}{3}(x-1) \quad \text{ou} \quad y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}.$$

L'ordonnée à l'origine de la droite $2x - 3y = b$ est $-\frac{b}{3}$.

On doit donc avoir

$$-\frac{5}{3} < -\frac{b}{3} < \frac{5}{3} \quad \text{ou} \quad -5 < b < 5.$$

TROISIÈME SÉRIE

Second degré.

936. *Pour quelles valeurs de* a *a-t-on* $\sqrt{a^2(a+1)} = a\sqrt{a+1}$?

Ces deux expressions ne sont définies que pour $a \geqslant -1$; elles ne sont égales que pour

$$a = -1; \quad a \geqslant 0.$$

937. *Comparer les expressions*

$$\sqrt{37 - 12\sqrt{7}} \quad et \quad 2\sqrt{7} - 3; \qquad \sqrt{69 - 28\sqrt{5}} \quad et \quad 2\sqrt{5} - 7.$$

Les deux premières expressions sont positives et leurs carrés sont égaux; donc elles sont égales.

Les deux autres expressions ont des signes contraires et leurs carrés sont égaux; donc elles sont opposées.

938. *Simplifier les expressions :*

1° $$\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a-b} + \sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{a-b} - \sqrt{a} - \sqrt{b}}.$$

Rép. $\dfrac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{b(a-b)}$.

2° $$\frac{1}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{4} + 4\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}.$$

En rendant les dénominateurs rationnels, on trouve

$$\frac{1}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \frac{1}{3\sqrt{4} + 4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{4}}{4}; \quad \text{etc.}$$

Rép. $\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{n+1}}{n+1}$.

939. *Simplifier les expressions :*

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} : \sqrt[4]{\frac{17}{4} + 3\sqrt{2}}; \sqrt{9 - 2\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}} - \sqrt{6 + \sqrt{13 + 4\sqrt{3}}}$$

1° On a :

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})^2}{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2};$$

$$\sqrt{4{,}25 + 3\sqrt{2}} = 1{,}5 + \sqrt{2}; \quad \sqrt{1{,}5 + \sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

La première expression est donc égale à

$$(1+\sqrt{2}) : (1+\frac{1}{2}\sqrt{2}) = (2+2\sqrt{2}) : (2+\sqrt{2}) = \sqrt{2}.$$

2° On trouve, en appliquant la théorie des radicaux doubles :

$$\sqrt{9-2\sqrt{4+2\sqrt{3}}} = \sqrt{9-2(1+\sqrt{3})} = \sqrt{7-2\sqrt{3}};$$

$$\sqrt{6+\sqrt{13+4\sqrt{3}}} = \sqrt{6+(1+2\sqrt{3})} = \sqrt{7+2\sqrt{3}}.$$

La seconde expression pourra s'écrire

$$\sqrt{7-2\sqrt{3}} - \sqrt{7+2\sqrt{3}}.$$

Elle est négative et son carré est $14-2\sqrt{37}$. Elle est donc égale à

$$-\sqrt{14-2\sqrt{37}}.$$

940. *Vérifier les égalités suivantes :*

1° $$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{2}.$$

On a $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ et $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

En remplaçant dans le premier membre, celui-ci devient

$$\frac{(2+\sqrt{3})\sqrt{2}}{3+\sqrt{3}} + \frac{(2-\sqrt{3})\sqrt{2}}{3-\sqrt{3}}.$$

Il reste à rendre les dénominateurs rationnels et à faire les réductions.

2° $$\sqrt{4+\sqrt{11+6\sqrt{2}}} - \sqrt{10-\sqrt{11+6\sqrt{2}}} - \sqrt{14-2\sqrt{47}} = 0.$$

On a :

$$\sqrt{4+\sqrt{11+6\sqrt{2}}} = \sqrt{7+\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{7+\sqrt{47}}{2}} + \sqrt{\frac{7-\sqrt{47}}{2}};$$

$$\sqrt{10-\sqrt{11+6\sqrt{2}}} = \sqrt{7-\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{7+\sqrt{47}}{2}} - \sqrt{\frac{7-\sqrt{47}}{2}}.$$

Il reste à remplacer ces deux expressions par leur valeur dans l'égalité à démontrer.

941. *Transformer* $X = \sqrt{x^2+x+1-\sqrt{2x^3+5x^2+2x}}.$

On a :

$A = x^2+x+1 > 0;$

$B = x(2x^2+5x+2) > 0$, si $-2 < x < -\frac{1}{2}$ ou $x > 0$;

$C^2 = A^2 - B = (x^2 - 1)^2;$
$C = x^2 - 1$ pour $x < -1$ ou $x > 1;$
$C = 1 - x^2$ pour $-1 < x < 1.$

1er cas : $-2 < x < -1$. — On a

$$\frac{A + C}{2} = \frac{2x^2 + x}{2}; \quad \frac{A - C}{2} = \frac{x + 2}{2};$$

et par suite,
$$X = \sqrt{\frac{2x^2 + x}{2}} - \sqrt{\frac{x + 2}{2}}. \qquad (1)$$

2^e cas : $-1 < x < -\frac{1}{2}$. — On trouve

$$\frac{A + C}{2} = \frac{x + 2}{2}; \quad \frac{A - C}{2} = \frac{2x^2 + x}{2};$$

et par suite,
$$X = \sqrt{\frac{x + 2}{2}} - \sqrt{\frac{2x^2 + x}{2}}. \qquad (2)$$

3^e cas : $0 < x < 1$. — On retrouve l'expression (2).

4^e cas : $1 < x$. — On retrouve l'expression (1).

CAS PARTICULIERS. — Pour $x = \pm 1$, on a $X = 0;$
Pour $x = 0$, on a $X = 1;$
Pour $x = -2$, on a $X = \sqrt{3};$
Pour $x = -\frac{1}{2}$, on a $X = \frac{1}{2}\sqrt{3};$

942. *Calculer la valeur de :*

1° $y = \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}$, sachant que l'on a

$$a = 1 - x - \sqrt{2x + x^2} \quad \text{et} \quad b = 1 - x + \sqrt{2x + x^2}.$$

Les expressions a et b sont définies quand on a $2x + x^2 \geqslant 0$, ce qui exige

$$x \leqslant -2 \quad \text{ou} \quad x \geqslant 0.$$

y est défini quand a et b ont le même signe, ce qui exige

$$ab = 1 - 4x > 0 \quad \text{ou} \quad x < \frac{1}{4}.$$

En résumé, on doit avoir

$$x \leqslant -2 \quad \text{ou} \quad 0 \leqslant x < \frac{1}{4}.$$

En remplaçant et en effectuant, on trouve

$$y^2 = \frac{(a + b)^2}{ab} = \frac{4(1 - x)^2}{1 - 4x}.$$

y est essentiellement positif; $1 - x$ et $1 - 4x$ le sont aussi pour les valeurs considérées de x. On a donc

$$y = \frac{2(1-x)}{1-4x}\sqrt{1-4x}.$$

2° $y = \dfrac{a-x}{a+x}\sqrt{\dfrac{3+x}{3-x}}$ pour $x = \sqrt{6a-a^2}$.

x est défini et positif pour $6a - a^2 > 0$ ou $0 < a < 6$. Pour ces valeurs de a, on a aussi

$$a + x > 0; \quad 3 + x > 0.$$

y sera défini si on a

$$3 - x > 0 \quad \text{ou} \quad 3 > \sqrt{6a-a^2} \quad \text{ou} \quad (a-3)^2 > 0 \quad \text{ou} \quad a \neq 3.$$

En résumé, on doit avoir

$$0 < a < 3 \quad \text{ou} \quad 3 < a < 6.$$

On trouve

$$\frac{a-x}{a+x} = \frac{a-\sqrt{6a-a^2}}{a+\sqrt{6a-a^2}} = \frac{3a-a\sqrt{6a-a^2}}{a^2-3a} = \frac{3-\sqrt{6a-a^2}}{a-3};$$

$$\frac{3+x}{3-x} = \frac{3+\sqrt{6a-a^2}}{3-\sqrt{6a-a^2}} = \frac{9+6a-a^2+6\sqrt{6a-a^2}}{(a-3)^2}.$$

La racine carrée arithmétique du numérateur de cette dernière expression est visiblement $3 + \sqrt{6a-a^2}$; celle du dénominateur est $3 - a$ si $a < 3$, et $a - 3$ si $a > 3$. Par suite :

Si $0 < a < 3$, on a

$$y = \frac{3-\sqrt{6a-a^2}}{a-3} \times \frac{3+\sqrt{6a-a^2}}{3-a} = -1.$$

Si $3 < a < 6$, on a

$$y = \frac{3-\sqrt{6a-a^2}}{a-3} \times \frac{3+\sqrt{6a-a^2}}{a-3} = 1.$$

Si $a = 0$ ou 3, y n'est pas défini; si $a = 6$, on a $y = 1$.

3° $y = \dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}$ pour $x = \dfrac{2ac}{c^2+1}$.

y n'est défini que si l'on a

$$a + x \geqslant 0 \quad \text{et} \quad a - x \geqslant 0;$$

ou bien $-a \leqslant x \leqslant a$, ce qui exige $a > 0$; $a = 0$ entraînerait $x = 0$ et y serait indéterminé.

On a ensuite, en rendant le dénominateur rationnel,

$$y = \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}$$

et, en remplacant x par sa valeur dans $a^2 - x^2$,

$$a^2 - x^2 = \frac{a^2(c^2-1)^2}{(c^2+1)^2}.$$

Il vient ainsi, a étant positif,

$$y = \frac{a(c^2+1) - a\sqrt{(c^2-1)^2}}{2ac} = \frac{c^2+1-\sqrt{(c^2-1)^2}}{2c}.$$

Par suite : si $c^2 - 1 \geqslant 0$, on a $y = \frac{1}{c}$; si $c^2 - 1 < 0$, on a $y = c$.

Il semble que pour $c = 0$, y soit indéterminé. Mais cette indétermination n'est qu'apparente; elle provient de ce qu'on a multiplié les deux termes de y par son numérateur. En faisant $c = 0$ dans les expressions données, on trouve, en effet, d'abord $x = 0$, puis $y = \frac{0}{2\sqrt{a}} = 0$.

943. *Trouver la racine carrée arithmétique de*

$$2(a + \sqrt{a^2+b^2})(b + \sqrt{a^2+b^2}).$$

L'expression à calculer est

$$x = \sqrt{2(a^2+ab+b^2) + 2(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Nous supposerons a et b différents de zéro.

1er cas : $a + b > 0$. — On a

$$x = \sqrt{2(a^2+b^2+ab) + \sqrt{4(a+b)^2(a^2+b^2)}};$$

$$A = 2(a^2+b^2+ab) > 0; \quad B = 4(a+b)^2(a^2+b^2) > 0;$$

$$A^2 - B = 4a^2b^2; \quad C = 2ab \text{ ou } -2ab,$$

suivant que ab est positif ou négatif. On trouve dans les deux cas

$$x = a + b + \sqrt{a^2+b^2}.$$

2e cas : $a + b < 0$. — On a

$$x = \sqrt{2(a^2+b^2+ab) - \sqrt{4(a+b)^2(a^2+b^2)}}.$$

A, B, $A^2 - B$ et C ont la même valeur que dans le premier cas.

Si $ab > 0$, on trouve $x = -(a+b) - \sqrt{a^2+b^2}$;

Si $ab < 0$, on trouve $x = a + b + \sqrt{a^2+b^2}$.

944. *Résoudre les équations :*

1° $x^2 = (x^2+1)(x-1)^2$.

En effectuant, on obtient l'équation réciproque

$$x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0,$$

dont la résolvante est $y^2 - 2y - 1 = 0$.

On trouve $\quad y = x + \frac{1}{x} = 1 \pm \sqrt{2}$.

La racine $y' = 1 + \sqrt{2}$ donne $x = \frac{1+\sqrt{2} \pm \sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$.

A la racine $y'' = 1 - \sqrt{2}$ ne correspond aucune valeur de x.

2° $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2} = \dfrac{x-2}{x-1} + \dfrac{x-1}{x}$.

On a $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{x-2}{x-1} = \dfrac{2}{x^2-1}$; $\dfrac{x+1}{x+2} - \dfrac{x-1}{x} = \dfrac{2}{x(x+2)}$.

En remplaçant, on obtient l'équation

$$\frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x(x+2)} = 0 \quad \text{ou} \quad 2x^2 + 2x - 1 = 0,$$

dont les racines sont $\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$. Ces racines conviennent, car elles n'annulent aucun dénominateur de l'équation proposée.

3° $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 24$.

On a

$(x+1)(x+4) = x^2 + 5x + 4$; $(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6$.

En posant $x^2 + 5x + 4 = y$, l'équation devient

$$y(y+2) = 24 \quad \text{ou} \quad y^2 + 2y - 24 = 0.$$

Cette équation donne $y'' = -6$; $y' = 4$.

L'équation $x^2 + 5x + 4 = -6$ n'a pas de racine.

L'équation $x^2 + 5x + 4 = 4$ donne $x'' = -5$; $x' = 0$.

4° $\dfrac{x+a}{x-a} + \dfrac{x+b}{x-b} + \dfrac{x+c}{x-c} + 3 = 0$.

On a

$\dfrac{x+a}{x-a} + 1 = \dfrac{2x}{x-a}$; $\dfrac{x+b}{x-b} + 1 = \dfrac{2x}{x-b}$; $\dfrac{x+c}{x-c} + 1 = \dfrac{2x}{x-c}$.

En remplaçant, l'équation devient

$$x\left(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c}\right) = 0.$$

Une première racine est $x = 0$. Elle ne convient que si a, b et c sont différents de zéro.

L'équation $\dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-b} + \dfrac{1}{x-c} = 0$ peut s'écrire

$$f(x) = 3x^2 - 2x(a+b+c) + ab + bc + ca = 0. \qquad (1)$$

Son réalisant

$(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

est positif ou nul. Elle admet donc deux racines; mais ces racines ne sont acceptables que si elles diffèrent de a, b et c. On doit donc avoir :

$$f(a) = (a-b)(a-c) \neq 0; \quad f(b) = (b-a)(b-c) \neq 0;$$
$$f(c) = (c-a)(c-b) \neq 0.$$

Cela exige que a, b, c soient différents, et alors, le réalisant ne peut pas être nul.

En résumé l'équation proposée n'a de racine que dans les trois cas suivants :

a) a, b et c sont différents et différents de zéro : trois racines.

b) a, b et c sont différents, mais l'un d'eux est nul : deux racines.

c) a, b et c ne sont pas différents, mais ils sont différents de zéro : une racine nulle.

945. *Résoudre les équations :*

1° $\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 = n(n-1).$

En simplifiant, on obtient l'équation bicarrée

$$x^4[n(n-1)-2] - 2x^2[n(n-1)+1] + n(n-1) = 0.$$

Le réalisant de la résolvante est $(2n-1)^2$. Les racines de la résolvante sont, en supposant n différent de -1 et de 2,

$$y' = \frac{n}{n-2}; \quad y'' = \frac{n-1}{n+1}.$$

Ces racines y' et y'' doivent être positives ou nulles; de plus, elles doivent être différentes de 1, car l'équation donnée n'est pas vérifiée par $x = \pm 1$. Cette dernière condition est remplie par y' et y''; en effet, les relations

$$\frac{n}{n-2} \neq 1 \quad \text{et} \quad \frac{n-1}{n+1} \neq 1$$

peuvent s'écrire

$$\frac{2}{n-2} \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{-2}{n+1} \neq 0.$$

Les valeurs remarquables de n sont -1, 0, 1, 2.

a) Si $n < -1$, on a $y' > 0$, $y'' > 0$; $x = \pm\sqrt{y'}$ ou $\pm\sqrt{y''}$.

b) Si $-1 < n < 0$, on a $y' > 0$, $y'' < 0$; $x = \pm\sqrt{y'}$.

c) Si $0 < n < 1$, on a $y' < 0$, $y'' < 0$; pas de racine.

d) Si $1 < n < 2$, on a $y' < 0$, $y'' > 0$; $x = \pm\sqrt{y''}$.

e) Si $n > 2$, on a $y' > 0$, $y'' > 0$; $x = \pm\sqrt{y'}$ ou $\pm\sqrt{y''}$.

f) Si $n = -1$ ou 2, on a $x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

g) Si $n = 0$ ou 1, on a $x = 0$.

2° $$\frac{a}{x-a} + \frac{b}{x-b} = \frac{c}{x-c} + \frac{d}{x-d}. \qquad (1)$$

Si l'un des nombres a, b, c, d est nul, ou si deux de ces nombres sont égaux, l'équation se ramène à une forme plus simple. Nous supposerons donc que ces nombres sont différents et différents de zéro.

On a

$$\frac{a}{x-a}-\frac{c}{x-c}=\frac{(a-c)x}{(x-a)(x-c)};$$
$$\frac{b}{x-b}-\frac{d}{x-d}=\frac{(b-d)x}{(x-b)(x-d)}.$$

En remplaçant, (1) devient

$$\frac{(a-c)x}{(x-a)(x-c)}=\frac{(d-b)x}{(x-b)(x-d)}.$$

Une première racine est $x=0$, qui vérifie l'équation (1).

Après division par x, on arrive à l'équation

$$(a-c)(x-b)(x-d)=(d-b)(x-a)(x-c) \qquad (2)$$

ou $x^2(a+b-c-d)-2x(ab-cd)+ab(c+d)-cd(a+b)=0.$

Supposons $a+b-c-d\neq 0$. On a alors une équation du second degré dont le réalisant est

$$\rho=(a-c)(a-d)(b-c)(b-d).$$

Ce réalisant est différent de zéro, en vertu des hypothèses; s'il est positif, l'équation (2) admet deux racines. Mais ces racines ne sont acceptables pour l'équation (1) que si elles diffèrent de a, b, c, d; ce qui a lieu, car en faisant $x=a$, par exemple, dans l'équation (2), on trouve $(a-b)(a-c)(a-d)$, qui est différent de zéro en vertu des hypothèses.

946. *Si l'équation* $ax^2+bx+c=0$, *à coefficients rationnels, admet pour racine le nombre irrationnel* $\alpha+\sqrt{\beta}$, *elle admet aussi pour racine le nombre irrationnel conjugué* $\alpha-\sqrt{\beta}$.

En effet, l'équation admettant pour racine $\alpha+\sqrt{\beta}$ est vérifiée lorsqu'on y remplace x par $\alpha+\sqrt{\beta}$, ce qui donne

$$a(\alpha+\sqrt{\beta})^2+b(\alpha+\sqrt{\beta})+c=0,$$

ou $$a\alpha^2+a\beta+b\alpha+c+(2a\alpha+b)\sqrt{\beta}=0.$$

Ce nombre irrationnel étant nul, on a séparément

$$a\alpha^2+a\beta+b\alpha+c=0 \quad \text{et} \quad 2a\alpha+b=0. \qquad (1)$$

Remplaçons dans l'équation x par $\alpha-\sqrt{\beta}$; le premier membre devient

$$a(\alpha-\sqrt{\beta})^2+b(\alpha-\sqrt{\beta})+c$$

ou $$a\alpha^2+a\beta+b\alpha+c-(2a\alpha+b)\sqrt{\beta}. \qquad (2)$$

En vertu des relations (1), l'expression (2) est nulle; l'équation est donc vérifiée par $x=\alpha-\sqrt{\beta}$.

947. *Montrer que les racines de l'équation* $(a-x)(b-x)=cd$ *sont rationnelles quand* a, b, c, d *sont rationnels et que* $a-b=c-d$.

L'équation peut s'écrire $x^2-(a+b)x+ab-cd=0$,

et son réalisant est

$$(a+b)^2-4ab+4cd=(a-b)^2+4cd=(c-d)^2+4cd=(c+d)^2.$$

948. *Pour quelles valeurs de* a, *l'équation*

$$(2a^2 - 3a - 2)x^2 + (a^2 + 7a + 2)x - a^2 - 2a = 0$$

admet-elle deux racines distinctes? Calculer ces racines.

Le réalisant de cette équation est $(3a^2 + 3a + 2)^2$. Il est constamment positif, car le trinôme $3a^2 + 3a + 2$ n'a pas de racine.

Le coefficient de x^2 est $2a^2 - 3a - 2$; il a pour racines $-0,5$ et 2.

Il résulte de ce qui précède, que l'équation proposée a deux racines distinctes, si a est différent de 2 et de $-0,5$. Ces racines sont

$$\frac{a}{2a+1} \quad \text{et} \quad \frac{-(a+2)}{a-2}.$$

949. *Résoudre l'équation* $\frac{x-3}{x-4} + \frac{x-4}{x-3} = \frac{2x-c}{x-5}$, *sachant que* $x = 0$ *est une racine de cette équation.*

On a

$$\frac{x-3}{x-4} = 1 + \frac{1}{x-4}; \quad \frac{x-4}{x-3} = 1 - \frac{1}{x-3}; \quad \frac{2x-c}{x-5} = 2 + \frac{10-c}{x-5}.$$

L'équation devient

$$\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-3} = \frac{10-c}{x-5} \quad \text{ou} \quad x - 5 = (10-c)(x-3)(x-4).$$

Cette équation est vérifiée par $x' = 0$. On trouve ainsi

$$c = \frac{125}{12}; \quad \text{puis} \quad x'' = \frac{23}{5}.$$

950. *Résoudre les équations*

$$x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = 0 \quad \textit{et} \quad 2x^3 - 3x^2 - 32x - 15 = 0,$$

sachant qu'elles ont une racine commune.

Cette racine commune vérifie également l'équation

$$-11x^2 + 46x + 45 = 0, \qquad (1)$$

obtenue en retranchant la seconde équation, membre à membre, de la première, après avoir multiplié cette dernière par 2. Les racines de (1) sont

$$x = 5 \quad \text{et} \quad x = -\frac{9}{11}.$$

On voit aisément que la racine commune est 5. Les autres racines de la première équation sont -1 et 3; celles de la seconde -3 et $-0,5$.

951. *Les équations*

$$x^3 - ax^2 + (a+5)x - a = 0 \quad \textit{et} \quad x^2 - ax + 5 = 0$$

ont une racine commune. Calculer a *et résoudre les deux équations.*

La racine commune est différente de 0 et vérifie les équations

$$x^3 - ax^2 + (a + 5)x - a = 0 \quad \text{et} \quad x^3 - ax^2 + 5x = 0;$$

et aussi l'équation $ax - a = 0$, obtenue en retranchant membre à membre la seconde de la première. La racine commune est donc $x = 1$, en supposant $a \neq 0$.

On trouve ensuite $a = 6$. Les racines de la première équation sont 1, 2, 3; et celles de la seconde 1 et 5.

Si $a = 0$, les équations deviennent $x^3 + 5x = 0$; $x^2 + 5 = 0$. Elles n'ont pas de racine commune.

952. *La transformée en* $2x + 3$ *de l'équation* $x^2 + ax + b = 0$ *est* $x^2 - ax + 5b + 12 = 0$. *Calculer* a *et* b.

La transformée en $2x$ de l'équation $x^2 + ax + b = 0$ est

$$\frac{x^2}{4} + \frac{ax}{2} + b = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + 2ax + 4b = 0;$$

celle en $2x + 3$ est donc

$$(x - 3)^2 + 2a(x - 3) + 4b = 0$$

ou

$$x^2 + x(2a - 6) + 9 - 6a + 4b = 0.$$

Cette dernière équation et l'équation $x^2 - ax + 5b + 12 = 0$ ont les mêmes racines. On a donc

$$2a - 6 = -a; \quad 9 - 6a + 4b = 5b + 12.$$

Ce système donne $a = 2$; $b = -15$.

953. *Calculer* a *si l'une des racines de l'équation* $x^2 - 4ax - 20 = 0$ *est la somme des carrés des racines de l'équation* $x^2 + 2x - (a + 1) = 0$.

Soient x' et x'' les racines de la seconde équation; celles de la première seront $x'^2 + x''^2$ et x'''. On a le système

$$x' + x'' = -2; \quad x'x'' = -(a + 1); \quad (x'^2 + x''^2) + x''' = 4a;$$
$$(x'^2 + x''^2)x''' = -20.$$

En remplaçant $x' + x''$ et $x'x''$ dans les deux dernières équations, on obtient le système

$$x''' - 2a + 6 = 0; \quad (a + 3)x''' + 10 = 0.$$

Ce système donne $a = \pm 2$.

Si $a = 2$, on a $x''' = -2$; $x' = 1$; $x'' = -3$.

Si $a = -2$, on a $x''' = -10$; $x' = x'' = -1$.

954. *Les racines de l'équation* $x^2 + 19ax + 36b = 0$ *sont les cubes des racines de l'équation* $x^2 + ax + b = 0$. *Calculer* a *et* b.

Soient x' et x'' les racines de l'équation $x^2 + ax + b = 0$. On a le système :

$$x'^3 + x''^3 = -a(a^2 - 3b) = -19a \quad \text{ou} \quad a(a^2 - 3b - 19) = 0;$$
$$x'^3x''^3 = b^3 = 36b \quad \text{ou} \quad b(b^2 - 36) = 0.$$

Les neuf solutions de ce système sont :

$$b = 0,\quad a = 0; \qquad b = 0,\quad a = \pm\sqrt{19};$$
$$b = 6,\quad a = 0; \qquad b = 6,\quad a = \pm\sqrt{37};$$
$$b = -6,\quad a = 0; \qquad b = -6,\quad a = \pm 1.$$

Ces solutions sont acceptables pourvu que l'on ait

$$361a^2 - 144b \geqslant 0 \quad \text{et} \quad a^2 - 4b \geqslant 0.$$

Elles conviennent donc toutes, sauf $a = 0$, $b = 6$.

955. *L'équation* $a'x^2 + b'x + c' = 0$ *a pour racines celles de l'équation* $ax^2 + bx + c = 0$, *augmentées d'un même nombre. Quelle est la relation qui existe entre les coefficients des deux équations?*

Soient x' et x'' les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$,

$x' + k$ et $x'' + k$, celles de l'équation $a'x^2 + b'x + c' = 0$.

La transformée en $x + k$ de $ax^2 + bx + c = 0$ est

$$a(x - k)^2 + b(x - k) + c = 0$$

ou

$$ax^2 + (b - 2ak)x + ak^2 - bk + c = 0.$$

On a donc les relations

$$\frac{a}{a'} = \frac{b - 2ak}{b'} = \frac{ak^2 - bk + c}{c'}$$

ou

$$b - 2ak = \frac{ab'}{a'}; \quad ak^2 - bk + c = \frac{ac'}{a'}.$$

En éliminant k entre ces deux relations, il vient

$$a^2(b'^2 - 4a'c') = a'^2(b^2 - 4ac).$$

On montre aisément que la même relation subsiste quand on suppose

$$b' = 0 \quad \text{ou} \quad c' = 0 \quad \text{ou} \quad b' = c' = 0.$$

956. *Quelle valeur faut-il donner à* m *pour qu'on puisse simplifier la fraction*

$$\frac{2x^2 - mx - 15}{3x^2 + 2mx - 5}?$$

Les deux équations

$$2x^2 - mx - 15 = 0 \quad \text{et} \quad 3x^2 + 2mx - 5 = 0$$

doivent avoir au moins une racine commune; ce qui exige

$$R = 35^2 - 7m \times 35m = 0 \quad \text{ou} \quad m = \pm\sqrt{5}.$$

Si $m = \sqrt{5}$, la racine commune est $-\sqrt{5}$ et la fraction est égale à

$$\frac{2x - 3\sqrt{5}}{3x - \sqrt{5}}.$$

Si $m = -\sqrt{5}$, la racine commune est $\sqrt{5}$ et la fraction est égale à

$$\frac{2x + 3\sqrt{5}}{3x + \sqrt{5}}.$$

957. *Montrer que les équations*

$$(a - b)x^2 + (b - c)x + (c - a) = 0$$

et

$$(c - a)x^2 + (a - b)x + (b - c) = 0$$

ont une seule racine commune.

Nous supposons $a \neq b$ et $a \neq c$, car sinon les deux équations ne seraient pas du second degré. On a alors :

$$a)\quad \begin{vmatrix} a - b & b - c \\ c - a & a - b \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca,$$

qui est $\neq 0$, car les trois nombres a, b, c ne sont pas égaux.

$$b)\quad \mathrm{R} = [(a - b)(b - c) - (c - a)^2]^2 - [(a - b)^2 - (b - c)(c - a)][(b - c)^2 - (a - b)(c - a)]$$
$$= (c - a)[(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 - 3(a - b)(b - c)(c - a)],$$

qui est nul, car le second facteur est de la forme $A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC$ et on a

$$A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC = 0 \quad \text{quand} \quad A + B + C = 0.$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que les deux équations aient une seule racine commune sont donc vérifiées. Cette racine commune est $x = 1$.

958. *Chercher les conditions pour que les équations*

$x^2 + ax + bc = 0$ (1) $x^2 + bx + ac = 0$ (2) $x^2 + cx + ab = 0$(3)

aient deux à deux une seule racine commune.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations (1) et (2), (2) et (3), (3) et (1) aient respectivement une seule racine commune, sont

$$b - a \neq 0;\quad R_1 = c(b - a)^2(a + b + c) = 0;$$
$$c - b \neq 0;\quad R_2 = a(c - b)^2(a + b + c) = 0;$$
$$a - c \neq 0;\quad R_3 = b(a - c)^2(a + b + c) = 0.$$

Ces conditions peuvent s'écrire

$$a \neq b;\quad b \neq c;\quad c \neq a;\quad a + b + c = 0.$$

Quand ces conditions sont remplies, les racines des trois équations sont respectivement

$$b \text{ et } c;\quad c \text{ et } a;\quad a \text{ et } b.$$

959. *Quelles sont les conditions pour que l'une des racines de l'équation* $ax^2 + bx + c = 0$ *soit le double d'une racine de* $cx^2 + bx + a = 0$?

La question exige que l'on ait $a \neq 0$ et $c \neq 0$.

La transformée en $2x$ de l'équation $cx^2 + bx + a = 0$ est

$$cx^2 + 2bx + 4a = 0.$$

I. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{et} \quad cx^2 + 2bx + 4a = 0 \tag{1}$$

aient une racine commune sont

$$2ab - bc = b(2a - c) \neq 0;$$
$$R = (2a - c)^2[(2a + c)^2 - 2b^2] = 0.$$

Ces conditions peuvent s'écrire

$$b \neq 0; \quad 2a \neq c; \quad 2a + c = \pm b\sqrt{2}.$$

II. Les conditions pour que les équations (1) aient deux racines communes sont

$$2ab - bc = b(2a - c) = 0; \quad 4a^2 - c^2 = 0; \quad b^2 - 4ac \geqslant 0.$$

Ces conditions sont remplies quand on a $b = 0$ et $2a + c = 0$, car cette dernière égalité entraîne $ac < 0$ et $b^2 - 4ac > 0$; ou encore, quand on a $2a = c$ et $b^2 - 2c^2 \geqslant 0$.

960. *On donne les équations*

$$\mathrm{x}^2 - \mathrm{mx} - 3 = 0; \quad (1) \qquad \mathrm{x}^2 - 3\mathrm{mx} + 2\mathrm{m} + 1 = 0. \quad (2)$$

En ajoutant une racine de (1) *au triple d'une racine de* (2), *on trouve* 2. *Déterminer* m.

Supposons que l'on ait

$$x' + 3x'' = 2,$$

x', étant une racine de (1) et x'' une racine de (2). On a aussi

$$x'^2 - mx' - 3 = 0; \ (3) \quad x''^2 - 3mx'' + 2m + 1 = 0. \ (4)$$

Remplaçons x' par $2 - 3x''$ dans (3). On trouve

$$9x''^2 - x''(12 - 3m) - 2m + 1 = 0. \tag{5}$$

Les relations (4) et (5) expriment que les équations

$$x^2 - 3mx + 2m + 1 = 0 \quad \text{et} \quad 9x^2 - (12 - 3m)x - 2m + 1 = 0$$

ont une racine commune. On doit donc avoir

$$R = 4(-35m^2 + 44m + 52) = 0.$$

Les racines de cette équation sont $m'' = -\dfrac{26}{35}$ et $m' = 2$.

a) Si $m = -\dfrac{26}{35}$, les équations (1) et (2) deviennent

$$35x^2 + 26x - 105 = 0 \text{ et } 35x^2 + 78x - 17 = 0.$$

Leurs racines sont $-\dfrac{15}{7}$ et $\dfrac{7}{5}$; $-\dfrac{17}{7}$ et $\dfrac{1}{5}$; et on a

$$\frac{7}{5} + 3 \times \frac{1}{5} = 2.$$

b) Si $m = 2$, les équations (1) et (2) deviennent

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \text{et} \quad x^2 - 6x + 5 = 0.$$

Leurs racines sont -1 et 3; 1 et 5; et on a

$$-1 + 3 \times 1 = 2.$$

961. *On considère l'équation* $ax^2 + bx + c = 0$, *qui admet deux racines* x' *et* x''. *Démontrer les points suivants :*

1° *Toute puissance d'une racine* x' *peut être transformée en un binôme linéaire en* x'.

a) Le théorème est vrai pour x'^2, car on a

$$ax'^2 + bx' + c = 0 \quad \text{ou} \quad x'^2 = -\frac{b}{a}x' - \frac{c}{a}. \qquad (1)$$

b) Le théorème est vrai pour x'^3. Pour le montrer, il suffit de remplacer x'^2 par la valeur (1) dans la relation $ax'^3 + bx'^2 + cx' = 0$, et de résoudre par rapport à x'^3.

c) On montrerait d'une façon analogue que, si le théorème est vrai pour x'^n et x'^{n+1}, il l'est aussi pour x'^{n+2}.

2° *Si l'expression* $f(x', x'')$ *est rationnelle en* x' *et* x'', *elle peut être transformée en une expression linéaire en* x' *et* x''.

En effet, $f(x', x'')$ est une somme de termes de la forme $\alpha x'^n x''^m$, α étant un coefficient numérique et m, n, deux exposants entiers positifs ou nuls. Or, en supposant, par exemple, $n > m$, on peut écrire

$$x'^n x'' = (x'x'')^m x'^{n-m} = \left(\frac{c}{a}\right)^m x'^{n-m}$$

et on vient de montrer que x'^{n-m} peut être remplacé par un binôme linéaire en x'. Donc on peut écrire

$$f(x', x'') = Ax' + Bx'' + C,$$

A, B, C désignant des fonctions déterminées des coefficients *a*, *b*, *c*.

3° *Toute fonction symétrique et rationnelle des racines d'une équation du second degré s'exprime rationnellement en fonction des coefficients de l'équation.*

En effet, si l'expression $f(x', x'')$ est rationnelle en x' et x'', on a

$$f(x', x'') = Ax' + Bx'' + C \qquad (1)$$

et il résulte de l'exposé précédent que A, B, C sont rationnels en *a*, *b*, *c*. Supposons alors que $f(x', x'')$ soit symétrique par rapport à x' et x''. Les deux membres de (1) ne devront pas changer quand on permute x' et x'', ce qui exige A = B. On a donc

$$f(x', x'') = A(x' + x'') + C = -\frac{b}{a}A + C;$$

A et C étant des fonctions rationnelles de *a*, *b*, *c*, le théorème est démontré.

962. *Former les équations dont les racines satisfont aux relations suivantes :*

1° $4x'x'' - 5(x' + x'') + 4 = 0; \quad (x' - 1)(x'' - 1) = \dfrac{1}{a + 1}.$

La question n'a de sens que si on suppose $a \neq -1$. Le système proposé donne alors

$$x' + x'' = \frac{4}{a+1}; \quad x'x'' = \frac{4-a}{a+1}.$$

L'équation cherchée est

$$(a+1)x^2 - 4x + 4 - a = 0.$$

On doit avoir $\rho = a^2 - 3a \geqslant 0$, ce qui exige

$$a \leqslant 0 \quad \text{ou} \quad a \geqslant 3.$$

2° $(x' - m)(x'' - m) = m^2$; $m(x' + x'') + x'x'' = 2(m+1)$.

Si $m = 0$, ces deux équations sont incompatibles.

Si $m \neq 0$, elles donnent

$$x' + x'' = \frac{m+1}{m}; \quad x'x'' = m + 1.$$

L'équation cherchée est

$$mx^2 - (m+1)x + m + 1 = 0.$$

On doit avoir $\rho = (m+1)(-3m+1) \geqslant 0$, ce qui exige

$$-1 \leqslant m \leqslant \frac{1}{3}.$$

963. *Former l'équation du second degré dont les racines vérifient les relations*

$$\frac{\mathrm{x'x''^2 + x''x'^2}}{\mathrm{x'^3 + x''^3}} = \frac{\mathrm{m^2 - 4}}{\mathrm{m - 4}}; \quad \frac{1}{\mathrm{x'}} + \frac{1}{\mathrm{x''}} = 1 - \mathrm{m}.$$

Déterminer m *pour que les racines soient négatives. (E. M. Armes simples,* 1906).

Soit $x^2 + px + q = 0$ l'équation à former. On a le système

$$\frac{pq}{p(p^2 - 3q)} = \frac{m^2 - 4}{m - 4}; \quad \frac{p}{q} = m - 1.$$

Il n'a de sens que si m est différent de 4. De plus, une solution n'est acceptable que si l'on a $p \neq 0$ et $q \neq 0$. Cette dernière condition entraîne $x' \neq 0$, $x'' \neq 0$, et par suite, $p^2 - 3q = x'^2 - x'x'' + x''^2 \neq 0$.

Le système donne

$$p = \frac{3m^2 + m - 16}{(m^2 - 4)(m - 1)}; \quad q = \frac{3m^2 + m - 16}{(m^2 - 4)(m - 1)^2}.$$

Cette solution est acceptable si on a :

a) $m \neq \pm 2$ et $m \neq 1$.

b) $3m^2 + m - 16 \neq 0$ ou $m \neq \dfrac{-1 \pm \sqrt{193}}{6}$.

c) $p^2 - 4q = \dfrac{(3m^2 + m - 16)(m - m^2)}{(m^2 - 4)^2 (m - 1)^2} \geqslant 0$

ou $\quad m(3m^2 + m - 16)(m - 1) \leqslant 0,$

ce qui exige $\dfrac{-1 - \sqrt{193}}{6} \leqslant m \leqslant 0$ ou $1 < m \leqslant \dfrac{-1 + \sqrt{193}}{6}$.

Pour que les racines soient négatives, on doit avoir en plus :

$$q > 0 \quad \text{ou} \quad (3m^2 + m - 16)(m^2 - 4) > 0;$$
$$p > 0 \quad \text{ou} \quad (3m^2 + m - 16)(m^2 - 4)(m - 1) > 0.$$

En résolvant ces deux inéquations et en tenant compte des conditions précédemment trouvées, on voit que les seules valeurs de m qui conviennent sont

$$1 < m < 2.$$

964. *Chercher les trinômes de la forme* $\mathrm{x^2 + px + q}$, *dont les racines font prendre au polynôme* $\mathrm{x^3 + 2x^2 + x + C}$ *des valeurs égales. Étudier la nature et les signes des racines de ces trinômes; représentation graphique.* (*E. M. Armes spéciales*, 1911).

Soient α et β les racines des trinômes à former. On aura

$$\alpha^3 + 2\alpha^2 + \alpha + C = \beta^3 + 2\beta^2 + \beta + C$$

ou

$$(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 + 2\alpha + 2\beta + 1) = 0.$$

I. Si $\alpha = \beta$, on a $p^2 - 4q = 0$ et on aura les trinômes

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

Si $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 + 2\alpha + 2\beta + 1 = 0$, on a

$$(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 1 = 0;$$

ce qui donne

$$p^2 - q - 2p + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad q = (p - 1)^2;$$

et la forme générale des trinômes correspondants est

$$x^2 + px + (p - 1)^2.$$

II. Le trinôme $x^2 + px + (p - 1)^2$ admet des racines si l'on a

$$\rho = p^2 - 4(p - 1)^2 = -(3p - 2)(p - 2) \geqslant 0,$$

ou

$$\frac{2}{3} \leqslant p \leqslant 2.$$

Si $p = \frac{2}{3}$ ou 2, ces racines sont égales et négatives;

Si $p = 1$, l'une est nulle et l'autre négative;

Si $\frac{2}{3} < p < 1$ ou $1 < p < 2$, elles sont distinctes et négatives.

Tracer l'ellipse $x^2 + px + p^2 - 2p + 1 = 0$, en portant les x en abscisses et les p en ordonnées; son centre est $\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$; ses axes sont $p = x + 2$ et $3p + 3x = 2$; elle est tangente aux droites $x = 0$, $p = \frac{2}{3}$, $p = 2$. On voit alors qu'à une valeur de p comprise entre $\frac{2}{3}$ et 1 correspondent deux valeurs négatives de x; etc.

965. *Les équations*

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \quad et \quad \varphi(x) = a'x^2 + b'x + c' = 0$$

ont respectivement pour racines α et β, α' *et* β'. *Montrer que leur résultant est* $a^2\varphi(\alpha)\varphi(\beta)$ *ou* $a'^2f(\alpha')\,f(\beta')$.

En effet, on a

$$\varphi(\alpha)\varphi(\beta) = (a'\alpha^2 + b'\alpha + c')\,(a'\beta^2 + b'\beta + c')$$
$$= a'^2\alpha^2\beta^2 + a'b'\alpha\beta(\alpha + \beta) + a'c'(\alpha^2 + \beta^2) + b'^2\alpha\beta + b'c'(\alpha + \beta) + c'^2.$$

Remplaçons $\alpha\beta$, $\alpha + \beta$ et $\alpha^2 + \beta^2$ par leurs valeurs.

$$\varphi(\alpha)\varphi(\beta) = \frac{1}{a^2}(\underline{a'^2c^2} - \underline{\underline{a'bb'c}} + \underline{\underline{a'b^2c'}} - \underline{2aa'cc'} + ab'^2c - abb'c' + \underline{a^2c'^2}).$$

Groupons les termes soulignés; il vient ainsi

$$\varphi(\alpha)\varphi(\beta) = \frac{1}{a^2}\,[(ca' - ac')^2 - (ab' - ba')\,(bc' - cb')].$$

On a donc $\qquad R = a^2\varphi(\alpha)\varphi(\beta).$

On montrerait d'une façon analogue que l'on a

$$R = a'^2 f(\alpha')\,f(\beta').$$

966. *Si l'équation* $ax^2 + bx + c = 0$ *a deux racines* x' *et* x'', *et si* m *est différent de zéro, l'équation*

$$f(x) = ax^2 + bx + c + m(2ax + b) = 0$$

a deux racines distinctes et les nombres $x' - m$ *et* $x'' - m$ *sont compris entre ces racines.*

On a $\qquad ax^2 + bx + c = a(x - x')\,(x - x''),$

et $$2ax + b = a\left(2x + \frac{b}{a}\right) = a[(x - x') + (x - x'')].$$

L'équation $f(x) = 0$ peut donc être mise sous la forme

$$f(x) = a[(x - x')\,(x - x'') + m(x - x') + m(x - x'')].$$

Par suite, on a

$$f(x') = am(x' - x'') \quad \text{et} \quad f(x'') = am(x'' - x').$$

Si $x' \neq x''$, ces résultats ont des signes opposés; donc l'équation $f(x) = 0$ a deux racines distinctes, séparées par x' ou par x''. On a aussi

$$af(x' - m) = -a^2m^2 = af(x'' - m). \qquad (1)$$

Ces résultats sont négatifs, ce qui indique que $x' - m$ et $x'' - m$ sont compris entre les racines de l'équation $f(x) = 0$.

Si $x' = x''$, les égalités (1) subsistent, ce qui prouve que même dans ce cas, l'équation $f(x) = 0$ a deux racines distinctes, séparées par $x' - m$.

967. *Si la constante* p *n'est pas racine de l'équation* $ax^2 + bx + c = 0$, *déterminer* m *de manière que l'expression*

$$ax^2 + bx + c - m(x - p)^2$$

puisse prendre la forme $m'(x - p')^2$. *Dans quels cas les coefficients* m *et* m' *sont-ils de mêmes signes?* (*E. M. Armes simples*, 1905).

L'expression donnée peut s'écrire

$$x^2(a - m) + x(b + 2mp) + c - mp^2.$$

On doit avoir $\rho = b^2 - 4ac + 4m(ap^2 + bp + c) = 0$.

Comme $ap^2 + bp + c \neq 0$, cette égalité donne

$$m = \frac{4ac - b^2}{4(ap^2 + bp + c)}.$$

D'autre part, on a $m' = a - m = \dfrac{4a^2p^2 + 4abp + b^2}{4(ap^2 + bp + c)}$.

Donc m et m' sont de mêmes signes, si on a

$$(4ac - b^2)(4a^2p^2 + 4abp + b^2) > 0.$$

968. *On donne les équations*

$$\mathrm{x} = \frac{\mathrm{ax + b}}{\mathrm{cx + d}} \quad et \quad \mathrm{y} = \frac{\mathrm{az + b}}{\mathrm{cz + d}}.$$

Si α *et* β *sont les racines de la première, démontrer que l'on a*

$$\frac{\mathrm{y} - \alpha}{\mathrm{y} - \beta} = \mathrm{h}\,\frac{\mathrm{z} - \alpha}{\mathrm{z} - \beta},$$

h *étant une constante qui a, en général, deux valeurs.* (*E. M. Armes spéciales*, 1922).

On a $$y - x = \frac{(ad - bc)(z - x)}{(cz + d)(cx + d)}.$$

En remplaçant x par α, puis par β, il vient

$$y - \alpha = \frac{(ad - bc)(z - \alpha)}{(cz + d)(c\alpha + d)} \quad \text{et} \quad y - \beta = \frac{(ad - bc)(z - \beta)}{(cz + d)(c\beta + d)}.$$

En divisant membre à membre, il vient, en supposant $ad \neq bc$,

$$\frac{y - \alpha}{y - \beta} = h\,\frac{z - \alpha}{z - \beta}, \quad \text{où} \quad h = \frac{c\beta + d}{c\alpha + d}. \tag{1}$$

α et β sont les racines de l'équation

$$x = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (2) \quad \text{ou} \quad cx^2 - (a - d)x - b = 0, \quad (3)$$

dont le réalisant est $\rho = (a - d)^2 + 4bc$.

L'équation (3) admet deux racines distinctes ou égales quand $c \neq 0$ et $\rho \geqslant 0$. Une racine de (3) ne convient à (2) que si elle diffère de $-\dfrac{d}{c}$, ce qui exige

$$c\,\frac{d^2}{c^2} + \frac{d}{c}(a - d) - b \neq 0 \quad \text{ou} \quad ad \neq bc.$$

Ainsi, si $c \neq 0$, $\rho > 0$, $ad \neq bc$, l'équation (3) a deux racines acceptables x' et x'' et l'expression (1) prend deux formes différentes, suivant que α est égal à x' ou à x''.

Si $c \neq 0$, $\rho = 0$, $ad \neq bc$, l'équation (3) a une racine double acceptable et h a une seule valeur.

969. *Chercher la transformée en* $\dfrac{2}{\mathrm{x}-1}$ *de l'équation* $\mathrm{x}^2 + \mathrm{px} + \mathrm{q} = 0$; *puis, déterminer* p *et* q *pour que la nouvelle équation ait les mêmes racines que l'équation donnée.*

L'égalité $y = \dfrac{2}{x-1}$ donne $x = \dfrac{y+2}{y}$. En remplaçant x par sa valeur dans $x^2 + px + q = 0$, on obtient l'équation

$$y^2(p + q + 1) + 2y(p + 2) + 4 = 0.$$

Cette équation a les mêmes racines que l'équation donnée, si on a

$$\frac{p + q + 1}{1} = \frac{4 + 2p}{p} = \frac{4}{q}.$$

Ces relations donnent le système

$$pq + q^2 + q = 4; \quad (1) \quad pq + 2q - 2p = 0. \quad (2)$$

En éliminant pq, on trouve $2p = 4 + q - q^2$, puis, après avoir remplacé p dans (2),

$$q^3 - 3q^2 - 6q + 8 = 0;$$

d'où $q = -2$, 1 ou 4.

Les solutions du système (1), (2) sont

$$p = -1, \quad q = -2; \quad p = 2, \quad q = 1; \quad p = -4, \quad q = 4.$$

On vérifiera aisément qu'à chacune de ces solutions correspond une équation $x^2 + px + q = 0$ et une équation transformée, admettant effectivement deux racines distinctes ou égales.

970. *Discuter le nombre et les signes des racines de l'équation*

$$\mathrm{x}^2 - \mathrm{x}\sqrt{2} + \log \mathrm{a} = 0.$$

L'équation n'a de sens que si a est positif. On a :

a) $\rho = 2 - 4 \log a = \log \dfrac{100}{a^4}$, qui est positif ou nul, si on a

$$\frac{100}{a^4} \geqslant 1 \quad \text{ou} \quad (a^2 + 10)(a^2 - 10) \leqslant 0 \quad \text{ou} \quad 0 < a \leqslant \sqrt{10}.$$

b) $\mathrm{P} = \log a$, qui est positif quand $a > 1$; nul, quand $a = 1$; négatif, quand $0 < a < 1$.

c) $\mathrm{S} = \sqrt{2}$ qui est positif.

CONCLUSIONS.

$0 < a < 1$; deux racines de signes contraires.
$a = 1$; $x'' = 0$; $x' = \sqrt{2}$.
$1 < a < \sqrt{10}$; deux racines positives.
$a = \sqrt{10}$; $x' = x'' = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

971. *Dans l'équation* $x^2 - 2(a+1)x + 1 - a^2 = 0$, *on a* $a = \log b$. *Déterminer* b *pour que l'équation admette des racines positives.*

On doit avoir :

1° $\rho = (a+1)^2 - (1-a^2) = 2(a^2+a) \geqslant 0$, ce qui exige
$a \leqslant -1$ ou $a \geqslant 0$; ou encore, $0 < b \leqslant 0{,}1$ ou $b \geqslant 1$.

2° $P = 1 - a^2 > 0$, ce qui exige
$-1 < a < 1$; ou encore, $0{,}1 < b < 10$.

3° $S = 2(a+1) > 0$, ce qui exige
$a > -1$; ou encore, $b > 0{,}1$.

En résumé, on doit avoir $1 \leqslant b < 10$.

972. *Ranger par ordre de grandeur croissante les racines des deux équations* $x^2 + 2x - 1 = 0$, $x^2 + 2ax - 1 = 0$, *où* a *peut être un nombre quelconque.*

Les racines de la première équation sont

$$x' = \sqrt{2} - 1 \quad \text{et} \quad x'' = -\left(\sqrt{2} + 1\right).$$

Remplaçons x par $\sqrt{2} - 1$ et par $-\left(\sqrt{2} + 1\right)$ dans la seconde équation, que nous désignons par $f(x) = 0$. Nous trouvons

$$f\left(\sqrt{2} - 1\right) = 2\left(\sqrt{2} - 1\right)(a - 1);$$
$$f\left(-\sqrt{2} - 1\right) = 2\left(\sqrt{2} + 1\right)(1 - a).$$

Si $a > 1$, $f\left(\sqrt{2} - 1\right)$ est positif et $f\left(-\sqrt{2} - 1\right)$ négatif; ainsi, dans ce cas, $\sqrt{2} - 1$ est extérieur aux racines, et $-\sqrt{2} - 1$ est intérieur aux racines de la seconde équation.

On a donc, en appelant x'_1 et x''_1 les racines de $x^2 + 2ax - 1 = 0$:

$$x''_1 < -\left(\sqrt{2} + 1\right) < x'_1 < \sqrt{2} - 1.$$

Si $a < 1$, $f(\sqrt{2} - 1)$ est négatif, et $f(-\sqrt{2} - 1)$ positif; ainsi, dans ce cas, $\sqrt{2} - 1$ est intérieur aux racines x'_1 et x''_1, tandis que $-\sqrt{2} - 1$ est extérieur. On a donc

$$-\sqrt{2} - 1 < x''_1 < \sqrt{2} - 1 < x'_1.$$

Si $a = 1$, les deux équations ont les mêmes racines.

973. *Pour quelles valeurs de* x, *les expressions suivantes sont-elles positives, négatives ou nulles ?*

1° $\dfrac{x^2 + x - 6}{2x^2 + \sqrt{x^4 + 5x^2}}$.

Le numérateur est positif pour $x < -3$ ou $x > 2$; il est nul pour $x = -3$ ou 2; il est négatif pour $-3 < x < 2$.

Le dénominateur est défini et positif quand $x^3(x+5) > 0$, ce qui exige $x < -5$ ou $x > 0$; il est nul pour $x = 0$ et positif pour $x = -5$.

La fraction est positive pour $x \leqslant -5$ ou $x > 2$; elle est nulle pour $x = 2$; elle est négative pour $0 < x < 2$. La fraction n'est pas définie pour les autres valeurs de x.

2° $\dfrac{(x-2)^4 (x-3)^5}{(x-4)^3 (x-5)^7}$

Cette fraction s'annule pour $x = 2$ ou 3; elle n'est pas définie pour $x = 4$ ou 5. Pour les autres valeurs de x, elle a le même signe que les expressions

$$\frac{x-3}{(x-4)(x-5)} \quad \text{ou} \quad (x-3)(x-4)(x-5).$$

Elle est donc négative pour $x < 2$, $2 < x < 3$ ou $4 < x < 5$; et positive pour $3 < x < 4$ ou $x > 5$.

974. *La fonction* $y = ax^2 + bx + c$ *est représentée par une parabole qui coupe l'axe des* x *en deux points dont les abscisses sont* -2 *et* 5; *et l'axe des* y *en un point dont l'ordonnée est* -7. *Calculer* a, b *et* c *et tracer la parabole.*

La courbe passe par les points $(-2, 0)$, $(5, 0)$ et $(0, -7)$. Les coordonnées de ces points vérifient l'équation $y = ax^2 + bx - c$. On obtient ainsi le système

$$4a - 2b + c = 0; \quad 25a + 5b + c = 0; \quad c = -7.$$

Sa solution est $a = \dfrac{7}{10}$; $b = -\dfrac{21}{10}$; $c = -7$.

On tracera la parabole, après avoir remarqué que la fonction est minimum pour $x = \dfrac{3}{2}$ et que ce minimum est $-\dfrac{343}{40}$.

975. *Calculer* a *et* b, *sachant que les minimums des fonctions* $x^2 + ax + b$ *et* $x^2 + bx + a$ *sont entre eux comme* 2 *est à* 5, *et que la seconde est minimum pour* $x = -1$.

On a le système

$$-\frac{b}{2} = -1 \quad \text{et} \quad \frac{4b - a^2}{4a - b^2} = \frac{2}{5}.$$

Ses solutions sont

$$a = 2{,}4, \quad b = 2; \quad a = -4, \quad b = 2.$$

976. *Calculer* m *et* p *sachant que les trinômes*

$$mx^2 + px - p - 2 \quad et \quad -mx^2 - 6x + p - 4m$$

ont les mêmes valeurs extrêmes et pour les mêmes valeurs de x.

On a le système

$$\frac{-p}{2m} = \frac{6}{-2m}; \quad \frac{-4m(p+2) - p^2}{4m} = \frac{-4m(p-4m) - 36}{-4m};$$

ou

$$p = 6; \quad 2m^2 - 7m - 9 = 0.$$

Les solutions du système sont

$$m = -1, \quad p = 6; \quad m = 4{,}5, \quad p = 6.$$

977. *Le trinôme* $ax^2 + bx + c$ *est maximum pour* $x = 5$ *et le maximum est* 10. *En divisant le trinôme par* $x - 7$, *on trouve comme reste* -2. *Calculer* a, b *et* c.

On a le système

$$a < 0; \quad -\frac{b}{2a} = 5; \quad \frac{4ac - b^2}{4a} = 10; \quad 49a + 7b + c = -2.$$

La première et la troisième équation donnent

$$a = \frac{c+2}{21}; \quad b = -\frac{10(c+2)}{21}.$$

La deuxième équation devient après substitution

$$84c(c+2) - 100(c+2)^2 = 840(c+2).$$

Les racines de cette équation sont -2 et -65. La racine -2 est inacceptable, car pour $c = -2$, on a $a = 0$.

La solution acceptable du système est

$$a = -3, \quad b = 30, \quad c = -65.$$

978. *Déterminer* k *pour que la fonction*

$$(k+1)x^2 - (5k-3)x + k^2 + k - 3$$

ait un minimum positif.

On doit avoir

$$k + 1 > 0 \quad \text{et} \quad \frac{4(k+1)(k^2+k-3) - (5k-3)^2}{4(k+1)} > 0.$$

La première inéquation donne $k > -1$. En supposant cette inégalité satisfaite, la seconde devient

$$4(k+1)(k^2+k-3) - (5k-3)^2 > 0$$

ou

$$(k-3)(4k^2 - 5k + 7) > 0,$$

ou encore,

$$k - 3 > 0,$$

car le second facteur est constamment positif.

Les valeurs cherchées sont $k > 3$.

979. *Déterminer* m *pour que la différence des racines de l'équation* $x^2 - 4mx + 5m^2 - 6m + 5 = 0$ *soit maximum.*

On trouve, en désignant la différence par D,

$$D = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} = 2\sqrt{-m^2 + 6m - 5}.$$

Le trinôme $-m^2 + 6m - 5$ est positif pour $1 < m < 5$; il est maximum pour $m = 3$ et ce maximum est 4.

D sera maximum pour la même valeur de m et son maximum sera

$$2 \times 2 = 4.$$

980. *Trouver le minimum de* $x^2 - y^2 + z^2$, *sachant que l'on a*

$$5x - y - z + 1 = 0; \quad x + y - z - 5 = 0.$$

Ces deux équations donnent

$$y + z = 5x + 1; \quad y - z = 5 - x.$$

On a ensuite

$$x^2 - y^2 + z^2 = x^2 - (y^2 - z^2) = x^2 - (5x + 1)(5 - x)$$
$$= 6x^2 - 24x - 5.$$

Ce trinôme a un minimum égal à -29 pour $x = 2$. Les valeurs correspondantes des autres variables sont $y = 7$; $z = 4$.

981. *On considère le trinôme*

$$y = mx^2 - 2(m + 1)x - (3m - 1).$$

Rechercher les diverses positions de son graphique; de cette étude déduire le nombre et les signes de ses racines.

Si $m \neq 0$, le trinôme est représenté par une parabole dont l'axe est parallèle à $y'y$. Elle présente son sommet vers le haut ou vers le bas suivant que m est négatif ou positif.

L'abscisse du sommet est $\frac{m + 1}{m}$; elle est positive pour $m < -1$ ou $m > 0$; négative pour $-1 < m < 0$.

L'ordonnée du sommet est $\frac{-(4m^2 + m + 1)}{m}$; elle a le signe contraire de m, car $4m^2 + m + 1$ est toujours positif.

L'ordonnée à l'origine est $1 - 3m$; elle est positive pour $m < \frac{1}{3}$; négative pour $m > \frac{1}{3}$.

I. $m < 0$. — Le sommet de la parabole représente un maximum et il est au-dessus de l'axe $x'x$. La parabole coupe l'axe $x'x$ en deux points; ces points sont de part et d'autre de l'origine, car l'ordonnée à l'origine est positive. Le trinôme admet deux racines de signes contraires.

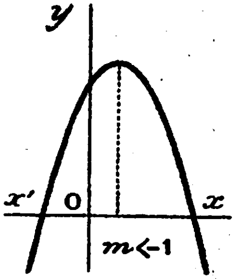


Fig. 63.

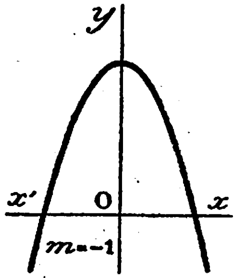


Fig. 64.

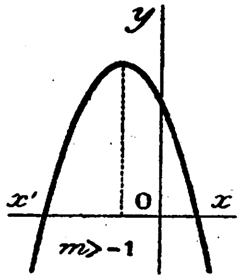


Fig. 65.

Si $m < -1$, l'abscisse du sommet est positive. Le sommet est à droite de $y'y$. La racine positive a la plus grande valeur absolue (Fig. 63).

Si $m = -1$, l'abscisse du sommet est nulle. Le sommet est sur l'axe $y'y$. Les racines sont opposées (Fig. 64).

Si $m > -1$, l'abscisse du sommet est négative. Le sommet est à gauche de $y'y$. La racine négative a la plus grande valeur absolue (Fig. 65).

II. $m > 0$. — Le sommet de la parabole représente un minimum et il est en-dessous de l'axe $x'x$. Le trinôme a deux racines distinctes.

L'abscisse du sommet est positive; l'ordonnée à l'origine peut être positive, nulle ou négative.

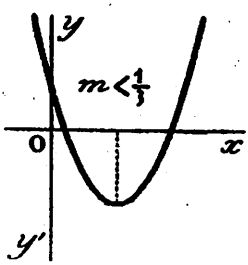


Fig. 66

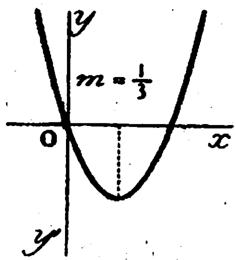


Fig. 67

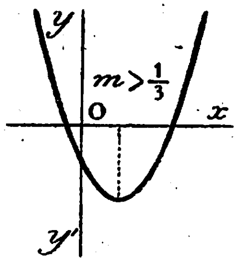


Fig. 68

Si $m < \frac{1}{3}$, on a deux racines positives (Fig. 66).

Si $m = \frac{1}{3}$, une racine est nulle; l'autre est positive (Fig. 67).

Si $m > \frac{1}{3}$, on a deux racines de signes contraires; la positive a la plus grande valeur absolue (Fig. 68).

982. *Même question pour le trinôme*

$$y = (m - 2)x^2 - 2(2m - 3)x + 5m - 6.$$

Nous nous bornerons à résumer cette étude, en supposant $m \neq 2$.

L'ordonnée du sommet est $\dfrac{m^2 - 4m + 3}{m - 2}$; elle a le signe de

$$(m - 1)(m - 2)(m - 3).$$

L'abscisse du sommet est $\dfrac{2m - 3}{m - 2}$ qui a le signe de $(2m - 3)(m - 2)$.

L'ordonnée à l'origine est $5m - 6$.

I. $m < 2$. — Le sommet de la parabole représente un maximum; il est en-dessous de $x'x$ pour $m < 1$; et au-dessus de $x'x$ pour $1 < m < 2$.

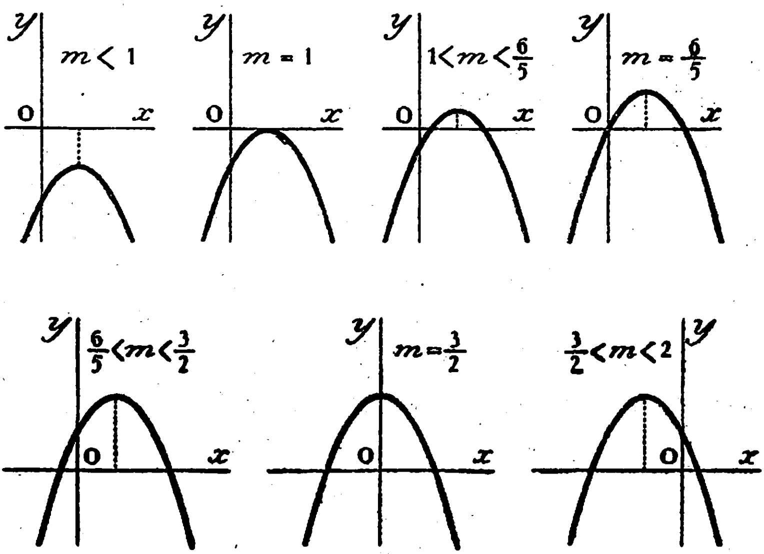


Fig. 69.

II. $m > 2$. — Le sommet représente un minimum; il est en-dessous de $x'x$ pour $2 < m < 3$; et au-dessus de $x'x$ pour $m > 3$.

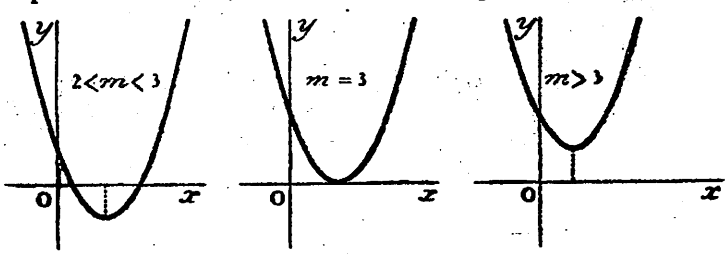


Fig. 70.

983. *Résoudre et discuter l'équation*

$$x = t + \sqrt{x^2 + 2(1 - t)x + 4t.}$$

Étudier les variations de x *quand* t *varie; représentation graphique. Rechercher si* x *et* t *peuvent prendre en même temps des valeurs entières et positives.*

I. L'équation peut s'écrire

$$x - t = \sqrt{x^2 + 2(1 - t)x + 4t.}$$

On doit avoir $x - t \geqslant 0$ ou $x \geqslant t$. En élevant au carré, il vient

$$2x = t^2 - 4t \quad \text{ou} \quad x = \frac{t^2 - 4t}{2}.$$

Cette racine ne convient que si elle vérifie la relation $x \geqslant t$, ce qui exige

$$\frac{t^2 - 4t}{2} \geqslant t; \quad t^2 - 6t \geqslant 0; \quad t \leqslant 0 \quad \text{ou} \quad t \geqslant 6.$$

II. Les variations de x sont données par les deux parties extrêmes du tableau :

t	$-\infty$		0		2		6		$+\infty$
x	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Portons les t en abscisses et les x en ordonnées. L'égalité $2x = t^2 - 4t$ est représentée par une parabole et l'égalité $x - t = 0$ par la bissectrice du premier angle.

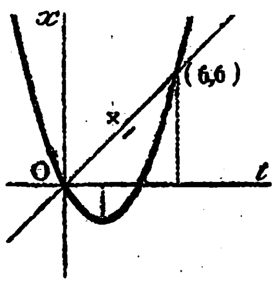


Fig. 71.

La figure montre qu'à chaque valeur de t, non comprise entre 0 et 6, correspond une valeur de x, supérieure ou égale à t.

III. x est toujours positif quand $t < 0$ ou $t \geqslant 6$. L'égalité $2x = t^2 - 4t$ montre que x est entier si t est pair. Les valeurs entières et positives de t, auxquelles correspondent des valeurs entières et positives de x, sont donc 6, 8, 10,...

984. *Résoudre le système*

$$\alpha x + \beta y = 1; \quad -(\beta + 1)x + (\alpha + 1)y = 1.$$

Déterminer α *et* β *si la valeur d'une inconnue est double de la valeur de l'autre et si le dénominateur commun est minimum* (*E. M. Armes simples*, 1928).

Le dénominateur commun de x et de y est $\alpha^2 + \beta^2 + \alpha + \beta$. En le supposant différent de zéro, on trouve

$$x = \frac{\alpha - \beta + 1}{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha + \beta}; \quad y = \frac{\alpha + \beta + 1}{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha + \beta}.$$

I. Soit $y = 2x$. — On a la relation

$$\alpha + \beta + 1 = 2(\alpha - \beta + 1) \quad \text{ou} \quad 3\beta = \alpha + 1.$$

Le dénominateur commun devient

$$\alpha(\alpha + 1) + \beta^2 + \beta = 3\beta(3\beta - 1) + \beta^2 + \beta = 10\beta^2 - 2\beta.$$

Il est minimum pour $\beta = \frac{1}{10}$; donc $\alpha = -\frac{7}{10}$.

Ces valeurs des paramètres α et β conviennent, car elles n'annulent pas $\alpha^2 + \beta^2 + \alpha + \beta$. Les valeurs correspondantes de x et de y sont

$$x = -2; \quad y = -4.$$

II. Soit $x = 2y$. — On trouve d'une façon analogue :

$$\alpha = -\frac{2}{5}; \quad \beta = -\frac{1}{5}; \quad \text{puis} \quad x = -2; \quad y = -1.$$

985. *Déterminer* m *pour que l'équation* $x^2 - 2mx + 4 = 0$ *admette deux racines vérifiant l'inégalité* $x^2 - 3x + 2 > 0$.

Les racines de $x^2 - 3x + 2$ sont 1 et 2; soient x'' et x' les racines de l'équation $f(x) = x^2 - 2mx + 4 = 0$, dans le cas où elle en admet. Les nombres x'' et x' doivent donner à $x^2 - 3x + 2$ le signe du coefficient de x^2, ce qui a lieu dans trois cas.

1er cas : On a l'ordre x'', x', 1, 2. — Les conditions sont :

$$\begin{array}{ll} \rho = m^2 - 4 > 0; & m < -2 \quad \text{ou} \quad m > 2; \\ f(1) = -2m + 5 > 0; & m < \frac{5}{2}; \\ 1 > m; & m < 1. \end{array}$$

Ces trois inéquations sont vérifiées si $m < -2$.

2e cas : On a l'ordre 1, 2, x'', x'. — Les conditions sont :

$$\begin{array}{ll} \rho = m^2 - 4 > 0; & m < -2 \quad \text{ou} \quad m > 2; \\ f(2) = -4m + 8 > 0; & m < 2; \\ 2 < m; & m > 2. \end{array}$$

Ce système n'a pas de solution.

3e cas : On a l'ordre x'', 1, 2, x'. — Les conditions sont :

$$f(1) = -2m + 5 < 0; \quad f(2) = -4m + 8 < 0.$$

Ces deux inéquations sont vérifiées si $m > \frac{5}{2}$.

Cas particuliers. — Si $m = -2$, on a $x'' = x' = -2$; ces racines conviennent, car elles rendent $x^2 - 3x + 2$ positif.

Si $m = 2$, on a $x' = x'' = 2$; ces racines ne conviennent pas.

Rép. $m \leqslant -2$; $m > \frac{5}{2}$.

Autre solution. — Pour que l'équation $x^2 - 2mx + 4 = 0$ admette deux racines x' et x'' vérifiant l'inégalité $x^2 - 3x + 2 > 0$, il faut et il suffit que l'on ait :

1° $\rho = m^2 - 4 \geqslant 0$; ce qui exige $m \leqslant -2$ ou $m \geqslant 2$.

2° $(x'^2 - 3x' + 2) + (x''^2 - 3x'' + 2)$

$$= (x'^2 + x''^2) - 3(x' + x'') + 4 > 0$$

ou $(4m^2 - 8) - 6m + 4 = 2(2m^2 - 3m - 2) > 0$;

ce qui exige $m < -0{,}5$ ou $m > 2$.

3° $(x'^2 - 3x' + 2)(x''^2 - 3x'' + 2) = 4(2m^2 - 9m + 10) > 0$;

ce qui exige $m < 2$ ou $m > 2{,}5$.

Ces trois inéquations sont vérifiées si l'on a

$$m \leqslant -2 \quad \text{ou} \quad m > \frac{5}{2}.$$

986. *Déterminer* m *pour que l'équation* $(2m-1)x^2 - 2x(m-2) + 3m = 0$ *admette deux racines vérifiant l'inégalité* $x^2 - 4 < 0$.

L'équation doit admettre deux racines x'' et x', comprises entre les racines -2 et $+2$ de $x^2 - 4$. On doit donc avoir l'ordre $-2, x'', x', 2$. Les conditions sont :

$\rho = -5m^2 - m + 4 \geqslant 0$; $\quad -1 \leqslant m \leqslant \frac{4}{5}$;

$(2m-1)f(-2) = (2m-1)(15m-12) > 0$; $\quad m < \frac{1}{2}$ ou $m > \frac{4}{5}$;

$(2m-1)f(2) = (2m-1)(7m+4) > 0$; $\quad m < -\frac{4}{7}$ ou $m > \frac{1}{2}$;

$-2 < \frac{m-2}{2m-1}$ ou $\frac{5m-4}{2m-1} > 0$; $\quad m < \frac{1}{2}$ ou $m > \frac{4}{5}$;

$2 > \frac{m-2}{2m-1}$ ou $\frac{-3m}{2m-1} < 0$; $\quad m < 0$ ou $m > \frac{1}{2}$.

Ces inéquations sont vérifiées si l'on a $-1 \leqslant m < -\frac{4}{7}$.

987. *Déterminer les valeurs non nulles de* m *pour lesquelles l'équation*

$$f(x) = (2m+1)x^2 - (m-1)x + 1 = 0 \qquad (1)$$

admet deux racines distinctes vérifiant l'inégalité $mx^2 - x > 0$.

Les racines de $mx^2 - x$ sont 0 et $\frac{1}{m}$; soient x'' et x' les racines de l'équation (1), dans le cas où elle en admet, et ρ son réalisant.

1re Partie : $m > 0$. — Les nombres x'' et x' doivent donner à $mx^2 - x$ le signe de m, ce qui a lieu dans trois cas.

1er *cas* : On a l'ordre x'', x', 0, $\frac{1}{m}$. — Les conditions sont :

$$\rho = m^2 - 10m - 3 > 0; \quad m < 5 - \sqrt{28} \quad \text{ou} \quad m > 5 + \sqrt{28};$$

$$(2m + 1)f(0) = 2m + 1 > 0; \quad m > -\frac{1}{2};$$

$$0 > \frac{m-1}{2(2m+1)}; \qquad -\frac{1}{2} < m < 1.$$

Ce système n'a pas de solution, m étant supposé positif.

2e *cas* : On a l'ordre 0, $\frac{1}{m}$, x'', x'. — Les conditions sont :

$$\rho = m^2 - 10m - 3 > 0; \quad m < 5 - \sqrt{28} \quad \text{ou} \quad m > 5 + \sqrt{28};$$

$$(2m + 1)f\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{(2m+1)(3m+1)}{m^2} > 0; \quad m < -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad m > -\frac{1}{3};$$

$\frac{1}{m} < \frac{m-1}{2(2m+1)}$ ou $\frac{m^2 - 5m - 2}{m(2m+1)} > 0$; cette dernière inégalité exige

$$m < -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{5 - \sqrt{33}}{2} < m < 0 \quad \text{ou} \quad m > \frac{5 + \sqrt{33}}{2}.$$

Les solutions de ce système sont, m étant positif,

$$m > 5 + \sqrt{28}.$$

3e *cas* : On a l'ordre x'', 0, $\frac{1}{m}$, x'. — Les conditions sont :

$$(2m + 1)f(0) < 0; \quad (2m + 1)f\left(\frac{1}{m}\right) < 0.$$

Ce système n'a pas de solution quand m est positif.

2e PARTIE : $m < 0$. — Les nombres x'' et x' doivent donner à $mx^2 - x$ le signe contraire de m, ce qui a lieu quand on a l'ordre $\frac{1}{m}$, x'', x', 0.

Pour qu'il en soit ainsi, on doit avoir :

$$\rho > 0; \quad (2m + 1)f(0) > 0; \quad (2m + 1)f\left(\frac{1}{m}\right) > 0;$$

$$0 > \frac{m-1}{2(2m+1)}; \quad \frac{1}{m} < \frac{m-1}{2(m+1)}.$$

Ce système est vérifié quand on a

$$-\frac{1}{3} < m < 5 - \sqrt{28}.$$

Rép. $-\frac{1}{3} < m < 5 - \sqrt{28}$; $m > 5 + \sqrt{28}$.

988. *Résoudre le système*

$$x^2 - 2mx + m + 2 = 0; \quad x^2 - 1 \geqslant 0.$$

La deuxième relation exige $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 1$.

I. L'équation admet une racine acceptable si -1 et 1 séparent ses racines; donc, si l'on a

$$f(-1) \times f(1) = (3m + 3)(-m + 3) < 0,$$

ce qui exige $m < -1$ ou $m > 3$.

Si $m < -1$, on a $f(-1) < 0$ et $f(1) > 0$. On a donc le classement x'', -1, x', 1, et la plus petite racine de l'équation convient.

Si $m > 3$, on a $f(-1) > 0$ et $f(1) < 0$. On a donc le classement -1, x'', 1, x', et la plus grande racine de l'équation convient.

II. L'équation admet deux racines acceptables :

1° Si -1 et 1 sont compris entre ses racines; donc si on a :

$$f(-1) = 3m + 3 < 0; \quad f(1) = -m + 3 < 0.$$

Ces relations ne sont vérifiées par aucune valeur de m.

2° Si -1 et 1 sont inférieurs à ses racines; donc si on a :

$$\rho = m^2 - m - 2 > 0; \quad f(1) = -m + 3 > 0; \quad 1 < m.$$

Ces relations sont vérifiées par $2 < m < 3$.

3° Si -1 et 1 sont supérieurs à ses racines; donc si on a :

$$\rho = m^2 - m - 2 > 0; \quad f(-1) = 3m + 3 > 0; \quad -1 > m.$$

Ces relations ne sont vérifiées par aucune valeur de m.

III. Si $m = -1$, on a $x' = x'' = -1$.
Si $m = 2$, on a $x' = x'' = 2$.
Si $m = 3$, on a $x'' = 1$; $x' = 5$.

989. *Résoudre le système*

$$x^2 + 6x + m + 6 = 0; \quad x^2 - m^2 \geqslant 0.$$

Cet exercice est analogue au précédent, mais nous le résoudrons par une autre méthode. Comparons les nombres $-m$ et m aux racines x' et x'' de l'équation, en observant que :

1° $-m > m$, si $m < 0$; $-m < m$, si $m > 0$.

2° Une racine de l'équation convient quand elle n'est pas comprise entre $-m$ et m.

Les fonctions à étudier sont :

$$\rho = 3 - m; \quad \text{sa racine est } 3.$$
$$f(-m) = m^2 - 5m + 6; \quad \text{ses racines sont } 2 \text{ et } 3.$$
$$f(m) = m^2 + 7m + 6; \quad \text{ses racines sont } -1 \text{ et } -6.$$
$$-m + \frac{b}{2a} = -m + 3; \quad \text{sa racine est } 3.$$
$$m + \frac{b}{2a} = m + 3; \quad \text{sa racine est } -3.$$

On peut dresser alors le tableau suivant :

m	R	$f(-m)$	$-m+3$	$f(m)$	$m+3$	CLASSEMENT	CONCLUSIONS
	+	+	+	+	—	$m < x'' < x' < -m$	
—6	+	+	+	0	—	$m = x'' < x' < -m$	x'' convient
	+	+	+	—	—	$x'' < m < x' < -m$	»
—3	+	+	+	—	0	»	»
	+	+	+	—	+	»	»
—1	+	+	+	0	+	$x'' < x' = m < -m$	x' et x'' conviennent
	+	+	+	+	+	$x'' < x' < m < -m$	»
0	+	+	+	+	+	$x'' < x' < m = -m$	»
	+	+	+	+	+	$x'' < x' < -m < m$	»
2	+	0	+	+	+	$x'' < x' = -m < m$	»
	+	—	+	+	+	$x'' < -m < x' < m$	x'' convient
3	0	0	0	+	+	$x' = x'' = -m < m$	x' et x'' conviennent
	—	+	—	+	+	Pas de racine.	

Remarque. — En portant les x en abscisses et les m en ordonnées, on peut représenter l'équation par une parabole et la fonction $x^2 - m^2$ par les bissectrices des angles des axes. Après avoir déterminé les régions positive et négative de chacune de ces droites, on voit qu'à chaque point de la parabole situé dans celui des angles des bissectrices qui est traversé par le demi-axe Ox', ou situé sur une bissectrice, correspond une solution du système. De là, on peut déduire les conclusions du tableau précédent.

990. *Si* m *est compris entre* — 1 *et* + 1, *résoudre l'inéquation*

$$(m-1)x^2 - (m-1)x - 2m > 0.$$

On a $\rho = (m-1)(9m-1).$

Si $-1 < m < \frac{1}{9}$, le trinôme a deux racines distinctes x'' et x', et le coefficient de x^2 est négatif. On doit avoir $x'' < x < x'$.

Si $m = \frac{1}{9}$, le trinôme a une racine double et le coefficient de x^2 est négatif. Il n'y a pas de solution.

Si $\frac{1}{9} < m < 1$, le trinôme n'a pas de racine et le coefficient de x^2 est négatif. Il n'y a pas de solution.

991. *Résoudre l'inéquation*

$$\frac{x^2 - 2x + m - 1}{x^2 - 1} \geqslant 0.$$

Le réalisant du numérateur est $2 - m$.

a) Si $m \geqslant 2$, le numérateur est positif ou nul, quel que soit x, et on doit avoir $x^2 - 1 > 0$, ce qui exige

$$x < -1 \quad \text{ou} \quad x > 1.$$

b) Si $m < 2$, le numérateur, que nous désignons par $f(x)$, a deux racines, x' et x'' $(x'' < x')$. On a

$$f(-1) = m + 2; \quad f(1) = m - 2.$$

Si $-2 < m < 2$, on a le classement

$$-1 \qquad x'' \qquad 1 \qquad x'$$

et les réponses sont $x < -1$; $x'' \leqslant x < 1$; $x \geqslant x'$.

Si $m = -2$, l'inéquation devient

$$\frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-1)} \geqslant 0,$$

et on doit avoir $x < -1$, $-1 < x < 1$ ou $x \geqslant 3$.

Si $m < -2$, on a le classement

$$x'' \qquad -1 \qquad 1 \qquad x'$$

et les solutions sont $x \leqslant x''$; $-1 < x < 1$; $x \geqslant x'$.

992. *Quelles valeurs faut-il donner à* m *pour que l'expression* $\frac{x + m}{x^2 + 1}$ *représente un sinus?*

On doit avoir simultanément

$$\frac{x+m}{x^2+1} \geqslant -1 \quad \text{et} \quad \frac{x+m}{x^2+1} \leqslant 1$$

ou, après transformation,

$$f(x) = x^2 + x + m + 1 \geqslant 0 \tag{1}$$

et

$$\varphi(x) = x^2 - x - m + 1 \geqslant 0. \tag{2}$$

Le réalisant du trinôme $f(x)$ est $\rho = -4m - 3$; celui du trinôme $\varphi(x)$ est $\rho' = 4m - 3$.

1° Si $m < -\frac{3}{4}$, on a $\rho > 0$ et $\rho' < 0$; $\varphi(x)$ est toujours positif et $f(x)$ a deux racines distinctes x'' et x'. On doit avoir

$$x \leqslant x'' \quad \text{ou} \quad x \geqslant x'.$$

2° Si $-\frac{3}{4} \leqslant m \leqslant \frac{3}{4}$, on a $\rho \leqslant 0$ et $\rho' \leqslant 0$; les inéquations (1) et (2) sont vérifiées, quel que soit x.

3° Si $m > \frac{3}{4}$, on a $\rho < 0$ et $\rho' > 0$; $f(x)$ est toujours positif et $\varphi(x)$ a deux racines distinctes x'' et x'. On doit avoir

$$x \leqslant x'' \quad \text{ou} \quad x \geqslant x'.$$

993. *Résoudre le système*

$$\mathrm{mx^2 - (m - 1)x + m > 0; \quad mx + 1 > 0.}$$

Pour classer les racines de $f(x) = mx^2 - (m-1)x + m$ et de $mx + 1$, il faut considérer les fonctions suivantes :

$$\rho = (m-1)^2 - 4m^2 = (m+1)(1-3m).$$

$$mf\left(-\frac{1}{m}\right) = m(m+1), \text{ si } m \neq 0.$$

$$-\frac{1}{m} + \frac{b}{2a} = \frac{-m-1}{2m} \quad \text{qui a le signe de} \quad -m(m+1).$$

1° Si $m \leqslant -1$, la première inéquation et le système sont impossibles.

2° Si $-1 < m < 0$, $f(x)$ admet deux racines x'' et x'. La première inéquation exige $x'' < x < x'$ et la seconde $x < -\frac{1}{m}$.

Comme on a le classement x'', $-\frac{1}{m}$, x', on doit avoir $x'' < x < -\frac{1}{m}$.

3° Si $m = 0$, le système se réduit à $x > 0$.

4° Si $0 < m < \frac{1}{3}$, $f(x)$ admet deux racines x'' et x'. La première inéquation exige $x < x''$ ou $x > x'$, et la seconde $x > -\frac{1}{m}$.

Comme on a le classement $-\frac{1}{m}$, x'', x', on doit avoir

$$-\frac{1}{m} < x < x'' \quad \text{ou} \quad x > x'.$$

5° Si $m > \frac{1}{3}$, il suffit d'avoir $x > -\frac{1}{m}$, car la première inéquation est vérifiée, quel que soit x.

994. *L'inégalité* $\mathrm{b^2x^2 + x(b^2 + c^2 - a^2) + c^2 > 0}$ *est vérifiée, quel que soit* x, *si* a, b, c *sont les côtés d'un triangle.*

Le coefficient de x^2 est positif. Il suffit donc d'avoir $\rho < 0$. Mais le réalisant est

$$(b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 = (b^2 + c^2 - a^2 + 2bc)(b^2 + c^2 - a^2 - 2bc)$$
$$= (b + c + a)(b + c - a)(b - c + a)(b - c - a).$$

L'inégalité $\rho < 0$ pourra donc s'écrire

$$(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) > 0,$$

et elle est exacte, car a, b, c sont les côtés d'un triangle.

995. *Résoudre les inéquations :*

1° $\dfrac{m}{x} - \dfrac{1}{x-1} > 1.$

Cette inéquation peut s'écrire

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{x^2 - mx + m}{x(x-1)} < 0.$$

Les racines du dénominateur sont 0 et 1. On devra comparer ces nombres aux racines x'' et x' du numérateur, si celui-ci en admet. On a

$$f(0) = m \quad \text{et} \quad f(1) = 1.$$

a) Si $m < 0$, on a $f(0) < 0$. Donc $f(x)$ a deux racines distinctes et on a le classement

$$x'' \quad 0 \quad x' \quad 1.$$

L'inéquation est vérifiée si

$$x'' < x < 0 \quad \text{ou} \quad x' < x < 1.$$

b) Si $m = 0$, l'inéquation devient

$$\frac{x}{x-1} < 0 \quad \text{ou} \quad 0 < x < 1.$$

c) Si $m > 0$, formons le réalisant de $f(x)$. Il est $\rho = m^2 - 4m$ et il a le signe de $m - 4$.

Si $0 < m < 4$, $f(x)$ n'a pas de racine et est toujours positif. Il suffit d'avoir

$$x(x-1) < 0 \quad \text{ou} \quad 0 < x < 1.$$

Si $m = 4$, l'inéquation devient

$$\frac{(x-2)^2}{x(x-1)} < 0 \quad \text{ou} \quad 0 < x < 1.$$

Si $m > 4$, $f(x)$ a deux racines x'' et x'; 0 et 1 sont extérieurs à ces racines, car $f(0)$ et $f(1)$ sont positifs. La demi-somme des racines est $\dfrac{m}{2}$, qui est supérieur à 2. On a donc le classement

$$0 \quad 1 \quad x'' \quad x'.$$

L'inéquation est vérifiée, si on a

$$0 < x < 1 \quad \text{ou} \quad x'' < x < x'.$$

2° $\dfrac{2m-1}{x+m} - \dfrac{m+1}{x-m} > \dfrac{2m+4m^2}{x^2-m^2} - 1.$

L'inéquation peut s'écrire

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{x^2 + x(m-2) - 2m - 8m^2}{x^2 - m^2} > 0.$$

Le numérateur admet toujours deux racines distinctes x'' et x', car son réalisant est $(m+2)^2 + 32m^2$. Les racines du dénominateur sont $\pm m$.

Le nombre $-m$ est compris entre x'' et x', si $m \neq 0$, car on a

$$f(-m) = -8m^2.$$

La position du nombre m par rapport à x'' et x' dépend du signe de

$$f(m) = -2m(3m+2).$$

a) Si $m < -\dfrac{2}{3}$, on a le classement

$$x'' \quad m \quad -m \quad x'$$

et les valeurs acceptables de x sont

$$x < x''; \quad m < x < -m; \quad x > x'.$$

b) Si $m = -\dfrac{2}{3}$, l'inéquation devient $\dfrac{(3x-10)(3x+2)}{(3x-2)(3x+2)} > 0$ et les valeurs cherchées de x sont

$$x < -\frac{2}{3}; \quad -\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}; \quad x > \frac{10}{3}.$$

c) Si $-\dfrac{2}{3} < m < 0$, on a le classement

$$m \quad x'' \quad -m \quad x'$$

et les solutions sont

$$x < m; \quad x'' < x < -m; \quad x > x'.$$

d) Si $m = 0$, l'inéquation devient $\dfrac{x^2-2x}{x^2} > 0$, ce qui exige

$$x < 0 \quad \text{ou} \quad x > 2.$$

e) Si $m > 0$, on a le classement

$$x'' \quad -m \quad m \quad x'$$

et l'inégalité est vérifiée, si on a

$$x < x''; \quad -m < x < m; \quad x > x'.$$

996. *A quelles conditions doivent satisfaire* a *et* b *pour que la fraction* $\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+1}$ *soit comprise entre* -2 et $+2$, *quel que soit* x ?

On doit avoir, quel que soit x,

$$\frac{x^2+ax+b}{x^2+1} > -2 \quad \text{ou} \quad 3x^2+ax+b+2>0; \qquad (1)$$

$$\frac{x^2+ax+b}{x^2+1} < 2 \quad \text{ou} \quad -x^2+ax+b-2<0. \qquad (2)$$

Ces inéquations (1) et (2) exigent

$$a^2-12(b+2)<0 \quad \text{et} \quad a^2+4(b-2)<0. \qquad (3)$$

a) Les inégalités (3) peuvent s'écrire

$$a^2<12(b+2) \quad \text{et} \quad a^2<-4(b-2).$$

Comme a^2 est positif ou nul, on devra avoir

$$12(b+2)>0 \quad \text{ou} \quad b>-2,$$

et

$$-4(b-2)>0 \quad \text{ou} \quad b<2.$$

A toute valeur de b comprise entre -2 et 2 correspond une infinité de valeurs de a.

b) Les inégalités (3) peuvent s'écrire aussi

$$b>\frac{a^2-24}{12} \quad \text{et} \quad b<\frac{8-a^2}{4}.$$

Ces inégalités ne sont compatibles que si on a

$$\frac{a^2-24}{12}<\frac{8-a^2}{4} \quad \text{ou} \quad a^2-12<0.$$

Les valeurs de a restent donc comprises entre $-2\sqrt{3}$ et $2\sqrt{3}$.

Interprétation graphique. — Tracer les paraboles

$$a^2-12(b+2)=0 \quad \text{et} \quad a^2+4(b-2)=0$$

ou

$$b=\frac{a^2}{12}-2 \quad \text{et} \quad b=-\frac{a^2}{4}+2, \qquad (4) \text{ et } (5)$$

en portant les a en abscisses et les b en ordonnées. Le point $(0,-2)$ représente le minimum de (4) et le point $(0, 2)$ le maximum de (5). Les deux paraboles se coupent aux points

$$(-2\sqrt{3}, -1) \quad \text{et} \quad (2\sqrt{3}, -1).$$

Déterminer ensuite les régions positive et négative de chaque parabole. Les points dont les coordonnées sont des valeurs acceptables pour a et b, sont les points situés dans la partie du plan commune aux deux paraboles.

997. *Résoudre la double inéquation*

$$x-\frac{b}{x}<a<x+\frac{b}{x},$$

a *et* b *étant positifs* (*E. M. Armes spéciales*, 1905).

L'inéquation $x-\dfrac{b}{x}<a$ peut s'écrire $\dfrac{x^2-ax-b}{x}<0.$ (1)

Le trinôme $x^2 - ax - b$ a deux racines

$$\alpha = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 + 4b}) \text{ et } \beta = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 4b}).$$

L'inéquation $x + \frac{b}{x} > a$ peut s'écrire $\frac{x^2 - ax + b}{x} > 0.$ (2)

Le réalisant du trinôme $f(x) = x^2 - ax + b$ est $a^2 - 4b$.

a) Si $a^2 > 4b$, $f(x)$ a deux racines

$$\gamma = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - 4b}) \quad \text{et} \quad \delta = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4b}).$$

On a évidemment le classement

$$\alpha \quad 0 \quad \gamma \quad \delta \quad \beta.$$

Les inéquations (1) et (2) exigent respectivement

$$x < \alpha \text{ ou } 0 < x < \beta; \quad 0 < x < \gamma \text{ ou } x > \delta.$$

En résumé, on doit avoir

$$0 < x < \gamma \quad \text{ou} \quad \delta < x < \beta.$$

b) Si $a^2 = 4b$, on a $\gamma = \delta = \frac{a}{2}$ et le classement devient

$$\alpha \quad 0 \quad \frac{a}{2} \quad \beta.$$

L'inéquation (2) exige dans ce cas

$$0 < x < \frac{a}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{2} < x.$$

Les solutions du système sont

$$0 < x < \frac{a}{2}; \quad \frac{a}{2} < x < \beta.$$

c) Si $a^2 < 4b$, l'inéquation (2) exige $x > 0$ et les solutions du système sont $0 < x < \beta$.

998. *Résoudre l'inéquation* $\frac{x(y-1)}{y-2} > 1$ *par rapport à* y (*E. M. Armes spéciales*, 1906).

L'inéquation peut s'écrire

$$\frac{x(y-1)-(y-2)}{y-2} > 0 \quad \text{ou} \quad (y-2)[y(x-1)-(x-2)] > 0,$$

avec $y \neq 2$. Le premier membre de cette inéquation est un trinôme du second degré en y dont les racines sont 2 et $\frac{x-2}{x-1}$, pourvu que l'on ait $x \neq 1$.

Comparons ces racines. On a

$$\frac{x-2}{x-1} > 2 \quad \text{ou} \quad \frac{-x}{x-1} > 0, \quad \text{si} \quad 0 < x < 1.$$

On a de même

$$\frac{x-2}{x-1} < 2 \quad \text{pour} \quad x < 0 \quad \text{ou} \quad x > 1.$$

1° Si $x < 0$, le coefficient de y^2 est négatif et on doit avoir

$$\frac{x-2}{x-1} < y < 2.$$

2° Si $x = 0$, l'inéquation proposée n'a pas de solution.

3° Si $0 < x < 1$, le coefficient de y^2 est négatif et on doit avoir

$$2 < y < \frac{x-2}{x-1}.$$

4° Si $x = 1$, l'inéquation devient $\dfrac{1}{y-2} > 0$ ou $y > 2$.

5° Si $x > 1$, le coefficient de y^2 est positif et on doit avoir

$$y < \frac{x-2}{x-1} \quad \text{ou} \quad y > 2.$$

Pour l'interprétation graphique, tracer la droite $y - 2 = 0$ et l'hyperbole $y(x-1) - (x-2) = 0$, déterminer les régions positive et négative pour chaque ligne, puis hachurer les portions du plan qui font partie des deux régions positives ou des deux régions négatives.

999. *Chercher les limites de* x *et de* y, *si*

$$\frac{y}{x-1} > \frac{y-x}{y}$$

et si y *ne prend que des valeurs négatives* (*E. M. Armes spéciales*, 1910).

L'inéquation peut s'écrire

$$\frac{y}{x-1} - \frac{y-x}{y} > 0 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2 - x(y+1) + y^2 + y}{y(x-1)} > 0.$$

Le numérateur est un trinôme du second degré en x dont le réalisant est

$$(y+1)^2 - 4(y^2+y) = (y+1)(1-3y).$$

1° Si $y < -1$, le numérateur est toujours positif et on doit avoir

$$x - 1 < 0 \quad \text{ou} \quad x < 1.$$

2° Si $y = -1$, l'inéquation devient

$$\frac{x^2}{1-x} > 0,$$

ce qui exige $x < 0$ ou $0 < x < 1$.

3° Si $-1 < y < 0$, le numérateur admet deux racines α et β ($\alpha < \beta$), de signes contraires, car leur produit $y^2 + y = y(y+1)$ est négatif. Le nombre 1 est extérieur (et par suite, supérieur) à ces racines, car, en remplaçant dans le numérateur x par 1, on trouve y^2 qui est positif. On a donc le classement $\alpha < \beta < 1$.

La fraction $\dfrac{x^2 - x(y+1) + y^2 + y}{x-1}$ sera négative, si on a

$$x < \alpha \quad \text{ou} \quad \beta < x < 1.$$

Pour l'interprétation graphique, tracer les droites $y = 0$, $x - 1 = 0$ et l'ellipse $x^2 - x(y+1) + y^2 + y = 0$, en remarquant que cette ellipse est tangente aux droites $x - 1 = 0$ et $y + 1 = 0$. Les points dont les coordonnées vérifient l'inéquation forment une région délimitée par la partie négative de l'axe $x'x$, par l'ellipse et par la partie de la droite $x - 1 = 0$ située en-dessous de l'axe $x'x$. Pour suivre la discussion point par point, on peut considérer la droite $y = b$ et suivre son déplacement quand b croît de $-\infty$ à -1, puis de -1 à 0.

1000. *Résoudre les inéquations :*

$$x \pm \sqrt{x} > 0; \quad x \pm \sqrt{x^2} > 0; \quad x \pm \sqrt[3]{x^3} > 0; \quad x + 2 < \sqrt[3]{x^3 + 8}.$$

1° $x + \sqrt{x} > 0$. — Le premier membre n'est défini que si on a $x \geqslant 0$. Il est positif si $x > 0$ et dans ce cas seulement.

2° $x - \sqrt{x} > 0$. — Le premier membre n'est défini que si on a $x \geqslant 0$. En supposant cette condition réalisée, on a successivement $x > \sqrt{x}$; $x^2 > x$; $x^2 - x > 0$.

On doit avoir $x > 1$.

3° $x + \sqrt{x^2} > 0$. — Le premier membre est défini, quel que soit x.

Si $x \leqslant 0$, on a $\sqrt{x^2} = -x$ et l'inéquation devient $0 > 0$; elle est impossible.

Si $x > 0$, on a $\sqrt{x^2} = x$ et l'inéquation devient $2x > 0$; elle est vérifiée quand $x > 0$.

4° $x - \sqrt{x^2} > 0$. — Si $x \leqslant 0$, l'inéquation devient $2x > 0$ et elle est impossible; si $x > 0$, l'inéquation se réduit à $0 > 0$ et elle est encore impossible.

5° $x \pm \sqrt[3]{x^3} > 0$. — On a $\sqrt[3]{x^3} = x$, quel que soit x.

L'inéquation $x + \sqrt[3]{x^3} > 0$ peut s'écrire $2x > 0$ ou $x > 0$.

L'inéquation $x - \sqrt[3]{x^3}$ peut s'écrire $0 > 0$; elle est impossible.

6° $x + 2 < \sqrt[3]{x^3 + 8}$. — Le radical est défini, quel que soit x; d'autre part, le sens d'une inégalité ne change pas quand on élève ses deux membres au cube.

L'inégalité proposée est donc équivalente à

$$(x+2)^3 < x^3 + 8 \quad \text{ou} \quad 6x(x+2) < 0.$$

L'inéquation est vérifiée quand on a $-2 < x < 0$.

1001. *Résoudre l'inéquation* (*E. M. Armes spéciales*, 1913)

$$\frac{\sqrt{x^2+4}}{x+2} < \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}.$$

Remarquons que $\sqrt{x^2+1}$ et $\sqrt{x^2+4}$ sont toujours positifs et que les signes des deux membres sont ceux des binômes $x+1$ et $x+2$.

1° Si $x = -1$ ou -2, l'inéquation est absurde.

2° Si $-2 < x < -1$, le premier membre est positif et le second est négatif. L'inéquation est donc impossible.

3° Supposons $x < -2$. Les deux membres sont négatifs et l'élévation au carré donne

$$\frac{x^2+4}{(x+2)^2} > \frac{x^2+1}{(x+1)^2}$$

ou, après transformation,

$$x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) < 0.$$

On voit facilement que cette inégalité est vérifiée dès que $x < -2$.

4° Supposons $x > -1$. Les deux membres sont positifs et l'élévation au carré donne $\dfrac{x^2+4}{(x+2)^2} < \dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}$,

ou, après transformation,

$$x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) > 0.$$

Cette inégalité est vérifiée quand $-\sqrt{2} < x < 0$ ou $x > \sqrt{2}$. Mais comme $x > -1$, les valeurs à conserver sont

$$-1 < x < 0; \quad x > \sqrt{2}.$$

5° *En résumé*, les valeurs de x qui conviennent sont

$$x < -2; \quad -1 < x < 0; \quad x > \sqrt{2}.$$

1002. *Résoudre l'inéquation*

$$\sqrt{x^2+x+1} > ax+1. \qquad (1)$$

Le premier membre est toujours défini et positif. Si a est différent de zéro, la racine du second membre est $\alpha = -\dfrac{1}{a}$.

Les valeurs de x qui rendent $ax+1$ négatif ou nul, sont des solutions de l'inéquation. Les valeurs de x qui rendent $ax+1$ positif, ne sont des solutions que si elles vérifient l'inéquation

$$f(x) = x^2(1-a^2) + x(1-2a) > 0, \qquad (2)$$

obtenue en élevant au carré les deux membres de l'inéquation donnée.

a) Le coefficient de x^2 est $1-a^2$. Il est positif pour $-1 < a < 1$; et négatif pour $a < -1$ ou $a > 1$.

b) Si $a \neq \pm 1$, les racines de $f(x) = 0$ sont 0 et $\beta = \dfrac{2a-1}{1-a^2}$.

β est positif pour $a < -1$ ou $\frac{1}{2} < a < 1$; nul pour $a = \frac{1}{2}$; et négatif pour $-1 < a < \frac{1}{2}$ ou $a > 1$.

c) $(1 - a^2)f(\alpha) = \frac{1}{a^2}(1 - a^2)(a^2 - a + 1)$; cette expression a le signe du coefficient de x^2.

Les valeurs remarquables de a sont $-1, 0, \frac{1}{2}, 1$; on aura donc neuf cas à examiner.

1° Si $a < -1$, on a le classement $0 < \alpha < \beta$.

$ax + 1$ est négatif ou nul pour $x \geqslant \alpha$; les valeurs de x inférieures à α qui vérifient (2) sont $0 < x < \alpha$. L'inéquation (1) est donc vérifiée pour $x > 0$.

2° Si $a = -1$, la réponse est encore $x > 0$.

3° Si $-1 < a < 0$, on a le classement $\beta < 0 < \alpha$.

$ax + 1$ est négatif ou nul pour $x \geqslant \alpha$; les valeurs de x inférieures à α qui vérifient (2) sont $x < \beta$ et $0 < x < \alpha$.

L'inéquation (1) est vérifiée pour $x < \beta$ ou $x > 0$.

4° Si $a = 0$, la réponse est $x < -1$ ou $x > 0$.

5° Si $0 < a < 0{,}5$, on a le classement $\alpha < \beta < 0$.

$ax + 1$ est négatif ou nul pour $x \leqslant \alpha$; les valeurs de x supérieures à α qui vérifient (2) sont $\alpha < x < \beta$ et $x > 0$.

L'inéquation (1) est vérifiée pour $x < \beta$ ou $x > 0$.

6° Si $a = 0{,}5$, la réponse est $x \neq 0$.

7° Si $0{,}5 < a < 1$, on a le classement $\alpha < 0 < \beta$.

$ax + 1$ est négatif ou nul pour $x \leqslant \alpha$; les valeurs de x supérieures à α qui vérifient (2) sont $\alpha < x < 0$ et $x > \beta$.

L'inéquation (1) est vérifiée pour $x < 0$ et $x > \beta$.

8° Si $a = 1$, la réponse est $x < 0$.

9° Si $a > 1$, on a le classement $\beta < \alpha < 0$.

$ax + 1$ est négatif ou nul pour $x \leqslant \alpha$; les valeurs de x supérieures à α qui vérifient (2) sont $\alpha < x < 0$.

L'inéquation (1) est vérifiée pour $x < 0$.

1003. *Trouver les limites de* n *pour que l'équation*

$$x^4 - 2(n - 2)x^2 + n(n - 3) = 0$$

ait : 1° *quatre racines*; 2° *deux racines* (*E. M. Armes simples*, 1907).

1° L'équation a quatre racines distinctes si on a :

$\rho = (n - 2)^2 - n(n - 3) = -n + 4 > 0$ ou $n < 4$:
$P = n(n - 3) > 0$; ce qui exige $n < 0$ ou $n > 3$;
$S = 2(n - 2) > 0$, ou $n > 2$.

En résumé, on doit avoir $3 < n < 4$.

2° L'équation a deux racines distinctes si
$$P = n(n-3) < 0, \quad \text{ou} \quad 0 < n < 3.$$

3° Si $n = 0$, l'équation devient $x^4 + 4x^2 = 0$; elle a une racine double nulle.

Si $n = 3$, l'équation devient $x^4 - 2x^2 = 0$; elle a une racine double nulle et deux racines distinctes $\pm\sqrt{2}$.

Si $n = 4$, l'équation devient $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$; elle a deux racines doubles $\pm\sqrt{2}$.

1004. *Combien, suivant les valeurs de* m, *l'équation*
$$\mathrm{m}x^4 - \mathrm{m}x^2 + \mathrm{m} + 1 = 0 \qquad (1)$$
a-t-elle de racines : 1° *comprises entre* -1 et $+1$; 2° *comprises entre* -1 *et* 3.

La résolvante de l'équation (1) est
$$f(y) = my^2 - my + m + 1 = 0. \qquad (2)$$

1° *Nombre des racines de l'équation* (1) *comprises entre* -1 *et* $+1$.

La condition $-1 < x < 1$ peut s'écrire $0 < y < 1$, en ne considérant pas, pour le moment, les racines nulles.

A toute racine de (2) comprise entre 0 et 1, correspondent deux racines distinctes de l'équation (1) comprises entre -1 et $+1$.

a) L'équation (1) a deux racines distinctes comprises entre -1 et $+1$, si on a
$$f(0) \times f(1) = (m+1)^2 < 0.$$
Cette inéquation n'est jamais vérifiée.

b) L'équation (1) a quatre racines distinctes comprises entre -1 et $+1$, si on a :
$$\rho = -m(3m+4) > 0, \quad \text{ou} \quad -\frac{4}{3} < m < 0;$$
$$mf(0) = m(m+1) > 0; \quad \text{ce qui exige} \quad m < -1 \quad \text{ou} \quad m > 0;$$
$$mf(1) = m(m+1) > 0; \quad \text{ce qui exige} \quad m < -1 \quad \text{ou} \quad m > 0;$$
$$0 < \frac{S}{2} < 1 \quad \text{ou} \quad 0 < \frac{m}{2m} < 1; \text{ ce qui exige } m \neq 0.$$

En résumé, on doit avoir $-\frac{4}{3} < m < -1$.

c) Si $m = -\frac{4}{3}$, l'équation a deux racines doubles $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ comprises entre -1 et $+1$.

Si $m = -1$, l'équation devient $x^4 - x^2 = 0$; elle a une racine double nulle comprise entre -1 et $+1$.

2° *Nombre des racines de l'équation* (1) *comprises entre* -1 *et* 3.

La condition $-1 < x < 3$ entraîne
$$0 < y < 9,$$
en ne considérant pas, pour le moment, les racines nulles.

Toute racine de l'équation (2) comprise entre 0 et 9 donne une ou deux racines de (1) comprises entre — 1 et 3. Elle en donne deux, si elle est comprise entre 0 et 1; une, si elle est comprise entre 1 et 9 ou égale à 1.

a) L'équation (2) a deux racines comprises entre 0 et 1, si on a (voir 1°)

$$-\frac{4}{3} < m < -1.$$

Pour ces valeurs, l'équation (1) a quatre racines comprises entre — 1 et 3.

b) Une seule racine de l'équation (2) est comprise entre 0 et 1. — Cela suppose $$f(0) \times f(1) < 0.$$
Cette inéquation n'est jamais vérifiée (voir 1°). Le cas envisagé ne peut donc se présenter.

c) L'une des racines de (2) est comprise entre 1 et 9; l'autre est inférieure à zéro ou supérieure à 9. — Cela suppose d'abord

$$f(1) \times f(9) = (m + 1)(73m + 1) < 0$$

ou $$-1 < m < -\frac{1}{73}.$$

Pour ces valeurs de m, on a $mf(0) = m(m + 1) < 0$ et l'autre racine de (2) est inférieure à zéro.
Dans ce cas, l'équation (1) a une racine comprise entre — 1 et 3; cette racine est positive.

d) Les deux racines de l'équation (2) sont comprises entre 1 et 9, si

$$\rho > 0; \quad mf(1) > 0; \quad mf(9) > 0; \quad 1 < \frac{S}{2} = \frac{1}{2} < 9.$$

Les deux dernières relations ne sont jamais vérifiées. Le cas envisagé ne peut donc se présenter.

e) Si $m = -\frac{4}{3}$, l'équation (1) a deux racines doubles $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ comprises entre — 1 et 9.

Si $m = -1$, l'équation (1) devient $x^4 - x^2 = 0$. La racine double nulle et la racine 1 sont comprises entre — 1 et 9.

Si $m = -\frac{1}{73}$, l'équation (1) devient $x^4 - x^2 - 72 = 0$. Ses racines sont ± 3. La racine 3 est comprise entre — 1 et 9.

1005. *Classer par ordre de grandeur les nombres* — 1 *et* 2, *et les racines des équations*

$$1° \; x^4 - 10x^2 + 18 = 0 \qquad 2° \; x^4 - 6x^2 - 6 = 0$$

sans résoudre celles-ci.

1° La résolvante de l'équation $x^4 - 10x^2 + 18 = 0$ est

$$f(y) = y^2 - 10y + 18 = 0.$$

On a $f(1) = 9 > 0$; $f(4) = -6 < 0$.

La résolvante admet deux racines et on a le classement

$$1 \quad y'' \quad 4 \quad y'.$$

Il en résulte que on a

$$-\sqrt{y'} \quad -\sqrt{y''} \quad -1 \quad \sqrt{y''} \quad 2 \quad \sqrt{y'}.$$

2° La résolvante de l'équation $x^4 - 6x^2 - 6 = 0$ est

$$f(y) = y^2 - 6y - 6 = 0.$$

La résolvante admet évidemment deux racines de signes contraires et on a

$$f(1) = -11 < 0; \quad f(4) = -14 < 0.$$

Par suite, $\quad y'' \quad 0 \quad 1 \quad 4 \quad y'.$

L'équation bicarrée a deux racines opposées et on a l'ordre

$$-\sqrt{y'} \quad -1 \quad 2 \quad \sqrt{y'}.$$

1006. *Rechercher les systèmes de valeurs entières de* m *et* p, *telles que l'équation* $f(x) = mx^4 + 2(1 + p)x^2 + m + 3 = 0$ *n'ait que deux racines réelles, dont l'une soit comprise entre* 1 *et* 2 (*E. M. Armes simples*, 1911).

La résolvante $F(y) = my^2 + 2(1 + p)y + m + 3 = 0$ doit admettre deux racines de signes contraires placées dans l'ordre

$$y'' < 0 < 1 < y' < 4,$$

ce qui exige :

a) $P = \dfrac{m+3}{m} < 0$ ou $-3 < m < 0$.

Cette inéquation est vérifiée par $m = -2$ et $m = -1$.

b) $f(1)f(4) = (2m + 2p + 5)(17m + 8p + 11) < 0$.

Si $m = -2$, cette inéquation devient

$$(2p + 1)(8p - 23) < 0 \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{2} < p < \frac{23}{8}.$$

On a donc $p = 0$, 1 ou 2.

Si $m = -1$, l'inéquation devient

$$(2p + 3)(8p - 6) < 0 \quad \text{ou} \quad -\frac{3}{2} < p < \frac{3}{4}.$$

On a donc $p = -1$ ou 0.

1007. *Quelles valeurs faut-il donner à* m *pour que l'équation*

$$mx^4 + (m - 2)x^3 - mx^2 + (m - 2)x + m = 0$$

ait deux racines distinctes et pas d'autres racines ?

La résolvante de cette équation réciproque est

$$f(y) = my^2 + (m - 2)y - 3m = 0.$$

Elle admet deux racines distinctes, quel que soit m, car

$$\rho = (m - 2)^2 + 12m^2.$$

A une racine y de la résolvante correspondent deux racines distinctes de l'équation

$$x + \frac{1}{x} = y \quad \text{ou} \quad x^2 - yx + 1 = 0,$$

et par suite, de l'équation réciproque, si $y^2 - 4 > 0$,

ce qui exige $\qquad y < -2 \quad \text{ou} \quad y > 2.$

L'équation réciproque aura donc deux racines distinctes et pas d'autres racines, si -2 et 2 séparent les racines de la résolvante, ce qui exige

$$f(-2)\,f(2) = (-m + 4)\,(3m - 4) < 0.$$

On devra avoir $\qquad m < \frac{4}{3} \quad \text{ou} \quad m > 4.$

REMARQUE. — Le raisonnement précédent est inapplicable pour $m = 0$, car, pour cette valeur de m, l'équation $f(y) = 0$ n'est plus du second degré. En faisant $m = 0$, l'équation réciproque devient $x^3 + x = 0$ et elle n'est vérifiée que pour $x = 0$.

1008. *Discuter l'équation :*

$$x^4 + 2mx^3 + (m + 8)x^2 + 2mx + 1 = 0. \qquad (1)$$

Posons $\qquad x + \frac{1}{x} = y \quad \text{ou} \quad x^2 - yx + 1 = 0. \qquad (2)$

La résolvante de l'équation réciproque donnée sera

$$f(y) = y^2 + 2my + m + 6 = 0. \qquad (3)$$

A une racine y de (3) ne correspondent des racines de (2) et de l'équation réciproque que si l'on a $y^2 - 4 \geqslant 0$; autrement dit, une racine de (3) n'est acceptable que si elle n'est pas comprise entre -2 et $+2$.

1° L'équation (1) aura deux racines distinctes, si -2 et 2 séparent les racines de l'équation (3), c'est-à-dire si

$$f(-2)\,f(2) = (-3m + 10)\,(5m + 10) < 0;$$

ce qui a lieu pour $m < -2$ et pour $m > \frac{10}{3}$.

2° L'équation (1) aura 4 racines distinctes dans les trois cas suivants :

a) -2 et 2 sont inférieurs aux racines de l'équation (3). — Pour cela, il faut :

$\rho = m^2 - m - 6 > 0$; ce qui exige $m < -2$ ou $m > 3$;

$f(2) = 5m + 10 > 0$ ou $m > -2$;

$2 < \frac{S}{2} = -m$ ou $m < -2$.

Ce système est impossible.

b) — 2 et 2 sont supérieurs aux racines de l'équation (3). — Pour cela, il faut :

$$\rho > 0; \quad \text{ce qui exige} \quad m < -2 \quad \text{ou} \quad m > 3;$$

$$f(-2) = -3m + 10 > 0 \quad \text{ou} \quad m < \frac{10}{3};$$

$$-2 > \frac{S}{2} = -m \quad \text{ou} \quad m > 2.$$

En résumé, on doit avoir $3 < m < \frac{10}{3}$.

c) — 2 et 2 sont compris entre les racines de l'équation (3). — Pour cela, il faut :

$$f(-2) < 0 \quad \text{ou} \quad m > \frac{10}{3}; \quad f(2) < 0 \quad \text{ou} \quad m < -2.$$

Ce système est impossible.

3° Si $m = -2$, on a $y' = y'' = 2$, et l'équation (1) admet une racine quadruple $x = 1$.

Si $m = 3$, on a $y' = y'' = -3$, et l'équation (1) a deux racines doubles $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Si $m = \frac{10}{3}$, on a $y'' = -\frac{14}{3}$ et $y' = -2$. A y'' correspondent deux racines distinctes de l'équation (1) et à y', une racine double $x = -1$.

1009. *Résoudre l'équation*

$$\frac{x^6 + x^4 + x^2 + 1}{(x^3 + x^2 + x + 1)^2} = a.$$

L'équation peut s'écrire

$$\frac{(x^4 + 1)(x^2 + 1)}{(x + 1)^2(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + 1}{(x + 1)^2(x^2 + 1)} = a$$

ou $$x^4(a - 1) + 2ax^3 + 2ax^2 + 2ax + (a - 1) = 0. \qquad (1)$$

C'est une équation réciproque. En posant

$$x + \frac{1}{x} = y \quad \text{ou} \quad x^2 - yx + 1 = 0, \qquad (2)$$

on obtient sa résolvante

$$f(y) = y^2(a - 1) + 2ay + 2 = 0. \qquad (3)$$

L'équation (3) admet toujours deux racines, car

$$\rho = a^2 - 2(a - 1) = a^2 - 2a + 2,$$

qui est positif, quel que soit a. A une de ces racines ne correspondent des racines de l'équation (2) et de l'équation (1), que si elle vérifie la relation $y^2 - 4 \geqslant 0$.

Cherchons donc combien l'équation (3) a de racines non comprises entre -2 et $+2$. On a

$$(a-1)f(-2) = -2(a-1);$$
$$(a-1)f(2) = (a-1)(8a-2).$$

1° Si $a > 1$, on a $(a-1)f(-2) < 0$ et $(a-1)f(2) > 0$. On a donc le classement

$$y'' \quad -2 \quad y' \quad 2.$$

La racine y'' donne deux valeurs pour x.

2° Si $\frac{1}{4} < a < 1$, on a $(a-1)f(-2) > 0$ et $(a-1)f(2) < 0$. Le classement est $-2 \quad y'' \quad 2 \quad y'$.

La racine y' donne deux valeurs pour x.

3° Si $a < \frac{1}{4}$, on a $(a-1)f(-2) > 0$ et $(a-1)f(2) > 0$. En comparant -2 et $+2$ à la demi-somme des racines de (3), qui est $\frac{a}{1-a}$, on trouve $-2 < \frac{a}{1-a} < 2$ quand $a < \frac{1}{4}$. Par suite, on a

$$-2 \quad y'' \quad y' \quad 2.$$

y' et y'' ne donnent pas de valeurs pour x.

4° Si $a = 1$, l'équation (3) n'est plus du second degré. L'équation (1) devient $x(x^2 + x + 1) = 0$; d'où $x = 0$.

Si $a = \frac{1}{4}$, l'équation (3) devient $3y^2 - 2y - 8 = 0$; d'où $y'' = -\frac{4}{3}$, $y' = 2$. La racine $y' = 2$ donne une racine double $x = 1$ de l'équation (1).

REMARQUE. — Le dénominateur de l'équation proposée ne s'annule que pour $x = -1$. Une racine de (1) est donc une racine de l'équation proposée, si elle est différente de -1. Pour cela, il suffit que -1 ne soit pas une racine de l'équation (2), ou encore que l'on ait $2 + y \neq 0$ ou $y \neq -2$. Or, on a $f(-2) = -2 \neq 0$. Il en résulte que les racines de l'équation (1) sont en même temps les racines de l'équation proposée.

1010. *Résoudre les équations :*

1° $\sqrt{1+x} - 2\sqrt[4]{1+x} = 1$.

L'équation peut s'écrire

$$2\sqrt[4]{1+x} = \sqrt{1+x} - 1.$$

On doit avoir $1 + x \geqslant 0$ ou $x \geqslant -1$; et $\sqrt{1+x} \geqslant 1$ ou $x \geqslant 0$. Élevons au carré. Il vient

$$4\sqrt{1+x} = 2 + x - 2\sqrt{1+x} \quad \text{ou} \quad 6\sqrt{1+x} = x + 2.$$

Le second membre est positif quand $x \geqslant 0$. Élevons une deuxième fois au carré.

$$36(1 + x) = (x + 2)^2 \quad \text{ou} \quad x^2 - 32x - 32 = 0.$$

D'où $x = 16 \pm 12\sqrt{2}$. La racine négative doit être écartée.

2° $\sqrt[3]{a + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{x}} = b.$

On doit avoir $x \geqslant 0$. Élevons au cube. Il vient

$$2a + 3b\sqrt[3]{a^2 - x} = b^3 \quad \text{ou} \quad 3b\sqrt[3]{a^2 - x} = b^3 - 2a. \tag{1}$$

Élevons une deuxième fois au cube.

$$27b^3(a^2 - x) = (b^3 - 2a)^3.$$

Si $b \neq 0$, on trouve

$$x = \frac{(a + b^3)^2(8a - b^3)}{27b^3},$$

qui est positif ou nul dans les trois cas suivants :

$$b(8a - b^3) > 0; \quad 8a - b^3 = 0; \quad a + b^3 = 0.$$

Si $b = 0$, l'équation (1) se réduit à $0.x = 2a$.

3° $\dfrac{x + 2a}{2x + a} = \sqrt[3]{\dfrac{a}{x}}.$

Multiplions les deux membres par $(2x + a)\sqrt[3]{x}$. L'équation devient

$$(x + 2a)\sqrt[3]{x} = (2x + a)\sqrt[3]{a}; \tag{1}$$

et, en élevant au cube, ce qui n'introduit aucune racine étrangère réelle,

$$(x + 2a)^3x = (2x + a)^3a.$$

On peut voir immédiatement que cette équation est vérifiée par $x = a$ et $x = -a$. Cela étant, faisons passer tous les termes de l'équation dans le premier membre, effectuons, réduisons et mettons $x^2 - a^2$ en évidence.

L'équation (1) devient ainsi

$$(x^2 - a^2)(x^2 - 2ax + a^2) = 0 \quad \text{ou} \quad (x + a)(x - a)^3.$$

Elle n'a donc pas d'autre racine que $x = a$ et $x = -a$; mais $x = a$ est une racine triple, tandis que $x = -a$ est une racine simple.

Les racines de l'équation (1) ne sont acceptables pour l'équation proposée que si elles n'annulent aucun de ses dénominateurs, ce qui exige $a \neq 0$.

4° $\dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}} = \dfrac{15}{8}\sqrt[3]{\dfrac{x}{15}}.$

Pour que le premier membre soit défini, on doit avoir

$$-1 \leqslant x \leqslant 1. \tag{1}$$

L'équation est vérifiée pour $x = 0$. En laissant cette racine de côté, on peut multiplier les deux termes du premier membre par $\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}$, ce qui donne l'équation

$$\frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} = \frac{15}{8}\sqrt[3]{\frac{x}{15}} \quad \text{ou} \quad \sqrt{1 - x^2} = 1 - \frac{15}{8}\sqrt[3]{\frac{x^4}{15}}.$$

Cette équation exige

$$\frac{15}{8}\sqrt[3]{\frac{x^4}{15}} < 1 \quad \text{ou} \quad x^4 < \frac{512}{225},$$

et cette condition est satisfaite à cause des relations (1).

En élevant au carré, il vient

$$1 - x^2 = 1 + \frac{\sqrt[3]{15^4x^8}}{64} - \frac{\sqrt[3]{15^2x^4}}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt[3]{15^4x^4}}{64} + \sqrt[3]{x^2} - \frac{\sqrt[3]{15^2}}{4} = 0.$$

En posant $y = \sqrt[3]{x^2}$, on a l'équation

$$y^2 + \frac{64y}{15\sqrt[3]{15}} - \frac{16}{\sqrt[3]{15^2}} = 0; \text{ d'où } \quad y = \frac{-32 \pm 68}{15\sqrt[3]{15}}.$$

La racine négative ne convient pas, puisque $y = \sqrt[3]{x^2}$ est supérieur à 0. La racine positive donne

$$x = \pm\sqrt{y^3} = \pm\frac{\sqrt{36^3}}{15^2} = \pm\frac{6^3}{15^2} = \pm\frac{24}{25}.$$

On a donc trois solutions $x = 0$ et $x = \pm\frac{24}{25}$.

1011. *Résoudre les équations suivantes :*

1° $\sqrt{x-3} + \sqrt{x} = a.$

On doit avoir $x \geqslant 3$; $a > 0$.

Élevons au carré. On trouve

$$2\sqrt{x(x-3)} = a^2 - 2x + 3.$$

En plus de $x \geqslant 3$, on doit donc avoir $x \leqslant \frac{a^2+3}{2}$, ce qui exige

$$\frac{a^2+3}{2} \geqslant 3 \quad \text{ou} \quad a^2 - 3 \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad a \geqslant \sqrt{3}.$$

En élevant une seconde fois au carré, on trouve

$$4a^2x = (a^2+3)^2 \quad \text{ou} \quad x = \frac{(a^2+3)^2}{4a^2}.$$

Pour que cette racine soit acceptable, on doit avoir :

$$a) \quad \frac{(a^2+3)^2}{4a^2} \geqslant 3 \quad \text{ou} \quad \frac{(a^2-3)^2}{4a^2} > 0;$$

$$b) \quad \frac{(a^2+3)^2}{4a^2} \leqslant \frac{a^2+3}{2} \quad \text{ou} \quad a^2 - 3 \geqslant 0.$$

En tenant compte de $a > 0$, on voit que l'équation proposée a une solution quand $a \geqslant \sqrt{3}$ et dans ce cas seulement.

2° $\sqrt{2x-5} + \sqrt{x+1} = a.$

On doit avoir $x \geqslant \frac{5}{2}$; $a > 0$.

Élevons au carré. Il vient

$$2\sqrt{(2x-5)(x+1)} = a^2 - 3x + 4.$$

En plus de $x \geqslant \frac{5}{2}$, on doit donc avoir $x \leqslant \frac{a^2+4}{3}$, ce qui exige

$$\frac{a^2+4}{3} \geqslant \frac{5}{2} \quad \text{ou} \quad 2a^2 - 7 \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad a \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{14}.$$

En élevant une seconde fois au carré, on trouve

$$f(x) = x^2 - 2x(3a^2+6) + a^4 + 8a^2 + 36 = 0.$$

On a

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{4}(2a^2-7)^2 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{a^2+4}{3}\right) = -\frac{4}{9}(2a^2-7)(a^2+7).$$

Quand $a > \frac{1}{2}\sqrt{14}$, on a $f\left(\frac{5}{2}\right) > 0$ et $f\left(\frac{a^2+4}{3}\right) < 0$.

Donc, dans ce cas, l'équation $f(x) = 0$ admet deux racines et on a le classement

$$\frac{5}{2} \qquad x'' \qquad \frac{a^2+4}{3} \qquad x';$$

par suite, la plus petite racine x'' vérifie l'équation proposée.

Si $a = \frac{1}{2}\sqrt{14}$, on trouve

$$\frac{5}{2} = x'' = \frac{a^2+4}{3} < x',$$

et x'' convient encore.

3° $\sqrt{x-a} - \sqrt{x-4} = \sqrt{2x-5}.$

On doit avoir :

$$x \geqslant 4; \quad x \geqslant a; \quad \sqrt{x-a} \geqslant \sqrt{x-4} \quad \text{ou} \quad a \leqslant 4;$$

en résumé, $x \geqslant 4$; $a \leqslant 4$.

Élevons au carré. Il vient

$$2\sqrt{(x-a)(x-4)} = 1 - a,$$

ce qui exige $a \leqslant 1$. En élevant une deuxième fois au carré, on trouve

$$f(x) = 4x^2 - 2x(2a+8) - a^2 + 18a - 1 = 0.$$

On a $f(4) = -(a-1)^2$ qui est négatif quand $a \neq 1$.

Ainsi, quand $a < 1$, l'équation $f(x) = 0$ admet deux racines séparées par 4. La plus grande vérifie l'équation proposée.

Si $a = 1$, l'équation $f(x) = 0$ devient $x^2 - 5x + 4 = 0$. Les racines de cette équation sont 1 et 4. La racine $x = 4$ vérifie l'équation proposée.

4° $2\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x-a} = \sqrt{2x}$.

On doit avoir

$$x \geqslant 0; \quad x \geqslant a; \quad \sqrt{x+1} \geqslant \sqrt{x-a} \quad \text{ou} \quad a \geqslant -1.$$

L'équation peut s'écrire

$$2\sqrt{x+1} = 2\sqrt{x-a} + \sqrt{2x},$$

ou, après avoir élevé au carré,

$$2\sqrt{2x(x-a)} = 2a + 2 - x.$$

On doit avoir encore $x \leqslant 2a + 2$.

Cette condition ne contredit pas la relation $x \geqslant 0$, car $2a + 2$ est positif ou nul quand $a \geqslant -1$; elle ne contredit pas non plus la relation $x \geqslant a$. En élevant une deuxième fois au carré, il vient

$$f(x) = 7x^2 - 2x(2a - 2) - 4a^2 - 8a - 4 = 0.$$

On a :

$$f(0) = -4(a+1)^2; \quad f(a) = -(a+2)^2;$$
$$f(2a+2) = 16(a^2 + 3a + 2).$$

Si $a > -1$, on a

$$f(0) < 0; \quad f(a) < 0; \quad f(2a+2) > 0.$$

La plus grande racine est donc supérieure à 0 et a, et inférieure à $2a + 2$. Elle vérifie l'équation proposée.

Si $a = -1$, l'équation $f(x) = 0$ devient $7x^2 + 8x = 0$. La racine $x = 0$ vérifie l'équation proposée.

5° $\sqrt{k(x-1)(x-2)} = x - a$; $(k > 1)$.

On doit avoir $x \geqslant a$. De plus, x doit rendre positif ou nul le trinôme

$$k(x-1)(x-2), \quad \text{ce qui exige} \quad x \leqslant 1 \quad \text{ou} \quad x \geqslant 2.$$

Élevons au carré.

$$f(x) = x^2(k-1) - x(3k - 2a) + 2k - a^2 = 0.$$

On a : $\quad k - 1 > 0; \quad f(a) = k(a^2 - 3a + 2);$

$$f(1) = -(a-1)^2; \quad f(2) = -(a-2)^2.$$

Si a est différent de 1 et de 2, l'équation $f(x) = 0$ admet deux racines distinctes, les nombres 1 et 2 étant compris entre ces racines.

a) Si $a < 1$, $f(a)$ est positif et on a le classement

$$a \quad x'' \quad 1 \quad 2 \quad x'.$$

Les racines x'' et x' vérifient l'équation proposée.

b) Si $1 < a < 2$, $f(a)$ est négatif et on a le classement

$$x'' \quad 1 \quad a \quad 2 \quad x'.$$

La racine x' convient.

c) Si $a > 2$, $f(a)$ est positif et on a

$$x'' \quad 1 \quad 2 \quad x' \quad a.$$

Aucune racine ne convient.

d) Si $a = 1$, $f(a) = f(1) = 0$; $f(2) < 0$. On a donc le classement

$$x'' = 1 = a < 2 < x'.$$

Les deux racines conviennent.

e) Si $a = 2$, $f(a) = f(2) = 0$; $f(1) < 0$. On a donc le classement

$$x'' < 1 < x' = 2 = a.$$

La racine x' convient.

6° $\sqrt{mx^2 + x + 2} = x - 1$.

On doit avoir $x \geqslant 1$. Élevons au carré. Il vient

$$f(x) = (m - 1)x^2 + 3x + 1 = 0. \qquad (1)$$

a) L'équation (1) admet une racine acceptable, si l'on a

$$(m - 1)\,f(1) = (m - 1)\,(m + 3) < 0 \quad \text{ou} \quad -3 < m < 1.$$

Pour ces valeurs de m, l'équation (1) a deux racines de signes contraires et c'est la positive qui convient.

b) L'équation (1) a deux racines acceptables, si l'on a :

$$\rho = 13 - 4m > 0 \quad \text{ou} \quad m < \frac{13}{4};$$

$$(m - 1)\,f(1) > 0, \text{ ce qui exige } m < -3 \text{ ou } m > 1;$$

$$1 - \frac{S}{2} = \frac{2m + 1}{2(m - 1)} < 0 \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{2} < m < 1.$$

Ces inéquations sont incompatibles.

c) Si $m = -3$, on a la solution acceptable $x = 1$; si $m = 1$, l'équation (1) se réduit à l'équation $3x + 1$, dont la racine ne convient pas.

7° $\sqrt{x} + \sqrt{a - \sqrt{ax + x^2}} = \sqrt{a}$.

Le second membre n'est défini que si $a \geqslant 0$. Si $a = 0$, on a $x = 0$. Dans ce qui suit, nous supposerons a positif.

Le radical $\sqrt{x}$ n'est défini que si $x \geqslant 0$. Quand cette condition est remplie, on a aussi $ax + x^2 \geqslant 0$.

On doit avoir encore

$$a \geqslant \sqrt{ax + x^2} \quad \text{ou} \quad x^2 + ax - a^2 \leqslant 0,$$

ce qui exige

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}(-1 + \sqrt{5}). \qquad (1)$$

L'équation peut s'écrire

$$\sqrt{a - \sqrt{ax + x^2}} = \sqrt{a} - \sqrt{x}.$$

Le second membre est positif quand les conditions (1) sont remplies. Élevons au carré. Il vient

$$2\sqrt{ax} = \sqrt{ax + x^2} + x.$$

Les deux membres sont positifs ou nuls. Élevons au carré. On trouve

$$2x\sqrt{ax + x^2} = 3ax - 2x^2,$$

et les deux membres sont positifs ou nuls à cause des conditions (1). Une troisième élévation au carré conduit à l'équation

$$x^2(16ax - 9a^2) = 0$$

dont les racines sont 0 et $\frac{9a}{16}$. Ces racines conviennent.

8° $\sqrt{x^2 - ax + a^2} + \sqrt{x^2 - bx + b^2} = \sqrt{a^2 + ab + b^2}$.

Si $a = b = 0$, on a $x = 0$. En écartant cette hypothèse, les deux membres sont positifs. L'élévation au carré conduit à l'équation équivalente

$$ab + (a + b)x - 2x^2 = 2\sqrt{(x^2 - ax + a^2)(x^2 - bx + b^2)},$$

qui exige $\qquad F(x) = ab + (a + b)x - 2x^2 \geqslant 0. \qquad (1)$

Supposons cette condition vérifiée et élevons au carré. On obtient l'équation

$$x^2(a + b)^2 - 2ab(a + b)x + a^2b^2 = 0.$$

Cette équation admet une racine double $x = \frac{ab}{a + b}$, en supposant $a + b \neq 0$. On a

$$F\left(\frac{ab}{a + b}\right) = \frac{2ab(a^2 + ab + b^2)}{(a + b)^2}.$$

Cette expression doit être positive ou nulle, ce qui a lieu dans trois cas :

$$a)\ a = 0,\quad b \neq 0;\quad b)\ b = 0,\quad a \neq 0;\quad c)\ ab > 0.$$

1012. *Résoudre les systèmes :*

1° $x + y = 3;\quad \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 6\frac{3}{4}$.

Posons $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = t$. Cette égalité donne $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = t^2 - 2$ et la seconde équation devient

$$4t^2 + 4t - 35 = 0.$$

D'où $t = \frac{5}{2}$ ou $-\frac{7}{2}$.

a) Si $t = 2{,}5$, on a

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{(x + y)^2 - 2xy}{xy} = \frac{9 - 2xy}{xy} = \frac{5}{2}.$$

D'où $\qquad 9xy = 18$ et $xy = 2$.

Les équations $x + y = 3$ et $xy = 2$ donnent deux solutions :

$$x = 2,\ y = 1 \quad \text{et} \quad x = 1,\ y = 2.$$

b) Si $t = -3{,}5$, on a

$$\frac{9 - 2xy}{xy} = -\frac{7}{2} \quad \text{ou} \quad xy = -6.$$

Les équations $x + y = 3$ et $xy = -6$ donnent deux solutions :

$$x = \frac{3+\sqrt{33}}{2}, \quad y = \frac{3-\sqrt{33}}{2}; \quad x = \frac{3-\sqrt{33}}{2}, \quad y = \frac{3+\sqrt{33}}{2}.$$

2° $\dfrac{x}{10} = \dfrac{y}{14} = \dfrac{z}{35} = \dfrac{1}{10x + 14y + 35z}$.

On a

$$\frac{x^2}{10x} = \frac{y^2}{14y} = \frac{z^2}{35z} = \frac{x^2+y^2+z^2}{10x+14y+35z}.$$

L'égalité $\qquad \dfrac{x^2+y^2+z^2}{10x+14y+35z} = \dfrac{1}{10x+14y+35z}$

donne ensuite $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

En remplaçant y par $\dfrac{14x}{10}$ et z par $\dfrac{35x}{10}$, il vient $x^2 = \dfrac{100}{1521}$;

puis $\qquad x = \pm\dfrac{10}{39}; \quad y = \pm\dfrac{14}{39}; \quad z = \pm\dfrac{35}{39}$.

Le système a deux solutions.

3° $\sqrt{2x-5} - \sqrt{3y+1} = 1; \quad x = 5y + 2$.

La seconde équation donne $2x - 5 = 10y - 1$. En remplaçant alors $2x - 5$ par sa valeur dans la première équation, celle-ci devient

$$\sqrt{10y-1} = 1 + \sqrt{3y+1}.$$

On doit avoir $\quad y \geqslant \dfrac{1}{10}$. Élever au carré. Il vient

$$7y - 3 = 2\sqrt{3y+1},$$

ce qui exige $\quad y \geqslant \dfrac{3}{7}$. Élever au carré.

$$49y^2 - 54y + 5 = 0.$$

La seule racine acceptable de cette équation est $y = 1$. La valeur correspondante de x est $x = 7$.

4° $2\sqrt{13-x} + \sqrt{y+x} = 9; \quad \sqrt{13-x} + \sqrt{x} = \sqrt{y+x} + 2$.

Tirer $\sqrt{y+x}$ de la première équation; remplacer dans la seconde. Il vient

$$3\sqrt{13-x} + \sqrt{x} = 11.$$

La résolution de cette équation donne $\quad x = 4 \quad$ ou $\quad \dfrac{1}{25}$.

Les solutions du système sont $x = 4, y = 5; \quad x = \dfrac{1}{25}, y = \dfrac{80}{25}$.

5° $x\sqrt{x} - y\sqrt{y} = 19$; $x + y - 2(\sqrt{y} + \sqrt{xy} - \sqrt{x}) = 3$.

Posons $\sqrt{x} = u$, $\sqrt{y} = v$. Le système devient

$$u^3 - v^3 = 19; \quad u^2 + v^2 - 2(v + uv - u) = 3.$$

La seconde équation peut s'écrire

$$(u - v)^2 + 2(u - v) - 3 = 0.$$

On a donc $u - v = 1$ ou -3.

a) Si $u - v = 1$, la première équation donne

$$(v + 1)^3 - v^3 = 19 \quad \text{ou} \quad v^2 + v - 6 = 0.$$

La racine positive de cette équation est $v = 2$; on en déduit $u = 3$; puis $x = 9$, $y = 4$. La racine négative ne convient pas.

b) Si $u - v = -3$, la première équation donne

$$(v - 3)^3 - v^3 = 19 \quad \text{ou} \quad 9v^2 - 27v + 46 = 0.$$

Cette équation n'a pas de racine.

6° $\sqrt{\dfrac{6x}{x + y}} + \sqrt{\dfrac{x + y}{6x}} = \dfrac{5}{2}$; $xy - x - y = 9$.

En posant $\sqrt{\dfrac{6x}{x + y}} = u$, la première équation devient

$$u + \frac{1}{u} = \frac{5}{2} \quad \text{ou} \quad 2u^2 - 5u + 2 = 0.$$

Elle a deux racines $u = 2$ et $u = 0.5$.

a) Si $u = 2$, on a le système $\dfrac{6x}{x + y} = 4$; $xy - x - y = 9$.

Il a deux solutions :

$$x = 6, \quad y = 3 \quad \text{et} \quad x = -3, \quad y = -1{,}5.$$

b) Si $u = \dfrac{1}{2}$, on a le système $\dfrac{6x}{x + y} = \dfrac{1}{4}$, $xy - x - y = 9$.

Il a deux solutions :

$$x = \frac{3}{23}(4 + \sqrt{39}), \quad y = 3(4 + \sqrt{39})$$

et

$$x = \frac{3}{23}(4 - \sqrt{39}), \quad y = 3(4 - \sqrt{39}).$$

1013. *Résoudre et discuter les systèmes :*

1° $2(x^4 - y^4) = (m + 1)^3 (x - y)$; $x + y = m$.

Le système se décompose en deux autres.

a) $x - y = 0$; $x + y = m$.

Ce système donne $x = y = \dfrac{m}{2}$. (1)

b) $2(x^2 + y^2)(x + y) = (m + 1)^3;\quad x + y = m.$

La première équation peut s'écrire

$$2m(m^2 - 2xy) = (m + 1)^3.$$

Si $m = 0$, cette équation est impossible; le système n'admet pas de solution en dehors de (1).

Si $m \neq 0$, on a

$$xy = \frac{1}{4m}(m^3 - 3m^2 - 3m - 1).$$

x et y sont les racines de l'équation

$$4mz^2 - 4m^2z + m^3 - 3m^2 - 3m - 1 = 0,$$

dont le réalisant est $\rho = 4m(3m^2 + 3m + 1)$.

ρ a le signe de m, car $3m^2 + 3m + 1 > 0$. Il en résulte que si $m > 0$, on a deux nouvelles solutions du système.

2° $x + xy + xy^2 + xy^3 = 2a;\quad x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 + x^2y^6 = 4.$

De ce système, on déduit

$$\frac{(x + xy + xy^2 + xy^3)^2}{x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 + x^2y^6} = \frac{(1 + y + y^2 + y^3)^2}{1 + y^2 + y^4 + y^6} = a^2$$

ou

$$\frac{(y^2 + 1)^2(y + 1)^2}{(y^2 + 1)(y^4 + 1)} = \frac{(y^2 + 1)(y + 1)^2}{y^4 + 1} = a^2.$$

En multipliant par $y^4 + 1$, on obtient l'équation réciproque

$$y^4(a^2 - 1) - 2y^3 - 2y^2 - 2y + (a^2 - 1) = 0. \tag{1}$$

Posons $y + \dfrac{1}{y} = z$ ou $y^2 - zy + 1 = 0.$ (2)

La résolvante de l'équation réciproque sera

$$f(z) = (a^2 - 1)z^2 - 2z - 2a^2 = 0. \tag{3}$$

Cette équation (3) admet deux racines distinctes, car son réalisant est

$$1 + 2a^2(a^2 - 1) = (a^2 - 1)^2 + a^4.$$

A chaque racine z de l'équation (3) correspondent deux racines distinctes ou égales des équations (2) et (1), pourvu que z rende positif ou nul, le réalisant $z^2 - 4$ de l'équation (2). Il faudra donc comparer les racines de l'équation (3) aux nombres -2 et $+2$, qui sont les racines de $z^2 - 4$. On a :

$$(a^2 - 1)f(-2) = 2a^2(a^2 - 1);$$
$$(a^2 - 1)f(2) = 2(a^2 - 1)(a^2 - 4).$$

a) Si $a < -2$ ou $a > 2$, on a

$$(a^2 - 1)f(-2) > 0 \quad \text{et} \quad (a^2 - 1)f(2) > 0.$$

-2 et $+2$ sont donc extérieurs aux racines de l'équation (3). On vérifiera aisément qu'on a aussi dans ce cas

$$-2 < \frac{S}{2} = \frac{1}{a^2 - 1} < 2.$$

Il en résulte qu'on a le classement

$$-2 \quad z'' \quad z' \quad 2$$

et que les racines z'' et z' ne conviennent pas dans ce cas.

b) Si $-2 < a < -1$ ou $1 < a < 2$, on a

$$(a^2 - 1) f(-2) > 0 \quad \text{et} \quad (a^2 - 1) f(2) < 0.$$

Il en résulte qu'on a le classement

$$-2 \quad z'' \quad 2 \quad z'$$

et qu'à la plus grande racine de l'équation (3) correspondent deux racines de l'équation (1).

c) Si $-1 < a < 0$ ou $0 < a < 1$, on a

$$(a^2 - 1) f(-2) < 0; \quad (a^2 - 1) f(2) > 0;$$

et on a le classement

$$z'' \quad -2 \quad z' \quad 2.$$

A la plus petite racine de (3) correspondent donc deux racines de (1).

d) Si $a = \pm 2$, l'équation (3) devient $3z^2 - 2z - 8 = 0$; elle admet une racine acceptable $z = 2$.

Si $a = \pm 1$, l'équation (3) devient $z + 1 = 0$; sa racine ne convient pas.

Si $a = 0$, l'équation (3) devient $z^2 + 2z = 0$; elle admet une racine acceptable $z = -2$.

REMARQUE. — La discussion précédente avait pour objet de déterminer le nombre des racines de l'équation (1). A chacune de ces racines, l'équation

$$x(1 + y + y^2 + y^3) = 2a \quad \text{ou} \quad x(y + 1)(y^2 + 1) = 2a$$

fait correspondre une valeur de x, pourvu que la racine considérée ne soit pas égale à -1. Ce dernier cas ne se présente que si $a = 0$; car dans ce cas, et dans ce cas seulement, on a $z = -2$, et l'équation (2) donne $y = -1$.

1014. *Entre les équations*

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = ax + by + cz = xy + yz + zx = 0,$$

éliminer x, y *et* z (*E. M. Armes simples*, 1925).

L'équation $xy + yz + zx = 0$ donne $x = -\dfrac{yz}{y + z}$. En substituant dans $ax + by + cz = 0$, il vient

$$-ayz + byz + cyz + by^2 + cz^2 = 0,$$

ou, après avoir remplacé $by^2 + cz^2$ par $-ax^2$,

$$(b + c - a)yz = ax^2.$$

On trouve d'une façon analogue

$$(c + a - b)zx = by^2; \quad (a + b - c)xy = cz^2.$$

Multiplions ces trois relations membre à membre. On trouve ainsi

$$(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) = abc.$$

1015. *Dans quels cas, les solutions du système*

$$x + y = a, \quad \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = b$$

sont-elles positives (*E. M. Armes simples*, 1927) ?

L'hypothèse $a = 0$ exige $b = 0$, car $x^3 + y^3$ renferme le facteur $x + y$. Le système est indéterminé dans ce cas; aucune solution n'est positive, car x et y sont des nombres opposés.

L'hypothèse $b = 0$ exige de même $a = 0$ et ne conduit à aucune solution positive. Dans ce qui suit, nous supposons a et b différents de zéro.

La deuxième équation peut s'écrire

$$\frac{(x + y)\,[(x + y)^2 - 3xy]}{(x + y)^2 - 2xy} = \frac{a(a^2 - 3xy)}{a^2 - 2xy} = b. \tag{1}$$

Elle donne $\qquad (3a - 2b)xy = a^2(a - b).$

Si $3a - 2b = 0$, cette équation est impossible. Supposons donc qu'on ait $3a - 2b \neq 0$. On a alors

$$xy = \frac{a^2(a - b)}{3a - 2b}.$$

Cette valeur de xy n'annule pas le dénominateur de l'équation (1), car on montre aisément que la supposition $\dfrac{2a^2(a - b)}{3a - 2b} = a^2$ exigerait $a = 0$.

x et y sont les racines de l'équation

$$(3a - 2b)z^2 - a(3a - 2b)z + a^2(a - b) = 0.$$

Cette équation admet deux racines positives, si on a :

$$\rho = a^2(3a - 2b)(-a + 2b) \geqslant 0;$$

$$P = \frac{a^2(a - b)}{3a - 2b} > 0 \quad \text{ou} \quad (a - b)(3a - 2b) > 0;$$

$$S = a > 0.$$

Si $b > 0$, les solutions de ces trois inéquations sont respectivement :

$$\frac{2b}{3} < a \leqslant 2b; \quad a < \frac{2b}{3} \quad \text{ou} \quad a > b; \quad a > 0.$$

On doit donc avoir $\quad b < a \leqslant 2b.$

Si $b < 0$, on voit aisément que le système formé par les trois inéquations n'a pas de solutions.

1016. *Éliminer* x *et* y *entre les équations suivantes :*

1° $x + y = a; \quad x^2 + y^2 = b^2; \quad x^3 + y^3 = c^3.$

Il s'agit de chercher les conditions auxquelles doivent satisfaire a, b et c pour qu'il existe des valeurs de x et de y vérifiant les trois équations.

La deuxième équation peut s'écrire

$$a^2 - 2xy = b^2 \quad \text{ou} \quad xy = \frac{a^2 - b^2}{2}.$$

Les deux premières équations seront compatibles, si on a

$$a^2 - \frac{4(a^2 - b^2)}{2} \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad 2b^2 - a^2 \geqslant 0. \tag{1}$$

La troisième équation peut s'écrire

$$(x + y)\,[(x + y)^2 - 3xy] = c^3.$$

Pour que les trois équations soient compatibles, il faut et il suffit qu'on ait [en dehors de la condition (1)]

$$a\left[a^2 - \frac{3(a^2 - b^2)}{2}\right] = c^3 \quad \text{ou} \quad a(3b^2 - a^2) = 2c^3.$$

2° $\dfrac{b}{x} + \dfrac{a}{y} = 1;\quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2;\quad xy + ab = 0.$

La deuxième équation peut s'écrire

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 - \frac{2xy}{ab} = 2.$$

En remplaçant xy par sa valeur tirée de la troisième, cette relation devient

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{x}{a} = -\frac{y}{b}.$$

Le système $\qquad \dfrac{x}{a} = -\dfrac{y}{b};\quad xy + ab$

admet les solutions

$$x = a,\quad y = -b \quad \text{et} \quad x = -a,\quad y = b.$$

En substituant dans la première équation, on voit que la condition nécessaire et suffisante de compatibilité est que la valeur absolue de la différence $\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a}$ soit 1.

1017. *Résoudre et discuter les systèmes :*

1° $x + yz = y + zx = z + xy = a.$

a) Supposons $x = y = z$. Les trois équations se réduisent à l'équation

$$x^2 + x - a = 0.$$

Si $4a + 1 \geqslant 0$, elle admet deux racines et le système admet les deux solutions

$$x = y = z = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + 4a});$$

$$x = y = z = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{1 + 4a}).$$

b) Supposons que les inconnues ne soient pas toutes égales. Si on a, par exemple, $x \neq y$, on trouve, en retranchant la seconde équation de la première,

$$(x - y) + z(y - x) = 0;$$

ou $\quad z = 1, \quad$ car $\quad x - y \neq 0.$

Remplaçons z par 1 dans les trois équations. Le système se réduit à

$$x + y = a; \quad xy = a - 1.$$

x et y sont donc les racines de l'équation

$$u^2 - au + a - 1 = 0$$

qui donne $u = 1$ ou $a - 1$.

Ces racines ne sont distinctes que si on suppose $a \neq 2$.

En supposant cette condition remplie, on aura deux nouvelles solutions :

$$x = a - 1, \quad y = 1, \quad z = 1; \qquad (1)$$
$$x = 1, \quad y = a - 1, \quad z = 1. \qquad (2)$$

On peut encore supposer $x \neq z$ ou $y \neq z$. On verrait ainsi que, si $a \neq 2$, le système admet encore la solution

$$x = 1, \quad y = 1, \quad z = a - 1. \qquad (3)$$

En résumé,

$a < -\frac{1}{4}$; trois solutions : (1), (2) et (3).

$a = -\frac{1}{4}$; les mêmes solutions, puis $x = y = z = -\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{4} < a < 2$; cinq solutions.

$a = 2$; $x = y = z = 1$.

$a > 2$; cinq solutions.

2° $$\frac{y + z - x}{a} = \frac{z + x - y}{b} = \frac{x + y - z}{c} = xyz.$$

Soit $2t$ la valeur commune des trois rapports. On forme un rapport égal en divisant la somme de deux numérateurs par la somme des dénominateurs correspondants. On trouve ainsi

$$2t = \frac{2z}{a + b} = \frac{2y}{c + a} = \frac{2x}{b + c},$$

ou $$x = (b + c)t; \quad y = (c + a)t; \quad z = (a + b)t;$$

et aussi $$xyz = 2t = (a + b)(b + c)(c + a)t^3.$$

Écartons la solution $t = 0$, qui donne $x = y = z = 0$. On a alors

$$t^2 = \frac{2}{(a + b)(b + c)(c + a)}.$$

Cette égalité exige $(a + b)(b + c)(c + a) > 0$, ce qui a lieu si les trois facteurs sont positifs, ou si deux sont négatifs.

S'ils sont positifs tous les trois, on a

$$x = \pm \sqrt{\frac{2(b + c)}{(a + b)(a + c)}}; \quad y = \pm \sqrt{\frac{2(a + c)}{(b + a)(b + c)}};$$
$$z = \pm \sqrt{\frac{2(a + b)}{(c + a)(c + b)}},$$

les signes supérieurs étant associés, ainsi que les signes inférieurs.

Si deux sont négatifs, il faut retourner deux signes $\pm$ dans les expressions précédentes. Ainsi, si $a + c$ et $a + b$ sont négatifs, il faut retourner les signes $\pm$ de y et de z; car pour obtenir y et z, il faut multiplier t respectivement par $a + c = -\sqrt{(a+c)^2}$ et $a + b = -\sqrt{(a+b)^2}$.

1018. *Résoudre le système*

$$x + y - z = 2a; \quad x^2 + y^2 = z^2; \quad m(x + y) = xy.$$

Si $a > 0$, *trouver les limites de* m *de manière que* x, y *et* z *soient positifs (E. M. Armes spéciales,* 1903*).*

La première et la troisième équation donnent

$$x + y = 2a + z; \quad xy = m(2a + z). \tag{1}$$

La deuxième équation peut s'écrire

$$(x + y)^2 - 2xy = z^2,$$

ou, en y remplaçant $x + y$ et xy par leur valeur,

$$z(m - 2a) = 2a(a - m).$$

Si $m = 2a$, cette équation et le système sont impossibles. Supposons donc $m \neq 2a$. On a alors

$$z = \frac{2a(a - m)}{m - 2a}.$$

z est positif, si on a

$$(a - m)(m - 2a) > 0 \quad \text{ou} \quad a < m < 2a.$$

D'autre part, en remplaçant z par sa valeur dans les égalités (1), on a aussi

$$x + y = -\frac{2a^2}{m - 2a}; \quad xy = -\frac{2a^2 m}{m - 2a}.$$

x et y sont donc les racines de l'équation

$$(m - 2a)u^2 + 2a^2 u - 2a^2 m = 0. \tag{2}$$

Ils sont positifs, si on a :

$\rho = a^2(2m^2 - 4am + a^2) \geqslant 0$, ce qui exige

$$m \leqslant \frac{a}{2}(2 - \sqrt{2}) \quad \text{ou} \quad m \geqslant \frac{a}{2}(2 + \sqrt{2});$$

$$P = -\frac{2a^2 m}{m - 2a} > 0 \quad \text{ou} \quad 0 < m < 2a;$$

$$S = -\frac{2a^2}{m - 2a} > 0 \quad \text{ou} \quad m < 2a.$$

En résumé, pour que x, y, z soient positifs, il faut et il suffit qu'on ait

$$\frac{a}{2}(2 + \sqrt{2}) \leqslant m < 2a.$$

Si $m = \frac{a}{2}(2 + \sqrt{2})$, l'équation (2) a une racine double positive u' et le système a une solution positive $x = y = u'$, z.

Si $\frac{a}{2}(2 + \sqrt{2}) < m < 2a$, l'équation (2) a deux racines positives u' et u'' et le système a deux solutions positives, qui sont

$$x = u', \quad y = u'', \quad z \quad \text{et} \quad x = u'', \quad y = u', \quad z.$$

1019. *Résoudre le système*

$$x + y + z = 2p; \quad xy = mz(x + y); \quad x^2 + y^2 = z^2.$$

Si p *et* m *sont positifs, trouver les limites de* m *de manière que* x, y *et* z *soient positifs* (*E. M. Armes spéciales*, 1904).

La première et la deuxième équation donnent

$$x + y = 2p - z; \quad xy = mz(2p - z). \tag{1}$$

La troisième équation peut s'écrire

$$(x + y)^2 - 2xy = z^2,$$

ou, en y remplaçant $x + y$ et xy par leur valeur,

$$f(z) = mz^2 - 2p(m + 1)z + 2p^2 = 0. \tag{2}$$

Cette équation admet toujours deux racines distinctes, car son réalisant est $p^2(m^2 + 1)$ et nous supposons p positif.

Ces racines sont

$$z = \frac{p}{m}(m + 1 \pm \sqrt{m^2 + 1}).$$

Elles sont positives, comme leur produit $\frac{2p^2}{m}$ et leur somme $\frac{2p(m + 1)}{m}$.

D'autre part, à cause des relations (1), x et y sont les racines de l'équation

$$u^2 - (2p - z)u + mz(2p - z) = 0, \tag{3}$$

où z est égal à l'une des valeurs trouvées. Cette équation admet des racines si

$$(2p - z)^2 - 4mz(2p - z) = (2p - z)\,[2p - (4m + 1)z] \geqslant 0; \tag{4}$$

ces racines seront positives si

$$2p - z > 0, \tag{5}$$

car leur produit et leur somme sont respectivement $mz(2p - z)$ et $2p - z$.

Les conditions (4) et (5) exigent qu'on ait à la fois

$$2p - z > 0; \quad 2p - (4m + 1)z \geqslant 0;$$

ou

$$z < 2p \quad \text{et} \quad z \leqslant \frac{2p}{4m + 1};$$

autrement dit, une racine de l'équation (2) ne convient que si elle est inférieure à $2p$ et inférieure ou égale à $\frac{2p}{4m + 1}$.

Or, le coefficient de z^2 dans $f(z)$ est positif et on a :

$$f(2p) = -2p^2; \quad f\left(\frac{2p}{1 + 4m}\right) = \frac{2p^2\,(8m^2 - 1)}{(1 + 4m)^2}; \quad \frac{2p}{1 + 4m} < 2p.$$

Par suite, $2p$ est toujours compris entre les racines z'' et z' de l'équation $f(z) = 0$; la plus grande racine z' ne convient jamais; la plus petite z'' ne convient que si $\dfrac{2p}{1+4m}$ est également compris entre les racines, à moins d'être égal à la plus petite, c'est-à-dire, si $8m^2 - 1 \leqslant 0$.

En résumé,

si $8m^2 - 1 > 0$, le système n'a aucune solution positive;

si $8m^2 - 1 = 0$, l'équation (3) a une racine double positive u' et le système a une solution positive $x = y = u'$; $z = z''$;

si $8m^2 - 1 < 0$, l'équation (3) a deux racines positives u'' et u', et le système a deux solutions positives, qui sont

$$x = u'',\quad y = u',\quad z = z'' \quad \text{et} \quad x = u',\quad y = u'',\quad z = z''.$$

1020. *Un nombre entier* xyz *est formé de trois chiffres différents, déterminés par les conditions :*

$$\mathrm{x - y^2 - yz - z = 0;\quad x - y - y^2 - z^2 = 0;\quad x + y - y^3 - z = 0.}$$

Quel est ce nombre (*E. M. Armes simples*, 1903)?

Retranchons membre à membre la deuxième équation de la première. Il vient

$$-yz - z + y + z^2 = 0 \quad \text{ou} \quad (1 - z)(y - z) = 0.$$

a) Si $z = 1$, le système se réduit à

$$x - y^2 - y - 1 = 0;\quad x + y - y^3 - 1 = 0.$$

En retranchant ces équations membre à membre, on trouve

$$y^3 - y^2 - 2y = 0 \quad \text{ou} \quad y(y + 1)(y - 2) = 0.$$

Les solutions du système sont, dans ce cas :

$x = 1,\ y = 0,\ z = 1;\ x = 1,\ y = -1,\ z = 1;\ x = 7,\ y = 2,\ z = 1.$

La solution $x = 1$, $y = -1$, $z = 1$ est inacceptable; le nombre 721 répond à la question; le nombre 101 est à rejeter, car il faut des chiffres différents.

b) Si $y = z$, le système se réduit à

$$x - y - 2y^2 = 0;\quad x - y^3 = 0.$$

On en déduit $\quad y(y^2 - 2y - 1) = 0.$

Les racines de l'équation $y^2 - 2y - 1 = 0$ doivent être écartées, car elles sont irrationnelles. La racine $y = 0$ conduit à la solution évidente 000.

1021. *Calculer* a, b, c, *de manière que l'expression*

$$\mathrm{f(x) = x^2(a^3 + b^3 + a + b + c) - 2x(a^3 + b^3 - a - b) + a^3 + b^3 + a + b - c}$$

soit un carré parfait et que l'on ait $\mathrm{f(-1) = 2;\ \ f(1) = m.}$ (*E. M. Armes simples*, 1904).

Les conditions de l'énoncé s'expriment par les relations

$$\rho = c^2 - 4(a+b)(a^3+b^3) = 0 \qquad (1)$$
$$f(-1) = 4(a^3+b^3) = 2 \qquad (2)$$
$$f(1) = 4(a+b) = m \qquad (3)$$
$$a^3+b^3+a+b+c > 0. \qquad (4)$$

a) Considérons le système formé par les équations (2) et (3). L'équation (2) peut s'écrire $4(a+b)[(a+b)^2-3ab] = 2.$

En remplaçant $a+b$ par sa valeur, elle devient

$$48mab = m^3 - 32.$$

Si $m = 0$, cette équation et le système sont impossibles. Supposons donc $m \neq 0$. On a alors

$$a+b = \frac{m}{4}; \quad ab = \frac{m^3-32}{48m}.$$

a et *b* sont les racines de l'équation

$$48mz^2 - 12m^2z + m^3 - 32 = 0.$$

Cette équation admet des racines si

$$\begin{aligned}\rho &= -12m(m^3-128)\\ &= -12m(m-4\sqrt[3]{2})(m^2+4m\sqrt[3]{2}+16\sqrt[3]{4}) \geqslant 0.\end{aligned}$$

Le dernier facteur de ρ est positif. On doit donc avoir

$$0 < m \leqslant 4\sqrt[3]{2}. \qquad (5)$$

b) Les relations (1) et (4) peuvent s'écrire

$$c^2 = \frac{m}{2}; \quad c + \frac{1}{4}(m+2) > 0. \qquad (6) \text{ et } (7)$$

A chaque valeur de m satisfaisant aux relations (5) correspondent deux valeurs opposées de c. La valeur positive de c vérifie évidemment la relation 7). Pour que la négative convienne, on doit avoir

$$-\sqrt{\frac{m}{2}} + \frac{1}{4}(m+2) > 0 \quad \text{ou} \quad 2\sqrt{2m} < m+2.$$

Les deux membres de cette inéquation sont positifs. En élevant au carré, on trouve $(m-2)^2 > 0$ ou $m \neq 2.$

c) En résumé :

Si $0 < m < 2$ ou $2 < m < 4\sqrt[3]{2}$, le système (2), (3) admet deux solutions; à chacune on peut faire correspondre l'une ou l'autre valeur de c; cependant le problème n'a que deux solutions, car les coefficients de $f(x)$ sont symétriques en a et b.

Si $m = 2$, $f(x)$ se réduit à $2x^2$ ou à 2.

Si $m = 4\sqrt[3]{2}$, on a $a = b = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$, $c = \pm\sqrt[3]{4}$; le problème a deux solutions.

Le problème est impossible dans les autres cas.

1022. *La somme des* p *premiers termes d'une progression arithmétique est* q *et la somme des* q *premiers termes est* p. *Déterminer la somme des* p + q *et celle des* p — q *premiers termes* (*E. M. Armes simples*, 1929).

Désignons par x le premier terme et par y la raison de la progression arithmétique. On a les équations

$$[2x + (p - 1)y]\frac{p}{2} = q \quad \text{ou} \quad 2px + p(p - 1)y = 2q;$$

$$[2x + (q - 1)y]\frac{q}{2} = p \quad \text{ou} \quad 2qx + q(q - 1)y = 2p.$$

Le déterminant de ce système est $2pq(q - p)$. On doit supposer p et q différents de zéro, et aussi $p \geqslant q$.

a) Supposons $p > q$. Le système donne alors

$$x = \frac{p^2 + q^2 + pq - p - q}{pq}; \quad y = -\frac{2(p + q)}{pq}.$$

La somme des $p + q$ premiers termes est $-(p + q)$; celle des $p - q$ premiers termes est $\dfrac{(p - q)(p + 2q)}{p}$.

b) Si $p = q$, le système se réduit à l'équation unique

$$2x + (p - 1)y = 2.$$

Posons $y = 2t$, t étant une constante arbitraire. Les solutions de l'équation seront données par les formules

$$x = 1 - (p - 1)t; \quad y = 2t.$$

La somme des $2p$ premiers termes sera $2p(1 + pt)$.

1023. *Calculer trois nombres* x, y, z, *sachant qu'ils sont trois termes consécutifs d'une progression géométrique et que*

$$x - y + z = a; \quad x^2 + y^2 + z^2 = b^2.$$

Discuter, x, y *et* z *devant être positifs* (*E. M. Armes spéciales*, 1930).

On a $y^2 = xz$; de là, on déduit

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x^2 + 2y^2 + z^2) - y^2 = (x + z)^2 - y^2 = a(x + y + z).$$

La deuxième équation pourra s'écrire, en supposant $a \neq 0$,

$$x + y + z = \frac{b^2}{a}.$$

On trouve aisément alors

$$y = \frac{b^2 - a^2}{2a}; \quad x + z = \frac{b^2 + a^2}{2a}; \quad xz = y^2 = \frac{(b^2 - a^2)^2}{4a^2}.$$

Par suite, x et z sont les racines de l'équation

$$4a^2u^2 - 2a(b^2 + a^2)u + (b^2 - a^2)^2 = 0.$$

Supposons $b > 0$; x et z sont positifs, si on a :

$$\rho = -a^2(3a^2 - b^2)(a^2 - 3b^2) \geqslant 0, \quad \text{ce qui exige}$$

$$-b\sqrt{3} \leqslant a \leqslant -\frac{b\sqrt{3}}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{b\sqrt{3}}{3} \leqslant a \leqslant b\sqrt{3}.$$

$$P = \frac{(b^2 - a^2)^2}{4a^2} > 0, \quad \text{ce qui exige} \quad a \neq \pm b.$$

$$S = \frac{b^2 + a^2}{2a} > 0, \quad \text{ce qui exige} \quad a > 0.$$

y est positif, si $-a(a^2 - b^2) > 0$, ce qui exige

$$a < -b \quad \text{ou} \quad 0 < a < b.$$

En résumé, les valeurs de x, y et z sont positives si

$$\frac{b\sqrt{3}}{3} \leqslant a < b.$$

Si l'on avait supposé b négatif, on aurait trouvé

$$\frac{-b\sqrt{3}}{3} \leqslant a < -b.$$

1024. *Déterminer sur le segment* AB $= a$, *un point intérieur* F *tel que la circonférence* γ *tangente* : 1° *aux circonférences* γ_1 *et* γ_2 *de centres* A *et* B *et de rayons respectifs* AF *et* BF, *et* 2° *à* CD *tangente commune extérieure aux cercles* γ_1 *et* γ_2, *ait un rayon donné* R. *Discuter* (*E. M. Armes simples*, 1909).

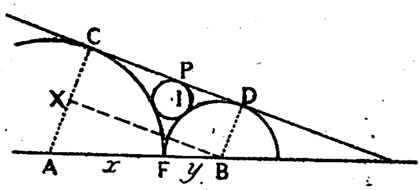


Fig. 72.

Désignons par x et y les rayons des cercles γ_1 et γ_2.

Traçons par B la parallèle à CD; elle coupe AC en X. Le triangle rectangle AXB donne

$$BX^2 = CD^2 = AB^2 - AX^2$$
$$= (x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy.$$

Les cercles γ_1 et γ donnent de même

$$CP^2 = 4xR;$$

et les cercles γ_2 et γ,

$$DP^2 = 4yR.$$

En tenant compte de ces trois relations, l'égalité

$$(CP + DP)^2 = CP^2 + DP^2 + 2CP.DP = CD^2$$

devient

$$4R(x + y + 2\sqrt{xy}) = 4xy.$$

On devra donc résoudre le système

$$x + y = a; \quad R(x + y + 2\sqrt{xy}) = xy.$$

En posant $\sqrt{xy} = u$, la seconde équation devient

$$f(u) = u^2 - 2Ru - aR = 0. \qquad (1)$$

Cette équation admet deux racines de signes contraires, une négative u'' qu'il faut écarter, et une positive u'.

Ayant calculé $u' = \sqrt{xy}$, on pourra former l'équation

$$X^2 - aX + u'^2 = 0, \tag{2}$$

dont les racines sont les valeurs de x et de y. Mais cette équation (2) n'a de racines que si on a

$$a^2 - 4u'^2 = (a + 2u')(a - 2u') \geqslant 0,$$

ce qui exige $u' \leqslant \frac{a}{2}$. La racine u' ne convient donc que si $\frac{a}{2}$ est supérieur aux racines de l'équation (1) ou égale à la plus grande. Les conditions de possibilité sont :

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4} - 2aR \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad a \geqslant 8R;$$

et

$$\frac{a}{2} > \frac{S}{2} = R \quad \text{ou} \quad a > 2R.$$

En résumé, on doit avoir $a \geqslant 8R$. Dans le cas particulier, où $a = 8R$, les cercles γ_1 et γ_2 ont des rayons égaux. Le rayon R a alors sa plus grande valeur (son maximum absolu), qui est $\frac{a}{8}$.

1025. *Trouver sur une circonférence de centre* A *et de rayon* R, *tangente à deux droites perpendiculaires* Ox *et* Oy, *un point* B *tel que le rectangle* BCOD *dont les côtés sont dirigés suivant* Ox, Oy *et deux parallèles à ces droites menées par* B, *ait un périmètre donné* 2p. *Discuter.* (*E. M. Armes simples*, 1912).

Le triangle rectangle ABE donne

$$R^2 = (x - R)^2 + (y - R)^2$$

ou

$$x^2 + y^2 = 2R(x + y) - R^2$$

En tenant compte de ce que $x + y = p$, cette équation peut s'écrire

$$p^2 - 2xy = 2Rp - R^2$$

ou

$$xy = \frac{1}{2}(p - R)^2.$$

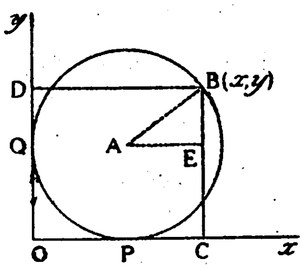


Fig. 73.

x et y sont donc les racines de l'équation

$$2u^2 - 2pu + (p - R^2) = 0.$$

Les racines de cette équation ne conviennent que si elles sont positives et inférieures à 2R; toutefois l'une d'elles peut être nulle ou égale à 2R. On doit avoir :

$$\rho = -p^2 + 4pR - 2R^2 \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad R(2 - \sqrt{2}) \leqslant p \leqslant R(2 + \sqrt{2});$$

$$f(0) = (p - R)^2 \geqslant 0; \quad f(2R) = (3R - p)^2 \geqslant 0;$$

$$0 < \frac{S}{2} = \frac{p}{2} < 2R \quad \text{ou} \quad 0 < p < 4R.$$

En résumé, on doit avoir

$$R(2-\sqrt{2}) \leqslant p \leqslant R(2+\sqrt{2}). \tag{1}$$

Si $p = R$, le rectangle se réduit à un segment de droite, OP ou OQ.

Si $p = R(2 \pm \sqrt{2})$, on a $x = y = \frac{R}{2}(2 \pm \sqrt{2})$ et le rectangle devient un carré. Les inégalités (1) montrent que les périmètres de ces carrés sont respectivement le maximum absolu et le minimum absolu de $2p$.

1026. *Déterminer sur l'hypoténuse* BC $= 2a$ *d'un triangle rectangle isocèle* ABC, *un point* M *tel que l'on ait*

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = k(\overline{MA}^2 + \overline{MC}^2).$$

Discuter, k *étant positif* (*E. M. Armes simples*, 1924).

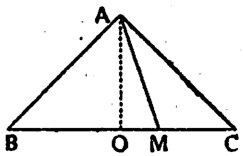


Fig. 74.

Posons $OM = x$. Nous supposerons que M reste à droite de O. De cette façon, x sera toujours positif; mais il est entendu qu'à toute valeur acceptable de x correspond une valeur opposée également acceptable. On a alors

$$BM = a + x \quad \text{et} \quad MC = a - x.$$

L'égalité donnée se réduit à

$$x^2 + a^2 + (x+a)^2 = k[x^2 + a^2 + (a-x)^2]$$

ou $$f(x) = x^2(k-1) - ax(k+1) + a^2(k-1) = 0. \tag{1}$$

Les racines de cette équation ne conviennent que si elles sont comprises entre 0 et a, à moins d'être égales à 0 ou a.

a) L'équation (1) a une racine comprise entre 0 et a, si on a

$$f(0)f(a) = a^4(k-1)(k-3) < 0$$

ou $$1 < k < 3.$$

b) L'équation (1) a deux racines entre 0 et a, si on a

$$\rho = a^2(-3k^2 + 10k - 3) > 0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{3} < k < 3;$$

$$(k-1)f(0) = a^2(k-1)^2 > 0 \quad \text{ou} \quad k \neq 1;$$

$$(k-1)f(a) = a^2(k-1)(k-3) > 0; \quad k < 1 \quad \text{ou} \quad k > 3;$$

$$0 < \frac{S}{2} = \frac{a(k+1)}{2(k-1)}; \quad k < -1 \quad \text{ou} \quad k > 1;$$

$$\frac{a(k+1)}{2(k-1)} < a \quad \text{ou} \quad \frac{k-3}{k-1} > 0; \quad k < 1 \quad \text{ou} \quad k > 3.$$

Ces inéquations sont incompatibles.

c) Si $k = 1$, l'équation devient $x = 0$;

Si $k = 3$, l'équation devient $(x-a)^2 = 0$ ou $x = a$.

1027. *On donne les trois côtés d'un triangle* (a > b > c). *Quelle longueur faut-il retrancher aux trois côtés pour que le triangle formé avec les côtés ainsi diminués soit rectangle* (*E. M. Armes simples*, 1926).

Soit x la longueur cherchée. Le triangle dont les côtés sont $a - x$, $b - x$, $c - x$ sera rectangle et il aura pour hypoténuse $a - x$. On a donc

$$(a - x)^2 = (b - x)^2 + (c - x)^2$$

ou $$f(x) = x^2 - 2x(b + c - a) + b^2 + c^2 - a^2 = 0.$$

Les racines de cette équation doivent vérifier les relations

$$0 \leqslant x \leqslant c.$$

On a :

$$f(0) = b^2 + c^2 - a^2;$$
$$f(c) = b^2 - a^2 + 2c(a - b) = (a - b)(2c - a - b).$$

En vertu des hypothèses, on a $2c < a + b$; $f(c)$ est donc négatif et c est compris entre les racines x'' et x'. La plus grande x' doit être écartée. La plus petite ne convient que si elle est positive ou nulle, ce qui exige $$f(0) = b^2 + c^2 - a^2 \geqslant 0.$$

Ces conditions sont réalisées si l'angle A du triangle donné est droit $(a^2 = b^2 + c^2)$ ou aigu $(a^2 < b^2 + c^2)$.

1028. *On donne les trois dimensions* a, b, c *d'un parallélipipède rectangle* (a < b < c), *et on demande de déterminer une longueur* x *telle que le parallélipipède rectangle ayant pour dimensions* a + x, b + x, c + x *ait une surface totale donnée* 2s.

L'équation du problème est

$$(a + x)(b + x) + (b + x)(c + x) + (c + x)(a + x) = s$$

ou $$f(x) = 3x^2 + 2(a + b + c)x + ab + bc + ca - s = 0.$$

Cette équation admet toujours deux racines, car son réalisant est

$$(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3s,$$

et les deux termes de cette somme sont positifs $(a < b < c)$. Une racine positive convient toujours; une racine négative ne convient que si on a $x \geqslant -a$.

1° Si $s < ab + bc + ca$, les deux racines sont négatives. Or

$$f(-a) = (b - a)(c - a) - s.$$

L'expression $(b - a)(c - a)$ est inférieur à $ab + bc + ca$, car on voit aisément que l'inégalité

$$(b - a)(c - a) < ab + bc + ca$$

se ramène aux relations $0 < a < 2(b + c)$, qui ont toujours lieu. On doit donc distinguer trois cas.

a) Si $s < (b - a)(c - a)$, l'expression $f(-a)$ est positive; $-a$ est extérieur aux racines et, comme la demi-somme est inférieure à $-a$, les deux racines sont inférieures à $-a$ et inacceptables.

b) Si $s > (b - a)(c - a)$, $-a$ est compris entre les racines. La plus petite en valeur absolue est seule acceptable.

c) Si $s = (b - a)(c - a)$, le parallélipidède se réduit à un rectangle et $x = -a$.

2° Si $s = ab + bc + ca$, on a

$$x'' = -\frac{2}{3}(a + b + c); \quad x' = 0.$$

La racine x'' est inférieure à $-a$; elle est donc inacceptable.

3° Si $s > ab + bc + ca$, les racines sont de signes contraires. La plus grande en valeur absolue est négative et inférieure à $-a$, car $f(-a)$ est négatif. La racine positive convient seule.

1029. *Étant donné un cône de rayon* R *et de hauteur* h, *déterminer la longueur* x *dont il faut diminuer la hauteur et augmenter le rayon pour que le volume ne change pas (E. M. Armes simples,* 1901).

L'équation du problème est

$$\frac{\pi}{3}(h - x)(R + x)^2 = \frac{\pi}{3}hR^2 \quad \text{ou} \quad (h - x)(R + x)^2 = hR^2. \tag{1}$$

Effectuons et écartons la solution évidente $x = 0$. Il vient

$$f(x) = x^2 + (2R - h)x + R^2 - 2hR = 0. \tag{2}$$

Les racines de cette équation ne conviennent que si elles sont positives et inférieures à h.

A cause de la forme particulière de l'équation (1), calculons $f(-R)$ et $f(h)$.

$$f(-R) = -hR; \quad f(h) = R^2.$$

Ces deux résultats ont des signes contraires. Il en résulte que l'équation (2) a toujours deux racines et qu'on a le classement

$$x'' < -R < x' < h.$$

D'autre part, on a

$$f(0) = R(R - 2h).$$

Si $R > 2h$, le nombre 0 est extérieur et par suite, supérieur aux racines; celles-ci sont négatives et le problème est impossible.

Si $R = 2h$, le nombre 0 est une racine; l'autre est négative et inacceptable.

Si $R < 2h$, les deux racines ont des signes contraires. La racine positive convient.

1030. *Calculer les dimensions d'un cylindre droit de surface totale* $2\pi a^2$, *inscrit dans une sphère de rayon* R.

Soient $2x$ la hauteur et y le rayon du cylindre. On a

$$2\pi y^2 + 4\pi xy = 2\pi a^2 \quad \text{ou} \quad y^2 + 2xy = a^2 \tag{1}$$

et

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{2}$$

Dans l'équation (2) remplaçons x par sa valeur

$$x = \frac{a^2 - y^2}{2y}, \tag{3}$$

tirée de l'équation (1). On obtient l'équation bicarrée

$$5y^4 - 2(a^2 + 2R^2)y^2 + a^4 = 0, \tag{4}$$

dont la résolvante est

$$f(z) = 5z^2 - 2(a^2 + 2R^2)z + a^4 = 0. \tag{5}$$

1° Pour qu'à une racine z de cette équation corresponde une racine acceptable $y = \sqrt{z}$ de l'équation (4), il faut d'abord que z soit positif et inférieur à R^2.

L'équation (5) admet des racines si

$$\rho = (a^2 + 2R^2)^2 - 5a^4 \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad a^2 + 2R^2 - a^2\sqrt{5} \geqslant 0,$$

ce qui exige $$a^2 \leqslant \frac{R^2}{2}(\sqrt{5} + 1). \tag{6}$$

Ces racines sont positives, car leur somme et leur produit sont positifs. Elles sont inférieures à R^2 si $a^2 \neq R^2$, car

$$f(R^2) = (R^2 - a^2)^2 \quad \text{est positif quand} \quad a^2 \neq R^2$$

et $$R^2 > \frac{S}{2} = \frac{a^2 + 2R^2}{5}, \quad \text{si la condition (6) est remplie.}$$

2° Ces conditions ne sont pas suffisantes. Il faut encore que la valeur de x, fournie par l'équation (3), soit positive, ce qui exige $z = y^2 < a^2$; et qu'on ait $x^2 < R^2$.

Cette dernière condition est toujours satisfaite, à cause de l'équation (2). Dès lors :

a) Le problème a une solution si

$$f(a^2) = 4a^2(a^2 - R^2) < 0 \quad \text{ou} \quad a^2 < R^2.$$

b) Le problème a deux solutions si on a :

$$\rho \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad a^2 \leqslant \frac{R^2}{2}(\sqrt{5} + 1);$$

$$f(a^2) = 4a^2(a^2 - R^2) > 0 \quad \text{ou} \quad a^2 > R^2;$$

$$a^2 > \frac{S}{2} = \frac{a^2 + 2R^2}{5} \quad \text{ou} \quad a^2 > \frac{R^2}{2}.$$

Ces trois conditions sont satisfaites quand on a

$$R^2 < a^2 \leqslant \frac{R^2}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

c) Si $a^2 = R^2$, on trouve

$$y = R \quad \text{ou} \quad \frac{R\sqrt{5}}{5} \quad \text{et} \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{2R\sqrt{5}}{5}.$$

1031. *Un cylindre et un cône ont même hauteur* h, *même surface totale et même volume. Calculer les rayons des bases.*

Soient x le rayon du cylindre, y celui du cône.

Les surfaces totales égales donnent l'équation

$$2\pi xh + 2\pi x^2 = \pi y^2 + \pi y\sqrt{h^2 + y^2}$$

ou

$$2x(h + x) = y(y + \sqrt{h^2 + y^2}). \tag{1}$$

Les volumes égaux donnent l'équation

$$\pi x^2 h = \frac{\pi y^2 h}{3} \quad \text{ou} \quad 3x^2 = y^2. \tag{2}$$

L'équation (2) donne $y = x\sqrt{3}$, car x et y ne peuvent être négatifs. En remplaçant dans (1), il vient, après avoir écarté la solution $x = 0$,

$$2h - x = \sqrt{3(h^2 + 3x^2)}.$$

Cette équation exige qu'on ait $x \leqslant 2h$.

Élevons au carré et ordonnons.

$$f(x) = 8x^2 + 4hx - h^2 = 0.$$

Cette équation admet toujours deux racines de signes contraires. La racine positive conviendra si elle est inférieure à $2h$. Or, on a

$$f(2h) = 39h^2 > 0.$$

Donc $2h$ est extérieur et par suite, supérieur aux racines. La racine positive convient toujours. La solution du problème est

$$x = \frac{h}{4}(\sqrt{3} - 1); \quad y = \frac{h}{4}(3 - \sqrt{3}).$$

1032. *La surface totale d'un cône est égale à celle d'une sphère de rayon* R *et son volume est égal à celui d'une autre sphère de rayon* r. *Calculer le rayon de la base et la hauteur du cône. Quel est le cône de volume maximum pour une surface totale donnée?*

Soient x le rayon de la base et y la hauteur. On a

$$\pi x^2 + \pi x\sqrt{x^2 + y^2} = 4\pi R^2 \quad \text{ou} \quad x^2 + x\sqrt{x^2 + y^2} = 4R^2; \tag{1}$$

et

$$\frac{\pi}{3}x^2 y = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{ou} \quad x^2 y = 4r^3. \tag{2}$$

L'équation (1) donne $x^2y^2 = 16R^4 - 8R^2x^2$.

En remplaçant y par sa valeur tirée de l'équation (2), on obtient l'équation bicarrée

$$R^2x^4 - 2R^4x^2 + 2r^6 = 0, \tag{3}$$

dont la résolvante est

$$f(z) = R^2z^2 - 2R^4z + 2r^6 = 0. \tag{4}$$

Pour qu'à une racine z de cette équation corresponde une racine acceptable $x = \sqrt{z}$ de l'équation (3), il faut que z soit positif et inférieur à $4R^2$, car l'équation (1) exige $4R^2 - x^2 > 0$. Ces conditions suffisent, car l'équation (2) fait correspondre à chaque valeur de x une valeur positive de y.

L'équation (4) admet des racines si

$$R^8 - 2R^2r^6 \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad R \geqslant r\sqrt[6]{2}.$$

Ces racines sont positives comme leur somme et leur produit. D'autre part, on a

$$f(4R^2) = 8R^6 + 2r^6 > 0 \quad \text{et} \quad 4R^2 > \frac{S}{2} = R^2,$$

et $4R^2$ est supérieur aux racines.

Le problème a donc deux solutions quand $R > r\sqrt[6]{2}$, et une quand $R = r\sqrt[6]{2}$.

Le volume du cône est maximum quand $r = R : \sqrt[6]{2}$. On a alors $x = R$ et $y = 2R\sqrt{2}$.

1033. *A quelle distance du centre d'une sphère de rayon* R *faut-il mener un plan sécant* AB *pour que la surface latérale du cône* CAB *inscrit à la sphère, soit la* n^e *partie de la zone de même hauteur?*

Soit $OI = x$. La surface latérale du cône est $\pi AI \times CA$; l'aire de la zone est $2\pi R \times CI$. On a

$$AI = \sqrt{R^2 - x^2}; \quad CA = \sqrt{2R(R + x)};$$
$$CI = R + x.$$

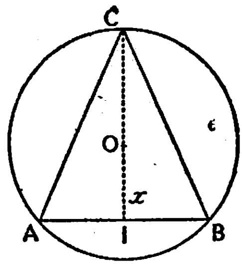


Fig. 75.

L'équation du problème est

$$\sqrt{R^2 - x^2} \times \sqrt{2R(R + x)} = \frac{2}{n}R(R + x)$$

ou $\quad n(R + x)\sqrt{2R(R - x)} = 2R(R + x).$

Cette équation se dédouble en

$$R + x = 0 \quad \text{et} \quad n\sqrt{2R(R - x)} = 2R.$$

La première donne $x = -R$. Cette solution donne un cône de surface nulle et une zone nulle.

La seconde donne

$$n^2(R - x) = 2R; \quad \text{d'où} \quad x = \frac{R(n^2 - 2)}{n^2}.$$

Cette solution n'est acceptable que si elle est comprise entre $-R$ et R. Il faut donc qu'on ait

$$-R < \frac{R(n^2 - 2)}{n^2} < R \quad \text{ou} \quad -n^2 < n^2 - 2 < n^2.$$

L'inégalité $n^2 - 2 < n^2$ est toujours satisfaite; il reste la condition

$$-n^2 < n^2 - 2 \quad \text{ou} \quad n^2 > 1 \quad \text{ou} \quad n > 1.$$

1034. *Couper une sphère de rayon* R *par un plan tel que le rapport des volumes des segments obtenus soit égal à* m *fois le rapport des aires des calottes sphériques correspondantes.*

Soit x la hauteur de l'un des segments; celle de l'autre sera $2R - x$.

Les volumes des segments sont

$$\frac{\pi x^2}{3}(3R - x) \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{3}(2R - x)^2 (R + x).$$

Les aires des zones correspondantes sont

$$2\pi R x \quad \text{et} \quad 2\pi R(2R - x).$$

L'équation du problème est donc

$$\frac{x^2(3R - x)}{(2R - x)^2 (R + x)} = \frac{mx}{2R - x}.$$

En écartant la solution $x = 0$, il vient

$$f(x) = (m - 1)x^2 - R(m - 3)x - 2mR^2 = 0. \tag{1}$$

Pour qu'une racine de cette équation convienne, il faut qu'elle soit positive et inférieure à $2R$.

L'équation (1) a deux racines, car son réalisant $(9m^2 - 14m + 9)R^2$ est toujours positif. Leur produit et leur somme sont respectivement

$$\frac{-2mR^2}{m - 1} \quad \text{et} \quad \frac{(m - 3)R}{m - 1}.$$

1° Si $0 < m < 1$, les deux racines sont positives comme leur somme et leur produit. L'égalité $(m - 1)f(2R) = 2(m - 1)R^2$ montre que $2R$ est intérieur aux racines. La petite racine convient seule.

2° Si $1 < m < 3$, le produit des racines est négatif; les racines ont des signes contraires. Comme $(m - 1) f(2R)$ est positif, $2R$ est extérieur aux racines et par suite, plus grand que la racine positive. Cette dernière convient.

3° Si $m > 3$, on trouve le même résultat.

4° Si $m = 1$, on a la solution acceptable $x = R$.

5° Si $m = 3$, on a la solution acceptable $x = R\sqrt{3}$.

1035. *On a placé sur un plan une sphère de rayon r et un cône de rayon* R *et de hauteur 2r. A quelle distance* x *du plan faut-il mener un plan parallèle pour que les deux volumes interceptés soient équivalents? Étudier la position de ce plan sécant par rapport au centre de la sphère.*

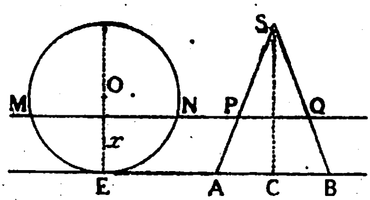


Fig. 76.

Le rayon de la section dans le cône étant $\frac{R}{2r}(2r - x)$, le volume du tronc de cône est

$$\frac{\pi x}{3}\left[R^2 + \frac{R^2}{4r^2}(2r - x)^2 + \frac{R^2}{2r}(2r - x)\right].$$

Celui du segment sphérique est

$$\frac{\pi x^2}{3}(3r - x).$$

L'équation du problème est après réduction

$$f(x) = (R^2 + 4r^2)x^2 - 6r(R^2 + 2r^2)x + 12R^2r^2 = 0. \qquad (1)$$

1° Les racines de cette équation ne conviennent que si elles sont positives et inférieures à $2r$.

a) L'équation admet des racines si on a

$$\rho = 9r^2(R^2 + 2r^2)^2 - 12R^2r^2(R^2 + 4r^2) \geqslant 0$$

ou

$$(R^2 - 2r^2)(R^2 + 6r^2) \leqslant 0.$$

On doit donc avoir

$$R^2 - 2r^2 \leqslant 0 \quad \text{ou} \quad R \leqslant r\sqrt{2}.$$

b) Ces racines sont positives à cause du signe de la somme et du produit.

c) On a $$f(2r) = 4r^2(R^2 - 2r^2).$$

$f(2r)$ est donc négatif quand la condition (2) est satisfaite; $2r$ est intérieur aux racines et la plus petite x'' est seule acceptable.

2° Pour étudier la position du plan sécant par rapport au centre de la sphère, calculons $f(r)$. On a

$$f(r) = r^2(7R^2 - 8r^2).$$

a) Si $R^2 < \frac{8r^2}{7}$, $f(r)$ est négatif; r est intérieur aux racines de l'équation (1), et par suite, supérieur à la racine acceptable x''. Le plan sécant est en-dessous du centre de la sphère.

b) Si $R^2 = \frac{8r^2}{7}$, $f(r)$ est nul; r est racine de l'équation (1); et comme r est inférieur à $2r$ qui est compris entre les racines, on a $x'' = r$. Le plan sécant passe par le centre.

c) Si $\frac{8r^2}{7} < R^2 \leqslant 2r^2$, $f(r)$ est positif, r est extérieur aux racines, et par suite, inférieur à x''. Le plan sécant est au-dessus du centre.

Exercices proposés aux concours d'admission à l'École militaire (Armes simples).

Dans la 1re Partie de ces **Exercices d'Algèbre,** voir les numéros : **1029** (1901), **914** (1902), **1020** (1903), **1021** (1904), **967** (1905), **963** (1906), **1003** (1907), **1024** (1909), **898** (1910), **1006** (1911), **1025** (1912), **916** (1921), **693** (1923), **1026** (1924), **1014** (1925), **1027** (1926), **1015** (1927), **984** (1928), **1022** (1929), **971** (1930).

1036 (1931). *On donne un cône de révolution de sommet* S *et d'angle au sommet* 2α. *On y inscrit des sphères de centres* O, O_1, O_2, ..., O_n, *tangentes entre elles deux à deux,* O *étant le centre de la plus grande de ces sphères. On pose* SO = a. *On demande de calculer les rayons* R, R_1, R_2, ... *de ces sphères et de démontrer que la somme de leurs volumes tend vers une limite* V, *que l'on calculera, quand* n *croît indéfiniment.*

1° Soient T, T_1, T_2, ... les points de contact de ces sphères avec une même génératrice ST du cône. Le triangle rectangle SOT donne $R = a\sin\alpha$. Les triangles SO_1T_1, SO_2T_2, ... sont semblables au triangle SOT; de là, on déduit successivement :

$$R_1 = \frac{R(a-R)}{a+R}; \quad R_2 = \frac{R(a-R)^2}{(a+R)^2}; \quad R_3 = \frac{R(a-R)^3}{(a+R)^3}; \ldots\ldots$$

2° La somme des volumes des sphères tend vers une limite finie quand n croît indéfiniment, car cette somme est une fonction croissante de n et elle reste inférieure au volume du cône que l'on obtient en menant par le point A (SA = SO + R) un plan perpendiculaire à l'axe SA de la surface conique de révolution.

3° En calculant les volumes des sphères, on voit qu'ils forment une progression géométrique décroissante ayant pour premier terme $\frac{4\pi R^3}{3}$ et pour raison $\frac{(a-R)^3}{(a+R)^3}$. La limite cherchée est donc

$$\frac{4\pi R^3}{3} : \left[1 - \frac{(a-R)^3}{(a+R)^3}\right] = \frac{2\pi R^2(a+R)^3}{3(3a^2+R^2)} = \frac{2\pi a^3\sin^2\alpha(1+\sin\alpha)^3}{3(3+\sin^2\alpha)}.$$

1037 (1932). *On rembourse un emprunt par une annuité de* n *termes en progression géométrique,* a, a + b, a + 2b, ..., *dont le premier est payable un an après l'emprunt. Quelle est la somme empruntée, si les intérêts sont composés et si le taux est* i *pour* 1 *franc? — Appliquer à* a = 1000, b = 100, i = 0,04, n = 20.

Au moment du versement du dernier terme de l'annuité, la valeur de la somme empruntée, xu^n, est égale à celle de l'annuité, c'est-à-dire à

$$\frac{a(u^n-1)}{i}+\left[\frac{b(u^{n-1}-1)}{i}+\frac{b(u^{n-2}-1)}{i}+\dots+\frac{b(u^2-1)}{i}+\frac{b(u-1)}{i}\right].$$

De là, on déduit

$$xu^n=\left(a+\frac{b}{i}\right)\frac{u^n-1}{i}-\frac{bn}{i}\quad \text{et}\quad x=(ai+b)\frac{u^n-1}{i^2u^n}-\frac{bn}{iu^n}.$$

Quand $a=1000$, $b=100$, $i=0{,}04$, $n=20$, on trouve à l'aide des logarithmes $x=47\,567{,}80-22\,818{,}90=24\,748{,}90$ fr.

1038 (1933). *On donne l'équation* $\mathrm{f(x)=x^2-2ax+1=0}$, *dont les racines sont* $\mathrm{x'}$ *et* $\mathrm{x''}$. 1° *Former l'équation en* y, $\mathrm{F(y)=0}$, *dont les racines sont* $\mathrm{y'=x'+\frac{b}{x''}}$ *et* $\mathrm{y''=x''+\frac{b}{x'}}$, b *étant différent de zéro.* 2° *Trouver les conditions pour que* $\mathrm{f(x)=0}$ *et* $\mathrm{F(y)=0}$ *aient des racines réelles, celles de* $\mathrm{F(y)=0}$ *comprenant entre elles une seule racine de* $\mathrm{f(x)=0}$.

1° Comme $x'x''=1$, on a $y'=(b+1)x'$ et $y''=(b+1)x''$. Donc $F(y)=0$ est la transformée en $(b+1)x$ de $f(x)=0$:

$$F(y)=y^2-2a(b+1)y+(b+1)^2=0.$$

2° Si $a^2-1>0$ et $b+1\neq 0$, $f(x)=0$ et $F(y)=0$ ont des racines distinctes.

Celles de $f(x)=0$ sont $x'=a-\sqrt{a^2-1}$, $x''=a+\sqrt{a^2-1}$. On doit avoir $F(x')\times F(x'')<0$, c'est-à-dire

$$[(b^2+2b-2a^2b)+2ab\sqrt{a^2-1}]\,[(b^2+2b-2a^2b)-2ab\sqrt{a^2-1}]<0$$

ou

$$b^4+4b^3+4b^2-4a^2b^3-4a^2b^2<0$$

ou encore, puisque $b\neq 0$,

$$b^2+4b+4-4a^2b-4a^2<0.$$

Cette condition peut s'écrire

$$(b+2)^2<4a^2(b+1).$$

1039 (1934). *Résoudre l'équation* $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{2x-x^2}=m$.

On doit supposer $m>0$. L'équation peut s'écrire

$$\sqrt{2x-x^2}=m-\sqrt{1-x^2}$$

et elle exige $0\leqslant x\leqslant 1$ avec $m\geqslant\sqrt{1-x^2}$. Une élévation au carré donne

$$2m\sqrt{1-x^2}=m^2+1-2x,$$

et une 2^e, en supposant $2x\leqslant m^2+1$,

$$4m^2(1-x^2)=4x^2-4x(m^2+1)+(m^2+1)^2$$

ou

$$f(x)=4(m^2+1)x^2-4x(m^2+1)+(m^2-1)^2=0. \qquad (1)$$

Le réalisant de $f(x) = 0$ est $4m^2(m^2 + 1)(3 - m^2)$. Comme $m > 0$ l'équation (1) n'a de racines que pour $m \leqslant \sqrt{3}$.

Si $m = \sqrt{3}$, on trouve la racine acceptable $x = 0{,}5$.

Si $m = 1$, on trouve deux racines acceptables, 0 et 1.

Soit ensuite $m < \sqrt{3}$ avec $m \neq 1$. L'équation (1) admet alors deux racines, qui sont positives comme leur somme et leur produit; elles sont aussi inférieures à 1, car on a $f(1) = (m^2 - 1)^2 > 0$ et 1 est supérieur à la demi-somme des racines, 0,5. Elles conviennent donc si elles vérifient les relations

$$x \leqslant \frac{m^2 + 1}{2} \quad (2) \quad \text{et} \quad \sqrt{1 - x^2} \leqslant m. \quad (3)$$

Mais on a

$$f\left(\frac{m^2 + 1}{2}\right) = m^2(m + 1)(m^2 + 3)(m - 1),$$

ce qui amène à distinguer deux cas.

1° Si $1 < m < \sqrt{3}$, $\dfrac{m^2 + 1}{2}$ est extérieur aux racines et supérieur à leur demi-somme. De plus, la relation (3) est vérifiée. Donc les deux racines conviennent.

2° Si $m < 1$, $\dfrac{m^2 + 1}{2}$ sépare les deux racines. Donc la plus grande doit être écartée. Il reste à examiner la plus petite.

Si on avait effectué les élévations au carré en partant de

$$\sqrt{1 - x^2} = m - \sqrt{2x - x^2},$$

on aurait encore abouti à l'équation (1), mais les conditions seraient

$$x \geqslant \frac{1 - m^2}{2} \quad \text{et} \quad m \geqslant \sqrt{2x - x^2}.$$

On trouve ensuite

$$f\left(\frac{1 - m^2}{2}\right) = m^2(m + 1)(m^2 + 3)(m - 1).$$

Il en résulte que $\dfrac{1 - m^2}{2}$ sépare aussi les deux racines de (1) et que la plus petite doit être écartée.

Ainsi, si $m < 1$, les deux racines sont inacceptables.

1040 (1935). *On donne le trinôme* $f(x) = ax^2 + bx + c$. *On demande de déterminer trois nombres* x_1, x_2 *et* x_3 *en progression arithmétique et tels que* $f(x_1)$, $f(x_2)$ *et* $f(x_3)$ *soient en progression géométrique.*

Soient $\alpha - r,\ \alpha,\ \alpha + r$ ces trois nombres. On doit avoir

$$[f(x_2)]^2 = f(x_1) \times f(x_3)$$

ou
$$2ar^2(a\alpha^2 + b\alpha + c) - r^2(2a\alpha + b)^2 + a^2r^4 = 0. \qquad (1)$$

Si $r = 0$, α est indéterminé. Soit donc $r \neq 0$. L'équation (1) devient alors

$$2a^2\alpha^2 + 2ab\alpha + (b^2 - 2ac - a^2r^2) = 0. \qquad (2)$$

Le réalisant de cette équation en α est

$$\rho = a^2(2a^2r^2 + 4ac - b^2).$$

1° On a $\rho = 0$ pour $r^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{2a^2}$. Par suite, si $b^2 - 4ac > 0$ et si on prend $r = \pm\sqrt{\dfrac{b^2 - 4ac}{2a^2}}$, (2) donne une valeur unique pour α.

2° On a $\rho > 0$ pour $r^2 > \dfrac{b^2 - 4ac}{2a^2}$. Par suite :

a) Si $b^2 - 4ac > 0$, (2) donne deux valeurs acceptables pour α, pourvu qu'on attribue à r une valeur telle que $r^2 > \dfrac{b^2 - 4ac}{2a^2}$.

b) Si $b^2 - 4ac \leqslant 0$, (2) donne deux valeurs acceptables pour α, quelle que soit la valeur attribuée à r.

1041 (1936). *Si les nombres positifs* x, y, z *sont trois termes consécutifs d'une P. G., on a* $(x + y + z)(x - y + z) = x^2 + y^2 + z^2$. *Trouver ces nombres si leur somme est* a *et la somme de leurs carrés,* b^2. — *Discuter.*

Cet exercice est analogue au n° **1023**.

1042 (1937). *Dans une sphère de rayon* R, *on porte* x = CA *sur le diamètre* AOA′ *et on mène par* C *la section* BB′ *perpendiculaire à* AOA′. *Calculer* x *de manière que la somme de l'aire de la calotte* BAB′ *et de l'aire latérale du cône* BOB′ *soit égale à* πa^2. *Discuter suivant les valeurs de* a^2.

L'équation du problème est

$$2\pi Rx + \pi R\sqrt{x(2R - x)} = \pi a^2 \quad \text{ou} \quad R\sqrt{x(2R - x)} = a^2 - 2Rx.$$

Cette équation exige $a^2 - 2Rx \geqslant 0$. Quand cette condition est remplie, on a $x(2R - x) \geqslant 0$ ou $0 \leqslant x \leqslant 2R$. Une élévation au carré donne

$$R^2x(2R - x) = (a^2 - 2Rx)^2$$

ou
$$f(x) = 5R^2x^2 - 2x(2a^2R + R^3) + a^4 = 0. \qquad (1)$$

Une racine de cette équation ne convient que si elle vérifie la relation

$$a^2 - 2Rx \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad x \leqslant \frac{a^2}{2R}.$$

1° L'équation (1) a une racine acceptable (la plus petite) si

$$f\left(\frac{a^2}{2R}\right)=\frac{a^2}{4}(a^2-4R^2)<0 \quad \text{ou} \quad a^2<4R^2.$$

2° L'équation (2) a deux racines acceptables, si on a :

$a)$ $\quad = R^2(R^4+4a^2R^2-a^4)>0$ ou $a^2<R^2(2+\sqrt{5})$.

$b)$ $f\left(\frac{a^2}{2R}\right)=\frac{a^2}{4}(a^2-4R^2)>0$ ou $a^2>4R^2$.

$c)$ $\frac{a^2}{2R}>\frac{2a^2R+R^3}{5R^2}$ ou $a^2>2R^2$.

En résumé, on doit avoir $4R^2<a^2<R^2(2+\sqrt{5})$.

3° Pour $a^2=4R^2$, on a $x=2R$ ou $\frac{8}{5}R$.

4° Pour $a^2=R^2(2+\sqrt{5})$, on a $x=\frac{R}{5}(5+2\sqrt{5})$.

1043 (1938). *Après avoir roulé une heure, un train, allant de* A *à* B, *s'arrête une heure; il continue ensuite avec une vitesse qui est les* 3/5 *de la vitesse initiale et arrive en* B *avec un retard de* 3 *heures sur l'horaire. Si l'arrêt s'était produit* 50 *km. plus loin, le train serait arrivé* 1 *h.* 40 *min. plus tôt. Chercher la distance* AB *et la vitesse initiale.*

Soit x km. la vitesse initiale. La différence entre les temps nécessaires pour parcourir 50 km. à la vitesse $\frac{3x}{5}$ ou à la vitesse x est $\frac{5}{3}$ d'h. D'où

$$50\times\frac{5}{3x}-\frac{50}{x}=\frac{5}{3} \quad \text{et} \quad x=20 \text{ km.}$$

Soit y h. le temps nécessaire pour parcourir AB à la vitesse 20 km. On a $AB=20y$ et aussi $AB=20+12(y+1)$ (1^{er} voyage). D'où

$$20+12(y+1)=20y \quad \text{et} \quad y=4.$$

La distance AB mesure 20 km. $\times$ 4 $=$ 80 km.

Le programme d'admission à l'École Militaire depuis 1946 prévoit, en ce qui concerne l'ancienne Division Infanterie-Cavalerie remplacée par la Division « Toutes Armes », des notions sur les dérivées et les variations de fonctions. Il a de ce fait paru plus simple de placer les questions posées depuis lors à la fin de la deuxième partie (voir page 1014).

DEUXIÈME PARTIE

Exercices proposés dans les Compléments d'Arithmétique et d'Algèbre.

CHAPITRE I

Nombres irrationnels.

1. *Si le nombre α' est nul, on a* $\alpha + \alpha' = \alpha$.

Supposons que le nombre α soit défini par les suites (a) et (b). Le nombre $\alpha' = 0$ est défini par une suite négative $(-a')$ et une suite positive $(+b')$. La somme $\alpha + 0$ sera définie par les suites $(a - a')$, $(b + b')$. Mais on a évidemment
$$a - a' < \alpha < b + b'.$$
Les suites $(a - a')$ et $(b + b')$ définissent donc aussi le nombre α et
$$\alpha + 0 = \alpha.$$

2. *L'opposé de zéro est zéro lui-même.*

En effet, zéro est défini par une suite négative $(-a)$ et une suite positive (b). Son opposé est défini par les suites $(-b)$, (a). La première de ces suites est négative et la seconde, positive; elles définissent donc encore le nombre zéro.

3. *Si* S *est la somme des nombres α et α', son opposé* — S *est la somme des deux nombres* $-\alpha$ *et* $-\alpha'$.

Supposons que α soit défini par les suites (a), (b) et α' par les suites (a'), (b').

S sera défini par les suites $(a + a')$, $(b + b')$ et son opposé — S par les suites $(-b-b')$, $(-a-a')$. On voit que — S est effectivement la somme des deux nombres $-\alpha$ et $-\alpha'$, qui sont définis respectivement par les suites $(-b)$, $(-a)$ et $(-b')$, $(-a')$.

4. — I. *Si α est plus grand que α', la différence $\alpha - \alpha'$ est un nombre positif.*

Soit N un nombre rationnel tel que l'on ait $\alpha' < N < \alpha$. Limitons la suite (b') aux termes plus petits que N et la suite (a) aux termes plus grands que N.

Les suites $(a - b')$ et $(b - a')$ qui définissent $\alpha - \alpha'$, seront deux suites positives; donc la différence $\alpha - \alpha'$ est elle-même un nombre positif.

II. *Si α est plus petit que α', la différence $\alpha - \alpha'$ est un nombre négatif.*
Cette proposition se démontre d'une façon analogue à la précédente.

III. *Si α est égal à α', la différence $\alpha - \alpha'$ est nulle.*

En effet, retrancher α' de α revient à former la somme $\alpha + (-\alpha')$. Cette somme peut s'écrire $\alpha + (-\alpha)$ car $\alpha = \alpha'$, et elle est nulle, car la somme de deux nombres opposés est nulle.

IV. *Les réciproques des propositions précédentes sont vraies* en vertu du principe général des réciproques.

V. *Les propriétés des inégalités* sont des conséquences des propriétés précédentes (*Traité*, Ch. VII).

5. *La somme de deux nombres de mêmes signes a le même signe que les deux nombres et sa valeur absolue est la somme de leurs valeurs absolues.*

1° Considérons deux nombres positifs α et α', le nombre α étant défini par les suites positives (a), (b) et α' par les suites positives (a'), (b'). Leur somme S est un nombre positif, car elle est définie par les suites positives $(a + a')$ et $(b + b')$. Les nombres α, α' et S étant positifs, l'égalité $\alpha + \alpha' = S$ peut s'écrire

$$|+\alpha| + |+\alpha'| = |+S|.$$

2° Considérons les deux nombres négatifs $-\alpha$ et $-\alpha'$, le nombre $-\alpha$ étant défini par les suites négatives $(-a)$, $(-b)$ et $-\alpha'$ par les suites négatives $(-a')$, $(-b')$. Leur somme sera définie par les suites négatives $(-a-a')$, $(-b-b')$. Elle est donc négative et en la désignant par $-S$, on aura

$$(-\alpha) + (-\alpha') = -S.$$

On aura également (3) $\alpha + \alpha' = S$
ou $$|-\alpha| + |-\alpha'| = |-S|.$$

6. *La somme de deux nombres de signes contraires a le même signe que le nombre qui a la plus grande valeur absolue; sa valeur absolue est la différence des valeurs absolues des deux nombres.*

Considérons le nombre positif α et le nombre négatif $-\alpha'$. Supposons que l'on ait $\alpha < \alpha'$. On aura (4)

$$\alpha - \alpha' < 0 \quad \text{ou} \quad \alpha + (-\alpha') < 0.$$

La somme $\alpha + (-\alpha')$ est donc négative. Posons

$$\alpha + (-\alpha') = -S.$$

On aura (3) $(-\alpha) + (+\alpha') = S$ ou $\alpha' - \alpha = S$;
et aussi, en vertu de la définition de la soustraction,

$$\alpha' = \alpha + S.$$

Par suite,

$$|-\alpha'| = |+\alpha| + |-S| \quad \text{ou} \quad |-S| = |-\alpha'| - |+\alpha|.$$

7. *La valeur absolue d'une somme de deux nombres est inférieure ou égale à la somme des valeurs absolues des deux nombres; elle est supérieure ou égale à la différence de leurs valeurs absolues.*

La première partie de ce théorème est une conséquence immédiate des deux problèmes précédents (5 et 6). Démontrons la seconde partie. On a

$$|\alpha| = |(\alpha+\beta) + (-\beta)| \leqslant |\alpha+\beta| + |-\beta|$$

ou

$$|\alpha| \leqslant |\alpha+\beta| + |\beta|.$$

Donc

$$|\alpha+\beta| \geqslant |\alpha| - |\beta|.$$

8. *La valeur absolue d'une somme algébrique est inférieure ou égale à la somme des valeurs absolues des termes de la somme algébrique.*

En effet, considérons la somme algébrique

$$S = \alpha - \beta + \gamma - \delta.$$

On a

$$|\alpha-\beta+\gamma| = |(\alpha-\beta)+\gamma| \leqslant |\alpha-\beta| + |\gamma|,$$

ou, en remplaçant $|\alpha-\beta|$ par $|\alpha| + |-\beta|$, qui lui est supérieur ou égal,

$$|\alpha-\beta+\gamma| \leqslant |\alpha| + |-\beta| + |\gamma|.$$

De même, on a

$$|S| = |(\alpha-\beta+\gamma)-\delta| \leqslant |\alpha-\beta+\gamma| + |-\delta|,$$

ou, en remplaçant $|\alpha-\beta+\gamma|$ par $|\alpha| + |-\beta| + |\gamma|$ qui lui est supérieur ou égal,

$$|S| \leqslant |\alpha| + |-\beta| + |\gamma| + |-\delta|.$$

9. *Si* $\alpha = +1$, *on a* $\alpha\alpha' = \alpha'$; *si* $\alpha = -1$, *on a* $\alpha\alpha' = -\alpha'$.

1° Supposons α' positif et défini par les suites positives (a'), (b'); supposons aussi que $\alpha = 1$ soit défini par les suites positives (a) et (b).

Le produit $\alpha' \times 1$ est défini par les suites (aa'), (bb'). Mais on a

$$a < 1 < b \quad \text{et} \quad a' < \alpha' < b'.$$

Il en résulte que α' est compris entre aa' et bb'. Les suites (aa'), (bb') définissent donc également le nombre α' et on a $\alpha' \times 1 = \alpha'$.

Si α' est négatif et égal à $-\beta$, on obtient le produit $\alpha' \times 1$ en formant le produit $\beta \times 1 = \beta$ des valeurs absolues des facteurs et en affectant ce résultat du signe —. On a donc $\alpha' \times 1 = -\beta$, et $-\beta$ peut s'écrire $-(-\alpha')$ ou α'.

2° Si α' est positif, on obtient le produit $\alpha' \times (-1)$ en formant le produit $\alpha' \times 1 = \alpha'$ des valeurs absolues et en affectant le résultat du signe —. On a donc $\alpha' \times (-1) = -\alpha'$.

Si α' est négatif et égal à $-\beta$, on trouve de même

$$\alpha' \times (-1) = +\beta = -\alpha'.$$

10. *Si* $\alpha = 0$, *on a* $\alpha\alpha' = 0$.

Supposons α' positif et défini par les suites positives (a'), (b'). Si le nombre $\alpha = 0$ est défini par les suites (a) et (b), la suite (a) sera négative et la suite (b) positive.

On montrerait comme dans la théorie de la multiplication (*Compléments*, 23) que les suites (aa'), (bb') sont contiguës. Le nombre qu'elles définissent est zéro, car la suite (aa') est négative et la suite (bb') positive. En étendant à ce cas particulier la définition posée dans *nos Compléments* pour le produit de deux nombres positifs, on a donc

$$\alpha' \times 0 = 0.$$

Si α' est négatif et égal à $-\beta$, on obtient le produit $\alpha' \times 0$ en formant le produit $\beta \times 0 = 0$ des valeurs absolues et en affectant le résultat du signe —. On a donc $\alpha' \times 0 = -(\beta \times 0) = -0 = 0$.

11. *Le nombre positif* α *est défini par les suites* (a), (b). *Construire des suites pouvant définir les puissances* α^m, $(-\alpha)^{2n}$ *et* $(-\alpha)^{2n+1}$.

1° La puissance α^m est un produit de m facteurs égaux à a. Elle est donc définie par les suites (a^m), (b^m).

2° On a $(-\alpha)^{2n} = \alpha^{2n}$. La puissance $(-\alpha)^{2n}$ est donc définie par les suites (a^{2n}), (b^{2n}).

3° On a $(-\alpha)^{2n+1} = -\alpha^{2n+1}$. La puissance $(-\alpha)^{2n+1}$ est donc définie par les suites $(-b^{2n+1})$, $(-a^{2n+1})$.

12. *Un nombre rationnel positif* α' *dont on sait qu'il est la racine* me *du nombre positif* α, *est encore sa racine* m^e *quand on applique la définition de la racine* me *d'un nombre réel positif.*

Supposons que α soit défini par les suites (a^m) et (b^m). Sa racine m^e positive sera définie par les suites (a) et (b).

Mais par hypothèse, on a $\alpha = \alpha'^m$, α et α' étant rationnels.

Il en résulte que les suites (a^m) et (a) renferment respectivement α'^m et α' comme plus grand terme. On a donc $a_n \leqslant \alpha' < b_n$ et α' est égal à la racine m^e de α.

CHAPITRE II

Radicaux et exposants.

§ I. — PUISSANCES ET RACINES

13. *Simplifier les expressions suivantes :*

1° $(-a^2)^5 = -a^{10}$

2° $(-a^{2n-1})^4 = a^{8n-4}$

3° $(-a^2)^{2n} = a^{4n}$

4° $(-a^n)^{2n-1} = -a^{2n^2-n}$

5° $[(-a^2)^4]^3 = a^{24}$

6° $[-(-a^3)^4]^3 = -a^{36}$.

7° $[-(-a^4)^3]^4 = a^{48}$

8° $(a+b)^m (a-b)^m = (a^2-b^2)^m$

9° $[(a+b)^m]^{2n} [(b-a)^n]^{2m} = (a^2-b^2)^{2mn}$

10° $\dfrac{(49x^2-36y^2)^m}{(7x-6y)^m} = (7x+6y)^m$

11° $a^{2n}\left(\dfrac{b^2-ab}{a^2-ab}\right)^{2n} = a^{2n}\left(-\dfrac{b}{a}\right)^{2n} = b^{2n}$

12° $\dfrac{8^n \times (2^{n-1})^n}{2^{n+1} \times 2^{n-1}} = (2^n)^n$

13° $\dfrac{3.2^n - 4.2^{n-2}}{2^n - 2^{n-1}} = 4$

14° $\dfrac{2^{n+1}}{(2^n)^{n-1}} : \dfrac{4^{n+1}}{(2^{n-1})^{n+1}} = \dfrac{1}{4}$

15° $\dfrac{3^{n+4} - 6.3^{n+1}}{3^{n+2} \times 7} = 1$

16° $\left(\dfrac{a+b}{c-d}\right)^3 \times \left(\dfrac{1}{a+b}\right)^2 \times \dfrac{c-d}{a+b} = \dfrac{1}{(c-d)^2}$

17° $\left(\dfrac{a+b}{c-x}\right)^m \times \left(\dfrac{c+x}{a+b}\right)^m \times \left(\dfrac{x-c}{a-b}\right)^m = \left(\dfrac{c+x}{b-a}\right)^m$.

14. *Simplifier les expressions suivantes, en supposant que toutes les lettres représentent des nombres positifs :*

1° $\sqrt[6]{a^4b^2} = \sqrt[3]{a^2b}$

2° $\sqrt[4]{64a^8b^6} = 2a^2b\sqrt{2b}$

3° $5\sqrt[3]{\dfrac{8}{75}} = \dfrac{2}{3}\sqrt[3]{45}$

4° $4\sqrt[3]{\dfrac{3}{80}} = \dfrac{1}{5}\sqrt[3]{300}$

5° $\sqrt{\sqrt[3]{4a^2}} = \sqrt[3]{2a}$

6° $\sqrt[5]{\sqrt[3]{-a^5}} = \sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$

7° $\dfrac{a^2}{b}\sqrt[4]{b^5x} = a^2\sqrt[4]{bx}$

8° $\sqrt[3]{\dfrac{1}{64}\sqrt{2}} = \dfrac{1}{4}\sqrt[6]{2}$

9° $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{20}}} = x\sqrt[3]{x}$

10° $\sqrt[3]{2a\sqrt{2a}} = \sqrt{2a}$

11° $\left(\sqrt{a\sqrt[6]{a^8}}\right)^4 = a^5\sqrt[6]{a}$

12° $\sqrt[3]{\dfrac{3}{\sqrt[4]{3}}} = \sqrt[4]{3}$

13° $\left(\sqrt[12]{ab^3c^7}\right)^4 = bc^2\sqrt[3]{ac}$

14° $\left(\sqrt[7]{-a\sqrt{3a}}\right)^{14} = 3a^3$

15° $\left(\sqrt[8]{\sqrt[7]{-8a^3}}\right)^7 = -2a$

16° $\sqrt[n-1]{\dfrac{a}{\sqrt[n]{a}}} = \sqrt[n]{a}.$

15. *Effectuer les opérations suivantes :*

1° $\sqrt[3]{56} + \sqrt[3]{189} + \sqrt[3]{448} = 2\sqrt[3]{7} + 3\sqrt[3]{7} + 4\sqrt[3]{7} = 9\sqrt[3]{7}$

2° $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16} + \sqrt{12} - \sqrt{3}$
$= 3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$

3° $4\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{-3} + \sqrt[3]{-81} = 8\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{3} = 4\sqrt[3]{3}$

4° $\sqrt[6]{16} - \sqrt[4]{4} + \sqrt[3]{-4} = \sqrt[3]{4} - \sqrt{2} - \sqrt[3]{4} = -\sqrt{2}$

5° $\sqrt{50} - \sqrt[4]{324} - \sqrt[6]{2916} + \sqrt[8]{256}$
$= 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 3\sqrt[3]{2} + 2 = 2\sqrt{2} - 3\sqrt[3]{2} + 2$

6° $9\sqrt[3]{2a^6x} + 3\sqrt[3]{-16a^3x} + \sqrt[3]{2x}$
$= 9a^2\sqrt[3]{2x} - 6a\sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{2x} = (3a-1)^2\sqrt[3]{2x}.$

16. *Effectuer les opérations suivantes :*

1° $5\sqrt[3]{18} \times \sqrt[3]{6} = 15\sqrt[3]{4}$

2° $\sqrt[4]{20} \times \sqrt{2} = 2\sqrt[4]{5}$

3° $3\sqrt[4]{a} \times 7\sqrt[6]{a^5b} = 21a\sqrt[12]{ab^2}$

4° $\sqrt[3]{12} : 2\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt[6]{18}$

5° $5\sqrt[4]{18} : \sqrt[4]{8} = \frac{5}{2}\sqrt{6}$

6° $4\sqrt[3]{-12} : 2\sqrt{2} = -2\sqrt[6]{18}$

7° $\sqrt{a} \times \sqrt[3]{-a} \times \sqrt[4]{a} = -a\sqrt[12]{a}$

8° $\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} \times \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} = 1$

9° $\left(a\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a^2} + 1\right)\left(\sqrt[3]{a^2} + 1\right) = a^2 + 1.$

17. *Rendre rationnel le dénominateur des fractions suivantes :*

1° $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}} = \dfrac{1}{2}\sqrt[6]{32}$

2° $\dfrac{\sqrt[5]{27}}{\sqrt[4]{9}} = \sqrt[10]{3}$

3° $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{-3}} = -\sqrt[6]{3}$

4° $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3}} = 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{9}$

5° $\dfrac{2}{\sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{2}} = 2\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{8}$

6° $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2} + 1} = \left(\sqrt[4]{2} - 1\right)\left(\sqrt{2} + 1\right)$

7° $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}} = (\sqrt[3]{3}+\sqrt{2})(3\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{9}+4)$

8° $\dfrac{6}{\sqrt[5]{9}-\sqrt[3]{-3}} = \sqrt[3]{9}$

9° $\dfrac{2}{\sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{3}}} = \sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{4}$

10° $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} = \dfrac{a\sqrt[3]{a}+b\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{a^2b^2}}{a-b}$

11° $\dfrac{a+1}{\sqrt[5]{a^2}+\sqrt[5]{a}} = \dfrac{\sqrt[5]{a^4}}{a}(\sqrt[5]{a^4}-\sqrt[5]{a^3}+\sqrt[5]{a^2}-\sqrt[5]{a}+1)$

12° $\dfrac{\sqrt[3]{a^4}-8b\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{ab}+4\sqrt[3]{b^2}} = \sqrt[3]{a}\,(\sqrt[3]{a}-2\sqrt[3]{b}).$

18. *Si* $\sqrt[3]{\mathrm{x}^3+\sqrt{\mathrm{x}^6-8\mathrm{y}^6}}+\sqrt[3]{\mathrm{x}^3-\sqrt{\mathrm{x}^6-8\mathrm{y}^6}} = \mathrm{a}$, *on a aussi*

$$2\mathrm{x}^3 + 6\mathrm{a}\mathrm{y}^2 = \mathrm{a}^3.$$

Élevons au cube les deux membres de l'égalité donnée, en remarquant que

$$(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta).$$

Il vient ainsi

$$2x^3 + 3\sqrt[3]{8y^6} \times a = a^3 \quad \text{ou} \quad 2x^3 + 6ay^2 = a^3.$$

19. *Montrer que l'on a :*

1° $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} = 2.$

En désignant le premier membre de cette égalité par a, on a

$$a^3 = 14 + 3\sqrt[3]{-1} \times a,$$

ou encore,

$$a^3 = 14 - 3a.$$

Cette relation peut s'écrire

$$(a-2)(a^2+2a+7) = 0.$$

Comme le trinôme a^2+2a+7 est essentiellement positif, on devra avoir $a = 2$.

2° $$\frac{\sqrt[4]{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{c})} + \frac{\sqrt[4]{b}}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}-\sqrt{a})}$$

$$+ \frac{\sqrt[4]{c}}{(\sqrt{c}-\sqrt{a})(\sqrt{c}-\sqrt{b})} = \frac{-1}{(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c})(\sqrt[4]{c}+\sqrt[4]{a})}.$$

En réduisant les trois termes du premier membre au même dénominateur, on trouve que le premier membre vaut

$$\frac{-\sqrt[4]{a}\,(\sqrt{b}-\sqrt{c})-\sqrt[4]{b}\,(\sqrt{c}-\sqrt{a})-\sqrt[4]{c}\,(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})\,(\sqrt{b}-\sqrt{c})\,(\sqrt{c}-\sqrt{a})}.$$

En multipliant les deux termes du second membre par l'expression

$$(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})\,(\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{c})\,(\sqrt[4]{c}-\sqrt[4]{a}),$$

il devient
$$\frac{-(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})\,(\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{c})\,(\sqrt[4]{c}-\sqrt[4]{a})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})\,(\sqrt{b}-\sqrt{c})\,(\sqrt{c}-\sqrt{a})}.$$

Il suffira d'effectuer les deux numérateurs pour voir qu'ils sont égaux.

20. *Vérifier que l'on a*

$$\frac{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}+\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}+1}}}=\sqrt{2}.$$

Les deux membres de cette égalité sont positifs. Ils sont donc égaux, si leurs carrés sont égaux. En élevant le premier membre au carré, on trouve

$$\frac{2\sqrt[4]{8}+2\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}+1}}=2.$$

§ II. — EXPOSANTS FRACTIONNAIRES OU NÉGATIFS.

21. *Chercher les nombres rationnels représentés par les expressions suivantes :*

1° $9^{\frac{1}{2}}=\sqrt{9}=3$

2° $16^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{16}=2$

3° $7^{-2}=\frac{1}{49}$

4° $9^{-1}=\frac{1}{9}$

5° $27^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{27}}=\frac{1}{3}$

6° $4^{-0,5}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$

7° $27^{-\frac{4}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{27^4}}=\frac{1}{81}$

8° $32^{-\frac{3}{5}}=\frac{1}{\sqrt[5]{32^3}}=\frac{1}{8}.$

22. *Simplifier les expressions suivantes en ne laissant que des exposants positifs.*

1° $a^{\frac{3}{4}}\times a^{\frac{4}{6}}=a^{\frac{17}{12}}$

2° $(\sqrt{a^2b^3})^6=(a^2b^3)^3=a^6b^9$

3° $\sqrt{x\sqrt[3]{x^{-1}}} = x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{3}}$

4° $\left(\dfrac{27x^3}{8a^{-3}}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\dfrac{3^3x^3}{2^3a^{-3}}\right)^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{3^{-2}x^{-2}}{2^{-2}a^2} = \dfrac{4}{9a^2x^2}$

5° $\left(\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}}{4b^2}\right)^{-2} = \dfrac{a}{2^{-4}b^{-4}} = 16ab^4$

6° $a^{-\frac{1}{2}} \times a^{\frac{7}{4}} \times a^{-\frac{6}{5}} = a^{\frac{1}{20}}$

7° $(4a^{-2} : 9x^2)^{-\frac{1}{2}} = 2^{-1}a : 3^{-1}x^{-1} = \dfrac{3ax}{2}$

8° $(\sqrt{a^{-2}b} \times \sqrt{ab^{-3}})^6 = a^{-6}b^3 \times a^3b^{-9} = a^{-3}b^{-6} = \dfrac{1}{a^3b^6}$

9° $\left(\dfrac{a^{-2}b}{a^3b^{-4}}\right)^{-3} : \left(\dfrac{ab^{-1}}{a^{-3}b^2}\right)^5 = a^{15}b^{-15} : a^{20}b^{-15} = \dfrac{1}{a^5}$

10° $\left[\dfrac{a^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{2}}}{ax^{-1}}\right]^2 : \sqrt[3]{\dfrac{a^{-1}}{x^{-3}}} = a^{-\frac{10}{3}}x^3 : a^{-\frac{1}{3}}x = \dfrac{x^2}{a^3}$

11° $\sqrt[3]{x^{-1}\sqrt{y^3}} : \sqrt{y\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}} : y^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{6}} = 1 : x^{\frac{1}{2}}$

12° $(a^{-\frac{1}{2}}\sqrt[3]{x})^{-3} \times \sqrt{x^2\sqrt{a^{-6}}} = a^{\frac{3}{2}}x^{-1} \times xa^{-\frac{3}{2}} = 1$

13° $\sqrt[4]{(a+b)^6} \times (a^2 - b^2)^{-\frac{1}{2}} = (a+b) : (a-b)^{\frac{1}{2}}$

14° $\left(x^{-\frac{1}{4}}\sqrt{x^{-\frac{1}{2}}\sqrt{x^3}.\sqrt[3]{x^{-4}}}\right)^{-2} = \left(x^{-\frac{5}{12}}\right)^{-2} = x^{\frac{5}{6}}$

15° $\left(\dfrac{x^{-2}y^3}{x^3y^{-2}}\right)^{-\frac{1}{5}} \times \left(\dfrac{y^3x^{-3}}{x^3y^{-3}}\right)^{-1} = xy^{-1} \times x^6y^{-6} = \dfrac{x^7}{y^7}$.

23. *Effectuer les opérations suivantes :*

1° $\left(3x^{-\frac{1}{3}} + x + 2x^{\frac{2}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}} - 2\right) = x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{2}{3}} + 3 - 6x^{-\frac{1}{3}}$

2° $\left(a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{3}{4}}\right)\left(a^{-\frac{2}{3}} + b^{-\frac{3}{4}}\right) = a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{3}{4}} - a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}}$

3° $(2x^{-2} - x^{-1} + 3)(2x^{-2} + x^{-1} - 3) = 4x^{-4} - x^{-2} + 6x^{-1} - 9$

4° $\left(a^{-\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}} + b^{-\frac{2}{3}}\right)\left(a^{-\frac{1}{3}} - b^{-\frac{1}{3}}\right) = a^{-1} - b^{-1}$

5° $\left(a^2 - a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}} - 2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{3}{4}}\right) : \left(a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right) = a^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{4}}$

6° $(16a^{-3} - 6a^{-2} + 5a^{-1} + 6) : (1 + 2a^{-1}) = 8a^{-2} - 7a^{-1} + 6$

7° $\left(a^3 - 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}} - a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{1}{3}} + 2b^{\frac{13}{12}}\right) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{3}}\right) = a^{\frac{5}{2}} - 2b^{\frac{3}{4}}$

8° $(5a^2 - 41ab + 42b^2) : \left(a^{\frac{1}{4}} - 7a^{-\frac{3}{4}}b\right) = (5a - 6b)a^{\frac{3}{4}}.$

24. *Trouver la racine carrée de l'expression*

$$\sqrt[x]{a^{-\frac{2}{y}}} + \sqrt[r]{a^{\frac{1}{y}}b} + 2\sqrt{\sqrt[r]{b}}\sqrt{\sqrt[x]{\sqrt[y]{\sqrt[r]{a^{x-2r}}}}}.$$

Le premier terme peut s'écrire $a^{-\frac{2}{xy}}$; sa racine carrée est $a^{-\frac{1}{xy}}$.

Le second terme peut s'écrire $a^{\frac{1}{ry}}b^{\frac{1}{r}}$; sa racine carrée est $a^{\frac{1}{2ry}}b^{\frac{1}{2r}}$.

Le troisième terme peut s'écrire $2b^{\frac{1}{2r}}a^{\frac{x-2r}{2xyr}} = 2b^{\frac{1}{2r}}a^{\frac{1}{2yr}}a^{-\frac{1}{xy}}$; on voit qu'il est le double produit des racines carrées des deux premiers termes. La racine carrée de l'expression proposée est donc

$$a^{-\frac{1}{xy}} + a^{\frac{1}{2yr}}b^{\frac{1}{2r}}.$$

25. *Simplifier l'expression*

$$\left[\frac{x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}}{x^2 - x + 1} - \frac{x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}}{x^2 + x + 1}\right]\left[\frac{x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}}{x^3 - 1} - \frac{x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}}}{x^3 + 1}\right].$$

Le premier facteur est égal à

$$x^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{x + 1}{(x^2 + 1) - x} - \frac{x - 1}{(x^2 + 1) + x}\right] = \frac{2x^{-\frac{1}{2}}(2x^2 + 1)}{x^4 + x^2 + 1}.$$

Le second facteur est égal à

$$x^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{x + 2}{x^3 - 1} - \frac{x - 2}{x^3 + 1}\right] = \frac{2x^{\frac{1}{2}}(2x^2 + 1)}{x^6 - 1}.$$

Le produit de ces deux facteurs est

$$\frac{4(2x^2 + 1)^2}{(x^4 + x^2 + 1)(x^6 - 1)}.$$

26. *Vérifier l'identité*

$$\left[\frac{a + (a^2 - b)^{\frac{1}{2}}}{2}\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{a - (a^2 - b)^{\frac{1}{2}}}{2}\right]^{\frac{1}{2}} = \left(a + b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On montrerait aisément que les conditions nécessaires et suffisantes pour que les puissances fractionnaires, qui entrent dans cette identité, soient définies, sont $b > 0$ et $a \geqslant \sqrt{b}$.

Quand ces conditions sont remplies, l'identité est vraie, car ses deux membres sont positifs et le carré du premier membre est égal à

$$a + \left\{\left[a + (a^2 - b)^{\frac{1}{2}}\right]\left[a - (a^2 - b)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}^{\frac{1}{2}} = a + b^{\frac{1}{2}}.$$

27. *Trouver la valeur de l'expression*

$$y = 2a(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}\left(x + (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} \quad \text{pour} \quad x = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{b}{a}\right)\right].$$

Le nombre x n'est défini que si a et b sont de mêmes signes. Si a et b sont positifs, on a :

$$1 + x^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\right) = \frac{(a + b)^2}{4ab}.$$

$$x + (1 + x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{a - b}{2\sqrt{ab}} + \frac{a + b}{2\sqrt{ab}} = \frac{a}{\sqrt{ab}}.$$

Par suite, $\quad y = 2a \times \dfrac{a + b}{2\sqrt{ab}} \times \dfrac{\sqrt{ab}}{a} = a + b.$

Si a et b sont négatifs, on aboutit au même résultat.

28. *Vérifier que le polynôme* $x^3 + 3px + 2q$ *s'annule pour*

$$x = \left[-q + (q^2 + p^3)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}} + \left[-q - (q^2 + p^3)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}.$$

En désignant les deux termes qui entrent dans l'expression de x par A et B, on a

$$x^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B).$$

On trouve ensuite

a) $A^3 + B^3 = -2q.$

b) $3AB(A + B) = 3ABx = 3x\left[q^2 - (q^2 + p^3)\right]^{\frac{1}{3}} = -3px.$

Par suite, $x^3 = -3px - 2q$ et $x^3 + 3px + 2q$ est nul pour la valeur donnée de x.

CHAPITRE III

Des fractions continues.

78. *Convertir en fractions continues les nombres*

$$\frac{105}{38},\quad \frac{135}{79},\quad \frac{1393}{972},\quad \frac{1465}{521},\quad 3{,}71,\quad 0{,}823,$$

et calculer les réduites des fractions continues obtenues.

1° $\frac{105}{38} = (2, 1, 3, 4, 2)$. — Les réduites sont :

$$2,\ 3,\ \frac{11}{4},\ \frac{47}{17},\ \frac{105}{38}.$$

2° $\frac{135}{79} = (1, 1, 2, 2, 3, 3)$. — Les réduites sont :

$$1,\ 2,\ \frac{5}{3},\ \frac{12}{7},\ \frac{41}{24},\ \frac{135}{79}.$$

3° $\frac{1393}{972} = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$. — Les réduites sont :

$$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{10}{7},\ \frac{43}{30},\ \frac{225}{157},\ \frac{1393}{972}.$$

4° $\frac{1465}{521} = (2, 1, 4, 3, 6, 5)$. — Les réduites sont :

$$2,\ 3,\ \frac{14}{5},\ \frac{45}{16},\ \frac{284}{101},\ \frac{1465}{521}.$$

5° $3{,}71 = (3, 1, 2, 2, 4, 3)$. — Les réduites sont :

$$3,\ 4,\ \frac{11}{3},\ \frac{26}{7},\ \frac{115}{31},\ \frac{371}{100}.$$

6° $0{,}823 = (0, 1, 4, 1, 1, 1, 5, 1, 8)$. — Les réduites sont :

$$0,\ 1,\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ \frac{9}{11},\ \frac{14}{17},\ \frac{79}{96},\ \frac{93}{113},\ \frac{823}{1000}.$$

79. *Convertir les expressions suivantes en fractions continues, sachant que* a *est entier et positif.*

1° $\frac{a^3 + 4a^2 + 3a}{a^2 + 3a + 1} = (a, 1, a, 1, a).$

2° $\dfrac{6a^2 + 20a + 11}{6a^2 + 14a + 6} = (1, a + 1, 2, a, 3).$

3° $\dfrac{24a^4 + 18a^2 + 1}{24a^3 + 6a} = (a, 2a, 3a, 4a).$

80. *On donne les nombres*

$$\sqrt{33},\quad \sqrt{19},\quad \sqrt{108},\quad 3\sqrt{57},\quad \frac{\sqrt{15}-1}{2},\ \frac{8}{5-\sqrt{3}},\ \frac{2\sqrt{60}-11}{17}.$$

1° *Trouver les fractions continues dont ces nombres sont les génératrices.*

2° *Trouver successivement la valeur de chacun de ces nombres à moins de* $\dfrac{1}{10\,000}$, *puis à moins de* $\dfrac{3}{100\,000}$.

On peut remarquer d'abord que $10\,000 = 100^2$ et que

$$\frac{3}{100\,000} > \frac{1}{33\,334} > \frac{1}{183^2}.$$

a) $\sqrt{33} = (5;\ 1, 2, 1, 10;\ldots)$

Les réduites successives sont :

$$5,\ 6,\ \frac{17}{3},\ \frac{23}{4},\ \frac{247}{43},\ \frac{270}{47},\ \frac{787}{137},\ \frac{1057}{184},\ldots$$

Les réduites cherchées sont $\dfrac{787}{137}$ et $\dfrac{1057}{184}$.

b) $\sqrt{19} = (4;\ 2, 1, 3, 1, 2, 8;\ \ldots)$

Les réduites successives sont :

$$4,\ \frac{9}{2},\ \frac{13}{3},\ \frac{48}{11},\ \frac{61}{14},\ \frac{170}{39},\ \frac{1421}{326},\ldots$$

Les réduites cherchées sont $\dfrac{170}{39}$ et $\dfrac{1421}{326}$.

c) $\sqrt{108} = (10;\ 2, 1, 1, 4, 1, 1, 2, 20;\ldots)$.

Les réduites successives sont :

$$10,\ \frac{21}{2},\ \frac{31}{3},\ \frac{52}{5},\ \frac{239}{23},\ \frac{291}{28},\ \frac{530}{51},\ \frac{1351}{130},\ \frac{27\,550}{2651},\ldots$$

La réduite $\dfrac{1351}{130}$ répond aux deux questions.

d) $3\sqrt{57} = \sqrt{513} = (22; 1, 1, 1, 5, 1, 4, 5, 2, 5, 4, 1, 5, 1, 1, 1, 44; ...$

Les réduites successives sont :

$$22,\ 23,\ \frac{45}{2},\ \frac{68}{3},\ \frac{385}{17},\ \frac{453}{20},\ \frac{2197}{97},\ \frac{11\,438}{505},\dots$$

La réduite $\frac{2197}{97}$ répond aux deux questions.

e) $\frac{\sqrt{15}-1}{2} = (1;\ 2,\ 3;\dots).$

Les réduites successives sont :

$$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{10}{7},\ \frac{23}{16},\ \frac{79}{55},\ \frac{181}{126},\ \frac{622}{433},\dots$$

La réduite $\frac{181}{126}$ répond aux deux questions.

f) $\frac{8}{5-\sqrt{3}} = \frac{20+\sqrt{48}}{11} = (2,\ 2;\ 4,\ 3;\dots)$

Les réduites successives sont :

$$2,\ \frac{5}{2},\ \frac{22}{9},\ \frac{71}{29},\ \frac{306}{125},\ \frac{989}{404},\dots$$

La réduite $\frac{306}{125}$ répond aux deux questions.

g) $\frac{2\sqrt{60}-11}{17} = \frac{\sqrt{240}-11}{17} = (0;\ 3,\ 1,\ 3,\ 1,\ 1,\ 1;\dots)$

Les réduites successives sont :

$$0,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{4}{15},\ \frac{5}{19},\ \frac{9}{34},\ \frac{14}{53},\ \frac{51}{193},\dots$$

Les réduites cherchées sont $\frac{14}{53}$ et $\frac{51}{193}$.

81. *Convertir les expressions suivantes en fractions continues, sachant que a est entier et positif.*

1° $\sqrt{9a^2+3} = (3a;\ 2a,\ 6a;\dots).$

2° $\sqrt{a^2+a} = (a;\ 2,\ 2a;\dots).$

3° $\sqrt{4a^2-a}$. — Le trinôme $4a^2 - a$ est positif pour $a \geqslant 1$, car a est un nombre entier positif; de plus, on a

$$(2a-1)^2 < 4a^2 - a < (2a)^2.$$

On a donc $$\sqrt{4a^2 - a} = 2a - 1 + \frac{1}{x_1};$$
et ensuite,
$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{4a^2 - a} - (2a - 1)} = \frac{\sqrt{4a^2 - a} + (2a - 1)}{3a - 1} = 1 + \frac{1}{x_2};$$
$$x_2 = \frac{3a - 1}{\sqrt{4a^2 - a} - a} = \frac{\sqrt{4a^2 - a} + a}{a} = 2 + \frac{1}{x_3};$$
$$x_3 = \frac{a}{\sqrt{4a^2 - a} - a} = \frac{\sqrt{4a^2 - a} + a}{3a - 1} = 1 + \frac{1}{x_4};$$
$$x_4 = \frac{3a - 1}{\sqrt{4a^2 - a} - (2a - 1)} = \sqrt{4a^2 - a} + (2a - 1) = 4a - 2 + \frac{1}{x_1}.$$

Rép. $\sqrt{4a^2 - a} = (2a - 1;\ \ 1, 2, 1, 4a - 2; \ldots).$

4° $\sqrt{a^2 - 2}$. Nous supposerons l'entier positif a supérieur à 1, car pour $a = 1$, l'expression $a^2 - 2$ est négative. Cela étant posé, on peut vérifier qu'on a
$$(a - 1)^2 < a^2 - 2 < a^2.$$

Nous poserons donc $\sqrt{a^2 - 2} = a - 1 + \dfrac{1}{x_1};$

d'où $$x_1 = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 2} - (a - 1)} = \frac{\sqrt{a^2 - 2} + a - 1}{2a - 3}.$$

a) En supposant $a = 2$, on a $x_1 = \sqrt{2} + 1 = 2 + \dfrac{1}{x_2},$

et, en continuant, on trouve
$$\sqrt{2} = (1;\ 2;\ \ldots)$$

b) En supposant l'entier positif a supérieur à 2, on a, au contraire,
$$1 < \frac{\sqrt{a^2 - 2} + a - 1}{2a - 3} < 2.$$

En effet, multiplions par $2a - 3$, qui est positif; il vient
$$2a - 3 < \sqrt{a^2 - 2} + a - 1 < 4a - 6$$
ou
$$a - 2 < \sqrt{a^2 - 2} < 3a - 5.$$

On peut élever au carré, car $a - 2$ et $3a - 5$ sont positifs. On trouve ainsi successivement
$$(a - 2)^2 < a^2 - 2 < (3a - 5)^2$$
$$- 4a + 6 < 0 < 8a^2 - 30a + 27.$$

On peut vérifier que ces inéquations sont satisfaites par $a > 2$. On a donc
$$x_1 = 1 + \frac{1}{x_2};$$
et
$$x_2 = \frac{2a-3}{\sqrt{a^2-2}-(a-2)} = \frac{\sqrt{a^2-2}+(a-2)}{2}.$$

Le numérateur est compris entre
$$(a-1)+(a-2) = 2a-3 \quad \text{et} \quad a+(a-2) = 2a-2.$$
On a donc
$$x_2 = a - 2 + \frac{1}{x_3}$$
et
$$x_3 = \frac{2}{\sqrt{a^2-2}-(a-2)} = \frac{\sqrt{a^2-2}+a-2}{2a-3}.$$

On vérifierait comme plus haut qu'on a
$$1 < \frac{\sqrt{a^2-2}+a-2}{2a-3} < 2.$$
Par suite,
$$x_3 = 1 + \frac{1}{x_4}$$
et
$$x_4 = \frac{2a-3}{\sqrt{a^2-2}-(a-1)} = \sqrt{a^2-2}+(a-1) = 2a-2+\frac{1}{x_1}.$$

Rép. $\sqrt{a^2-2} = (a-1;\ 1,\ a-2,\ 1,\ 2a-2;\ldots)$ pour $a > 2$.

5° $\sqrt{a^2+4a+2}$. — Le trinôme a^2+4a+2 est positif pour $a < -2-\sqrt{2}$ et pour $a > -2+\sqrt{2}$; donc aussi quand a représente un entier positif. On peut vérifier qu'on a
$$(a+1)^2 < a^2+4a+2 < (a+2)^2.$$

Nous poserons $\sqrt{a^2+4a+2} = a+1+\dfrac{1}{x_1}$; d'où
$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{a^2+4a+2}-(a+1)} = \frac{\sqrt{a^2+4a+2}+a+1}{2a+1}.$$

Le numérateur de x_1 est compris entre $2a+2$ et $2a+3$; par suite, x_1 est compris entre les deux fractions $\dfrac{2a+2}{2a+1}$ et $\dfrac{2a+3}{2a+1}$ qui sont elles-mêmes comprises entre 1 et 2. Nous poserons donc
$$x_1 = 1 + \frac{1}{x_2}.$$

On a
$$x_2 = \frac{2a+1}{\sqrt{a^2+4a+2}-a} = \frac{\sqrt{a^2+4a+2}+a}{2}.$$

Le numérateur de x_2 est compris entre $2a + 1$ et $2a + 2$. Par suite,

$$x_2 = a + \frac{1}{x_3}.$$

On a $$x_3 = \frac{2}{\sqrt{a^2 + 4a + 2} - a} = \frac{\sqrt{a^2 + 4a + 2} + a}{2a + 1}.$$

Le numérateur de x_3 est compris entre $2a + 1$ et $2a + 2$; d'où

$$x_3 = 1 + \frac{1}{x_4}$$

et $$x_4 = \frac{2a + 1}{\sqrt{a^2 + 4a + 2} - (a + 1)} = \sqrt{a^2 + 4a + 2} + (a + 1)$$
$$= 2a + 2 + \frac{1}{x_1}.$$

Rép. $\sqrt{a^2 + 4a + 2} = (a + 1;\ 1,\ a,\ 1,\ 2a + 2;\ldots).$

6° $\sqrt{9a^2 + 8a + 2}$. — En raisonnant comme au 5°, on trouve successivement :

$$\sqrt{9a^2 + 8a + 2} = 3a + 1 + \frac{1}{x_1};$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{9a^2 + 8a + 2} - (3a + 1)} = \frac{\sqrt{9a^2 + 8a + 2} + 3a + 1}{2a + 1} = 2 + \frac{1}{x_2};$$

$$x_2 = \frac{2a + 1}{\sqrt{9a^2 + 8a + 2} - (a + 1)} = \frac{\sqrt{9a^2 + 8a + 2} + a + 1}{4a + 1} = 1 + \frac{1}{x_3};$$

$$x_3 = \frac{4a + 1}{\sqrt{9a^2 + 8a + 2} - 3a} = \frac{\sqrt{9a^2 + 8a + 2} + 3a}{2} = 3a + \frac{1}{x_4};$$

$$x_4 = \frac{2}{\sqrt{9a^2 + 8a + 2} - 3a} = \frac{\sqrt{9a^2 + 8a + 2} + 3a}{4a + 1} = 1 + \frac{1}{x_5};$$

$$x_5 = \frac{4a + 1}{\sqrt{9a^2 + 8a + 2} - (a + 1)} = \frac{\sqrt{9a^2 + 8a + 2} + a + 1}{2a + 1} = 2 + \frac{1}{x_6}$$

$$x_6 = \frac{2a + 1}{\sqrt{9a^2 + 8a + 2} - (3a + 1)} = \sqrt{9a^2 + 8a + 2} + 3a + 1;$$

d'où $$x_6 = 6a + 2 + \frac{1}{x_1}.$$

Rép. $\sqrt{9a^2 + 8a + 2} = (3a + 1;\ 2,\ 1,\ 3a,\ 1,\ 2,\ 6a + 2;\ldots).$

82. *Du développement de $\sqrt{9a^2 + 3}$, déduire celui de $\sqrt{12}$.*

On a $$\sqrt{9a^2 + 3} = (3a;\ 2a,\ 6a;\ldots).$$

En faisant $a = 1$, il vient

$$\sqrt{12} = (3;\ 2,\ 6;\ldots).$$

83. *Un dollar vaut* 7,191 *belgas. Transformer le rapport entre le dollar et le belga en fraction continue. Trouver les limites de l'erreur commise en adoptant l'une ou l'autre réduite de la fraction continue comme valeur du rapport.*

On a $$7{,}191 = (7, 5, 4, 4, 11).$$

1re réduite $= 7$; $\quad \frac{1}{6} < e < \frac{1}{5}.$

2e » $= \frac{36}{5}$; $\quad \frac{1}{130} < e < \frac{1}{105}.$

3e » $= \frac{151}{21}$; $\quad \frac{1}{2310} < e < \frac{1}{1869}.$

4e » $= \frac{640}{89}$; $\quad \frac{1}{96\,921} < e < \frac{1}{89\,000}.$

5e » $= \frac{7191}{1000}.$

84. *Transformer tg* 30° *et tg* 15° *en fractions continues et trouver leur valeur à moins d'un millième.*

1° On a $$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = (0, 1; 1, 2; \ldots).$$

Les réduites successives sont :

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{7},\ \frac{11}{19},\ \frac{15}{26},\ \frac{41}{71},\ldots$$

La valeur cherchée est $\frac{15}{26}$.

2° On a $$\operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3} = (0, 3;\ 1, 2; \ldots).$$

Les réduites successives sont

$$0,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{11},\ \frac{4}{15},\ \frac{11}{41},\ldots$$

La valeur cherchée est $\frac{11}{41}$.

85. *Trouver des valeurs entières et positives pour* a *et* b *telles que l'on ait les relations suivantes :*

1° $\left| \sqrt{7} - b \right| < \frac{1}{100}.$

Comme a est un entier positif, il suffit d'avoir

$$\left|\sqrt{7} - \frac{b}{a}\right| < \frac{1}{100a}.$$

Or on a $$\sqrt{7} = (2; 1, 1, 1, 4; \ldots).$$

Les réduites successives de $\sqrt{7}$ sont :

$$2,\ 3,\ \frac{5}{2},\ \frac{8}{3},\ \frac{37}{14},\ \frac{45}{17},\ \frac{82}{31},\ \frac{127}{48},\ \frac{590}{223},\ldots$$

Les nombres $a = 48$, $b = 127$ répondent à la question, car on a

$$\left|\sqrt{7} - \frac{127}{48}\right| < \frac{1}{48.223} \quad \text{et à fortiori} \quad \left|\sqrt{7} - \frac{127}{48}\right| < \frac{1}{48.100}.$$

Remarque. — On peut évidemment prendre a égal au dénominateur d'une réduite de rang plus élevé que $\frac{127}{48}$, à condition de prendre b égal au numérateur.

2° $\left|a\sqrt{14} - b\right| < \frac{3}{1000}$.

Il suffit d'avoir $\left|\sqrt{14} - \frac{b}{a}\right| < \frac{1}{334a} < \frac{3}{1000a}$.

Or on a $\sqrt{14} = (3;\ 1,\ 2,\ 1,\ 6;\ldots)$.

Les réduites successives de $\sqrt{14}$ sont :

$$3,\ 4,\ \frac{11}{3},\ \frac{15}{4},\ \frac{101}{27},\ \frac{116}{31},\ \frac{333}{89},\ \frac{449}{120},\ \frac{3027}{809},\ldots$$

Les nombres $a = 120$, $b = 449$ répondent à la question, car on a

$$\left|\sqrt{14} - \frac{449}{120}\right| < \frac{1}{120.809}$$

et à fortiori $\left|\sqrt{14} - \frac{449}{120}\right| < \frac{1}{120.334} < \frac{3}{120 \times 1000}$.

3° $0 < a\sqrt{2} - b\sqrt{3} < 0{,}01$.

Il suffit d'avoir $0 < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{b}{a} < \frac{1}{100a\sqrt{3}}$.

Or on a $\sqrt{\frac{2}{3}} = (0,\ 1;\ 4,\ 2;\ldots)$

et les réduites successives de $\sqrt{\frac{2}{3}}$ sont

$$0,\ 1,\ \frac{4}{5},\ \frac{9}{11},\ \frac{40}{49},\ \frac{89}{109},\ \frac{396}{485},\ldots$$

La réduite $\frac{89}{109}$ donne

$$\left|\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{89}{109}\right| < \frac{1}{109.485} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{89}{109}\right| < \frac{1}{100.109\sqrt{3}}.$$

Néanmoins les termes de cette réduite ne conviennent pas, car la réduite étant de rang pair, on a

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{89}{109} < 0.$$

On prendra $a = 485$; $b = 396$.

86. *Trouver la valeur des fractions continues suivantes :*

1° $(1; 1; \ldots)$ **Rép.** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

2° $(1, 5; \ldots)$ » $\dfrac{5+\sqrt{45}}{10}$

3° $(1, 2, 3; \ldots)$ » $\dfrac{4+\sqrt{37}}{7}$

4° $(3, 1, 1, 3; \ldots)$ » $\dfrac{23+5\sqrt{29}}{14}$

5° $(1, 2; 3; \ldots)$ » $\dfrac{5+\sqrt{13}}{6}$

6° $(2, 3; 1, 5; \ldots)$ » $\dfrac{43+3\sqrt{5}}{22}$

7° $(1; 2, 1, 2; \ldots)$ » $\dfrac{\sqrt{85}-1}{6}$

8° $(0, 4; 2, 1, 1, 3; \ldots)$ » $\dfrac{4-\sqrt{11}}{3}$

9° $(0; 3, 2, 1; \ldots)$ » $\dfrac{\sqrt{37}-4}{7}$.

87. *Démontrer que la valeur* x *de la fraction périodique mixte*

$$(\alpha; \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \ldots, \mathrm{l}, 2\alpha; \ldots)$$

est racine de l'équation $\mathrm{x} = (\alpha, \mathrm{a}, \mathrm{b}, \ldots, \mathrm{l}, \alpha + \mathrm{x})$.

Chercher ensuite la valeur des fractions continues périodiques mixtes

$$(5; 2, 1, 1, 2, 10; \ldots) \quad et \quad (6; 1, 2, 2, 2, 1, 12; \ldots).$$

1° En effet, on a

$$(2\alpha; a, b, c, \ldots, 2\alpha; \ldots) = \alpha + (\alpha; a, b, c, \ldots, 2\alpha; \ldots).$$

D'autre part, la fraction continue donnée peut s'écrire

$$x = (\alpha, a, b, c, \ldots, \alpha + \alpha; a, b, c, \ldots, 2\alpha; \ldots);$$

ou, en remplaçant $(\alpha + \alpha; a, b, c, \ldots, 2\alpha; \ldots)$ par sa valeur, qui est $\alpha + x$,

$$x = (\alpha, a, b, c, \ldots, l, \alpha + x).$$

2° On a $x = (5;\ 2, 1, 1, 2, 10;\ \dots) = (5, 2, 1, 1, 2, 5 + x)$.

Par suite, $x = \dfrac{70(5 + x) + 27}{13(5 + x) + 5} = \dfrac{70x + 377}{13x + 70}$.

Cette égalité donne

$$13x^2 = 377 \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{29}.$$

3° On a $x = (6;\ 1, 2, 2, 2, 1, 12;\ \dots) = (6, 1, 2, 2, 2, 1, 6 + x)$.

Par suite, $x = \dfrac{161(6 + x) + 114}{24(6 + x) + 17} = \dfrac{161x + 1080}{24x + 161}$.

Cette égalité donne

$$24x^2 = 1080 \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{45}.$$

88. *Si* $\mathrm{x} = (1, 1, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{e}, \dots)$ *et* $\mathrm{y} = (0, \mathrm{b} + 1, \mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{e}, \dots)$, *montrer que l'on a* $\mathrm{x} + \mathrm{y} = 2$.

En posant $z = (b, c, d, e, \dots)$
il vient $x = (1, 1, z)$ et $y = (0, 1 + z)$.

Par suite, $x = \dfrac{2z + 1}{z + 1}$ et $y = \dfrac{1}{z + 1}$.

En éliminant z, on trouve $x + y = 2$.

89. *Si* $\mathrm{x} = (\mathrm{a}, 1, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}, \dots)$ *et* $\mathrm{y} = (\mathrm{a}', \mathrm{b} + 1, \mathrm{c}, \mathrm{d}, \dots)$, *montrer que l'on a* $\mathrm{x} + \mathrm{y} = \mathrm{a} + \mathrm{a}' + 1$.

En posant $z = (b, c, d, \dots)$
il vient $x = (a, 1, z)$ et $y = (a', 1 + z)$.

Par suite, $x = \dfrac{(a + 1)z + a}{z + 1}$ et $y = \dfrac{a'(1 + z) + 1}{z + 1}$.

En éliminant z, on trouve

$$x + y = a + a' + 1.$$

90. *Si* $\mathrm{x} = (\mathrm{a};\ \mathrm{a}, \mathrm{b};\ \dots)$ *et* $\mathrm{y} = (\mathrm{b};\ \mathrm{b}, \mathrm{a};\ \dots)$ *montrer que l'on a*

$$\mathrm{ax} - \mathrm{by} = \mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2.$$

Posons $x' = (a, b;\ \dots)$ et $y' = (b, a;\ \dots)$.
On aura $x = (a, x')$ et $x' = (a, b, x')$.

En éliminant x' entre ces deux équations, on trouve

$$x = \frac{2a^2 - ab + \sqrt{a^2b^2 + 4ab}}{2a}.$$

On a aussi $y = (b, y')$ et $y' = (b, a, y')$.

Après avoir éliminé y', on trouve

$$y = \frac{2b^2 - ab + \sqrt{a^2b^2 + 4ab}}{2b}.$$

En calculant ensuite la différence $ax - by$, on trouve
$$ax - by = a^2 - b^2.$$

91. *Montrer que l'on a*
$$(\mathrm{a}, \mathrm{b}; \ldots) \times (0; \mathrm{b}, \mathrm{a}; \ldots) = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}.$$

En effet, on a
$$(a, b; \ldots) = \frac{ab + \sqrt{a^2b^2 + 4ab}}{2b}$$
et
$$(0; b, a; \ldots) = \frac{2a}{ab + \sqrt{a^2b^2 + 4ab}}.$$

92. *Démontrer que chaque terme d'une réduite est plus grand que le double du terme de même nom de la réduite avant-précédente.*

Soient $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, $\frac{R}{R'}$ trois réduites consécutives. On a
$$R = Qr + P > 2P, \quad \text{car} \quad r \geqslant 1 \quad \text{et} \quad Q > P;$$
$$R' = Q'r + P' > 2P', \quad \text{car} \quad r \geqslant 1 \quad \text{et} \quad Q' > P'.$$
Toutefois, pour toute fraction continue de la forme $(1, 1, 1, a, b, \ldots)$, le dénominateur de la 3e réduite est égal au double du dénominateur de la 1re.

93. *La moyenne proportionnelle de deux réduites consécutives* $\frac{P}{P'}$ *et* $\frac{Q}{Q'}$ *est supérieure ou inférieure à la valeur de la fraction continue, suivant que la première de ces réduites est de rang pair ou de rang impair.*

Démontrons la proposition dans le cas où $\frac{P}{P'}$ est une réduite de rang pair. On doit avoir
$$\sqrt{\frac{PQ}{P'Q'}} > \frac{Qy + P}{Q'y + P'},$$
en désignant par y le quotient complet obtenu, en cherchant le quotient incomplet q, qui correspond à la réduite $\frac{Q}{Q'}$.

L'inégalité précédente peut s'écrire
$$\frac{PQ}{P'Q'} > \frac{Q^2y^2 + 2PQy + P^2}{Q'^2y^2 + 2P'Q'y + P'^2}$$
ou
$$QQ'(PQ' - QP')y^2 > PP'(PQ' - QP').$$
Comme $PQ' - QP' = +1$, l'inégalité précédente se réduit à l'inégalité évidente $QQ'y^2 > PP'$.

94. *Deux fractions continues limitées sont dites* inverses *l'une de l'autre, lorsqu'elles possèdent les mêmes quotients incomplets, mais écrits dans un ordre inverse.*

Si $\frac{Q}{Q'}$ *et* $\frac{R}{R'}$ *sont les deux dernières réduites de* (a, b, c,..., p, q, r), *les deux dernières réduites de la fraction continue inverse* (r, q, p,..., c, b, a) *seront* $\frac{R'}{Q'}$ *et* $\frac{R}{Q}$.

En effet, on a :

$$R = Qr + P;\quad Q = Pq + N;\ldots;\quad C = Bc + A;\quad B = ab + 1.$$
$$R' = Q'r + P';\quad Q' = P'q + N';\ldots;\quad C' = B'c + 1;\quad B' = b.$$

Par conséquent, si l'on convertit $\frac{R'}{Q'}$ et $\frac{R}{Q}$ en fractions continues par la méthode du p. g. c. d., on trouve

$$\frac{R'}{Q'} = (r,\ q,\ p,\ \ldots,\ c,\ b);$$
$$\frac{R}{Q} = (r,\ q,\ p,\ \ldots,\ c,\ b,\ a).$$

95. *Trouver le quotient*

$$(a, 2a, 3a, 4a, 5a) : (5a, 4a, 3a, 2a, a).$$

Les deux dernières réduites du dividende sont :

$$\frac{24a^4 + 18a^2 + 1}{24a^3 + 6a},\quad \frac{120a^5 + 96a^3 + 9a}{120a^4 + 36a^2 + 1}.$$

En vertu du problème précédent, le diviseur vaut

$$\frac{120a^5 + 96a^3 + 9a}{24a^4 + 18a^2 + 1}.$$

Le quotient cherché est donc

$$\frac{24a^4 + 18a^2 + 1}{120a^4 + 36a^2 + 1}.$$

CHAPITRE IV

Nombres complexes.

96. *Représenter géométriquement les nombres complexes suivants, ainsi que l'opposé et le conjugué de chacun de ces nombres.*

1° $3 + i$	4° $12 - 3i$	7° $-3 + 4i$
2° $-1 + 5i$	5° $-4 - 3i$	8° $0 - 2i$
3° $10 + 8i$	6° $-2 + 0.i$	9° $-1 - i$.

97. *Mettre les nombres complexes suivants sous la forme trigonométrique.*

1° $1 + i = \sqrt{2}(\cos 45° + i \sin 45°)$
2° $1 - i = \sqrt{2}(\cos 315° + i \sin 315°)$
3° $-1 + i = \sqrt{2}(\cos 135° + i \sin 135°)$
4° $-1 - i = \sqrt{2}(\cos 225° + i \sin 225°)$
5° $2 - 0.i = 2(\cos 0° + i \sin 0°)$
6° $\sqrt{2} - i\sqrt{2} = 2(\cos 315° + i \sin 315°)$
7° $0 - 2i = 2(\cos 270° + i \sin 270°)$
8° $-2 + 0.i = 2(\cos 180° + i \sin 180°)$
9° $-1 - i\sqrt{3} = 2(\cos 240° + i \sin 240°)$
10° $-\sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3}(\cos 120° + i \sin 120°)$
11° $0 + 5i = 5(\cos 90° + i \sin 90°)$
12° $4 - 4i = 4\sqrt{2}(\cos 315° + i \sin 315°)$.

98. *On donne les nombres complexes :*

1° $\cos 240° + i \sin 240°$
2° $\cos(-30°) + i \sin(-30°)$
3° $\cos(-210°) + i \sin(-210°)$
4° $\cos 510° + i \sin 510°$
5° $\cos(-240°) + i \sin(-240°)$
6° $\cos(-300°) + i \sin(-300°)$
7° $\cos 330° + i \sin 330°$
8° $\cos 420° + i \sin 420°$
9° $\cos(-120°) + i \sin(-120°)$
10° $\cos 570° + i \sin 570°$.

Quels sont ceux qui sont égaux, opposés ou conjugués?

Tous ces nombres ont même module. Dès lors, pour les comparer, on les transformera de façon à leur donner un argument positif et moindre que 360° : deux de ces nombres seront égaux s'ils ont même argument; ils sont opposés si leurs arguments diffèrent de 180°; ils sont conjugués si la somme de leurs arguments est 360°.

Pour pouvoir comparer ces nombres, on peut aussi les ramener à la forme algébrique.

On trouve :

$$1° \quad \cos 240° + i \sin 240° = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2};$$

$$2° \quad \cos 330° + i \sin 330° = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2};$$

$$3° \quad \cos 150° + i \sin 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},$$

$$4° \quad \cos 150° + i \sin 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2};$$

$$5° \quad \cos 120° + i \sin 120° = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2};$$

6° $\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$;

7° $\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$;

8° $\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$;

9° $\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$;

10° $\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$.

99. *Effectuer les opérations suivantes et vérifier chaque fois le résultat par des constructions géométriques.*

1° $(1 - 4i) + (6 + 2i) = 7 - 2i$
2° $(5 + 8i) + (8 + 5i) = 13 + 13i$
3° $(-6 + 9i) - (1 - i) = -7 + 10i$
4° $(7 + 8i) - (-3 + 5i) = 10 + 3i$
5° $(1 + i) + (-1 + 3i) + (3 - 4i) = 3$
6° $(3 - 2i) + (2 + 4i) + (-1 + 5i) = 4 + 7i$
7° $(2 + i) - (3 - i) + (1 + 3i) = 5i$
8° $(2 - 3i) - (-1 - i) - (4 + 3i) = -1 - 5i$.

La vérification de ces calculs se fait par des constructions géométriques indiquées dans la théorie.

Voici la figure pour le 7°.

Le vecteur OS_1 représente la somme du nombre $2 + i$ et de l'opposé du nombre $3 - i$. Le vecteur OS représente la somme algébrique proposée.

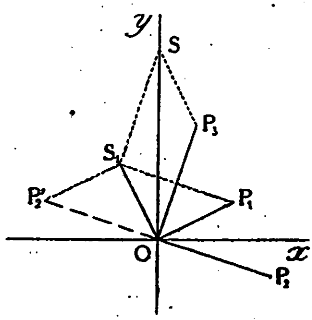


Fig. 1.

100. *Effectuer les opérations suivantes :*

1° $3(2 - 5i) = 6 - 15i$
2° $-2i(2 + i) = 2 - 4i$
3° $(2 + 3i)(3 + 2i) = 13i$
4° $(3 - i\sqrt{5})(4 - 2i\sqrt{5}) = 2 - 10i\sqrt{5}$
5° $(-7 + i)(7 + i) = -50$
6° $(\sqrt{3} - i\sqrt{5})(\sqrt{3} + i\sqrt{5}) = 8$
7° $(-2 + 7i)(-2 - 7i) = 53$
8° $(x - a + bi)(x - a - bi) = (x - a)^2 + b^2$.

101. *Effectuer les opérations suivantes :*

1° $\dfrac{1+i}{2+i} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{i}{5}$ 3° $\dfrac{9-i}{i} = -1-9i$

2° $\dfrac{3}{6-5i} = \dfrac{18}{61} + \dfrac{15}{61}i$ 4° $\dfrac{a+bi}{b-ai} = i$

5° $\dfrac{a+bm-(am-b)i}{1-mi} = a+bi$

6° $\dfrac{a+bi}{a-bi} + \dfrac{a-bi}{a+bi} = \dfrac{2(a^2-b^2)}{a^2+b^2}.$

102. *Construire directement les vecteurs qui représentent les produits suivants, puis effectuer les multiplications en vue de vérifier.*

1° $(2+i)(1+2i)$ 4° $(3-i)(2+3i)$
2° $(1+i)(2-5i)$ 5° $(-1+3i)(3-5i)$
3° $(1-i)(2+2i)$ 6° $(-2-2i)(-1+3i)$.

1° Pour trouver le vecteur qui représente le produit $(2+i)(1+2i)$, on construit les vecteurs OP_1 et OP_2 qui représentent respectivement les nombres $2+i$ et $1+2i$. Sur le vecteur OP_1, on construit ensuite un triangle OP_1P directement semblable au triangle OUP_2 : prendre l'arc $a'b'$ égal à l'arc ab et mener par P_1 une perpendiculaire à OP_1. Le vecteur OP est le vecteur cherché. En mesurant OP, on voit que le produit vaut environ $5i$.

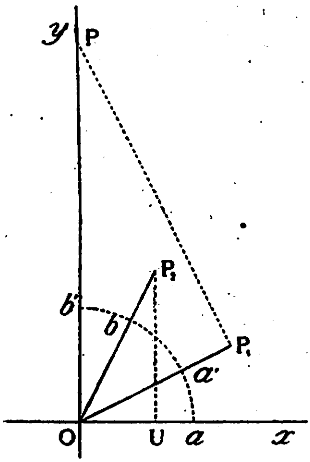


Fig.

De fait, en effectuant le produit

$$(2+i)(1+2i),$$

on trouve $5i$.

103. *Que devient le vecteur d'un nombre complexe quand on le multiplie par l'un des nombres suivants :*

1° 1 3° i 5° $3i$ 7° $\sqrt{3}+i$.
2° -1 4° $-i$ 6° -5 8° $-1+i$.

1° On a $\quad 1 = \cos 0° + i \sin 0°.$

Le vecteur du nombre complexe z ne change pas quand on multiplie z par 1,

2° On a $$-1 = \cos 180^\circ + i \sin 180^\circ.$$
Le vecteur du nombre z tourne autour de O d'un angle de 180° dans le sens positif, quand on multiplie z par -1.

3° On a $$i = \cos 90^\circ + i \sin 90^\circ.$$
Le vecteur du nombre z tourne autour de O d'un angle de 90° dans le sens positif, quand on multiplie z par i.

4° On a $$-i = \cos 270^\circ + i \sin 270^\circ.$$
Le vecteur tourne de 270° dans le sens positif, ou de 90° dans le sens négatif.

5° On a $$3i = 3(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ).$$
Le vecteur est multiplié par 3 et son argument augmente de 90°.

6° On a $$-5 = 5(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ).$$
Le vecteur est multiplié par 5 et son argument augmente de 180°.

7° On a $$\sqrt{3} + i = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ).$$
Le vecteur est doublé et son argument augmente de 30°.

8° On a $$-1 + i = \sqrt{2}(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ).$$
Le vecteur est multiplié par $\sqrt{2}$ et son argument augmente de 135°.

104. *Trouver la condition pour que le produit ou le quotient de deux nombres complexes soit réel.*

1° On a $(a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + ba')i.$
Le produit est donc réel si l'on a
$$ab' + ba' = 0.$$

2° On a $$\frac{a + bi}{a' + b'i} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + \frac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2}\, i.$$
Le quotient sera réel si l'on a
$$ab' - ba' = 0.$$
Si le diviseur n'est ni réel, ni purement imaginaire, la condition trouvée peut s'écrire
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}.$$

105. *Démontrer que deux nombres complexes sont conjugués, si leur somme et leur produit sont des nombres réels.*

En effet, si la somme
$$(a + bi) + (a' + b'i) = a + a' + (b + b')i$$
est réelle, on a
$$b + b' = 0 \quad \text{ou} \quad b = -b'; \tag{1}$$
et si le produit
$$(a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + ba')i$$
est réel, on a
$$ab' + ba' = 0; \tag{2}$$
ou, en tenant compte de ce que $b = -b'$,
$$a - a' = 0 \quad \text{ou} \quad a = a'.$$

REMARQUE. — Cette démonstration suppose qu'aucun des deux nombres proposés n'est réel. Si on supposait, par exemple, que $a + bi$ est réel, on aurait $b = 0$; puis, à cause de la relation (1), $b = b' = 0$. La relation (2) deviendrait $0.a + 0.a' = 0$ et on ne pourrait pas conclure que $a = a'$.

106. *Calculer les puissances suivantes* :

1° $[2(\cos 45° + i \sin 45°)]^5 = 32(\cos 225° + i \sin 225°)$
$= -16\sqrt{2} - 16i\sqrt{2}$;

2° $[3(\cos 105° + i \sin 105°)]^4 = 81(\cos 420° + i \sin 420°)$
$= \dfrac{81}{2} + \dfrac{81i\sqrt{3}}{2}$;

3° $[\cos(-85°) + i \sin(-85°)]^9 = \cos(-765°) + i \sin(-765°)$
$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

4° $[\sqrt[3]{5}(\cos 110° + i \sin 110°)]^6 = 25(\cos 660° + i \sin 660°)$
$= \dfrac{25}{2} - \dfrac{25i\sqrt{3}}{2}$;

5° $[\sqrt[3]{2}(\cos 50° + i \sin 50°)]^9 = 8(\cos 450° + i \sin 450°) = 8i$;

6° $[\cos(-40°) + i \sin(-40°)]^{12} = \cos(-480°) + i \sin(-480°)$
$= -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

107. *Trouver les vecteurs qui représentent les puissances suivantes, puis vérifier par le calcul.*

1° $(-1)^2$, $(-1)^3$, $(-1)^4$,...

Le nombre -1 et ses puissances successives sont représentées par les points $(-1, 0)$ et $(1, 0)$.

2° i^2, i^3, i^4,...

i et ses puissances successives sont représentées par les points $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$.

3° $(-i)^2$, $(-i)^3$, $(-i)^4$,...

On a $-i = \cos 270° + i \sin 270°$. On en déduit que $-i$ et ses puissances successives sont représentées par les points $(0, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$.

4° $(2i)^2$, $(2i)^3$, $(2i)^4$,...

On a $2i = 2(\cos 90° + i \sin 90°)$.

Le nombre $2i$ est représenté par le point $P(0, 2)$. Pour obtenir les points qui représentent les nombres $(2i)^2$, $(2i)^3$,..., on fera tourner chaque fois OP d'un angle de 90° dans le sens positif, en multipliant par 2. On a d'ailleurs $(2i)^2 = -4$; $(2i)^3 = -8i$; $(2i)^4 = 16$;...

5° $(1 + i)^3$.

Le nombre $1 + i$ est représenté par le point P(1, 1) et on a :

$$1 + i = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ).$$

Faire tourner OP de 90° dans le sens positif et multiplier OP par $(\sqrt{2})^2$ ou 2. On obtient le vecteur OP′ dont la longueur est $2\sqrt{2}$ et l'argument 135°. On a d'ailleurs

$$(1 + i)^3 = -2 + 2i = 2\sqrt{2}(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ).$$

6° $(1 + i\sqrt{3})^4$.

On raisonne comme pour l'exercice précédent, en remarquant que

$$1 + i\sqrt{3} = 2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ);$$

$$(1 + i\sqrt{3})^4 = -8 - 8i\sqrt{3} = 16(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ).$$

7° $(\sqrt{3} - i)^4$.

On a $\sqrt{3} - i = 2(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ);$

$$(\sqrt{3} - i)^4 = -8 - 8i\sqrt{3} = 16(\cos 1320^\circ + i \sin 1320^\circ)$$
$$= 16(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ).$$

8° $(-1 + 2i)^3$.

On a

$$-1 + 2i = \sqrt{5}(\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad \text{où} \quad \alpha = 116^\circ\, 33'54'';$$

puis $(-1 + 2i)^3 = 11 - 2i = 5\sqrt{5}(\cos 3\alpha + \sin 3\alpha),$

où $3\alpha = 349^\circ\, 41'42''.$

108. *Rechercher les racines carrées des nombres suivants par la méthode algébrique.*

1° $3 + 4i$.

Soit $x + yi$ une racine carrée du nombre complexe $3 + 4i$. On aura

$$3 + 4i = x^2 - y^2 + 2xyi,$$

et par suite, $x^2 - y^2 = 3; \quad xy = 2.$

Les solutions réelles de ce système sont

$$x = 2, \quad y = 1; \quad x = -2; \quad y = -1.$$

Les racines carrées cherchées sont donc

$$\pm (2 + i).$$

On résout les exercices suivants d'une façon analogue.

2° $-3 - 4i$	**Rép.**	$\pm (1 - 2i)$
3° $15 - 20i$	»	$\pm (\sqrt{20} - i\sqrt{5})$
4° $-6 + 8i$	»	$\pm (\sqrt{2} + 2i\sqrt{2})$
5° $7 + 6i\sqrt{2}$	»	$\pm (3 + i\sqrt{2})$
6° $2 - 4i\sqrt{6}$	»	$\pm (\sqrt{6} - 2i).$

109. *Résoudre les équations suivantes* :

1° $x^2 - 2x + 2 = 0$ Rép. $1 \pm i$

2° $3x^2 - 7x + 10 = 0$ » $\dfrac{7 \pm i\sqrt{71}}{6}$

3° $4x^2 - 8 - 6i = 0$ » $\pm \dfrac{1}{2}(3 + i)$

4° $x^2 + (3 - 2i)x - 6i = 0$ » -3 et $2i$

5° $(1 + i)x^2 - 4x + 4 = 0$ » $1 + i(\sqrt{2} - 1)$ et $1 - i(\sqrt{2} + 1)$

6° $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ » $\pm 3, \pm i$

7° $x^4 + 6x^2 + 25 = 0$ » $\pm (1 \pm 2i)$

8° $x^4 + 10x^2 + 169 = 0$ » $\pm (2 \pm 3i)$

9° $16x^4 + 24x^2 + 25 = 0$ » $\pm \left(\dfrac{1}{2} \pm i\right)$

10° $3x^4 - 4x^3 + 4x - 3 = 0$ » $\pm 1, \dfrac{1}{3}(2 \pm i\sqrt{5})$

11° $x^2 - (6 + i)x + 7 + 9i = 0$ » $1 + 2i$ et $5 - i$

12° $4x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4 = 0$; les racines sont

$$\frac{1}{4}(3 \pm i\sqrt{7}) \text{ et } \frac{1}{4}(-1 \pm i\sqrt{15}).$$

110. *Chercher les conditions pour que l'équation*

$$x^2 + (a + bi)x + a' + b'i = 0$$

admette : 1° *deux racines opposées*; 2° *deux racines complexes conjuguées*; 3° *deux racines égales*; 4° *deux racines réelles*; 5° *deux racines imaginaires*; 6° *une racine nulle*; 7° *une racine réelle*; 8° *une racine imaginaire.*

L'équation proposée admet toujours deux racines

$$x = \frac{1}{2}[-(a + bi) \pm \alpha],$$

α étant l'une des racines carrées de l'expression

$$\rho = (a + bi)^2 - 4(a' + b''i) = a^2 - b^2 - 4a' + 2i(ab - 2b').$$

La somme et le produit de ces racines sont respectivement:

$$S = -(a + bi) \quad \text{et} \quad P = a' + b'i.$$

Dans chacun des huit cas proposés, nous chercherons les conditions nécessaires; on vérifierait aisément que ces conditions sont également suffisantes. Nous supposerons que a, b, a', b' sont des nombres réels.

1° *Si les racines sont opposées,* on a

$$S = -(a + bi) = 0 \quad \text{ou} \quad a = b = 0.$$

2° *Si les racines sont des nombres complexes conjugués,* S et P sont réels, ce qui exige $b = b' = 0$ et l'équation devient

$$x^2 + ax + a' = 0.$$

Il faut encore que les racines de cette équation ne soient pas réelles, ce qui exige $a^2 - 4a' < 0$.

3° *Si les racines sont égales,* on a $\rho = 0$ ou

$$a^2 - b^2 - 4a' = 0 \quad \text{et} \quad ab - 2b' = 0.$$

4° *Si les racines sont réelles,* S et P sont réels, ce qui exige $b = b' = 0$ et l'équation devient $x^2 + ax + a' = 0$.

Il faut encore qu'on ait $a^2 - 4a' \geqslant 0$.

5° *Si les racines sont imaginaires,* S est imaginaire et P réel, ce qui exige $a = b' = 0$ et l'équation devient

$$x^2 + bix + a' = 0.$$

L'expression générale des racines montre qu'on doit avoir en plus

$$-b^2 - 4a' \leqslant 0 \quad \text{ou} \quad b^2 + 4a' \geqslant 0.$$

6° *Si une racine est nulle,* on a $P = 0$, ce qui exige $a' = b' = 0$.

7° *Si une racine est réelle,* soit α cette racine. On doit avoir

$$\alpha^2 + (a + bi)\alpha + a' + b'i = 0.$$

Cette relation se décompose en deux autres :

$$\alpha^2 + a\alpha + a' = 0; \tag{1}$$
$$b\alpha + b' = 0. \tag{2}$$

Si $b \neq 0$, (2) donne $\alpha = -\dfrac{b'}{b}$ et (1) devient après substitution

$$b'^2 - abb' + b^2a' = 0.$$

Si $b = 0$, on doit avoir d'abord $b' = 0$, puis $a^2 - 4a' \geqslant 0$.

8° *Si une racine est imaginaire,* soit βi cette racine. On doit avoir

$$-\beta^2 + (a + bi)\beta i + a' + b'i = 0.$$

Cette relation se décompose en deux autres :

$$-\beta^2 - b\beta + a' = 0; \tag{1}$$
$$a\beta + b' = 0. \tag{2}$$

Si $a \neq 0$, (2) donne $\beta = -\dfrac{b'}{a}$ et (1) devient après substitution

$$b'^2 - abb' - a^2a' = 0.$$

Si $a = 0$, on doit avoir d'abord $b' = 0$, puis $-b^2 - 4a' \leqslant 0$.

111. 1° *Calculer les racines carrées des nombres* 1, — 1, i, — i.

Rép. $a)\ \pm 1$ $\qquad b)\ \pm i$

$$c)\ \pm(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$d)\ \pm(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) = \pm\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

2° *Calculer les racines cubiques des nombres* 8, — 8, 8i, — 8i.

Les racines cubiques de l'unité positive sont 1 et

$$\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

a) Les racines cubiques de 8 s'obtiennent en multipliant les nombres précédents par 2.

b) Les racines cubiques de — 8 s'obtiennent en les multipliant par — 2.

c) Une première racine cubique de $8i = 8(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$ est

$$2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ).$$

Les racines cubiques de $8i$ sont :

$$2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = \sqrt{3} + i;$$
$$2(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ) = -\sqrt{3} + i;$$
$$2(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ) = -2i.$$

d) Une 1re racine cubique de $-8i = 8(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ)$ est

$$2(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ).$$

Les racines cubiques de $-8i$ sont :

$$2(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) = 2i;$$
$$2(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ) = -\sqrt{3} - i;$$
$$2(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ) = \sqrt{3} - i.$$

3° *Calculer les racines quatrièmes de* 1 *et de* — 4i.

a) Les racines quatrièmes de 1 sont ± 1 et $\pm i$.

Ces racines peuvent s'écrire :

$$\pm(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) \quad \text{et} \quad \pm(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ).$$

b) Une 1re racine quatrième de $-4i = 4(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ)$ est

$$\sqrt{2}(\cos 67^\circ 30' + i \sin 67^\circ 30').$$

Les racines quatrièmes de $-4i$ sont :

$$\pm\sqrt{2}(\cos 67^\circ 30' + i \sin 67^\circ 30'); \pm\sqrt{2}(\cos 157^\circ 30' + i \sin 157^\circ 30').$$

4° *Calculer les racines cinquièmes de* — 1 *et de* i.

Les racines cinquièmes de l'unité positive sont :

$$1; \quad \alpha = \cos 72^\circ + i \sin 72^\circ; \quad \alpha^2 = \cos 144^\circ + i \sin 144^\circ;$$
$$\alpha^3 = \cos 216^\circ + i \sin 216^\circ; \quad \alpha^4 = \cos 288^\circ + i \sin 288^\circ.$$

a) Une première racine cinquième de — 1 est — 1. Multiplier 1, α, α^2, α^3, α^4 par — 1.

b) Une première racine cinquième de $i = \cos 90^\circ + i \sin 90^\circ$ est

$$a = \cos 18^\circ + i \sin 18^\circ.$$

Multiplier 1, α, α^2, α^3, α^4 par a. On trouve

$\cos 18^\circ + i \sin 18^\circ$; $\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ$; $\cos 162^\circ + i \sin 162^\circ$; etc.

5° *Calculer les racines cubiques de* 1 + i *et de* 1 — i.

Les racines cubiques de l'unité positive sont :

$1; \quad \alpha = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ; \quad \alpha^2 = \cos 240^\circ + i \sin 240^\circ;$

ou encore, $\quad 1, \quad \alpha = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \quad \alpha^2 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

a) Une 1^re^ racine cubique de $1 + i = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$ est

$$a = \sqrt[6]{2}(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ).$$

Multiplier $1, \alpha, \alpha^2$ par a.

b) Une 1^re^ racine cubique de $1 - i = \sqrt{2}(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$ est

$$a = \sqrt[6]{2}(\cos 105^\circ + i \sin 105^\circ).$$

Multiplier $1, \alpha, \alpha^2$ par a.

6° *Calculer les racines sixièmes de* $\dfrac{1}{2}(\sqrt{3} - \mathrm{i})$.

Une première racine sixième de $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2} = \cos 330^\circ + i \sin 330^\circ$ est

$$\cos 55^\circ + i \sin 55^\circ.$$

Les racines sixièmes de l'unité positive sont :

$$1; \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ; \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ; \text{etc.}$$

Les racines sixièmes de $\dfrac{1}{2}(\sqrt{3} - i)$ sont :

$\cos 55^\circ + i \sin 55^\circ; \ \cos 115^\circ + i \sin 115^\circ; \ \cos 175^\circ + i \sin 175^\circ;$ etc.

7° *Calculer les racines huitièmes de* $8(-1 + \mathrm{i}\sqrt{3})$.

Une 1^re^ racine huitième de $-8 + 8i\sqrt{3} = 16(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$ est

$$\sqrt{2}(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ).$$

Les racines huitièmes de l'unité positive sont :

$$1; \quad \cos 45^\circ + i \sin 45^\circ; \quad \cos 90^\circ + i \sin 90^\circ; \quad \text{etc.}$$

Les racines huitièmes de $8(-1 + i\sqrt{3})$ sont :

$$\sqrt{2}(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ); \quad \sqrt{2}(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ);$$
$$\sqrt{2}(\cos 105^\circ + i \sin 105^\circ); \quad \text{etc.}$$

8° *Calculer les racines dixièmes de* 1024 *et de* — 1024i.

Les racines dixièmes de l'unité positive sont :

$1; \quad \alpha = \cos 36^\circ + i \sin 36^\circ; \quad \alpha^2 = \cos 72^\circ + i \sin 72^\circ; \quad$ etc.

a) Une première racine dixième de 1024 est 2. Multiplier $1, \alpha, \alpha^2, \ldots$ par 2.

b) Une 1^re^ racine dixième de $-1024i = 2^{10}(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ)$ est

$$a = 2(\cos 27^\circ + i \sin 27^\circ).$$

Multiplier $1, \alpha, \alpha^2, \ldots$ par a.

112. *Résoudre les équations suivantes :*

1° $x^6 + 64i = 0$.

La question revient à chercher les racines sixièmes de

$$-64i = 64(\cos 270° + i \sin 270°).$$

Une première racine sixième est

$$2(\cos 45° + i \sin 45°).$$

Les racines sixièmes cherchées sont :

$$2(\cos 45° + i \sin 45°);\quad 2(\cos 105° + i \sin 105°);$$
$$2(\cos 165° + i \sin 165°);\quad \text{etc.}$$

2° $x^7 + 1 = 0$.

Une première racine septième de -1 est -1.

Les racines de l'équation sont environ :

$$-1;\quad -(\cos 51°\,25'43'' + i \sin 51°25'43'');$$
$$-(\cos 102°51'26'' + i \sin 102°51'26'');\quad \text{etc.}$$

3° $x^9 - 8 = 0$.

Une première racine neuvième de 8 est $\sqrt[3]{2}$.

Les racines de l'équation sont :

$$\sqrt[3]{2};\quad \sqrt[3]{2}(\cos 40° + i \sin 40°);\quad \sqrt[3]{2}(\cos 80° + i \sin 80°);\quad \text{etc.}$$

4° $x^{11} + i = 0$.

Une première racine onzième de $-i = \cos 270° + i \sin 270°$ est environ $\cos 24°32'44'' + i \sin 24°32'44''$.

Les racines de l'équation sont environ :

$\cos 24°32'44'' + i \sin 24°32'44''$; $\cos 57°16'22'' + i \sin 57°16'22''$; $\cos 90° + i \sin 90° = i$; $\cos 122°43'38'' + i \sin 122°43'38''$; etc.

5° $x^4 - 7 + 24i = 0$.

Une première racine quatrième de

$$7 - 24i = 25(\cos 286°15'37'' + i \sin 286°15'37'')$$

est $a = \sqrt{5}(\cos 71°33'54'' + i \sin 71°33'54'')$.

Les racines de l'équation sont

$$\pm a;\quad \pm ai.$$

6° $x^5 + 4 - 3i = 0$.

Une première racine cinquième de

$$-4 + 3i = 5(\cos 143°7'50'' + i \sin 143°7'50'')$$

est $a = \sqrt[5]{5}(\cos 28°37'34'' + i \sin 28°37'34'')$.

Les racines de l'équation sont :

$$a;\quad a(\cos 72° + i \sin 72°);\quad a(\cos 144° + i \sin 144°);\quad \text{etc.}$$

113. *Résoudre les équations suivantes par la méthode algébrique :*

1° $x^3 - 125 = 0$.

Les racines de l'équation

$$z^3 - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$$

sont $\quad z_1 = 1; \quad z_2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}; \quad z_3 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$

On les multiplie par 5.

Rép. $x_1 = 5; \quad x_2 = -\dfrac{5}{2} - \dfrac{5i\sqrt{3}}{2}; \quad x_3 = -\dfrac{5}{2} + \dfrac{5i\sqrt{3}}{2}.$

2° $x^4 + 16 = 0.$

L'équation $z^4 + 1 = 0$ peut s'écrire

$(z^2 + 1)^2 - 2z^2 = 0$ ou $(z^2 - z\sqrt{2} + 1)(z^2 + z\sqrt{2} + 1) = 0.$

Ses quatre racines sont $\pm\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} \pm \dfrac{i\sqrt{2}}{2}\right).$

Rép. $x = \pm(\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}).$

3° $32x^5 + 1 = 0.$

En posant $2x = z$, l'équation devient

$$z^5 + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad (z + 1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1) = 0.$$

Les racines de cette équation sont

$$-1; \quad \frac{1 - \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}; \quad \frac{1 + \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

On doit les diviser par 2.

Rép. $-\dfrac{1}{2}; \quad \dfrac{1 - \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{8}; \quad \dfrac{1 + \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{8}.$

4° $x^6 + 729 = 0.$

En posant $x = 3z$, cette équation devient

$$z^6 + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad (z^2 + 1)(z^4 - z^2 + 1) = 0.$$

Les racines de cette équation sont

$$z = \pm i, \quad z = \frac{\pm\sqrt{3} \pm i}{2},$$

les doubles signes de la seconde expression étant indépendants l'un de l'autre.

Rép. $x = \pm 3i; \quad x = \dfrac{\pm 3\sqrt{3} \pm 3i}{2}.$

5° $x^8 - 1 = 0.$

Cette équation peut s'écrire

$$(x^4 - 1)(x^4 + 1) = 0.$$

Rép. $x = \pm 1; x = \pm i; x = \dfrac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}; \quad x = \dfrac{-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}.$

6° $x^8 + 16 = 0.$

En posant $x = z\sqrt{2}$, l'équation devient

$$z^8 + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad (z^4 + z^2\sqrt{2} + 1)(z^4 - z^2\sqrt{2} + 1) = 0.$$

Les huit racines de cette équation sont

$$\pm\left[\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \pm \frac{i}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right]; \pm\left[\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \pm \frac{i}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right].$$

On multiplie par $\sqrt{2}$.

Rép. $x = \pm\left[\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}+2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{2\sqrt{2}-2}\right];$

$x = \pm\left[\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}-2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{2\sqrt{2}+2}\right].$

7° $x^{10} + 1 = 0.$

Cette équation peut s'écrire

$$(x^2 + 1)(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1) = 0.$$

L'équation $x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1 = 0$ donne

$$x^2 = \frac{1-\sqrt{5} \pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}; \quad x^2 = \frac{1+\sqrt{5} \pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Rép. $x = \pm i;$ $x = \pm\left[\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} \pm \frac{i}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}}\right];$

$x = \pm\left[\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \pm \frac{i}{4}\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right].$

8° $x^{12} - 1 = 0.$

Cette équation peut s'écrire

$$(x^4 - 1)(x^8 + x^4 + 1) = 0.$$

L'équation $x^8 + x^4 + 1 = 0$ donne

$$x^4 = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ puis } x^2 = \pm\left(\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Une nouvelle extraction de la racine carrée donne x.

Rép. $x = \pm 1;$ $x = \pm i;$

$x = \pm\left(\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$ $x = \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2}\right).$

9° $x^{16} + 1 = 0.$

En raisonnant comme au 6° pour l'équation $x^8 + 1 = 0$, on trouve

$$x^2 = \pm\left[\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \pm \frac{i}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right];$$

$$x^2 = \pm\left[\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \pm \frac{i}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right].$$

Une nouvelle extraction de la racine carrée donnera les 16 valeurs de x.

Rép. $x = \pm\left[\frac{1}{2}\sqrt{2 \pm \sqrt{2+\sqrt{2}}} \pm \frac{i}{2}\sqrt{2 \mp \sqrt{2+\sqrt{2}}}\right]$

$x = \pm\left[\frac{1}{2}\sqrt{2 \pm \sqrt{2-\sqrt{2}}} \pm \frac{i}{2}\sqrt{2 \mp \sqrt{2-\sqrt{2}}}\right].$

En-dessous des radicaux, les signes supérieurs sont en correspondance, ainsi que les signes inférieurs. Les autres doubles signes sont indépendants l'un de l'autre.

114. *Transformer l'expression* $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ *en une somme de deux carrés.*

1° On égale les modules des deux membres de l'égalité
$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$
et on trouve
$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2. \tag{1}$$
2° En égalant les modules des deux membres de l'égalité
$$(b + ai)(c + di) = (bc - ad) + (ac + bd)i,$$
on trouve de même
$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ad - bc)^2 + (ac + bd)^2. \tag{2}$$

115. *Transformer les expressions suivantes en des sommes de deux carrés.*

1° 5.29	4° $(a^2 + b^2)^3$
2° 5.13.29	5° $(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)(a''^2 + b''^2)$
3° $(a^2 + b^2)^2$	6° $(a^2 + b^2)^2 (c^2 + d^2)^2$

1° En appliquant les formules (1) et (2) du numéro **114**, on trouve
$$5 \times 29 = (1 + 2^2)(2^2 + 5^2) = 8^2 + 9^2 = 1 + 12^2.$$
2° On a de même
$$5 \times 13 = (1 + 2^2)(2^2 + 3^2) = 4^2 + 7^2 = 1 + 8^2;$$
et ensuite,
$$\begin{aligned} 5 \times 13 \times 29 &= (4^2 + 7^2)(2^2 + 5^2) = 27^2 + 34^2 = 6^2 + 43^2; \\ &= (1 + 8^2)(2^2 + 5^2) = 38^2 + 21^2 = 11^2 + 42^2. \end{aligned}$$
3° En égalant les modules des deux membres de l'égalité
$$(a + bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi,$$
on trouve
$$(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2. \tag{3}$$
4° Posons $a^2 - b^2 = A$, $2ab = B$. L'égalité (3) devient
$$(a^2 + b^2)^2 = A^2 + B^2;$$
d'où
$$(a^2 + b^2)^3 = (A^2 + B^2)(a^2 + b^2).$$
Appliquons ensuite les formules (1) et (2). Il vient
$$\begin{aligned} (a^2 + b^2)^3 &= (aA - bB)^2 + (aB + bA)^2 = (a^3 - 3ab^2)^2 + (3a^2b - b^3)^2 \\ &= (aB - bA)^2 + (aA + bB)^2 = (a^2b + b^3)^2 + (ab^2 + a^3)^2. \end{aligned}$$
5° On a
$$\begin{aligned} (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) &= (aa' - bb')^2 + (ab' + ba')^2 \\ &= (ba' - ab')^2 + (bb' + aa')^2; \end{aligned}$$
ou, en abrégé,
$$(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = A^2 + B^2 = A'^2 + B'^2,$$
en posant
$$A = aa' - bb'; \quad B = ab' + ba'; \quad A' = ba' - ab'; \quad B' = bb' + aa'.$$

On en déduit

$$(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)(a''^2 + b''^2) = (A^2 + B^2)(a''^2 + b''^2)$$
$$= (A'^2 + B'^2)(a''^2 + b''^2);$$

et ensuite,

$$(A^2 + B^2)(a''^2 + b''^2) = (a''A - b''B)^2 + (b''A + a''B)^2$$
$$= (a''B - b''A)^2 + (b''B + a''A)^2;$$
$$(A'^2 + B'^2)(a''^2 + b''^2) = (a''A' - b''B')^2 + (b''A' + a''B')^2$$
$$= (a''B' - b''A')^2 + (b''B' + a''A')^2.$$

6° On a

$$(a^2 + b^2)^2 (c^2 + d^2)^2 = [(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2][(c^2 - d^2)^2 + 4c^2d^2]$$
$$= (A^2 + B^2)(C^2 + D^2),$$

en posant

$$A = a^2 - b^2; \quad B = 2ab; \quad C = c^2 - d^2; \quad D = 2cd.$$

On pourra écrire (114)

$$(a^2 + b^2)^2 (c^2 + d^2)^2 = (AC - BD)^2 + (AD + BC)^2$$
$$= (BC - AD)^2 + (BD + AC)^2.$$

116. *Quelles valeurs faut-il attribuer à* x *et* y *pour que l'expression* $(x + yi)^4$ *soit réelle et plus grande que* 16 ?

L'expression

$$(x + yi)^4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + (4x^3y - 4xy^3)i$$

est réelle et supérieure à 16, si l'on a

$$x^3y - xy^3 = xy(x^2 - y^2) = 0; \qquad (1)$$
$$x^4 - 6x^2y^2 + y^4 > 16. \qquad (2)$$

L'équation (1) se décompose en trois autres que nous examinerons successivement.

a) $x = 0$. — L'inéquation (2) devient $y^4 > 16$, ce qui exige

$$y < -2 \quad \text{ou} \quad y > 2.$$

b) $y = 0$. — L'inéquation (2) devient $x^4 > 16$, ce qui exige

$$x < -2 \quad \text{ou} \quad x > 2.$$

c) $x = \pm y$. — L'inéquation (2) devient $-4x^4 > 16$, ce qui est impossible.

117. *Établir les formules*

$$S = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2};$$

$$S' = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{6\pi}{7} = \frac{1}{2}\cot g\,\frac{\pi}{14}.$$

On remarque que la somme $S + S'i$ est la somme des termes d'une progression géométrique dont la raison est $\cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$.

Par suite, $$S + S'i = \frac{\left(\cos\frac{8\pi}{7} + i\sin\frac{8\pi}{7}\right) - \left(\cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}\right)}{\cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7} - 1}.$$

Multiplions les deux termes du second membre par
$$\left(\cos\frac{2\pi}{7} - 1\right) - i\sin\frac{2\pi}{7}.$$

Le dénominateur devient $2 - 2\cos\frac{2\pi}{7} = 4\sin^2\frac{\pi}{7}$.

La partie réelle du numérateur est
$$\left(\cos\frac{8\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{7} - 1\right) + \left(\sin\frac{8\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7}\right)\sin\frac{2\pi}{7}$$
$$= \cos\frac{6\pi}{7} - \cos\frac{8\pi}{7} - 1 + \cos\frac{2\pi}{7}$$
$$= -2\sin\pi\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right) - 2\sin^2\frac{\pi}{7} = -2\sin^2\frac{\pi}{7}.$$

Le coefficient de i dans le numérateur est
$$\left(\sin\frac{8\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{7} - 1\right) - \left(\cos\frac{8\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7}\right)\sin\frac{2\pi}{7}$$
$$= \sin\frac{6\pi}{7} - \sin\frac{8\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7}$$
$$= 2\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\cos\pi + \sin\frac{2\pi}{7} = 2\sin\frac{\pi}{7}\left(1 + \cos\frac{\pi}{7}\right).$$

Il vient ainsi
$$S + S'i = \frac{-2\sin^2\frac{\pi}{7} + 2i\sin\frac{\pi}{7}\left(1 + \cos\frac{\pi}{7}\right)}{4\sin^2\frac{\pi}{7}}.$$

Cette égalité peut être décomposée en deux autres :
$$S = \frac{-2\sin^2\frac{\pi}{7}}{4\sin^2\frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{2};\quad S' = \frac{1 + \cos\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{14}.$$

118. *Établir les formules suivantes :*

1° $\cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$.

Considérons les deux sommes

$$S = \cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11}.$$

$$S' = \sin\frac{\pi}{11} + \sin\frac{3\pi}{11} + \sin\frac{5\pi}{11} + \sin\frac{7\pi}{11} + \sin\frac{9\pi}{11}.$$

On trouve $$S + S'i = \frac{-1 - \cos\frac{\pi}{11} - i\sin\frac{\pi}{11}}{\cos\frac{2\pi}{11} + i\sin\frac{2\pi}{11} - 1}.$$

Multiplions les deux termes du second membre par

$$\left(\cos\frac{2\pi}{11} - 1\right) - i\sin\frac{2\pi}{11}.$$

La partie réelle du numérateur est alors

$$\left(1 + \cos\frac{\pi}{11}\right)\left(1 - \cos\frac{2\pi}{11}\right) - \sin\frac{\pi}{11}\sin\frac{2\pi}{11} = 2\sin^2\frac{\pi}{11}.$$

Le dénominateur est devenu $4\sin^2\frac{\pi}{11}$ Par suite, $S = \frac{1}{2}$.

2° $\cos\frac{2\pi}{11} + \cos\frac{4\pi}{11} + \cos\frac{6\pi}{11} + \cos\frac{8\pi}{11} + \cos\frac{10\pi}{11} = -\frac{1}{2}$.

On raisonne comme pour l'exercice précédent.

119. *Calculer les sommes suivantes :*

1° $\cos A + \cos 2A + \cos 3A + \ldots + \cos nA$.

On trouve comme dans les exercices précédents (**117,118**)

$$\cos A + \cos 2A + \cos 3A + \ldots + \cos nA = \frac{\cos\frac{(n+1)A}{2}\sin\frac{nA}{2}}{\sin\frac{A}{2}}; \quad (1)$$

$$\sin A + \sin 2A + \sin 3A + \ldots + \sin nA = \frac{\sin\frac{(n+1)A}{2}\sin\frac{nA}{2}}{\sin\frac{A}{2}}. \quad (2)$$

2° $\sin A - \sin 2A + \sin 3A - \ldots + (-1)^{n-1}\sin nA$.

En remplaçant A par $\pi + A$ dans l'égalité (2), il vient

$$-\sin A + \sin 2A - \sin 3A + \ldots + (-1)^n \sin nA$$
$$= \frac{\sin\frac{(n+1)(\pi + A)}{2}\sin\frac{n(\pi + A)}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.$$

La somme cherchée est donc

$$S = -\frac{\sin\dfrac{(n+1)(\pi+A)}{2}\sin\dfrac{n(\pi+A)}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}}.$$

Suivant que n est pair ou impair, on a aussi

$$S = -\frac{\cos\dfrac{(n+1)A}{2}\sin\dfrac{nA}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}} \quad \text{ou} \quad S = \frac{\sin\dfrac{(n+1)A}{2}\cos\dfrac{nA}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}}.$$

3° $\cos A + \cos(A + B) + \cos(A + 2B) + \ldots + \cos[A + (n-1)B]$.

On trouve $$S = \frac{\cos\left(A + \dfrac{n-1}{2}B\right)\sin\dfrac{nB}{2}}{\sin\dfrac{B}{2}}.$$

4° $a\cos A + a^2\cos 2A + a^3\cos 3A + \ldots + a^{n-1}\cos(n-1)A$.

On trouve $$S = \frac{a^{n+1}\cos(n-1)A - a^n\cos nA - a^2 + a\cos A}{a^2 - 2a\cos A + 1}.$$

CHAPITRE VII

Polynômes entiers.

120. *Déterminer* a, b, c *pour que les divisions suivantes soient possibles et trouver le quotient.*

1° $(x^5 + ax^4 + 2ax^3 + bx^2 - 7x + 2b) : (x^2 + x - 2)$.

Désignons le dividende par $f(x)$. Le diviseur peut s'écrire $(x-1)(x+2)$ et on trouve
$$f(1) = 3a + 3b - 6 = 0;$$
$$f(-2) = 6b - 18 = 0.$$

Ces équations en a et b donnent
$$a = -1, \quad b = 3.$$

Le quotient est $x^3 - 2x^2 + 2x - 3$.

2° $(3x^4 + ax^3 - ax - 35) : (x^3 + bx^2 + cx + 7)$.

Le quotient est $3x - 5$. L'identité
$$3x^4 + ax^3 - ax - 35 = (x^3 + bx^2 + cx + 7)(3x - 5)$$
donne le système
$$3b - 5 = a; \quad 3c - 5b = 0; \quad 21 - 5c = -a.$$

On en déduit $a = 4; \quad b = 3; \quad c = 5.$

121. *Démontrer que le polynôme* $x^n - x^{n-2} - 2x + 2$ *est divisible par* $(x - 1)^2$. *Trouver le quotient.*

Le polynôme proposé s'annule pour $x = 1$. Il est donc divisible par $x - 1$. On trouve

$$x^n - x^{n-2} - 2x + 2 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} - 2).$$

Le quotient de cette première division est également divisible par $x - 1$ et on a

$$x^n - x^{n-2} - 2x + 2 = (x - 1)^2(x^{n-2} + 2x^{n-3} + \dots + 2x + 2).$$

122. *Chercher la condition pour que le trinôme* $x^3 + px + q$ *soit divisible par le carré d'un binôme de la forme* $x - a$.

Pour que le trinôme soit divisible par $(x - a)^2$, il faut et il suffit qu'il existe un binôme $x + b$, tel qu'on ait

$$x^3 + px + q \equiv (x - a)^2(x + b);$$

ou encore, en identifiant,

$$b - 2a = 0; \quad a(a - 2b) = p; \quad a^2b = q.$$

L'élimination de a et de b entre ces trois relations donne la condition

$$27q^2 + 4p^3 = 0.$$

Cette condition est d'ailleurs suffisante. En effet, elle exige $p < 0$. Cela étant, le système $b - 2a = 0$, $a(a - 2b) = p$ donne

$$b = 2a = \pm 2\sqrt{\frac{-p}{3}}$$

et on vérifierait aisément que ces valeurs de a et de b satisfont à la relation $a^2b = q$.

123. *Déterminer* a, b, c, *de façon que le polynôme*

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + 1$$

soit divisible par $(x - 1)^3$.

Le polynôme est divisible par $x - 1$, si on a

$$a + b + c + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad c = -(a + b + 1).$$

On a dans ce cas

$$ax^5 + bx^4 - (a + b + 1)x^3 + 1 = (x - 1)[ax^4 + (a + b)x^3 - x^2 - x - 1]$$

Le quotient de cette 1re division est divisible par $x - 1$, si on a

$$2a + b - 3 = 0 \quad \text{ou} \quad b = 3 - 2a.$$

On a dans ce cas

$$ax^4 + (3 - a)x^3 - x^2 - x - 1 = (x - 1)(ax^3 + 3x^2 + 2x + 1).$$

Le nouveau quotient est divisible par $x - 1$, si on a

$$a + 6 = 0 \quad \text{ou} \quad a = -6.$$

On trouve finalement $a = -6$, $b = 15$, $c = -10$ et le quotient est

$$-(6x^2 + 3x + 1).$$

REMARQUE. — On aurait aussi pu effectuer la division du polynôme par $(x-1)^3$, puis écrire que le reste est identiquement nul.

124. *Résoudre les équations suivantes :*

1° $4x^3 + 16x^2 - 9x - 36 = 0$; *deux racines sont opposées.*

Posons $4x^3 + 16x^2 - 9x - 36 = 4(x+a)(x-a)(x+b)$.

Effectuons et ordonnons le second membre, puis identifions. On obtient le système :

$$b = 4; \quad 4a^2 = 9; \quad a^2b = 9.$$

Rép. $x = \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -4.$

2° $3x^3 - 26x^2 + 52x - 24 = 0$; *les racines sont en progression géométrique.*

Posons $3x^3 - 26x^2 + 52x - 24 = 3\left(x - \frac{a}{q}\right)(x-a)(x-aq)$.

Effectuons et ordonnons le second membre, puis identifions. On obtient le système

$$\frac{a}{q} + a + aq = \frac{26}{3}; \quad \frac{a^2}{q} + a^2 + a^2q = \frac{52}{3}; \quad a^3 = 8.$$

La 1re et la 3e équation donnent

$$a = 2; \quad q = 3 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{3}.$$

Ces solutions vérifient la 2e équation.

Rép. $x = \frac{2}{3}, 2, 6.$

3° $2x^3 + 9x^2 - 2x - 24 = 0$; *une racine est double d'une autre.*

Posons $2x^3 + 9x^2 - 2x - 24 = 2(x-a)(x-2a)(x-b)$.

Effectuons et ordonnons le second membre, puis identifions. On obtient le système :

$$3a + b = -\frac{9}{2}; \quad 2a^2 + 3ab = -1; \quad a^2b = 6.$$

Ce système donne $a = -2$; $b = 1{,}5$.

Rép. $x = -2, -4, 1{,}5.$

4° $3x^4 - 11x^3 + 9x^2 + 4x - 4 = 0$; *deux racines ont pour produit* -1.

Posons

$3x^4 - 11x^3 + 9x^2 + 4x - 4 = 3(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$.

En identifiant, on obtient le système :

$$\begin{aligned} &3(a+b+c+d) = 11; \\ &ab + ac + ad + bc + bd + cd = 3; \\ &3(abc + abd + acd + bcd) = -4; \\ &3abcd = -4. \end{aligned}$$

On a aussi $ab = -1$ et par suite, $cd = \frac{4}{3}$. La 3e équation devient

$$4a + 4b - 3c - 3d = -4.$$

En tenant compte de la 1re équation, on aura

$$a + b = 1; \quad c + d = \frac{8}{3}.$$

On peut alors calculer a, b, c et d.

Rép. $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, 2, \frac{2}{3}.$

125. *En divisant un polynôme entier en* x *successivement par* x — 1 *et* x — 2, *on trouve les restes* 6 *et* 18. *Quel est le reste de la division du même polynôme par* (x — 1) (x — 2)?

Soit $Ax + B$ ce reste. On a

$$f(x) \equiv (x-1)(x-2)Q(x) + Ax + B.$$

Par suite, $f(1) = A + B = 6;\ f(2) = 2A + B = 18.$

Ces équations donnent

$$A = 12, \quad B = -6,$$

et le reste cherché est $12x - 6$.

126. *En divisant un polynôme entier en* x *successivement par* x + 1, x — 1, x — 2, *on trouve les restes* 1, 3, 9. *Quel est le reste de la division du même polynôme par* (x + 1) (x — 1) (x — 2)?

En raisonnant comme pour l'exercice précédent, on trouve que le reste est

$$\frac{5}{3}x^2 + x + \frac{1}{3}.$$

127. *Si deux polynômes entiers en* x, *de même degré* m, *s'annulent pour les mêmes valeurs distinctes de* x, *en nombre* m, *leurs coefficients sont égaux à un facteur constant près.*

Soient les polynômes

$$P(x) \equiv A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_m,$$
$$Q(x) \equiv B_0x^m + B_1x^{m-1} + B_2x^{m-2} + \ldots + B_m,$$

qui s'annulent pour les m valeurs distinctes $a, b, c, \ldots, l$, attribuées à x.

Si on forme le polynôme $R(x) \equiv B_0P(x) - A_0Q(x)$, ce polynôme $R(x)$ s'annule évidemment pour les m valeurs $a, b, c, \ldots, l$, puisque chacune d'elles annule séparément $P(x)$ et $Q(x)$.

Le polynôme $R(x)$, au plus de degré $m - 1$, s'annule donc pour m valeurs distinctes de x et il est identiquement nul.

Par suite, on a

$$A_1B_0 - A_0B_1 = 0, \quad A_2B_0 - A_0B_2 = 0, \quad \ldots, \quad A_mB_0 - A_0B_m = 0.$$

En posant $A_0 = kB_0$, ces relations donnent

$$A_0 = kB_0; \quad A_1 = kB_1; \quad \ldots\ldots; \quad A_m = kB_m.$$

128. *Si* $x^3 + 3Bx^2 + 3Cx + D$ *est divisible par* $x^2 + 2Bx + C$, *le premier polynôme est un cube et le second un carré.*

Si $x + a$ est le quotient, on a identiquement

$$x^3 + 3Bx^2 + 3Cx + D = (x^2 + 2Bx + C)(x + a).$$

De cette identité, on déduit

$$3B = 2B + a;\quad 3C = 2aB + C;\quad D = aC;$$

ou encore,

$$B = a;\quad C = a^2;\quad D = a^3.$$

Le dividende est donc $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = (x + a)^3$, et le diviseur, $x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$.

129. *Le reste de la division d'un polynôme entier en* x *par* $x^2 - a$ *est un binôme du premier degré en* x *que l'on obtient en remplaçant* x^2 *par* a *dans le polynôme.*

1er cas : *Le polynôme ne contient que des puissances paires de* x. — Le polynôme peut être considéré comme un polynôme entier en x^2 et nous le représenterons par $f(x^2)$. Le reste de la division de $f(x^2)$ par $x^2 - a$ sera évidemment $f(a)$.

2e cas : *Le polynôme ne contient que des puissances impaires de* x. — En mettant le facteur x en évidence, on pourra l'écrire $xf(x^2)$. On aura

$$f(x^2) = (x^2 - a)\,Q(x^2) + f(a)$$

et

$$xf(x^2) = (x^2 - a)\,[xQ(x^2)] + xf(a).$$

Cette dernière relation montre que $xf(a)$ est le reste de la division du polynôme $xf(x^2)$ par $x^2 - a$, car $xf(a)$ est de degré moindre que $x^2 - a$. L'expression $xf(a)$ est d'ailleurs le résultat que l'on obtient en remplaçant x^2 par a dans le polynôme.

CAS GÉNÉRAL. — Le polynôme peut être décomposé en une somme de deux termes. Le premier terme $f_1(x^2)$ est formé par l'ensemble des termes du polynôme qui ne renferment que des puissances paires de x; la seconde partie $xf_2(x^2)$ est formée par l'ensemble des termes du polynôme qui renferment des puissances impaires de x. On a

$$f_1(x^2) = (x^2 - a)\,Q_1(x^2) + f_1(a);$$
$$xf_2(x^2) = (x^2 - a)\,[xQ_2(x^2)] + xf_2(a).$$

En désignant le polynôme proposé par $P(x)$, on aura

$$P(x) = (x^2 - a)\,[Q_1(x^2) + xQ_2(x^2)] + [f_1(a) + xf_2(a)].$$

Le binôme $f_1(a) + xf_2(a)$ est évidemment le reste de la division de $P(x)$ par $x^2 - a$.

130. *Déterminer* a, b, c, *de façon que les divisions suivantes soient possibles. Trouver le quotient.*

1o $(x^4 - 3x^3 + ax^2 + bx - 1) : (x^2 + 1)$.

Le dividende peut s'écrire

$$x^4 + ax^2 - 1 + x(-3x^2 + b).$$

La division est possible, si le polynôme entier en x

$$-a+x(3+b),$$

obtenu en remplaçant dans le dividende x^2 par -1, est identiquement nul, ce qui exige

$$a=0, \quad b=-3.$$

Le quotient est x^2-3x-1.

2° $(x^4+ax^3-5x^2+bx+c):(x^2+1)(x-2)$.

On doit avoir

$$1-ax+5+bx+c\equiv 0;$$
$$16+8a-20+2b+c=0.$$

La première relation donne

$$a=b; \quad c=-6.$$

En remplaçant dans la seconde, on trouve

$$a=b=1.$$

On a ensuite

$$x^4+x^3-5x^2+x-6=(x-2)(x^2+1)(x+3).$$

Le quotient cherché est $x+3$.

3° $(x^6+ax^5+x^4+bx^3+cx+3):(x^3-1)$.

Le dividende peut s'écrire

$$(x^6+bx^3+3)+x(x^3+c)+x^2.ax^3$$

et on montrerait, comme précédemment (129), qu'on obtient le reste de la division par x^3-1 en remplaçant x^3 par 1 dans le dividende. La division sera donc possible si le trinôme

$$b+4+x(1+c)+ax^2$$

est identiquement nul, ce qui exige

$$a=0; \quad b=-4; \quad c=-1.$$

Le dividende devient

$$(x^6-4x^3+3)+x(x^3-1)$$

et le quotient cherché est x^3+x-3.

131. *On divise un polynôme entier en* x *par le binôme* x^2-a. *Trouver la loi du quotient.*

Soient $P(x)\equiv A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}x+A_m$

le polynôme donné,

$$Q(x)\equiv B_0x^{m-2}+B_1x^{m-3}+\ldots+B_{m-3}x+B_{m-2}$$

le quotient de la division de $P(x)$ par x^2-a, et

$$R(x)=Cx+D$$

le reste de la division. On a identiquement

$$P(x)\equiv(x^2-a)\,Q(x)+R(x).$$

De cette identité, on déduit

$$\begin{array}{lcl}
A_0 = B_0 & \text{ou encore,} & B_0 = A_0 \\
A_1 = B_1 & \text{»} & B_1 = A_1 \\
A_2 = B_2 - aB_0 & \text{»} & B_2 = A_2 + aB_0 \\
A_3 = B_3 - aB_1 & \text{»} & B_3 = A_3 + aB_1 \\
\dots\dots & \text{»} & \dots\dots \\
A_{m-2} = B_{m-2} - aB_{m-4} & \text{»} & B_{m-2} = A_{m-2} + aB_{m-4} \\
A_{m-1} = -aB_{m-3} + C & \text{»} & C = A_{m-1} + aB_{m-3} \\
A_m = -aB_{m-2} + D & \text{»} & D = A_m + aB_{m-2}.
\end{array}$$

La 2^e suite d'égalités est la traduction algébrique des règles demandées.

132. *Chercher la condition pour qu'un polynôme entier en* x *soit divisible par* $x^n - a$.

Pour trouver la condition demandée, on raisonne comme au numéro **129**. Désignons par $f_0(x^n)$, l'ensemble des termes du polynôme dont le degré est un multiple de n; par $xf_1(x^n)$, l'ensemble des termes dont le degré est un multiple de n, augmenté d'une unité, et ainsi de suite. On pourra écrire

$$P(x) \equiv f_0(x^n) + xf_1(x^n) + x^2f_2(x^n) + \dots + x^{n-1}f_{n-1}(x^n),$$

et le reste de la division est

$$\varphi(x) \equiv f_0(a) + xf_1(a) + x^2f_2(a) + \dots + x^{n-1}f_{n-1}(a).$$

Pour que le polynôme $P(x)$ soit divisible par $x^n - a$, il faut et il suffit que le polynôme $\varphi(x)$ soit identiquement nul, ce qui donne les conditions :

$$f_0(a) = 0; \quad f_1(a) = 0; \quad f_2(a) = 0; \dots ; \quad f_{n-1}(a) = 0.$$

133. *La condition nécessaire et suffisante pour que* $x^m - a^m$ *soit divisible par* $x^n - a^n$ *est que* m *soit un multiple de* n.

Supposons que l'on ait $m = nq + r\ (0 \leqslant r \leqslant n - 1)$. Effectuons la division de $x^m - a^m$ par $x^n - a^n$. On voit aisément que les premiers termes du quotient sont :

$$x^{m-n}; \quad a^nx^{m-2n}; \quad a^{2n}x^{m-3n}; \dots;$$

et que les différents dividendes partiels sont

$$a^nx^{m-n} - a^m; \quad a^{2n}x^{m-2n} - a^m; \dots; \quad \text{etc.}$$

Il en résulte que le reste de la division est

$$R \equiv a^{nq}x^{m-nq} - a^m.$$

Pour que ce reste soit identiquement nul, il faut et il suffit que l'on ait $m = nq$, c'est-à-dire, que m soit un multiple de n.

Autre méthode. — Soient q le quotient entier de la division de m par n et r le reste de cette division. On a

$$m = nq + r, \quad \text{et} \quad x^m - a^m = x^r(x^n)^q - a^m.$$

Le reste la division par $x^n - a^n$ est donc (**132**)

$$\varphi(x) = x^r(a^n)^q - a^{nq+r}.$$

Pour que $\varphi(x)$ soit indentiquement nul, il faut et il suffit que r soit nul ou que m soit un multiple de n.

134. *La condition nécessaire et suffisante pour que* $x^m + a^m$ *soit divisible par* $x^n + a^n$ *est que* m *soit un multiple impair de* n.

Cet exercice se démontre comme l'exercice précédent.

135. *Démontrer que les divisions suivantes sont possibles,* a, b, c, d *étant des entiers positifs. Trouver chaque fois le quotient.*

$$1^o (x^{3a} + x^{3b+1} + x^{3c+2}) : (x^2 + x + 1)$$
$$2^o (x^{4a} + x^{4b+1} + x^{4c+2} + x^{4d+3}) : (x^3 + x^2 + x + 1).$$

1° Désignons le dividende par A et le diviseur par B. Il vient

$$A - B = (x^{3a} - 1) + x(x^{3b} - 1) + x^2(x^{3c} - 1).$$

Chacune des parenthèses du second membre est divisible par $x^3 - 1$ qui est égal à $B(x - 1)$. On a donc

$$A - B = B(x - 1)Q \quad \text{ou} \quad A = B[(x - 1)Q + 1],$$

Q étant un polynôme entier en x. Il en résulte que A est divisible par B et que le quotient est $(x - 1)Q + 1$.

Le polynôme Q est la somme des trois expressions

$$x^{3a-3} + x^{3a-6} + \dots + x^3 + 1$$
$$x(x^{3b-3} + x^{3b-6} + \dots + x^3 + 1)$$
$$x^2(x^{3c-3} + x^{3c-6} + \dots + x^3 + 1).$$

2° On raisonne d'une façon analogue pour la 2e division.

136. *Déterminer* a *et* b *pour que le polynôme*

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + 2x(a - 1) + 9 \quad \textit{soit un carré.}$$

Si le polynôme proposé est un carré parfait, sa racine carrée sera de la forme $\pm (x^2 + cx + d)$ et on a l'identité

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + 2x(a - 1) + 9 = (x^2 + cx + d)^2.$$

En développant le second membre et en identifiant, on obtient le système

$$2c = a; \quad c^2 + 2d = b; \quad cd = a - 1; \quad d^2 = 9.$$

L'équation $d^2 = 9$ donne $d = \pm 3$.

a) Si $d = 3$, on trouve

$$a = -2; \quad b = 7; \quad c = -1;$$

Le polynôme $x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 6x + 9$ est donc le carré des trinômes $\pm (x^2 - x + 3)$.

b) Si $d = -3$, on trouve

$$a = \frac{2}{5}; \quad b = -\frac{149}{25}; \quad c = \frac{1}{5};$$

et on peut écrire

$$x^4 + \frac{2}{5}x^3 - \frac{149}{25}x^2 - \frac{6}{5}x + 9 = [\pm (x^2 + \frac{x}{5} - 3)]^2.$$

137. *Déterminer* a *et* b *pour que le polynôme* $x^6 + ax^4 + bx^2 + 27$ *soit un cube.*

On trouve $a = 9$; $b = 27$.

La racine cubique est $x^2 + 3$.

138. *Trouver la condition pour que le polynôme*

$$4x^4 - 4px^3 + 4qx^2 + 2p(m+1)x + (m+1)^2$$

soit un carré parfait.

Soient $\pm(2x^2 + \alpha x + \beta)$ les racines carrées du polynôme. On obtient le système

$$\alpha = -p; \quad \alpha^2 + 4\beta = 4q; \quad \alpha\beta = p(m+1); \quad \beta^2 = (m+1)^2.$$

En éliminant α, ce système se réduit à

$$p^2 + 4\beta = 4q \qquad (1)$$
$$-p\beta = p(m+1) \qquad (2)$$
$$\beta^2 = (m+1)^2. \qquad (3)$$

I. Si $m + 1 = 0$, l'équation (3) donne $\beta = 0$, l'équation (2) devient une identité et la condition cherchée est

$$p^2 = 4q.$$

Dans le cas particulier, où $m + 1 = p = q = 0$, le polynôme se réduit à $4x^4 = (\pm 2x^2)^2$.

II Si $m + 1 \neq 0$, on peut prendre

$$= m + 1 \quad \text{ou} \quad \beta = -(m+1).$$

a) Si l'on prend $\beta = m + 1$, l'équation (2) et le système sont impossibles quand $p \neq 0$. Si $p = 0$, l'équation (1) exige qu'on ait en plus $q = m + 1$.

b) Si l'on prend $\beta = -(m+1)$, l'équation (2) devient une identité. L'équation (1) exige $p^2 - 4q = 4(m+1)$.

III. En comparant les résultats trouvés, on aboutit aux conclusions suivantes :

a) Si $p^2 - 4q = 4(m+1)$, le polynôme est un carré parfait et ses racines carrées sont $\pm[2x^2 - px - (m+1)]$.

b) Si $p = 0$ et si l'on a $q = m + 1 \neq 0$, le polynôme est un carré parfait et ses racines carrées sont

$$\pm[2x^2 + (m+1)].$$

139. *Décomposer chacun des polynômes suivants en un produit de deux fonctions linéaires.*

1° $2y^2 + 12xy + 18x^2 + y + 3x - 1$.
Rép. $(y + 3x + 1)(2y + 6x - 1)$.

2° $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 5x + 15y - 7$.
Rép. $(2x - y + 7)(x + 2y - 1)$.

3° $12xy - 6x^2 - 4y + 5x - 1$.
Rép. $(4y - 2x + 1)(3x - 1)$.

4° $3y^2 + 12xy + 12x^2 + 2y + 4x + 1$.
Rép. $\frac{1}{3}(3y + 6x + 1 + i\sqrt{2})(3y + 6x + 1 - i\sqrt{2})$.

140. *Chercher deux fonctions linéaires à coefficients entiers, telles que la somme de leurs carrés soit*

$$8x^2 + 8xy + 10y^2 - 16x + 10.$$

Désignons le polynôme par $F(x,y)$ et posons

$$F(x,y) = (ax + by + c)^2 + (a'x + b'y + c')^2.$$

Effectuons et ordonnons le second membre, puis identifions. On obtient le système

$$a^2 + a'^2 = 8; \quad ab + a'b' = 4; \quad b^2 + b'^2 = 10;$$
$$ac + a'c' = -8; \quad bc + b'c' = 0; \quad c^2 + c'^2 = 10.$$

La première équation donne

$$a^2 = a'^2 = 4 \quad \text{ou} \quad a = \pm 2, \quad a' = \pm 2.$$

I. Prenons $a = a' = 2$.

La 2^e et la 3^e équation donnent

$$b = -1, \quad b' = 3 \quad \text{et} \quad b = 3, \quad b' = -1.$$

A ces deux systèmes de valeurs pour b et b', la 4^e et la 5^e équation font correspondre respectivement les systèmes.

$$c = -3, \quad c' = -1 \quad \text{et} \quad c = -1, \quad c' = -3;$$

et ces systèmes de valeurs de c et c' vérifient la 6^e équation.

Le système a donc deux solutions :

$$a = 2, \quad b = -1, \quad c = -3, \quad a' = 2, \quad b' = 3, \quad c' = -1;$$
$$\text{et} \quad a = 2, \quad b = 3, \quad c = -1, \quad a' = 2, \quad b' = -1, \quad c' = -3.$$

Les deux solutions conduisent à la même décomposition

$$F(x,y) = (2x - y - 3)^2 + (2x + 3y - 1)^2.$$

II. On peut encore prendre :

$$a = 2, \ a' = -2; \quad a = -2, \ a' = 2; \quad a = a' = -2.$$

En posant $2x - y - 3 = A$ et $2x + 3y - 1 = B$, on trouve chaque fois $F(x,y) = (\pm A)^2 + (\pm B)^2$.

141. *Décomposer chacun des polynômes suivants en un produit de deux fonctions linéaires, après avoir cherché les valeurs de* a *pour lesquelles cette décomposition est possible.*

1° $(a + 4)y^2 - (a + 4)xy + 2x^2 - (a + 4)y + 5x + 2$.

L'équation $\Delta = \frac{1}{4}[(a + 4)^2 - 9(a + 4)] = 0$ donne

$$a = 5 \quad \text{et} \quad a = -4.$$

Pour $a = 5$, on a

$9y^2 - 9xy + 2x^2 - 9y + 5x + 2 = (2x - 3y + 1)(x - 3y + 2)$.

Pour $a = -4$, on a $2x^2 + 5x + 2 = (x + 2)(2x + 1)$.

2° $ay^2 - 2(a + 3)xy + 3(a + 1)x^2 - 2(a - 1)y + 4(a - 1)x + 1$.

L'équation $\Delta = -3a^3 + 17a^2 - 24a = 0$ donne

$$a = 0, \quad 3 \quad \text{ou} \quad \frac{8}{3}.$$

Pour $a = 0$, on a

$$-6xy + 3x^2 + 2y - 4x + 1 = (x - 2y - 1)(3x - 1).$$

Pour $a = 3$, on a

$$3y^2 - 12xy + 12x^2 - 4y + 8x + 1 = (y - 2x - 1)(3y - 6x - 1).$$

Pour $a = \frac{8}{3}$, on a

$$\frac{8y^2}{3} - \frac{34xy}{3} + 11x^2 - \frac{10y}{3} + \frac{20x}{3} + 1 = \frac{1}{3}(2y - 3x - 1)(4y - 11x - 3).$$

142. *Décomposer les fractions rationnelles suivantes en des sommes de fractions simples ayant chacune pour dénominateur un diviseur du dénominateur de la fraction considérée.*

1° $\dfrac{x + 3}{2x^2 - 3x - 2}$.

Le dénominateur de cette fraction est égal à $(x - 2)(2x + 1)$. Nous poserons

$$\frac{x + 3}{2x^2 - 3x - 2} \equiv \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{2x + 1}.$$

En chassant les dénominateurs, il vient

$$x + 3 \equiv x(2A + B) + A - 2B.$$

Cette identité donne $2A + B = 1$; $A - 2B = 3$; ou encore,

$$A = 1; \quad B = -1.$$

Par suite, $$\frac{x + 3}{2x^2 - 3x - 2} = \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{2x + 1}.$$

2° $$\frac{x - 1}{3x^2 - 7x + 2} = \frac{1}{5(x - 2)} + \frac{2}{5(3x - 1)}.$$

3° $$\frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \frac{x + 1}{x(x + 3)} = \frac{1}{3x} + \frac{2}{3(x + 3)}.$$

4° $$\frac{(x + 1)^2}{(x - 1)^3} = \frac{1}{x - 1} + \frac{4}{(x - 1)^2} + \frac{4}{(x - 1)^3}.$$

5° $$\frac{x^3 - 1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{4x + 1}{3(x^2 + 4)} - \frac{x + 1}{3(x^2 + 1)}.$$

6° $$\frac{9}{(x - 1)(x + 2)^2} = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 2} - \frac{3}{(x + 2)^2}.$$

7° $$\frac{x^3 + 3x^2 - 11x + 12}{(x^2 + 1)(x - 2)^2} = \frac{1}{x - 2} + \frac{2}{(x - 2)^2} + \frac{3}{x^2 + 1}.$$

8° $$\frac{x^4 - 6x^3 + 22x^2 - 24x + 7}{(x - 3)^2(x^3 - 1)} = \frac{x^3 - 5x^2 + 17x - 7}{(x - 3)^2(x^2 + x + 1)}$$
$$= \frac{2}{(x - 3)^2} + \frac{x - 1}{x^2 + x + 1}.$$

143. *Même question, mais commencer par transformer chacune des fractions proposées en une somme de deux termes dont le premier est le quotient du numérateur par le dénominateur.*

1° $\dfrac{x^3+4x-1}{x^2-1} = x + \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{3}{x+1}.$

2° $\dfrac{2x^4-1}{(x-2)(x^2+x+1)} = 2x+2+\dfrac{31}{7(x-2)} - \dfrac{3x-5}{7(x^2+x+1)}.$

3° $\dfrac{x^4}{(x^2-1)(x+1)} = x-1+\dfrac{1}{4(x-1)} + \dfrac{7}{4(x+1)} - \dfrac{1}{2(x+1)^2}.$

4° $\dfrac{3x^3-3x^2-x-5}{x^3-2x^2+x-2} = 3 + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{2x}{x^2+1}.$

144. *Chercher les sommes suivantes :*

1° $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{20}+\ldots\ldots+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}.$ — On a

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}.$$

En faisant successivement $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n,$ on trouve :

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{20} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}.$$

En additionnant membre à membre, on voit que la somme cherchée est

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = \frac{n}{2(n+2)}.$$

2° $\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{15}+\ldots+\dfrac{2}{n(n+2)}.$ — On a

$$\frac{2}{n(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}.$$

Rép. $\dfrac{3n^2+5n}{2(n+1)(n+2)}.$

3° $\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{60}+\dots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. — On a

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+2)}.$$

Rép. $\frac{n^2+3n}{4(n+1)(n+2)}$.

4° $\frac{2}{3}+\frac{8}{15}+\frac{18}{35}+\dots+\frac{2n^2}{4n^2-1}$. — On a

$$\frac{2n^2}{4n^2-1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4(2n-1)}-\frac{1}{4(2n+1)}.$$

Rép. $\frac{n^2+n}{2n+1}$.

145. *Trouver le premier terme et la raison d'une progression arithmétique, sachant que la somme des* n *premiers termes est, quel que soit* n,

$$1^\circ\ \frac{\mathrm{n}^2}{2};\quad 2^\circ\ \mathrm{n(3n+1)};\quad 3^\circ\ \mathrm{n(np+q)}.$$

1° *La somme des* n *premiers termes est* $\frac{\mathrm{n}^2}{2}$, *quel que soit* n.

Soient a le premier terme et r la raison de la progression. La somme des n premiers termes a pour expression

$$[2a+(n-1)r]\times\frac{n}{2}\quad\text{ou}\quad\frac{1}{2}[rn^2+(2a-r)n].$$

Pour toutes les valeurs entières et positives de n, on aura

$$rn^2+(2a-r)n=n^2,$$

ce qui exige

$$r=1;\quad 2a-r=0.$$

Rép. $a=0{,}5;\quad r=1$.

2° *La somme des* n *premiers termes est* n(3n + 1), *quel que soit* n.

Rép. $a=4;\quad r=6$.

3° *La somme des* n *premiers termes est* n(np + q), *quel que soit* n.

Rép. $a=p+q;\quad r=2p$.

146. *Trouver le premier terme et la raison d'une progression arithmétique, sachant que la somme des* n *premiers termes est égale à* n + 1 *fois la moitié du* n^e *terme, quel que soit* n.

On a l'identité

$$\frac{n+1}{2}\left[a+(n-1)r\right]=\frac{1}{2}\left[rn^2+(2a-r)n\right]$$

ou

$$rn^2+an+a-r=rn^2+(2a-r)n.$$

Cette identité donne le système

$$a = 2a - r, \quad a - r = 0,$$

qui se réduit à l'équation unique $a = r$.

Donc toute progression arithmétique dont le premier terme et la raison sont égaux répond à la question.

CHAPITRE VIII

Binôme de Newton.

§ I. — ANALYSE COMBINATOIRE

147. *Combien de mots différents peut-on former en permutant les lettres des mots* Namur, Bruxelles, Divisibilité?

Rép. $P_5 = 120$; $\dfrac{P_9}{P_2 \times P_2} = 90\,720$; $\dfrac{P_{12}}{P_5} = 3\,991\,680$.

148. *De combien de manières peut-on ranger en file* 10 *élèves, quand deux élèves occupent toujours, l'un la première et l'autre la dernière place?*

Rép. $P_8 = 40\,320$.

149. *Combien y a-t-il de nombres compris entre* 3000 *et* 4000 *et renfermant les chiffres* 2, 3, 4, 5?

En tenant compte de ce que tous les nombres compris entre 3000 et 4000 ont comme premier chiffre 3, on trouve :

Rép. $P_3 = 6$.

150. *Combien de nombres différents de* 8 *chiffres renferment les chiffres* 0, 1, 2, 3,..., 7?

Avec les 7 chiffres 1, 2, 3, ..., 7, on peut former P_7 nombres différents. Dans chacun de ceux-ci, on peut placer le chiffre 0 de 7 façons différentes.

Rép. $P_7 \times 7 = 35\,280$.

151. *Parmi les diverses permutations des lettres* a, b, c, d, e, f, *combien y en a-t-il qui commencent par* ab?

Rép. $P_4 = 24$.

152. *Parmi ces mêmes permutations, combien y en a-t-il où les lettes* a, b, c *sont ensemble* : 1° *Dans l'ordre alphabétique*; 2° *Dans un ordre quelconque?*

1° La question revient à chercher le nombre des permutations que l'on peut former avec les 4 éléments *abc, d, e, f.*

Rép. $P_4 = 24$.

2° Chacune des permutations précédentes permet de former P_3 permutations nouvelles.

Rép. $P_4 \times P_3 = 144$.

153. *Combien y a-t-il de nombres formés :* 1° *De trois chiffres significatifs différents*; 2° *De trois chiffres significatifs?*

Trouver le 100^e *terme de chacune des deux suites que l'on obtiendrait en écrivant les nombres précédents à la suite l'un de l'autre et par ordre de grandeur croissante.*

1° **Rép.** $A_9^3 = 504$.

2° » $B_9^3 = 9^3 = 729$.

3° Le 100^e terme de la suite formée par les nombres de trois chiffres significatifs différents est 283.

En effet, la suite renferme $A_8^2 = 56$ nombres commençant par 1, et 56 commençant par 2. Ces derniers nombres peuvent être groupés en 8 classes de 7 nombres, suivant que le second chiffre est 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9. Le nombre cherché sera le 2^e nombre de la 7^e classe $(100 = 56 + 7 \times 6 + 2)$; son second chiffre est donc 8 et le dernier 3.

4° On montrerait d'une façon analogue que le 100^e terme de la suite formée par les nombres de trois chiffres significatifs est 231.

154. *On forme des nombres composés de* 5 *chiffres significatifs différents, mais parmi lesquels se trouvent chaque fois les chiffres* 2 *et* 7. *Combien de nombres pourra-t-on former?*

Avec les 7 chiffres 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, on peut former A_7^3 nombres différents de 3 chiffres. Dans chacun de ces nombres on peut faire occuper 4 positions différentes au chiffre 2 et on obtient ainsi $4A_7^3$ nombres différents. En remarquant que dans chacun de ces derniers nombres, on peut faire occuper 5 positions différentes au chiffre 7, on voit qu'on aura $4 \times 5 \times A_7^3$ nombres différents de 5 chiffres.

Rép. $20A_7^3 = 4200$.

155. *Combien y a-t-il de nombres formés de trois chiffres pairs différents* (0 *étant exclu*) *et de deux chiffres impairs différents?*

En rangeant les chiffres dans l'ordre naturel, on peut former avec les 4 chiffres pairs C_4^3 nombres de trois chiffres, et avec les 5 chiffres impairs

C_5^2 nombres de deux chiffres. En écrivant ensuite successivement chaque nombre de 2 chiffres impairs à la suite de chaque nombre de 3 chiffres pairs, on obtiendra $C_4^3 \times C_5^2$ nombres de 5 chiffres, et dans chacun de ceux-ci, on peut encore permuter les chiffres.

Rép. $C_4^3 \times C_5 \times P_5 = 4800.$

156. *Avec les chiffres* 0, 1, 2, ..., 9, *combien peut-on former de nombres composés de* 4 *chiffres différents?*

On peut former $3 \times A_9^3$ nombres de 4 chiffres différents parmi lesquels se trouve le chiffre 0, et A_9 nombres de 4 chiffres différents parmi lesquels le chiffre zéro ne se trouve pas.

Rép. $3 \times A_9 + A_9 = 4536.$

157. *Avec les* 9 *chiffres significatifs, combien peut-on former de produits de trois facteurs différents?*

Rép. $C_9^3 = 84.$

158. *De combien de manières peut-on distribuer* 12 *cartes entre quatre joueurs, quand on en donne trois à chacun?*

Rép. $C_{12}^3 \times C_9^3 \times C = \dfrac{12!}{(3!)^4} = 369\ 600.$

159. *Avec dix lettres différentes, combien peut-on former de mots de six lettres différentes, de manière que chaque mot contienne trois lettres désignées d'avance :*

1° *Quand on peut séparer les trois lettres;*

2° *Quand elles sont inséparables et toujours dans le même ordre;*

3° *Quand elles sont inséparables, mais qu'elles peuvent être placées dans un ordre quelconque.*

1° On peut raisonner comme au n° **154** ou bien comme suit : Écartons les trois lettres désignées d'avance. Avec les 7 lettres restantes on peut former C_7^3 mots de 3 lettres, celles-ci étant rangées dans l'ordre alphabétique. A la suite de chacun de ces mots, écrivons à présent les trois lettres écartées. On aura C_7^3 mots de six lettres et dans chacun de ceux-ci on pourra permuter les six lettres.

Rép. $C_7^3 \times P_6 = 25\ 200.$

2° Avec les 7 lettres non désignées d'avance, on peut former A_7^3 mots de 3 lettres et dans chacun de ces mots, on peut faire occuper au groupe des 3 lettres désignées d'avance 4 positions différentes.

Rép. $4A_7^3 = 840.$

3° **Rép.** $4A_7^3 \times P_3 = P_7 = 5040.$

160. *De combien de manières peut-on décomposer un produit de* 3n *facteurs différents en* n *produits de 3 facteurs?*

Rép. $C^3_{3n} \times C^3_{3\ -\ 3} \times \dots \times C^3_3 = \dfrac{3n!}{6^n}$.

161. *De combien de manières peut-on partager* (2m + 1) *objets en* m *groupes de 2 objets avec un objet libre?*

Rép. $C^2_{2m+1} \times C^2_{2m-1} \times \dots \times C^2_5 \times C^2_3 = \dfrac{(2m+1)!}{2^m}$.

ou $C^2_{2m} \times C^2_{2m-2} \times \dots \times C^2_4 \times (2m+1)$.

162. *On considère les permutations de* 9 *lettres parmi lesquelles il y a deux lettres* a, *trois lettres* b *et quatre lettres* c.

1° *Trouver le nombre des permutations qui commencent par* a.

Dans ces permutations, la lettre *a* est suivie d'une permutation des 8 lettres restantes.

Rép. $\dfrac{P_8}{P_3 \times P_4} = 280$.

2° *Trouver le nombre des permutations qui commencent par* trois *lettres* c.

Il faut chercher le nombre des permutations que l'on peut former avec 6 lettres parmi lesquelles il y a deux lettres *a*, trois lettres *b* et une lettre *c*, et ne commençant pas par *c*.

Rép. $\dfrac{P_6}{P_2 \times P_3} - \dfrac{P_5}{P_2 \times P_3} = 60 - 10 = 50$.

163. *Parmi les permutations des lettres du mot* arrangement, *combien y en a-t-il* : 1° *Dans lesquelles* 5 *lettres consécutives forment le mot* natan ? 2° *Dans lesquelles* 5 *lettres consécutives sont celles du mot* natan ?

1° En enlevant au mot *arrangement* les lettres du mot *natan*, il reste 6 lettres *rrgeme* parmi lesquelles il y a deux *r* et deux *e*. Avec ces 6 lettres on peut former $\dfrac{P_6}{P_2 \times P_2} = 180$ permutations et dans chacune on peut placer le mot *natan* de 7 façons différentes.

Rép. $180 \times 7 = 1260$.

2° Dans chacune des permutations précédentes, on peut permuter les lettres du mot *natan* de 30 façons différentes.

Rép. $1260 \times 30 = 37\,800$.

164. *Calculer* m *et* n, *sachant que :*

1° $A^3_m = 240m$ 3° $C^1_{2m} + C^2_{2m} + C^3_{2m} = 387m$

2° $C^{r+p}_m = C^{r-p}_m$ 4° $C^{n1}_m = C^{n+1}_m$ et $4C^n_m = 5C^{n-1}_m$

5° $B^1_m + B^2_m + \dots + B^8_m = 38417(B^1_m + B^2_m + \dots + B^4_m)$.

1° On a
$A_m^3 = m(m - 1)(m - 2) = 240m$ ou $m^2 - 3m - 238 = 0$.
Rép. $m = 17$.

2° Si $C_m^{r+p} = C_m^{r-p}$, on doit avoir :
a) $r + p = r - p$ ou $p = 0$.
Dans ce cas, m est indéterminé.
b) Ou bien, $(r + p) + (r - p) = m$; d'où $m = 2r$.
Rép. $m = 2r$.

3° L'équation $C_{2m}^1 + C_{2m}^2 + C_{2m} = 387m$ peut s'écrire

$$2m + \frac{2m(2m - 1)}{2} + \frac{2m(2m - 1)(2m - 2)}{2.3} = 387m,$$

ou $m^2 = 289$.
Rép. $m = 17$.

4° L'équation $C_m^n = C_m^{n+1}$ donne

$$n + (n + 1) = m \quad \text{ou} \quad m = 2n + 1. \qquad (1)$$

L'équation $4C_m^n = 5C_m^{n-1}$ donne

$$\frac{4(m - n + 1)}{n} C_m^{n-1} = 5C_m^{n-1} \quad \text{ou} \quad 4(m - n + 1) = 5n. \qquad (2)$$

Le système (1), (2) donne :
Rép. $m = 17$; $n = 8$.

5° On a

$$m + m^2 + m^3 + \dots + m^8 = 38\,417(m + m^2 + m^3 + m^4).$$

D'où

$$m^4 + 1 = 38\,417 \quad \text{ou} \quad m^4 = 38\,416.$$

Rép. $m = 14$.

165. *Démontrer les théorèmes suivants :*

1° *Si* m — 1 *et* n + 1 *sont premiers entre eux,* $D_m^n = M.(n + 1)$.
En effet, on a

$$D_m^n = \frac{n + 1}{m - 1} D_{m-1}^{n+1} \quad \text{ou} \quad (m - 1)D_m^n = (n + 1) D_{m-1}^{n+1}.$$

Or $n + 1$ est premier avec $m - 1$. Donc $n + 1$ divise D_m^n.

2° *Si* m — 1 *et* n *sont premiers entre eux,* $D_m^n = M(m + n - 1)$.
En effet, on a

$$D_m^n = \frac{m + n - 1}{m - 1} D_{m-1}^n \quad \text{ou} \quad (m - 1)D_m^n = (m + n - 1)D_{m-1}^n.$$

Or, $m - 1$ étant premier avec n est aussi premier avec $(m - 1) + n$ ou $m + n - 1$. Donc $m + n - 1$ divise D_m^n.

166. *Démontrer que la somme des nombres de* n *chiffres, obtenus en permutant* n *chiffres différents de toutes les manières possibles, est égale à*

$$(n-1)!\,\frac{10^n-1}{9}\,S,$$

S *désignant la somme des* n *chiffres.*

Le chiffre 1 occupe $\frac{P_n}{n} = (n-1)!$ fois la 1re, la 2e, ..., la n^e place dans les P_n nombres. La somme de ses valeurs relatives est donc

$$1 \times (n-1)!\,[1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{n-1}] = (n-1)!\,\frac{10^n-1}{9}.$$

Le même raisonnement peut être répété pour tout autre chiffre. La somme des P_n nombres est donc

$$(n-1)!\,\frac{10^n-1}{9}\,[1 + 2 + 3 + \dots + n] = (n-1)!\,\frac{10^n-1}{9}\,S.$$

167. *Trouver la somme des nombres formés de quatre chiffres significatifs différents.*

Il y a $A_9^4 = 3024$ nombres de 4 chiffres significatifs différents.

Le neuvième de ces nombres, soit 336 nombres, commence par 1; de même 336 nombres commencent par 2, et ainsi de suite. Si on écrit ces nombres l'un en dessous de l'autre, la somme des chiffres de la 1re colonne de gauche sera

$$336(1 + 2 + 3 + \dots + 9) = 336 \times 45.$$

On montrerait d'une façon analogue que les chiffres de chacune des trois autres colonnes ont la même somme.

Mais la 1re colonne de gauche représente des mille, la 2e des centaines, la 3e des dizaines et la 4e des unités. La somme des nombres est donc

$$336.45(10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 16\ 798\ 320.$$

168. *Trouver la somme des nombres formés de quatre chiffres différents.*

Il y a $A_{10}^4 = 5040$ nombres de 4 chiffres différents, en considérant également ceux dont le premier chiffre de gauche est zéro. Leur somme est, d'après l'exercice précédent,

$$\begin{aligned} S' &= 504(0 + 1 + 2 + \dots + 9)(10^3 + 10^2 + 10 + 1) \\ &= 504 \times 45 \times 1111. \end{aligned}$$

Les nombres commençant par zéro, n'ont en réalité que 3 chiffres. Leur nombre est $A_9^3 = 504$ et leur somme

$$S'' = 56(1 + 2 + 3 + \dots + 9)(10^2 + 10 + 1) = 56 \times 45 \times 111.$$

La somme demandée est

$$S' - S'' = 56 \times 45 \times 9888 = 24\ 917\ 760.$$

169. *L'expression* $\dfrac{P_{a+b-1}}{P_a \times P_b}$ *est un nombre entier quand* a *et* b *sont premiers entre eux, ou quand* a + b *est un nombre premier.*

L'expression proposée peut s'écrire $\dfrac{C^a_{a+b-1}}{b}$. Or on a

$$C^a_{a+b} = \frac{(a+b)C^a_{a+b-1}}{b}.$$

Il en résulte que b divise $(a+b)\,C^a_{a+b-1}$. Mais b est premier avec $a+b$ quand a et b sont premiers entre eux, ou quand $a+b$ est un nombre premier. Donc b divise C^a_{a+b-1} et l'expression

$$\frac{C^a_{a+b-1}}{b} = \frac{(a+b-1)!}{a!\,b!}$$

représente un nombre entier.

170. *Si* n = pq, *le nombre* P_n *est divisible par* $(P_p)^q P_q$ *et par* $(P_q)^p P_p$.

En effet, on a

$$\begin{aligned} P_n = (1.2.3 \ldots p) \times [(p+1)(p+2) \ldots 2p] \\ \times \ldots \times \{[(q-1)p+1][(q-1)p+2] \ldots pq\} \\ = (P_p)^q\, C^p_p\, C^p_{2p}\, C^p_{3p} \ldots\ldots C^p_{pq}. \end{aligned}$$

Or, on peut écrire

$$C^p_{kp} = \frac{kp}{p}\, C^{p-1}_{kp-1} = kC^{p-1}_{kp-1}.$$

Il vient donc

$$P_n = (P_p)^q P_q (C^{p-1}_{p-1}\, C^{p-1}_{2p-1}\, C^{p-1}_{3p-1} \ldots\ldots C^{p-1}_{pq-1}).$$

On montrerait d'une façon analogue que P_n est divisible par $(P_q)^p P_p$.

171. *Si* n = a + b + cd + pq, *l'expression* P_n *est divisible par* $P_a P_b P_c P_p (P_d)^c (P_q)^p$.

En effet, on a

$$\begin{aligned} P_n = P_a\, [(a+1)(a+2) \ldots (a+b)]\, [(a+b+1) \ldots (a+b+cd)] \\ [(a+b+cd+1) \ldots (a+b+cd+pq)] \\ = P_a \times C^b_{a+b} \times P_b \times C^{cd}_{a+b+cd} \times P_{cd} \times C^{pq}_n \times P_{pq} \\ = P_a\, P_b\, P_{cd}\, P_{pq} \times C^b_{a+b}\, C^{cd}_{a+b+cd}\, C^{pq}_n. \end{aligned}$$

Or P_{cd} est divisible par $(P_d)^c P_c$ et P_{pq} par $(P_q)^p P_p$. Le théorème est donc démontré.

172. *On donne* p *lettres différentes* a, b, c,...; *on forme les combinaisons avec répétition de ces* p *lettres* n *à* n, *mais en ne faisant pas entrer la lettre* a *plus de* q *fois dans une combinaison. Trouver le nombre de ces combinaisons.*

Si, parmi les combinaisons données, on considère celles où l'élément a figure r fois exactement et si l'on y supprime la lettre a, il reste les combinaisons avec répétition des $p - 1$ autres éléments $n - r$ à $n - r$. Le nombre des combinaisons considérées est donc

$$D_{p-1}^{n-r} = C_{p+n-r-2}^{n-} = \frac{(n - r + p - 2)!}{(n - r)!\,(p - 2)!}$$

Pour avoir le nombre total des combinaisons, il suffit de faire successivement $r = 0, 1, 2, \ldots, q$ dans l'expression précédente et d'ajouter les résultats. On trouve ainsi

$$N = \sum_{r=0}^{r=q} \frac{(n - r + p - 2)!}{(n - r)!\,(p - 2)!}.$$

ou encore, en posant $n - r = i$ et en renversant l'ordre des termes,

$$N = \frac{1}{(p-2)!} \sum_{i=n-q}^{i=n} (i + 1)\,(i + 2) \ldots\ldots (i + p - 2).$$

173. *Montrer que l'on a :*

1° $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$

Cette formule résulte de l'égalité $C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$.

2° $\dfrac{C_{4n}^{2n}}{C_{2n}^{n}} = \dfrac{1.3.5 \ldots (4n - 1)}{[1.3.5.7 \ldots (2n - 1)]^2}$

On a

$$\frac{C_{4n}^{2n}}{C_{2n}^{n}} = \frac{4n!}{2n!\,2n!} : \frac{2n!}{n!\,n!} = \frac{4n!\,[n!]^2}{[2n!]^3}. \qquad (1)$$

Or, on peut écrire

$$4n! = [1.3.5 \ldots\ldots (4n - 1)] \times 2^{2n} \times 2n!;$$
$$2n! = [1.3.5 \ldots\ldots (2n - 1)] \times 2^{n} \times n!.$$

En remplaçant dans (1) au numérateur $4n!$ et au dénominateur deux fois le facteur $2n!$, on trouve la valeur demandée, après avoir simplifié.

3° $C_{n+2}^{r+1} = C_n^{r+1} + C_n^{r-1} + 2C_n$.

On a $\qquad C_{n+2}^{r+1} = C_{n+1}^{r+1} + C_{n+1}^{r}. \qquad (1)$

Or $\qquad C_{n+1}^{r+1} = C_n^{r+1} + C_n^r \quad$ et $\quad C_{n+1}^r = C_n + C_n^{r-1}$.

En remplaçant dans (1), on obtient la formule demandée.

4° $C_m^k\, C_{m-k}^{p-k} = C_m^p\, C_p^k$. $(m > p > k)$.

Il suffit de transformer les deux membres, en appliquant pour chaque facteur la formule

$$C_m^n = \frac{m!}{n!\,(m - n)!}.$$

174. *Établir les formules* :

1° $\mathrm{C}_m^1\,\mathrm{C}_m^2\,\mathrm{C}_m^3 \,\ldots..\, \mathrm{C}_m^m = \dfrac{(\mathrm{P}_m)^{m-1}}{(\mathrm{P}_1\,\mathrm{P}_2\,\mathrm{P}_3\,\ldots\,\mathrm{P}_{m-1})^2}$.

Multiplier membre à membre les égalités

$$\mathrm{C}_m^1 = \frac{m!}{1!\,(m-1)!};\ \mathrm{C}_m^2 = \frac{m!}{2!\,(m-2)!}\ ; \ldots ;\ \mathrm{C}_m^m = 1.$$

2° $(\mathrm{C}_m^0 + \mathrm{C}_m^1)(\mathrm{C}_m^1 + \mathrm{C}_m^2) \,\ldots..\, (\mathrm{C}_m^{m-1} + \mathrm{C}_m^m) = \dfrac{(m+1)^m \mathrm{C}_m^1 \ldots \mathrm{C}_m^m}{m!}$.

En tenant compte de la formule $\mathrm{C}_m^{p+1} = \dfrac{m-p}{p+1}\,\mathrm{C}_m^p$, le premier membre devient

$$\left[(m+1)\mathrm{C}_m^0\right]\left[\frac{(m+1)\mathrm{C}_m^1}{2}\right]\left[\frac{(m+1)\mathrm{C}_m^2}{3}\right]\ldots\left[\frac{(m+1)\mathrm{C}_m^{m-1}}{m}\right].$$

3° $\dfrac{\mathrm{C}_m^1}{1} + 2\,\dfrac{\mathrm{C}_m^2}{\mathrm{C}_m^1} + 3\,\dfrac{\mathrm{C}_m^3}{\mathrm{C}_m^2} + \ldots + m\,\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{C}_m^{m-}} = \dfrac{m(m+1)}{2}$. — On a

$$\frac{\mathrm{C}_m^1}{1} = m;\quad 2\,\frac{\mathrm{C}_m^2}{\mathrm{C}_m^1} = 2\,\frac{m-1}{2} = m-1;$$

$$3\,\frac{\mathrm{C}_m^3}{\mathrm{C}_m^2} = 3\,\frac{m-2}{3} = m-2;\ \ldots;\ m\,\frac{\mathrm{C}_m^m}{\mathrm{C}_m^{m-1}} = \frac{m}{m} = 1.$$

Le premier membre de la formule vaut donc

$$m + (m-1) + \ldots + 2 + 1 = \frac{m(m+1)}{2}.$$

4° $\mathrm{C}_p^q + \mathrm{C}_{p-1}^{q-1} + \ldots + \mathrm{C}_{p-q+1}^1 + \mathrm{C}_{p-q}^0 = \mathrm{C}_{p+1}^q$.

1re *solution.* — On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}_{p+1}^q &= \mathrm{C}_p^q + \mathrm{C}_p^{q-1}\\
\mathrm{C}_p^{q-1} &= \mathrm{C}_{p-1}^{q-1} + \mathrm{C}_{p-1}^{q-2}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathrm{C}_{p-q+3}^2 &= \mathrm{C}_{p-q+2}^2 + \mathrm{C}_{p-q+2}^1\\
\mathrm{C}_{p-q+2}^1 &= \mathrm{C}_{p-q+1}^1 + \mathrm{C}_{p-q+1}^0.
\end{aligned}$$

En additionnant membre à membre, en réduisant et en remplaçant C_{p-q+1}^0 par C_{p-q}^0, on obtient la formule demandée.

2e *solution.* — Considérons les $p + 1$ éléments

$$a_1,\quad a_2,\quad \ldots,\quad a_{q-1},\quad a_q,\quad a_{q+1},\quad \ldots,\quad a_p,\quad a_{p+1}.$$

Supposons que dans chacune des C_{p+1}^q combinaisons de ces $p + 1$ éléments q à q, les éléments soient rangés de manière que leurs numéros d'ordre aillent en croissant. Dans ces conditions, on voit facilement que ces combinaisons peuvent être rangées en $q + 1$ groupes :

C_p^q combinaisons qui ne renferment pas a_1;
C_{p-1}^{q-1} combinaisons qui renferment a_1, mais pas a_2;
C_{p-2}^{q-2} combinaisons qui renferment a_1, a_2, mais pas a_3;
....
C_{p-q+1}^1 combinaisons qui renferment a_1, a_2, ..., a_{q-1}, mais pas a_q; une seule combinaison renfermant a_1, a_2, ..., a_q.

On a donc

$$C_{p+1}^q = C_p^q + C_{p-1}^{q-1} + \dots + C_{p-q+1}^1 + C_{p-q}^0.$$

175. *Établir la relation* ($m < a$ *et* $m < b$)

$$C_{a+b}^m = C_a^m + C_a^{m-1} C_b^1 + \dots + C_a^{m-n} C_b^n + \dots + C_b^m. \qquad (1)$$

En déduire les formules :

$$C_{2m}^m = (C_m^0)^2 + (C_m^1)^2 + (C_m^2)^2 + \dots\dots + (C_m^m)^2;$$

et $$A_{a+b}^m = A_a^m + C_m^1 A_a^{m-1} A_b^1 + C_m^2 A_a^{m-2} A_b^2 + \dots + C_m^n A_a^{m-n} A_b^n + \dots$$

1° Pour établir la 1re relation, considérons $a + b$ lettres différentes. Partageons-les en deux groupes, le 1er renfermant a lettres, et le second b. Pour obtenir toutes les combinaisons des $a + b$ lettres, prises m à m, on peut choisir toutes les lettres dans le premier groupe, puis combiner $m - 1$ lettres du 1er groupe avec une lettre du second, puis combiner $m - 2$ lettres du 1er groupe avec 2 lettres du second, et ainsi de suite. On en déduit la relation demandée.

2° Si $a = b = m$, on a

$$C_{2m}^m = (C_m^0)^2 + (C_m^1)^2 + (C_m^2)^2 + \dots\dots + (C_m^m)^2.$$

3° Multiplions les deux membres de la relation (1) par $m!$ Le 1er membre devient A_{a+b}^m. Le terme général du second membre devient

$$m!\, C_a^{m-n} C_b^n = \frac{m!}{(m-n)!\, n!} A_a^{m-n} A_b^n = C^n A_a^{m-n} A_b^n.$$

En transformant tous les termes du second membre d'une façon analogue, on obtient la troisième relation demandée.

176. *Trouver la valeur de*

$$S = P_q + \frac{P_{q+1}}{P_1} + \frac{P_{q+2}}{P_2} + \dots + \frac{P_{q+r}}{P_r}.$$

On a, en remarquant que $A_m^n = \dfrac{P_m}{P_{m-n}}$,

$$S = A_q^q + A_{q+1}^q + A_{q+2}^q + \dots + A_{q+r}^q$$
$$= q!\, [C_{q+r}^q + \dots + C_{q+2}^q + C_{q+1}^q + C_q^q].$$

L'expression entre crochets est de la forme

$$C_{m-1}^{n-1} + C_{m-2}^{n-1} + \dots + C_{n}^{n-1} + C_{n-1}^{n-1}.$$

On a donc (3e propriété des combinaisons) :

$$S = q!\, C_{q+r+1}^{q+1}.$$

177. *De la formule trouvée dans la question précédente, déduire la valeur des sommes suivantes :*

1° $1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1)$.

Cette expression peut s'écrire

$$P_2 + \frac{P_3}{P_1} + \frac{P_4}{P_2} + \dots + \frac{P_{n+1}}{P_{n-1}}.$$

Elle vaut donc ($q = 2$, $r = n - 1$)

$$2!\, C_{n+2}^{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

2° $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + (n-1)n(n+1)$.

Cette expression peut s'écrire

$$P_3 + \frac{P_4}{P_1} + \frac{P_5}{P_2} + \dots + \frac{P_{n+1}}{P_{n-2}}.$$

Elle vaut donc ($q = 3$, $r = n - 2$)

$$3!\, C_{n+2}^{4} = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}.$$

178. *Démontrer les formules :*

1° $D_{m+1}^{n} = 1 + D_{m}^{1} + D_{m}^{2} + \dots + D_{m}^{n}$.

En appliquant la formule

$$D_{p}^{q} = D_{p}^{q-1} + D_{p-1}^{q},$$

on a successivement :

$$\begin{aligned} D_{m+1}^{n} &= D_{m+1}^{n-1} + D_{m}^{n} \\ D_{m+1}^{n-1} &= D_{m+1}^{n-2} + D_{m}^{n-1} \\ &\dots\dots\dots\dots \\ D_{m+1}^{2} &= D_{m+1}^{1} + D_{m}^{2} \\ D_{m+1}^{1} &= 1 + D_{m}^{1}. \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre et en réduisant les termes semblables, on obtient la formule demandée.

2° $D_{m+2}^{n} = D_{m}^{n} + 2D_{m}^{n-1} + 3D_{m}^{n-2} + \dots + nD_{m}^{1} + (n+1)$.

En appliquant la formule précédente (1°), on trouve

$$D_{m+2}^{n} = D_{m+1}^{n} + D_{m+1}^{n-1} + \dots + D_{m+1}^{2} + D_{m+1}^{1} + 1. \qquad (1)$$

Développons ensuite chaque terme du second membre de (1) au moyen de la formule établie au 1o.

$$\begin{array}{lcr}
D^n_{m+1} & = & D^n_m + D^{n-1}_m + \ldots\ldots + D^2_m + D^1_m + 1 \\
D^{n-1}_{m+1} & = & D^{n-1}_m + \ldots\ldots + D^2_m + D^1_m + 1 \\
\ldots & & \ldots \\
D^2_{m+1} & = & D^2_m + D^1_m + 1 \\
D^1_{m+1} & = & D^1_m + 1 \\
1 & = & 1
\end{array}$$

Il reste à additionner ces égalités membre à membre.

3o $D^{n+2}_m = D^n_m + 2\,D^n_{m-1} + 3\,D^n_{m-2} + \ldots + mD^n_1$. — La formule

$$D^{n+1}_m = D^n_m + D^n_{m-1} + \ldots + D^n_3 + D^n_2 + D_1 \qquad (1)$$

établie dans la théorie, donne

$$D^{n+2}_m = D^{n+1}_m + D^{n+1}_{m-1} + \ldots + D^{n+1}_3 + D^{n+1}_2 + D^{n+1}_1. \qquad (2)$$

En développant ensuite chaque terme du second membre de (2) au moyen de la formule (1) et en additionnant membre à membre, on obtient la formule demandée.

4o $D^n_m = D^n_p + D^{n-1}_p D^1_{m-p} + D^{n-2}_p D^2_{m-p} + \ldots + D^1_p D^{n-1}_{m-p} + D^n_{m-p}$.
La démonstration est analogue à celle exposée au 1o du no **175.**

5o $D^m_{m+1} = 1 + (D^1_m)^2 + (D^2_{m-1})^2 + (D^3_{m-2})^2 + \ldots + (D^m_1)^2$.
Il suffit de transformer la formule

$$C^m_{2m} = (C^0_m)^2 + (C^1_m)^2 + (C^2_m)^2 + \ldots + (C^m_m)^2,$$

établie au no **175**, en tenant compte de la formule $C^n_m = D^n_{m-n+1}$.

179. *Dans un plan, on donne* n *points;* p *de ces points sont sur une droite* d*; trois quelconques des points restants ne sont pas en ligne droite et deux quelconques d'entre eux ne sont pas en ligne droite avec l'un des* p *points situés sur la droite* d. *Chercher le nombre des droites que l'on obtient en joignant ces points deux à deux.*

En joignant 2 à 2 les $n - p$ points, non en ligne droite, on obtient C^2_{n-p} droites. En les joignant aux p points en ligne droite, on obtient $p(n-p)$ autres droites. Enfin, il y a la droite d joignant les p points en ligne droite.

Le nombre total des droites est donc

$$C^2_{n-p} + p(n-p) + 1 = \frac{1}{2}(n-p)(n+p-1) + 1.$$

Autre solution. — En supposant que trois points quelconques ne soient pas en ligne droite, n points et p points donnent respectivement C^2_n et C^2_p droites. Les points proposés donnent donc $C^2_n - C^2_p + 1$ droites.

180. *Quel est le nombre des triangles que l'on peut former en joignant ces mêmes points?*

Ces triangles peuvent avoir 2, 1 ou 0 sommets sur la droite d.

a) A chaque point, qui ne se trouve pas sur la droite *d*, correspondent C_p^2 triangles ayant deux sommets sur la droite *d*. Leur nombre total sera $(n-p)C_p^2$.

b) A chacun des p points de la droite *d* correspondent C_{n-p}^2 triangles ayant un sommet sur la droite *d*. Leur nombre total sera pC_{n-p}^2.

c) Enfin il y a C_{n-p}^3 triangles n'ayant aucun sommet sur la droite *d*.

Le nombre cherché est donc

$$(n-p)C_p^2 + pC_{n-p}^2 + C_{n-p}^3.$$

Autre solution. — En supposant que trois points quelconques ne soient pas en ligne droite, n points et p points donnent respectivement C_n^3 et C_p^3 triangles. Les points proposés donnent donc $C_n^3 - C_p^3$ triangles.

181. *Si l'on joint de toutes les manières possibles* n *points d'un plan, montrer que les droites ainsi obtenues se coupent en* $3C_n^4$ *points nouveaux. On suppose que parmi les* n *points donnés il n'y en ait pas trois en ligne droite.*

En joignant les n points 2 à 2, on obtient C_n^2 droites.

Considérons une de ces droites. Elle est déterminée par deux des points donnés. Il reste $n-2$ autres points; ces points déterminent C_{n-2}^2 droites coupant la droite considérée en autant de points nouveaux. Toutefois il pourrait arriver que 2, 3 ... de ces points coïncident; nous les considérerons alors comme points doubles, triples...

Le même raisonnement peut être répété pour toute autre droite choisie parmi les C_n^2 droites. Seulement il importe de remarquer qu'en raisonnant ainsi, nous considérons deux fois chacun des points nouveaux. Leur nombre total est donc

$$\frac{1}{2}C_n^2 C_{n-2}^2 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.1.2.1.2} = 3C_n^4.$$

Autre solution. — Soient A, B, C, D quatre points; en les joignant deux à deux, on obtient six droites qui forment un quadrilatère complet et qui déterminent trois points nouveaux. Or les quatre points peuvent être pris de C_n^4 façons différentes. Il y aura donc $3C_n^4$ points nouveaux.

182. *Étant donné un polygone convexe de* n *côtés, trouver le nombre des intersections intérieures des diagonales, ainsi que le nombre de leurs intersections extérieures.*

On suppose que trois diagonales ne concourent pas en un même point.

1° Le nombre des intersections intérieures est égal au nombre des quadrilatères convexes formés avec quatre sommets du polygone donné, c'est-à-dire à C_n^4.

2° Le nombre des diagonales est $\frac{n}{2}(n-3)$, car de chaque sommet partent $n-3$ diagonales. Une diagonale quelconque MN ne coupe aucune des $2(n-4)$ autres diagonales, issues des sommets M et N, en un point nouveau. Elle coupe donc

$$\frac{n(n-3)}{2} - 2(n-4) - 1 = \frac{n^2 - 7n + 14}{2} \text{ diagonales.}$$

Le nombre total des intersections des diagonales sera

$$\frac{n(n-3)(n^2-7n+14)}{8}$$

et le nombre des intersections extérieures

$$\frac{n(n-3)(n^2-7n+14)}{8} - C_n^4 = \frac{1}{12}n(n-3)(n-4)(n-5).$$

183. *On appelle* probabilité d'un événement *le rapport du nombre des cas favorables au nombre des cas possibles, lorsque tous les cas qui peuvent se présenter, sont considérés comme également possibles.*

1° *D'une urne qui contient* 6 *boules noires et* 4 *boules blanches, on tire une boule au hasard. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit une blanche?*

Rép. $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

2° *Trouver la probabilité d'amener avec deux dés, deux numéros dont la somme soit* 6.

Les cas favorables sont ceux où l'on amène les deux numéros 1 et 5, 2 et 4, 3 et 3, 4 et 2, 5 et 1.

Les cas possibles sont au nombre de 36. **Rép.** $\frac{5}{36}$.

3° *Une loterie contient* n *numéros. On en tire* p *numéros à la fois. Quelle est la probabilité que parmi les* p *numéros tirés il y ait* q *numéros désignés d'avance* $(p \geqslant q)$?

Le nombre des cas favorables est C_{n-q}^{p-q}. En effet, considérons une combinaison favorable. Si nous y supprimons les q numéros désignés d'avance, il nous reste une combinaison des $n-q$ numéros restants $p-q$ à $p-q$. Inversement, si à une combinaison de ces $n-q$ numéros $p-q$ à $p-q$, on ajoute les q numéros désignés d'avance, on obtient une combinaison favorable.

Le nombre des cas possibles est C_n^p. **Rép.** $C_{n-q}^{p-q} : C_n^p$.

184. *D'un jeu de* 32 *cartes, on tire trois cartes au hasard. Quelle est la probabilité de tirer :*

1° Trois cartes de la même couleur? **Rép.** $2C_{16}^3 : C_{32}^3 = \frac{7}{31}$.

2° Trois rois? **Rép.** $C_4^3 : C_{32}^3 = \frac{1}{1240}$.

3° Un as et deux rois? » $4C_4^2 : C_{32}^3 = \frac{3}{620}$.

4° Trois cartes marquantes? » $C_{16}^3 : C_{32}^3 = \frac{7}{62}$.

5° Trois cartes dont 2 ont la même couleur? » $2.16.C_{16}^2 : C_{32}^3 = \frac{24}{31}$.

6° Deux rouges et une noire? » $16C_{16}^2 : C_{32}^3 = \frac{12}{31}$.

7° Un as, un roi et une dame? » $4.4.4 : C_{32}^3 = \frac{2}{155}$.

8° Un pique, un carreau et un trèfle? » $8.8.8 : C_{32}^3 = \frac{16}{155}$.

§ II. — BINOME DE NEWTON.

185. *Développer les expressions suivantes :*

1° $(a - 2x)^7 = a^7 - 14a^6x + 84a^5x^2 - 280a^4x^3 + 560a^3x^4 - 672a^2x^5 + 448ax^6 - 128x^7$.

2° $\left(\frac{x}{2} + 2\right)^6 = \frac{x^6}{64} + \frac{3x^5}{8} + \frac{15x^4}{4} + 20x^3 + 60x^2 + 96x + 64$.

3° $(3x + y)^5 = 243x^5 + 405x^4y + 270x^3y^2 + 90x^2y^3 + 15xy^4 + y^5$.

4° $\left(x + \frac{1}{x}\right)^7 = x^7 + 7x^5 + 21x^3 + 35x + \frac{35}{x} + \frac{21}{x^3} + \frac{7}{x^5} + \frac{1}{x^7}$.

5° $\left(2x - x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}\right)^9 = 512x^9 - 2304x^{\frac{22}{3}}y^{\frac{1}{3}} + 4608x^{\frac{17}{3}}y^{\frac{2}{3}} - 5376x^4y$
$+ 4032x^{\frac{7}{3}}y^{\frac{4}{3}} - 2016x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{5}{3}} + 672x^{-1}y^2 - 144x^{-\frac{8}{3}}y^{\frac{7}{3}} + 18x^{-\frac{13}{3}}y^{\frac{8}{3}} - x^{-6}y^3$.

6° $\left(\frac{x}{3} - 3y^2\right)^6 = \frac{x^6}{729} - \frac{2x^5y^2}{27} + \frac{5x^4y^4}{3} - 20x^3y^6 + 135x^2y^8 - 486xy^{10} + 729y^{12}$.

7° $(\sqrt{1 + x^2} + 1)^5 - (\sqrt{1 + x^2} - 1)^5$
$= 10(1 + x^2)^2 + 20(1 + x^2) + 2 = 10x^4 + 40x^2 + 32$.

186. *Calculer avec* 6 *décimales exactes les valeurs des expressions suivantes :*

1° $1{,}03^5$. — On a

$$1{,}03^5 = 1 + 5.0{,}03 + 10(0{,}03)^2 + 10(0{,}03)^3 + 5(0{,}03)^4 + (0{,}03)^5$$
$$= 1 + 0{,}15 + 0{,}009 + 0{,}000\,27 + 0{,}000\,004\,05 + 0{,}000\,000\,0243$$
$$= 1{,}159\,274\ldots$$

2° $1{,}05^6 = 1{,}340\,095...$ 3° $1{,}04^8 = 1{,}368\,569...$

187. 1° *Le* 28e *terme du développement de* $(x + a)^{30}$ *est*

$$C_{30}^{27}a^{27}x^3 = C_{30}^{3}a^{27}x^3 = 4060a^{27}x^3.$$

2° *Le* 4e *terme du développement de* $(x^2 - x)^{17}$ *est*

$$-C_{17}^{3} \times x^{28} \times x^3 = -680x^{31}.$$

3° *Le* 7e *terme du développement de* $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{10}$ *est* $C_{10}^{4} \times \frac{1}{x^6} = \frac{210}{x^6}$.

4° *Le* 23e *terme du développement de* $\left(x^2 - \frac{b}{x}\right)^{25}$ *est*

$$C_{25}^{3} \times x^6 \times \frac{b^{22}}{x^{22}} = \frac{2300b^{22}}{x^{16}}.$$

5° *Le* 8e *terme du développement de* $(2\sqrt{x} - x\sqrt{8})^{10}$ *est*

$$-C_{10}^{3}(2\sqrt{x})^3\,(x\sqrt{8})^7 = -983\,040x^8\sqrt{2x}.$$

6° *Le terme milieu du développement de* $(1 + 2x)^{2m}$ *est* $C_{2m}^{m}2^m x^m$.

Il peut s'écrire

$$\frac{2m!}{m!m}\,2^m x^m = \frac{1.3.5...\,(2m-1) \times 2.4.6...\,2m}{m!m!}\,2^m x^m$$
$$= \frac{1.3.5...\,(2m-1) \times 2^m}{m!}\,2^m x^m = \frac{1.3.5...\,(2m-1)2^{2m}x^m}{m!}.$$

7° *Le coefficient de* x^{12} *dans le développement de* $(x^2 + 2x)^{10}$. — On a

$$(x^2 + 2x)^{10} = x^{20}\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{10}.$$

Cette égalité montre que le coefficient cherché est le coefficient de $\frac{1}{x^8}$ dans le développement de $\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{10}$. Ce coefficient est

$$C_{10}^{8} \times 2^8 = C_{10}^{2} \times 2^8 = 11\,520.$$

8° *Le terme milieu du développement de* $\left(\frac{2a}{3} - \frac{3}{2a}\right)^6$ *est*

$$-C_6^3 \times \left(\frac{2a}{3}\right)^3 \times \left(\frac{3}{2a}\right)^3 = -20.$$

9° *Le coefficient de* x^3 *dans le développement de* $\left(2x - \frac{1}{4x^2}\right)^{12}$ *est*

$$-C_{12}^3 \times 2^9 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = -1760.$$

10° *Le coefficient de* x^m *dans le développement de* $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{2m}$ *est*

$$C_{2m}^m \quad \text{ou} \quad \frac{1.3.5\ldots(2m-1)2^m}{m!}.$$

188. *Quelle relation doit exister entre* r *et* n, *pour que les coefficients du* $(r+3)^e$ *et du* $(2r-3)^e$ *termes du développement de* $(1+x)^{2n}$ *soient égaux?*

Les coefficients C_{2n}^{r+2} et C_{2n}^{2r-4} sont égaux dans deux cas :

1° Si $(r+2)+(2r-4)=2n$ ou $2n-3r+2=0$; (1)

2° Si $r+2=2r-4$, ce qui donne $r=6$.

Remarques. — I. Les solutions entières de l'équation (1) sont données par les formules

$$n=-1+3t; \quad r=2t,$$

dans lesquelles t est un nombre entier indéterminé. Pour qu'une de ces solutions convienne au problème, on doit avoir

$$n>0; \quad 0<r+3\leqslant 2n+1; \quad 0<2r-3\leqslant 2n+1.$$

La résolution de ce système donne $t\geqslant 1$.

II. Quand $r=6$, n n'est pas complètement indéterminé. On doit avoir, en effet $r+3\leqslant 2n+1$ et $2r-3\leqslant 2n+1$.

La résolution de ce système donne $n\geqslant 4$.

189. *Trouver le plus grand terme du développement de* $(x+a)^m$, *sachant que* x *et* a *représentent des nombres positifs.*

On a
$$(x+a)^m = x^m\left(1+\frac{a}{x}\right)^m.$$

Il suffira donc de chercher le plus grand terme du développement de $\left(1+\frac{a}{x}\right)^m$. On a

$$T_{n+1} = \frac{m-n+1}{n}\times\frac{a}{x}T_n = \left(\frac{m+1}{n}-1\right)\frac{a}{x}T_n.$$

Le facteur $\frac{m+1}{n}-1$ va en décroissant. Dès lors, T_{n+1} sera plus grand que T_n tant que $\left(\frac{m+1}{n}-1\right)\frac{a}{x}$ reste supérieur à 1. La plus grande valeur de T_{n+1} correspond donc à la plus grande valeur de n qui vérifie l'inégalité

$$\left(\frac{m+1}{n}-1\right)\frac{a}{x}>1 \quad \text{ou} \quad n<\frac{(m+1)a}{x+a}.$$

1° Si $\frac{(m+1)a}{x+a}$ n'est pas entier, soit q sa partie entière. Le plus grand terme sera T_{q+1}.

2° Si $\frac{(m+1)a}{x+a}$ est un nombre entier p, il y aura deux termes maximums Ce sont T_p et T_{p+1}.

190. *Trouver le plus grand terme* :

1° *Du développement de* $(1 + 4x)^8$, *quand* $x = \frac{1}{3}$.

On a $$T_{n+1} = \frac{8-n+1}{n} \times \frac{4}{3} \times T_n$$

La valeur cherchée de n est la plus grande solution entière de l'inéquation
$$\frac{4(8-n+1)}{3n} > 1 \quad \text{ou} \quad n < \frac{36}{7} = 5\frac{1}{7}.$$

Le plus grand terme est le 6e. Il vaut
$$C\left(\frac{4}{3}\right)^5 = \frac{57\,344}{243}.$$

2° *du développement de* $(x + y)^{28}$ *quand* $x = 9$, $y = 4$.

La valeur cherchée de n est la plus grande solution entière de l'inéquation
$$\frac{4(29-n)}{9n} > 1 \quad \text{ou} \quad n < \frac{116}{13} = 8\frac{12}{13}.$$

Le plus grand terme est le 9e. Il vaut
$$C_{28}^{8} \times 4^8 \times 9^{20}.$$

3° *du développement de* $(2x + 3)^m$ quand $x = \frac{5}{2}$, $m = 15$.

La valeur cherchée de n est la plus grande solution entière de l'inéquation
$$\frac{3(16-n)}{5n} > 1 \quad \text{ou} \quad n < \frac{48}{8} = 6.$$

On voit que l'on a $T_6 > T_5$; $T_7 = T_6$.

Les deux termes maximums valent $C_{15}^{5} \times 3^5 \times 5^{10}$.

191. *Trouver la somme des coefficients des développements de* $(3x + y)^{16}$ *et de* $(2x - y)^{10}$.

On fait $x = y = 1$, et on trouve respectivement 2^{32} et 1.

192. *Établir les formules :*

1° $1 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + 8C_n^3 + \ldots + 2^nC_n^n = 3^n$.

Faire $x = 1$, $a = 2$ dans le développement de $(x + a)^n$.

2° $1 - 3C_n^1 + 9C_n^2 - 27C_n^3 + \dots + (-1)^n 3^n C_n^n = (-1)^n 2^n.$

Faire $x = 1, a = -3$ dans le développement de $(x + a)^n$.

3° $1 - (C_{2n}^1)^2 + (C_{2n}^2)^2 - (C_{2n}^3)^2 + \dots + (C_{2n}^{2n})^2 = (-1)^n C_{2n}^n.$

Égaler les coefficients de x^{2n} dans l'identité :

$$(x + 1)^{2n}(1 - x)^{2n} = (1 - x^2)^{2n}.$$

193. *Démontrer la formule* $(p < a, p < b)$

$$C_{a+b}^p = C_a^p + C_a^{p-1}C_b^1 + C_a^{p-2}C_b^2 + \dots + C_b^p,$$

en utilisant l'identité $(x + 1)^{a+b} = (x + 1)^a(x + 1)^b$.

Égaler les coefficients de $x^{a+\ -p}$.

194. *Démontrer que la somme* $(p < n)$:

$$C_n^p - C_n^1 C_n^{p-1} + C_n^2 C_n^{p-2} - \dots + (-1)^p C_n^p$$

est nulle si p *est impair et qu'elle est égale à* $(-1)^{p'} C_n^{p'}$, *si* p *est pair et égal à* $2p'$.

Considérons l'identité

$$(1 + x)^n (1 - x)^n = (1 - x^2)^n.$$

Le coefficient de x^p dans le premier membre est

$$C_n^p - C_n^1 C_n^{p-1} + C_n^2 C_n^{p-2} - \dots + (-1)^p C_n^p. \qquad (1)$$

Mais d'autre part, on a

$$(1 - x^2)^n = 1 - C_n^1 x^2 + C_n^2 x^4 - \dots + (-1)^h C_n^h x^{2h} + \dots + (-1)^n x^{2n}.$$

a) *Si* p *est impair,* le développement de $(1 - x^2)^n$ ne renfermera pas de terme en x^p et la somme (1) est nulle.

b) *Si* p *est pair* et égal à $2p'$, le développement de $(1 - x^2)^n$ renferme un terme en x^p. De plus, le coefficient de x^p ou $x^{2p'}$ est $(-1)^{p'} C_n^{p'}$; c'est aussi la valeur de la somme (1).

195. *Établir les relations* :

1° $C_n^1 + 2C_n + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = n.2^{n-1}.$

On a (exercice 173, 1°)

$$C_n^1 = nC_{n-1}^0;\quad 2C_n^2 = nC_{n-1}^1;\quad 3C_n^3 = nC_{n-1}^2;\ \dots$$
$$(n - 1)C_n^{n-1} = nC_{n-1}^{n-2};\quad nC_n^n = nC_{n-1}^{n-1}.$$

En remplaçant dans le premier membre de la formule proposée, celui-ci devient

$$n(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \dots + C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}).$$

L'expression entre parenthèses vaut 2^{n-1}, car c'est la somme des coefficients du développement de $(x + a)^{n-1}$. Le premier membre de la formule proposée est donc égal à $n \times 2^{n-1}$.

REMARQUE. — Cette formule peut encore être démontrée en procédant comme suit : développer $(1 + x)^n$; égaler les dérivées des deux membres par rapport à x; puis faire $x = 1$.

On peut procéder de même pour l'exercice suivant (2°), après avoir cherché le développement de $x(1 + x)^n$.

Si, au lieu de faire $x = 1$, on faisait $x = -1$, on obtiendrait les deux formules suivantes (4° et 3°).

2° $1 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \ldots + (n + 1)C_n^n = 2^{n-1}(n + 2)$.

Le premier membre peut être décomposé en une somme de deux termes. Le premier terme est

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n;$$

et le second

$$C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n = n \times 2^{n-1}.$$

Le premier membre est donc égal à $(n + 2)2^{n-1}$.

3° $C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 - 4C_n^3 + \ldots + (-1)^n (n + 1) C_n^n = 0$.

On a

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0.$$

D'autre part, en transformant comme dans le 1°, on trouve

$$-C_n^1 + 2C_n^2 - 3C_n^3 + \ldots + (-1)^n nC_n^n$$
$$= -n[C_{n-1}^0 - C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 - \ldots + (-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1}] = 0.$$

En additionnant ces deux égalités membre à membre, on obtient la formule demandée.

4° $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n - 4C_n^4 + \ldots + (-1)^{n-1}nC_n^n = 0$.

En retranchant cette égalité membre à membre de la formule connue

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0,$$

on obtient l'égalité établie au 3°.

5° $C_n^p + C_{n-1}^{p-1}C_n^1 + C_{n-2}^{p-2}C_n^2 + \ldots + C_{n-p+1}^1 C_n^{p-1} + C_n^p = C_n^p \times 2^p$.

Divisons les deux membres par C_n^p. Le second membre devient 2^p et le terme général du 1er membre

$$\frac{C_{n-q}^{p-q}\, C_n^q}{C_n^p} = \frac{(n-q)!\, n!\, p!\, (n-p)!}{(p-q)!\, (n-p)!\, q!\, (n-q)!\, n!} = C_p^q.$$

La formule devient ainsi

$$C_p^0 + C_p^1 + C_p^2 + \ldots C_p^p = 2^p,$$

ce qui est une identité.

§ III. — APPLICATIONS DIVERSES.

196. *Trouver la somme des* n *premiers termes des suites :*

1° $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots$

Le n^e terme est $(2n - 1)^2 = 4n^2 - 4n + 1$.
On a donc

$$S = 4S_2 - 4S_1 + n = \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n;$$

d'où
$$S = \frac{n}{3}(4n^2 - 1) = \frac{n}{3}(2n+1)(2n-1).$$

2° $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots$

Le n^e terme est $n(n+1)(n+2) = n^3 + 3n^2 + 2n$.
On a donc
$$\begin{aligned} S &= S_3 + 3S_2 + 2S_1 \\ &= \frac{n^2}{4}(n+1)^2 + \frac{n}{2}(n+1)(2n+1) + n(n+1) \\ &= \frac{n}{4}(n+1)(n+2)(n+3). \end{aligned}$$

3° $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots$

Le n^e terme est $(2n - 1)^3 = 8n^3 - 12n^2 + 6n - 1$.
On a donc
$$\begin{aligned} S &= 8S_3 - 12S_2 + 6S_1 - n \\ &= 2n^2(n+1)^2 - 2n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1) - n \\ &= n^2(2n^2 - 1). \end{aligned}$$

4° $1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots$

La formule générale établie dans la théorie donne
$$(n+1)^5 = 1 + 5S_4 + 10S_3 + 10S_2 + 5S_1 + n.$$
En remplaçant S_3, S_2, S_1 par leur valeur, on trouve
$$S_4 = \frac{n}{30}(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1).$$

5° $1.2^2 + 2.3^2 + 3.4^2 + \dots$

Le n^e terme est $n(n+1)^2 = n^3 + 2n^2 + n$.
On a donc
$$\begin{aligned} S &= S_3 + 2S_2 + S_1 \\ &= \frac{n^2}{4}(n+1)^2 + \frac{n}{3}(n+1)(2n+1) + \frac{n}{2}(n+1) \\ &= \frac{n}{12}(n+1)(n+2)(3n+5). \end{aligned}$$

6° $1 + 3x + 5x^2 + \dots$

Le n^e terme est $(2n - 1)x^{n-1}$. En désignant la somme par S, on a
$$S = 1 + 3x + 5x^2 + \dots + (2n-1)x^{n-1};$$
$$Sx = x + 3x^2 + 5x^3 + \dots + (2n-1)x^n.$$

Retranchons la 1re égalité de la seconde. Il vient

$$S(x-1) = (2n-1)x^n - 2(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1) + 1$$
$$= (2n-1)x^n - \frac{2(x^n-1)}{x-1} + 1 = 2nx^n - \frac{(x^n-1)(x+1)}{x-1}.$$

On a donc

$$S = \frac{2nx^n}{x-1} - \frac{(x^n-1)(x+1)}{(x-1)^2}.$$

197. *Calculer les sommes :*

1° $-1^2 + 2^2 - 3^2 + \ldots + (2n)^2$.

On peut écrire

$$S = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2 - [1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2].$$

Or, on a

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2 = 4S_2 = \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6},$$

et $$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n}{3}(2n+1)(2n-1).$$

Par suite,

$$S = \frac{2n}{3}(n+1)(2n+1) - \frac{n}{3}(2n+1)(2n-1) = n(2n+1).$$

2° $-1^3 + 2^3 - 3^3 + \ldots + (2n)^3$.

On a

$$S = (2^3 - 1^3) + (4^3 - 3^3) + (6^3 - 5^3) + \ldots + [(2n)^3 - (2n-1)^3].$$

L'expression $(2n)^3 - (2n-1)^3$ est égale à $12n^2 - 6n + 1$.

On a donc

$$S = 12S_2 - 6S + n = 2n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1) + n$$
$$= n^2(4n+3).$$

198. *Calculer l'expression* $\sum_{x=1}^{x=n} \frac{x(x-1)^2}{2}$.

Le n^e terme est $\frac{n(n-1)^2}{2} = \frac{n^3}{2} - n^2 + \frac{n}{2}$. On a donc

$$S = \frac{S_3}{2} - S_2 + \frac{S_1}{2}$$
$$= \frac{n^2}{8}(n+1)^2 - \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) + \frac{n}{4}(n+1)$$
$$= \frac{n}{24}(n^2-1)(3n-2).$$

199. *Démontrer la formule*

$$n^2 + (n-2)^2 + \ldots + 2^2 (\text{ou } 1^2) = \frac{1}{2}[(n+1)n + n(n-1) + \ldots + 2.1].$$

Le second membre vaut

$$\frac{S_2}{2} + \frac{S_1}{2} = \frac{n}{12}(n + 1)(2n + 1) + \frac{n}{4}(n + 1)$$

$$= \frac{n}{6}(n + 1)(n + 2) = C^3_{n+2}.$$

Si n est pair et égal à $2n'$, le 1er membre vaut

$$4(1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n'^2) = \frac{4n'}{6}(n' + 1)(2n' + 1)$$

$$= \frac{n}{3} \times \frac{n+2}{2} \times (n + 1) = \frac{n}{6}(n + 1)(n + 2) = C^3_{n+2}.$$

Si n est impair et égal à $2n' + 1$, le 1er membre vaut, en tenant compte du no **196**, 1o,

$$[1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n' - 1)^2] + (2n' + 1)^2$$

$$= \frac{n'}{3}(4n'^2 - 1) + (2n' + 1)^2 = \frac{2n' + 1}{3}(2n'^2 + 5n' + 3)$$

$$= \frac{n}{6}[(n - 1)^2 + 5(n - 1) + 6] = \frac{n}{6}(n + 1)(n + 2) = C^3_{n+2}.$$

200. *Calculer les expressions :*

1o $(2 + 3i)^3 = -46 + 9i$	4o $(3 - i)^5 = -12 - 316i$
2o $(-1 + 2i)^4 = -7 + 24i$	5o $(-2 + i\sqrt{3})^8 = 2017 + 752i\sqrt{3}$
3o $(2 + i)^6 = -117 + 44i$	6o $(1 + i)^{10} = 32i.$

201. *Calculer* $\cos 5\alpha$ *et* $\sin 5\alpha$ *en fonction de* $\cos \alpha$ *et de* $\sin \alpha$.

On a $$\cos 5\alpha + i \sin 5\alpha = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^5.$$

Après avoir remplacé le second membre par son développement, on égale d'abord les parties réelles des deux membres, puis les parties imaginaires; on trouve ainsi

$$\cos 5\alpha = \cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha \sin^2\alpha + 5 \cos \alpha \sin^4\alpha;$$

$$\sin 5\alpha = 5 \cos^4\alpha \sin \alpha - 10 \cos^2\alpha \sin^3\alpha + \sin^5\alpha.$$

202. *Calculer* $\operatorname{tg} 6\alpha$ *en fonction de* $\operatorname{tg} \alpha$.

En procédant comme dans l'exercice précédent, on trouve

$$\sin 6\alpha = 6 \cos^5\alpha \sin \alpha - 20 \cos^3\alpha \sin^3\alpha + 6 \cos \alpha \sin^5\alpha;$$

$$\cos 6\alpha = \cos^6\alpha - 15 \cos^4\alpha \sin^2\alpha + 15 \cos^2\alpha \sin^4\alpha - \sin^6\alpha.$$

On en déduit

$$\operatorname{tg} 6\alpha = \frac{6 \operatorname{tg} \alpha - 20 \operatorname{tg}^3\alpha + 6 \operatorname{tg}^5\alpha}{1 - 15 \operatorname{tg}^2\alpha + 15 \operatorname{tg}^4\alpha - \operatorname{tg}^6\alpha}.$$

203. *Calculer* $\cos\frac{\pi}{24}$, *sachant que* $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

On a $$\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \left(\cos\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24}\right)^4.$$

En égalant les parties réelles des deux membres, il vient
$$\cos\frac{\pi}{6} = \cos^4\frac{\pi}{24} - 6\cos^2\frac{\pi}{24}\sin^2\frac{\pi}{24} + \sin^4\frac{\pi}{24},$$
ou encore, en posant $\cos\frac{\pi}{24} = x$.
$$x^4 - 6x^2(1 - x^2) + (1 - x^2)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Cette équation peut s'écrire
$$8x^4 - 8x^2 + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

D'où $$x^2 = \frac{4 \pm \sqrt{8 + 4\sqrt{3}}}{8} = \frac{4 \pm \sqrt{2(\sqrt{3}+1)^2}}{8} = \frac{4 \pm (\sqrt{6} + \sqrt{2})}{8}.$$

Mais on a les relations
$$0 < \frac{\pi}{24} < \frac{\pi}{6};\quad \frac{\sqrt{3}}{2} < \cos\frac{\pi}{24} < 1 \quad \frac{6}{8} < \cos^2\frac{\pi}{24} < \frac{8}{8}.$$

Donc $$\cos\frac{\pi}{24} = \sqrt{\frac{4 + \sqrt{6} + \sqrt{2}}{8}}.$$

204. *Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de* $(1 + i)^n$. *En déduire*
$$(\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4} = 1 - C_n^2 + C_n^4 - \dots$$
$$(\sqrt{2})^n \sin\frac{n\pi}{4} = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots$$

On a
$$(1 + i)^n = 1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots + i(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots);$$
et aussi
$$(1 + i)^n = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n = (\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

Par suite, $$(\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4} = 1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots$$
$$(\sqrt{2})^n \sin\frac{n\pi}{4} = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots$$

205. *Calculer la valeur des sommes :*

1° $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \dots$ 3° $C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + \dots$

2° $C_n^2 + C_n^6 + C_n^{10} + \dots$ 4° $C_n^3 + C_n^7 + C_n^{11} + \dots$

Désignons les sommes cherchées par S_1, S_2, S_3, S_4. En se reportant à l'exercice précédent, on voit qu'on a

$$S_1 - S_2 = (\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4}; \tag{1}$$

$$S_3 - S_4 = (\sqrt{2})^n \sin\frac{n\pi}{4}. \tag{2}$$

Mais on sait que la somme des coefficients du développement de $(x + a)^n$ est égale à 2^n, et que la somme des coefficients de rang impair est égale à la somme des coefficients de rang pair. On a donc

$$S_1 + S_2 = 2^{n-1} \tag{3}$$

$$S_3 + S_4 = 2^{n-1} \tag{4}$$

Les quatre équations (1), (2), (3), (4) forment un système qui permet de calculer S_1, S_2, S_3, S_4.

206. *En calculant l'expression* $\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{10}$ *de deux manières différentes, montrer que l'on a*

$$2C_1^1 - 2C_{10}^5 + C_{10}^5 = 2^5.$$

On a

$$\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{10} = \left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i.$$

On a aussi

$$\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{10} = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{10} = \frac{1}{2^5}(1+i)^{10}$$

$$= \frac{1}{2^5}(1 - C_{10}^2 + \dots + C_{10}^8 - C_{10}^{10}) + \frac{i}{2^5}(C_{10}^5 - C_{10}^3 + \dots + C_{10}^9).$$

En égalant les coefficients de i dans les deux expressions différentes de $\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{10}$, il vient

$$\frac{1}{2^5}(C_{10}^1 - C_{10}^3 + C_{10}^5 - C_{10}^7 + C_{10}^9) = 1$$

ou

$$2C_{10}^1 - 2C_{10}^3 + C_{10}^5 = 2^5.$$

207. *En calculant le module de* $(1 + i)^n$ *de deux manières différentes, montrer que l'on a*

$$(C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \dots)^2 + (C_n^1 - C_n^3 \dots)^2 = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots.$$

On a

$$1\,(+\,i)^n = (C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \dots) + i(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots).$$

Le module de $(1 + i)^n$ est donc

$$\sqrt{(C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \ldots)^2 + (C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \ldots)^2}.$$

Mais d'autre part, le module de $(1 + i)^n$ est également

$$(\sqrt{2})^n = 2^{\frac{n}{2}} = (C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots)^{\frac{1}{2}}.$$

En égalant ces deux expressions du module de $(1 + i)^n$ et en élevant au carré, on obtient la relation demandée.

208. *Trouver le nombre de termes des développements de* $(a + b + c)^7$ *et de* $(a + b + c + d)^5$.

Le nombre de termes du développement de $(a + b + c)^7$ est

$$D_3^7 = C_9^7 = C_9^2 = 36.$$

Le nombre de termes du développement de $(a + b + c + d)^5$ est

$$D_4^5 = C_8^5 = C_8 = 56.$$

209. *Trouver le coefficient de* $a^2b^3c^4$ *dans les développements des puissances suivantes :*

$$(a + b + c)^9,\quad (a + 2b + c)^9,\quad (3a - 2b + c)^9.$$

Ces coefficients sont :

$$\frac{P_9}{P_2P_3P_4} = 1260;\quad \frac{2^3P_9}{P_2P_3P_4} = 10\,080;\quad \frac{3^2(-2)^3\,P_9}{P_2P_3P_4} = -\,90\,720.$$

210. *Développer les puissances suivantes :*

1° $(a + b + c)^6 = \Sigma a^6 + 6\Sigma a^5b + 15\Sigma a^4b^2$
$+ 30\Sigma a^4bc + 20\Sigma a^3b^3 + 60\Sigma a^3b^2c + 90\Sigma a^2b^2c^2.$

2° $(a + b + c + d)^5 = \Sigma a^5 + 5\Sigma a^4b + 10\Sigma a^3b^2$
$+ 20\Sigma a^3bc + 30\Sigma a^2b^2c + 60\Sigma a^2bcd.$

3° $(a + b + c + d + e)^4 = \Sigma a^4 + 4\Sigma a^3b$
$+ 6\Sigma a^2b^2 + 12\Sigma a^2bc + 24\Sigma abcd.$

4° $(a - b + c)^4 = \Sigma a^4 + 6\Sigma a^2b^2 - 4a^3b + 4a^3c$
$- 4ab^3 + 4ac^3 - 4b^3c - 4bc^3 - 12a^2bc + 12ab^2c - 12abc^2.$

5° $(a - b + c - d)^3 = a^3 - b^3 + c^3 - d^3 - 3a^2b + 3a^2c$
$- 3a^2d + 3ab^2 + 3b^2c - 3b^2d + 3ac^2 - 3bc^2 - 3c^2d$
$+ 3ad^2 - 3bd^2 + 3cd^2 - 6abc + 6abd - 6acd + 6bcd.$

211. 1° *Chercher le coefficient de* x^6 *dans le développement de*

$$(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3)^5.$$

Les calculs sont résumés dans le tableau suivant :

δ	γ	β	α	$\frac{5!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!}\,2^{\beta}\,3^{\gamma}\,4^{\delta}$
2	0	0	3	160
1	1	1	2	1440
1	0	3	1	640
0	3	0	2	270
0	2	2	1	1080
0	1	4	0	240 **Rép.** 3830.

2° *Chercher le coefficient de* x^6 *dans* $(1 - x + 5x^2 - 2x^3)^5$.

δ	γ		α	$\frac{5!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!}\,(-1)^{\beta+\delta}\,5^{\gamma}2^{\delta}$.
2	0	0	3	40
1	1	1	2	600
1	0	3	1	40
0	3	0	2	1250
0	2	2	1	750
0	1	4	0	25 **Rép.** 2705.

3° *Chercher le coefficient de* x^8 *dans* $(1 + 2x + 2^2x^2 + 2^3x^3)^5$.

δ	γ	β	α	$\frac{5!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!}\,2^{\beta}\,4^{\gamma}\,8^{\delta}$
2	1	0	2	7680
2	0	2	1	7680
1	2	1	1	15360
1	1	3	0	5120
0	4	0	1	1280
0	3	2	0	2560 **Rép.** 39 680.

4° *Chercher le coefficient de* x^{10} *dans* $(1 - x + x^2 - x^3 + x^4)^6$.

Les calculs sont résumés dans le tableau suivant :

ε	δ	γ	β	α	$\frac{6!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!\,\varepsilon!}(-1)^{\beta+\delta}$	
2	0	1	0	3	60	
2	0	0	2	2	90	
1	2	0	0	3	60	
1	1	1	1	2	360	
1	1	0	3	1	120	
1	0	3	0	2	60	
1	0	2	2	1	180	
1	0	1	4	0	30	
0	3	0	1	2	60	
0	2	2	0	2	90	
0	2	1	2	1	180	
0	2	0	4	0	15	
0	1	3	1	1	120	
0	1	2	3	0	60	
0	0	5	0	1	6	
0	0	4	2	0	15	**Rép. 1506.**

212. *Trouver la somme des coefficients du développement de*

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^p)^n.$$

En faisant $x = 1$ dans l'identité

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^p)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{np}x^{np},$$

on voit que la somme cherchée est $(p + 1)^n$.

CHAPITRE IX

Déterminants.

§ I. — DÉTERMINANTS.

213. *Calculer les déterminants suivants :*

1° $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ 2° $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$ 3° $\begin{vmatrix} 15 & -45 \\ 5 & -11 \end{vmatrix}$ 4° $\begin{vmatrix} \cos a & \sin b \\ \sin a & \cos b \end{vmatrix}$

Rép. 1° — 2; 2° 17; 3° 60; 4° $\cos(a + b)$.

214. *Calculer les déterminants suivants au moyen de la règle de Sarrus.*

1° $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ 2° $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ 3° $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 4° $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

5° $\begin{vmatrix} 1 & n & n(n+1) \\ 1 & n+1 & (n+1)(n+2) \\ 1 & n+2 & (n+2)(n+3) \end{vmatrix}$ 6° $\begin{vmatrix} n & n+1 & n(n+1) \\ n+1 & n+2 & (n+1)(n+2) \\ n+2 & n+3 & (n+2)(n+3) \end{vmatrix}$

Rép. 1° — 59; 2° 0; 3° 14; 4° $3abc - a^3 - b^3 - c^3$;
5° 2; 6° — 2.

REMARQUE. — Dans ce qui suit, nous désignons par L_1, L_2, ... les lignes d'un déterminant et par C_1, C_2, ... ses colonnes. De plus, nous désignons par $L_1 + L_2$ la ligne obtenue en ajoutant aux éléments de L_1 les éléments correspondants de L_2; etc.

215. *Vérifier les égalités suivantes sans effectuer.*

1° $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c' & b' & a' \\ c & b & a \\ c'' & b'' & a'' \end{vmatrix}$

Dans le premier déterminant, permuter L_1 et L_2, puis C_1 et C_3.

2° $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b' & b & b'' \\ a' & a & a'' \\ c' & c & c'' \end{vmatrix}$

Permuter C_1 et C_2; L_1 et L_2; puis, chaque ligne avec la colonne de même rang.

3° $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & b & c \\ -a' & b' & c'' \\ a'' & -b'' & -c'' \end{vmatrix}$

Multiplier C_1 et L_3 par -1.

4° $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ b' & a' & 1 \\ 0 & b'' & a'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \sqrt{b'} & 0 \\ \sqrt{b'} & a' & \sqrt{b''} \\ 0 & \sqrt{b''} & a'' \end{vmatrix}$

Multiplier L_1 par $\sqrt{b'}$ et C_3 par $\sqrt{b''}$; diviser C_1 par $\sqrt{b'}$ et L_3 par $\sqrt{b''}$.

5° $\begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

Multiplier C_1 par a, C_2 par b, C_3 par c; diviser L_1 par abc.

6° $\begin{vmatrix} bc & c^2 & b^2 \\ c^2 & ac & a^2 \\ b^2 & a^2 & ab \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

Multiplier C_1 par a, C_2 par b, C_3 par c; diviser L_1 par bc, L_2 par ac, L_3 par ab. Permuter ensuite C_2 et C_3, L_2 et L_3.

7° $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b^2+c^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & c^2+a^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix}$

Multiplier C_1 par a, C_2 par b, C_3 par c; diviser ensuite L_1 par a, L_2 par b, L_3 par c.

216. *Montrer que les déterminants suivants sont nuls.*

1° $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 16 \\ 3 & 2 & 12 \end{vmatrix}$ 2° $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b & b & b \end{vmatrix}$ 3° $\begin{vmatrix} 0 & 2a & 0 \\ 2a & 0 & 3b \\ 4a & 3b & 6b \end{vmatrix}$

4° $\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ -c & 0 & a \\ -b & -a & 0 \end{vmatrix}$ 5° $\begin{vmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{vmatrix}$ 6° $\begin{vmatrix} b & b & c \\ bc & b^2 & c^2 \\ 1 & \frac{b}{c} & \frac{c}{b} \end{vmatrix}$

Rép. 1° Les éléments de la 1re et de la 3e colonne sont proportionnels.
2° Les éléments de la 1re et de la 3e ligne sont proportionnels.

3° Les éléments de la 1re et de la 3e colonne sont égaux à un facteur constant près.

4° Désignons ce déterminant par D. En multipliant les éléments de chaque ligne par -1, le déterminant devrait changer de signe. Or il reste égal à D, car les lignes et les colonnes sont permutées. On a donc

$$D = -D \quad \text{ou} \quad D = 0.$$

5° Les éléments des deux premières lignes sont proportionnels.

6° Les éléments de la 1re et de la 3e colonne sont proportionnels.

217. *Calculer les déterminants suivants en utilisant les propriétés des polynômes identiques.*

$$1^\circ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix} \qquad 2^\circ \begin{vmatrix} a & a & b+c \\ a+c & b & b \\ c & a+b & c \end{vmatrix} \qquad 3^\circ \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix}$$

1° Le premier déterminant est du second degré par rapport aux lettres b et c; il s'annule pour $b = 1$ et pour $c = 1$; de plus, on voit aisément que le coefficient de bc dans le déterminant est 1. Donc le déterminant vaut $(b-1)(c-1)$.

2° Le 2e déterminant est homogène et du 3e degré par rapport aux lettres a, b, c; il s'annule pour $a = 0$, pour $b = 0$ et pour $c = 0$; de plus, on voit aisément que le coefficient de abc dans le déterminant est 4. On a donc $D = 4abc$.

3° Le 3e déterminant devient yz quand on y fait $x = 0$. On peut donc poser $D = xP + yz$.

En faisant $y = 0$, D devient xz et par suite, P devient z. On a donc

$$P = yP' + z \quad \text{et} \quad D = xyP' + xz + yz.$$

En faisant $z = 0$, D devient xy et par suite, P' devient 1. On a donc

$$P' = zP'' + 1 \quad \text{et} \quad D = xyzP'' + xy + yz + zx.$$

Or dans D, le coefficient de xyz est 1. Donc

$$D = xyz + xy + yz + zx.$$

218. *Calculer les déterminants suivants, en les développant par rapport aux éléments d'une même rangée.*

$$1^\circ \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 7 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \qquad 2^\circ \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} \qquad 3^\circ \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ -6 & 4 & 2 & 2 \\ -6 & 0 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

Développer de préférence, le premier par rapport aux éléments de la 2e colonne, le second par rapport aux éléments de la 1re colonne, le 3e par rapport aux éléments de la 2e colonne. On peut simplifier le calcul du

2e déterminant en mettant en évidence le facteur 2 commun aux éléments de C_1 et le facteur 2 commun aux éléments de C_3; de même, pour le 3e déterminant, on peut mettre en évidence le facteur 3 commun aux éléments de C_1, le facteur 2 commun aux éléments de L_2 et le facteur 3 commun aux éléments de L_4.

Rép. 1o — 314; 2o 456; 3o 126.

219. *Démontrer les égalités suivantes :*

1o $$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Le 1er membre peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Ces deux déterminants ne diffèrent que par la première ligne. Leur somme est

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

et ce déterminant est nul, car les éléments de C_1 et C_2 sont proportionnels.

2o $$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 9 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

On raisonne comme pour l'exercice précédent, après avoir mis le second déterminant sous la forme

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 6 \end{vmatrix}.$$

3o $$\begin{vmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Additionner le 1er et le 3e déterminant; au résultat, ajouter le second On obtient ainsi un déterminant qui renferme une colonne de zéros.

4o $$\begin{vmatrix} a^2 + b^2 + c^2 & aa' + bb' + cc' \\ aa' + bb' + cc' & a'^2 + b'^2 + c'^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}^2$$

Le premier membre est égal à une somme de neuf déterminants.

En posant $ab' - ba' = D$; $bc' - cb' = D'$; $ca' - ac' = D''$, ces déterminants valent :

$$\begin{vmatrix} a^2 & aa' \\ aa' & a'^2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} a^2 & bb' \\ aa' & b'^2 \end{vmatrix} = ab'D; \quad \begin{vmatrix} a^2 & cc' \\ aa' & c'^2 \end{vmatrix} = -ac'D'';$$

$$\begin{vmatrix} b^2 & bb' \\ bb' & b'^2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} b^2 & aa' \\ bb' & a'^2 \end{vmatrix} = -ba'D; \quad \begin{vmatrix} b^2 & cc' \\ bb' & c'^2 \end{vmatrix} = bc'D';$$

$$\begin{vmatrix} c^2 & cc' \\ cc' & c'^2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} c^2 & aa' \\ cc' & a'^2 \end{vmatrix} = ca'D''; \quad \begin{vmatrix} c^2 & bb' \\ cc' & b'^2 \end{vmatrix} = -cb'D'.$$

Il en résulte que le premier membre est égal à

$$D^2 + D'^2 + D''^2.$$

5° $$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 + b_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 + b_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Le premier membre est égal à une somme de 8 déterminants, dont 6 sont nuls. Les deux autres sont égaux au déterminant du second membre.

Autre méthode. — Remplacer C_1 par $C_1 - C_2 + C_3$; mettre 2 en évidence; remplacer C_3 par $C_3 - C_1$, puis C_2 par $C_2 - C_3$. Il vient

$$2a_1 \quad b_1 + c_1 \quad c_1 + a_1 \,| = 2\,|\, a_1 \quad b_1 + c_1 \quad c_1 + a_1 \,|$$
$$= 2\,|\, a_1 \quad b_1 + c_1 \quad c_1 \,| = 2\,|\, a_1 \quad b_1 \quad c_1 \,|.$$

6° $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b - a & c & 1 \\ c - b & a & 1 \\ a - c & b & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c - 1 \\ b & c & a - 1 \\ c & a & b - 1 \end{vmatrix}$$

Développer le premier membre par rapport aux éléments de la 1re ligne; multiplier par -1 la 1re colonne du 2^e mineur et la 3^e colonne du 4^e mineur. On trouve

$$\begin{vmatrix} b & c & 1 \\ c & a & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a & c & 1 \\ -b & a & 1 \\ -c & b & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & c & 1 \\ c & a & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & -c \\ b & c & -a \\ c & a & -b \end{vmatrix}$$

Additionner le 1er et le 2^e terme de cette somme; puis le 3^e et le 4^e.

220. *Démontrer les égalités suivantes :*

1° $$\begin{vmatrix} a + c & b & c \\ b + a & c & a \\ c + b & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

Dans le premier membre, remplacer C_1 par $C_1 - C_3$.

$$2^\circ \quad \begin{vmatrix} 2(a+1) & a+1 & 2b \\ a+1 & 1 & b \\ a+b & b & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & b \\ a & b & 1 \end{vmatrix}$$

Dans le premier membre, remplacer L_1 par $L_1 - L_2$, puis C_1 par $C_1 - C_2$.

$$3^\circ \quad \begin{vmatrix} a_1 + m + M & b_1 + m + N & 1 \\ a_2 + n + M & b_2 + n + N & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Dans le premier membre, remplacer C_1 par $C_1 - MC_3$ et C_2 par $C_2 - NC_3$; puis, remplacer L_1 par $L_1 - mL_3$ et L_2 par $L_2 - nL_3$.

$$4^\circ \quad a_1 + b_1x + c_1y \quad a_1 + b_1x - c_1y \quad a_1 - b_1x + c_1y \,| \\ = -4xy|\, a_1 \quad b_1 \quad c_1 \,|.$$

Dans le premier membre, remplacer C_2 par $C_2 - C_1$ et C_3 par $C_3 - C_1$; mettre $4xy$ en évidence; remplacer C_1 par $C_1 - yC_2 - xC_3$; permuter C_2 et C_3. On trouve successivement :

$$|\, a_1 + b_1x + c_1y \quad -2c_1y \quad -2b_1x \,| = 4xy|\, a_1 + b_1x + c_1y \quad c_1 \quad b_1 \,| \\ = 4xy|\, a_1 \quad c_1 \quad b_1 \,| = -4xy|\, a_1 \quad b_1 \quad c_1 \,|.$$

221. *Montrer que les déterminants suivants sont nuls.*

$$1^\circ \begin{vmatrix} a-d & 2 & a \\ b-d & 2 & b \\ c-d & 2 & c \end{vmatrix} \qquad 2^\circ \begin{vmatrix} a+b & b-a & b \\ b+c & c-b & c \\ c+a & a-c & a \end{vmatrix} \qquad 3^\circ \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ a+b & 2 & 3 \\ 2a+b & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$4^\circ \begin{vmatrix} x & a & b+c \\ x & b & c+a \\ x & c & a+b \end{vmatrix} \qquad 5^\circ \begin{vmatrix} a & a+3 & a+6 \\ a+1 & a+4 & a+7 \\ a+2 & a+5 & a+8 \end{vmatrix} \qquad 6^\circ \begin{vmatrix} 1 & a+1 & a(a-1) \\ 1 & a+2 & a(a-2) \\ 1 & a+3 & a(a-3) \end{vmatrix}$$

1° Remplacer C_1 par $C_1 - C_3$.
2° Remplacer C_1 par $C_1 + C_2$.
3° Remplacer L_3 par $L_3 - L_2$.
4° Remplacer C_3 par $C_3 + C_2$.
5° Remplacer L_3 par $L_3 - L_2$ et L_2 par $L_2 - L_1$.
6° Mettre a en évidence et remplacer C_2 par $C_2 + C_3$.

$$7^\circ \begin{vmatrix} a(b-c) & b(c-a) & c(a-b) \\ a-b & b-c & c-a \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$$

Remplacer C_3 par $C_1 + C_2 + C_3$.

8° $\begin{vmatrix} c\mu(\lambda - b) & \lambda b(\mu - c) & \lambda\mu - bc \\ \mu d(a - \lambda) & a\lambda(d - \mu) & ad - \lambda\mu \\ cd(a - b) & ab(d - c) & ad - bc \end{vmatrix}$

Diviser les éléments de C_1 par $cd\mu$ et ceux de C_2 par $ab\lambda$; multiplier les éléments de L_1, L_2, L_3 respectivement par ad, bc, $\lambda\mu$. Le déterminant devient

$$\begin{vmatrix} a(\lambda - b) & d(\mu - c) & ad(\lambda\mu - bc) \\ b(a - \lambda) & c(d - \mu) & bc(ad - \lambda\mu) \\ \lambda(a - b) & \mu(d - c) & \lambda\mu(ad - bc) \end{vmatrix}$$

Remplacer ensuite L_1 par $L_1 + L_2 - L_3$.

222. *Calculer la valeur des déterminants suivants :*

1° $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -12.$

On a remplacé L_1 par $L_1 + L_2 + L_3$; puis C_1 par $C_1 - C_3$ et C_2 par $C_2 - C_3$.

2° $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$

On a remplacé C_1 par $C_1 + C_2 + C_3$.

3° $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 27.$

On a remplacé L_1 par $L_1 + L_2 + L_3$; puis C_2 par $C_2 - C_1$ et C_3 par $C_3 - C_1$.

4° $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

$$= 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -10 \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} = 160.$$

On a remplacé L_1 par $L_1 + L_2 + L_3 + L_4$, puis on a retranché les éléments de la 1^re colonne des éléments correspondants des 3 autres. On a abouti ainsi à un déterminant du 3e degré dans lequel on a remplacé L_2 par $L_2 - L_1$, et L_3 par $L_3 - L_1$.

5°
$$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 1^2 \\ 3^2 & 4^2 & 1^2 & 2^2 \\ 4^2 & 1^2 & 2^2 & 3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 30 & 30 & 30 & 30 \\ 4 & 9 & 16 & 1 \\ 9 & 16 & 1 & 4 \\ 16 & 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 30 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 12 & -3 \\ 9 & 7 & -8 & -5 \\ 16 & -15 & -12 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= 30 \begin{vmatrix} 5 & 12 & -3 \\ 7 & -8 & -5 \\ -15 & -12 & -7 \end{vmatrix} = -120 \begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 7 & -2 & 5 \\ -15 & -3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= -120(-520) = 62\,400.$$

On a remplacé L_1 par $L_1 + L_2 + L_3 + L_4$; puis on a retranché les éléments de la 1re colonne des éléments correspondants des 3 autres. On a été conduit ainsi à un déterminant du 3e degré dans lequel on a mis -4 en évidence après avoir divisé C_2 par 4 et C_3 par -1.

6°
$$\begin{vmatrix} 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \\ 3^3 & 4^3 & 5^3 & 6^3 \\ 4^3 & 5^3 & 6^3 & 7^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 27 & 64 \\ 7 & 19 & 37 & 61 \\ 19 & 37 & 61 & 91 \\ 37 & 61 & 91 & 127 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 27 & 64 \\ 7 & 19 & 37 & 61 \\ 12 & 18 & 24 & 30 \\ 18 & 24 & 30 & 36 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 8 & 27 & 64 \\ 7 & 19 & 37 & 61 \\ 12 & 18 & 24 & 30 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 19 & 37 \\ 7 & 12 & 18 & 24 \\ 12 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 7 & 19 & 37 \\ 12 & 18 & 24 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}.$$

On a remplacé L_4 par $L_4 - L_3$, L_3 par $L_3 - L_2$, L_2 par $L_2 - L_1$; dans le 2e déterminant, on a remplacé L_4 par $L_4 - L_3$ et L_3 par $L_3 - L_2$; dans le 3e déterminant, on a remplacé L_4 par $L_4 - L_3$; dans le 4e déterminant, on a remplacé C_4 par $C_4 - C_3$, C_3 par $C_3 - C_2$, C_2 par $C_2 - C_1$. On est conduit ainsi à un déterminant du 3e degré.

En remplaçant C_3 par $C_3 - C_2$, C_2 par $C_2 - C_1$, on trouve

$$-6 \begin{vmatrix} 7 & 12 & 18 \\ 12 & 6 & 6 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -36 \begin{vmatrix} 12 & 18 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = -1296 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1296.$$

223. *Calculer les déterminants suivants :*

1°
$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & b-a & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b^2+ab+a^2 \\ 1 & c^2+ac+a^2 \end{vmatrix}$$

En remplaçant L_2 par $L_2 - L_1$, on trouve

$$(b - a)(c - a)(c - b)\,\Sigma a.$$

2° $$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (b - a)(c - a)(c - b)\,\Sigma ab.$$

On procède comme pour l'exercice précédent.

3° $$\begin{vmatrix} 3a - b & 2a & 2a \\ 2b & a + b & 2b \\ 4a & 4a & 3a + b \end{vmatrix}$$

Remplacer L_1 par $L_1 + L_2 - L_3$; puis, C_2 par $C_2 - C_1$ et C_3 par $C_3 - C_1$. En effectuant, on trouve $(a - b)^3$.

4° $$\begin{vmatrix} 2a - b & b - 2a & -b \\ b - 2a & a & a \\ -b & a & b \end{vmatrix}$$

Remplacer C_1 par $C_1 + C_2 + C_3$; puis, L_1 par $L_1 + L_2 + L_3$. Il vient

$$D = \begin{vmatrix} a & b & a \\ b & a & a \\ a & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a + b & b & a \\ 2a + b & a & a \\ 2a + b & a & b \end{vmatrix} = -(2a + b)(a - b)^2.$$

5° $$\begin{vmatrix} a - b - c & 2a & 2a \\ 2b & b - c - a & 2b \\ 2c & 2c & c - a - b \end{vmatrix}$$

Remplacer L_1 par $L_1 + L_2 + L_3$; mettre $a + b + c$ en évidence; puis, remplacer C_2 par $C_2 - C_1$ et C_3 par $C_3 - C_1$. En effectuant, on trouve $(a + b + c)^3$.

6° $$\begin{vmatrix} 2a & a + b + c & a + b + c \\ a + b + c & 2b & a + b + c \\ a + b + c & a + b + c & 2c \end{vmatrix}$$

Remplacer successivement L_1 par $L_1 + L_2 - L_3$; C_3 par $C_3 - C_1$; C_2 par $C_2 - C_3$; L_3 par $L_3 - L_2$; puis effectuer. On trouve $8abc$.

7° $$\begin{vmatrix} mn + ab & np + bc & pm + ca \\ mn - ab & np - bc & pm - ca \\ an + bm & bp + cn & cm + ap \end{vmatrix}$$

Remplacer L_1 par $L_1 + L_2$ et mettre 2 en évidence; puis, remplacer L_2 par $L_2 - L_1$ et mettre -1 en évidence.

Diviser ensuite les éléments de C_1, C_2, C_3 respectivement par mn, np, mp; puis, multiplier les éléments de L_2 et L_3 par mnp. On trouve

$$D = -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ abp & bcm & can \\ anp + bmp & bmp + cmn & cmn + anp \end{vmatrix}$$

Remplacer C_2 par $C_2 - C_1$ et C_3 par $C_3 - C_1$; puis effectuer. On trouve

$$D = 2(ap - cm)(cn - bp)(bm - an).$$

8° $\begin{vmatrix} a+b+c+d & a-b-c+d & a-b+c-d \\ a-b-c+d & a+b+c+d & a+b-c-d \\ a-b+c-d & a+b-c-d & a+b+c+d \end{vmatrix}$

Remplacer C_1 par $C_1 + C_2$, C_2 par $C_2 + C_3$ et mettre 4 en évidence; remplacer ensuite C_3 par $C_3 - C_2$. Il vient

$$D = 4 \begin{vmatrix} a+d & a-b & c-d \\ a+d & a+b & -(c+d) \\ a-d & a+b & c+d \end{vmatrix}$$

Remplacer L_1 par $L_1 - L_2$, L_2 par $L_2 - L_3$ et mettre 4 en évidence; remplacer ensuite L_3 par $L_3 + L_2$. En effectuant, on trouve

$$D = 16abcd\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right).$$

9° $\begin{vmatrix} a+b+c+na & nb & nc \\ na & a+b+c+nb & nc \\ na & nb & a+b+c+nc \end{vmatrix}$

Remplacer C_1 par $C_1 + C_2 + C_3$ et mettre $(1 + n)(a + b + c)$ en évidence.

$$D = (1+n)(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & nb & nc \\ 1 & a+b+c+nb & nc \\ 1 & nb & a+b+c+nc \end{vmatrix}$$

Remplacer C_2 par $C_2 - nbC_1$ et C_3 par $C_3 - ncC_1$. En effectuant, on trouve $D = (1 + n)(a + b + c)^3$.

224. *Trouver la valeur des déterminants suivants :*

1° $\begin{vmatrix} b^2 & bc & c^2 \\ c^2 & ac & a^2 \\ a^2 & ab & b^2 \end{vmatrix}$

Diviser les éléments de C_2 par abc; puis multiplier les éléments de L_1, L_2, L_3 respectivement par a, b, c. On trouve

$$D = \begin{vmatrix} ab^2 & 1 & ac^2 \\ bc^2 & 1 & ab^2 \\ a^2c & 1 & b^2c \end{vmatrix}$$

Remplacer L_2 par $L_2 - L_1$ et L_3 par $L_3 - L_1$. En effectuant, il vient

$$D = (a^2 - bc)(b^2 - ac)(c^2 - ab).$$

2° $\begin{vmatrix} \frac{a}{b} & \frac{b}{c} & \frac{c}{a} \\ a & b & c \\ ab & bc & ca \end{vmatrix}$

Diviser les éléments de C_1, C_2, C_3 respectivement par a, b, c; puis, multiplier les éléments de L_1 par abc. Il vient

$$D = \begin{vmatrix} ac & ab & bc \\ 1 & 1 & 1 \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ac & ab - ac & bc - ac \\ 1 & 0 & 0 \\ b & c - b & a - b \end{vmatrix}$$

En continuant, on trouve $D = (a - b)(b - c)(c - a)$

3° $\begin{vmatrix} a^2 + 1 & ab & ac \\ ab & b^2 + 1 & bc \\ ac & bc & c^2 + 1 \end{vmatrix}$

Diviser les éléments de C_1, C_2, C_3 respectivement par a, b, c; puis, multiplier les éléments de L_1, L_2, L_3 respectivement par a, b, c. Il vient ensuite, en remplaçant C_1 par $C_1 - C_2$, et C_2 par $C_2 - C_3$,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a^2 \\ -1 & 1 & b^2 \\ 0 & -1 & c^2 + 1 \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + 1.$$

4° $\begin{vmatrix} b^2 + c^2 & ab & ca \\ ab & c^2 + a^2 & bc \\ ca & bc & a^2 + b^2 \end{vmatrix}$

En opérant comme dans l'exercice précédent, on trouve

$$D = \begin{vmatrix} b^2 + c^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 + c^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & a^2 + b^2 \end{vmatrix}$$

Remplacer L_1 par $L_1 - L_2 - L_3$; mettre 2 en évidence; puis, remplacer L_2 par $L_2 + L_1$ et L_3 par $L_3 + L_1$. En effectuant, on trouve

$$D = 4a^2b^2c^2.$$

5° $\begin{vmatrix} (b + c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c + a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a + b)^2 \end{vmatrix}$

Remplacer L_1 par $L_1 - L_3$ et L_2 par $L_2 - L_3$; puis mettre $(a+b+c)^2$ en évidence. Il vient ainsi

$$D = (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} b+c-a & 0 & c-a-b \\ 0 & c+a-b & c-a-b \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

Remplacer C_3 par $C_3 - C_1 - C_2$ et mettre 2 en évidence.

$$D = 2(a+b+c)^2 \begin{vmatrix} b+c-a & 0 & -b \\ 0 & c+a-b & -a \\ a^2 & b^2 & ab \end{vmatrix}$$

Multiplier les éléments de L_1 par a, ceux de L_2 par b; puis remplacer L_1 par $L_1 + L_3$ et L_2 par $L_2 + L_3$.

$$D = \frac{2(a+b+c)^2}{ab} \begin{vmatrix} a(b+c) & b^2 & 0 \\ a^2 & b(a+c) & 0 \\ a^2 & b^2 & ab \end{vmatrix}$$

En effectuant, on trouve $D = 2abc(a+b+c)^3$.

225. *Démontrer que le déterminant*

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{a+x} & \dfrac{1}{a+y} & \dfrac{1}{a+z} \\ \dfrac{1}{b+x} & \dfrac{1}{b+y} & \dfrac{1}{b+z} \\ \dfrac{1}{c+x} & \dfrac{1}{c+y} & \dfrac{1}{c+z} \end{vmatrix}$$

est égal à

$$\frac{(a-b)(b-c)(c-a)(x-y)(y-z)(z-x)}{(a+x)(b+x)(c+x)(a+y)(b+y)(c+y)(a+z)(b+z)(c+z)}$$

Désignons par A le produit des neuf dénominateurs et multiplions les éléments de chaque ligne par le produit de leurs dénominateurs. Il vient

$$D = \frac{1}{A} \left| (a+y)(a+z) \quad (a+z)(a+x) \quad (a+x)(a+y) \right|.$$

En remplaçant C_2 par $C_2 - C_1$ et C_3 par $C_3 - C_1$, on peut mettre en évidence dans la 2e colonne le facteur $x - y$ et dans la 3e le facteur $x - z$. On a

$$D = \frac{(x-y)(x-z)}{A} \left| (a+y)(a+z) \quad a+z \quad a+y \right|.$$

En remplaçant dans ce déterminant C_3 par $C_3 - C_2$, on peut mettre en évidence dans la 3e colonne le facteur $y - z$ et on a

$$D = \frac{(x-y)(x-z)(y-z)}{A} \begin{vmatrix} (a+y)(a+z) & a+z & 1 \\ (b+y)(b+z) & b+z & 1 \\ (c+y)(c+z) & c+z & 1 \end{vmatrix} \quad (1)$$

Il nous reste à calculer un déterminant du 3e degré que nous désignons par Δ. On a

$$\Delta = \begin{vmatrix} (a+y)(a+z) & a+z & 1 \\ (b-a)(y+z+a+b) & b-a & 0 \\ (c-a)(y+z+a+c) & c-a & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} y+z+a+b & 1 \\ y+z+a+c & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} b-c & 0 \\ y+z+a+c & 1 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(b-c).$$

En remplaçant Δ dans (1) par sa valeur, on trouve la valeur demandée.

226. *Démontrer que l'on a*

$$\begin{vmatrix} 1 & a+b+c & ab+ac+bc & abc \\ 1 & b+c+d & bc+bd+cd & bcd \\ 1 & c+d+e & cd+ce+de & cde \\ 1 & d+e+f & de+df+ef & def \end{vmatrix} = (a-d)(b-e)(f-c) \\ (b-d)(c-e)(d-c).$$

Remplacer L_4 par $L_4 - L_3$, L_3 par $L_3 - L_2$, L_2 par $L_2 - L_1$. On trouve ainsi

$$D = (a-d)(b-e)(f-c) \begin{vmatrix} 1 & b+c & bc \\ 1 & c+d & cd \\ 1 & d+e & de \end{vmatrix}$$

Remplacer à présent L_3 par $L_3 - L_2$, L_2 par $L_2 - L_1$; etc.

227. *Calculer les déterminants suivants :*

1° $\begin{vmatrix} 1 & \sin x & \cos x \\ 1 & \sin y & \cos y \\ 1 & \sin z & \cos z \end{vmatrix}$.

On trouve successivement

$$D = \left| \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} \quad 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \quad \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} \right|$$

$$= 4 \left| \cos^2\frac{x}{2} \quad \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \quad \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} \right|$$

$$= -4 \left| \cos^2\frac{x}{2} \quad \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \quad \sin^2\frac{x}{2} \right|.$$

Diviser respectivement par $\cos^2 \frac{x}{2}$, $\cos^2 \frac{y}{2}$, $\cos^2 \frac{z}{2}$ les éléments de L_1, L_2, L_3. Il vient

$$D = -4 \cos^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{y}{2} \cos^2 \frac{z}{2} \begin{vmatrix} 1 & \operatorname{tg} \frac{x}{2} & \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \end{vmatrix}.$$

Le déterminant restant est un déterminant de Vandermonde, qui vaut

$$\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{tg} \frac{y}{2}\right)\left(\operatorname{tg} \frac{y}{2} - \operatorname{tg} \frac{z}{2}\right)\left(\operatorname{tg} \frac{z}{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)$$

En le remplaçant par sa valeur, il vient finalement

$$D = -4 \sin \frac{1}{2}(x - y) \sin \frac{1}{2}(y - z) \sin \frac{1}{2}(z - x).$$

2° $\begin{vmatrix} \sin a & \sin 2a & \sin 3a \\ \sin b & \sin 2b & \sin 3b \\ \sin c & \sin 2c & \sin 3c \end{vmatrix}$

Diviser les éléments de L_1, L_2, L_3, respectivement par $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$; puis, diviser les éléments de C_2 par 2. Il vient

$$\begin{aligned} D &= 2 \sin a \sin b \sin c \begin{vmatrix} 1 & \cos a & 3 - 4 \sin^2 a \end{vmatrix} \\ &= 2 \sin a \sin b \sin c \begin{vmatrix} 1 & \cos a & 4(1 - \sin^2 a) \end{vmatrix} \\ &= 8 \sin a \sin b \sin c \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos^2 a \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Le déterminant restant est un déterminant de Vandermonde, qui vaut

$$(\cos a - \cos b)(\cos b - \cos c)(\cos c - \cos a)$$

$$\text{ou } -8 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} \sin \frac{b+c}{2} \sin \frac{b-c}{2} \sin \frac{c+a}{2} \sin \frac{c-a}{2}.$$

3° $\begin{vmatrix} \sin^2 \frac{x}{2} & \sin^2 \frac{y}{2} & \sin^2 \frac{z}{2} \\ \sin x & \sin y & \sin z \\ \sin 2x & \sin 2y & \sin 2z \end{vmatrix}$

Diviser les éléments de C_1, C_2, C_3 respectivement par $\sin x$, $\sin y$ $\sin z$; multiplier les éléments de L_1 par 2 et diviser ceux de L_3 par 2; remplacer ensuite C_2 par $C_2 - C_1$ et C_3 par $C_3 - C_1$. Il vient

$$D = \sin x \sin y \sin z \begin{vmatrix} \cos y - \cos x & \cos z - \cos x \\ \operatorname{tg} \frac{y}{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{2} & \operatorname{tg} \frac{z}{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{2} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Le déterminant restant vaut

$$-2\sin\frac{y+x}{2}\operatorname{siu}\frac{y-x}{2}\times\frac{\sin\frac{z-x}{2}}{\cos\frac{z}{2}\cos\frac{x}{2}}+2\sin\frac{z+x}{2}\sin\frac{z-x}{2}\times\frac{\sin\frac{y-x}{2}}{\cos\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{y-x}{2}\sin\frac{z-x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}}\left[2\sin\frac{x+z}{2}\cos\frac{z}{2}-2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{y}{2}\right]$$

$$=\frac{\sin\frac{y-x}{2}\sin\frac{z-x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}}\left[\sin\frac{x+2z}{2}-\sin\frac{x+2y}{2}\right]$$

$$=\frac{2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{y-z}{2}\sin\frac{z-x}{2}\cos\frac{x+y+z}{2}}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}};$$

En remplaçant dans (1), il vient

$$D=16\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{y-z}{2}\sin\frac{z-x}{2}\cos\frac{x+y+z}{2}.$$

228. *Si* $a+\alpha+b+\beta+c+\gamma=0$, *montrer que les déterminants suivants sont nuls.*

1° $$\begin{vmatrix} \operatorname{tg}(a+\alpha) & \operatorname{tg}(a+\beta) & \operatorname{tg}(a+\gamma) \\ \operatorname{tg}(b+\alpha) & \operatorname{tg}(b+\beta) & \operatorname{tg}(b+\gamma) \\ \operatorname{tg}(c+\alpha) & \operatorname{tg}(c+\beta) & \operatorname{tg}(c+\gamma) \end{vmatrix}$$

Si $x+y+z=0$, on a

$$\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z=\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z.$$

En appliquant cette formule aux six termes du déterminant, développé à l'aide de la règle de Sarrus, on montre aisément que le déterminant est nul.

2° $$\begin{vmatrix} \sin(a+\alpha) & \sin(a+\beta) & \sin(a+\gamma) \\ \sin(b+\alpha) & \sin(b+\beta) & \sin(b+\gamma) \\ \sin(c+\alpha) & \sin(c+\beta) & \sin(c+\gamma) \end{vmatrix}$$

On vérifie aisément, que si $x+y+z=0$, on a

$$4\sin x\sin y\sin z=\sin(-x+y+z)+\sin(x-y+z)+\sin(x+y-z).$$

Développer le déterminant proposé par la règle de Sarrus; puis, transformer chacun des six termes à l'aide de la formule précédente. On constate que la somme des résultats est nulle.

§ II. — ÉQUATIONS LINÉAIRES.

229. *Résoudre et discuter les systèmes suivants; dans les deux premiers,* a, b, c *et* d *désignent des nombres différents.*

1° $x + y + z = 1$
$ax + by + cz = d$
$a^2x + b^2y + c^2z = d^2.$

Le dénominateur commun des trois inconnues et leurs numérateurs sont des déterminants de Vandermonde qui valent :

$$D = (b-a)(c-a)(c-b); \quad N_x = (b-d)(c-d)(c-b);$$
$$N_y = (d-a)(c-a)(c-d); \quad N_z = (b-a)(d-a)(d-b).$$

On voit qu'ils sont différents de zéro. On trouve :

$$x = \frac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)}; \quad y = \frac{(d-a)(c-d)}{(b-a)(c-b)}; \quad z = \frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

2° $x + ay + a^3z = a^2$
$x + by + b^3z = b^2$
$x + cy + c^3z = c^2.$

Le déterminant du système est

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c).$$

a) Si $a + b + c \neq 0$, le système admet une solution unique

$$x = \frac{-abc}{a+b+c}; \quad y = \frac{ab+bc+ca}{a+b+c}; \quad z = \frac{1}{a+b+c}.$$

b) Si $a + b + c = 0$, le système est impossible. En effet, prenons comme déterminant principal

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix} = b - a \neq 0.$$

Le déterminant caractéristique correspondant à la 3e équation est

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b),$$

et il est différent de zéro, car a, b, c, sont différents.

Remarque. — Pour examiner ce dernier cas ($a + b + c = 0$), on peut aussi procéder comme suit. On résout le système formé par les deux premières équations par rapport à x et y, ce qui donne

$$x = -ab + (a^2b + ab^2)z; \quad y = a + b - (a^2 + ab + b^2)z.$$

On remplace ensuite x et y par leur valeur dans la troisième équation, ce qui, après simplification, donne l'équation

$$(a + b + c)z = 1 \text{ ou } 0.z = 1.$$

Cette équation est impossible et il en sera de même du système.

3° $a^3x + a^2y + az = 1$
$b^3x + b^2y + bz = 1$
$c^3x + c^2y + cz = 1.$

Le déterminant du système est $D = - abc(a - b)(b - c)(c - a)$.

a) Si $D \neq 0$, le système admet une solution unique

$$x = \frac{1}{abc}; \quad y = \frac{-(a + b + c)}{abc}; \quad z = \frac{ab + bc + ca}{abc}.$$

b) Si un ou plusieurs des nombres a, b, c sont nuls, le système est évidemment impossible. Nous supposerons donc, dans ce qui suit, que ces nombres ne sont pas nuls.

c) Si $a = b \neq c$, le système devient

$$b^3x + b^2y + bz = 1; \quad c^3x + c^2y + cz = 1.$$

Ce système est indéterminé; il donne, par exemple,

$$x = \frac{bcz - b - c}{b^2c^2}; \quad y = \frac{b^2 + bc + c^2 - bc(b + c)z}{b^2c^2}.$$

d) Les cas $a = c \neq b$ et $b = c \neq a$ conduisent à des résultats analogues.

e) Si $a = b = c$, le système se réduit à une équation.

4° $ax + y + z = 1$
$x + ay + z = a$
$x + y + az = a^2.$

Le déterminant du système est égal à $(a - 1)^2 (a + 2)$.

a) Si a est différent de -2 et de 1, le système admet une solution unique

$$x = -\frac{a + 1}{a + 2}; \quad y = \frac{1}{a + 2}; \quad z = \frac{(a + 1)^2}{a + 2}.$$

b) Si $a = -2$, les deux premières équations peuvent être résolues par rapport à x et y, car on a

$$\delta = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1 \neq 0.$$

Le déterminant caractéristique correspondant à la 3e équation est

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix} = (a^2 - 1)^2.$$

Il est différent de zéro et le système est impossible.

c) Si $a = 1$, le système se réduit à l'équation unique

$$x + y + z = 1.$$

Le système est indéterminé; on peut attribuer des valeurs arbitraires à deux inconnues.

5° $ax + by + z = 1$
$x + aby + z = b$
$x + by + az = 1.$

Le déterminant du système est $b(a + 2)(a - 1)^2$.

a) Si ce déterminant est différent de zéro, le système admet une solution unique :

$$x = \frac{a - b}{(a + 2)(a - 1)}; \quad y = \frac{ab + b - 2}{b(a + 2)(a - 1)}; \quad z = \frac{a - b}{(a + 2)(a - 1)}.$$

b) Si $b = 0$, le système devient

$$ax + z = 1; \quad x + z = 0; \quad x + az = 1.$$

C'est un système de trois équations à deux inconnues. En tirant z de la 2e équation et en remplaçant dans les deux autres, on obtient les deux équations

$$(a - 1)x = 1 \quad \text{et} \quad (a - 1)x = -1.$$

Si $a \neq 1$, ces deux équations sont incompatibles. Si $a = 1$, chacune d'elles est une équation impossible. Donc le système proposé est impossible quand $b = 0$.

c) Si $a = 1$, le système se réduit à deux équations

$$x + by + z = b; \quad x + by + z = 1.$$

Si $b \neq 1$, ces équations sont incompatibles. Si $b = 1$, le système proposé se réduit à l'équation unique

$$x + y + z = 1,$$

et le système est indéterminé; on peut attribuer des valeurs arbitraires à deux inconnues.

d) Si $a = -2$, le système devient

$$-2x + by + z = 1; \quad x - 2by + z = b; \quad x + by - 2z = 1.$$

Les deux premières équations forment un système qui peut être résolu par rapport à x et z, car on a

$$\delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Prenons δ comme déterminant principal. Le déterminant caractéristique relatif à la 3e équation est

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -(3b + 6).$$

Le système est donc impossible ou indéterminé, suivant qu'on a

$$b \neq -2 \quad \text{ou} \quad b = -2.$$

Si $b = -2$, la solution est

$$x = z; \quad y = -\frac{1}{2}(z + 1).$$

6° $x + y + z = 0$
$ax + by + cz = 0$
$bcx + cay + abz = 1.$

Le déterminant du système est $(a - b)(b - c)(c - a)$.

a) Si le déterminant du système est différent de zéro, le système admet une solution unique :

$$x = \frac{1}{(a - b)(a - c)}; \quad y = \frac{1}{(b - a)(b - c)}; \quad z = \frac{1}{(c - a)(c - b)}.$$

b) Si $a = b \neq c$, les deux premières équations forment un système qui peut être résolu par rapport à y et z, car

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix} = c - b \neq 0.$$

Prenons δ comme déterminant principal. Le déterminant caractéristique par rapport à la troisième équation est

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ b & c & 0 \\ ca & ab & 1 \end{vmatrix} = c - b \neq 0.$$

Le système est donc impossible.

c) Les cas $a = c \neq b$ et $b = c \neq a$ conduisent à la même conclusion.

d) Si $a = b = c \neq 0$, le système devient

$$x + y + z = 0, \quad x + y + z = \frac{1}{a^2},$$

et il est impossible.

e) Si $a = b = c = 0$, le système est impossible, comme la dernière équation.

7° $x + ay + z = 2a$
$x + y + az = 0$
$(a + 1)x + ay + z = a.$

Le déterminant du système est $a(a^2 - 1)$.

a) Si le déterminant est différent de zéro, le système admet une solution unique

$$x = -1; \quad y = \frac{2a - 1}{a - 1}; \quad z = \frac{1}{1 - a}.$$

b) Si $a = 0$, le système devient

$$x + z = 0; \quad x + y = 0.$$

D'où $x = -y = -z$.

c) Si $a = 1$, le système devient

$$x + y + z = 2; \quad x + y + z = 0; \quad 2x + y + z = 1.$$

Les deux premières équations sont incompatibles et le système est impossible.

d) Si $a = -1$, le système se réduit à

$$x = -1; \quad y = z + 1,$$

et on peut attribuer des valeurs arbitraires à y ou z.

8° $x + ay + a^2z = 1$

$x + ay + abz = a$

$bx + ay + a^2bz = a^2$.

Le déterminant du système est $D = -a^2(a - b)(b - 1)$.

a) Si $D \neq 0$, on trouve

$$x = \frac{(a-1)(a^2-b)}{(a-b)(b-1)}; \quad y = \frac{b-a^2}{a(b-1)}; \quad z = \frac{1-a}{a(a-b)}.$$

b) Si $a = 0$, les deux premières équations ne sont pas compatibles et le système est impossible. Dans ce qui suit, nous supposons $a \neq 0$.

c) Si $a = b$, le système devient

$$x + ay + a^2z = 1; \quad x + ay + a^2z = a; \quad x + y + a^2z = a.$$

Si $a \neq 1$, le système est impossible, à cause des deux premières équations; si $a = 1$, il se réduit à l'équation $x + y + z = 1$.

d) Si $b = 1$, le système devient

$$x + ay + a^2z = 1; \quad x + ay + az = a; \quad x + ay + a^2z = a^2.$$

Si $a \neq \pm 1$, la 1re et la 3e équation ne sont pas compatibles.

Si $a = 1$, le système se réduit à $x + y + z = 1$.

Si $a = -1$, le système donne : $x = y$; $z = 1$.

9° $x \sin a + y \sin 2a + z \sin 3a = \sin 4a$

$x \sin b + y \sin 2b + z \sin 3b = \sin 4b$

$x \sin c + y \sin 2c + z \sin 3c = \sin 4c$.

Le déterminant de ce système est $8PP'$, en posant

$$P = \sin a \sin b \sin c$$

et $P' = (\cos a - \cos b)(\cos b - \cos c)(\cos c - \cos a)$ (227, 2°).

Le numérateur de x est

$$\begin{aligned} N_x &= |\sin 4a \quad \sin 2a \quad \sin 3a| \\ &= 8P\,|\cos a \cos 2a \quad \cos a \quad 3 - 4\sin^2 a| \\ &= 8P\,|2\cos^3 a - \cos a \quad \cos a \quad 4\cos^2 a - 1| \\ &= 16P\,|\cos^3 a \quad \cos a \quad 4\cos^2 a - 1|. \end{aligned}$$

Le déterminant restant se décompose en deux autres.

Le premier est

$$|\cos^3 a \quad \cos a \quad 4\cos^2 a| = 4\cos a\cos b\cos c\,|\cos^2 a \quad 1 \quad \cos a|$$
$$= 4\cos a\cos b\cos c\,|1 \quad \cos a \quad \cos^2 a| = 4\cos a\cos b\cos c\,\mathrm{P}'.$$

Le second est

$$|\cos^3 a \quad \cos a \quad -1| = |1 \quad \cos a \quad \cos^3 a| = \mathrm{P}' \times \Sigma\cos a.$$

On a donc

$$\mathrm{N}_x = 16\mathrm{PP}'(\cos a + \cos b + \cos c + 4\cos a\cos b\cos c).$$

On trouve d'une façon anologue :

$$\mathrm{N}_y = -16\mathrm{PP}'(1 + 2\cos a\cos b + 2\cos b\cos c + 2\cos c\cos a);$$
$$\mathrm{N}_z = 16\mathrm{PP}'(\cos a + \cos b + \cos c).$$

a) Si $\mathrm{D} \neq 0$, on a

$$x = 2(\cos a + \cos b + \cos c + 4\cos a\cos b\cos c)$$
$$y = -2(1 + 2\cos a\cos b + 2\cos b\cos c + 2\cos c\cos a)$$
$$z = 2(\cos a + \cos b + \cos c).$$

b) Supposons que parmi les trois sinus, $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$, un seul, par exemple $\sin a$, soit nul. Le système se réduit à ses deux dernières équations.

Considérons ces deux équations comme formant un système en x et en y. Son déterminant est alors $2\sin b\sin c(\cos c - \cos b)$.

Si $\cos b \neq \cos c$, on trouve

$$x = (4\cos b\cos c + 1)z - 8\cos b\cos c(\cos b + \cos c); \tag{1}$$
$$y = -2(\cos b + \cos c)z - 2 + 4\cos^2 b + 4\cos^2 c + 4\cos b\cos c. \tag{2}$$

Si $\cos b = \cos c$, on a $b = 2k\pi + c$ ou $b = 2k\pi - c$. Dans les deux cas, le système proposé se réduit à sa dernière équation.

c) Si deux sinus sont nuls et si le 3e est différent de zéro, le système se réduit à une seule équation. Si les trois sinus sont nuls, le système est complètement indéterminé.

Dans ce qui suit, nous supposons que les trois sinus sont différents de zéro.

d) Si $\cos a = \cos b \neq \cos c$, on a $a = 2k\pi + b$ ou $a = 2k\pi - b$. Dans les deux cas, le système se réduit à ses deux dernières équations et ses solutions sont données par les formules (1), (2).

e) Si $\cos a = \cos b = \cos c$, le système se réduit à l'une de ses équations.

10° $ax + y + z + t = 1$

$$x + ay + z + t = a$$
$$x + y + az + t = a^2$$
$$x + y + z + at = a^3.$$

Le déterminant du système est égal à $(a + 3)(a - 1)^3$.

Si a est différent de -3 et de 1, le système admet une solution unique

$$x = \frac{-a^2 - 2a - 2}{a+3}; \quad y = \frac{-a^2 - a + 1}{a+3};$$

$$z = \frac{2a+1}{a+3}; \quad t = \frac{a^3 + 3a^2 + 2a + 1}{a+3}.$$

b) Si $a = 1$, le système se réduit à l'équation unique

$$x + y + z + t = 1.$$

Le système est indéterminé; on peut attribuer des valeurs arbitraires à trois inconnues.

c) Si $a = -3$, le système devient

$$\begin{aligned} -3x + y + z + t &= 1 \\ x - 3y + z + t &= -3 \\ x + y - 3z + t &= 9 \\ x + y + z - 3t &= -27. \end{aligned}$$

En additionnant ces quatre équations membre à membre, on obtient l'équation $0.x + 0.y + 0.z + 0.t = -20$, qui doit être vérifiée par toute solution du système proposé. Or elle est impossible. Il en sera de même du système.

11°
$$\begin{aligned} y - z + at &= 1 \\ -x + z - t &= 4 \\ x - y + t &= b \\ -ax + y - z &= c. \end{aligned}$$

Le déterminant du système est a^2.

a) Si $a \neq 0$, le système admet une solution unique

$$x = \frac{-b - c - 4}{a}; \quad y = \frac{-ab - c + 1}{a}; \quad z = \frac{4a - c + 1}{a}; \quad t = \frac{b+5}{a}.$$

b) Si $a = 0$, le système devient :

$$y - z = 1; \quad -x + z - t = 4; \quad x - y + t = b; \quad y - z = c.$$

Si $c \neq 1$, la 1re et la 4e équation sont incompatibles et le système est impossible.

Si $c = 1$, le système se réduit à un système de trois équations linéaires à quatre inconnues.

$$y - z = 1; \quad -x + z - t = 4; \quad x - y + t = b.$$

Les quatre déterminants du 3e degré, que l'on peut former au moyen des coefficients de trois inconnues, sont tous nuls. Le système ne pourra être résolu par rapport à trois inconnues. Mais les deux premières équations peuvent être résolues par rapport à x et y. On trouve

$$x = z - t - 4; \quad y = z + 1.$$

En remplaçant x et y par leur valeur dans la 3e équation, on trouve

$$b = -5.$$

Par conséquent, si $b \neq -5$, le système est impossible. Si $b = -5$, le système se réduit à

$$y - z = 1; \quad -x + z - t = 4.$$

Il est indéterminé : on peut attribuer des valeurs arbitraires à deux inconnues quelconques, pourvu que l'on ne choisisse pas y et z.

230. *On donne le système*

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0 \\ a^2x + b^2y + c^2z &= 0 \\ a^3x + b^3y + c^3z &= (a - b)(b - c)(c - a). \end{aligned}$$

On demande de démontrer les points suivants :

1° *Si les coefficients* a, b, c, *sont différents deux à deux et différents de zéro, le système admet une solution unique;*

2° *Si l'un des coefficients est nul, les deux autres étant différents et non nuls, le système est impossible;*

3° *Si deux coefficients sont égaux, le système est indéterminé.*

Le déterminant du système est

$$abc(a - b)(b - c)(c - a).$$

1° On voit que le système admet une solution unique, si les coefficients a, b, c sont différents deux à deux et différents de zéro. Cette solution est

$$x = \frac{c - b}{a}; \quad y = \frac{a - c}{b}; \quad z = \frac{b - a}{c}.$$

2° Supposons c seul nul, a et b étant inégaux et différents de zéro. — Les deux premières équations peuvent être résolues par rapport à x et y, car on a

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = ab(b - a) \neq 0.$$

Prenons δ comme déterminant principal. Le déterminant caractéristique correspondant à la 3^e équation est

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a^2 & b^2 & 0 \\ a^3 & b^3 & ab(b - a) \end{vmatrix} = a^2b^2(b - a)^2.$$

Il est différent de zéro. Donc le système est impossible. Nous aurions abouti à la même conclusion, en supposant $a = 0$, $b \neq c$, ou $b = 0$, $a \neq c$.

3° Supposons qu'on ait $a = b \neq c$. — Le système devient :

$$\begin{aligned} ax + ay + cz &= 0 \\ a^2x + a^2y + c^2z &= 0 \\ a^3x + a^3y + c^3z &= 0. \end{aligned}$$

C'est un système homogène. Son déterminant est nul, car il renferme deux colonnes identiques. Donc il est indéterminé.

a) Si a, b, c sont différents de zéro, les deux premières équations permettent de calculer x et z en fonction de y, ou y et z en fonction de x. On trouve

$$x = -y, \quad z = 0,$$

et dans ce cas, on peut attribuer des valeurs arbitraires à y ou à x.

b) Si $a = b \neq 0$ et $c = 0$, le système se réduit à l'équation

$$x + y = 0,$$

et on pourra attribuer des valeurs arbitraires à z et à l'une des deux autres inconnues.

c) Si $a = b = 0$ et $c \neq 0$, le système se réduit à

$$z = 0,$$

et on pourra attribuer des valeurs arbitraires à x et y.

Si l'on avait supposé $a = c \neq b$ ou $b = c \neq a$, on aurait abouti à des conclusions analogues.

231. *Discuter le système général de trois équations linéaires homogènes à trois inconnues; de trois équations linéaires homogènes à quatre inconnues; de quatre équations linéaires à quatre inconnues.*

I. Système de trois équations linéaires homogènes a trois inconnues. — La discussion générale (*Compléments*, **217**) s'applique au système

$$ax + by + cz = 0 \tag{1}$$
$$a'x + b'y + c'z = 0 \tag{2}$$
$$a''x + b''y + c''z = 0. \tag{3}$$

1o Si $D \neq 0$, le système admet une solution unique, qui est $x = y = z = 0$, car les déterminants D_1, D_2 et D_3 renferment une colonne de zéros.

2o Si $D = 0$ et $\delta = ab' - ba' \neq 0$, le système est partiellement indéterminé et se réduit aux deux premières équations, car le déterminant caractéristique relatif à l'équation (3) est nul.

3o Si D et ses mineurs sont nuls et si $a \neq 0$, le système est partiellement indéterminé et se réduit à l'équation (1), car les caractéristiques relatifs aux équations (2) et (3) sont nuls.

4o Si les coefficients des inconnues sont tous nuls, le système est complètement indéterminé.

On voit que le système n'est jamais impossible.

II. Système de trois équations linéaires homogènes a quatre inconnues. — Considérons le système :

$$ax + by + cz + du = 0 \tag{1}$$
$$a'x + b'y + c'z + d'u = 0 \tag{2}$$
$$a''x + b''y + c''z + d''u = 0. \tag{3}$$

Désignons par A, B, C, D les déterminants obtenus par la suppression successive de la 1re, 2e, 3e, 4e colonne dans le tableau rectangulaire

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{matrix} \right\|$$

le 2e et le 4e de ces déterminants étant changés de signe.

1er cas : *L'un des déterminants* A, B, C, D *est différent de zéro.* — En supposant $D \neq 0$, on trouve que le système admet une infinité de solutions données par les formules $x = kA$, $y = kB$, $z = kC$, $u = kD$, dans lesquelles k est un nombre arbitraire.

2e cas : *Le déterminant principal du système est du second degré.* — Supposons $\delta = ab' - ba' \neq 0$. Les équations (1) et (2) peuvent être résolues par rapport à x et y. En substituant dans l'équation (3), celle-ci devient

$$\frac{1}{\delta} \begin{vmatrix} a & b & cz + du \\ a' & b' & c'z + d'u \\ a'' & b'' & c''z + d''u \end{vmatrix} = -\frac{Dz}{\delta} + \frac{Cu}{\delta} = 0, \quad \text{ou} \quad 0.z + 0.u = 0.$$

L'équation (3) peut donc être supprimée et on peut donner des valeurs arbitraires à z et à u.

3e cas : *Le déterminant principal du système est du* 1er *degré.* — Supposons $a \neq 0$. L'équation (1) peut être résolue par rapport à x. En substituant dans les équations (2) et (3), chacune de celles-ci devient

$$0.y + 0.z + 0.u = 0.$$

Le système se réduit à l'équation (1) et on peut attribuer à y, z et u des valeurs arbitraires.

4e cas : *Les coefficients des inconnues sont nuls.* — Le système est complètement indéterminé.

III. Système de quatre équations linéaires a quatre inconnues. — La discussion est analogue à celle d'un système de trois équations linéaires à trois inconnues (*Compléments*, **217**). On distinguera cinq cas.

1° Le déterminant D du système est différent de zéro.

2° D est nul, mais au moins un des mineurs est différent de zéro.

3° D et ses mineurs sont nuls, mais au moins l'un des déterminants du 2e degré, obtenus en supprimant dans D deux lignes et deux colonnes, est différent de zéro.

4° D est nul, ainsi que ses mineurs et les déterminants du 2e degré obtenus en supprimant dans D deux lignes et deux colonnes; mais au moins l'un des coefficients des inconnues est différent de zéro.

5° Les coefficients des inconnues sont nuls.

232. *Résoudre et discuter les systèmes d'équations homogènes suivants,* a, b *et* c *étant différents de zéro.*

1° $x + y + z = 0$
$bcx + acy + abz = 0$
$(b + c)x + (a + c)y + (a + b)z = 0.$

Le déterminant du système est

$$D = (a - b)(b - c)(c - a).$$

Si $D \neq 0$, le système admet la solution unique

$$x = y = z = 0.$$

Si $D = 0$, le système est indéterminé (**231**, 1). La condition $D = 0$ est satisfaite dans les deux cas suivants :

a) Parmi les trois nombres a, b, c, il y en a deux qui sont égaux, tout en étant différents du troisième.— Dans ce cas, on ne peut attribuer des valeurs arbitraires qu'à l'une des inconnues.

En effet, supposons, à titre d'exemple, que l'on ait

$$a = c \neq b.$$

Les deux premières équations donnent dans ce cas

$$x = -z; \quad y = 0.$$

Cette solution vérifie la 3e équation qui peut s'écrire dans le cas actuel

$$(a + b)x + 2ay + (a + b)z = 0.$$

L'inconnue à laquelle on peut attribuer des valeurs arbitraires est x ou z.

b) Les trois nombres a, b, c sont égaux. — Dans ce cas, le système se réduit à l'équation $x + y + z = 0$ et on peut attribuer des valeurs arbitraires à deux inconnues.

2° $x + y + z = 0$
$ax + by + cz = 0$
$a^2x + b^2y + c^2z = 0.$

Le déterminant de ce système est encore

$$(a - b)(b - c)(c - a).$$

La discussion du système conduit aux mêmes résultats que celle qui précède (1°).

3° $y + z = ax$
$z + x = by$
$x + y = cz.$

Le déterminant du système est

$$D = abc - a - b - c - 2.$$

Si $D \neq 0$, le système n'est vérifié que pour

$$x = y = z = 0.$$

Si $D = 0$, le système est indéterminé. Considérons les deux premières équations.

a) Si $a + 1 \neq 0$, ces deux équations peuvent être résolues par rapport à x et à z. On trouve

$$x = \frac{(b+1)y}{a+1}; \quad z = \frac{(ab-1)y}{a+1}.$$

On vérifie aisément que ces valeurs de x et de z satisfont à la 3e équation. Cela résulte d'ailleurs de la discussion (**231**, I).

b) Si $a + 1 = 0$, la condition $D = 0$ devient $(b+1)(c+1) = 0$.

Si $b + 1 = 0$ et $c + 1 \neq 0$, le système donne

$$x = -y; \quad z = 0.$$

Si $b + 1 \neq 0$ et $c + 1 = 0$, il donne

$$x = -z; \quad y = 0.$$

Si $b + 1 = c + 1 = 0$, le système se réduit à $x + y + z = 0$.

233. *Trouver les conditions de compatibilité des équations :*

1° $x = b$

$ax + 3by = ab + 3b$

$ax - 3by = -ab.$

a) Si $b \neq 0$, les deux premières équations donnent

$$x = b; \quad y = 1.$$

Cette solution vérifie la 3e équation, si l'on a

$$2ab - 3b = 0 \quad \text{ou} \quad a = \frac{3}{2}.$$

b) Si $b = 0$, le système se réduit à deux équations

$$x = 0; \quad ax = 0.$$

Dans ce cas, on a $x = 0$ et y est arbitraire.

La condition de compatibilité est donc $b \neq 0$ avec $a = \frac{3}{2}$; ou encore $b = 0$.

2° $(a - a')x + (b - b')y = 0$

$ax + by - aa' - bb' = 0$

$a'x + b'y - aa' - bb' = 0.$

Nous supposerons a, a', b, b', différents de zéro.

a) Les deux dernières équations sont compatibles, si on a

$$ab' - ba' \neq 0.$$

Si cette condition est satisfaite, les deux dernières équations donnent

$$x = \frac{(b'-b)(aa'+bb')}{ab'-ba'}; \quad y = \frac{(a-a')(aa'+bb')}{ab'-ba'}.$$

Ces valeurs de x et de y vérifient la première équation et la condition générale de compatibilité est

$$ab' - ba' \neq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}.$$

b) Si $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'}$, posons $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = k$.

Les deux dernières équations deviennent

$$k(a'x + b'y) = aa' + bb'$$
$$a'x + b'y = aa' + bb'.$$

On voit qu'elles sont incompatibles si $k \neq 1$. Si $k = 1$, le système se réduit à l'équation $ax + by = a^2 + b^2$.

3° $ax + y + z = a$
$ax + ay + z = 1$
$x + ay + az = 1$
$x + y + az = a.$

En considérant trois équations quelconques, choisies parmi les quatre équations données, on trouve chaque fois que le déterminant du système qu'elles forment est égal à $(a - 1)^2 (a + 1)$.

a) Si $(a - 1)^2 (a + 1) \neq 0$, les trois premières équations donnent :

$$x = 1; \quad y = -1; \quad z = 1.$$

Cette solution vérifie la 4e équation.

b) Si $a = 1$, le système se réduit à l'équation unique

$$x + y + z = 1.$$

On peut attribuer des valeurs arbitraires à deux inconnues et les quatre équations admettent une infinité de solutions communes.

c) Si $a = -1$, le système se réduit à deux équations

$$x - y - z = 1; \quad x + y - z = -1.$$

Ce système donne $x = z; \quad y = -1.$

On pourra attribuer des valeurs arbitraires à x ou z et les quatre équations admettent une infinité de solutions communes.

4° $x + ay + a^2z = a^4$
$x + by + b^2z = b^4$
$x + cy + c^2z = c^4$
$x + dy + d^2z = d^4.$

I. *Supposons que les quatre nombres* a, b, c, d *soient différents.* — Le système formé par les trois premières équations admet une solution unique, car son déterminant

$$(a - b)(b - c)(c - a)$$

est différent de zéro. Cette solution est

$$x = abc(a + b + c)$$
$$y = -(a + b)(b + c)(c + a)$$
$$z = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca.$$

Elle vérifie la 4e équation, si l'on a

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, $(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)=0$;
ce qui exige $$a+b+c+d=0.$$

C'est la condition générale de compatibilité.

II. Il reste encore quatre cas à examiner :

a) Parmi les quatre nombres a, b, c, d, il y en a deux, et deux seulement, qui sont égaux.

b) Deux nombres sont égaux; les deux autres sont également égaux, mais différents des deux premiers.

c) Trois nombres sont égaux.

d) Les quatre nombres sont égaux.

Dans ces quatre cas, le système se réduit respectivement à 3, 2, 2, 1 équations et on montrerait aisément que les équations restantes sont chaque fois compatibles.

5° $$\begin{aligned} ax+by+cz &= b+c \\ bx+cy+az &= c+a \\ cx+ay+bz &= a+b \\ x+y+z &= 2. \end{aligned}$$

I. Supposons d'abord que les trois nombres a, b, c, ne soient pas tous égaux. Dans ce cas, le déterminant du système formé par les trois dernières équations

$$\begin{vmatrix} b & c & a \\ c & a & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2$$

est différent de zéro (1re *Partie*, 214, 553). On peut donc résoudre le système formé par les trois dernières équations. On trouve

$$x=0; \quad y=z=1.$$

On voit immédiatement que cette solution vérifie la première équation; c'était à prévoir, car l'éliminant des quatre équations est

$$\begin{vmatrix} a & b & c & b+c \\ b & c & a & c+a \\ c & a & b & a+b \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b+c & c & b+c \\ b & c+a & a & c+a \\ c & a+b & b & a+b \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

II. Si les trois nombres a, b, c sont égaux, le système se réduit à l'équation $x+y+z=2$, et deux inconnues peuvent prendre des valeurs arbitraires.

234. *Résoudre et discuter les systèmes :*

1° $x + ay + a^2z = 0$
$x + by + b^2z = 0.$

a) Si $a \neq b$, le système peut être résolu par rapport à x et y. On trouve $x = ab(b - a)k$; $y = (a^2 - b^2)k$; $z = (b - a)k$.

x est nul quand a ou b est nul.

b) Si $a = b$, le système se réduit à l'équation

$$x + ay + a^2z = 0.$$

Si $a = 0$, on a $x = 0$ et y, z peuvent prendre des valeurs arbitraires. Si $a \neq 0$, on peut attribuer des valeurs arbitraires à deux inconnues quelconques.

2° $ax + by + cz = 0$
$a^2x + b^2y + c^2z = 0.$

1er cas : Aucun des trois nombres a, b, c n'est nul.

a) Supposons que parmi les trois nombres, il y en ait au moins deux qui soient différents. Soit, par exemple, $a \neq b$. En résolvant par rapport à x et y, on trouve :

$$x = bc(c - b)k; \quad y = ac(a - c)k; \quad z = ab(b - a)k.$$

x est déterminé et nul si $b = c$; y est déterminé et nul si $a = c$.

b) Si $a = b = c$, le système se réduit à l'équation $x + y + z = 0$.

2e cas : Un seul nombre est nul. — Soit, par exemple, $a = 0$.

a) Si $b \neq c$, on a le système

$$by + cz = 0, \quad b^2y + c^2z = 0,$$

qui donne $y = 0$, $z = 0$ et x est quelconque.

b) Si $b = c$, le système se réduit à l'équation $y + z = 0$.

3e cas : Deux nombres sont nuls. — Soient, par exemple, $a = b = 0$ Le système se réduit à $z = 0$; x et z sont quelconques.

4e cas : $a = b = c = 0$. — Le système est complètement indéterminé.

3° $ax + ay + az + t = 0$
$ax + ay + z + at = 0$
$ax + y + az + at = 0.$

Les déterminants que l'on obtient en supprimant la 1re 2e, 3e, 4e colonne du tableau des coefficients (Voir **231**, II), sont

$$-(2a + 1)(a - 1)^2, \quad -a(a - 1)^2, \quad a(a - 1)^2 \quad -a(a - 1)^2.$$

a) Si a est différent de 1 et de 0, le système peut être résolu par rapport à x, y, z. On trouve

$$x = -(2a + 1)k; \quad y = z = t = ak.$$

b) Si $a = 0$, on trouve $y = z = t = 0$ et x est arbitraire.

c) Si $a = 1$, le système se réduit à l'équation

$$x + y + z + t = 0.$$

4° $(a + 1)x + y + z + t = 0$
$x + (b + 1)y + z + t = 0$
$x + y + (c + 1)z + t = 0.$

Les déterminants que l'on obtient en supprimant la 1re, 2e, 3e, 4e colonne du tableau des coefficients, sont

$$bc, \quad -ac, \quad ab, \quad abc + ab + bc + ca.$$

a) Supposons que parmi les trois nombres a, b, c, il y en ait au moins deux qui soient différents de zéro. Soient, par exemple, b et c différents de zéro. Le système pourra être résolu par rapport à y, z et t. On trouve

$$x = bck; \quad y = ack; \quad z = abk; \quad t = -(abc + ab + bc + ca)k.$$

Dans le cas particulier où $a = 0$, on a :

$$y = z = 0; \quad x = -t = bck.$$

b) Supposons que parmi les nombres a, b, c, un seul soit différent de zéro. Soit, par exemple, $a \neq 0$, $b = c = 0$.

Le système devient

$$(a + 1)x + y + z + t = 0; \quad x + y + z + t = 0.$$

Ce système donne

$$x = 0; \quad y + z + t = 0.$$

On peut attribuer des valeurs arbitraires à deux des inconnues y, z, t.

c) Si $a = b = c = 0$, le système se réduit à l'équation

$$x + y + z + t = 0.$$

CHAPITRE X

Analyse indéterminée.

235. ***Résoudre par la méthode arithmétique :***

1° $3x + 4y = 13.$

Résolvons par rapport à x qui a le plus petit coefficient. Il vient

$$x = \frac{13 - 4y}{3}.$$

Dans cette égalité, faisons y successivement égal à 0, 1, 2. Pour $y = 1$, on trouve $x = 3$.

On a donc la solution particulière

$$x = 3; \quad y = 1.$$

Rép. $x = 3 + 4t$; $y = 1 - 3t$.

2° $13x - 3y = 11.$ **Rép.** $x = 2 + 3t$; $y = 5 + 13t$.
3° $5x + 7y = 13.$ » $x = -3 + 7t$; $y = 4 - 5t$.
4° $7x - 8y + 12 = 0.$ » $x = 4 + 8t$; $y = 5 + 7t$.

236. *Résoudre par la méthode des fractions continues :*

1° $5x + 14y = 9$. — On a

$$\frac{14}{5} = (2,\ 1,\ 4).$$

Les réduites de cette fraction continue sont

$$2,\quad 3,\quad \frac{14}{5}.$$

On a successivement

$$5.3 - 14.1 = 1;\quad 5.27 - 14.9 = 9.$$

Rép. $x = 27 + 14t$; $y = -9 - 5t$.

2° $41x - 30y = 97$. — On a

$$\frac{41}{30} = (1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2).$$

Les réduites sont

$$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{11}{8},\ \frac{15}{11},\ \frac{41}{30}.$$

On a successivement

$$15.30 - 11.41 = -1;\quad 41.1067 - 30.1455 = 97.$$

Rép. $x = 1067 + 30t$; $y = 1455 + 41t$.

3° $159x + 205y + 104 = 0$. — On a

$$\frac{205}{159} = (1,\ 3,\ 2,\ 5,\ 4).$$

Les réduites de cette fraction continue sont

$$1,\ \frac{4}{3},\ \frac{9}{7},\ \frac{49}{38},\ \frac{205}{159}.$$

On a successivement

$$49.159 - 38.205 = 1;\quad 159(-5096) + 205.3952 + 104 = 0.$$

Rép. $x = -5096 + 205t$; $y = 3952 - 159t$.

4° $420x - 59y = 65$.

Posons $y = 5y'$. L'équation devient

$$84x - 59y' = 13.$$

On a

$$\frac{84}{59} = (1,\ 2,\ 2,\ 1,\ 3,\ 2).$$

Les réduites de cette fraction continue sont

$$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{10}{7},\ \frac{37}{26},\ \frac{84}{59}.$$

On a successivement

$$37.59 - 26.84 = -1;\quad 84.338 - 59.481 = 13.$$

Rép. $x = 338 + 59t$; $y = 2405 + 420t$.

237. *Résoudre en nombres entiers les équations suivantes :*

1° $17x - 7y = 56$.

Le terme indépendant est un multiple du coefficient de y. L'équation est vérifiée quand on a $x = 0;\ y = -8$.

Rép. $x = 7t;\quad y = -8 + 17t.$

2° $114x + 41y = 525$.

Posons $y = 3y'$. L'équation devient

$$38x + 41y' = 175.$$

On a $$x = \frac{175 - 41y'}{38} = 5 - y' - \frac{15 + 3y'}{38}.$$

L'équation est vérifiée quand on a

$$y' = -5;\quad x = 10;\quad y = -15.$$

Rép. $x = 10 - 41t;\quad y = -15 + 114t.$

3° $159x + 38y = 225$.

Posons $y = 3y'$. L'équation devient

$$53x + 38y' = 75.$$

On a $$y' = \frac{75 - 53x}{38} = 2 - x - \frac{1 + 15x}{38} = 2 - x - t.$$

Nous avons posé

$$\frac{1 + 15x}{38} = t \quad \text{ou} \quad 15x - 38t = -1.$$

Cette équation donne

$$x = \frac{38t - 1}{15} = 3t - \frac{7t + 1}{15}.$$

L'équation est vérifiée quand on a

$$t = 2;\quad x = 5;\quad y' = -5;\quad y = -15.$$

Rép. $x = 5 - 38\theta;\quad y = -15 + 159\theta.$

4° $287x + 167y = 704$.

Cette équation donne

$$y = \frac{704 - 287x}{167} = 4 - x + \frac{36 - 120x}{167} = 4 - x + 12t.$$

Nous avons posé

$$\frac{3 - 10x}{167} = t \quad \text{ou} \quad 10x + 167t = 3.$$

De cette dernière équation, on déduit

$$x = \frac{3 - 167t}{10} = -17t + \frac{3 + 3t}{10}.$$

Nous prendrons $t = -1$. On aura

$$x = 17;\quad y = -25.$$

Rép. $x = 17 - 167\theta;\quad y = -25 + 287\theta.$

5° $166x - 581y = 135\,290$.

En divisant les deux membres par 83, on obtient l'équation

$$2x - 7y = 1630.$$

Le terme indépendant est un multiple du coefficient de x. On prendra

$$x = 815; \quad y = 0.$$

Rép. $x = 815 + 7\theta$; $y = 2\theta$.

6° $1622x - 1131y + 323 = 0$.

On a $y = \dfrac{1622x + 323}{1131} = x + \dfrac{491x + 323}{1131} = x + t$.

Nous avons posé

$$\frac{491x + 323}{1131} = t \quad \text{ou} \quad 491x - 1131t + 323 = 0.$$

Par suite, $x = \dfrac{1131t - 323}{491} = 3t - 1 + \dfrac{168 - 342t}{491} = 3t - 1 + 6t'$.

Nous avons posé

$$\frac{28 - 57t}{491} = t' \quad \text{ou} \quad 57t + 491t' = 28.$$

Cette dernière équation donne

$$t = \frac{28 - 491t'}{57} = -8t' + \frac{28 - 35t'}{57} = -8t' + 7t''.$$

Nous avons posé

$$\frac{4 - 5t'}{57} = t'' \quad \text{ou} \quad 5t' + 57t'' = 4.$$

Par suite, $t' = \dfrac{4 - 57t''}{5} = -11t'' + \dfrac{4 - 2t''}{5}$.

On trouve

$$t'' = 2; \quad t' = -22; \quad t = 190; \quad x = 437; \quad y = 627.$$

Rép. $x = 437 + 1131\theta$; $y = 627 + 1622\theta$.

7° $151{,}5x + 58{,}5y = 99$.

Multiplions par 2. L'équation devient

$$303x + 117y = 198.$$

Divisons ensuite par 3. Il vient

$$101x + 39y = 66.$$

Posons $x = 3x'$ et nous aurons

$$101x' + 13y = 22,$$

ou $$y = \frac{22 - 101x'}{13} = 1 - 8x' + \frac{9 + 3x'}{13}.$$

Cette équation donne

$$x' = -3; \quad y = 25; \quad x = -9.$$

Rép. $x = -9 + 39t$; $y = 25 - 101t$.

8° $1401x + 1921y = 903$.

En posant $y = 3y'$, l'équation devient

$$467x + 1921y' = 301.$$

Cette équation donne

$$x = \frac{301 - 1921y'}{467} = 1 - 4y' - \frac{166 + 53y'}{467} = 1 - 4y' - t.$$

Nous avons posé

$$\frac{166 + 53y'}{467} = t \quad \text{ou} \quad 53y' - 467t + 166 = 0.$$

Cette équation donne

$$y' = \frac{467t - 166}{53} = 9t - 3 - \frac{10t + 7}{53}.$$

Nous prendrons $t = -6$. Il vient alors

$$y' = -56; \quad x = 231; \quad y = -168.$$

Rép. $x = 231 - 1921\theta$; $y = -168 + 1401\theta$.

238. *Si* x = A, y = B *est une solution entière de* ax + by = 1 *et si* c *et* q *sont des entiers différents de zéro, trouver une solution entière des équations*

$$1° \; ax + by = c,$$
$$2° \; ax + by = bq + c.$$

Rép. 1° $x = Ac$; $y = Bc$;
2° $x = Ac$; $y = q + Bc$.

239. *Résoudre en nombres entiers les équations suivantes, dans lesquelles* a *représente un nombre entier.*

1° $7x - 11y = (a + 1)^2$.

L'équation $7x - 11y = 1$ est vérifiée par

$$x = 8; \quad y = 5.$$

L'équation proposée admet donc la solution entière

$$x = 8(a + 1)^2; \quad y = 5(a + 1)^2.$$

Rép. $x = 8(a + 1)^2 + 11t$; $y = 5(a + 1)^2 + 7t$.

2° $3x + 8y = 48a + 5$.

L'équation $3x + 8y = 5$ est vérifiée par

$$x = -1; \quad y = 1.$$

L'équation proposée admet donc la solution entière

$$x = -1; \quad y = 1 + 6a.$$

Rép. $x = -1 + 8t$; $y = 1 + 6a - 3t$.

3° $(a - 2)x - (a - 3)y = 2$.

Nous supposons a différent de 2 et de 3. Alors les coefficients des inconnues sont différents de zéro. De plus, ils sont premiers entre eux, car ce sont deux nombres entiers consécutifs. On a

$$x = \frac{(a-3)y + 2}{a - 2} = y + \frac{2 - y}{a - 2}.$$

L'équation est vérifiée quand on a

$$x = 2; \quad y = 2.$$

Rép. $x = 2 + (a - 3)t; \quad y = 2 + (a - 2)t.$

4° $2x(a + 1) + (a + 2)y = a$.

Nous devons supposer a différent de -2 et de -1. Comme $a + 1$ et $a + 2$ sont premiers entre eux, le seul diviseur commun que $2(a + 1)$ et $a + 2$ peuvent admettre est 2.

1er cas : a *est impair*. — Alors $2(a + 1)$ et $a + 2$ sont premiers entre eux. L'équation donne

$$y = \frac{a - 2x(a+1)}{a + 2} = -x + \frac{a - ax}{a + 2}.$$

L'équation est vérifiée quand on a

$$x = 1; \quad y = -1.$$

Rép. $x = 1 - (a + 2)t; \quad y = -1 + 2(a + 1)t.$

2e cas : a *est pair et égal à* 2a'. — L'équation devient

$$(2a' + 1)x + (a' + 1)y = a'.$$

Les coefficients $2a' + 1$ et $a' + 1$ sont premiers entre eux. On trouve

$$y = \frac{a' - (2a' + 1)x}{a' + 1} = -x + \frac{a' - a'x}{a' + 1}.$$

L'équation est vérifiée quand on a

$$x = 1; \quad y = -1.$$

Rép. $x = 1 - (a' + 1)t; \quad y = -1 + (2a' + 1)t.$

5° $(2a + 3)x + (2a + 5)y = 2a + 8$.

Les coefficients des inconnues ne s'annulent pour aucune valeur entière de a. De plus, ils sont premiers entre eux, car ce sont deux nombres impairs consécutifs. On a

$$x = \frac{2a + 8 - (2a + 5)y}{2a + 3} = 1 - y + \frac{5 - 2y}{2a + 3}.$$

L'équation est vérifiée quand on a

$$y = 1 - a; \quad x = 1 + a.$$

Rép. $x = 1 + a - (2a + 5)t; \quad y = 1 - a + (2a + 3)t.$

6° $(a^2 + 2a + 2)x - (a^2 + a + 1)y = a^3 - 2.$

En cherchant le *p. g. c. d.* des coefficients des inconnues par la méthode des divisions successives, on trouve qu'il est 1. Ces coefficients ne s'annulent d'ailleurs pour aucune valeur de x. L'équation donne

$$y = \frac{(a^2 + 2a + 2)x - (a^3 - 2)}{a^2 + a + 1} = x - (a - 1) + \frac{(a + 1)x + 1}{a^2 + a + 1}.$$

Elle est vérifiée par

$$x = a; \quad y = 2.$$

Rép. $x = a + (a^2 + a + 1)t; \quad y = 2 + (a^2 + 2a + 2)t.$

7° $(4a^2 + 10a + 5)x + (4a + 8)y = 10a^2 + 17a - 6.$

Nous devons supposer $a \neq -2$. En cherchant le *p. g. c. d.* des coefficients des inconnues par la méthode des divisions successives, on trouve qu'il est 1. L'équation donne

$$y = \frac{10a^2 + 17a - 6 - (4a^2 + 10a + 5)x}{4a + 8}$$
$$= 2a - ax + \frac{2a^2 + a - 6 - (2a + 5)x}{4a + 8}.$$

Posons $$\frac{2a^2 + a - 6 - (2a + 5)x}{4a + 8} = t.$$

On obtient ainsi l'équation

$$(2a + 5)x + (4a + 8)t = 2a^2 + a - 6.$$

Cette équation donne

$$x = \frac{(2a^2 + a - 6) - (4a + 8)t}{2a + 5} = a - 2 - 2t + \frac{4 + 2t}{2a + 5}.$$

L'équation est vérifiée quand on a

$$t = -2; \quad x = a + 2; \quad y = -(a^2 + 2).$$

Rép. $x = a + 2 - (4a + 8)\theta;$
$y = -(a^2 + 2) + (4a^2 + 10a + 5)\theta.$

240. *Chercher la forme générale des nombres qui, divisés par* 7 *et* 17, *donnent respectivement pour restes* 3 *et* 15.

Posons $$N = 7x + 3 = 17y + 15.$$

L'équation $$7x - 17y = 12 \qquad (1)$$

donne $$x = \frac{17y + 12}{7} = 2y + 2 + \frac{3y - 2}{7}.$$

Par suite, si $y = 3$, on a $x = 9$.

Toutes les solutions entières de l'équation (1) sont données par les formules

$$x = 9 + 17t; \quad y = 3 + 7t.$$

Rép. $N = 119t + 66.$

241. *Chercher le plus petit nombre positif qui, divisé par* 3, 7 *et* 11, *donne respectivement pour restes* 1, 6 *et* 3.

Posons $N = 3x + 1 = 7y + 6 = 11z + 3.$

L'équation $3x + 1 = 7y + 6$ ou $3x - 7y = 5$ donne

$$x = \frac{7y+5}{3} = 2y + 1 + \frac{y+2}{3}.$$

On en déduit

$$y = -2;\quad x = -3;\quad \text{puis}\quad x = -3 + 7t;\quad y = -2 + 3t.$$

En remplaçant, on trouve

$$N = 21t - 8.$$

L'équation $21t - 8 = 11z + 3$ ou $11z - 21t = -11$ donne ensuite

$$t = 0;\quad z = -1;\quad \text{puis,}\quad t = 11t';\quad z = -1 + 21t'.$$

En remplaçant, on trouve

$$N = -8 + 231t'.$$

Les nombres N seront positifs, si on a

$$t' > \frac{8}{231}\quad \text{ou}\quad t' \geqslant 1.$$

Rép. $N = 223.$

242. *Trouver les valeurs entières de* x *qui rendent entières et positives les expressions suivantes :*

1° $\dfrac{x-3}{9}$ et $\dfrac{3x+137}{11}.$

L'équation $\dfrac{x-3}{9} = y$ ou $x - 9y = 3$

donne $x = 3 + 9t;\quad y = t.$

L'équation $\dfrac{3x+137}{11} = z$ ou $3x - 11z + 137 = 0$

donne $x = -42 + 11t';\quad z = 1 + 3t'.$

On doit avoir

$$3 + 9t = -42 + 11t'\quad \text{ou}\quad 9t - 11t' = -45.$$

Cette équation donne

$$t = -5 + 11\theta;\quad t' = 9\theta.$$

En remplaçant, on trouve

$$x = 99\theta - 42;\quad y = -5 + 11\theta;\quad z = 1 + 27\theta.$$

y et z sont positifs si on a

$$\theta > \frac{5}{11};\quad \theta > -\frac{1}{27}.$$

On doit donc avoir $\theta \geqslant 1.$

En faisant $\theta = 1, 2, 3,\ldots$ dans $x = 99\theta - 42$, on trouve les valeurs cherchées de x.

2° $\frac{x-1}{5}$, $\frac{2x-1}{7}$ et $\frac{4x-1}{9}$.

L'équation $\frac{x-1}{5} = y$ ou $x - 5y = 1$

donne $x = 1 + 5t$; $y = t$.

L'équation $\frac{2x-1}{7} = z$ devient $\frac{10t+1}{7} = z$

ou $$7z - 10t = 1.$$

Elle donne $z = 3 + 10t'$; $t = 2 + 7t'$.

L'équation $\frac{4x-1}{9} = u$ devient $\frac{20t+3}{9} = u$

ou $$9u - 20t = 3.$$

Elle donne $u = 7 + 20t''$; $t = 3 + 9t''$.

On doit avoir

$$2 + 7t' = 3 + 9t'' \quad \text{ou} \quad 7t' - 9t'' = 1.$$

D'où $$t' = 4 + 9\theta; \quad t'' = 3 + 7\theta.$$

En remplaçant, on trouve

$$t = 63\theta + 30; \quad x = 315\theta + 151; \quad y = 63\theta + 30;$$
$$z = 90\theta + 43; \quad u = 140\theta + 67.$$

y, z et u sont positifs si on a $\theta \geqslant 0$.

En faisant $\theta = 0, 1, 2,\ldots$ dans $x = 315\theta + 151$, on trouvera les valeurs cherchées de x.

243. *Chercher trois nombres impairs consécutifs, divisibles respectivement par* 3, 5 *et* 7.

Soient $2n + 1 = 3x$; $2n + 3 = 5y$; $2n + 5 = 7z$.

La 1re relation donne $2n - 3x + 1 = 0$.

On en déduit $n = 1 + 3t$; $x = 1 + 2t$.

En remplaçant n dans la 2e relation, il vient

$$6t + 5 = 5y \quad \text{ou} \quad 5y - 6t = 5.$$

De cette équation, on déduit

$$y = 1 + 6t'; \quad t = 5t'; \quad n = 1 + 15t'.$$

En remplaçant dans la 3e relation, il vient

$$30t' + 7 = 7z \quad \text{ou} \quad 7z - 30t' = 7.$$

De cette équation, on déduit

$$z = 1 + 30t''; \quad t' = 7t''; \quad n = 105t'' + 1.$$

Rép. $210t'' + 3$; $210t'' + 5$; $210t'' + 7$.

244. *Chercher trois nombres entiers en progression arithmétique et divisibles respectivement par* 3, 7 *et* 10.

Soient $a = 3x$; $a + r = 7y$; $a + 2r = 10z$.

En remplaçant a par $3x$ dans la 2^e relation, il vient

$$3x + r = 7y \quad \text{ou} \quad 3x - 7y + r = 0.$$

Cette équation donne

$$x = 2r + 7t; \quad y = r + 3t; \quad a = 6r + 21t.$$

En remplaçant a par sa valeur dans la 3^e relation, il vient

$$21t + 8r = 10z \quad \text{ou} \quad 10z - 21t - 8r = 0.$$

Cette équation donne

$$t = 2r + 10t'; \quad z = 5r + 21t'; \quad a = 210t' + 48r.$$

Rép. $210t' + 48r$; $210t' + 49r$; $210t' + 50r$.

245. *Trouver le plus petit terme positif commun aux progressions arithmétiques :*

$$1, 7, 13,\ldots; \quad 2, 13, 24,\ldots; \quad 3, 19, 35,\ldots$$

Désignons par N un terme commun aux trois progressions.

On a $$N = 1 + 6x = 2 + 11y = 3 + 16z.$$

L'équation $1 + 6x = 2 + 11y$ ou $6x - 11y = 1$

donne $$x = 2 + 11t; \quad y = 1 + 6t.$$

En remplaçant, N devient

$$N = 66t + 13.$$

L'équation $66t + 13 = 3 + 16z$ ou $16z - 66t = 10$

peut s'écrire $$8z - 33t = 5.$$

Elle donne $$z = 13 + 33t'; \quad t = 3 + 8t'.$$

L'expression générale des nombres N sera

$$N = 528t' + 211.$$

La plus petite valeur positive de N est 211; c'est le 36^e terme de la 1re progression, le 20^e de la 2^e et le 14^e de la 3^e.

246. *Comment peut-on payer une somme de* 1000 *fr. avec des billets de* 20 *fr. et de* 50 *fr.?*

Soient x le nombre des billets de 20 fr. et y le nombre des billets de 50 fr. On a l'équation

$$20x + 50y = 1000 \quad \text{ou} \quad 2x + 5y = 100.$$

Posons $x = 5x'$, $y = 2y'$. L'équation devient

$$x' + y' = 10.$$

On trouve $x' = 0$, $y' = 10$; $x = 0$, $y = 20$;

et, en général,

$$x = 5t; \quad y = 20 - 2t.$$

x et y doivent être non négatifs, ce qui exige

$$0 \leqslant t \leqslant 10.$$

Pour $t = 1$, par exemple, on trouve

$$x = 5; \quad y = 18.$$

247. *Un nombre est composé de trois chiffres dont la somme est* 14. *Trouver ce nombre, sachant qu'en y ajoutant* 99, *on obtient le nombre renversé.*

Soient x le chiffre des centaines et y celui des dizaines. On a

$$100x + 10y + (14 - x - y) + 99 = 100(14 - x - y) + 10y + x$$

ou

$$2x + y = 13.$$

Cette équation donne

$$x = 1 + t; \quad y = 11 - 2t.$$

Les inéquations

$$0 < 1 + t < 10 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant 11 - 2t < 10$$

donnent

$$1 \leqslant t \leqslant 5.$$

Rép. 293, 374, 455, 536, 617.

248. *Comment peut-on payer* 1500 *fr. b. avec des fr. fr. et des R. M., si au cours du change* 1 fr. fr. = 1,41 fr. b.; 1 R. M. = 8,56 fr. b.?

Prenons x fr. fr. et y R. M. On a l'équation

$$1{,}41x + 8{,}56y = 1500 \quad \text{ou} \quad 141x + 856y = 150\,000.$$

Posons $x = 8x'$ et $y = 3y'$. L'équation devient

$$47x' + 107y' = 6250.$$

On en déduit

$$x' = \frac{6250 - 107y'}{47} = 133 - 2y' - \frac{1 + 13y'}{47}.$$

Posons $\dfrac{1 + 13y'}{47} = t$ ou $13y' - 47t + 1 = 0.$

Cette équation donne

$$y' = \frac{47t - 1}{13} = 3t + \frac{8t - 1}{13}$$

Nous aurons

$$t = 5; \quad y' = 18; \quad x' = 92; \quad x = 736; \quad y = 54;$$

et, en général, $x = 736 + 856\theta; \quad y = 54 - 141\theta.$

On doit prendre $\theta = 0.$

Rép. $x = 736; \quad y = 54.$

249. 1° *L'équation* $ax + by = c$, *dans laquelle* a, b, c *représentent des entiers positifs, ne peut avoir plus d'une solution entière non négative quand* c *est inférieur à* ab.

En effet, le quotient de c par ab à moins d'une unité par défaut est 0 et celui par excès est 1. L'équation admet donc 0 ou 1 solution entière non négative.

Voici d'ailleurs le raisonnement complet.

Soit $x = A$, $y = B$ une solution entière de l'équation. On a

$$x = A + bt; \quad y = B - at.$$

Ces solutions sont non négatives si on a

$$-\frac{A}{b} \leqslant t \leqslant \frac{B}{a} \quad \text{ou} \quad -\frac{A}{b} \leqslant t \leqslant -\frac{A}{b} + \frac{c}{ab}. \tag{1}$$

Soit $-\frac{A}{b} = M + d$, M étant le plus grand entier contenu dans $-\frac{A}{b}$.

Les inéquations (1) deviennent

$$M + d \leqslant t \leqslant M + \left(d + \frac{c}{ab}\right).$$

Si $d = 0$, l'équation admet une solution entière non négative, qui correspond à $t = M$.

Si $d > 0$ et $d + \frac{c}{ab} < 1$, l'équation n'admet aucune solution entière non négative.

Si $d > 0$ et $d + \frac{c}{ab} \geqslant 1$, l'équation admet une solution entière non négative, qui correspond à $t = M + 1$.

2° *La même équation admet* q + 1 *solutions entières non négatives quand* c = abq.

L'équation $ax + by = abq$ admet la solution entière

$$x = 0; \quad y = aq.$$

Toutes les solutions entières sont données par les formules

$$x = bt; \quad y = aq - at.$$

Elles sont non négatives si on a

$$0 \leqslant t \leqslant q.$$

On voit que t peut prendre $q + 1$ valeurs

$$0, 1, 2, 3, \ldots, q.$$

3° *Si* c = abq + r, *avec* 0 < r < ab, *la même équation admet* q *ou* q + 1 *solutions entières non négatives, suivant que l'équation* ax + by = r *n'en admet pas ou en admet une.*

a) Si $x = A$, $y = B$ est une solution entière de $ax + by = r$, et si on pose $-\frac{A}{b} = M + d$, M étant le plus grand entier contenu dans $-\frac{A}{b}$, l'équation $ax + by = r$ admet une solution entière non négative quand $d = 0$ ou quand $d > 0$ et $d + \frac{r}{ab} \geqslant 1$; elle n'en admet aucune quand $d > 0$ et $d + \frac{r}{ab} < 1$ (Voir 1°).

b) L'équation $ax + by = abq + r$ est vérifiée par

$$x = \mathrm{A};\ y = \mathrm{B} + aq.$$

Toutes ses solutions entières sont données par les formules

$$x = \mathrm{A} + bt;\quad y = \mathrm{B} + aq - at.$$

Elles sont non négatives si on a

$$-\frac{\mathrm{A}}{b} \leqslant t \leqslant \frac{\mathrm{B}}{a} + q \quad \text{ou} \quad \mathrm{M} + d \leqslant t \leqslant \mathrm{M} + q + \left(d + \frac{r}{ab}\right).$$

Si $d = 0$, l'équation admet $q + 1$ solutions entières non négatives qui correspondent à $t = \mathrm{M},\ \mathrm{M} + 1, \ldots, \mathrm{M} + q$.

Si $d > 0$ et $d + \frac{r}{ab} < 1$, l'équation admet q solutions entières non négatives qui correspondent à $t = \mathrm{M} + 1,\ \mathrm{M} + 2, \ldots, \mathrm{M} + q$.

Si $d > 0$ et $d + \frac{r}{ab} \geqslant 1$, l'équation admet $q + 1$ solutions entières non négatives qui correspondent à

$$t = \mathrm{M} + 1, \mathrm{M} + 2, \ldots, \mathrm{M} + q + 1.$$

c) On voit que dans tous les cas le nombre des solutions entières non négatives de l'équation $ax + by = abq + r$ dépasse de q le nombre des solutions entières non négatives de l'équation $ax + by = r$.

250. *Déterminer* c *pour que l'équation* 17x + y = c *admette* 10 *solutions entières non négatives.*

L'équation est vérifiée par $x = 0$, $y = c$ et on a, en général,

$$x = t;\quad y = c - 17t.$$

Ces solutions sont non négatives si on a

$$0 \leqslant t \leqslant \frac{c}{17}.$$

La plus petite valeur acceptable de t est 0; la plus grande est donc 9 et on doit avoir

$$9 \leqslant \frac{c}{17} < 10 \quad \text{ou} \quad 153 \leqslant c < 170.$$

251. *Déterminer les valeurs de* c, *divisibles par* 13 *ou par* 11, *auxquelles correspondent* 5 *solutions entières non négatives de l'équation* 11x + 13y = c.

Les solutions entières de l'équation sont données par les formules

$$x = -7c + 13t;\quad y = 6c - 11t.$$

Ces solutions sont non négatives si on a

$$\frac{7c}{13} \leqslant t \leqslant \frac{6c}{11}.$$

a) Si c est un multiple de 13, on peut poser $c = 13k$, le nombre k étant entier. Les relations précédentes deviennent

$$7k \leqslant t \leqslant 7k + \frac{k}{11}.$$

Si l'équation admet cinq solutions non négatives, les valeurs de t sont

$$7k, \quad 7k+1, \quad 7k+2, \quad 7k+3, \quad 7k+4$$

et on doit avoir

$$7k + 4 \leqslant 7k + \frac{k}{11} < 7k + 5.$$

De ce système, on déduit que les valeurs de k sont

$$44, 45, 46, \ldots\ldots, 54;$$

les valeurs correspondantes de c sont

$$572, 585, 598, \ldots\ldots, 702.$$

b) Si c est un multiple de 11, remplaçons c par $11k'$ dans les relations

$$\frac{7c}{13} \leqslant t \leqslant \frac{6c}{11}.$$

Elles deviennent $$\frac{77k'}{13} \leqslant t \leqslant 6k'.$$

Si l'équation admet cinq solutions non négatives, les valeurs de t sont

$$6k', \quad 6k'-1, \quad 6k'-2, \quad 6k'-2, \quad 6k'-8, \quad 6k'-4$$

et on doit avoir

$$6k' - 5 < \frac{77k'}{13} \leqslant 6k' - 4.$$

De ce système, on déduit que les valeurs de k' sont

$$52, 53, 54, \ldots\ldots, 64;$$

les valeurs correspondantes de c sont

$$572, 583, 594, \ldots\ldots, 704.$$

252. *Déterminer* c *pour que l'équation* 11x + 7y = c *admette* 4 *solutions entières non négatives.*

Supposons que l'on ait

$$c = 77q + r \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant r < 77.$$

Toutes les solutions entières de l'équation $11x + 7y = 77q + r$ sont données par les formules

$$x = 2r + 7q - 7t; \quad y = -3r + 11t.$$

Elles sont non négatives si on a

$$\frac{3r}{11} \leqslant t \leqslant \frac{2r}{7} + q \quad \text{ou} \quad \frac{3r}{11} \leqslant t \leqslant \frac{3r}{11} + \left(q + \frac{r}{77}\right).$$

Comme $0 \leqslant \frac{r}{77} < 1$, les relations précédentes montrent que l'équation admet q ou $q+1$ solutions non négatives. Elle en admet q lorsque $3r$ n'est pas divisible par 11 et que le onzième du reste de cette division augmenté de $\frac{r}{77}$ donne une somme inférieure à 1; elle en admet $q+1$ dans tous les autres cas.

On remarque que les onzièmes des restes de la division de $3r$ par 11 pour

$$r = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10$$

sont

$$0 \quad \frac{3}{11} \quad \frac{6}{11} \quad \frac{9}{11} \quad \frac{1}{11} \quad \frac{4}{11} \quad \frac{7}{11} \quad \frac{10}{11} \quad \frac{2}{11} \quad \frac{5}{11} \quad \frac{8}{11};$$

en prenant ensuite $r = 11, 12, 13, \ldots, 76$, les mêmes résultats se reproduisent périodiquement.

Cette remarque faite, on peut former facilement le tableau suivant, dans lequel on a imprimé **en gras** les valeurs de r auxquelles correspondent $q+1$ solutions non négatives, et en caractères maigres, celles auxquelles il en correspond q.

0	1	2	3	4	5	6	**7**	8	9	10
11	12	13	**14**	15	16	17	**18**	19	20	**21**
22	23	24	**25**	26	27	**28**	**29**	30	31	**32**
33	34	**35**	**36**	37	38	**39**	**40**	41	**42**	**43**
44	45	**46**	**47**	48	**49**	**50**	**51**	52	**53**	**54**
55	**56**	**57**	**58**	59	**60**	**61**	**62**	**63**	**64**	**65**
66	**67**	**68**	**69**	**70**	**71**	**72**	**73**	**74**	**75**	**76.**

Quand l'équation admet $q+1$ solutions non négatives, on prend $q = 3$. On trouve ainsi que c peut être égal à

$$231,\ 238,\ 242,\ 245,\ 249, \ldots\ldots, 307.$$

Quand l'équation admet q solutions non négatives, on prend $q = 4$. On trouve ainsi que c peut être égal à

$$309,\ 310,\ 311,\ 312,\ 313,\ 314,\ 316, \ldots\ldots, 367.$$

253. *Trouver une somme que l'on peut payer de* 6 *manières différentes avec des pièces de* 2 *et de* 5 *francs.*

Prenons x pièces de 2 francs et y pièces de 5 francs pour payer une somme de S francs. On a l'équation

$$2x + 5y = S.$$

Supposons qu'on ait

$$S = 10q + r \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant r < 10.$$

Toutes les solutions entières de l'équation $2x + 5y = 10q + r$ sont données par les formules

$$x = -2r + 5t; \quad y = r + 2q - 2t.$$

Elles sont non négatives si on a

$$\frac{2r}{5} \leqslant t \leqslant \frac{r}{2} + q \quad \text{ou} \quad \frac{2r}{5} \leqslant t \leqslant \frac{2r}{5} + \left(q + \frac{r}{10}\right).$$

Comme $0 \leqslant \frac{r}{10} < 1$, les relations précédentes montrent que l'équation admet q ou $q + 1$ solutions non négatives. Elle en admet q lorsque $2r$ n'est pas divisible par 5 et que le cinquième du reste de cette division augmenté de $\frac{r}{10}$ donne une somme inférieure à 1; elle en admet $q + 1$ dans tous les autres cas.

Dans le tableau suivant, on a imprimé **en gras** les valeurs de r auxquelles correspondent $q + 1$ solutions non négatives, et en caractères maigres celles auxquelles il en correspond q.

0	1	**2**	3	**4**
5	**6**	**7**	**8**	**9**

Quand l'équation admet $q + 1$ solutions non négatives, on prend $q = 5$. On trouve ainsi que S peut être égal à

50, 52, 54, 55, 56, 57, 58, 59.

Quand l'équation admet q solutions non négatives, on prend $q = 6$. On trouve ainsi que S peut encore être égal à

61 et 63.

254. *Trouver* n *nombres entiers et positifs en progression arithmétique, sachant que leur somme est* n².

Soient a le premier terme et r la raison de la progression. On a l'équation

$$[a + a + (n-1)r] \times \frac{n}{2} = n^2 \quad \text{ou} \quad 2a + (n-1)r = 2n.$$

1° *Si* n = 1, on a $a = n = 1$.

2° *Si* n *est impair et supérieur à* 1, on peut poser $n - 1 = 2n'$, le nombre n' étant entier. L'équation devient

$$a + n'r = 2n' + 1.$$

Toutes les solutions entières de cette équation sont données par les formules

$$a = 2n' + 1 - n't; \quad r = t.$$

Elles sont non négatives, si on a

$$0 \leqslant t \leqslant 2 + \frac{1}{n'}.$$

a) Si $n' > 1$ ou $n > 3$, on peut prendre t égal à 0, 1, 2.

Pour $t = 0$, on a $r = 0$ et $a = 2n' + 1 = n$.

Dans ce cas particulier, la progression est formée de a nombres égaux à a, dont la somme est évidemment a^2.

Pour $t = 1$, on a $r = 1$ et $a = n' + 1 = \dfrac{n+1}{2}$.
Pour $t = 2$, on a $r = 2$ et $a = 1$.

Le nombre n reste indéterminé. On voit ainsi que la somme des n premiers nombres impairs est égal à n^2, quand n est impair et supérieur à 3.

b) Si $n' = 1$ ou $n = 3$, on peut prendre t égal à 0, 1, 2, 3. A ces valeurs correspondent respectivement les progressions :

$$3, 3, 3;\quad 2, 3, 4;\quad 1, 3, 5;\quad 0, 3, 6.$$

3° *Si* n *est pair*, $n - 1$ est impair et les coefficients de a et de r sont premiers entre eux.

L'équation est vérifiée par $a = n$, $r = 0$. Toutes ses solutions entières sont données par les formules

$$a = n - (n - 1)t;\quad r = 2t.$$

Elles sont non négatives si l'on a

$$0 \leqslant t \leqslant \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}.$$

a) Si $n > 2$, on peut prendre t égal à 0 ou 1.
Pour $t = 0$, on trouve $r = 0$ et $a = n$.
Pour $t = 1$, on trouve $r = 2$ et $a = 1$.

Le nombre n reste indéterminé. On voit ainsi que la somme des n premiers nombres impairs est encore égal à n^2, quand n est pair et supérieur à 2.

b) Si $n = 2$, on peut prendre t égal à 0, 1, 2. A ces valeurs de t correspondent respectivement les progressions :

$$2, 2;\quad 1, 3;\quad 0, 4.$$

N. B. Dans les équations suivantes, a *représente un nombre entier.*

255. *Montrer que l'équation*

$$(a^2 + a + 1)x - (a + 1)y = a$$

admet une infinité de solutions entières non négatives ou n'en admet aucune.

Nous supposons a différent de -1 et de 0. Les coefficients des inconnues sont premiers entre eux, car s'ils admettaient un diviseur commun, celui-ci devrait diviser

$$(a + 1)^2 - (a^2 + a + 1) = a;$$

ce qui est impossible, a et $a + 1$ étant premiers entre eux.

L'équation donne

$$y = \frac{(a^2 + a + 1)x - a}{a + 1} = (a + 1)x - \frac{ax + a}{a + 1}.$$

L'équation est vérifiée par $x = a$; $y = a^2$. Toutes ses solutions entières sont données par les formules

$$x = a + (a + 1)t; \quad y = a^2 + (a^2 + a + 1)t.$$

a) Si $a \geqslant 1$, les coefficients de x et de y ont des signes contraires et l'équation admet une infinité de solutions entières non négatives.

b) Si $a < -1$, les coefficients de x et de y sont positifs, tandis que le terme indépendant est négatif. L'équation n'admet donc aucune solution entière non négative.

256. *Montrer que l'équation*

$$(2a + 7)x + (2a^2 + 9a + 5)y = 2a^3 + 9a^2 + 5a + 2,$$

dans laquelle a *est un entier positif, admet toujours une seule solution entière non négative.*

Les coefficients des inconnues sont positifs pour les valeurs considérées de a. De plus, ils sont premiers entre eux, car en cherchant leur p. g. c. d. par la méthode des divisions successives, on trouve qu'il est 1.

L'équation donne

$$x = \frac{2a^3 + 9a^2 + 5a + 2 - (2a^2 + 9a + 5)y}{2a + 7}$$
$$= a^2 + a - (a + 1)y + \frac{2(1 - a + y)}{2a + 7}.$$

L'équation est vérifiée pour $y = a - 1$, $x = a + 1$. Toutes les solutions entières sont données par les formules

$$x = a + 1 + (2a^2 + 9a + 5)t; \quad y = a - 1 - (2a + 7)t.$$

Elles sont non négatives, si on a

$$-\frac{a + 1}{2a^2 + 9a + 5} \leqslant t \leqslant \frac{a - 1}{2a + 7}.$$

La fraction $-\dfrac{a + 1}{2a^2 + 9a + 5}$ est négative, car $a > 0$; on vérifierait aisément qu'elle est supérieure à -1.

La fraction $\dfrac{a - 1}{2a + 7}$ est nulle pour $a = 1$; elle est positive et inférieure à 1 pour les autres valeurs positives de a.

La seule valeur acceptable de t est donc $t = 0$. La solution non négative correspondante est

$$x = a + 1; \quad y = a - 1.$$

257. *Montrer que l'équation*

$$(a + 1)x + ay = 4a^2 + 2a - 1$$

admet trois solutions entières non négatives ou n'en admet aucune.

En supposant a différent de 0 et de -1, les coefficients des inconnues sont différents de zéro et premiers entre eux.

L'équation donne
$$y = \frac{4a^2 + 2a - 1 - (a + 1)x}{a} = 4a + 2 - x - \frac{x + 1}{a}.$$
Elle est vérifiée par $x = -1$, $y = 4a + 3$. Toutes les solutions entières sont données par les formules
$$x = -1 + at; \quad y = 4a + 3 - (a + 1)t.$$
1° Si $a < -1$, les coefficients des inconnues sont négatifs et le terme indépendant est positif. L'équation n'admet donc aucune solution non négative.

2° Si $a > 0$, les trois coefficients sont positifs. Montrons que l'équation admet alors trois solutions non négatives.

En effet, les valeurs des inconnues sont non négatives, si on a
$$\frac{1}{a} \leqslant t \leqslant \frac{4a + 3}{a + 1}. \tag{1}$$
Si $a > 1$, on a $\frac{1}{a} < 1$, et les relations (1) peuvent s'écrire
$$0 < t \leqslant 3 + \frac{a}{a + 1}.$$
On voit que t peut prendre les valeurs 1, 2, 3. On aboutit à la même conclusion quand $a = 1$.

258. *Résoudre en nombres entiers les équations :*

1° $(a^2 + 2a - 1)x + (a + 2)y = a^3 + 2a^2 - 2a - 1$;

2° $(a^2 + 3a + 1)x + (a + 1)y = 2a^3 + 5a^2 + 3a$;

puis, chercher combien de solutions non négatives elles admettent.

1° $(a^2 + 2a - 1)x + (a + 2)y = a^3 + 2a^2 - 2a - 1$.

Nous supposons $a \neq -2$. Les coefficients des inconnues sont alors différents de zéro. De plus, ils sont premiers entre eux; car, en cherchant leur p. g. c. d. par la méthode des divisions successives, on trouve qu'il est 1.

a) L'équation donne
$$y = \frac{a^3 + 2a^2 - 2a - 1 - (a^2 + 2a - 1)x}{a + 2}$$
$$= a^2 - 2 - ax + \frac{x + 3}{a + 2}.$$
L'équation est vérifiée par $x = -3$, $y = a^2 + 3a - 2$. Toutes les solutions entières sont données par les formules
$$x = -3 + (a + 2)t; \quad y = a^2 + 3a - 2 - (a^2 + 2a - 1)t.$$
b) Étudions les signes des trois coefficients.

Le coefficient de x a pour racines $-1 \pm \sqrt{2}$, ou approximativement $-2{,}414$ et $0{,}414$. Il est positif quand $a \leqslant -3$ et quand $a \geqslant 1$. Il est négatif quand a est égal à -1 ou 0.

Le coefficient de y est positif pour $a \geqslant -1$ et négatif pour $a \leqslant -3$.

Le terme indépendant peut s'écrire

$$(a-1)(a^2+3a+1).$$

Ses racines sont $\dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$, ou environ $-2{,}618$ et $-0{,}382$, et 1. Il est positif pour $a \geqslant 2$ et pour $a = -1$; il est négatif pour $a \leqslant -3$ et pour $a = 0$.

On peut ainsi former le tableau suivant :

a	coeff. de x	coeff. de y	terme indép.	CONCLUSIONS
	+	—	—	Une infinité de solutions entières non négatives.
-3	+	—	—	
-1	—	+	+	
0	—	+	—	
1	+	+	0	une sol. non nég. $x=y=0$
2	+	+	+	Un nombre limité de sol. entières non négatives.
	+	+	+	

c) Supposons $a \geqslant 2$. Les solutions sont non négatives si on a

$$\frac{3}{a+2} \leqslant t \leqslant \frac{a^2+3a-2}{a^2+2a-1} = 1 + \frac{a-1}{a^2+2a-1}.$$

Les fractions $\dfrac{3}{a+2}$ et $\dfrac{a-1}{a^2+2a-1}$ sont positives et inférieures à 1 pour $a \geqslant 2$. La seule valeur acceptable de t est donc $t = 1$, à laquelle correspond la solution

$$x = a-1; \quad y = a-1.$$

2° $(a^2+3a+1)x + (a+1)y = 2a^3+5a^2+3a$.

a) Supposons $a \neq -1$. Les coefficients des inconnues sont alors différents de zéro et premiers entre eux.

Posons $x = (a+1)x'$. L'équation devient

$$(a^2+3a+1)x' + y = 2a^2+3a.$$

On a $x' = 0; \quad x = 0; \quad y = 2a^2+3a;$

et les solutions générales sont

$$(x = a+1)t; \quad y = 2a^2+3a-(a^2+3a+1)t.$$

b) Étudions les signes des trois coefficients.

Le coefficient de x a pour racines $\dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$, ou environ $-2{,}618$ et $-0{,}382$. Il est positif pour $a \leqslant -3$ et pour $a \geqslant 0$; il est négatif pour $a = -2$.

Le coefficient de y est positif pour $a \geqslant 0$, et négatif pour $a \leqslant -2$.

Le terme indépendant peut s'écrire $a(a+1)(2a+3)$. Il est positif pour $a \geqslant 1$, et négatif pour $a \leqslant -2$.

On peut ainsi former le tableau suivant :

a	coeff. de x	coeff. de y	terme indép.	Conclusions
	+	—	—	une infinité de solutions entières non négatives
-3	+	—	—	
-2	—	—	—	nombre limité de sol.
0	+	+	0	$x = y = 0$
	+	+	+	nombre limité de sol.

c) Pour $a = -2$, l'équation devient $x + y = 2$. Ses solutions générales sont

$$x = 1 - t; \quad y = 1 + t.$$

Elles sont non négatives pour $t = -1$, 0 ou 1.

d) Supposons $a > 0$. Les solutions sont non négatives si on a

$$0 \leqslant t \leqslant \frac{2a^2 + 3a}{a^2 + 3a + 1} = 1 + \frac{a^2 - 1}{a^2 + 3a + 1}.$$

La fraction $\dfrac{a^2 - 1}{a^2 + 3a + 1}$ est nulle pour $a = 1$. Elle est positive et inférieure à 1 pour $a \geqslant 1$.

Les solutions sont donc non négatives pour $t = 0$ ou 1.

259. *Résoudre en nombres entiers l'équation*

$$(a^3 + a - 1)x + (a^4 - a)y = (a^4 + 2a)(a^3 - 1);$$

puis, déterminer a *pour que l'équation admette deux solutions entières non négatives.*

En construisant le graphique de la fonction $x = a^3 + a - 1$, on voit qu'elle n'a qu'une racine, comprise entre 0 et 1.

Le coefficient de y peut s'écrire $a(a-1)(a^2+a+1)$.

Les coefficients des inconnues sont donc différents de zéro, si l'on suppose a différent de 0 et de 1.

Ces mêmes coefficients sont d'ailleurs premiers entre eux, car si l'on cherche leur p. g. c. d. par la méthode des divisions successives, on trouve qu'il est 1.

L'équation peut s'écrire

$$(a^3+a-1)x + a(a^3-1)y = a(a^3-1)(a^3+2).$$

Posons $x = a(a^3-1)x'$. L'équation devient

$$(a^3+a-1)x' + y = a^3+2.$$

Prenons $x'=0;\quad x=0;\quad y=a^3+2.$

Les solutions générales sont

$$x=(a^4-a)t;\quad y=a^3+2-(a^3+a-1)t.$$

Si l'on suppose $a \leqslant -1$, les coefficients de x et de y ont des signes contraires et l'équation admet une infinité de solutions entières non négatives.

Supposons $a \geqslant 2$. Les trois coefficients sont alors positifs et les solutions sont non négatives, si on a

$$0 \leqslant t \leqslant \frac{a^3+2}{a^3+a-1}.$$

Pour que l'équation admette dans ce cas deux solutions non négatives, il faut et il suffit qu'on ait

$$1 \leqslant \frac{a^3+2}{a^3+a-1} < 2.$$

L'inégalité
$$\frac{a^3+2}{a^3+a-1} \geqslant 1$$
donne $a-3 \leqslant 0$ ou $a \leqslant 3$.

L'inégalité
$$\frac{a^3+2}{a^3+a-1} < 2$$
donne $a^3+2 < 2(a^3+a-1)$ ou $a^3+2a-4>0$.

Cette inégalité est toujours vraie, car on suppose $a \geqslant 2$.

En résumé, l'équation admet deux solutions entières non négatives pour $a = 2$ ou 3.

CHAPITRE XI

Limites.

260. *On donne :* 1° $\lim (2x + 5) = 1$, *pour* $x = -2$;
2° $\lim (9 - 4x) = 1$, *pour* $x = 2$;
3° $\lim (x^2 - x - 1) = 5$, *pour* $x = 3$;
4° $\lim \dfrac{x-1}{x+2} = 0$, *pour* $x = 1$.

On choisit $\varepsilon = 0{,}01$. *Trouver un nombre positif auquel il suffit que* h *soit inférieur en valeur absolue, pour qu'on ait chaque fois*

$$|f(a + h) - A| < \varepsilon.$$

1° Il suffit d'avoir

$$|[2(-2 + h) + 5] - 1| = |2h| < 0{,}01.$$

Cette inégalité est vérifiée quand on a $|h| < 0{,}005$.

2° Il suffit d'avoir

$$|[9 - 4(2 + h)] - 1| = |-4h| = 4|h| < 0{,}01.$$

Cette inégalité est vérifiée quand on a $|h| < 0{,}0025$.

3° Il suffit d'avoir

$$|[(3 + h)^2 - (3 + h) - 1] - 5| = |5h + h^2| < 0{,}01.$$

Cette inégalité est vérifiée si l'on a

$$5|h| + h^2 < 0{,}01, \quad \text{car} \quad |5h + h^2| \leqslant 5|h| + h^2.$$

Mais $|h|$ est plus grand que h^2, car $|h|$ est inférieur à 1. Il suffira donc d'avoir

$$6|h| < \frac{1}{100} \quad \text{ou} \quad |h| < \frac{1}{600}.$$

4° Il suffit d'avoir

$$\left|\frac{(1 + h) - 1}{(1 + h) + 2}\right| = \left|\frac{h}{h + 3}\right| < \frac{1}{100}.$$

L'inégalité

$$\left|\frac{h}{h + 3}\right| < \frac{1}{100}$$

peut s'écrire $\dfrac{|h|}{|h + 3|} < \dfrac{1}{100}$ ou $100|h| < |h + 3|$.

Cette inégalité est vérifiée si l'on a

$$100|h| < 3 - |h|, \quad \text{car} \quad |h + 3| \geqslant 3 - |h|.$$

Il suffit donc d'avoir

$$101|h| < 3 \quad \text{ou} \quad |h| < \frac{3}{101}.$$

261. *En appliquant la définition, montrer que l'on a :*

1° $\lim (ax + b) = b$, *quand* x *tend vers zéro.*

En effet, on a $|(ah + b) - b| = |ah| = |a| \times |h| < \varepsilon$,
dès qu'on a $|h| < \dfrac{\varepsilon}{|a|}$.

2° $\lim \sqrt{x - a} = 0$, *quand* x *tend vers* a *par valeurs décroissantes.*

En effet, la fonction $\sqrt{x-a}$ est définie dans l'intervalle $(a, +\infty)$; de plus, si h est un nombre positif, on a

$$\sqrt{(a+h) - a} = \sqrt{h} < \varepsilon,$$

dès qu'on a $h < \varepsilon^2$.

262. *En appliquant la définition, montrer que l'on a :*

1° $\lim \dfrac{1}{x^2} = +\infty$, *quand* x *tend vers zéro.*

En effet, cette fonction est définie et positive pour toutes les valeurs de x, sauf pour $x = 0$. De plus, on a

$$\frac{1}{(0+h)^2} > \mathrm{N} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{h^2} > \mathrm{N},$$

dès que l'on a $\quad h^2 < \dfrac{1}{\mathrm{N}} \quad$ ou $\quad |h| < \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}}$.

2° $\lim \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = \infty$, *pour* $x = 0$.

En effet, cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x, sauf pour $x = 0$. De plus, l'inégalité

$$\left|\frac{1}{\sqrt[3]{0+h}}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt[3]{h}}\right| > \mathrm{N}$$

sera vérifiée dès qu'on a

$$|\sqrt[3]{h}| < \frac{1}{\mathrm{N}} \quad \text{ou} \quad |h| < \frac{1}{\mathrm{N}^3}.$$

3° $\lim \dfrac{1}{\sqrt{-x}} = +\infty$, *quand* x *tend vers zéro par valeurs négatives.*

En effet, cette fonction est définie et positive dans l'intervalle $(-\infty, 0)$. De plus, si h est un nombre négatif, on a

$$\frac{1}{\sqrt{-(0+h)}} = \frac{1}{\sqrt{-h}} > \mathrm{N},$$

dès qu'on a $\quad \sqrt{-h} < \dfrac{1}{\mathrm{N}} \quad$ ou $\quad -h < \dfrac{1}{\mathrm{N}^2}$.

4° $\lim \dfrac{1}{-\sqrt{x}} = -\infty$, *quand* x *tend vers zéro par valeurs positives.*

La démonstration est analogue à la précédente.

263. *Pour* x *infini, on a*

$$1^\circ \lim \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0; \quad 2^\circ \lim \frac{x-2}{x+3} = 1.$$

On choisit $\varepsilon = 0{,}01$. *Trouver un nombre positif auquel il suffit que* x *reste supérieur en valeur absolue pour qu'on ait*

$$|\,f(x) - A\,| < \varepsilon.$$

1° L'inégalité $\quad \left|\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} - 0\right| = \dfrac{1}{|\sqrt[3]{x}|} < \dfrac{1}{100}$

sera vérifiée, dès qu'on a

$$|\sqrt[3]{x}| > 100 \quad \text{ou} \quad |\,x\,| > 1\,000\,000.$$

2° L'inégalité $\quad \left|\dfrac{x-2}{x+3} - 1\right| < \dfrac{1}{100} \quad$ ou $\quad \dfrac{5}{|\,x+3\,|} < \dfrac{1}{100}$

sera vérifiée, dès qu'on a

$$|\,x+3\,| > 500.$$

Mais on a $\;|\,x+3\,| \geqslant |\,x\,| - 3.$

Il suffira donc d'avoir

$$|\,x\,| - 3 > 500 \quad \text{ou} \quad |\,x\,| > 503.$$

264. *En appliquant les définitions, montrer que l'on a :*

1° $\lim \dfrac{1}{ax+b} = 0$, *pour* x *infini.*

En effet, cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x, sauf pour $x = -\dfrac{b}{a}$. De plus, l'inégalité

$$\left|\frac{1}{ax+b} - 0\right| = \frac{1}{|\,ax+b\,|} < \varepsilon$$

sera vérifiée, dès qu'on a

$$|\,ax+b\,| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Mais $\quad |\,ax+b\,| \geqslant |\,ax\,| - |\,b\,|.$

Il suffira donc d'avoir

$$|\,ax\,| - |\,b\,| > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{ou} \quad |\,x\,| > \frac{1 + |\,b\,|\,\varepsilon}{|\,a\,|\,\varepsilon}.$$

2° $\lim ax^3 = \infty$, *pour* x *infini.*

Cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x. De plus, l'inégalité $|ax^3| > N$ sera vérifiée, dès qu'on a

$$|x| > \sqrt[3]{\frac{N}{|a|}}.$$

3° $\lim \sqrt{x} = +\infty$, *quand* x *croît indéfiniment.*

En effet, cette fonction est définie et positive dans l'intervalle $(0, +\infty)$. De plus, en supposant x positif, on a

$$\sqrt{x} > N, \quad \text{dès que} \quad x > N^2.$$

4° $\lim \sqrt[3]{ax} = \infty$, *pour* x *infini.*

En effet, cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x. De plus, l'inégalité $|\sqrt[3]{ax}| > N$ sera vérifiée, dès qu'on a

$$|ax| > N^3 \quad \text{ou} \quad |x| > \frac{N^3}{|a|}.$$

265. *Trouver la limite des fractions rationnelles suivantes :*

1° $\lim \dfrac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2}$, *quand* x *tend vers* 0, *vers* 1, *ou vers l'infini.*

Désignons la fonction proposée par $F(x)$.

a) Le nombre zéro n'annule pas le dénominateur. On a donc

$$\lim F(x) = \frac{-2}{-2} = 1, \quad \text{pour} \quad x = 0.$$

b) Pour $x = 1$, la fonction prend la forme $\frac{0}{0}$. On a

$$\lim F(x) = \lim \frac{(x-1)(x^2+3x+2)}{(x-1)(x+2)} = \lim \frac{x^2+3x+2}{x+2}.$$

Le dénominateur de cette fraction ne s'annule plus pour $x = 1$. Donc

$$\lim F(x) = \frac{6}{3} = 2, \quad \text{pour} \quad x = 1.$$

c) Pour x infini, la fonction a comme limite l'infini, car le degré du numérateur est supérieur à celui du dénominateur.

Seulement quand x tend vers l'infini par valeurs négatives, le numérateur prend définitivement le signe de x^3, qui est le signe $-$; et le dénominateur prend définitivement le signe de x^2, qui est le signe $+$. On a donc

$$\lim F(x) = -\infty, \text{ pour } \quad x \to -\infty.$$

On montrerait de même qu'on a

$$\lim F(x) = +\infty, \quad \text{pour} \quad x \to +\infty.$$

2° $\lim \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 6x + 5}$, *quand* x *tend vers* 1, *vers* 5, *ou vers l'infini.*

a) Pour $x = 1$, la fonction prend la forme $\frac{0}{0}$. On a

$$\lim F(x) = \lim \frac{x^2 + x - 2}{x - 5} = \frac{0}{-4} = 0, \quad \text{pour} \quad x = 1.$$

b) Quand x tend vers 5, le numérateur tend vers 112 et le dénominateur vers zéro. On a donc

$$\lim F(x) = \infty, \quad \text{pour} \quad x = 5.$$

En étudiant le signe de la fraction $\frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 6x + 5}$, on voit que la fonction est négative quand x est compris entre 1 et 5; et qu'elle est positive pour $x > 5$. Par suite,

$$\lim F(x) = -\infty, \quad \text{quand } x \text{ tend vers 5 en croissant;}$$
$$\lim F(x) = +\infty, \quad \text{quand } x \text{ tend vers 5 en décroissant.}$$

c) On montre comme au 1° que

$$\lim F(x) = -\infty, \quad \text{pour} \quad x \to -\infty;$$
$$\lim F(x) = +\infty, \quad \text{pour} \quad x \to +\infty.$$

3° $\lim \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{3x^3 - 18x^2 + 36x - 24}$, *quand* x *tend vers* 2, *vers* — 1, *ou vers l'infini.*

Pour $x = 2$, la fonction prend la forme $\frac{0}{0}$ et on a

$$F(x) = \frac{(x-2)^2 (x+1)}{3(x-2)^3}.$$

Par suite, $\lim F(x) = \lim \frac{x+1}{3(x-2)} = \infty$,

en remarquant que le dénominateur seul de la dernière fonction s'annule pour $x = 2$.

On peut encore remarquer que la fonction $F(x)$ est négative pour $-1 < x < 2$; et qu'elle est positive pour $x > 2$. Par suite,

$$\lim F(x) = -\infty, \text{ quand } x \text{ tend vers 2 en croissant;}$$
$$\lim F(x) = +\infty, \text{ quand } x \text{ tend vers 2 en décroissant.}$$

b) Le nombre — 1 n'annule pas le dénominateur. Par suite,

$$\lim F(x) = \frac{0}{-81} = 0, \quad \text{pour} \quad x = -1.$$

c) On a $\lim F(x) = \frac{1}{3}$, pour x infini,

car le numérateur et le dénominateur sont de même degré.

4° $\lim \dfrac{8x^3 + 2x^2 - 5x + 1}{8x^3 + 10x^2 - 11x + 2}$ *quand* x *tend vers* $\frac{1}{2}$, *vers* 0, *ou vers l'infini.*

En remarquant que

$$F(x) = \frac{(2x - 1)(4x - 1)(x + 1)}{(2x - 1)(4x - 1)(x + 2)},$$

on trouve :

$$\lim F(x) = \frac{3}{5}, \quad \text{pour} \quad x = \frac{1}{2};$$

$$\lim F(x) = \frac{1}{2}, \quad \text{pour} \quad x = 0;$$

$$\lim F(x) = 1, \quad \text{pour} \quad x = \infty.$$

5° $\lim \dfrac{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{x^4 - 2x^3 + x^2}$ *quand* x *tend vers* 1, *vers* 0, *ou vers l'infini.*

En remarquant que

$$F(x) = \frac{(x - 1)^2 (x^2 + 1)}{(x - 1)^2 x^2},$$

on trouve :

$$\lim F(x) = 2, \quad \text{pour} \quad x = 1.$$
$$\lim F(x) = +\infty, \quad \text{pour} \quad x = 0.$$
$$\lim F(x) = 1, \quad \text{pour} \quad x = \infty.$$

6° $\lim \dfrac{x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8}{x^3 - 4x^2 + 4x}$ *quand* x *tend vers* 2, *vers* 0, *vers* 1, *ou vers l'infini.*

On remarque que $F(x) = \dfrac{(x + 1)(x - 2)^3}{x(x - 2)^2}$.

On trouve :

$$\lim F(x) = 0, \quad \text{pour} \quad x = 2;$$
$$\lim F(x) = -\infty, \text{ quand } \quad x \to 0 \text{ en décroissant};$$
$$\lim F(x) = +\infty, \quad \text{quand} \quad x \to 0 \text{ en croissant};$$
$$\lim F(x) = -2, \quad \text{pour} \quad x = 1;$$
$$\lim F(x) = -\infty, \quad \text{pour} \quad x = -\infty;$$
$$\lim F(x) = +\infty, \quad \text{pour} \quad x = +\infty.$$

265bis. *Trouver les limites des racines des équations*

$$(m^2 - m - 2)x = m + 1$$
$$(m^2 + m - 6)x = m^2 - m - 2$$

quand m *tend vers* — 1, *vers* 2 *ou vers l'infini.*

1° Si m est différent de -1 et de 2, la racine de la 1re équation est

$$x = \frac{m+1}{m^2 - m - 2} = \frac{m+1}{(m+1)(m-2)}.$$

a) Si m tend vers -1, on a

$$\lim x = \lim \frac{1}{m-2} = -\frac{1}{3}.$$

b) Si m tend vers 2, on a

$$\lim x = \infty;$$

car le numérateur tend vers 3 et le dénominateur vers zéro.

c) Pour m infini, on a $\lim x = 0$,
car le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur.

2° Si m est différent de 2 et de 3, la racine de la 2e équation est

$$x = \frac{m^2 - m - 2}{m^2 + m - 6} = \frac{(m+1)(m-2)}{(m-2)(m+3)}.$$

a) Si m tend vers -1, on a $\lim x = 0$.

En effet, le dénominateur de x ne s'annule pas pour $m = -1$. On obtient donc la limite de x en remplaçant m par -1.

b) Si m tend vers 2, on a

$$\lim x = \lim \frac{m+1}{m+3} = \frac{3}{5}.$$

c) Pour m infini, on a $\lim x = \frac{1}{1} = 1$, car le numérateur et le dénominateur sont du même degré en m.

266. *Trouver la vraie valeur des fractions suivantes pour* $x = 1$.

1° $\dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{x^{p+1} - x^p - x + 1}.$

On a $$F(x) = \frac{(x-1)^2 [nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \ldots + 2x + 1]}{(x-1)^2 (x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots\ldots + x + 1)}.$$

Il en résulte que si x tend vers 1, $F(x)$ a pour limite

$$\frac{n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1}{p} = \frac{n(n+1)}{2p}.$$

2° $\dfrac{x^{n+1} - (n+1)x^p + n}{px^{p+1} - (p+1)x + 1}.$

Le numérateur ordonné par rapport à x prend une forme différente, suivant que p est inférieur, égal ou supérieur à $n+1$.

1er cas : $p < n + 1$. — On a

$$F(x) = \frac{(x-1)(x^n + x^{n-1} + \ldots + x^p - nx^{p-1} - nx^{p-2} - \ldots - n)}{(x-1)(px^p + px^{p-1} + \ldots + px - 1)}.$$

En simplifiant, on obtient une fraction dont la valeur, pour $x = 1$, est

$$-\frac{(p-1)(n+1)}{(p-1)(p+1)}.$$

On voit que si $p \neq 1$, on a

$$\lim F(x) = -\frac{n+1}{p+1}, \quad \text{pour} \quad x = 1.$$

Dans le cas particulier, où $p = 1$, on a

$$F(x) = \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{x^2 - 2x + 1}$$
$$= \frac{(x-1)^2[x^{n-1} + 2x^{n-2} + \dots + (n-1)x + n]}{(x-1)^2}.$$

Par suite, $\lim F(x) = \frac{n(n+1)}{2}$, pour $x = 1$.

2e cas : $p = n + 1$. — On a

$$F(x) = \frac{-nx^{n+1} + n}{(n+1)x^{n+2} - (n+2)x + 1}$$
$$= \frac{-n(x-1)(x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1)}{(x-1)[(n+1)x^{n+1} + (n+1)x^n + \dots + (n+1)x - 1]}.$$

En simplifiant par $x - 1$, on obtient une fraction dont la valeur, pour $x = 1$, est

$$\frac{-n(n+1)}{(n+1)^2 - 1} = -\frac{n(n+1)}{n(n+2)}.$$

On voit que si $n \neq 0$, on a

$$\lim F(x) = -\frac{n+1}{n+2}, \quad \text{pour} \quad x = 1.$$

Dans le cas particulier, où $n = 0$, on a

$$F(x) = \frac{0}{x^2 - 2x + 1} \quad \text{et} \quad \lim F(x) = 0.$$

3e cas : $p > n + 1$. — On a

$$F(x) = \frac{-(n+1)x^p + x^{n+1} + n}{px^{p+1} - (p+1)x + 1}$$
$$= \frac{(x-1)[-(n+1)x^{p-1} - \dots - (n+1)x^{n+1} - nx^n - \dots - nx - n]}{(x-1)(px^p + px^{p-1} + \dots + px - 1)}.$$

En simplifiant par $x - 1$, on obtient une fraction dont la valeur, pour $x = 1$, est

$$-\frac{(n+1)(p-1)}{(p^2-1)}.$$

Comme $p > 1$, on a

$$\lim F(x) = -\frac{n+1}{p+1}, \quad \text{pour} \quad x = 1.$$

267. *Trouver la limite des expressions suivantes :*

1° *lim* $\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$, *pour* $x = 3$.

Cette fonction est définie dans l'intervalle $(-1, +\infty)$, sauf pour $x = 3$. Pour cette dernière valeur de x, la fonction prend la forme $\frac{0}{0}$. On a

$$F(x) = \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+2}$$

pour toutes les valeurs de x pour lesquelles $F(x)$ est définie. Dès lors

$$\lim F(x) = \lim \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{1}{4}.$$

2° *lim* $\dfrac{1+x-\sqrt{1+x}}{\sqrt{x+1}-1}$, *pour* $x = 0$.

Cette fonction est définie dans l'intervalle $(-1, +\infty)$, sauf pour $x = 0$. Pour cette valeur de x, elle prend la forme $\frac{0}{0}$. On a

$$F(x) = \frac{(1+x-\sqrt{1+x})(1+\sqrt{1+x})}{(x+1)-1} = \frac{x\sqrt{1+x}}{x},$$

pour toutes les valeurs de x pour lesquelles $F(x)$ est définie. Par suite,

$$\lim F(x) = \lim \sqrt{1+x} = 1.$$

3° *lim* $\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-2}}$, *pour* $x = 2$.

Cette fonction n'est définie que pour $x > 2$. Pour $x = 2$, elle prend la forme $\frac{0}{0}$. Nous ferons tendre x vers 2 par valeurs décroissantes. On a

$$F(x) = \frac{-(x-2)}{\sqrt{x-2}\,(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x})}.$$

Mais pour $x > 2$, on a $x - 2 = (\sqrt{x-2})^2$. Par suite,

$$\lim F(x) = \lim \frac{-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}} = \frac{0}{4} = 0.$$

On peut remarquer que $F(x)$ tend vers zéro par valeurs négatives.

4° *lim* $\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{4+x^2}-2}$ *pour* $x = 0$.

Cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x, sauf pour $x = 0$. Pour cette valeur de x, elle prend la forme $\frac{0}{0}$. On a

$$F(x) = \frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)(\sqrt{4+x^2}+2)}{(\sqrt{4+x^2}-2)(\sqrt{4+x^2}+2)(\sqrt{1+x^2}+1)}$$

$$= \frac{x^2(\sqrt{4+x^2}+2)}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}.$$

Par suite, $\lim F(x) = \lim \frac{\sqrt{4+x^2}+2}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{4}{2} = 2.$

5° *lim* $\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}$, *pour* $x = 1$.

Cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x, sauf pour $x = 1$. Pour cette dernière valeur de x, elle prend la forme $\frac{0}{0}$. On a

$$F(x) = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4)}.$$

Par suite, $\lim F(x) = \lim \frac{1}{\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4} = \frac{1}{12}.$

6° *lim* $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}-1}$, *pour* $x = -1$.

Cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x, sauf pour $x = -1$. Pour cette dernière valeur de x, elle prend la forme $\frac{0}{0}$. On a

$$F(x) = \frac{(x+1)(\sqrt{x^2+2x+2}+1)}{(x+1)^2}$$

pour toutes les valeurs de x pour lesquelles $F(x)$ est définie. Par suite,

$$\lim F(x) = \lim \frac{\sqrt{x^2+2x+2}+1}{x+1} = \infty.$$

On voit aisément que $F(x)$ a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$, suivant que x tend vers -1 par valeurs décroissantes ou par valeurs croissantes.

7° *lim* $\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2(x-1)}}{\sqrt{x-3}}$, *pour* $x = 3$.

On raisonne comme pour le 3° et on trouve

$$\lim F(x) = \lim \frac{-\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2(x-1)}} = 0.$$

8° *lim* $\dfrac{\sqrt[3]{x-3}+1}{x-2}$, *pour* $x = 2$.

En raisonnant comme pour le 5°, on trouve

$$\lim F(x) = \lim \frac{1}{\sqrt[3]{(x-3)^2}-\sqrt[3]{x-3}+1} = \frac{1}{3}.$$

9° *lim* $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$, *pour* $x = 1$.

Cette fonction est définie dans l'intervalle $(0, +\infty)$, sauf pour $x = 1$.

On a $$F(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[4]{x}+1)}{\sqrt{x}-1}.$$

Par suite, $$\lim F(x) = \lim (\sqrt[4]{x}+1) = 2.$$

10° *lim* $\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a}}$, *pour* $x = a$.

On doit avoir $a \geqslant 0$. Supposons d'abord $a > 0$. La fonction sera définie dans l'intervalle $(0, +\infty)$, sauf pour $x = a$. On a

$$F(x) = \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x-a} : \frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a}}{x-a}$$
$$= \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{a^2}} : \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{ax^2}+\sqrt[4]{a^2x}+\sqrt[4]{a^3}}.$$

Par suite,

$$\lim F(x) = \lim \frac{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{ax^2}+\sqrt[4]{a^2x}+\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{a^2}} = \frac{4\sqrt[4]{a^3}}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{4}{3}\sqrt[12]{a}.$$

Si $a = 0$, on a $F(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}} = \sqrt[12]{x}$.

Par suite, $\lim F(x) = 0$ pour $x = a = 0$.

11° *lim* $\left[\dfrac{x-1}{\sqrt{x^3-x^2-x+1}} - \dfrac{x-1}{\sqrt{x^3-x}}\right]$, *pour* $x = 1$.

On a $$F(x) = \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2(x+1)}} - \frac{x-1}{\sqrt{x(x^2-1)}}.$$

On voit ainsi que la fonction n'est définie que dans les intervalles $(-1, 0)$ et $(1, +\infty)$, les nombres -1, 0 et 1 étant exclus.

Nous devrons donc supposer que x tend vers 1 par valeurs supérieures à l'unité. On a alors $x - 1 = \sqrt{(x-1)^2}$. D'où

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x(x+1)}} \quad \text{et} \quad \lim F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

12° *lim* $\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x-1}}$, *pour* $x = 1$.

Cette fonction est définie dans l'intervalle $(-\frac{1}{3}, +\infty)$, sauf pour $x = 1$. Pour cette dernière valeur de x, elle prend la forme $\frac{0}{0}$. On a

$$F(x) = \frac{-2(x-1)}{\sqrt[3]{(x-1)}\,(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1})}.$$

On a $x - 1 = (\sqrt[3]{x-1})^3$. En simplifiant par $\sqrt[3]{x-1}$, on trouve

$$F(x) = \frac{-2\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}}. \quad \text{et} \quad \lim F(x) = \frac{0}{4} = 0.$$

On peut remarquer que $F(x)$ tend vers zéro par valeurs négatives.

268. *Trouver la limite des expressions suivantes :*

1° *lim* $\dfrac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}$, *pour* $x = 0$.

a) Supposons $a > 0$. La fonction sera définie dans l'intervalle $(-a, a)$; toutefois pour $x = 0$, elle prend la forme $\frac{0}{0}$, car $\sqrt{a^2} = a$. On a

$$F(x) = \frac{(a-\sqrt{a^2-x^2})\,(a+\sqrt{a^2-x^2})}{x(a+\sqrt{a^2-x^2})} = \frac{x^2}{x(a+\sqrt{a^2-x^2})}.$$

Par suite, $\lim F(x) = \lim \dfrac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}} = \dfrac{0}{2a} = 0.$

b) Supposons $a < 0$. La fonction sera définie dans l'intervalle $(a, -a)$, sauf pour $x = 0$. Pour cette dernière valeur de x, le dénominateur est nul, et le numérateur vaut $2a$, car on a $\sqrt{a^2} = -a$.

Quand x tend vers zéro, le numérateur tend vers $2a$ et le dénominateur vers zéro. Par suite,

$$\lim F(x) = \infty.$$

c) Si l'on supposait $a = 0$, la fonction ne serait définie pour aucune valeur de x.

2° *lim* $\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}-a}{\sqrt{b^2+x^2}-b}$, *pour* $x = 0$.

Considérons le numérateur. Si $a < 0$, il représente un nombre positif; au contraire, si $a \geqslant 0$, il s'annule pour $x = 0$.

On peut faire des observations analogues au sujet du dénominateur. Nous aurons donc plusieurs cas à distinguer.

1^er^ cas : $a > 0$; $b > 0$. — La fonction est définie pour toutes les valeurs de x, sauf pour $x = 0$, qui annule le numérateur et le dénominateur. On a

$$F(x) = \frac{(\sqrt{a^2+x^2}-a)(\sqrt{a^2+x^2}+a)(\sqrt{b^2+x^2}+b)}{(\sqrt{b^2+x^2}-b)(\sqrt{b^2+x^2}+b)(\sqrt{a^2+x^2}+a)} = \frac{x^2(\sqrt{b^2+x^2}+b)}{x^2(\sqrt{a^2+x^2}+a)}$$

Par suite, $$\lim F(x) = \lim \frac{\sqrt{b^2+x^2}+b}{\sqrt{a^2+x^2}+a},$$

et, en remarquant que $\sqrt{a^2} = a$, $\sqrt{b^2} = b$.

$$\lim F(x) = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a}.$$

2^e^ cas : $a > 0$; $b < 0$. — La fonction est définie pour toutes les valeurs de x.

En particulier, pour $x = 0$, le numérateur est égal à 0, car $\sqrt{a^2} = a$; et le dénominateur est égal à $-2b$, car $\sqrt{b^2} = -b$. On a

$$\lim F(x) = \frac{0}{-2b} = 0.$$

3^e^ cas : $a < 0$; $b > 0$. — La fonction est définie pour toutes les valeurs de x, sauf pour $x = 0$. Pour cette dernière valeur de x, le numérateur est égal à $-2a$, car $\sqrt{a^2} = -a$; et le dénominateur est égal à 0, car $\sqrt{b^2} = b$. On a

$$\lim F(x) = \infty.$$

4^e^ cas : $a < 0$; $b < 0$. — La fonction est définie pour toutes les valeurs de x.

En particulier, pour $x = 0$, le numérateur est égal à $-2a$ et le dénominateur à $-2b$. On a

$$\lim F(x) = \frac{-2a}{-2b} = \frac{a}{b}.$$

Il nous reste à examiner *les cas particuliers*; on raisonne comme pour les cas généraux qui précèdent, mais en distinguant chaque fois deux cas, suivant que x tend vers zéro par valeurs positives ou par valeurs négatives.

On trouve ainsi :

a) $a = 0$; $b > 0$. — $\lim F(x) = +\infty$.
b) $a > 0$; $b = 0$. — $\lim F(x) = 0$.

Pour ces deux premiers cas particuliers, on raisonne comme pour le premier cas général.

c) $a = 0$; $b < 0$. — $\lim F(x) = 0$.

Pour ce 3^e^ cas particulier, on raisonne comme pour le 2^e^ cas général.

d) $a < 0$; $b = 0$. — $\lim F(x) = +\infty$.

Pour ce 4^e^ cas particulier, on raisonne comme pour le 3^e^ cas général.

e) $a = b = 0$. — On a

$$F(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2}} \quad \text{et} \quad \lim F(x) = 1, \text{ pour } x = 0.$$

3° *lim* $\dfrac{\sqrt{x^2 - ax} + \sqrt{x^2 - a^2}}{\sqrt{x^2 - a^2} + x^3 - ax^2}$, *pour* $x = a$.

a) *Supposons* $a > 0$. — La fonction sera définie dans les intervalles $(-\infty, -a)$ et $(a, +\infty)$, sauf pour les racines du dénominateur. Pour $x = a$, la fonction prend la forme $\frac{0}{0}$.

Comme la fonction n'est pas définie dans l'intervalle $(-a, a)$, nous devrons faire tendre x vers a par valeurs décroissantes. On aura $x - a > 0$ et $x - a = \sqrt{(x-a)^2}$. Par suite,

$$F(x) = \frac{\sqrt{x^2 - ax} + \sqrt{x^2 - a^2}}{\sqrt{x^2 - a^2} + x^2(x - a)} = \frac{\sqrt{x - a}\,(\sqrt{x} + \sqrt{x + a})}{\sqrt{x - a}\,(\sqrt{x + a} + x^2\sqrt{x - a})}.$$

$$\text{et } \lim F(x) = \lim \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x + a}}{\sqrt{x + a} + x^2\sqrt{x - a}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{2a}}{\sqrt{2a}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}.$$

b) *Supposons* $a < 0$. — La fonction sera définie dans les intervalles $(-\infty, a)$ et $(-a, +\infty)$, sauf pour les racines du dénominateur. Pour $x = a$, la fonction prend la forme $\frac{0}{0}$.

Comme la fonction n'est pas définie dans l'intervalle $(a, -a)$, nous devrons faire tendre x vers a par valeurs croissantes. On aura $x - a < 0$ et $x - a = -\sqrt{(x-a)^2}$.

Par suite,

$$F(x) = \frac{\sqrt{a - x}\,(\sqrt{-x} + \sqrt{-(a + x)})}{\sqrt{a - x}\,(\sqrt{-(a + x)} - x^2\sqrt{a - x})},$$

$$\text{et} \qquad \lim F(x) = \frac{\sqrt{-a} + \sqrt{-2a}}{\sqrt{-2a}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}.$$

c) *Supposons* $a = 0$. — La fonction devient

$$F(x) = \frac{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2} + x^3} = \frac{2\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2} + x^3}.$$

Elle est définie pour toutes les valeurs de x, sauf pour $x = 0$ ou -1. En faisant tendre x vers zéro par valeurs positives ou par valeurs négatives, on trouve chaque fois $\lim F(x) = 2$.

269. *Trouver la limite des expressions suivantes :*

$$1^\circ \ \lim \frac{x^2 + \dfrac{x+1}{x-3}}{2x + 1 - \dfrac{x^2}{x-3}}, \ \textit{pour} \ x = 3.$$

Cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x, sauf pour $x = 3$ et pour $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$. Pour $x = 3$, elle prend la forme $\dfrac{\infty}{\infty}$.

En multipliant les deux termes de la fraction proposée par $x - 3$, on trouve

$$F(x) = \frac{x^2(x-3) + x + 1}{(2x+1)(x-3) - x^2}$$

pour toutes les valeurs de x pour lesquelles la fonction est définie. On a donc

$$\lim F(x) = \lim \frac{x^2(x-3) + x + 1}{(2x+1)(x-3) - x^2} = \frac{4}{-9} = -\frac{4}{9}.$$

$$2^\circ \ \lim \frac{x + 3 + \dfrac{x+1}{x-2}}{x + \dfrac{x^2}{x-2}}, \ \textit{pour} \ x = 2.$$

En raisonnant comme pour l'exercice précédent, on trouve

$$\lim F(x) = \frac{3}{4}, \quad \text{pour} \quad x = 2.$$

$$3^\circ \ \lim \left[\frac{x+6}{x^2 - 16} - \frac{x+1}{x(x-4)}\right], \ \textit{pour} \ x = 4.$$

Cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x, sauf pour $x = \pm 4$ et $x = 0$.

Quand x tend vers 4, chacun des deux termes de la fonction tend vers l'infini. Dès lors, trois cas sont à examiner : si le premier terme de la différence tend vers $+\infty$ et le second vers $-\infty$, leur différence tend vers $+\infty$; si le premier terme tend vers $-\infty$ et le second vers $+\infty$, leur différence tend vers $-\infty$; si les deux termes tendent vers $+\infty$ ou ou vers $-\infty$, il y a indétermination.

Pour voir comment la fonction se comporte, il faudrait donc s'assurer si les deux termes tendent vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, quand x tend vers 4 par valeurs croissantes ou par valeurs décroissantes. On peut s'en dispenser en opérant comme suit :

On a
$$F(x) = \frac{1}{x-4}\left[\frac{x+6}{x+4} - \frac{x+1}{x}\right]$$

pour toutes les valeurs pour lesquelles la fonction est définie. Quand x tend vers 4, le premier facteur tend vers l'infini et le second vers $\dfrac{10}{8} - \dfrac{5}{4}$ ou zéro. Il y a donc indétermination.

Pour trouver la limite cherchée, effectuons la soustraction indiquée dans la fonction. On a

$$F(x) = \frac{(x+6)x - (x+1)(x+4)}{x(x^2-16)} = \frac{x-4}{x(x^2-16)}$$

pour toutes les valeurs de x pour lesquelles $F(x)$ est définie. Par suite,

$$\lim F(x) = \lim \frac{1}{x(x+4)} = \frac{1}{32}.$$

4° *lim* $\left[\frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3}\right]$, *pour* $x = 1$.

Cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x, sauf pour $x = \pm 1$. On a

$$F(x) = \frac{1}{1-x}\left[\frac{2}{1+x} - \frac{3}{1+x+x^2}\right].$$

Quand x tend vers 1, le premier facteur tend vers l'infini et le second vers 0. Il y a donc indétermination pour $x = 1$. On a

$$F(x) = \frac{2(1+x+x^2) - 3(1+x)}{(1-x^2)(1+x+x^2)} = \frac{-(1-x)(2x+1)}{(1-x)(1+x)(1+x+x^2)}.$$

Par suite,

$$\lim F(x) = \lim \frac{-(2x+1)}{(1+x)(1+x+x^2)} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}.$$

5° *lim* $(x^2 - 6x + 5) \times \frac{x-3}{x^2-7x+10}$, *pour* $x = 5$.

Cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x, sauf pour $x = 2$ ou 5. Pour $x = 5$, elle prend la forme $0 \times \infty$. On a

$$F(x) = \frac{(x-1)(x-5)(x-3)}{(x-2)(x-5)}$$

et

$$\lim F(x) = \lim \frac{(x-1)(x-3)}{x-2} = \frac{8}{3}.$$

6° *lim* $\left[\frac{2x-7}{x^2-x-2} - \frac{1}{x^2-3x+2}\right]$, *pour* $x = 2$.

La fonction est définie pour toutes les valeurs de x, sauf pour $x = \pm 1$ ou 2. On a

$$F(x) = \frac{1}{x-2}\left[\frac{2x-7}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right].$$

Quand x tend vers 2, le premier facteur tend vers l'infini et le second vers $\frac{-3}{3} - \frac{1}{1} = -2$. On a donc

$$\lim F(x) = \infty.$$

7° $lim\ (x-1)\left[\frac{1}{x^4-1}-\frac{1}{x^3-1}-\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x-1}\right]$, *pour* $x = 1$.

Cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x, sauf pour $x = \pm 1$. Quand x tend vers 1, le premier facteur tend vers zéro; le second tend vers l'infini; ce qu'on voit en réduisant les quatre termes du second facteur au même dénominateur. On a

$$F(x) = \frac{x-1}{x-1}\left[\frac{1}{x^3+x^2+x+1}-\frac{1}{x^2+x+1}-\frac{1}{x+1}+1\right],$$

$$\text{et } \lim F(x) = \lim\left[\frac{1}{x^3+x^2+x+1}-\frac{1}{x^2+x+1}-\frac{1}{x+1}+1\right] = \frac{5}{12}.$$

8° $lim\ \frac{1}{x}[\sqrt[3]{5x^2+1}-\sqrt[3]{8x+1}]$, *pour* $x = 0$.

Cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x, sauf pour $x = 0$. Quand x tend vers zéro, le premier facteur tend vers l'infini et le second vers zéro. On a

$$F(x) = \frac{5x^2-8x}{x[\sqrt[3]{(5x^2+1)^2}+\sqrt[3]{(5x^2+1)(8x+1)}+\sqrt[3]{(8x+1)^2}]}.$$

$$\text{et } \lim F(x) = \lim \frac{5x-8}{\sqrt[3]{(5x^2+1)^2}+\sqrt[3]{(5x^2+1)(8x+1)}+\sqrt[3]{(8x+1)^2}} = -\frac{8}{3}.$$

270. *Trouver la limite des expressions suivantes pour* x *infini.*

1° $\frac{x+3\sqrt{x}}{7\sqrt{x}+2x}$.

Cette fonction n'est définie que pour les valeurs positives de x. Faisons tendre x vers l'infini par valeurs positives.

On aura $x = \sqrt{x^2}$ et en divisant les deux termes de la fraction donnée par x, on trouve

$$F(x) = \left[1+\frac{3}{\sqrt{x}}\right] : \left[\frac{7}{\sqrt{x}}+2\right] \text{ et } \lim F(x) = \frac{1}{2}.$$

2° $\frac{\sqrt{x+1}-x}{x}$.

En raisonnant comme pour l'exercice précédent, on trouve

$$\lim F(x) = -1.$$

3° $\frac{\sqrt[3]{1-8x^3}}{x}$.

Cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x, sauf pour $x = 0$. En divisant les deux termes de la fraction par $x = \sqrt[3]{x^3}$, on trouve

$$F(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-8} \text{ et } \lim F(x) = -2.$$

4° $\dfrac{\sqrt{x^2+2}-x}{\sqrt[4]{x^4-4x^2}}$.

Cette fonction est définie dans les intervalles $(-\infty, -2)$ et $(2, +\infty)$, sauf pour $x = \pm 2$.

a) Si x tend vers l'infini *par valeurs positives*, on a $x = \sqrt{x^2} = \sqrt[4]{x^4}$; par suite,

$$F(x) = \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}-1}{\sqrt[4]{1-\frac{4}{x^2}}} \quad \text{et} \quad \lim F(x) = \frac{1-1}{1} = 0.$$

b) Si x tend vers l'infini *par valeurs négatives*, on a $x = -\sqrt{x^2}$ et $x = -\sqrt[4]{x^4}$; par suite,

$$F(x) = \frac{-\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}-1}{-\sqrt[4]{1-\frac{4}{x^2}}} \quad \text{et} \quad \lim F(x) = \frac{-1-1}{-1} = 2.$$

5° $\dfrac{3x}{2x-1+\sqrt{4x^2+x+1}}$.

Cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x, sauf pour $x = 0$.

a) Faisons tendre x vers l'infini *par valeurs positives*. On trouve, après avoir divisé par $x = \sqrt{x^2}$,

$$\lim F(x) = \lim \frac{3}{2-\frac{1}{x}+\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{3}{4}.$$

b) Faisons tendre x vers l'infini *par valeurs négatives*. On trouve, après avoir divisé par $x = -\sqrt{x^2}$,

$$\lim F(x) = \lim \frac{3}{2-\frac{1}{x}-\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}.$$

Le dénominateur tend vers zéro. On a donc $\lim F(x) = \infty$.

6° $\dfrac{\sqrt{x^4-5x^2+4}+\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[3]{x^6+x}}$.

Cette fonction est définie dans les intervalles $(-\infty, -2)$, $(-1, 1)$, et $(2, +\infty)$, sauf pour $x = 0$. On voit facilement qu'en divisant le numérateur et le dénominateur par $x^2 = \sqrt{x^4} = \sqrt[3]{x^6}$, tous leurs termes auront des limites finies. On trouve ainsi

$$F(x) = \frac{\sqrt{1 - \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^4}} + \sqrt[3]{\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^6}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^5}}}.$$

Quand x tend vers l'infini, le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers zéro. On a donc

$$\lim F(x) = \infty.$$

7° $\sqrt{x^2 - 4} - x$.

Cette fonction est définie dans les intervalles $(-\infty, -2)$ et $(2, +\infty)$.

a) Si x tend vers $-\infty$, la fonction tend vers $+\infty$.

b) Si x tend vers $+\infty$, on a

$$F(x) = \frac{-4}{\sqrt{x^2 - 4} + x}$$

Le dénominateur tend vers $+\infty$. Donc $F(x)$ tend vers zéro par valeurs négatives.

8° $3x - \sqrt{x^2 - x + 1}$.

Cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x.

a) Si x tend vers $-\infty$, la fonction tend vers $-\infty$.

b) Si x tend vers $+\infty$, on a

$$F(x) = \frac{8x^2 + x - 1}{3x + \sqrt{x^2 - x + 1}} = \frac{8 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{\frac{3}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}}}.$$

Le numérateur tend vers 8 et le dénominateur vers zéro par valeurs positives. On a donc

$$\lim F(x) = +\infty.$$

9° $\sqrt{x}(\sqrt{x + 1} - \sqrt{x})$.

Cette fonction est définie dans l'intervalle $(0, +\infty)$. Si x tend vers $+\infty$, elle prend la forme $\infty(\infty - \infty)$. On a

$$F(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x}} \quad \text{et} \quad \lim F(x) = \lim \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

10° $\sqrt{x^2 + x + 1} - ax$.

Cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x.

1re partie : x *tend vers l'infini par valeurs positives.*

a) $a < 0$. — On a $\lim F(x) = +\infty$.
b) $a = 0$. — On a $\lim F(x) = +\infty$.
c) $a > 0$. — La fonction prend la forme $\infty - \infty$. On a

$$F(x) = \frac{(1-a^2)x^2 + x + 1}{\sqrt{x^2+x+1} + ax}.$$

Pour continuer, il faut diviser les deux termes de cette fraction par $x^2 = \sqrt{x^4}$ quand $1 - a^2 \neq 0$ et par $x = \sqrt{x^2}$ quand $1 - a^2 = 0$. On trouve ainsi :

$$\lim F(x) = -\infty, \quad \text{quand} \quad a > 1;$$
$$\lim F(x) = \frac{1}{2}, \quad \text{quand} \quad a = 1;$$
$$\lim F(x) = +\infty, \quad \text{quand} \quad a < 1.$$

2e partie : x *tend vers* $-\infty$.

a) $a < 0$. — La fonction prend la forme $\infty - \infty$. On a

$$F(x) = \frac{(1-a^2)x^2 + x + 1}{\sqrt{x^2+x+1} + ax}.$$

Pour continuer, il faut diviser les deux termes de cette fraction par $x^2 = \sqrt{x^4}$ quand $1 - a^2 \neq 0$ et par $x = -\sqrt{x^2}$ quand $1 - a^2 = 0$. On trouve ainsi :

$$\lim F(x) = +\infty, \quad \text{quand} \quad a > -1;$$
$$\lim F(x) = -\frac{1}{2}, \quad \text{quand} \quad a = -1;$$
$$\lim F(x) = -\infty, \quad \text{quand} \quad a < -1.$$

b) $a = 0$. — On a $\lim F(x) = +\infty$.
c) $a > 0$. — On a $\lim F(x) = +\infty$.

11° $\sqrt[3]{x^3 + x^2} - x$.

Cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x. Elle prend la forme $\infty - \infty$, quand x tend vers l'infini d'une façon quelconque. On a

$$F(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3+x^2} + x^2}.$$

D'où, en remarquant que $x^2 = \sqrt[3]{x^6}$,

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{x}} + 1} \quad \text{et} \quad \lim F(x) = \frac{1}{3}.$$

12° $2x - 1 - \sqrt{4x^2 - 4x - 3}$.

Cette fonction est définie dans les intervalles

$$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{3}{2}, +\infty\right).$$

a) Si x tend vers $-\infty$, on a $\lim F(x) = -\infty$.

b) Si x tend vers $+\infty$, on a

$$F(x) = \frac{4}{2x - 1 + \sqrt{4x^2 - 4x - 3}}.$$

Le dénominateur tend vers $+\infty$. La fonction tend donc vers zéro par valeurs positives.

13° $\sqrt{x^2 + 3x + 2} - \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.

Cette fonction est définie dans les intervalles $(-\infty, -2)$, $(-1, 1)$ et $(2, +\infty)$. Elle prend la forme $\infty - \infty$, lorsque x tend vers l'infini d'une façon quelconque.

a) Si x tend vers $+\infty$, on a

$$F(x) = \frac{6x}{\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2-3x+2}} = \frac{6}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}}$$

Par suite, $\lim F(x) = \frac{6}{2} = 3$.

b) Si x tend vers $-\infty$, on a $x = -\sqrt{x^2}$ et

$$F(x) = \frac{6}{-\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}}.$$

Par suite, $\lim F(x) = \frac{6}{-2} = -3$.

14° $\sqrt[3]{x^3 + 5x^2} - \sqrt[3]{x^3 + 8x}$.

En raisonnant comme pour le 11°, on trouve

$$\lim F(x) = \frac{5}{3}.$$

15° $\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - 1}$.

Cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x.

a) Si x tend vers $-\infty$, on a $\lim F(x) = +\infty$.

b) Si x tend vers $+\infty$, la fonction prend la forme $\infty - \infty$. On a

$$F(x) = \sqrt[6]{(x^2 + 1)^3} - \sqrt[6]{(x^3 - 1)^2}$$

$$= \frac{3x^4 + 2x^3 + 3x^2}{\sqrt[6]{(x^2 + 1)^{15}} + \sqrt[6]{(x^2 + 1)^{12}(x^3 - 1)^2} + \dots + \sqrt[6]{(x^3 - 1)^{10}}}.$$

Après avoir divisé les deux termes de cette dernière fraction par $x^5 = \sqrt[6]{x^{30}}$, on trouve

$$\lim F(x) = 0.$$

16° $2\sqrt{x^2+2x} - \sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt[4]{x^4+4x^3}$.

Cette fonction est définie dans les intervalles $(-\infty, -4)$ et $(0, +\infty)$.

a) Supposons que x tende vers $+\infty$. — On peut écrire

$$F(x) = 2(\sqrt{x^2+2x} - x) - (\sqrt[3]{x^3+3x^2} - x) - (\sqrt[4]{x^4+4x^3} - x).$$

On montrerait facilement que chaque parenthèse tend vers 1, quand x tend vers $+\infty$. On a donc

$$\lim F(x) = 0, \quad \text{pour} \quad x = +\infty.$$

b) Supposons que x tende vers $-\infty$. — On peut écrire

$$F(x) = [\sqrt{x^2+2x} - \sqrt[4]{x^4+4x^3}] + [\sqrt{x^2+2x} - \sqrt[3]{x^3+3x^2}].$$

On montrerait facilement que le premier terme de cette somme tend vers zéro et le second vers $+\infty$, quand x tend vers $-\infty$. On a donc

$$\lim F(x) = +\infty, \quad \text{pour} \quad x = -\infty.$$

271. *Trouver la limite de l'expression*

$$y = x^{\frac{p}{3}}\left((x^2+1)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)$$

quand on fait tendre x *vers l'infini. Pour quelles valeurs de* p *cette limite sera-t-elle* : 1° *finie*; 2° *nulle*; 3° *infinie?*

Cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x. Quand x tend vers l'infini, le second facteur prend la forme $\infty - \infty$. On peut écrire

$$y = x^{\frac{p+2}{3}}\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right].$$

Or, on a

$$a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}.$$

En appliquant cette identité au cas où

$$a = \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{et} \quad b = 1,$$

il vient

$$y = \frac{x^{\frac{p+2}{3}} \times \frac{1}{x^2}}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}} + 1} = \frac{x^{\frac{p-4}{3}}}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}} + 1}.$$

Si x tend vers l'infini, le dénominateur tend vers 3. Par suite, trois cas peuvent se produire :

$$p > 4; \quad y \text{ tend vers l'infini;}$$

$$p = 4; \quad y \text{ tend vers } \frac{1}{3};$$

$$p < 4; \quad y \text{ tend vers zéro.}$$

272. *Si* $a > 1$, *montrer que* $\lim \frac{a^n}{n} = +\infty$ *quand* n *tend vers l'infini par valeurs entières positives.*

Posons $a = 1 + \alpha$, α étant un nombre positif. On a

$$a^n = (1 + \alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)\alpha^2}{2} + \dots$$

et
$$a^n > 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)\alpha^2}{2}.$$

Par suite,
$$\frac{a^n}{n} > \frac{1}{n} + \alpha + \frac{(n-1)\alpha^2}{2}. \qquad (1)$$

Quand n tend vers l'infini par valeurs entières positives, $\frac{1}{n}$ et $\frac{(n-1)\alpha^2}{2}$ tendent respectivement vers zéro et vers $+\infty$. Le second membre de la relation (1) tend donc vers $+\infty$ et il en sera de même du premier membre. Par suite,
$$\lim \frac{a^n}{n} = +\infty.$$

273. *Calculer la somme des* n *premiers termes de quelques suites et la limite de chacune de ces sommes pour* n *infini.*

1° *Le terme général est* $\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$.

En décomposant le terme général en fractions simples par la méthode des coefficients indéterminés, on trouve
$$\frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}.$$

Par suite, on peut écrire :
$$\frac{2}{3.5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$$
$$\frac{2}{5.7} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}.$$

En additionnant membre à membre, il vient
$$S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} \quad \text{et} \quad \lim S_n = \frac{1}{3}.$$

2° *Le terme général est* $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

On a $$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right].$$

De là, on déduit

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right] \quad \text{et} \quad \lim S_n = \frac{1}{4}.$$

AUTRE MÉTHODE. — En décomposant en fractions simples, on a

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}.$$

Par suite, on peut écrire :

$$\frac{1}{1.2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{2.3.4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{3.4.5} = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{4.5.6} = \frac{1}{8} - \frac{1}{5} + \frac{1}{12}$$

....

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}.$$

En additionnant membre à membre et en réduisant, il vient

$$S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \quad \text{et} \quad \lim S_n = \frac{1}{4}.$$

3° *Le terme général est* $\dfrac{1}{(1 + \mathrm{na})[1 + (\mathrm{n} + 1)\mathrm{a}]}$.

On trouve successivement :

$$\frac{1}{(1+na)[1+(n+1)a]} = \frac{1}{a(1+na)} - \frac{1}{a[1+(n+1)a]};$$

$$S_n = \frac{1}{a(1+a)} - \frac{1}{a[1+(n+1)a]}; \ \lim S_n = \frac{1}{a(1+a)}.$$

4° *Le terme général est* $\dfrac{\mathrm{n}}{3^n}$.

On peut écrire :

$$S_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \dots + \frac{n}{3^n};$$

$$\frac{S_n}{3} = \frac{1}{9} + \frac{2}{27} + \frac{3}{81} + \dots + \frac{n}{3^{n+1}};$$

$$S_n\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^n} - \frac{n}{3^{n+1}};$$

$$\frac{2}{3} S_n = \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3^{n+1}}\right] : \frac{2}{3} - \frac{n}{3^{n+1}} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{3^n}\right] - \frac{n}{3^{n+1}};$$

$$S_n = \frac{3}{4}\left[1 - \frac{1}{3^n}\right] - \frac{1}{2} \times \frac{n}{3^n}.$$

Or, $\lim \frac{1}{3^n} = 0$ et $\lim \frac{n}{3^n} = 0$ (272).

On a donc $\lim S_n = \frac{3}{4}$.

5° *Le terme général est* nq^{n-1}.

Par le même procédé que dans l'exercice précédent (4°), on trouve ici, en supposant $q \neq 1$,

$$S_n = \frac{nq^n}{q-1} - \frac{q^n - 1}{(q-1)^2}.$$

a) Si $q > 1$, on a $\lim q^n = +\infty$ et

$$\lim S_n = \lim \frac{q^n[(q-1)n - 1] + 1}{(q-1)^2} = +\infty.$$

b) Si $q < 1$, on peut écrire, q' étant l'inverse de q,

$$S_n = \frac{1}{(q-1)^2}\left[(q-1)\frac{n}{q'^n} - \frac{1}{q'^n} + 1\right].$$

Or, $\lim \frac{n}{q'^n} = 0$, car $\lim \frac{q'^n}{n} = +\infty$ (272); et $\lim \frac{1}{q'^n} = 0$. Donc

$$\lim S_n = \frac{1}{(q-1)^2}.$$

c) Si $q = 1$, on a

$$S_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \lim S_n = +\infty.$$

274. *Trouver les limites des expressions suivantes pour* m *infini.*

1° $\left(1 + \frac{a}{m}\right)^m$. — En posant $\frac{a}{m} = \alpha$, l'expression devient

$$(1+\alpha)^{\frac{a}{\alpha}} = \left((1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^a.$$

Si m tend vers l'infini, α tend vers zéro. On a donc

$$\lim (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \quad \text{et} \quad \lim \left(1 + \frac{a}{m}\right)^m = e^a.$$

2° $\left(\frac{m-1}{m}\right)^{3m}$. — On a

$$\left(\frac{m-1}{m}\right)^{3m} = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{3m} = \left[\left(1 + \frac{1}{-m}\right)^{-m}\right]^{-3}$$

et la limite cherchée est e^{-3}.

3° $\left(\frac{m+1}{m-1}\right)^m$. — On a

$$\left(\frac{m+1}{m-1}\right)^m = \left(1 + \frac{2}{m-1}\right)^m,$$

ou encore, en posant $\frac{2}{m-1} = \alpha$,

$$\left(\frac{m+1}{m-1}\right)^m = (1+\alpha)^{\frac{2}{\alpha}+1} = (1+\alpha)\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^2.$$

Si m tend vers l'infini, α tend vers zéro. La limite cherchée est donc e^2.

275. *Trouver la limite des racines des équations suivantes :*

1° $mx^2 - 2(m+1)x + m + 2 = 0$.

a) m *tend vers zéro.* — Le coefficient de x^2 tend seul vers zéro. Donc, l'une des racines tend vers l'infini; la limite de l'autre est

$$\lim \frac{m+2}{2(m+1)} = 1.$$

b) m *tend vers* 1. — Aucun coefficient ne tend vers zéro et nous devons calculer les racines elles-mêmes en vue de calculer leurs limites pour $m = 1$.

On trouve $$x' = \frac{m+2}{m}; \quad x'' = \frac{m}{m}.$$

On voit que l'une des racines est constante et égale à 1, dès que m est différent de zéro. L'autre racine a comme limite 3, pour $m = 1$.

c) m *tend vers l'infini.* — Aucun coefficient ne tend vers zéro et pour avoir les réponses, nous devrons chercher les limites des racines précédemment calculées. On trouve

$$\lim x' = 1; \quad x'' = 1.$$

Voir aussi une autre solution exposée plus bas, au 3°.

2° $(m^2 - 4)x^2 - 2(m^2 + 4)x + m^2 - 4 = 0$.

a) m *tend vers* ± 2. — Le coefficient de x^2 et le terme indépendant tendent vers zéro. Par suite, l'une des racines tend vers l'infini et l'autre vers zéro.

b) m *tend vers l'infini.* — Calculons les racines en vue de chercher leurs limites pour m infini. Les expressions générales des racines sont

$$x' = \frac{m+2}{m-2} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{m-2}{m+2}.$$

Par suite, $\lim x' = \lim x'' = 1$, pour m infini.

Voir aussi une autre solution exposée plus bas, au 3°.

3° $m(m-1)x^2 - 2m(m-1)x - 3(m-1) = 0$.

a) m *tend vers* 1. — Les trois coefficients tendent vers zéro.

1re SOLUTION. — Cherchons les racines. On trouve

$$x' = \frac{(m-1)\left[m + \sqrt{m^2+3m}\right]}{m(m-1)}; \quad x'' = \frac{(m-1)\left[m - \sqrt{m^2+3m}\right]}{m(m-1)}.$$

Par suite, $$\lim x' = \lim \frac{m + \sqrt{m^2 + 3m}}{m} = 3$$

et $$\lim x'' = \lim \frac{m - \sqrt{m^2 + 3m}}{m} = -1.$$

2e SOLUTION. — Supposons $m \neq 1$ et divisons les deux membres de l'équation proposée par $m - 1$. On obtient ainsi l'équation

$$mx^2 - 2mx - 3 = 0.$$

En faisant tendre m vers 1, les racines de cette équation tendent vers celles de l'équation

$$x^2 - 2x - 3 = 0,$$

obtenue en remplaçant m par 1 dans l'équation précédente. Les limites cherchées sont donc -1 et 3.

b) m *tend vers zéro.* — Les coefficients de x^2 et de x ont seuls pour limite zéro. Calculons le réalisant. On trouve

$$\rho = m(m - 1)^2 (m + 3).$$

Il est positif dans les intervalles $(-\infty, -3)$ et $(0, +\infty)$, sauf pour $m = -3$, 0 ou 1, qui l'annulent. Il tendra donc vers zéro par valeurs positives, si m tend vers zéro par valeurs positives. Par suite :

Si m tend vers zéro *par valeurs positives*, les deux racines tendent vers l'infini;

Si m tend vers zéro *par valeurs négatives*, il n'y a pas de racine et pas de limite.

c) m *tend vers l'infini.* — Dans ce cas, on peut supposer $m \neq 1$, et l'équation se réduit à

$$mx^2 - 2mx - 3 = 0.$$

1re SOLUTION. — Les racines de cette équation sont

$$x' = \frac{m + \sqrt{m^2 + 3m}}{m}; \quad x'' = \frac{m - \sqrt{m^2 + 3m}}{m}.$$

Ce sont des fonctions de m définies dans les intervalles $(-\infty, -3)$ et $(0, +\infty)$.

Si m *tend vers* $+\infty$, on trouve

$$\lim x' = 2 \quad \text{et} \quad \lim x'' = 0.$$

Si m *tend vers* $-\infty$, on trouve

$$\lim x' = 0 \quad \text{et} \quad \lim x'' = 2.$$

2e SOLUTION. — En divisant les deux membres de l'équation

$$mx^2 - 2mx - 3 = 0,$$

par m, supposé différent de zéro, on trouve

$$x^2 - 2x - \frac{3}{m} = 0.$$

Quand m tend vers l'infini, les racines de cette équation ont comme limites celles de l'équation $x^2 - 2x = 0$. Les limites cherchées sont donc 0 et 2.

4° $(m^2 - 2m - 3)x^2 + 2m(m + 1)x + m(m - 3) = 0$.

a) m *tend vers* 3. — Le coefficient de x^2 et le terme indépendant tendent vers zéro. Une des racines tend vers zéro et l'autre vers l'infini.

b) m *tend vers* — 1. — Les coefficients de x^2 et de x tendent vers zéro. Le réalisant est

$$m^2(m + 1)^2 - m(m - 3)(m^2 - 2m - 3) = m(m + 1)(7m - 9).$$

Il est positif dans les intervalles $(-1, 0)$ et $\left(\frac{9}{7}, +\infty\right)$. Par suite, si l'on fait tendre m vers -1 par valeurs supérieures à -1, le réalisant tend vers zéro par valeurs positives et les deux racines tendent vers l'infini.

c) m *tend vers l'infini.* — En tenant compte de ce que le réalisant n'est positif que dans les intervalles $(-1, 0)$ et $\left(\frac{9}{7}, +\infty\right)$, on aboutit aux conclusions suivantes :

Si m *tend vers l'infini par valeurs positives*, les deux racines données par la formule

$$x = \frac{-m(m + 1) \pm \sqrt{m(m + 1)(9m - 7)}}{m^2 - 2m - 3}$$

tendent vers -1.

Si m *tend vers* $-\infty$, il n'y a pas de racine et pas de limite.

5° $\dfrac{x^2}{m} + \dfrac{2mx}{m - 2} + \dfrac{1}{m} = 0;$

a) m *tend vers l'infini.* — Le coefficient de x^2 et le terme indépendant tendent vers zéro, tandis que le coefficient de x tend vers la limite finie 2. Donc l'une des racines tend vers l'infini et l'autre vers zéro.

b) m *tend vers* 2. — Pour m différent de 2 et de 0, l'équation peut s'écrire

$$(m - 2)x^2 + 2m^2x + m - 2 = 0.$$

Le réalisant de cette équation est

$$m^4 - (m - 2)^2 = (m - 1)(m + 2)(m^2 - m + 2).$$

On voit que l'équation admet des racines, quand m est pris dans les intervalles $(-\infty, -2)$ et $(1, +\infty)$. Ces racines sont

$$x'' = \frac{-m^2 - \sqrt{m^4 - m^2 + 4m - 4}}{m - 2}$$

$$x' = \frac{-m^2 + \sqrt{m^4 - m^2 + 4m - 4}}{m - 2}.$$

Quand m tend vers 2, le numérateur de x'' tend vers -8 et le dénominateur vers zéro. On a donc

$$\lim x'' = \infty, \quad \text{pour} \quad m = 2.$$

Pour $m = 2$, la racine x' prend la forme $\frac{0}{0}$. Mais on a

$$x' = \frac{(m-2)^2}{(m-2)\left(-m^2-\sqrt{m^4-(m-2)^2}\right)}.$$

On a donc

$$\lim x' = \lim \frac{m-2}{-m^2-\sqrt{m^4-(m-2)^2}} = 0.$$

c) m *tend vers zéro.* — Dans ce cas, m finit par être compris entre -2 et 1. Or, en vertu de ce qui précède, l'équation n'a pas de racine pour m compris entre -2 et 1. Il ne peut donc être question de chercher les limites des racines, quand m tend vers zéro.

6° $m(m^2-4)x^2-(m^2-m-2)x+m^3+2m^2-m-2=0.$

a) m *tend vers* 1. — Le coefficient de x^2 tend vers -3, le coefficient de x vers 2 et le terme indépendant vers zéro.

Le produit des racines tend vers zéro; donc l'une des racines a comme limite zéro. L'autre racine a la même limite que la somme des racines; sa limite est donc $-\frac{2}{-3}=\frac{2}{3}$.

b) m *tend vers* -2. — Le coefficient de x^2 et le terme indépendant tendent vers zéro; le coefficient de x tend vers -4.

L'une des racines tend vers zéro et l'autre vers l'infini.

c) m *tend vers* zéro. — Le coefficient de x^2 tend seul vers zéro.

L'une des racines tend vers l'infini et l'autre vers 1.

d) m *tend vers* -1. — Le coefficient de x et le terme indépendant tendent vers zéro.

Les deux racines tendent vers zéro.

e) m *tend vers l'infini.* — L'équation peut s'écrire

$$\left(1-\frac{4}{m^2}\right)x^2-\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m^2}-\frac{2}{m^3}\right)x+1+\frac{2}{m}-\frac{1}{m^2}-\frac{2}{m^3}=0.$$

Quand m tend vers l'infini, les racines de l'équation donnée ont comme limites les racines de l'équation

$$x^2+1=0.$$

Comme celle-ci n'a pas de racine, il en sera de même de l'équation donnée quand m devient infini.

CHAPITRE XII

Continuité et variations.

276. *Étudier les variations des fonctions suivantes* :

1° $y = \sqrt{3 - x}$.

Cette fonction n'est définie et continue que pour $x \leqslant 3$. En appliquant le théorème III (*Compléments*, **286**), on aboutit au tableau et au graphique suivants :

x	$-\infty$		3
$3 - x$	$+\infty$	$\searrow$	0
y	$+\infty$	$\searrow$	0

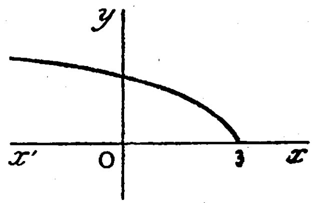


Fig. 3.

Le graphique de la fonction est une demi-parabole dont le sommet est (3, 0).

2° $y = \sqrt{2x + 6}$.

Cette fonction n'est définie et continue que pour $x \geqslant -3$. On a le tableau :

x	-3		$+\infty$
$2x + 6$	0	$\nearrow$	$+\infty$
y	0	$\nearrow$	$+\infty$

Le graphique est analogue au précédent.

3° $y = \sqrt{16 - x^2}$.

Cette fonction n'est définie et continue que dans l'intervalle (— 4, 4). On a le tableau :

x	$-\infty$		-4		0		$+4$		$+\infty$
$16 - x^2$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	16	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
y			0	$\nearrow$	4 *Max.*	$\searrow$	0		

4° $y = \dfrac{1}{x}$.

Cette fonction est définie et continue pour toutes les valeurs de x, sauf pour $x = 0$. En appliquant le théorème IV (*Compléments*, 286), on aboutit au tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	0	$\searrow$	$-\infty \mid +\infty$	$\searrow$	0

Le graphique (Fig. 4) est une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont $x = 0$ et $y = 0$.

Remarque. — Pour déterminer les signes qu'il faut placer à la dernière ligne du tableau devant le symbole ∞, il suffit d'examiner le sens de la variation de la fonction y, quand elle tend vers l'infini.

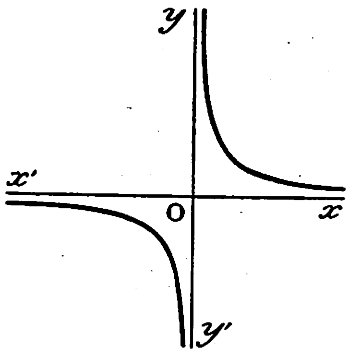


Fig. 4.

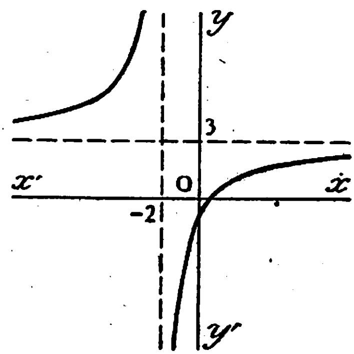


Fig. 5.

5° $y = \dfrac{3x - 2}{x + 2}$.

Cette fonction homographique (*Compléments*, 289) est définie et continue pour toutes les valeurs de x, sauf pour $x = -2$ qui est la racine du dénominateur. Comme $ab' - ba' = 8 > 0$, la fonction est toujours croissante. Elle a comme limite 3 pour x infini. On a le tableau :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y	3	$\nearrow$	$+\infty \mid -\infty$	$\nearrow$	3

Le graphique (Fig. 5) est une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont $x + 2 = 0$ et $y = 3$.

6° $y = \dfrac{x + 1}{2x - 1}$.

y est une fonction homographique, comme celle de l'exercice précédent.

Mais $ab' - ba' = -3 < 0$; y est donc une fonction toujours décroissante.

x	$-\infty$		0,5			$+\infty$
y	$\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$

Le graphique est analogue à celui de la figure 4, mais les asymptotes sont $x = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{2}$.

7° $y = \sqrt{\frac{x}{x-3}}$.

La fonction n'est définie et continue que pour $x \leqslant 0$ et $x > 3$. Sa limite est 1 pour x infini. En désignant le radicand par z, on a le tableau :

x	$-\infty$		0	3		$+\infty$
z	1	↘	0	$+\infty$	↘	1
y	1	↘	0	$+\infty$	↘	1

La courbe qui représente les variations de la fonction (Fig. 6) est asymptote aux droites $x = 3$ et $y = 1$.

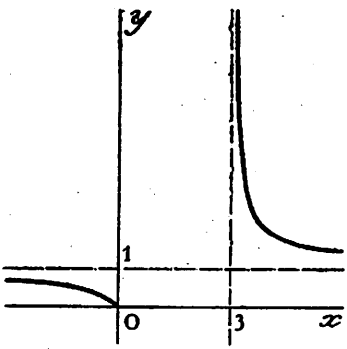


Fig. 6

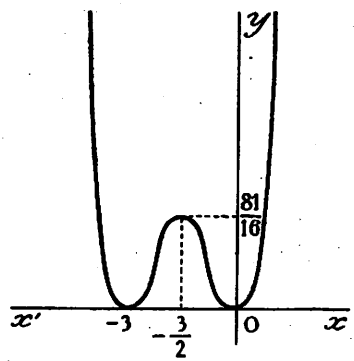


Fig. 7

8° $y = (x^2 + 3x)^2$.

Cette fonction est définie et continue pour toutes les valeurs de x.

Ses variations (Fig. 7) sont résumées dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		-3		$-1{,}5$		0		$+\infty$
x^2+3x	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{9}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{81}{16}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
			Min.		*Max.*		*Min.*		

9° $y = (2x - x^2)^2$.

On a le tableau :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$2x-x^2$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
			Min.		*Max.*		*Min.*		

Le graphique est analogue au précédent (Fig. 7).

10° $y = |x^2 - 6x + 5|$.

La fonction y, étant toujours positive, varie dans le même sens que y^2. Il en résulte que les fonctions y et $z = x^2 - 6x + 5$ varient dans le même sens dans tout intervalle où z est positif, et en sens contraires dans tout intervalle où z est négatif (*Compléments*, 286, III).

On a le tableau :

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
z	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
			Min.		*Max.*		*Min.*		

Le graphique est analogue au précédent (Fig. 7).

11° $y = \dfrac{1}{x^2 - x + 1}$.

Cette fonction est définie et continue pour toutes les valeurs de x, car le dénominateur n'a pas de racine; elle a comme limite zéro pour x infini. Les variations de y se déduisent immédiatement de celles de $z = x^2 - x + 1$.

x	$-\infty$		$0{,}5$		$+\infty$
z	$+\infty$	$\searrow$	$0{,}75$	$\nearrow$	$+\infty$
y	0	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	0
			Max.		

Le graphique (Fig. 8) est asymptote à l'axe des x.

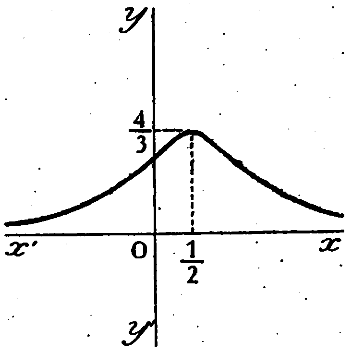


Fig. 8

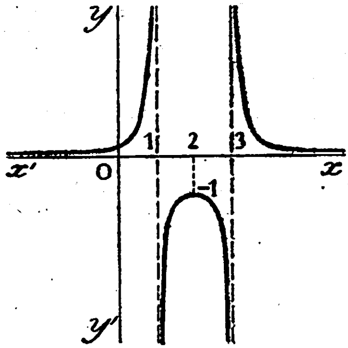


Fig. 9

12° $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 3}$.

Cette fonction n'est pas définie pour $x = 1$ et $x = 3$. Ses variations sont résumées dans le tableau suivant :

x	$-\infty$			1			2			3			$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$	$+\infty$	$\searrow$		0		$\searrow$	-1	$\nearrow$		0		$\nearrow$	$+\infty$
y	0	$\nearrow$	$+\infty$		$-\infty$	$\nearrow$	-1 Max.	$\searrow$	$-\infty$		$+\infty$	$\searrow$	0

Le graphique (Fig. 9) est asymptote aux droites $x = 1$, $x = 3$ et $y = 0$.

13° $y = \dfrac{1}{-x^2 + 4x - 4}$.

Cette fonction n'est pas définie pour $x = 2$. Si $z = -x^2 + 4x - 4$, on a le tableau :

x	$-\infty$			2			$+\infty$
z	$-\infty$	$\nearrow$		0		$\searrow$	$-\infty$
y	0	$\searrow$	$-\infty$		$-\infty$	$\nearrow$	0

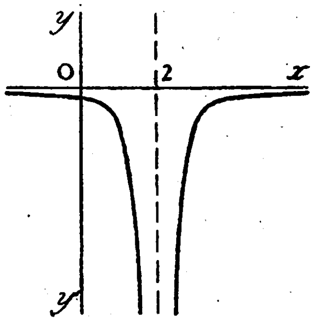


Fig. 10

Le graphique de la fonction (Fig. 10) a deux asymptotes; ce sont les droites

$$x = 2 \quad \text{et} \quad y = 0.$$

14° $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$.

Cette fonction est définie et continue pour toutes les valeurs de x, car le trinôme $z = x^2 + x + 1$ est toujours positif. Pour trouver le sens des variations de y, on étudie successivement les variations de z et de $\sqrt{z}$.

x	$-\infty$		$-0{,}5$		$+\infty$
z	$+\infty$	↘	$\frac{3}{4}$	↗	$+\infty$
$\sqrt{z}$	$+\infty$	↘	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	↗	$+\infty$
y	0	↗	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	↘	0
			Max.		

Le graphique est analogue à celui du 11° (Fig. 8).

15° $y = 9x^2 - x^4$.

Cette fonction est définie et continue pour toutes les valeurs de x. En la mettant sous la forme

$$y = -\left[\left(x^2 - \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{81}{4}\right],$$

on est conduit au tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}\sqrt{2}$		0		$\frac{3}{2}\sqrt{2}$		$+\infty$
$x^2 - \frac{9}{2}$	$+\infty$	↘	0	↘	$-\frac{9}{2}$	↗	0	↗	$+\infty$
$\left(x^2 - \frac{9}{2}\right)^2$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{81}{4}$	↘	0	↗	$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$\frac{81}{4}$	↘	0	↗	$\frac{81}{4}$	↘	$-\infty$
			Max.		*Min.*		*Max.*		

REMARQUE. — D'une façon générale, pour étudier les variations d'un trinôme bicarré $y = ax^4 + bx^2 + c$, on commence par le mettre sous la forme

$$y = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

Les valeurs remarquables de x sont 0 et les racines du binôme $x^2 + \dfrac{b}{2a}$, quand il en admet.

16° $y = x^4 + 4x^2 + 5$.

On a $y = (x^2 + 2)^2 + 1$, ce qui conduit au tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x^2 + 2$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$
$(x^2 + 2)^2$	$+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$
y	$+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$
			Min.		

17° $y = (x^4 - 4x^2)^2$.

Posons $z = x^4 - 4x^2 = (x^2 - 2)^2 - 4$.

Les racines de z sont 0 et ± 2; celles de $x^2 - 2$ sont $\pm \sqrt{2}$.

On a le tableau :

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
$x^2 - 2$	$+\infty$		↘		0	↘	-2	↗	0		↗		$+\infty$
$(x^2 - 2)^2$	$+\infty$		↘		0	↗	4	↘	0		↗		$+\infty$
z	$+\infty$	↘	0	↘	-4	↗	0	↘	-4	↗	0	↗	$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↗	16	↘	0	↗	16	↘	0	↗	$+\infty$
			Min.		*Max.*		*Min.*		*Max.*		*Min.*		

18° $y = \dfrac{20}{20 - x^2 - x^4}$.

Le dénominateur de la fonction est

$$z = 20 - x^2 - x^4 = -\left[\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{81}{4}\right];$$

il s'annule pour $x = \pm 2$. La fonction y n'est pas définie pour ces valeurs de x. Le binôme $x^2 + \dfrac{1}{2}$ n'a pas de racine. On a le tableau :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$x^2 + 0{,}5$	$+\infty$		↘		$0{,}5$		↗		$+\infty$
$\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2$	$+\infty$		↘		$\frac{1}{4}$		↗		$+\infty$
z	$-\infty$	↗	0	↗	20	↘	0	↘	$-\infty$
y	0	↘	$-\infty \mid +\infty$	↘	1	↗	$+\infty \mid -\infty$	↗	0
					Min.				

19° $y = \dfrac{12}{x^4 - 10x^2 + 9}$.

Le dénominateur

$$z = x^4 - 10x^2 + 9 = (x^2 - 5)^2 - 16$$

s'annule pour $x = \pm 1$ et pour $x = \pm 3$. La fonction n'est pas définie pour ces valeurs de x. On a le tableau :

x	$-\infty$		-3		$-\sqrt{5}$		-1		0		1		$\sqrt{5}$		3		$+\infty$
x^2-5	$+\infty$		↘		0		↘		-5		↗		0		↗		$+\infty$
$(x^2-5)^2$	$+\infty$		↘		0		↗		25		↘		0		↗		$+\infty$
z	$+\infty$	↘	0	↘	-16	↗	0	↗	9	↘	0	↘	-16	↗	0	↗	$+\infty$
y	0	↗	$\pm\infty$	↗	$-\dfrac{3}{4}$	↘	$\mp\infty$	↘	$\dfrac{4}{3}$	↗	$\pm\infty$	↗	$-\dfrac{3}{4}$	↘	$\mp\infty$	↘	0
					Max.				*Min.*				*Max.*				

20° $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$.

Cette fonction n'est pas définie pour $x = 0$. En l'écrivant $y = 1 - \dfrac{1}{x^2}$, on est conduit au tableau suivant :

x	$-\infty$		0			$+\infty$
x^2	$+\infty$	↘	0		↗	$+\infty$
$\dfrac{1}{x^2}$	0	↗	$+\infty$	$+\infty$	↘	0
y	1	↘	$-\infty$	$-\infty$	↗	1

21° $y = \dfrac{x^2 - 2}{2x^2 - 1}$.

En posant $z = \dfrac{3}{2(2x^2 - 1)}$, on a $y = \dfrac{1}{2} - z$. Pour $x = \pm\, \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$, la fonction n'est pas définie. On a le tableau :

x	$-\infty$		$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$			0		$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$			$+\infty$
$2x^2-1$	$+\infty$	↘	0		↘	-1	↗	0		↗	$+\infty$
z	0	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	$-1{,}5$	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	0
y	$0{,}5$	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	$0{,}5$
						Min.					

277. *Étudier les variations des fonctions suivantes :*

1° $y = (a + 1)x^2 + 2ax + 2$.

a) Si $a = -1$, y se réduit au binôme $-2x + 2$ qui est représenté par une droite.

b) Si $a \neq -1$, y est un trinôme du second degré et admet un extrémé égal à $\dfrac{-a^2 + 2a + 2}{a + 1}$ pour $x = -\dfrac{a}{a + 1}$.

Cet extrémé est un maximum pour $a < -1$; c'est un minimum pour $a > -1$.

En étudiant le signe de l'extrémé de y, on aboutit aux conclusions suivantes :

$a < -1$, maximum positif;
$a = -1$, ni maximum, ni minimum;
$-1 < a < 1 - \sqrt{3}$, minimum négatif;
$1 - \sqrt{3} < a < 1 + \sqrt{3}$, minimum positif;
$a > 1 + \sqrt{3}$, minimum négatif;
$a = 1 \pm \sqrt{3}$, minimum nul.

2° $y = \dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$.

Cette fonction est discontinue pour chaque valeur de x qui annule son dénominateur $z = ax^2 + bx + c$. Il convient donc de distinguer trois cas.

1er cas : $b^2 - 4ac > 0$. — Le trinôme z a deux racines α et β $(\alpha < \beta)$ et la fonction est discontinue pour ces valeurs de x; z et y admettent un extrémé pour $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$.

Si a est positif, on a le tableau :

x	$-\infty$		α			x_1		β			$+\infty$
z	$+\infty$	$\searrow$	0		$\searrow$	*Min.*	$\nearrow$	0		$\nearrow$	$+\infty$
y	0	$\nearrow$	$+\infty$ |	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{4a}{4ac - b^2}$ *Max.*	$\searrow$	$-\infty$ |	$+\infty$	$\searrow$	0

Si a est négatif, on a le tableau :

x	$-\infty$		α			x_1		β			$+\infty$
z	$-\infty$	$\nearrow$	0		$\nearrow$	*Max.*	$\searrow$	0		$\searrow$	$-\infty$
y	0	$\searrow$	$-\infty$ |	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{4a}{4ac - b^2}$ *Min.*	$\nearrow$	$+\infty$ |	$-\infty$	$\nearrow$	0

Le graphique est formé de trois branches (Fig. 9; $a > 0$); les asymptotes sont $x = \alpha$, $x = \beta$, $y = 0$.

2e cas : $b^2 - 4ac = 0$. — Le trinôme a un extrémé nul pour $x = x_1$; la fonction est discontinue pour cette valeur de x.

Si a est positif, on a le tableau :

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
z	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$
y	0	↗	$+\infty \mid +\infty$	↘	0

Si a est négatif, on a le tableau :

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
z	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$
y	0	↘	$-\infty \mid -\infty$	↗	0

Le graphique est formé de deux branches (Fig. 10, $a < 0$); les asymptotes sont $x = x_1$ et $y = 0$.

3e cas : $b^2 - 4ac < 0$. — Le trinôme n'a pas de racine et y est défini et continu pour toutes les valeurs de x; z et y passent par un extrémé pour $x = x_1$.

Si a est positif, on a le tableau :

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
z	$+\infty$	↘	*Min.*	↗	$+\infty$
y	0	↗	$\dfrac{4a}{4ac - b^2}$ *Max.*	↘	0

Si a est négatif, on a le tableau :

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
z	$-\infty$	↗	*Max.*	↘	$-\infty$
y	0	↘	$\dfrac{4a}{4ac - b^2}$ *Min.*	↗	0

La courbe, qui représente les variations de la fonction (Fig. 8, $a > 0$), est asymptote à l'axe des x.

278. *Étudier les variations des fonctions inverses des fonctions suivantes :*

1° $y = x - 3$.

La fonction y est continue dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ et elle croît de $-\infty$ à $+\infty$. Il en résulte (*Compléments*, 284) que x est également une fonction continue et croissante de y dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

On obtient cette fonction inverse de y, en résolvant l'équation $y = x - 3$ par rapport à x. Elle est donc $x = y + 3$ et on voit aisément que x croît effectivement de $-\infty$ à $+\infty$ quand on fait croître y de $-\infty$ à $+\infty$.

2° $y = \dfrac{2x-1}{x-3}$.

La fonction y est continue et décroissante dans les intervalles $(-\infty, 3-\varepsilon)$ et $(3+\varepsilon, +\infty)$, ε étant un nombre positif arbitraire. On a le tableau :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
y	2	$\searrow$	$-\infty \mid +\infty$	$\searrow$	2

La fonction inverse de y est $x = \dfrac{3y-1}{y-2}$. Elle est continue dans l'intervalle $(-\infty, 2-\varepsilon)$ et décroît de 3 à $-\infty$; elle est également continue dans l'intervalle $(2+\varepsilon, +\infty)$ et décroît de $+\infty$ à 3.

3° $y = \dfrac{1}{x^2}$.

On a le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
y	0	$\nearrow$	$+\infty \mid +\infty$	$\searrow$	0

La fonction y est continue dans l'intervalle $(-\infty, -\varepsilon)$ et croît de 0 à $+\infty$. La fonction inverse est $x = -\sqrt{\dfrac{1}{y}}$. Elle est continue dans l'intervalle $(\varepsilon, +\infty)$ et croît de $-\infty$ à 0 (ε désigne un nombre positif, aussi petit que l'on veut).

La fonction y est continue dans l'intervalle $(\varepsilon, +\infty)$ et décroît de $+\infty$ à 0. La fonction inverse est $x = \sqrt{\frac{1}{y}}$. Elle est continue dans l'intervalle $(\varepsilon, +\infty)$ et décroît de $+\infty$ à 0.

4° $y = \sqrt{x}$.

La fonction y est continue dans l'intervalle $(0, +\infty)$ et croît de 0 à $+\infty$. La fonction inverse est $x = y^2$. Elle est continue dans l'intervalle $(0, +\infty)$ et croît de 0 à $+\infty$.

On peut remarquer que la fonction $x = y^2$ est également continue, mais décroissante, dans l'intervalle $(-\infty, 0)$. Cela provient de ce qu'elle est aussi la fonction inverse de $y = -\sqrt{x}$.

5° $y = x^2 - 4$.

On a le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction y est continue dans l'intervalle $(-\infty, 0)$ et décroît de $+\infty$ à -4. La fonction inverse est $x = -\sqrt{y+4}$. Elle est continue dans l'intervalle $(-4, +\infty)$ et décroît de 0 à $-\infty$.

La fonction y est continue dans l'intervalle $(0, +\infty)$ et croît de -4 à $+\infty$. La fonction inverse est $x = \sqrt{y+4}$. Elle est continue dans l'intervalle $(-4, +\infty)$ et croît de 0 à $+\infty$.

6° $y = x^2 - 6x - 7$.

On a le tableau :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	-16	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction y est continue dans l'intervalle $(-\infty, 3)$ et décroît de $+\infty$ à -16. La fonction inverse est $x = 3 - \sqrt{y+16}$. Elle est continue dans l'intervalle $(-16, +\infty)$ et décroît de 3 à $-\infty$.

La fonction y est continue dans l'intervalle $(3, +\infty)$ et croît de -16 à $+\infty$. La fonction inverse est $x = 3 + \sqrt{y+16}$. Elle est continue dans l'intervalle $(-16, +\infty)$ et croît de 3 à $+\infty$.

279. *La condition nécessaire et suffisante pour que* y *soit une fonction linéaire de* x *est que les accroissements correspondants de* y *et de* x *soient proportionnels.*

I. *Cette condition est nécessaire.* — En effet, considérons la fonction linéaire $y = ax + b$. Pour $x = x_0$, y prend la valeur

$$y_0 = ax_0 + b.$$

Donnons ensuite à x l'accroissement h et soit k l'accroissement correspondant de y. Nous avons

$$y_0 + k = a(x_0 + h) + b;$$

et par suite,

$$k = ah.$$

L'accroissement k de y est donc proportionnel à l'accroissement h de x.

II. *La condition est suffisante.* — En effet, soit y une fonction de x, telle que si nous attribuons à x successivement les valeurs x_0 et x, les valeurs correspondantes de la fonction, y_0 et y, satisfassent à la relation

$$y - y_0 = a(x - x_0), \tag{1}$$

a étant une constante qui ne dépend pas de la valeur arbitraire attribuée à x. En posant $y_0 - ax_0 = b$, la relation (1) devient

$$y = ax + b,$$

et y est une fonction linéaire de x.

279bis. *Chercher les équations des asymptotes horizontales et verticales aux courbes suivantes et montrer que les droites marquées entre parenthèses sont des asymptotes obliques. Déterminer aussi chaque fois la position de la courbe par rapport aux asymptotes.*

1° $y = \dfrac{3x+1}{x-1}$.

Pour x infini, on a $\lim y = 3$; donc la droite $y = 3$ est une asymptote horizontale. Suivant que x décroît ou croît indéfiniment, la différence

$$\frac{3x+1}{x-1} - 3 = \frac{4}{x-1}$$

tend vers zéro par valeurs négatives ou par valeurs positives. Donc la courbe est en-dessous de l'asymptote du côté des x négatifs et elle est au-dessus du côté des x positifs.

Le dénominateur seul de y s'annule pour $x = 1$; donc la droite $x = 1$ est une asymptote verticale. Suivant que x tend vers 1 par valeurs croissantes ou par valeurs décroissantes, y tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$. Donc la courbe est à gauche de l'asymptote du côté des y négatifs et à droite du côté des y positifs.

2° $y = \dfrac{2-x}{3+x}$.

La droite $y + 1 = 0$ est une asymptote horizontale. La courbe est en-dessous de l'asymptote du côté des x négatifs et au-dessus du côté des x positifs.

La droite $x + 3 = 0$ est une asymptote verticale. La courbe est à gauche de l'asymptote du côté des y négatifs et à droite du côté des y positifs.

3° $y = \dfrac{2x^2 - 2x + 1}{x - 1} = 2x + \dfrac{1}{x - 1}$ $(y = 2x)$.

La courbe n'a pas d'asymptote horizontale, car y est infini pour x infini.

La droite $x = 1$ est un asymptote verticale. Suivant que x tend vers 1 par valeurs croissantes ou par valeurs décroissantes, y tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$. Donc la courbe est à gauche de l'asymptote du côté des y négatifs et à droite du côté des y positifs.

La droite $y = 2x$ est une asymptote oblique. Suivant que x tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$, la différence

$$\frac{2x^2 - 2x + 1}{x - 1} - 2x = \frac{1}{x - 1}$$

tend vers zéro par valeurs négatives ou par valeurs positives. Donc la courbe est en-dessous de l'asymptote du côté des x négatifs et au-dessus du côté des x positifs.

4° $y = \dfrac{x^3 + 1}{x^2} = x + \dfrac{1}{x^2}$ $(y = x)$.

La courbe n'a pas d'asymptote horizontale.

La droite $x = 0$ est une asymptote verticale. Si x tend vers zéro, on a $\lim y = +\infty$. Du côté des y positifs, une branche de la courbe est à gauche de l'asymptote et une autre branche est à droite.

La droite $y = x$ est une asymptote oblique. Si x tend vers $\pm\infty$, la différence

$$\frac{x^3 + 1}{x^2} - x = \frac{1}{x^2}$$

tend vers zéro par valeurs positives. La courbe est au-dessus de l'asymptote du côté des x négatifs et du côté des x positifs.

5° $y = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$ $[y = \pm (x + 1)]$.

a) Supposons que x tende vers $-\infty$. La fonction

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{x} = -\sqrt{\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2}}$$

tend vers -1. La fonction

$$y - (-x) = y + x = \sqrt{x^2 + 2x - 3} + x = \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 + 2x - 3} - x}$$

tend vers -1. Donc la droite $y = -x - 1$ est une asymptote oblique. La différence

$$f(x) - (-x - 1) = \frac{-4}{\sqrt{x^2 + 2x - 3} - (x + 1)}$$

tend vers zéro par valeurs négatives. Donc la courbe est en-dessous de l'asymptote du côté des x négatifs.

b) Supposons que x tende vers $+\infty$. La fonction $\frac{y}{x}$ tend vers $+1$ et la différence $y - x$ tend vers $+1$. Donc la droite $y = x + 1$ est une asymptote oblique. La différence $f(x) - (x + 1)$ tend vers zéro par valeurs négatives. Donc la courbe est en-dessous de l'asymptote du côté des x positifs.

6° $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$ $(y = x)$.

Si x tend vers $\pm\infty$, le rapport $\frac{y}{x}$ tend vers 1 et la différence $y - x$ tend vers zéro. Donc la droite $y = x$ est une asymptote oblique.

Suivant que x tend vers $-\infty$ ou $+\infty$, $f(x) - x$ tend vers zéro par valeurs positives ou par valeurs négatives. Donc la courbe est au-dessus de l'asymptote du côté des x négatifs, et en-dessous du côté des x positifs.

CHAPITRE XIII

Fonction exponentielle et logarithme.

280. *Résoudre les équations suivantes sans recourir aux tables.*

1° $10^x = 3$. — On trouve

$$x = (0,\ 2,\ 10,\ 2,\ \ldots).$$

Les quatre premières réduites sont

$$0,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{10}{21},\quad \frac{21}{44}.$$

Comme le dénominateur de la 5e réduite est au moins égal à $21 + 44$ ou 65, l'erreur qu'on commet en adoptant la 4e réduite comme valeur approchée de x, est inférieure à

$$\frac{1}{44.65} = \frac{1}{2860}.$$

2° $2^x = \frac{1}{3}$. — On trouve

$$-x = (1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Les six premières réduites sont

$$1,\quad 2,\quad \frac{3}{2},\quad \frac{8}{5},\quad \frac{19}{12},\quad \frac{65}{41}.$$

L'erreur qu'on commet en adoptant $-\frac{65}{41}$ comme valeur de x, est inférieure à

$$\frac{1}{41(41+12)} = \frac{1}{2173}.$$

3° $9^x = 15$. — On trouve

$$x = (1, 4, 3, 3, \ldots).$$

Les quatre premières réduites sont

$$1, \frac{5}{4}, \frac{16}{13}, \frac{53}{43}.$$

L'erreur qu'on commet en adoptant la 4e réduite comme valeur de x est inférieure à

$$\frac{1}{43(43+13)} = \frac{1}{2408}.$$

4° $\left(\frac{250}{3}\right)^x = \frac{5}{2}$. — On trouve

$$x = (0, 4, 1, 4, 1, \ldots).$$

Les cinq premières réduites sont

$$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{5}{24}, \frac{6}{29}.$$

L'erreur qu'on commet en adoptant la 5e réduite comme valeur de x, est inférieure à

$$\frac{1}{29(29+24)} = \frac{1}{1537}.$$

281. *Résoudre les équations suivantes sans recourir aux tables.*

1° $4^x = 0,0625$. — L'équation peut s'écrire

$$4^x = 4^{-2}; \quad \text{d'où} \quad x = -2.$$

2° $4.2^x = 0,25$. — L'équation peut s'écrire

$$2^x = \frac{1}{16} = 2^{-4}; \quad \text{d'où} \quad x = -4.$$

3° $\left(\frac{5}{3}\right)^{x^2-3x} = \left(\frac{3}{5}\right)^{2x-2}$. — L'équation peut s'écrire

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{x^2-3x} = \left(\frac{5}{3}\right)^{2-2x}.$$

Par suite, on a

$$x^2 - 3x = 2 - 2x \quad \text{ou} \quad x^2 - x - 2 = 0.$$

Cette équation donne $x' = 2$; $x'' = -1$.

4° $\sqrt{8^x} = 0,125$. — Cette équation peut s'écrire

$$8^{\frac{x}{2}} = 8^{-1}; \quad \text{d'où} \quad x = -2.$$

5° $144^x = 2\sqrt{3}$. — Cette équation peut s'écrire

$$12^{2x} = 12^{\frac{1}{2}}; \quad \text{d'où} \quad x = \frac{1}{4}.$$

6° $54^{x+1} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{6}$. — Cette équation peut s'écrire

$$54^{x+1} = \frac{1}{3\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{54}} = 54^{-\frac{1}{3}}.$$

Par suite, $\quad x + 1 = -\dfrac{1}{3} \quad \text{et} \quad x = -\dfrac{4}{3}.$

7° $(4^{3-x})^{2-x} = 1$. — Cette équation peut s'écrire

$$4^{(3-x)(2-x)} = 4^0, \quad \text{ou} \quad (3-x)(2-x) = 0.$$

Par suite, $x' = 3$; $x'' = 2$.

8° $3^{\sqrt{x}} = 243$. — Cette équation peut s'écrire

$$3^{\sqrt{x}} = 3^5; \quad \text{d'où} \quad \sqrt{x} = 5 \quad \text{et} \quad x = 25.$$

9° $\sqrt[x+1]{4} = \sqrt[3x-1]{16}$. — Cette équation peut s'écrire

$$4^{\frac{1}{x+1}} = 4^{\frac{2}{3x-1}}; \quad \text{d'où} \quad 3x - 1 = 2x + 2 \quad \text{et} \quad x = 3.$$

282. *Résoudre les équations suivantes sans recourir aux tables.*

1° $2^{x+3} + 4^{x+1} = 320$. — L'équation peut s'écrire

$$8.2^x + 4.4^x = 320 \quad \text{ou} \quad 2^{2x} + 2.2^x - 80 = 0.$$

Par suite, $2^x = 8$ ou -10.

L'équation $2^x = 8$ donne $x = 3$. L'équation $2^x = -10$ n'a pas de solution.

2° $5.9^x - 7.3^x = 3456$. — Cette équation donne

$$3^x = 27 \quad \text{et} \quad 3^x = -25{,}6.$$

L'équation $3^x = 27$ donne $x = 3$. L'équation $3^x = -25{,}6$ n'a pas de solution.

3° $3.2^{x+3} = 192.3^{x-3}$. — On a

$$3.8.2^x = \frac{192}{27}3^x;$$

d'où, en simplifiant, $\quad \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \dfrac{8}{27} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3; \quad x = 3.$

4° $x^x - x^{-x} = 3(1 + x^{-x})$. — L'équation peut s'écrire

$$x^x - \frac{1}{x^x} = 3\left(1 + \frac{1}{x^x}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{x^{2x} - 1}{x^x} = \frac{3(x^x + 1)}{x^x}.$$

L'équation se dédouble en $\quad \dfrac{x^x + 1}{x^x} = 0 \quad \text{et} \quad x^x - 1 = 3.$

a) La première équation peut s'écrire $x^x + 1 = 0$; d'où $x = -1$.
b) L'équation $x^x - 1 = 3$ donne $x^x = 4 = 2^2$; d'où $x = 2$.
Les réponses sont $x = -1$ et $x = 2$.

5° $3^{x+1} + 3^{x-2} - \frac{15}{3^{x-1}} = \frac{247}{3^{x-2}}$.

L'équation peut s'écrire successivement

$$3.3^x + \frac{3^x}{9} - \frac{15.3}{3^x} = \frac{247.9}{3^x} \quad \text{ou} \quad 3(3^x)^2 + \frac{(3^x)^2}{9} - 45 = 247.9;$$

ou encore, $28(3^x)^2 = 756.27$; $(3^x)^2 = 27^2$; $3^x = 27$.
Par suite, $x = 3$.

6° $3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4} = 363$.
L'équation peut s'écrire

$$3^{x-4}(3^4 + 3^3 + 3^2 + 3 + 1) = 363 \quad \text{ou} \quad 3^{x-4} = \frac{363}{121} = 3.$$

Par suite, $x - 4 = 1$ ou $x = 5$.

283. *Résoudre les équations suivantes :*

1° $4^{2^x} = 2$.

L'équation peut s'écrire $4^{2^x} = 4^{\frac{1}{2}}$.

Par suite, $2^x = \frac{1}{2} = 2^{-1}$ et $x = -1$.

2° $5^{3^x} = 7$.
On a

$$3^x \log 5 = \log 7$$

et

$$x = \frac{\log\log 7 - \log\log 5}{\log 3} = \frac{\log 0{,}84\,510 - \log 0{,}69\,897}{0{,}47\,712}$$

$$= \frac{\overline{1},92\,691 - \overline{1},84\,446}{0{,}47\,712} = \frac{0{,}08\,245}{0{,}47\,712} = 0{,}172...$$

3° $(3^2)^x = 3^{2^x}$.
Cette équation peut s'écrire $3^{2x} = 3^{2^x}$.
Par suite, on doit avoir

$$2^x = 2x.$$

Cette équation est évidemment vérifiée par $x = 1$ et $x = 2$. En traçant les courbes $y = 2^x$ et $y = 2x$, on voit que l'équation n'a pas d'autres racines.

4° $x^{\log_x 9} = x - 1$.
Le premier membre est égal à 9. On a donc

$$x - 1 = 9 \quad \text{ou} \quad x = 10.$$

5° $\log_x 5 = \log_5 x$.

Le premier membre est égal à $\frac{1}{\log_5 x}$. En remplaçant, on a $(\log_5 x)^2 = 1$.

a) Si $\log_5 x = 1$, on a $x = 5$.

b) Si $\log_5 x = -1$, on a $x = \frac{1}{5}$.

6° $\log_2 (\log_x 10) = 2$.
Cette équation donne $\log_x 10 = 2^2 = 4$. On a donc

$$x^4 = 10 \quad \text{et} \quad x = \sqrt[4]{10}.$$

7° $3^{x+1} + 18.3^{-x} = 29$.
On peut écrire

$$3.3^x + \frac{18}{3^x} = 29 \quad \text{ou} \quad 3.3^{2x} - 29.3^x + 18 = 0.$$

Cette équation donne $3^x = 9$ et $3^x = \frac{2}{3}$.

a) L'équation $3^x = 9$ peut s'écrire $3^x = 3^2$; d'où $x = 2$.

b) L'équation $3^x = \frac{2}{3}$ donne $3^{x+1} = 2$; d'où $(x + 1) \log 3 = \log 2$.

$$x + 1 = \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{0{,}30\ 103}{0{,}47\ 712}; \quad x = -0{,}37.$$

8° $2.3^{3x} - 3^{2x} + 3^x - 2 = 0$.
L'équation peut s'écrire

$$(3^x - 1)(2.3^{2x} + 3^x + 2) = 0.$$

L'expression entre parenthèses peut être considérée comme un trinôme du second degré en 3^x. Ce trinôme est toujours positif. L'équation se réduit donc à $3^x = 1$ ou $x = 0$.

9° $2^{2x} - 5.2^x + 5.2^{-x} - 2^{-2x} = 0$.
L'équation peut s'écrire successivement

$$2^{4x} - 5.2^{3x} + 5.2^x - 1 = 0$$

ou

$$(2^{2x} - 1)(2^{2x} - 5.2^x + 1) = 0.$$

On trouve ainsi $2^x = \pm 1$; $2^x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$.

a) L'équation $2^x = 1$ donne $x = 0$.

b) On a approximativement

$$2^x = \frac{5 - \sqrt{21}}{2} = \frac{0{,}418}{2} = 0{,}209.$$

$$x = \frac{\log 0{,}209}{\log 2} = \frac{\bar{1}{,}32\ 015}{0{,}30\ 103} = -2{,}258.$$

c) On a approximativement

$$2^x = \frac{5 + \sqrt{21}}{2} = \frac{9{,}582}{2} = 4{,}791.$$

$$x = \frac{\log 4{,}791}{\log 2} = \frac{0{,}68\ 043}{0{,}30\ 103} = 2{,}260.$$

284. *Résoudre les équations suivantes :*

1° $\log(35 - x^3) = 3 \log(5 - x)$.

L'équation peut s'écrire

$$\log(35 - x^3) = \log(5 - x)^3 \quad \text{ou} \quad 35 - x^3 = (5 - x)^3.$$

Cette équation donne

$$x^2 - 5x + 6 = 0; \quad \text{d'où} \quad x' = 3; \quad x'' = 2.$$

2° $\log(7x - 9)^2 + 2 \log(3x - 4) = 2$.

L'équation peut s'écrire

$$\log(7x - 9) + \log(3x - 4) = 1 \quad \text{ou} \quad (7x - 9)(3x - 4) = 10.$$

En effectuant, on trouve

$$21x^2 - 55x + 26 = 0; \quad \text{d'où} \quad x' = 2; \quad x'' = \frac{13}{21}.$$

La racine $x'' = \frac{13}{21}$ doit être rejetée, car, pour cette valeur de x, on a

$$3x - 4 < 0.$$

3° $x^{6+\log x} = 0{,}24^{9(3\log 2 + \log 3)}$.

En égalant les logarithmes des deux membres, il vient

$$(6 + \log x)\log x = 9(3\log 2 + \log 3)\log 0{,}24,$$

ou encore, en remplaçant $3\log 2 + \log 3$ par $\log 2^3.3 = \log 24$,

$$(6 + \log x)\log x = 9 \log 24 \log 0{,}24 = 9(\log 24)^2 - 18 \log 24.$$

On obtient ainsi l'équation

$$(\log x)^2 + 6 \log x - 9(\log 24)^2 + 18 \log 24 = 0,$$

dont le réalisant est $(3 \log 24 - 3)^2$. On trouve ensuite :

a) $\log x = -3 + (3 \log 24 - 3) = 3 \log 24 - 6 = \log \frac{24^3}{10^6}$; $x = \frac{6^3}{5^6}$.

b) $\log x = -3 - (3\log 24 - 3) = -3\log 24 = \log 24^{-3}$ et $x = 24^{-3}$.

4° $\log_5(5^x - 7) - \log_{25}324 = 2 - x$.

Passons aux logarithmes de base 5, l'indice 5 étant sous-entendu. On a

$$\log_{25}324 = \log 324 \times \frac{1}{\log 25} = \frac{1}{2} \log 324 = \log \sqrt{324} = \log 18.$$

En remplaçant dans l'équation proposée, il vient

$$\log(5^x - 7) - \log 18 = 2 - x \quad \text{ou} \quad \log \frac{5^x - 7}{18} = \log 5^{2-x}.$$

On a donc $\quad \dfrac{5^x - 7}{18} = 5^{2-x} \quad$ ou $\quad \dfrac{5^x - 7}{18} = \dfrac{25}{5^x}$.

En posant $5^x = y$, cette équation donne

$$y^2 - 7y + 450 = 0; \quad \text{d'où} \quad y' = 25; \quad y'' = -18.$$

La racine $y'' = -18$ doit être écartée. La racine $y' = 25$ donne

$$5^x = 25 \quad \text{ou} \quad x = 2.$$

5° $2 \log \frac{x}{3} + 3 \log \frac{x}{2} = 3 \log \frac{x}{5} + \log 15{,}625.$

L'équation peut s'écrire

$$\frac{x^2}{9} \times \frac{x^3}{8} = 15{,}625 \times \frac{x^3}{125}$$

ou encore, puisque nous devons supposer $x > 0$,

$$\frac{x^2}{9.8} = 0{,}125; \quad \frac{x^2}{9} = 1; \quad x = 3.$$

6° $\log \sqrt{7x + 5} + \log \sqrt{2x + 3} = 1 + \log 4.5.$

L'équation peut s'écrire

$$\frac{1}{2} \log (7x + 5) + \frac{1}{2} \log (2x + 3) = 1 + \log 4{,}5,$$

ou

$$\log (7x + 5) + \log (2x + 3) = 2 + 2 \log 4{,}5.$$

En passant des logarithmes aux nombres, il vient

$$(7x + 5)(2x + 3) = 2025 \quad \text{ou} \quad 14x^2 + 31x - 2010 = 0.$$

Les racines de cette équation sont

$$x = \frac{-31 \pm \sqrt{113\,521}}{28}.$$

L'une des racines est négative et vaut environ $-13{,}14$; elle doit être rejetée. La racine positive vaut environ 10,925.

7° $(\log_{x+6} x)^{-1} + \log_x(x - 1) = 2 + (\log_2 x)^{-1}.$

Passons aux logarithmes de base x, en sous-entendant l'indice x. On peut écrire

$$(\log_{x+6} x)^{-1} = \frac{1}{\log_{x+6} x} = \log (x + 6) \quad \text{et} \quad (\log_2 x)^{-1} = \frac{1}{\log_2 x} = \log 2.$$

L'équation devient donc

$$\log (x + 6) + \log (x - 1) = \log x^2 + \log 2.$$

De là, on déduit l'équation

$$(x + 6)(x - 1) = 2x^2 \quad \text{ou} \quad x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Les racines sont $x = 2$ et $x = 3$.

8° $[\log (16x - 5 - x^2) + \log_x 2] \times \log_{x+5} x \times \log_x x = 2.$ — On a

$$\log_{x+5} x = \frac{1}{\log_x (x + 5)} \quad \text{et} \quad \log_x x = 1.$$

L'équation devient donc, en sous-entendant l'indice x,

$$\log (16x - 5 - x^2) + \log 2 = 2 \log (x + 5).$$

De là, on déduit

$$2(16x - 5 - x^2) = (x + 5)^2 \quad \text{ou} \quad 3x^2 - 22x + 35 = 0.$$

Cette équation admet les racines $x' = 5$ et $x'' = \frac{7}{3}$ qui conviennent, car elles rendent positives les expressions $x + 5$ et $16x - 5 - x^2$.

285. *Résoudre et discuter les équations suivantes, sachant que les lettres* a, b,... *représentent des nombres positifs.*

1° $a^{b^x} = a'^{b'^x}$.

1re PARTIE : a et $a' \neq 1$. — L'équation peut s'écrire

$$b^x \log a = b'^x \log a' \quad \text{ou} \quad \left(\frac{b}{b'}\right)^x = \frac{\log a'}{\log a}. \tag{1}$$

1er cas : $b \neq b'$.

a) Si a et a' sont supérieurs à 1, on a

$$x = \frac{\log \log a' - \log \log a}{\log b - \log b'}.$$

b) Si a et a' sont inférieurs à 1, on a

$$x = \frac{\log(-\log a') - \log(-\log a)}{\log b - \log b'}.$$

c) Si l'un des deux nombres a et a' est supérieur à 1 et l'autre inférieur à 1, l'équation est impossible, car, dans ce cas, le second membre de l'équation (1) est négatif, alors que le premier membre est toujours positif.

2e cas : $b = b'$. — L'équation (1) devient

$$1^x = \frac{\log a'}{\log a}.$$

Cette équation est indéterminée pour $a = a'$; elle est impossible pour $a \neq a'$.

2e PARTIE : les nombres a et a' ne sont pas tous deux différents de 1.

1er cas : Un seul des nombres a et a' est égal à 1. — Dans ce cas l'équation est impossible.

Ainsi, si $a = 1$ et $a' \neq 1$, le premier membre de l'équation proposée est égal à 1, tandis que le second membre est différent de 1, quel que soit x.

2e cas : $a = a' = 1$. — L'équation proposée est indéterminée dans ce cas, car les deux membres sont égaux à 1, quel que soit x.

2° $a^{b^{c^x}} = d$.

Par convention, nous considérons les expressions

$$a^{b^{c^x}} \quad \text{et} \quad a^{(b^{c^x})}$$

comme étant égales.

a) Si $a = d = 1$, l'équation est indéterminée.

b) Si $a = 1$ et $d \neq 1$, l'équation est impossible.

c) Si $a \neq 1$ et $d = 1$, l'équation devient, en égalant les logarithmes des deux membres,

$$b^{c^x} = 0.$$

Cette équation est impossible, car b et c sont positifs par hypothèse.

d) Si a et d sont différents de l'unité, l'équation peut s'écrire

$$b^{c^x} \log a = \log d \quad \text{ou} \quad b^{c^x} = \frac{\log d}{\log a}.$$

En posant $\dfrac{\log d}{\log a} = p$, l'équation devient

$$b^{c^x} = p$$

et on est ramené à une équation déjà discutée (*Compléments*, **305**, V).

3° $(a^4 - 2a^2b^2 + b^4)^{x-1} = \dfrac{(a-b)^{2x}}{(a+b)^2}$.

L'équation proposée est indéterminée si $a = b$. On ne peut pas supposer $a = -b$, car a et b représentent des nombres positifs.

Dans ce qui suit, nous supposons $a \neq b$. Dans ces conditions, le trinôme $a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = (a^2 - b^2)^2$ est toujours positif.

1er **cas** : $a > b$. — L'équation peut s'écrire

$$(a^2 - b^2)^{2(x-1)} = \left[\frac{(a-b)^x}{a+b}\right]^2;$$

ou encore, $$(a^2 - b^2)^{x-1} = \frac{(a-b)^x}{a+b},$$

car les deux membres représentent des nombres positifs $(a > b)$.

Divisons les deux membres par $(a-b)^{x-1}$ qui est positif. L'équation devient

$$(a+b)^{x-1} = \frac{a-b}{a+b} \quad \text{ou} \quad (a+b)^x = a - b. \tag{1}$$

On trouve ainsi $$x = \frac{\log(a-b)}{\log(a+b)},$$

pourvu que $a + b$ soit différent de 1.

2e **cas** : $a < b$. — L'équation peut s'écrire successivement

$$(b^2 - a^2)^{2(x-1)} = \left[\frac{(b-a)^x}{a+b}\right]^2; \quad (b^2 - a^2)^{x-1} = \frac{(b-a)^x}{a+b};$$

On obtient ainsi l'équation $(b+a)^x = b - a$, qui donne

$$x = \frac{\log(b-a)}{\log(b+a)},$$

pourvu que $a + b$ soit différent de 1.

3e **cas** : $a + b = 1$. — Comme on suppose $a \neq b$, l'équation proposée peut s'écrire

$$(a-b)^{2x-2} = (a-b)^{2x} \quad \text{ou} \quad (a-b)^{2x} = (a-b)^{2x}(a-b)^2.$$

Cette équation exige $a - b = \pm 1$; elle est donc impossible, car l'hypothèse $a - b = 1$ entraîne $b = 0$ et l'hypothèse $a - b = -1$ entraîne $a = 0$.

4° $a.a^3.a^5\ldots a^{2x-1} = n$.

L'équation peut s'écrire $a^{x^2} = n$. Par suite, on a

$$x^2 = \frac{\log n}{\log a},$$

pourvu que a soit différent de 1.

a) Si a et n sont d'un même côté de l'unité, on a

$$x = \sqrt{\frac{\log n}{\log a}}.$$

Cette solution n'est acceptable que si elle est entière, car l'énoncé exige que $2x - 1$ soit un nombre entier impair.

b) Si a et n sont de part et d'autre de l'unité, l'équation est impossible.

c) Si $a = 1$, l'équation devient $1^{x^2} = n$.

Elle est indéterminée si $n = 1$; elle est impossible si $n \neq 1$.

286. *Résoudre les systèmes suivants :*

1° $7^x = 2y$; $2^x = 7y$.

En divisant membre à membre, il vient

$$\left(\frac{7}{2}\right)^x = \frac{2}{7} \quad \text{ou} \quad x = -1.$$

Rép. $x = -1$; $y = \frac{1}{14}$.

2° $2^x = 8^{y+1}$; $9^y = 3^{x-9}$.

Ce système donne

$$x = 3(y + 1); \quad 2y = x - 9.$$

Rép. $x = 21$; $y = 6$.

3° $2^x.3^y = 560$; $5x = 7y$.

En remplaçant y dans la 1re équation, il vient

$$2^x.3^{\frac{5x}{7}} = 560 \quad \text{ou} \quad (2^7.3^5)^{\frac{x}{7}} = 560.$$

On a approximativement

$$\frac{x}{7} = \frac{\log 560}{7 \log 2 + 5 \log 3} = \frac{2,74\,819}{4,49\,281}$$

et

$$x = \frac{19,23\,733}{4,49\,281} = 4,282.$$

Rép. $x = 4,282$; $y = 3,058$.

4° $\sqrt[x]{x + y} = 2$; $(x + y)3^x = 279\,936$.

La première équation donne

$$\frac{1}{x}\log(x + y) = \log 2 \quad \text{ou} \quad \log(x + y) = x \log 2.$$

La seconde équation, qui peut s'écrire $(x+y)3^x = 2^7.3^7$, donne
$$\log(x+y) + x\log 3 = 7\log 2 + 7\log 3.$$
En éliminant $\log(x+y)$, il vient
$$x(\log 3 + \log 2) = 7(\log 3 + \log 2); \quad \text{d'où} \quad x = 7.$$
La seconde équation donnée devient, par substitution,
$$(7+y)3^7 = 2^7.3^7; \quad \text{d'où } y = 2^7 - 7 = 121.$$
Rép. $x = 7$; $y = 121$.

5° $(y+1)^x = \sqrt[3]{3}$; $(y+1)^{3x} = y^2 - 1$.

En élevant la première équation au cube et en remplaçant $(y+1)^{3x}$ par $y^2 - 1$, il vient $y^2 - 1 = 3$; d'où $y = \pm 2$.

a) Si $y = 2$, la seconde équation devient
$$3^{3x} = 3; \quad \text{d'où } x = \frac{1}{3}.$$
b) Si $y = -2$, on aboutit à l'équation impossible $(-1)^{3x} = 3$.

Rép. $x = \frac{1}{3}$; $y = 2$.

6° $x^{x+y} = y^3$; $y^{x+y} = x^{12}$.

Ces équations donnent, en supposant x et y positifs,
$$(x+y)\log x = 3\log y; \quad (x+y)\log y = 12\log x.$$
En divisant membre à membre, il vient, si x et y sont différents de 1,
$$4(\log x)^2 = (\log y)^2 \quad \text{ou} \quad \log y = \pm 2\log x.$$
De cette équation, on déduit $y = x^2$ ou $y = x^{-2}$.

a) Si $y = x^2$, la première équation donnée devient
$$x^{x^2+x} = x^6 \quad \text{ou} \quad x^2 + x - 6 = 0. \tag{1}$$
La seule racine acceptable de l'équation (1) est $x = 2$. La valeur correspondante de y est 4.

b) Si $y = x^{-2}$, la première équation donnée devient
$$x^{x+x^{-2}} = x^{-6} \quad \text{ou} \quad x + x^{-2} = -6. \tag{2}$$
L'équation (2) peut s'écrire $x^3 + 6x^2 + 1 = 0$.

En construisant le graphique de la fonction $z = x^3 + 6x^2 + 1$ (Voir Chap. XV), on voit que l'équation $x^3 + 6x^2 + 1 = 0$ n'a pas de racine positive, mais seulement une racine négative, inférieure à -4.

Remarque. — Comme nous avons employé les logarithmes, nous avons dû supposer x et y positifs et différents de 1; mais rien ne dit que le système proposé n'admette d'autres solutions que celle que nous avons trouvée.

En particulier, si nous considérons la seconde racine $x = -3$ de l'équation (1), nous aurons $y = 9$; et, en vérifiant, on voit que $x = -3$, $y = 9$ est bien une solution du système proposé. De même, on constate qu'il est vérifié pour $x = y = 1$.

Rép. $x_1 = 2$, $y_1 = 4$; $x_2 = -3$, $y_2 = 9$; $x_3 = y_3 = 1$.

7° $x^y = y^x$; $100^x = 10^y$.

La seconde équation peut s'écrire $10^{2x} = 10^y$ et on a

$$y = 2x.$$

En remplaçant dans la première, il vient

$$x^{2x} = (2x)^x \quad \text{ou} \quad (x^2)^x = (2x)^x.$$

On en déduit $\quad x^2 = 2x \quad$ et $\quad x' = 2, \quad x'' = 0.$

Rép. $x = 2$; $y = 4$.

8° $x^y = y^x$; $x^p = y^q$.

a) Le système est vérifié pour $x = y = 1$, quels que soient p et q.

b) Si $p = q$, le système se réduit à l'équation unique $x^y = y^x$, qui est vérifiée par $x = y$. Toutefois, si $p = q = 0$, on doit écarter la solution $x = y = 0$.

c) Si $p = 0$ et $q \neq 0$, la seconde équation devient

$$y^q = 1 \quad \text{ou} \quad y = 1.$$

La première équation devient $\quad x = 1^x$; $\quad$ d'où $\quad x = 1$.

On aboutirait à la même solution, en supposant $q = 0$, $p \neq 0$.

d) Dans ce qui suit, nous supposons p et q positifs, différents l'un de l'autre et différents de zéro. Nous supposons également que x et y représentent des nombres positifs et différents de 1.

Le système peut s'écrire

$$y \log x = x \log y; \quad p \log x = q \log y.$$

Dans la première équation, remplaçons $\log x$ par sa valeur tirée de la seconde. Il vient ainsi

$$\frac{qy \log y}{p} = x \log y.$$

Par suite $\dfrac{qy}{p} = x \quad$ ou $\quad x = ky$, en posant $\dfrac{q}{p} = k$.

L'équation $x^p = y^q$ donne alors

$$x = y^k; \text{ puis } k = y^{k-1}.$$

On en déduit $\quad y = k^{\frac{1}{k-1}} \quad$ et $\quad k = x^{\frac{k}{k-1}}.$

9° $x^y = y^x$; $p^x = q^y$.

a) Si $p = q = 1$, la seconde équation est indéterminée et le système se réduit à la première équation. Il en serait de même si on avait $p = q = 0$.

b) Si $p = q \neq 1$, le système se réduit à l'équation $x = y$.

c) Dans ce qui suit, nous supposons p et q positifs, différents l'un de l'autre et différents de l'unité. Nous supposons également que x et y représentent des nombres positifs.

Le système donne

$$y \log x = x \log y; \quad x \log p = y \log q.$$

De ces égalités, on déduit

$$\frac{y}{x} = \frac{\log y}{\log x} = \frac{\log p}{\log q} = k.$$

De là, on déduit le système,

$$y = kx \quad \text{et} \quad y = x^k.$$

Ce système donne $x = k^{\frac{1}{k-1}}$; $y = k^{\frac{k}{k-1}}$.

10° $x^x = y^{2x}$; $2^z = 2.4^x$; $x + y + z = 16$.

La 2e et la 3e équation donnent

$$z = 2x + 1;\ y = 16 - x - z = 15 - 3x.$$

Mais d'autre part, on tire de la 1re équation $x = y^2$, ou, en remplaçant y et z par leur valeur,

$$9x^2 - 92x + 224 = 0; \quad \text{d'où} \quad x' = \frac{56}{9}; \quad x'' = 4.$$

Rép. $x' = \dfrac{56}{9}$, $y' = -\dfrac{11}{3}$, $z' = \dfrac{121}{9}$; $x'' = 4$, $y'' = 3$, $z'' = 9$.

11° $2^{y-1} = 16^{x-1}$; $3^{\frac{1}{x}} = 9^{\frac{1}{z}}$; $\sqrt[x]{2^{y-3}} = \sqrt[2x]{8^{z-2}}$.

En égalant les exposants, ce système donne

$$y - 1 = 4(x - 1); \quad 2x = z; \quad \frac{y-3}{x} = \frac{3z-6}{2x}.$$

Rép. $x = 3$; $y = 9$; $z = 6$.

287. *Calculer les bases des systèmes dans lesquels on a :*

1° $\log_x \sqrt{2} = 3$; **Rép.** $x = \sqrt[6]{2}$.

2° $\log_y \sqrt{3} = \sqrt{2}$; » $y = \sqrt[4]{3^{\sqrt{2}}}$

3° $\log_z 0{,}1 = 2$; » $z = \dfrac{1}{10}\sqrt{10}$.

288. *Calculer la base du système dont le module absolu est* — 1 *ou* p.

1° Soit x la base du système dont le module absolu est -1. On a

$$\log_x e = -1 \quad \text{ou} \quad x^{-1} = e.$$

De cette égalité, on déduit

$$\log_{10} x = -\log_{10} e = -M_{10} = -0{,}434\ 294 \ldots = \bar{1}{,}565\ 705\ldots$$

et approximativement $x = 0{,}36788$.

2° Si le module absolu d'un système est p, on trouve d'une façon analogue que le logarithme décimal de sa base est $\dfrac{1}{p} \times M_{10} = \dfrac{1}{p} \times 0{,}434\ 294\ldots$

289. *Calculer les logarithmes népériens des nombres* 17 *et* 0,32.

On obtient le logarithme népérien d'un nombre en multipliant son logarithme décimal par l'inverse du module absolu du système décimal, lequel inverse est égal à 2,302 585...

Rép. 1° 2,83 322; 2° $\overline{2}$,86 057.

290. *Calculer les logarithmes des nombres* 21 *et* 0,05 *dans le système à base* 12.

On a, en général,

$$\log_{12}N = \log_{10}N \times \frac{1}{\log_{10}12} = \log_{10}N \times 0{,}92\,663.$$

De là, on déduit :

1° $\log_{12}21 = 1{,}32\,222 \times 0{,}92\,663 = 1{,}22\,521.$

2° $\log_{12}0{,}05 = \overline{2}\;69\,897 \times 0{,}92\,663 = \overline{2}{,}79\,443.$

291. *Calculer le logarithme de* 38 *dans le système dont le module absolu est* $\frac{1}{2}$ *ou* $-\frac{3}{4}$.

1° Soit x la base du système dont le module absolu est 0,5. On a

$$\log_x 38 = \log_{10}38 \times \frac{1}{\log_{10}x}.$$

Mais on a $\log_x e = \frac{1}{2}$ ou $\log_{10}e \times \frac{1}{\log_{10}x} = \frac{1}{2}.$

On a donc $\frac{1}{\log_{10}x} = \frac{1}{2\log_{10}e} = \frac{1}{2M_{10}} = 1{,}15\,129.$

Par suite, $\log_x 38 = 1{,}57\,978 \times 1{,}15\,129 = 1{,}81\,878.$

2° Soit y la base du système dont le module absolu est $-\frac{3}{4}$. On trouve comme précédemment

$$\log_y 38 = \log_{10}38 \times \frac{-3}{4M_{10}} = -1{,}57\,978 \times 1{,}72\,694 = \overline{3}{,}27\,182.$$

292. *Calculer le logarithme de* 137 *dans le système où le nombre* 0,7348 *a pour logarithme* $\overline{2}$,13.

Soit x la base du système en question. On a **(300)**

$$\frac{\log_x 137}{\log_x 0{,}7348} = \frac{\log_{10}137}{\log_{10}0{,}7348}.$$

Par suite,

$$\log_x 137 = \overline{2}{,}13 \times \frac{\log_{10}137}{\log_{10}0{,}7348} = \frac{\overline{2}{,}13 \times 2{,}13\,672}{\overline{1}{,}86\,617} = 29{,}85\,628.$$

293. 1° *Calculer la base et le module absolu du système dans lequel*

$$\log 20 = 2{,}161.$$

a) Soit x la base inconnue. On a

$$x^{2{,}161} = 20 \quad \text{et} \quad \log_{10} x = \frac{\log_{10} 20}{2{,}161} = 0{,}60\,205.$$

Le nombre x dont le logarithme vulgaire est 0,60 205, est égal approximativement à 4.

b) Le module absolu du système de base 4 est

$$\log_4 e = \log_{10} e \times \frac{1}{\log_{10} 4} = \frac{0{,}434\,2945}{0{,}60\,206}.$$

On trouve environ 0,72.

2° *Mêmes questions, si* $\log 50 = \overline{3}{,}1781$.

a) Soit y la base inconnue. On trouve comme précédemment

$$\log_{10} y = \frac{\log_{10} 50}{\overline{3}{,}1781} = \frac{1{,}69\,897}{-\,2{,}8219} = -\,0{,}60\,206 = \operatorname{colog} 4 = \log \frac{1}{4}.$$

La base y est égale à $\frac{1}{4}$.

b) Le module absolu du système de base $\frac{1}{4}$ est

$$\log_{0{,}25} e = \log_{10} e \times \frac{1}{\log_{10} 0{,}25} = \frac{0{,}434\,2945}{-\,0{,}60\,206} = -\,0{,}72.$$

294. *Calculer le module du système de base 5 par rapport aux logarithmes vulgaires, ainsi que son module absolu.*

a) Le module du système par rapport aux logarithmes vulgaires est

$$\frac{1}{\log_{10} 5} = \frac{1}{0{,}69\,897} = 1{,}4306\ldots$$

b) Son module absolu est

$$\log_5 e = \log_{10} e \times \frac{1}{\log_{10} 5} = 0{,}4343 \times 1{,}4306 = 0{,}62\,131.$$

295. *Calculer la base et le module absolu du système dont le module, par rapport aux logarithmes vulgaires, est* $\frac{1}{2}$.

a) Soit x la base inconnue. On a

$$\frac{1}{\log_{10} x} = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \log_{10} x = 2.$$

La base est donc 100.

b) Le module absolu est

$$\log_{100} e = \log_{10} e \times \frac{1}{\log_{10} 100} = \frac{0{,}434\,2945}{2} = 0{,}217\,1473.$$

296. *Calculer la base du système dont le module absolu est le double du module absolu des logarithmes vulgaires.*

Soit x la base inconnue. On a

$$\log_x e = 2 \log_{10} e$$

et aussi

$$\log_x e = \log_{10} e \times \frac{1}{\log_{10} x}.$$

On a donc $\log_{10} x = \frac{1}{2}$ et $x = \sqrt{10} = 3{,}1622\ldots$

297. *Calculer le logarithme de* a^{b^c} *dans le système de base* a^b.

Ce logarithme est b^{c-1}, car on a

$$(a^b)^{b^{c-1}} = a^{b^c}.$$

298. *Dans quels systèmes le nombre* 5 *admet-il un logarithme rationnel?*

Soit x la base du système dans lequel 5 admet un logarithme rationnel m. On a

$$x^m = 5 \quad \text{ou} \quad x = 5^{\frac{1}{m}}.$$

Donc x est une puissance de 5 à exposant rationnel quelconque.

299. *Quelle est la base du système dans lequel le nombre entier* a *est égal à son logarithme?*

L'égalité $x^a = a$ donne $x = a^{\frac{1}{a}}$.

300. *Le rapport des logarithmes de deux nombres est le même, quel que soit le système que l'on considère.*

En effet, si nous considérons les logarithmes des nombres M et N dans deux systèmes différents de bases a et b, nous aurons

$$\log_a M = \log_b M \times \log_a b.$$
$$\log_a N = \log_b N \times \log_a b;$$

En divisant membre à membre, il vient

$$\frac{\log_a M}{\log_a N} = \frac{\log_b M}{\log_b N}.$$

301. *En désignant par* $M_{p,q}$ *le module du système de base* q *par rapport au système de base* p, *montrer que l'on a* $M_{a,b} = \frac{M_{a,a'}}{M_{b,a'}}$.

On a : $M_{a,b} = \log_b a;$

$$M_{a,a'} = \log_{a'} a = \log_b a \times \frac{1}{\log_b a'};$$

$$M_{b,a'} = \frac{1}{\log_b a'}.$$

En divisant les deux dernières égalités membre à membre, il vient

$$\frac{M_{a,a'}}{M_{\ ,a'}} = \log_b a = M_{a,b}.$$

302. *Montrer que l'on a* $\log_a N = (1 + \log_a m) \log_{am} N$.

En effet, on a

$$\log_{am} N = \log_a N \times \frac{1}{\log_a am} = \log_a N \times \frac{1}{1 + \log_a m}.$$

303. *Quand* α *tend vers zéro, on a*

$$\lim \frac{\alpha}{\log_e (1 + \alpha)} = 1 \quad \textit{et} \quad \lim \frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \log_e a.$$

1° On peut écrire

$$y = \frac{\alpha}{\log_e (1 + \alpha)} = 1 : \frac{1}{\alpha} \log_e (1 + \alpha) = 1 : \log_e (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Mais le logarithme est une fonction continue pour toutes les valeurs de la variable indépendante et $\lim (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$, pour $\alpha = 0$. On a donc

$$\lim y = \frac{1}{\log_e e} = \frac{1}{1} = 1.$$

2° Supposons a positif et différent de 1 et posons $a^\alpha - 1 = x$. Il vient

$$a^\alpha = 1 + x; \quad \alpha \log_e a = \log_e (1 + x); \quad \alpha = \frac{\log_e (1 + x)}{\log_e a};$$

et par suite,

$$y = \frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = x : \frac{\log_e (1 + x)}{\log_e a} = \log_e a : \log_e (1 + x)^{\frac{1}{x}}.$$

Si α tend vers zéro, on a

$$\lim (a^\alpha - 1) = \lim x = 0; \quad \lim \log_e (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \log_e e = 1.$$

Il vient donc

$$\lim y = \frac{\log_e a}{1} = \log_e a.$$

Remarque. — Si $a \leqslant 0$, la question n'a pas de sens, car $\log_e a$ n'est pas défini pour $a \leqslant 0$.

Si $a = 1$, on a $y = 0$, quel que soit α.

CHAPITRE XIV

Dérivées.

304. *Calculer, en partant des définitions, la dérivée ou les dérivées à droite et à gauche des fonctions suivantes pour les valeurs indiquées de* x.

1° $y = 3x - 1$; $x = 2$. — On a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[3(2+h)-1]-5}{h} = \frac{3h}{h} \quad \text{et} \quad \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3.$$

2° $y = x^2 - 5$; $x = 1$. — On a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[(1+h)^2-5]-(-4)}{h} = \frac{h^2+2h}{h} \quad \text{et} \quad \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2.$$

3° $y = x^2 - 2x + 5$; $x = 1$. — On a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[(1+h)^2-2(1+h)+5]-4}{h} = \frac{h^2}{h} \quad \text{et} \quad \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

4° $y = \dfrac{x+1}{1-2x}$. — Cette fonction est définie, sauf pour $x = \dfrac{1}{2}$.

a) Pour $x = 0$, la dérivée est

$$y' = \lim \frac{1}{h}\left[\frac{h+1}{1-2h} - 1\right] = \lim \frac{3}{1-2h} = 3.$$

b) Pour $x = 1$, la dérivée est

$$y' = \lim \frac{1}{h}\left[\frac{h+2}{-2h-1} - (-2)\right] = \lim \frac{3}{2h+1} = 3.$$

5° $y = \sqrt{x}$. — Cette fonction est définie dans l'intervalle $(0, +\infty)$.

a) Pour $x = 1$, la dérivée est

$$y' = \lim \frac{\sqrt{h+1}-1}{h} = \lim \frac{1}{\sqrt{h+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

b) Pour $x = 0$, la fonction ne peut admettre qu'une dérivée à droite.

On a
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{h}}{h}.$$

Faisons tendre h vers zéro par valeurs positives. On a alors $h = \sqrt{h^2}$ et

$$\lim \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$

6° $y = \sqrt{x-1}$. — Cette fonction n'est définie que dans l'intervalle $(1, +\infty)$.

a) Pour $x = 2$, la dérivée est

$$y' = \lim \frac{\sqrt{h+1}-1}{h} = \lim \frac{1}{\sqrt{h+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

b) Pour $x = 1$, la fonction a une dérivée à droite, qui est

$$\lim \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$

7° $y = \sqrt{x^3}$. — Cette fonction n'est définie que dans l'intervalle $(0, +\infty)$.

a) Pour $x = 1$, la dérivée est

$$y' = \lim \frac{\sqrt{(h+1)^3}-1}{h} = \lim \frac{h^3+3h^2+3h}{h(\sqrt{(1+h)^3}+1)} = \frac{3}{2}.$$

b) Pour $x = 0$, la fonction a une dérivée à droite, qui est

$$\lim \frac{\sqrt{h^3}}{h} = \lim \sqrt{h} = 0.$$

8° $y = \sqrt{2x-x^2}$. — Cette fonction n'est définie que dans l'intervalle $(0, 2)$.

a) Pour $x = 1$, la dérivée est

$$y' = \lim \frac{\sqrt{1-h^2}-1}{h} = \lim \frac{-h}{\sqrt{1-h^2}+1} = 0.$$

b) Pour $x = 0$, la fonction a une dérivée à droite qui est

$$\lim \frac{\sqrt{2h-h^2}}{h} = \lim \sqrt{\frac{2}{h}-1} = +\infty.$$

c) Pour $x = 2$, la fonction a une dérivée à gauche, qui est, en tenant compte de ce que $h = -\sqrt{h^2}$,

$$\lim \frac{\sqrt{-2h-h^2}}{h} = \lim \left[-\sqrt{\frac{-2}{h}-1}\right] = -\infty.$$

9° $y = \sqrt{5+4x-x^2}$. — Cette fonction n'est définie que dans l'intervalle $(-1, 5)$.

a) Pour $x = 0$, la dérivée est

$$y' = \lim \frac{\sqrt{5+4h-h^2}-\sqrt{5}}{h} = \lim \frac{4-h}{\sqrt{5+4h-h^2}+\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

b) Pour $x = -1$, la fonction a une dérivée à droite qui est

$$\lim \frac{\sqrt{6h-h^2}}{h} = \sqrt{\frac{6}{h}-1} = +\infty.$$

c) Pour $x = 5$, la fonction a une dérivée à gauche qui est

$$\lim \frac{\sqrt{-6h-h^2}}{h} = \lim \left[-\sqrt{-\frac{6}{h}-1}\right] = -\infty.$$

10° $y = \dfrac{3x-2}{2-x}$. — Cette fonction est définie, sauf pour $x = 2$.

a) Pour $x = 0$, la dérivée est

$$y' = \lim \frac{1}{h}\left[\frac{3h-2}{2-h}-(-1)\right] = \lim \frac{2}{2-h} = 1.$$

b) Pour $x = 1$, la dérivée est

$$y' = \lim \frac{1}{h}\left[\frac{3h+1}{1-h}-1\right] = \lim \frac{4}{1-h} = 4.$$

11° $y = \sqrt{(x-2)^2}$. — Cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x.

a) Pour $x = 1$, la dérivée est

$$y' = \lim \frac{\sqrt{(h-1)^2}-1}{h} = \lim \frac{(1-h)-1}{h} = -1.$$

b) Cherchons la dérivée pour $x = 2$. On a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{h^2}}{h}.$$

Si h tend vers zéro par valeurs négatives, on a $h = -\sqrt{h^2}$ et la dérivée à gauche est $\lim \dfrac{\sqrt{h^2}}{h} = -1$.

Si h tend vers zéro par valeurs positives, on a $h = \sqrt{h^2}$ et la dérivée à droite est $\lim \dfrac{\sqrt{h^2}}{h} = 1$.

La fonction n'a pas une dérivée unique pour $x = 2$, mais une dérivée à gauche et une dérivée à droite distinctes.

c) Pour $x = 4$, la dérivée est

$$y' = \lim \frac{\sqrt{(h+2)^2}-2}{h} = \lim \frac{h}{h} = 1.$$

12° $y = \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2}$. — Cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x.

a) Cherchons la dérivée pour $x = -1$. On a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\left[\sqrt{(h-2)^2}+\sqrt{h^2}\right]-2}{h}.$$

La dérivée à gauche pour $x = -1$ est

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{[(2-h)-h]-2}{h} = -2.$$

La dérivée à droite pour $x = -1$ est

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{[(2-h)+h]-2}{h} = 0.$$

b) Cherchons la dérivée pour $x = 1$. On a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[\sqrt{h^2}+\sqrt{(h+2)^2}]-2}{h}.$$

La dérivée à gauche pour $x = 1$ est

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{[-h+(h+2)]-2}{h} = 0.$$

La dérivée à droite pour $x = 1$ est

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{[h+(h+2)]-2}{h} = 2.$$

304^bis. *Calculer les dérivées des fonctions suivantes :*

1° $y = 3x$	**Rép.**	$y' = 3.$
2° $y = 7x - 5$	»	$y' = 7$
3° $y = 1 - 2x$	»	$y' = -2$
4° $y = x^2 - x + 2$	»	$y' = 2x - 1$
5° $y = 4x^2 - 2x - 5$	»	$y' = 8x - 2$
6° $y = x(x + 3)$	»	$y' = 2x + 3$
7° $y = (x + 1)(x - 2)$	»	$y' = 2x - 1$
8° $y = (2x - 3)(x + 2)$	»	$y' = 4x + 1$
9° $y = (3x + 1)(1 - 2x)$	»	$y' = -12x + 1$
10° $y = (2 - x)(1 - 5x)$	»	$y' = 10x - 11$
11° $y = 2x^3 + 3x^2 - 6x$	»	$y' = 6x^2 + 6x - 6$
12° $y = 3x^4 + 9$	»	$y' = 12x^3$
13° $y = 2x^4 - 3x^2 - 3$	»	$y' = 8x^3 - 6x$
14° $y = 1 - 2x^2 + 3x^4$	»	$y' = 12x^3 - 4x$
15° $y = (x^2 - 1)(2 - x)$	»	$y' = -3x^2 + 4x + 1.$

305. *Calculer les dérivées des fonctions suivantes :*

1° $y = x^2 - 3x + 7$	**Rép.**	$y' = 2x - 3.$
2° $y = x^3 - 3x^2 + 4x$	»	$y' = 3x^2 - 6x + 4.$
3° $y = x^4 - 5x^3 + 3x$	»	$y' = 4x^3 - 15x^2 + 3$
4° $y = (x^2 + 3)(2 - x)$	»	$y' = -3x^2 + 4x - 3$
5° $y = (x - 2)^5$	»	$y' = 5(x - 2)^4$
6° $y = (4 - 3x^2)^7$	»	$y' = -42x(4 - 3x^2)^6$
7° $y = x^3 + (x^2 - 1)^2$	»	$y' = 4x^3 + 3x^2 - 4x$

8° $y = (x^2 - 3x + 9)^4$

Rép. $y' = 4(2x - 3)(x^2 - 3x + 9)^3.$

9° $y = (x^2 - 6)(2x + 3)^2$

Rép. $y' = (2x + 3)(8x^2 + 6x - 24).$

10° $y = x(x-1)^2$ **Rép.** $y' = (x-1)(3x-1)$.
11° $y = (x+2)(x-3)(x+4)$ » $y' = 3x^2 + 6x - 10$.
12° $y = (x-7)(3x^2-4x+2)$ » $y' = 9x^2 - 50x + 30$.
13° $y = (2+x)^2(1-x)^3$
Rép. $y' = -(2+x)(4+5x)(1-x)^2$.
14° $y = (x^2-1)^3(1-2x^3)^4$
Rép. $y' = 6x(x^2-1)^2(1-2x^3)^3(1+4x-6x^3)$.
15° $y = x^2(1+x)^3(2-x)^3$
Rép. $y' = x(2-x)(1+x)^2(4+6x-7x^2)$.

306. *Calculer les dérivées des fonctions suivantes :*

1° $y = \dfrac{1}{1-3x^2}$ **Rép.** $y' = \dfrac{6x}{(1-3x^2)^2}$

2° $y = \dfrac{3-x}{x}$ » $y' = -\dfrac{3}{x^2}$

3° $y = \dfrac{x+1}{2x-1}$ » $y' = \dfrac{-3}{(2x-1)^2}$

4° $y = \dfrac{2x+1}{x+3}$ » $y' = \dfrac{5}{(x+3)^2}$

5° $y = \dfrac{x}{x^2-1}$ » $y' = \dfrac{-(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$

6° $y = \dfrac{x^2+1}{x^3-1}$ » $y' = \dfrac{-(x^4+3x^2+2x)}{(x^3-1)^2}$

7° $y = \dfrac{2x+1}{4x^2+3x-1}$ » $y' = \dfrac{-(8x^2+8x+5)}{(4x^2+3x-1)^2}$

8° $y = \dfrac{x^2+9}{x^2+12x+11}$ » $y' = \dfrac{12x^2+4x-108}{(x^2+12x+11)^2}$

9° $y = \dfrac{x^2-6x+8}{x^2-2x+1}$ » $y' = \dfrac{2(2x-5)}{(x-1)^3}$

10° $y = \dfrac{x^3-3x+2}{x^2-x+2}$

Rép. $y' = \dfrac{(x-1)(x^3-x^2+8x+4)}{(x^2-x+2)^2}$

11° $y = \dfrac{x^3+1}{x^3+3x-2}$

Rép. $y' = \dfrac{3(2x^3-3x^2-1)}{(x^3+3x-2)^2}$

12° $y = \dfrac{(x-1)^2}{x^3+9x-9}$

Rép. $y' = \dfrac{(x-1)(-x^3+3x^2+9x-9)}{(x^3+9x-9)^2}$

13° $y = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

Rép. $y' = \dfrac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$

14° $y = \dfrac{(2x-1)^3}{(x^2+3)^4}$

Rép. $y' = \dfrac{2(2x-1)^2(-5x^2+4x+9)}{(x^2+3)^5}$

15° $y = \dfrac{(x^2+1)(x-2)^4}{(x+7)^3}$

Rép. $y' = \dfrac{(x-2)^3(3x^3+44x^2-27x+34)}{(x+7)^4}$.

307. *Calculer les dérivées des fonctions suivantes :*

1° $y = \sqrt{2-x}$ **Rép.** $y' = \dfrac{-1}{2\sqrt{2-x}}$

2° $y = \sqrt{3x^2-5x+7}$ » $y' = \dfrac{6x-5}{2\sqrt{3x^2-5x+7}}$

3° $y = \sqrt[3]{5x^2-4x+1}$ » $y' = \dfrac{2(5x-2)}{3\sqrt[3]{(5x^2-4x+1)^2}}$

4° $y = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}$

Rép. $y' = \dfrac{x(\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1-x^4}}$

5° $y = 3x - \sqrt[3]{x^2-9}$

Rép. $y' = \dfrac{9\sqrt[3]{(x^2-9)^2}-2x}{3\sqrt[3]{(x^2-9)^2}}$

6° $y = 2x - 1 - \sqrt{x^2+x+1}$

Rép. $y' = \dfrac{4\sqrt{x^2+x+1}-(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

7° $y = x\sqrt{2x^2+1}$ **Rép.** $y' = \dfrac{4x^2+1}{\sqrt{2x^2+1}}$

8° $y = (2x-3)\sqrt{1-x^2}$ » $y' = \dfrac{-4x^2+3x+2}{\sqrt{1-x^2}}$

9° $y = (x^2 + x + 1)\sqrt{1 - x^2}$ Rép. $y' = \dfrac{-3x^3 - 2x^2 + x + 1}{\sqrt{1 - x^2}}$

10° $y = (x - 1)^2\sqrt{x^2 + 2x - 1}$

Rép. $y' = \dfrac{(x - 1)(3x^2 + 4x - 3)}{\sqrt{x^2 + 2x - 1}}$

11° $y = (1 - x)\sqrt[3]{(2 + x)^2}$ Rép. $y' = \dfrac{-(5x + 4)}{3\sqrt[3]{2 + x}}$

12° $y = (3x - 2)\sqrt{(1 + 2x)^3}$ » $y' = 3(5x - 1)\sqrt{1 + 2x}$

13° $y = (2x - 3)\sqrt[3]{(x + 1)^2}$ » $y' = \dfrac{10x}{3\sqrt[3]{x + 1}}$

14° $y = (5x^2 - 6x + 9)\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}$

Rép. $y' = \dfrac{50x^3 - 42x^2 + 66x - 18}{3\sqrt[3]{x^2 + 1}}$.

15° $y = (3x - 4)^2\sqrt[4]{(2x^2 + 1)^3}$

Rép. $y' = \dfrac{3(3x - 4)(7x^2 - 4x + 2)}{\sqrt[4]{2x^2 + 1}}$

16° $y = (21x^2 - 24x + 32)\sqrt[4]{(2x^2 + 1)^3}$

Rép. $y' = \dfrac{147x^3 - 120x^2 + 138x - 24}{\sqrt[4]{2x^2 + 1}}$.

308. *Calculer les dérivées des fonctions suivantes :*

1° $y = \dfrac{\sqrt{x + 7}}{x}$ Rép. $y' = \dfrac{-x - 14}{2x^2\sqrt{x + 7}}$

2° $y = \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$ » $y' = \dfrac{4}{\sqrt{(4 - x^2)^3}}$

3° $y = \dfrac{x}{\sqrt{(1 + x^2)^3}}$ » $y' = \dfrac{1 - 2x^2}{\sqrt{(1 + x^2)^5}}$

4° $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$ » $y' = \dfrac{3x^2}{\sqrt{(1 - x^2)^5}}$

5° $y = \sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$ » $y' = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{(x + 1)^2(x - 1)}$

6° $y = x\sqrt{\dfrac{x}{3 - x}}$ » $y' = \dfrac{(9 - 2x)\sqrt{x(3 - x)}}{2(3 - x)^2}$

7° $y = \dfrac{3 + 2x}{\sqrt[3]{1 + x}}$ » $y' = \dfrac{3 + 4x}{3\sqrt[3]{(1 + x)^4}}$

8° $y = \dfrac{x(3 + 2x^2)}{3\sqrt{(1 + x^2)^3}}$ **Rép.** $y' = \dfrac{1}{\sqrt{(1 + x^2)^5}}$

9° $y = \dfrac{(x^3 + 4)\sqrt{2 - x^2}}{3}$ » $y' = \dfrac{-4x^4 + 6x^2 - 4x}{3\sqrt{2 - x^2}}$

10° $y = \dfrac{(3 - 4x)\sqrt{3 + 2x}}{x\sqrt{x}}$ » $y' = \dfrac{-27}{2x^2\sqrt{x(3 + 2x)}}$

11° $y = \dfrac{(1 + 2x^2)\sqrt{x^2 - 1}}{3x^3}$ » $y' = \dfrac{1}{x^4\sqrt{x^2 - 1}}$

12° $y = \dfrac{(x - 1)^3\sqrt[3]{x^3 + 1}}{(x + 1)^3}$

Rép. $y' = \dfrac{(x - 1)^2(2x^3 + 3x^2 - 4x + 5)}{(x + 1)^3\sqrt[3]{(x^3 + 1)^2}}$.

309. *Calculer les dérivées des fonctions suivantes :*

1° $y = \sin 3x$ **Rép.** $y' = 3\cos 3x$

2° $y = 2\,\mathrm{tg}\,2x$ » $y' = \dfrac{4}{\cos^2 2x}$

3° $y = \cos^2 2x$ » $y' = -2\sin 4x$

4° $y = \mathrm{tg}^2 2x$ » $y' = \dfrac{4\sin 2x}{\cos^3 2x}$

5° $y = \sqrt{\sin x}$ $y' = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

6° $y = \sqrt{\sin 5x}$ » $y' = \dfrac{5\cos 5x}{2\sqrt{\sin 5x}}$

7° $y = \sqrt[3]{\cos^2 x}$ » $y' = \dfrac{-2\sin x}{3\sqrt[3]{\cos x}}$

8° $y = x - \sin x\cos x$ » $y' = 2\sin^2 x$

9° $y = 6\cos^2 x + 6\cos x$

Rép. $y' = -6\sin x(1 + 2\cos x)$

10° $y = \cos^3(2x^3 + 3x)^2$

Rép. $y' = -18(2x^3 + 3x)(2x^2 + 1)\cos^2\alpha\sin\alpha$,

α étant égal à $(2x^3 + 3x)^2$.

11° $y = \cos^2 x - \sin x\cos x$ **Rép.** $y' = -(\sin 2x + \cos 2x)$

12° $y = \sin x(\sin x - \cos x)$ » $y' = \sin 2x - \cos 2x$

13° $y = \cos x(\sin^2 x + 2)$ » $y' = -3\sin^3 x$

14° $y = 2x\sin x - (x^2 - 2)\cos x$ » $y' = x^2\sin x$

15° $y = 2x\cos x + (x^2 - 2)\sin x$ » $y' = x^2\cos x$.

310. *Calculer les dérivées des fonctions suivantes :*

1° $y = \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x}$ **Rép.** $y' = \dfrac{2 \sin 2x}{\cos^2 2x}$

2° $y = \dfrac{\cos^2 2x}{\operatorname{tg} x}$ » $y' = \dfrac{-\sin 2x \sin 4x - \cos^2 2x}{\sin^2 x}$

3° $y = \dfrac{\cos x}{1 + \cos^2 x}$ » $y' = \dfrac{-\sin^3 x}{(1 + \cos^2 x)^2}$

4° $y = \dfrac{\sin x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ » $y' = \cos x(3 \cos^2 x - 2)$

5° $y = \dfrac{\cos x}{\sin^3 x} + 2 \operatorname{cotg} x$ » $y' = \dfrac{-3}{\sin^4 x}$

6° $y = \dfrac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}$ » $y' = \dfrac{x^2}{(\cos x + x \sin x)^2}$

7° $y = \dfrac{\cos x + x \sin x}{\sin x - x \cos x}$ » $y' = \dfrac{-x^2}{(\sin x - x \cos x)^2}$

8° $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{2 + (2x - 1)\operatorname{tg} x}$ » $y' = \dfrac{2}{[2 + (2x - 1)\operatorname{tg} x]^2}$

9° $y = \sqrt{\dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$ » $y' = \dfrac{\pm 1}{1 - \sin x}$

C'est le signe + qu'il faut prendre quand x est compris entre $2k\pi$ et $2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ ou entre $2k\pi + \dfrac{3\pi}{2}$ et $2k\pi + 2\pi$; et le signe — quand x est compris entre $2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ et $2k\pi + \dfrac{3\pi}{2}$ (323, 9°).

10° $y = \sqrt{\dfrac{x \sin x}{1 - \cos x}}$ » $y' = \dfrac{\sin x - x}{2\sqrt{x \sin x(1 - \cos x)}}$

11° $y = \dfrac{\sin x}{\sqrt{2 \cos^2 x - \sin^2 x}}$ » $y' = \dfrac{2 \cos x}{\sqrt{(2 \cos^2 x - \sin^2 x)^3}}$

12° $y = \dfrac{\sin x \cos x}{\sqrt{3 \cos^2 x - 2 \sin^2 x}}$ » $y' = \dfrac{3 \cos^4 x + 2 \sin^4 x}{\sqrt{(3 \cos^2 x - 2 \sin^2 x)^3}}$

311. *Si un polynôme entier en* x *est divisible par* $(x - a)^m$, *sa dérivée est divisible par* $(x - a)^{m-1}$.

En effet, si le polynôme entier $y = F(x)$ est divisible par $(x - a)^m$, on a

$$y = F(x) = (x - a)^m f(x)$$

et
$$y' = F'(x) = (x - a)^{m-1} [mf(x) + (x - a) f'(x)], \tag{1}$$

$f(x)$ et $f'(x)$ étant aussi des polynômes entiers en x. Donc y' est divisible par $(x - a)^{m-1}$.

REMARQUE. — Si $(x - a)^m$ est la plus haute puissance de $(x - a)$ qui divise $F(x)$, la plus haute puissance de $x - a$ qui divise y' est $(x - a)^{m-1}$.

En effet, on a dans ce cas $f(a) \neq 0$, et par suite, l'expression $mf(x) + (x - a) f'(x)$ entre crochets dans l'égalité (1) ne s'annule pas pour $x = a$.

312. *Lorsqu'un polynôme entier en* x *et ses* n *premières dérivées s'annulent pour* $x = a$, *le polynôme est divisible par* $(x - a)^{n+1}$.

Désignons par y le polynôme entier en x qui est divisible, ainsi que ses n premières dérivées, $y', y'', \ldots, y^{(n)}$, par $x - a$. Soit ensuite $(x - a)^p$ la plus haute puissance de $x - a$ qui divise y.

Il résulte de l'hypothèse et de l'exercice précédent que $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ sont respectivement divisibles par

$$(x - a)^{p-1}, (x - a)^{p-2}, \ldots, (x - a)^{p-n},$$

$p - n$ étant un nombre entier positif. On a donc $p \geqslant n + 1$ et y est divisible par $(x - a)^{n+1}$.

313. *Montrer que les polynômes suivants sont divisibles par* $(x - 1)^3$.

1° $nx^{n+2} - (n + 2)x^{n+1} + (n + 2)x - n$.

Les deux premières dérivées sont

$$n(n + 2)x^{n+1} - (n + 1)(n + 2)x^n + n + 2;$$
$$n(n + 1)(n + 2)x^n - n(n + 1)(n + 2)x^{n-1}.$$

Elles s'annulent comme le polynôme pour $x = 1$.

Les quotients que l'on obtient en divisant le polynôme par $x - 1$, $(x - 1)^2$, $(x - 1)^3$ sont :

$$nx^{n+1} - 2x^n - 2x^{n-1} - \ldots - 2x^2 - 2x + n;$$
$$nx^n + (n - 2)x^{n-1} + (n - 4)x^{n-2} + \ldots - (n - 4)x^2 - (n - 2)x - n.$$
$$nx^{n-1} + (2n - 2)x^{n-2} + (3n - 6)x^{n-3} + \ldots + (2n - 2)x + n.$$

2° $x^{2n+1} - (2n + 1)x^{n+1} + (2n + 1)x^n - 1$.

Les deux premières dérivées sont

$$(2n + 1)x^{2n} - (n + 1)(2n + 1)x^n + n(2n + 1)x^{n-1};$$
$$2n(2n + 1)x^{2n-1} - n(n + 1)(2n + 1)x^{n-1} + (n - 1)n(2n + 1)x^{n-2}.$$

Elles s'annulent comme le polynôme pour $x = 1$.

En divisant chaque fois par $x - 1$, on trouve successivement :

$$x^{2n} + x^{2n-1} + \ldots + x^{n+1} - 2nx^n + x^{n-1} + \ldots + x^2 + x + 1;$$
$$x^{2n-1} + 2x^{2n-2} + \ldots + nx^n - nx^{n-1} - (n - 1)x^{n-2} - \ldots - 3x^2 - 2x - 1;$$
$$x^{2n-2} + 3x^{2n-3} + \ldots \frac{n(n + 1)}{2} x^{n-1} + \frac{n(n - 1)}{2} x^{n-2} + \ldots + 6x^2 + 3x + 1.$$

REMARQUE. — Le premier de ces exercices exige $n - 1 \geqslant 0$ ou $n \geqslant 1$, et le second, $2n - 2 \geqslant 0$ ou $n \geqslant 1$.

314. *Calculer la limite des expressions suivantes pour* x = 0.

1° $y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$. — On a

$$y = \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x} \quad \text{et} \quad \lim y = 1.$$

En effet, on sait que $\lim \frac{\sin x}{x} = 1$ pour $x = 0$. D'autre part, $\cos x$ étant une fonction continue de x, la limite de $\cos x$ pour $x = 0$ est égale à $\cos 0$ ou 1.

2° $y = \frac{\sin 3x}{6x}$. — On a

$$y = \frac{1}{2} \times \frac{\sin 3x}{3x} \quad \text{et} \quad \lim y = \frac{1}{2}.$$

3° $y = \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$. — On a

$$y = \frac{3}{2}\left[\frac{\sin 3x}{3x} : \frac{\sin 2x}{2x}\right] \quad \text{et} \quad \lim y = \frac{3}{2}.$$

4° $y = \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 3x}$. — On a

$$y = \frac{2}{3}\left[\frac{\operatorname{tg} 2x}{2x} : \frac{\operatorname{tg} 3x}{3x}\right] \quad \text{et (1°)} \quad \lim y = \frac{2}{3}.$$

5° $y = \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$. — On a

$$y = x\left(\cos \frac{x}{2} : \sin \frac{x}{2}\right) = 2 \cos \frac{x}{2}\left(\frac{x}{2} : \sin \frac{x}{2}\right) \quad \text{et} \quad \lim y = 2.$$

6° $y = \frac{1 - \cos x}{x^2}$. — On a

$$y = \frac{2}{x^2} \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left(\sin \frac{x}{2} : \frac{x}{2}\right)^2 \quad \text{et} \quad \lim y = \frac{1}{2}.$$

7° $y = \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \cos x}$. — On a

$$y = \frac{\sin x}{(1 - \cos x)\cos x} = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\cos x \sin \frac{x}{2}} \quad \text{et} \quad \lim y = \infty.$$

8° $y = \frac{\sin x + \cos x - 1}{x}$. — On a

$$y = \frac{1}{x}\left(2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right) = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right) \text{ et } \lim y = 1.$$

9° $y = \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$. — On a

$$y = \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3 \cos x} = \frac{4 \sin^3 \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{x}{2}}{x^3 \cos x} = \frac{\cos \dfrac{x}{2}}{2 \cos x}\left(\sin \frac{x}{2} : \frac{x}{2}\right)^3$$

et $\lim y = 0{,}5$.

315. *Trouver la limite des expressions suivantes :*

1° $y = \cos x : \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ pour $x = \dfrac{\pi}{2}$. — On a

$$y = -\left[\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) : \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] \quad \text{et} \quad \lim y = -1.$$

2° $y = \dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{cotg} x}$ pour $x = \dfrac{\pi}{4}$. — On a

$$y = \left(1 - \frac{\sin x}{\cos x}\right) : \left(1 - \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \frac{(\cos x - \sin x) \sin x}{(\sin x - \cos x) \cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x}.$$

Le sinus et le cosinus étant des fonctions continues, leurs limites pour $x = \dfrac{\pi}{4}$ sont

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \text{et} \quad \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

On a donc $\lim y = -1$.

3° $y = \dfrac{(1 - \sin x)^2}{\cos x}$ pour $x = \dfrac{\pi}{2}$. — On peut écrire

$$1 - \sin x = \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)^2; \quad \cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}.$$

En remplaçant $1 - \sin x$ et $\cos x$ dans y et en simplifiant, il vient

$$y = \frac{\left(\cos \dfrac{x}{2} - \sin \dfrac{x}{2}\right)^3}{\cos \dfrac{x}{2} + \sin \dfrac{x}{2}}.$$

Le numérateur tend vers zéro et le dénominateur, vers $\sqrt{2}$. On a donc

$$\lim y = 0.$$

4° $y = (1 - x)\operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2}$ pour $x = 1$. — En posant $x = 1 + h$, on a

$$y = \frac{-h}{\operatorname{cotg}\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi h}{2}\right)} = \frac{h}{\operatorname{tg} \dfrac{\pi h}{2}} = \frac{2}{\pi} \times \frac{\dfrac{\pi h}{2}}{\operatorname{tg} \dfrac{\pi h}{2}}.$$

En faisant tendre h vers zéro, il vient $\lim y = \dfrac{2}{\pi}$.

CHAPITRE XV

Variations des fonctions.

315bis. *Étudier les variations des fonctions suivantes :*

1° $y = 3x^2$.

La dérivée $y' = 6x$ s'annule pour $x = 0$ et on a le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0 *min.*	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction est représentée par une parabole tangente à l'axe $x'x$ au point O.

2° $y = x^2 + 3x$.

La dérivée $y' = 2x + 3$ s'annule pour $x = -\dfrac{3}{2}$ et on a le tableau :

x	$-\infty$		$-1{,}5$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{9}{4}$ *min.*	$\nearrow$	$+\infty$

La parabole qui représente les variations de la fonction coupe l'axe $x'x$ aux points $(-3, 0)$ et $(0, 0)$.

3° $y = x(4 - x)$.

La fonction peut s'écrire $y = -x^2 + 4x$.

La dérivée $y' = -2x + 4$ s'annule pour $x = 2$ et on a le tableau :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4 *max.*	$\searrow$	$-\infty$

La parabole qui représente les variations de la fonction coupe l'axe $x'x$ aux points (0, 0) et (4, 0).

4° $y = x^2 + 2x + 2.$

La dérivée $y' = 2x + 2$ s'annule pour $x = -1$ et on le tableau :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1 *min.*	$\nearrow$	$+\infty$

La parabole qui représente les variations de la fonction ne rencontre pas l'axe $x'x$.

5° $y = x^2 - 4x + 4.$

La dérivée $y' = 2x - 4$ s'annule pour $x = 2$ et on a le tableau :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0 *min.*	$\nearrow$	$+\infty$

La parabole qui représente les variations de la fonction est tangente à l'axe $x'x$ au point (2, 0).

6° $y = (x + 1)(5 - x).$

La fonction peut s'écrire $y = -x^2 + 4x + 5.$

La dérivée $y' = -2x + 4$ s'annule pour $x = 2$ et on le tableau :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	9 *max.*	$\searrow$	$-\infty$

La parabole qui représente les variations de la fonction coupe l'axe $x'x$ aux points $(-1, 0)$ et $(5, 0)$.

316. *Étudier les variations des fonctions suivantes :*

1° $y = x(9 - x^2).$

a) Cette fonction est définie et continue pour toutes les valeurs de x. Elle s'annule pour $x = 0$ et pour $x = \pm 3$.

b) Sa dérivée $y' = -3x^2 + 9$ s'annule pour $x = \pm\sqrt{3}$. Elle est positive quand x est compris entre ses racines.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$+\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-6\sqrt{3}$ *min.*	$\nearrow$	$6\sqrt{3}$ *max.*	$\searrow$	$-\infty$

d) La courbe qui représente la fonction proposée coupe l'axe des x aux points $(-3, 0)$ et $(3, 0)$; de plus elle passe par l'origine.

La dérivée seconde $y'' = -6x$ s'annule pour $x = 0$, en changeant de signe. Le point $(0, 0)$ est donc un point d'inflexion. Le coefficient angulaire de la tangente en O est 9, car pour $x = 0$, on a $y' = 9$.

2° $y = \frac{1}{4}(x^3 + x - 10)$.

a) La fonction est définie et continue pour toutes les valeurs de x. Elle s'annule pour $x = 2$.

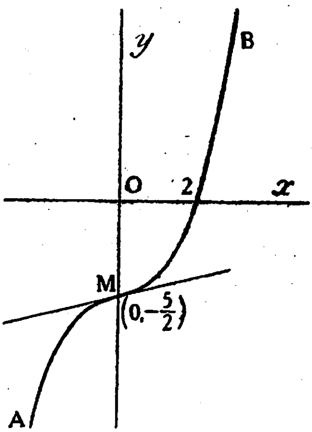


Fig. 11.

b) Sa dérivée $y' = \frac{1}{4}(3x^2 + 1)$ est positive pour toutes les valeurs de x. La fonction est donc constamment croissante.

c) La dérivée seconde $y'' = \frac{3}{2}x$ s'annule pour $x = 0$, en changeant de signe.

Le point M $(0, -2{,}5)$ est un point d'inflexion (Fig. 11); le coefficient angulaire de la tangente en ce point est 0,25.

3° $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

a) La fonction est définie et continue pour toutes les valeurs de x. Elle s'annule pour $x = 1$ et pour $x = 1 \pm \sqrt{3}$.

b) Sa dérivée $y' = 3x^2 - 6x$ s'annule pour $x = 0$ et pour $x = 2$. Elle est négative quand x est compris entre ses racines.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2 *max.*	$\searrow$	-2 *min.*	$\nearrow$	$+\infty$

d) La dérivée seconde $y'' = 6x - 6$ s'annule pour $x = 1$, en changeant de signe. Le point $(1, 0)$ est un point d'inflexion; le coefficient angulaire de la tangente en ce point est -3.

4° $y = 3x - 4x^3$.

a) La fonction est définie et continue pour toutes les valeurs de x. Elle s'annule pour $x = 0$ et pour $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Sa dérivée $y' = 3 - 12x^2$ s'annule pour $x = \pm 0{,}5$. La dérivée est positive pour toutes les valeurs de x comprises entre ses racines.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		$-0{,}5$		$0{,}5$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1 *min.*	$\nearrow$	1 *max.*	$\searrow$	$-\infty$

d) La dérivée seconde $y'' = -24x$ s'annule pour $x = 0$, en changeant de signe. Le point $(0, 0)$est un point d'inflexion. Le coefficient angulaire de la tangente en ce point est 3.

5° $y = 3x^2 - x^3$.

a) La fonction est définie et continue pour toutes les valeurs de x. Elle s'annule pour $x = 0$ et pour $x = 3$.

b) Sa dérivée $y' = 6x - 3x^2$ s'annule pour $x = 0$ et pour $x = 2$. Elle est positive pour toutes les valeurs de x comprises entre ses racines.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0 *min.*	$\nearrow$	4 *max.*	$\searrow$	$-\infty$

d) La dérivée seconde $y'' = 6 - 6x$ s'annule pour $x = 1$, en changeant de signe. Le point M (1, 2) est un point d'inflexion (Fig. 12). Le coefficient angulaire de la tangente en M est 3.

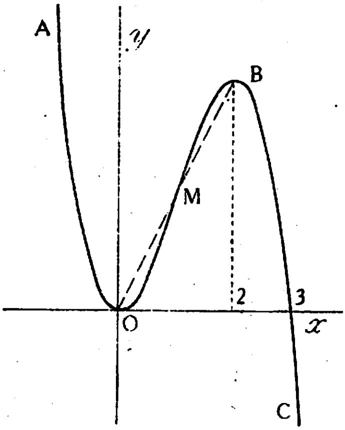


Fig. 12.

6° $y = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$.

a) La fonction est définie et continue pour toutes les valeurs de x. Elle s'annule pour $x = -1$, pour $x = \frac{1}{2}$ et pour $x = 1$.

b) La dérivée $y' = 6x^2 - 2x - 2$ s'annule pour $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$. Elle est négative pour les valeurs de x comprises entre ses racines.

Les valeurs de la fonction, qui correspondent à ces valeurs de x, sont

$$\frac{35 \mp 13\sqrt{13}}{54}.$$

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		$-0{,}434$		$0{,}767$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$1{,}516$ *max.*	$\searrow$	$-0{,}22$ *min.*	$\nearrow$	$+\infty$

d) La dérivée seconde $y'' = 12x - 2$ s'annule pour $x = \frac{1}{6}$. Le point $\left(\frac{1}{6}, \frac{35}{54}\right)$ est un point d'inflexion; $-\frac{13}{6}$ est le coefficient angulaire de la tangente en ce point.

7° $y = x^4 - 10x^2 + 9$.

a) La fonction est définie et continue pour toutes les valeurs de x. Elle s'annule pour $x = \pm 1$ et pour $x = \pm 3$.

b) La dérivée $y' = 4x^3 - 20x$ s'annule pour $x = \pm\sqrt{5}$ et pour $x = 0$. Elle est négative dans les intervalles $(-\infty, -\sqrt{5})$ et $(0, \sqrt{5})$.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		0		$\sqrt{5}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-16 *min.*	$\nearrow$	9 *max.*	$\searrow$	-16 *min.*	$\nearrow$	$+\infty$

d) Les points $\left(-\frac{\sqrt{15}}{3}, -\frac{44}{9}\right)$ et $\left(\frac{\sqrt{15}}{3}, -\frac{44}{9}\right)$ sont des points d'inflexion, car la dérivée seconde est $y'' = 12x^2 - 20$; les coefficients angulaires des tangentes en ces points sont respectivement

$$\frac{40\sqrt{15}}{9} \text{ et } -\frac{40\sqrt{15}}{9}.$$

8° $y = x^4 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{4}$.

a) La fonction est définie et continue pour toutes les valeurs de x. Elle s'annule pour $x = \pm 1$ et pour $x = \pm 0{,}5$.

b) La dérivée $y' = 4x^3 - \frac{5}{2}x$ s'annule pour $= \pm \frac{\sqrt{10}}{4}$ et pour $x = 0$.

Elle est négative dans les intervalles $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{10}}{4}\right)$ et $\left(0, \frac{\sqrt{10}}{4}\right)$.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		$-0{,}791$		0		$0{,}791$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{9}{64}$ *min.*	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$ *max.*	$\searrow$	$-\frac{9}{64}$ *min.*	$\nearrow$	$+\infty$

d) La dérivée seconde est $12x^2 - \frac{5}{2}$; elle s'annule pour $x = \pm \frac{\sqrt{30}}{12}$. A ces valeurs de x, correspondent les points d'inflexion C et C' (Fig. 13).

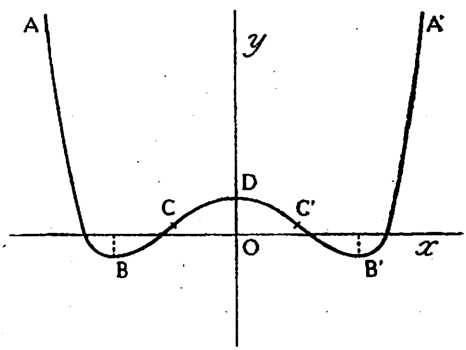


Fig. 13.

9° $y = 8 + 2x^2 - x^4$.

a) La fonction est définie et continue pour toutes les valeurs de x. Elle s'annule pour

$$x = \pm 2.$$

b) La dérivée $y' = 4x - 4x^3$ s'annule pour $x = 0$ et pour $x = \pm 1$. Elle est positive dans les intervalles $(-\infty, -1)$ et $(0, 1)$.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	9 *max.*	$\searrow$	8 *min.*	$\nearrow$	9 *max.*	$\searrow$	$-\infty$

d) Les points $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{77}{9}\right)$ et $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{77}{9}\right)$ sont des points d'inflexion, car la dérivée seconde est $y'' = 4 - 12x^2$. Les coefficients angulaires des tangentes en ces points sont respectivement $-\frac{8\sqrt{3}}{9}$ et $\frac{8\sqrt{3}}{9}$.

10° $y = x(x + 1)^2 (1 - x)$.

a) La fonction est définie et continue pour toutes les valeurs de x. Elle s'annule pour $x = 0$ et pour $x = \pm 1$.

b) La dérivée $y' = -4x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ s'annule pour $x = -1$ pour $x_1 = \frac{1 - \sqrt{17}}{8}$ et pour $x_2 = \frac{1 + \sqrt{17}}{8}$. On a approximativement $x_1 = -0,39$ et $x_2 = 0,64$.

La dérivée est positive dans les intervalles $(-\infty, -1)$, (x_1, x_2) et négative dans les intervalles $(-1, x_1)$, $(x_2, +\infty)$.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		-1		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0 *max.*	$\searrow$	y_1 *min.*	$\nearrow$	y_2 *max.*	$\searrow$	$-\infty$

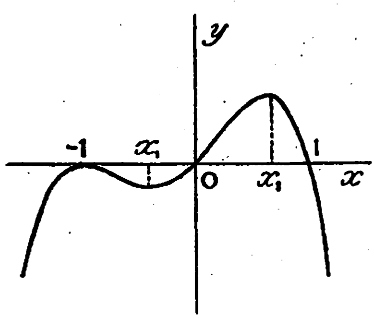


Fig. 14

d) La dérivée seconde
$$y'' = -12x^2 - 6x + 2$$
s'annule pour $x = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{12}$, soit environ $-0,73$ et $0,23$.

Pour ces valeurs de x, la courbe présente des points d'inflexion. (Fig. 14).

Les extrémés $y_1 = \dfrac{107 - 51\sqrt{17}}{512}$ et $y_2 = \dfrac{107 + 51\sqrt{17}}{512}$ valent environ $-0{,}20$ et $0{,}62$.

11° $y = (x + 1)(x + 2)(x - 3)$.

a) La fonction est définie et continue pour toutes les valeurs de x. Elle s'annule pour $x = -1$, -2 et 3.

b) La dérivée $y' = 3x^2 - 7$ s'annule pour $x = \pm \dfrac{\sqrt{21}}{3}$, soit environ $\pm 1{,}53$. Elle est négative dans l'intervalle $(-1{,}53,\ 1{,}53)$.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		$-1{,}53$		$1{,}53$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	y_1 *max.*	$\searrow$	y_2 *min.*	$\nearrow$	$+\infty$

Le maximum y_1 est égal à $\dfrac{-54 + 14\sqrt{21}}{9}$, soit environ $1{,}13$.

Le minimum y_2 est égal à $\dfrac{-54 - 14\sqrt{21}}{9}$, soit environ $-13{,}13$.

d) La dérivée seconde $y'' = 6x$ s'annule pour $x = 0$. Le point $(0, -6)$ est un point d'inflexion. Le coefficient angulaire de la tangente en ce point est -7.

12° $y = (x - 2)^2 (x + 3)(x - 4)$.

a) La fonction est définie et continue pour toutes les valeurs de x. Elle s'annule pour $x = -3$, 2 et 4.

b) La dérivée $y' = (x - 2)(4x^2 - 7x - 22)$ s'annule pour $x = 2$, pour $x_1 = \dfrac{7 - \sqrt{401}}{8}$ et pour $x_2 = \dfrac{7 + \sqrt{401}}{8}$.

On a approximativement $x_1 = -1{,}63$ et $x_2 = 3{,}38$.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		x_1		2		x_2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	y_1 *min.*	$\nearrow$	0 *max.*	$\searrow$	y_2 *min.*	$\nearrow$	$+\infty$

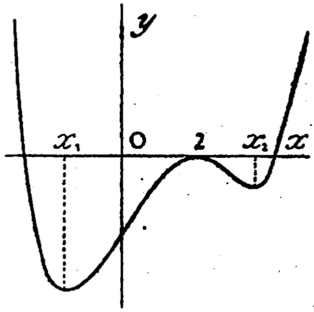


Fig. 15

Le minimum y_1 vaut environ — 101,6 et le minimum y_2 environ — 7,5.

d) On a $y'' = 12x^2 - 30x - 8$; cette dérivée s'annule pour $x = \dfrac{15 \pm \sqrt{321}}{12}$, soit environ — 0,25 et 2,75. A ces valeurs de x correspondent des points d'inflexion de la courbe.

La figure indique la marche générale du graphique de la fonction proposée.

317. ***Étudier les variations des fonctions suivantes :***

1° $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.

a) La fonction est définie et continue, sauf pour $x = -1$ qui annule son dénominateur. Elle s'annule pour $x = 1$ qui est la racine de son numérateur. Sa limite est 1 pour x infini.

b) La dérivée $y' = \dfrac{2}{(x+1)^2}$ est constamment positive, mais elle cesse d'exister pour $x = -1$.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+	|	+	
y	1	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	1

d) La courbe (Fig. 16) est asymptote aux droites

$$x = -1; \quad y = 1.$$

Elle porte le nom ***d'hyperbole équilatère.***

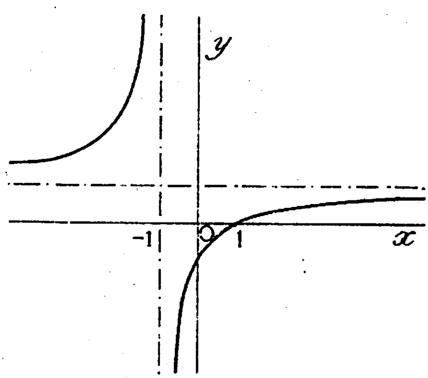


Fig. 16.

2° $y = \dfrac{1-x}{2x-1}$.

a) La fonction est définie et continue, sauf pour $x = 0{,}5$. Elle s'annule pour $x = 1$. Sa limite est — 0,5 pour x infini.

b) La fonction a pour dérivée $y' = \dfrac{-1}{(2x-1)^2}$, pour toutes les valeurs de x pour lesquelles elle est définie. Cette dérivée est toujours négative et la fonction est toujours décroissante.

Le graphique de la fonction est une hyperbole équilatère, asymptote aux droites $2x - 1 = 0$; $2y + 1 = 0$.

3° $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

a) La fonction est définie et continue, sauf pour $x = 1$ et $x = 2$. Elle a comme limite zéro pour x infini.

b) La fonction a pour dérivée $y' = \dfrac{-(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2}$, pour toutes les valeurs de x pour lesquelles la fonction est définie. Cette dérivée s'annule pour $x = 1{,}5$ et elle a le signe contraire de celui du binôme $2x - 3$.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		1		1,5		2		$+\infty$
y'		+	‖	+	0	−	‖	−	
y	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-4 *max.*	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

d) La courbe (Fig. 17) est asymptote aux droites

$$x = 1; \quad x = 2.$$

Elle ne coupe pas l'axe des x; mais elle rencontre l'axe des y au point (0, 0,5).

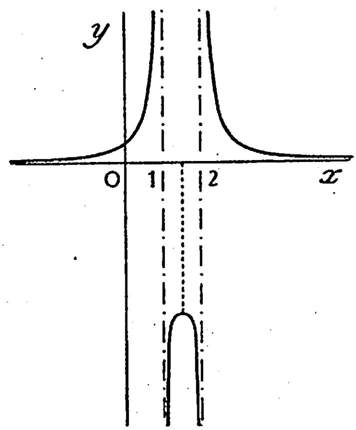


Fig. 17

4° $y = \dfrac{12}{x^2 + 2x + 5}$.

a) La fonction est définie et continue pour toutes les valeurs de x, car le dénominateur n'a pas de racine. Elle a comme limite zéro, pour x infini.

b) La dérivée $y' = \dfrac{-12(2x+2)}{(x^2+2x+5)^2}$ s'annule pour $x = -1$; elle a le signe contraire de celui du binôme $x + 1$.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	3 *max.*	$\searrow$	0

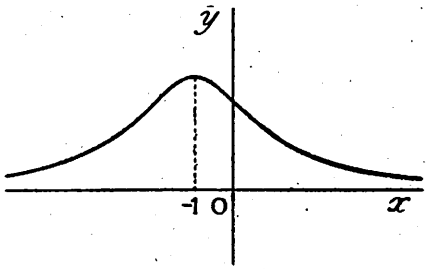


Fig. 18.

d) La courbe (Fig. 18) est asymptote à l'axe des x. Elle coupe l'axe des y au point $\left(0, \frac{12}{5}\right)$.

5° $y = \dfrac{1}{x^2 + x - 2}$.

a) La fonction est définie et continue, sauf pour $x = -2$ et pour $x = 1$. Elle a comme limite zéro, pour x infini.

b) La fonction a comme dérivée $y' = \dfrac{-(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}$ pour toutes les valeurs de x pour lesquelles elle est définie. Cette dérivée s'annule pour $x = -0{,}5$ et elle a le signe contraire du binôme $2x + 1$.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		-2		$-0{,}5$		1		$+\infty$
y'		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	
y	0	$\nearrow$	$+\infty \vert -\infty$	$\nearrow$	$-\frac{4}{9}$ *max.*	$\searrow$	$-\infty \vert +\infty$	$\searrow$	0

d) La courbe, qui représente les variations de la fonction est analogue à celle du 3°.

6° $y = \dfrac{1}{4x^2 + 4x + 1}$.

a) La fonction est définie et continue pour toutes les valeurs de x, sauf pour $x = -0{,}5$ qui est la racine du dénominateur. Elle a comme limite zéro, pour x infini.

b La fonction a comme dérivée $y' = \dfrac{-(8x+4)}{(4x^2+4x+1)^2}$. Toutefois pour $x = -0{,}5$, la dérivée cesse d'exister. Cette dérivée a le signe contraire de celui du binôme $8x + 4$.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		$-0,5$		$+\infty$
y'		$+$	|	$-$	
y	0	$\nearrow$	$+\infty \mid +\infty$	$\searrow$	0

d) La courbe est formée de deux branches dont chacune est asymptote à l'axe des x et à la droite $2x + 1 = 0$.

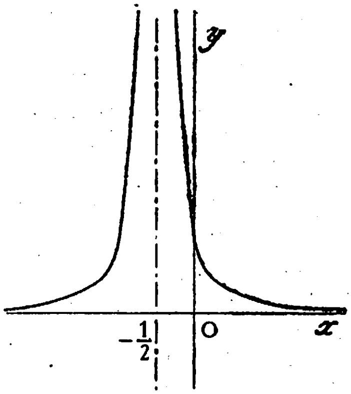


Fig. 19.

318. *Étudier les variations des fonctions suivantes :*

1° $y = \dfrac{x^2 - 6x - 1}{x^2 + 2x + 3}$.

a) La fonction est définie et continue pour toutes les valeurs de x, car le dénominateur n'admet pas de racine. Elle s'annule pour $x = 3 \pm \sqrt{10}$, soit environ $-0,16$ et $6,16$. Elle a comme limite 1 pour x infini.

b) La dérivée $y' = \dfrac{8(x^2 + x - 2)}{(x^2 + 2x + 3)^2}$ s'annule pour $x = -2$ et pour $x = 1$. Elle a le signe du trinôme $x^2 + x - 2$.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	$\nearrow$	5 *max.*	$\searrow$	-1 *min.*	$\nearrow$	1

d) La courbe (Fig. 20) est asymptote à la droite $y = 1$.

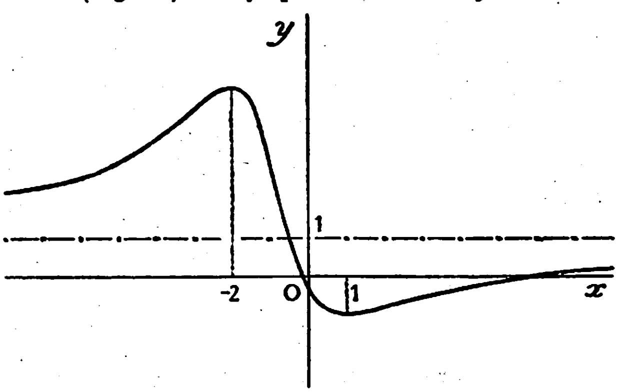


Fig. 20.

2° $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 2x - 3}$.

a) La fonction est discontinue pour $x = 1$ et $x = -3$, qui sont les racines du dénominateur. Elle s'annule pour $x = \pm 2$ et elle a comme limite 1 pour x infini.

b) L'expression générale de la dérivée est

$$y' = \frac{2(x^2 + x + 4)}{(x^2 + 2x - 3)^2}.$$

Pour $x = 1$ et $x = -3$, la fonction n'a pas de dérivée. Pour les autres valeurs de x, la dérivée a le signe du trinôme $x^2 + x + 4$; elle est donc toujours positive.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty \vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty \vert -\infty$	$\nearrow$	1

Les signes placés à la troisième ligne du tableau devant le symbole ∞ sont en rapport avec le sens de la variation de y. On peut aussi les déterminer directement en étudiant les signes du numérateur et du dénominateur de y, lorsque x tend vers -3 ou vers 1.

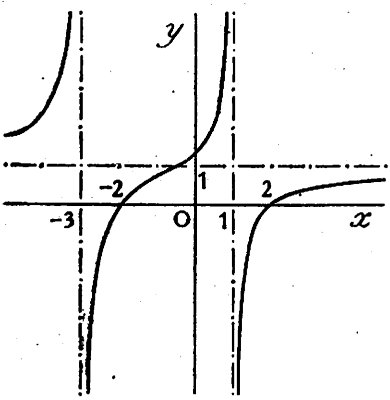


Fig. 21.

d) La courbe (Fig. 21) a une asymptote horizontale $y = 1$ et deux asymptotes verticales

$$x - 1 = 0; \quad x + 3 = 0.$$

Elle coupe l'asymptote horizontale au point $(-0{,}5, 1)$.

3° $y = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x - 1}$.

a) La fonction est définie et continue, sauf pour $x = 1$. Elle s'annule pour $x = -2$ et $x = 4$; elle tend vers l'infini quand x augmente indéfiniment en valeur absolue ou quand x tend vers 1.

b) L'expression générale de la dérivée est

$$y' = \frac{x^2 - 2x + 10}{(x - 1)^2}.$$

Pour $x = 1$, la dérivée cesse d'exister. Elle est positive pour les autres valeurs de x.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	$\Vert$	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Les signes placés à la 3e ligne du tableau devant le symbole ∞ sont en rapport avec le sens de la variation de y.

On peut aussi déduire ces signes du fait que le numérateur de y est positif dans les intervalles $(-\infty, -2)$, $(4, +\infty)$ et négatif dans l'intervalle $(-2, 4)$; tandis que le dénominateur est négatif pour $x < 1$ et positif pour $x > 1$.

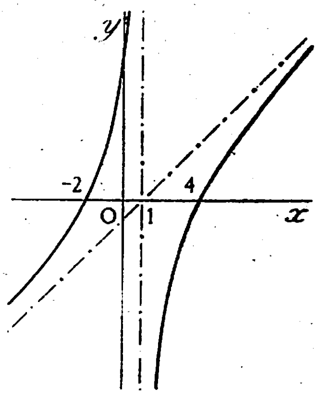


Fig. 22.

d) On a $y = x - 1 - \dfrac{9}{x-1}$.

La courbe admet donc une asymptote verticale $x - 1 = 0$ et une asymptote oblique $y = x - 1$.

4° $y = \dfrac{x^2 - 1}{4x + 5}$.

a) La fonction est définie et continue, sauf pour $x = x_1 = -\dfrac{5}{4}$. Elle s'annule pour $x = \pm 1$ et elle a comme limite l'infini pour $x = x_1$ et pour x infini.

b) L'expression générale de la dérivée est

$$y' = \frac{4x^2 + 10x + 4}{(4x+5)^2}.$$

Elle cesse d'exister pour $x = x_1$; elle s'annule pour $x = -2$ et pour $x = -0{,}5$.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		-2		x_1		$-0{,}5$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$-0{,}25$	$\nearrow$	$+\infty$
			max.				*min.*		

d) On a $$y = \frac{x}{4} - \frac{5}{16} + \frac{9}{16(4x+5)}.$$

On voit qu'il y a deux asymptotes

$$y = \frac{x}{4} - \frac{5}{16} \quad \text{et} \quad 4x + 5 = 0.$$

La courbe est formée de deux branches comme celle du 3°; seulement ces deux branches sont dans les angles aigus formés par les asymptotes.

5° $y = \dfrac{x^2 - 5x + 1}{x^2 - x + 1}$.

a) La fonction est définie et continue pour toutes les valeurs de x. Elle s'annule pour $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$, ou environ $x_1 = 4{,}79$ et $x_2 = 0{,}21$.

b) La dérivée $y' = \dfrac{4x^2 - 4}{(x^2 - x + 1)^2}$ s'annule pour $x = \pm 1$.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	$\nearrow$	$\frac{7}{3}$ *max.*	$\searrow$	-3 *min.*	$\nearrow$	1

d) La courbe est analogue à celle du 1°.

6° $y = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 2x + 1}$.

a) La fonction est définie et continue, sauf pour $x = 1$. Elle s'annule pour $x = 2$ et $x = 4$. La fonction a comme limite 1 pour x infini, et $+\infty$ pour $x = 1$.

b) L'expression générale de la dérivée est

$$y' = \frac{2(2x^2 - 7x + 5)}{(x^2 - 2x + 1)^2}.$$

Elle s'annule pour $x = 2{,}5$. Elle cesse d'exister pour $x = 1$, car la fonction n'est pas définie pour cette valeur de x.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		1			$2{,}5$		$+\infty$
y'		$+$	$\vert$		$-$	0	$+$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty \mid +\infty$		$\searrow$	$-\frac{1}{3}$ *min.*	$\nearrow$	1

d) La courbe est asymptote aux droites (Fig. 23)

$$x = 1,\ y = 1.$$

Elle coupe l'axe des x aux points (2, 0), (4, 0); l'axe des y au point (0, 8); l'asymptote horizontale au point $\left(\frac{7}{4}, 1\right)$.

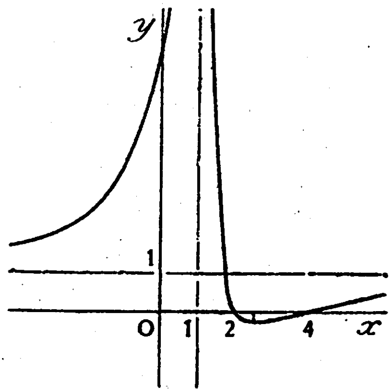


Fig. 23

7° $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x - 3}$.

a) La fonction est définie et continue, sauf pour $x = -1$ et $x = 3$. Elle s'annule pour $x = 1$. Sa limite est 1 pour x infini.

b) La dérivée de la fonction est

$$y' = \frac{-8(x-1)}{(x^2 - 2x - 3)^2}$$

pour toutes les valeurs de x pour lesquelles la fonction est définie.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
y	1	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	0 *max.*	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	1

d) La courbe (voir celle du 9°) qui représente les variations de la fonction est asymptote aux droites

$$x = -1; \quad x = 3; \quad y = 1.$$

8° $y = \dfrac{(x-1)^2}{x-2}$.

a) La fonction est définie et continue, sauf pour $x = 2$. Elle s'annule pour $x = 1$ et elle a comme limite l'infini pour x infini et pour $x = 2$.

b) La dérivée $\quad y' = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$

cesse d'exister pour $x = 2$; elle s'annule pour $x = 1$ et $x = 3$.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0 *max.*	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	4 *min.*	↗	$+\infty$

d) La courbe est asymptote aux droites

$$y = x \quad \text{et} \quad x = 2,$$

car la fonction peut s'écrire
$$y = x + \frac{1}{x-2}.$$

9° $y = \dfrac{x^2 + 8x}{x^2 - 10x + 9}$.

a) La fonction est définie et continue pour les valeurs de x autres que 1 et 9. Elle s'annule pour $x = 0$ et $x = -8$. Quand x tend vers l'infini, y tend vers 1.

b) L'expression générale de la dérivée est

$$y' = \frac{-18(x^2 - x - 4)}{(x^2 - 10x + 9)^2};$$

elle a le signe contraire de $x^2 - x - 4$, dont les racines sont

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2},$$

soit environ $-1{,}56$ et $2{,}56$. Les valeurs correspondantes de la fonction sont

$$y_1 = \frac{-49 + 9\sqrt{17}}{32} \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{-49 - 9\sqrt{17}}{32},$$

soit environ $-0{,}37$ et $-2{,}69$. On remarque encore que la dérivée cesse d'exister pour $x = 1$ et $x = 9$, car pour ces valeurs de x la fonction n'est pas définie.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		x_1		1		x_2		9		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
y	1	$\searrow$	y_1 min.	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	y_2 max.	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	1

d) La courbe est formée de trois branches. La 1^re^ branche est asymptote aux droites $x = 1$ et $y = 1$; elle coupe l'axe $x'x$ aux points $(-8, 0)$ et $(0, 0)$; elle coupe l'asymptote $y = 1$ au point $(0{,}5,\ 1)$.

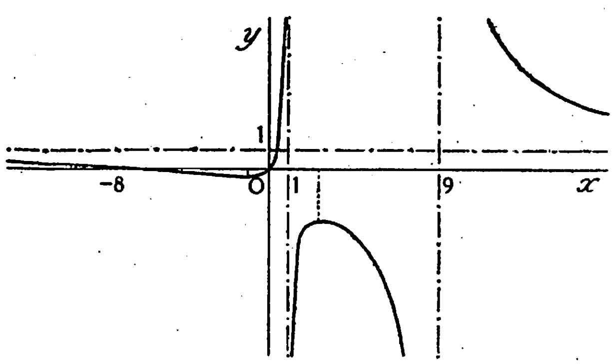


Fig. 24.

La 2^e^ branche est asymptote aux droites $x = 1$ et $x = 9$. La 3^e^ branche est asymptote aux droites $x = 9$ et $y = 1$.

10° $y = \dfrac{x^2 + 2x + 25}{(x + 1)^2}$.

a) La fonction est définie et continue, sauf pour $x = -1$. Elle ne s'annule pour aucune valeur de x et elle a comme limite 1 pour x infini.

b) La dérivée $y' = -\dfrac{48(x + 1)}{(x + 1)^4}$ ne s'annule pour aucune valeur de x, car pour $x = -1$, elle cesse d'exister.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	$\vert$	$-$	
y	1	↗	$+\infty \vert +\infty$	↘	1

d) La courbe est formée de deux branches. Chaque branche est asymptote aux droites $x = -1$ et $y = 1$.

11° $y = \dfrac{2x^2 - 7x + 3}{x^2 - 7x + 12}$.

a) Le numérateur de y s'annule pour $x = 3$, $x = 0{,}5$ et son dénominateur pour $x = 3$, $x = 4$. On a donc

$$y = \frac{(x - 3)(2x - 1)}{(x - 3)(x - 4)} = \frac{2x - 1}{x - 4}$$

pour toutes les valeurs de x, en convenant d'adopter comme valeur de la fonction pour $x = 3$, sa limite pour $x = 3$.

La fonction est définie et continue, sauf pour $x = 4$. Elle s'annule pour $x = 0{,}5$. Sa limite est 2 pour x infini, et l'infini pour $x = 4$.

b) Sa dérivée $y' = \dfrac{-7}{(x - 4)^2}$ est toujours négative. Toutefois la fonction n'a pas de dérivée pour $x = 4$, car elle n'est pas définie pour cette valeur de x.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
y'		$-$	$\vert$	$-$	
y	2	↘	$-\infty \vert +\infty$	↘	2

d) Le graphique de la fonction est une hyperbole équilatère, analogue à celle du n° 317, 1°. Cette hyperbole a comme asymptotes les droites

$$x = 4 \quad \text{et} \quad y = 2.$$

12° $y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{3x^2 - 12x + 12}$.

a) La fonction est définie et continue, sauf pour $x = 2$. Elle s'annule pour $x = 1$ et $x = 3$. Si x tend vers l'infini, elle a comme limite $\frac{1}{3}$; si x tend vers 2, on a $\lim y = -\infty$.

b) Sa dérivée $y' = \dfrac{6(x-2)}{(3x^2 - 12x + 12)^2}$
a le signe du binôme $x - 2$. Toutefois elle cesse d'exister pour $x = 2$, car la fonction n'est pas définie pour cette valeur de x. Il en résulte que la dérivée ne s'annule pour aucune valeur de x.

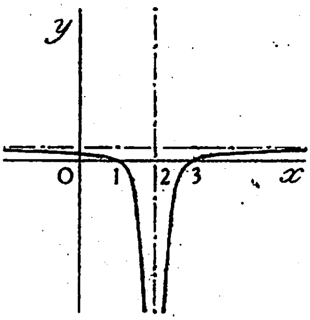


Fig. 25.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	
y	$\frac{1}{3}$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{3}$

d) La courbe est asymptote aux droites

$$x = 2, \quad y = \frac{1}{3}.$$

319. *Étudier les variations des fonctions suivantes :*

1° $y = \dfrac{x^3}{x^3 + 4}$.

a) La fonction est définie et continue, sauf pour $x = -\sqrt[3]{4}$, soit environ $-1{,}6$. Elle a comme limite zéro, pour x infini.

b) La dérivée $y' = \dfrac{x(8 - x^3)}{(x^3 + 4)^2}$
s'annule pour $x = 0$ et $x = 2$. Elle cesse d'exister pour $x = -\sqrt[3]{4}$.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{4}$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$\frac{1}{3}$	↘	0
					min.		*max.*		

d) La courbe est asymptote aux droites $x = -\sqrt[3]{4}$ et $y = 0$.

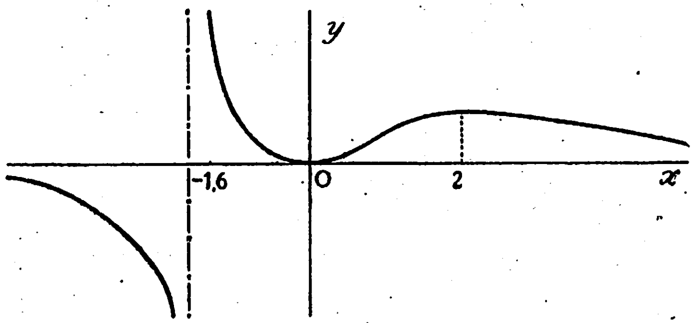


Fig. 26.

2° $y = \dfrac{(x+1)^2}{x^3}$.

a) La fonction est définie et continue, sauf pour $x = 0$. Elle s'annule pour $x = -1$ et sa limite est zéro pour x infini.

b) La dérivée $$y' = \frac{-x^2(x+1)(x+3)}{x^6}$$
cesse d'exister pour $x = 0$; elle s'annule pour $x = -1$ et $x = -3$.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		-3		-1		0			$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	|		$-$	
y	0	$\searrow$	$-\dfrac{4}{27}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$		$\searrow$	0
			min.		*max.*					

d) Le graphique est analogue à celui du 1°. Les deux branches de la courbe sont asymptotes aux droites $x = 0$; $y = 0$.

3° $y = \dfrac{(x+1)^3}{x^2}$.

a) La fonction est définie et continue, sauf pour $x = 0$. Elle s'annule pour $x = -1$ et elle a comme limite l'infini pour x infini.

b) La dérivée $$y' = \frac{x(x+1)^2(x-2)}{x^4}$$
cesse d'exister pour $x = 0$. Elle s'annule pour $x = -1$ et $x = 2$.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		-1		0			2		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	‖		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$	$+\infty$	↘	$6{,}75$	↗	$+\infty$
								min.		

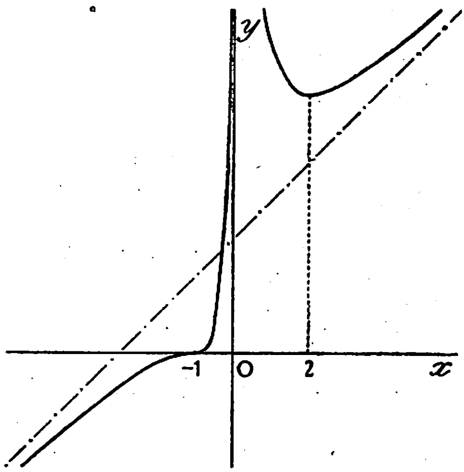


Fig. 27

d) La courbe (Fig. 27) est asymptote aux droites

$$y = x + 3 \quad \text{et} \quad x = 0,$$

car la fonction peut s'écrire

$$y = x + 3 + \frac{3x + 1}{x^3}.$$

La courbe coupe l'asymptote $y = x + 3$ au point

$$\left(-\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right).$$

4° $$y = \frac{x^3 - 10x^2}{1 - x}$$

a) La fonction est définie et continue, sauf pour $x = 1$. Elle s'annule pour $x = 0$ et $x = 10$; sa limite est l'infini pour x infini.

b) La dérivée $$y' = \frac{-x(2x^2 - 13x + 20)}{(1 - x)^2}$$
s'annule pour $x = 0$, $x = 2{,}5$ et $x = 4$. Elle cesse d'exister pour $x = 1$.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		0		1			$2{,}5$		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	$\frac{125}{4}$	↗	32	↘	$-\infty$
			max.					*min.*		*max.*		

d) La courbe qui représente les variations de la fonction est asymptote à la droite $x = 1$.

5° $y = \dfrac{x^3 - x^2 - x + 5}{x^2 - 2x + 1}$.

a) La fonction est définie et continue, sauf pour $x = 1$. Elle a comme limite l'infini, pour x infini.

b) La dérivée

$$y' = \frac{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 12x + 9}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)(x-3)(x^2+3)}{(x-1)^4}$$

s'annule pour $x = 3$; elle cesse d'exister pour $x = 1$, car la fonction n'est pas définie pour cette valeur de x.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		1			3		$+\infty$
y'		$+$	‖		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty \mid +\infty$		$\searrow$	5 *min.*	$\nearrow$	$+\infty$

d) La courbe (Fig. 28) est asymptote aux droites

$$y = x + 1 \quad \text{et} \quad x = 1,$$

car la fonction peut s'écrire

$$y = x + 1 + \frac{4}{(x-1)^2}.$$

La courbe montre que la fonction ne s'annule qu'une fois, et cela pour $x < -1$.

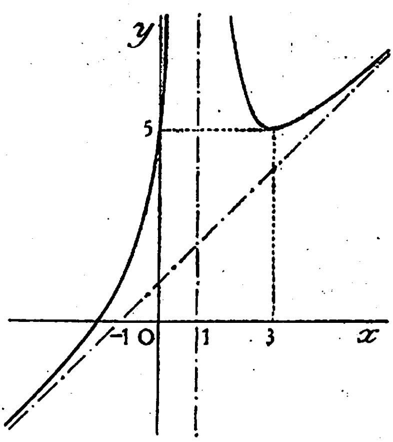


Fig. 28

6° $y = x^2 + \dfrac{1}{4(x^2 - 1)}$.

a) La fonction est définie et continue, sauf pour $x = \pm 1$. Elle s'annule pour $x = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, soit environ $\pm 0{,}7$. On a aussi

$$\lim y = +\infty, \quad \text{pour } x \text{ infini.}$$

b) La dérivée $\qquad y' = \dfrac{x(4x^4 - 8x^2 + 3)}{2(x^2-1)^2}$

s'annule pour $x = 0$, $x = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $x = \pm \dfrac{\sqrt{6}}{2}$. Les quatre dernières racines valent approximativement $\pm 0{,}7$ et $\pm 1{,}22$.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{6}}{2}$		-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$\frac{\sqrt{6}}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty \vert -\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty \vert +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
			min.				*max.*		*min.*		*max.*				*min.*		

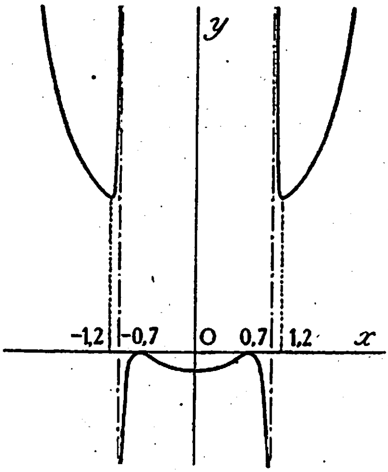


Fig. 29.

d) La courbe est asymptote aux droites $x = \pm 1$; elle est symétrique par rapport à Oy, car x ne figure qu'au carré dans la fonction proposée.

320. *Étudier les variations des fonctions suivantes :*

1° $y = \sqrt{x+1}$.

a) La fonction est définie et continue dans l'intervalle $(-1, +\infty)$; elle s'annule pour $x = -1$, et on a $\lim y = +\infty$, quand x tend vers l'infini par valeurs positives.

b) La dérivée de la fonction est

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

pour toutes les valeurs de x pour lesquelles la fonction est définie. Cette dérivée est toujours positive. On peut encore remarquer que la fonction n'a pas de dérivée pour $x = -1$, mais une dérivée à droite, qui est $+\infty$.

c) On a le tableau :

x	-1		$+\infty$
y'	$\vert +\infty$	$+$	
y	0	$\nearrow$	$+\infty$

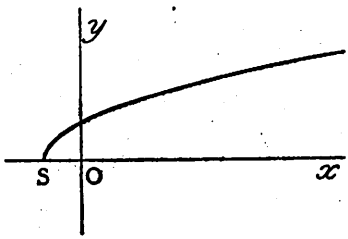


Fig. 30.

d) La courbe représentant la fonction (Fig. 30) est une demi-parabole, dont l'axe est Ox et le sommet S $(-1,0)$.

2° $y = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$.

a) La fonction est définie et continue dans les intervalles $(-\infty, -3)$ et $(1, +\infty)$; elle s'annule pour $x = -3$ et pour $x = 1$; on a $\lim y = +\infty$ pour x infini.

b) Sa dérivée est

$$y' = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$$

pour toutes les valeurs de x pour lesquelles y est défini. Elle ne s'annule pour aucune valeur de x et elle a le signe de $x + 1$. La dérivée à gauche pour $x = -3$ est $-\infty$; la dérivée à droite pour $x = 1$ est $+\infty$.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		$-$	$-\infty$		$+\infty$	$+$	
y	$+\infty$	↘	0		0	↗	$+\infty$

d) La courbe qui représente la fonction est formée de deux branches; celle de gauche est tangente à la droite $x = -3$ au point $(-3, 0)$; l'autre est tangente à la droite $x = 1$ au point $(1, 0)$. — Voir aussi le n° **279**[bis], 5°.

3° $y = x\sqrt{x - 3}$.

a) La fonction est définie et continue dans l'intervalle $(3, +\infty)$ elle s'annule pour $x = 3$.

b) La dérivée est

$$y' = \frac{3x - 6}{2\sqrt{x - 3}}$$

pour toutes les valeurs de x pour lesquelles la fonction est définie. Cette dérivée est toujours positive. Pour $x = 3$, il n'y a pas de dérivée, mais seulement une dérivée à droite qui est $+\infty$.

c) On a le tableau :

x	3		$+\infty$
y'	$+\infty$	$+$	
y	0	↗	$+\infty$

d) La courbe représentant la fonction est analogue à celle du 1°.

4° $y = x\sqrt{x(4 - x)}$.

a) La fonction est définie et continue dans l'intervalle $(0, 4)$. Elle s'annule pour $x = 0$ et $x = 4$.

b) La dérivée de la fonction est $(x = \sqrt{x^2}$, pour $0 < x < 4)$

$$y' = \frac{2x(3 - x)}{\sqrt{x(4 - x)}} = \frac{2(3 - x)\sqrt{x}}{\sqrt{4 - x}}$$

pour toutes les valeurs de x pour lesquelles la fonction est définie.

Pour $x = 0$, la dérivée à droite est 0; pour $x = 4$, la dérivée à gauche est $-\infty$.

c) On a le tableau :

x	0		3		4
y'	0	$+$	0	$-$	$-\infty$
y	0	$\nearrow$	$3\sqrt{3}$ *max.*	$\searrow$	0

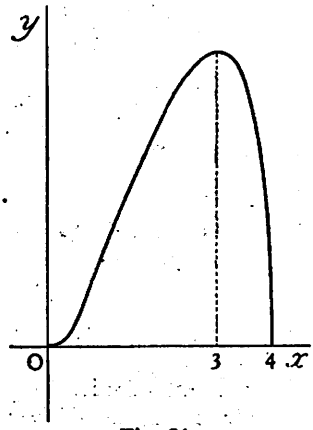


Fig. 31.

d) La courbe qui représente les variations de y est tangente à Ox en O et à la droite $x = 4$ au point $(4, 0)$.

Elle a un point d'inflexion pour
$$x = 3 - \sqrt{3},$$
car la dérivée seconde est
$$y'' = \frac{2(x^2 - 6x + 6)}{(4 - x)\sqrt{4x - x^2}}.$$

5° $y = 4(1 - x)\sqrt{2x(1 - x)}$.

a) La fonction est définie et continue dans l'intervalle $(0, 1)$. Elle s'annule pour
$$x = 0 \text{ et } x = 1.$$

b) Pour les valeurs de x comprises entre 0 et 1, la fonction admet une dérivée qui est
$$y' = \frac{4(1 - x)(1 - 4x)}{\sqrt{2x(1 - x)}}.$$

Pour $x = 0$, la fonction a une dérivée à droite, qui est $+\infty$; pour $x = 1$, la dérivée à gauche est nulle.

c) On a le tableau :

x	0		0,25		1
y'	$+\infty$	$+$	0	$-$	0
y	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{6}}{4}$ *max.*	$\searrow$	0

d) La courbe est analogue à celle du 4°. Elle est tangente à Oy en O et à Ox au point (1, 0). Elle a un point d'inflexion pour $x = \frac{1 + \sqrt{3}}{4}$, car la dérivée seconde est

$$y'' = \frac{2(8x^2 - 4x - 1)}{x\sqrt{2x(1 - x)}}.$$

6° $y = x + \sqrt{4 - 2x}$.

a) Cette fonction est définie et continue dans l'intervalle $(-\infty, 2)$. Elle s'annule pour $x = -1 - \sqrt{5}$, soit environ $-3{,}24$. La limite de la fonction est $-\infty$, pour $x = -\infty$.

b) Pour les valeurs de x inférieures à 2, la dérivée de la fonction est

$$y' = \frac{\sqrt{4 - 2x} - 1}{\sqrt{4 - 2x}}.$$

La dérivée s'annule pour $x = 1{,}5$. Son signe est le même que celui de son numérateur. Ce numérateur est une fonction continue dans l'intervalle $(-\infty, 2)$. Donc il ne peut changer de signe qu'en s'annulant, et il a un signe invariable dans chacun des intervalles $(-\infty, 1{,}5)$ et $(1{,}5, 2)$. Pour déterminer ces signes, il suffira de faire deux essais, un pour chaque intervalle. Or pour $x = 0$, le numérateur vaut 1, et pour $x = 2$, il vaut -1. Donc la dérivée est positive pour $x < 1{,}5$ et elle est négative pour $1{,}5 < x < 2$.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		1,5		2
y'		+	0	—	$-\infty$
y	$-\infty$	↗	2,5 *max.*	↘	2

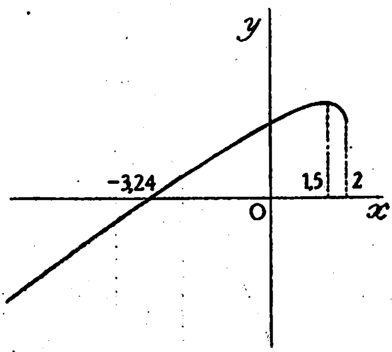


Fig. 32.

d) La courbe (Fig. 32) est tangente à la droite $x = 2$ au point (2, 2).

7° $y = x\sqrt{2 - x^2} + 2 - x^2$.

a) La fonction est définie et continue dans l'intervalle $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Elle s'annule pour $x = \pm\sqrt{2}$ et $x = -1$.

b) La dérivée de la fonction est

$$y' = \frac{2(1 - x^2 - x\sqrt{2 - x^2})}{\sqrt{2 - x^2}}.$$

La dérivée à droite pour $x = -\sqrt{2}$ est $-\infty$; la dérivée à gauche pour $x = \sqrt{2}$ est aussi $-\infty$. La dérivée s'annule pour

$$x_1 = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} \quad \text{et} \quad x_2 = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}},$$

soit environ, $x_1 = -1{,}31$ et $x_2 = 0{,}54$.

Les valeurs correspondantes de la fonction sont

$$y_1 = 1 - \sqrt{2} \quad \text{et} \quad y_2 = 1 + \sqrt{2},$$

soit environ, $\quad y_1 = -0{,}41 \quad$ et $\quad y_2 = 2{,}41$.

Pour étudier le signe de y', on remarque que y' a le même signe que son numérateur. Mais ce numérateur est une fonction continue de x dans l'intervalle $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Il ne peut donc changer de signe qu'en s'annulant. Il suffira de déterminer le signe du numérateur pour une seule valeur de x dans chacun des intervalles

$$(-\sqrt{2}; -1{,}31), \quad (-1{,}31; 0{,}54), \quad (0{,}54; \sqrt{2}).$$

Or pour $x = 0$, le numérateur est positif; pour $x = -1{,}35$ et $x = 1$, il est négatif. Par suite, y' est négatif dans le 1er et le 3e intervalle et positif dans le second.

c) On a le tableau :

x	$-\sqrt{2}$		$-1{,}31$		$0{,}54$		$\sqrt{2}$
y'	$\|-\infty$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-\infty\|$
y	0	↘	$-0{,}41$ *min.*	↗	$2{,}41$ *max.*	↘	0

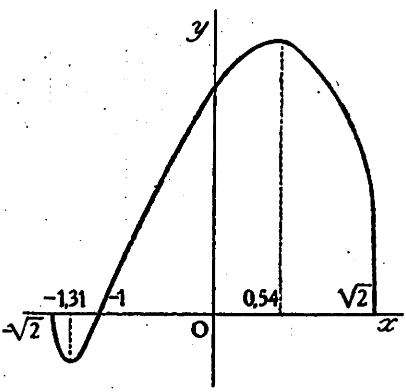


Fig. 33

d) La courbe (Fig. 33) est tangente à la droite $x = -\sqrt{2}$ au point $(-\sqrt{2}, 0)$ et à la droite $x = \sqrt{2}$ au point $(\sqrt{2}, 0)$.

8° $y = x + 1 + \sqrt{2x^2 - 2x + 3}$.

a) Cette fonction est définie et continue pour toutes les valeurs de x, car le trinôme $2x^2 - 2x + 3$ est toujours positif. La fonction ne s'annule pour aucune valeur de x, car les racines de l'équation

$$\sqrt{2x^2 - 2x + 3} = -x - 1$$

doivent être inférieures ou égales à -1; et, en résolvant l'équation, on trouve $x = 2 \pm \sqrt{2}$.

b) La dérivée $y' = \dfrac{\sqrt{2x^2 - 2x + 3} + 2x - 1}{\sqrt{2x^2 - 2x + 3}}$

s'annule pour $x = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$, soit environ $x = -0{,}618$. La valeur correspondante de la fonction est $y = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$, soit environ 2,618.

On détermine le signe de y' comme dans l'exercice précédent.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		$-0{,}618$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2,618 *min.*	$\nearrow$	$+\infty$

321. *Étudier les variations des fonctions suivantes* :

1° $y = \dfrac{x}{\sqrt{(x-1)(5-x)}}$.

a) La fonction n'est définie et continue que pour les valeurs de x comprises entre 1 et 5. Elle ne s'annule donc pour aucune valeur de x.

b) Pour les valeurs de x comprises entre 1 et 5, la dérivée est

$$y' = \frac{3x - 5}{(x-1)(5-x)\sqrt{(x-1)(5-x)}}.$$

c) On a le tableau :

x	1		$\frac{5}{3}$		5
y'	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$ *min.*	$\nearrow$	$+\infty$

d) La courbe (Fig. 34) est asymptote aux droites

$$x = 1 \quad \text{et} \quad x = 5.$$

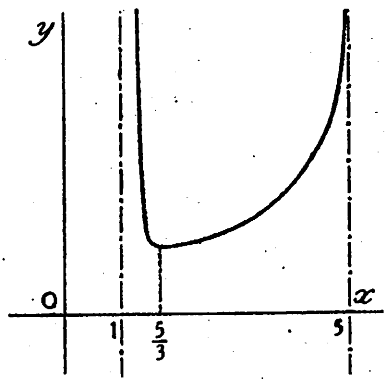


Fig. 34

Elle n'a pas de point d'inflexion, car la dérivée seconde

$$\frac{6(x^2 - 4x + 5)}{(x-1)^2 (5-x)^2 \sqrt{(x-1)(5-x)}}$$

ne s'annule pour aucune valeur de x.

2° $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

a) La fonction est définie et continue pour $x < -1$ et $x \geqslant 1$. Elle s'annule pour $x = 1$. Sa limite est 1, pour x infini.

b) Pour les valeurs de x inférieures à -1 ou supérieures à 1, on a

$$y' = \frac{1}{(x+1)^2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Pour $x = 1$, la fonction a une dérivée à droite qui est $+\infty$.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$			$+\infty$	$+$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty$		0	$\nearrow$	1

d) La courbe est formée de deux branches. Celle de gauche est asymptote aux droites $y = 1$ et $x = -1$; celle de droite est asymptote à la droite $y = 1$ et tangente à la droite $x = 1$ au point $(1, 0)$.

3° $y = x\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$.

a) La fonction est définie et continue pour $-2 < x \leqslant 2$. Elle s'annule pour $x = 0$ et $x = 2$. Sa limite est $-\infty$, quand x tend vers -2 par valeurs décroissantes.

b) Pour les valeurs de x comprises entre -2 et 2, la fonction a comme dérivée

$$y' = \frac{4 - 2x - x^2}{\sqrt{(2-x)(2+x)^3}}.$$

Pour $x = 2$, la fonction a une dérivée à droite qui est $-\infty$. Le trinôme $4 - 2x - x^2$ s'annule pour $x = -1 \pm \sqrt{5}$; la dérivée elle-même ne s'annule que pour $x = \sqrt{5} - 1$, soit environ 1,24. La valeur correspondante de la fonction est $\sqrt{10\sqrt{5} - 22}$, soit environ 0,6.

c) On a le tableau :

x	-2		$1{,}24$		2
y'		$+$	0	$-$	$-\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$0{,}6$ *max.*	$\searrow$	0

d) La courbe (Fig. 35) est asymptote à la droite $x = -2$; elle est tangente à la droite $x = 2$ au point $(2, 0)$.

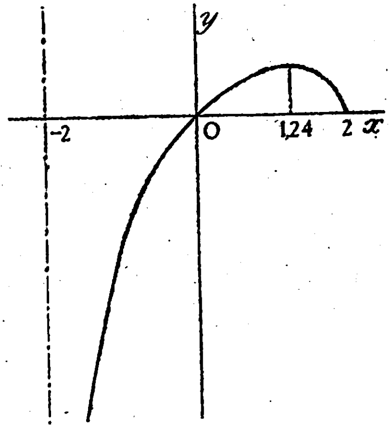


Fig. 35.

4° $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - x}}$.

a) La fonction est définie et continue pour les valeurs de x qui satisfont aux relations

$$x \leqslant -3; \quad 0 < x < 1; \quad x \geqslant 2.$$

Elle s'annule pour $x = -3$ et $x = 2$. Sa limite est 1, pour x infini.

b) La dérivée de la fonction est

$$y' = \frac{-(x^2 - 6x + 3)}{\sqrt{(x^2 - x)^3 (x^2 + x - 6)}}$$

pour les valeurs de x qui satisfont aux relations

$$x < -3; \quad 0 < x < 1; \quad x > 2.$$

Pour $x = -3$, la fonction a une dérivée à gauche qui est $-\infty$; pour $x = 2$, elle a une dérivée à droite qui est $+\infty$.

La dérivée s'annule pour

$$x_1 = 3 - \sqrt{6} \quad \text{et} \quad x_2 = 3 + \sqrt{6},$$

soit environ 0,55 et 5,45.

Les valeurs de y, qui correspondent à ces valeurs de x, sont

$$y_1 = \sqrt{11 + 4\sqrt{6}} = \sqrt{8} + \sqrt{3}; \quad y_2 = \sqrt{11 - 4\sqrt{6}} = \sqrt{8} - \sqrt{3},$$

soit environ, $y_1 = 4{,}56$ et $y_2 = 1{,}1$.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		-3	0		x_1		1	2		x_2		$+\infty$
y'	0	$-$	$-\infty$		$-$	0	$+$		$+\infty$	$+$	0	$-$	0
y	1	↘	0	$+\infty$	↘	y_1 *min.*	↗	$+\infty$	0	↗	y_2 *max.*	↘	1

d) La courbe est formée de trois branches. Celle de gauche est asymptote à la droite $y = 1$ et tangente à la droite $x = -3$ au point $(-3, 0)$; celle du milieu est asymptote aux droites $x = 0$ et $x = 1$; celle de droite est asymptote à la droite $y = 1$ et tangente à la droite $x = 2$ au point $(2, 0)$.

5° $y = \dfrac{2 + \sqrt{x^3 - 1}}{x}$.

a) Cette fonction est définie et continue dans l'intervalle $(1, +\infty)$. Elle ne s'annule pour aucune valeur de x. Sa limite est $+\infty$, pour x infini.

b) La dérivée $$y' = \frac{x^3 + 2 - 4\sqrt{x^3 - 1}}{2x^3\sqrt{x^3 - 1}}$$
s'annule pour $x_1 = \sqrt[3]{2}$ et $x_2 = \sqrt[3]{10}$,
soit environ $x_1 = 1{,}259$ et $x_2 = 2{,}154$.

Les valeurs correspondantes de y sont
$$y_1 = \frac{3}{2}\sqrt[3]{4} \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{100},$$
soit environ $y_1 = 2{,}38$ et $y_2 = 2{,}32$.

Pour déterminer le signe de y', on fait trois essais, un pour chacun des intervalles $(1;\ 1{,}259)$; $(1{,}259;\ 2{,}154)$; $(2{,}154;\ +\infty)$.

c) On a le tableau :

x	1		$\sqrt[3]{2}$		$\sqrt[3]{10}$		$+\infty$
y'	$\Vert +\infty$	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	2	$\nearrow$	$2{,}38$ *max.*	$\searrow$	$2{,}32$ *min.*	$\nearrow$	$+\infty$

d) La courbe est tangente à la droite $x = 1$ au point $(1, 2)$.

6° $y = \dfrac{x}{x + 1 + \sqrt{x^2 - 1}}$.

a) La fonction est définie et continue pour $x < -1$ et pour $x \geqslant 1$. Elle ne s'annule pour aucune valeur de x.

On a $\lim y = 0{,}5$, pour $x = +\infty$. Cherchons aussi la limite de la fonction pour $x = -\infty$. En remarquant que $x = -\sqrt{x^2}$, il vient
$$y = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{x} - \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}}.$$
Le dénominateur tend vers zéro. La fraction a donc comme limite l'infini.

b) La dérivée $$y' = \frac{\sqrt{x^2 - 1} - 1}{(x + 1 + \sqrt{x^2 - 1})^2\sqrt{x^2 - 1}}$$
s'annule pour $x_1 = -\sqrt{2}$ et $x_2 = \sqrt{2}$.

Les valeurs correspondantes de y sont
$$y_1 = -\sqrt{2}\sqrt{\ }\ 1^2 \text{et} \quad y_2 = \sqrt{2} - 1;$$
ou environ, $y_1 = -2{,}414$ et $y_2 = 0{,}414$.

Pour déterminer le signe de y', on fait quatre essais, un pour chacun des intervalles
$$(-\infty;\ -1{,}414);\quad (-1{,}414;\ -1);\quad (1;\ 1{,}414);\quad (1{,}414;\ +\infty).$$

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$				$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	y_1	$\searrow$	$-\infty$		$\frac{1}{2}$	$\searrow$	y_2	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$
			max.						*min.*		

322. *Étudier les variations des fonctions suivantes :*

1° $y = \sqrt{(x-2)^2} + 1$.

1re MÉTHODE. — Cette fonction est définie et continue pour toutes les valeurs de x, mais elle prend des formes différentes suivant les valeurs attribuées à x.

a) Si $x < 2$, on a : $y = -x + 3$.
b) Si $x = 2$, on a : $y = 1$.
c) Si $x > 2$, on a : $y = x - 1$.

Le graphique est formé de deux demi-droites concourant au point (2, 1); il montre que la fonction a un minimum égal à 1, pour $x = 2$.

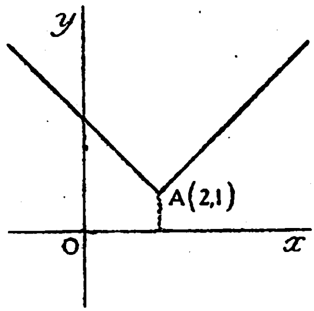


Fig. 36.

2e MÉTHODE. — L'expression générale de la dérivée est

$$y' = \frac{x-2}{\sqrt{(x-2)^2}}.$$

a) Si $x < 2$, on a : $y' = -1$, car $\sqrt{(x-2)^2} = 2 - x$.
b) Si $x > 2$, on a : $y' = +1$.
c) Pour $x = 2$, la fonction n'a pas une dérivée unique, mais une dérivée à gauche et une dérivée à droite distinctes. Ces dérivées valent respectivement -1 et $+1$.

On a le tableau :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	$-1 \mid +1$	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
			min.		

Le point (2, 1) du graphique est un point anguleux, dont le sommet est dirigé vers le bas.

2° $y = \sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(x-1)^2}$.

Cette fonction est définie et continue pour toutes les valeurs de x.

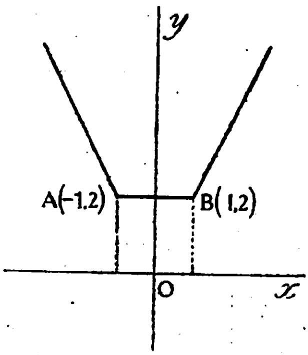


Fig. 37.

Si $x < -1$, on a : $y = -2x$;
Si $x = -1$, on a : $y = 2$;
Si $-1 < x < 1$, on a : $y = 2$;
Si $x = 1$, on a : $y = 2$;
Si $x > 1$, on a : $y = 2x$.

Le graphique se compose de deux demi-droites dont les origines A et B sont réunies par un segment AB parallèle à l'axe des x. Le graphique montre que la fonction n'a ni maximum, ni minimum.

En employant la méthode des dérivées, on aboutirait aux mêmes conclusions. Voici le tableau auquel cette méthode conduit :

x	$-\infty$		-1			1		$+\infty$
y'		$-$	-2 | 0	0		0 | $+2$	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	*fonct. const.*		2	$\nearrow$	$+\infty$

3° $y = 2\sqrt{x^2} - 3\sqrt{(x-1)^2}$.

La fonction est définie et continue pour toutes les valeurs de x. Seulement, $\sqrt{x^2}$ est égal à $-x$ ou à $+x$, suivant que x est négatif ou positif; et $\sqrt{(x-1)^2}$ est égal à $1-x$ ou à $x-1$, suivant que x est inférieur ou supérieur à 1. Par suite :

Si $x < 0$, on a : $y = x - 3$;
Si $x = 0$, on a : $y = -3$;
Si $0 < x < 1$, on a : $y = 5x - 3$;
Si $x = 1$, on a : $y = 2$;
Si $x > 1$, on a : $y = -x + 3$.

Le graphique est formé de deux demi-droites dont les origines sont réunies par un segment AB. Ce graphique montre que la fonction a un maximum égal à 2, pour $x = 1$.

En employant la méthode des dérivées, on aboutirait aux mêmes conclusions. Voici le tableau auquel cette méthode conduit :

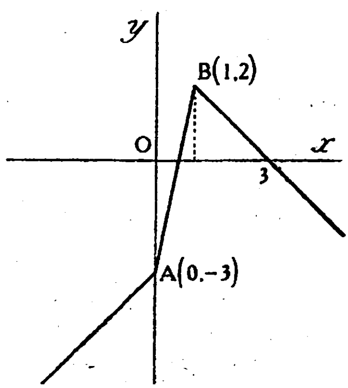


Fig. 38.

x	$-\infty$			0			1			$+\infty$
y'		$+$	1	| 5	$+$	5	| -1	$-$		
y	$-\infty$	$\nearrow$		-3	$\nearrow$		2 *max.*		$\searrow$	$-\infty$

Le point B(1, 2) est un point anguleux dont le sommet est dirigé vers le haut.

4° $y = x\sqrt{(x-2)^2}$.

1^{re} MÉTHODE. — Cette fonction est définie et continue pour toutes les valeurs de x. Seulement, $\sqrt{(x-2)^2}$ est égal à $2 - x$ ou à $x - 2$, suivant que x est inférieur ou supérieur à 2.

a) Si $x < 2$, on a : $y = 2x - x^2$.

Cette fonction est représentée par la branche de parabole ABC.

b) Si $x = 2$, on a : $y = 0$.

c) Si $x > 2$, on a : $y = x^2 - 2x$.

Cette fonction est représentée par la branche de parabole CD.

La fonction a un maximum égal à 1, pour $x = 1$ et un minimum égal 0, pour $x = 2$.

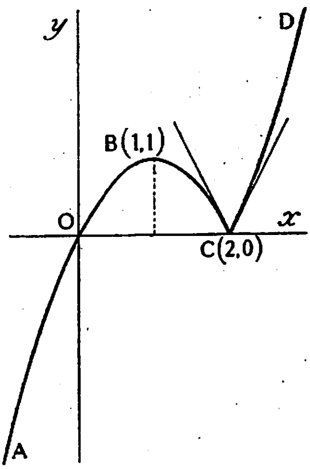


Fig. 39

2^e MÉTHODE. — L'expression générale de la dérivée est

$$y' = \sqrt{(x-2)^2} + \frac{x(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2}} = \frac{2(x-1)(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2}}.$$

Si $x < 2$, on a : $y' = \dfrac{2(x-1)(x-2)}{2-x} = -2(x-1)$.

Si $x > 2$, on a : $y' = 2(x-1)$.

Pour $x = 2$, la fonction n'a pas une dérivée unique, mais une dérivée à gauche qui est -2 et une dérivée à droite qui est $+2$.

On a le tableau :

x	$-\infty$		1		2			$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	-2 | $+2$		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1 *max.*	$\searrow$	*min.*		$\nearrow$	$+\infty$

Le point $C(2, 0)$ est un point anguleux dont le sommet est dirigé vers le bas.

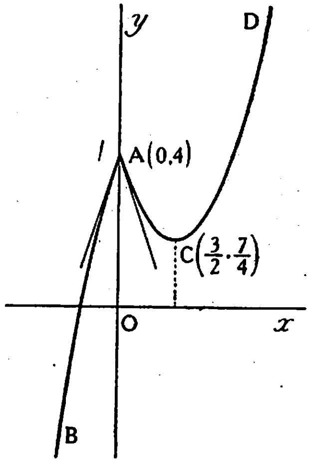


Fig. 40.

5° $y = (x - 3)\sqrt{x^2} + 4$.

Pour les valeurs négatives de x, on a

$$y = -x^2 + 3x + 4.$$

Cette fonction est représentée par la branche de parabole AB.

Pour les valeurs positives de x, on a

$$y = x^2 - 3x + 4.$$

Cette fonction est représentée par la branche de parabole ACD.

La fonction proposée a un minimum égal à $\frac{7}{4}$ pour $x = \frac{3}{2}$ et un maximum égal à 4 pour $x = 0$. Le point A est un point anguleux. Pour $x = 0$, la dérivée à gauche est 3 et la dérivée à droite est -3.

6° $y = \sqrt[3]{2(x-1)^2} - 1$.

a) Cette fonction est définie et continue pour toutes les valeurs de x. Elle s'annule pour

$$x_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2},$$

soit environ,

$$x_1 = 0{,}293 \quad \text{et} \quad x_2 = 1{,}707.$$

b) La dérivée

$$y' = \frac{2\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{x-1}}$$

ne s'annule pour aucune valeur de x. Elle devient infinie pour $x = 1$, en passant de valeurs négatives à des valeurs positives.

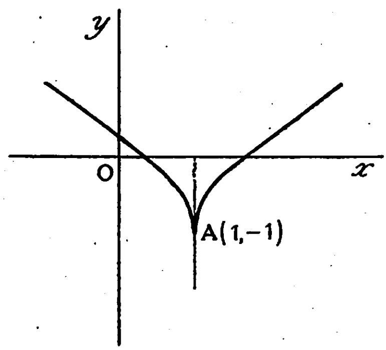


Fig. 41.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	$-\infty \mid +\infty$	$+$	
y	$+\infty$	↘	-1 *min.*	↗	$+\infty$

d) Le point (1, — 1) du graphique de la fonction (Fig. 41) est un point de rebroussement.

7° $y = \sqrt[3]{3x^2} - \sqrt[3]{2(x-1)^2}$.

a) La fonction est définie et continue pour toutes les valeurs de x. Elle s'annule pour

$$x_1 = -2 - \sqrt{6} \quad \text{et} \quad x_2 = -2 + \sqrt{6},$$

soit environ, $\quad x_1 = -4{,}449 \quad \text{et} \quad x_2 = 0{,}449.$

b) La dérivée $\qquad y' = \dfrac{2\sqrt[3]{3(x-1)} - 2\sqrt[3]{2x}}{3\sqrt[3]{x(x-1)}}$

s'annule pour $x = 3$. Elle devient infinie pour $x = 0$, en passant de valeurs négatives à des valeurs positives; elle devient encore infinie pour $x = 1$, mais en passant de valeurs positives à des valeurs négatives.

Pour étudier le signe de la dérivée, on remarque qu'elle est une fonction continue et différente de zéro dans chacun des intervalles :

$$(-\infty, 0), \quad (0, 1), \quad (1, 3), \quad (3, +\infty).$$

Elle a donc un même signe pour toutes les valeurs de x prises dans un même intervalle. Il suffira de faire quatre essais, un pour chaque intervalle; on peut prendre, par exemple, $x = -1$, $x = 0{,}5$, $x = 2$ et $x = 4$.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		0			1			3		$+\infty$
y'		$-$	$-\infty \mid +\infty$	$+$		$+\infty \mid -\infty$	$-$		0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$-\sqrt[3]{2}$ *min.*	↗		$\sqrt[3]{3}$ *max.*	↘		1 *min.*	↗	$+\infty$

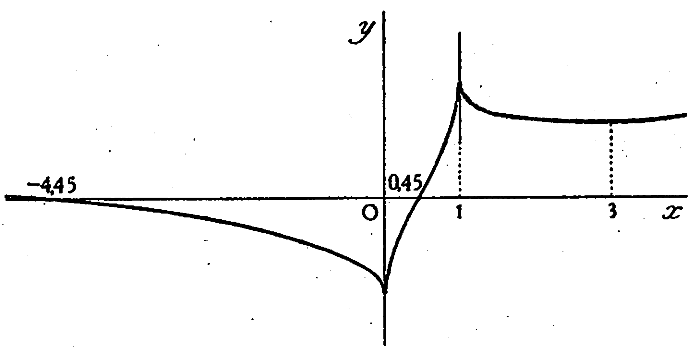


Fig. 42.

Les points $(0, -\sqrt[3]{2})$ et $(1, \sqrt[3]{3})$ sont des points de rebroussement.

8° $y = \sqrt[3]{(3 + 2x - x^2)^2}$.

a) La fonction est définie et continue pour toutes les valeurs de x. Elle s'annule pour $x = -1$ et $x = 3$.

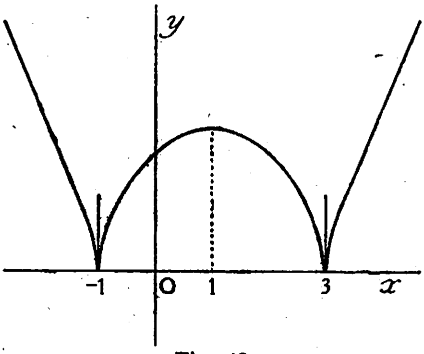


Fig. 43.

b) La dérivée

$$y' = \frac{4(1 - x)}{3\sqrt[3]{3 + 2x - x^2}}$$

s'annule pour $x = 1$. Elle devient infinie pour $x = -1$ et $x = 3$. Pour les autres valeurs de x, elle a le signe du produit

$$(1 - x)(3 + 2x - x^2).$$

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		$-$	$-\infty \mid +\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty \mid +\infty$	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0 *min.*	$\nearrow$	$2\sqrt[3]{2}$ *max.*	$\searrow$	0 *min.*	$\nearrow$	$+\infty$

Les points $(-1, 0)$ et $(3, 0)$ sont des points de rebroussement de la courbe (Fig. 43).

9° $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$.

a) La fonction est définie et continue pour toutes les valeurs de x. Elle s'annule pour $x = 1$ et $x = -2$.

b) L'expression générale de la dérivée est

$$y' = \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{(x^3 - 3x + 2)^2}}.$$

Cette dérivée s'annule pour $x = -1$. Elle devient infinie pour $x = 1$ et $x = -2$. On voit de plus que y' a le même signe que $x^2 - 1$.

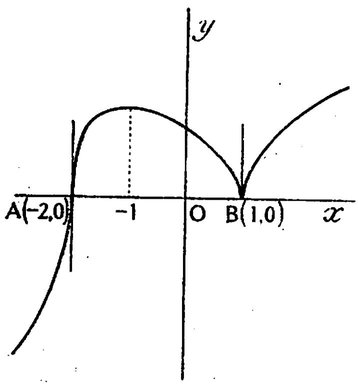


Fig. 44.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty \mid +\infty$	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}$ *max.*	$\searrow$	0 *min.*	$\nearrow$	$+\infty$

d) La fonction n'a pas d'extrémé pour $x = -2$, car la dérivée ne change pas de signe en devenant infinie. Le point A(-2, 0) est un point d'inflexion à tangente verticale (Fig. 44). Le point B(1,0) est un point de rebroussement. — Voir aussi le n° 279$^{\text{bis}}$, 6°.

10° $y = \sqrt[5]{x^4(x-1)}$.

a) Cette fonction est définie et continue pour toutes les valeurs de x. Elle s'annule pour $x = 0$ et $x = 1$.

b) L'expression générale de la dérivée est

$$y' = \frac{5x-4}{5\sqrt[5]{x(x-1)^4}}.$$

La dérivée s'annule pour $x = 0{,}8$ et elle devient infinie pour $x = 0$ et $x = 1$. Pour les autres valeurs de x, elle a le signe du produit $x(5x-4)$.

c) On a le tableau :

x	$-\infty$		0		0,8		1		$+\infty$
y'		$+$	$+\infty \mid -\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\dfrac{2\sqrt[5]{8}}{5}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
			max.		*min.*				

d) Le point (0, 0) est un point de rebroussement. Le point (1, 0) est un point d'inflexion à tangente verticale.

323. ***Étudier les variations des fonctions suivantes quand*** x ***croît de*** 0 ***à*** 2π.

1° $y = \sin x + \cos x$.

a) La fonction s'annule pour $x = \dfrac{3\pi}{4}$ et $x = \dfrac{7\pi}{4}$.

b) La dérivée $y' = \cos x - \sin x$ s'annule pour $x = \dfrac{\pi}{4}$ et $x = \dfrac{5\pi}{4}$.

c) La dérivée seconde $y'' = -(\sin x + \cos x)$ est négative pour $x = \dfrac{\pi}{4}$ et positive pour $x = \dfrac{5\pi}{4}$. A $x = \dfrac{\pi}{4}$ correspond donc un maximum et à $x = \dfrac{5\pi}{4}$, un minimum.

y'' s'annule en changeant de signe pour $x = \dfrac{3\pi}{4}$ et $x = \dfrac{7\pi}{4}$. A ces valeurs de x correspondent donc des points d'inflexion.

d) On a le tableau :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
y'		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
y	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$ *max.*	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\sqrt{2}$ *min.*	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

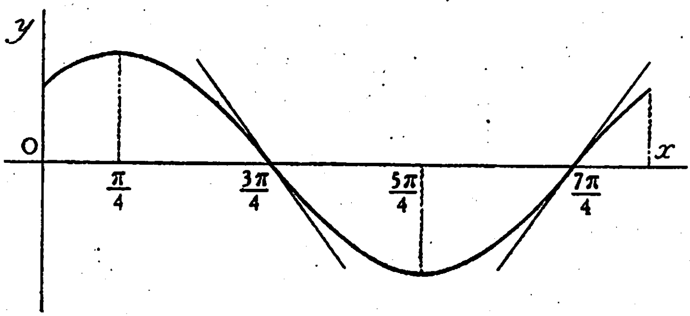


Fig. 45.

2° $y = 4\cos^2 x - 8\cos x + 3$.

a) La fonction s'annule pour $\cos x = \frac{1}{2}$, donc pour $x = \frac{\pi}{3}$ et $x = \frac{5\pi}{3}$.

b) La dérivée est

$$y' = -8\cos x \sin x + 8\sin x = 8\sin x(1 - \cos x).$$

Elle s'annule pour $\sin x = 0$ et $\cos x = 1$; donc pour $x = 0$, $x = \pi$ et $x = 2\pi$.

Pour étudier le signe de la dérivée, on remarque qu'elle est une fonction continue. Elle ne peut donc changer de signe qu'en s'annulant. Par suite, elle a un même signe dans chacun des intervalles $(0, \pi)$ et $(\pi, 2\pi)$. Or pour $x = \frac{\pi}{2}$, on a $y' = 8$ et pour $x = \frac{3\pi}{2}$, on a $y' = -8$. La dérivée est donc positive dans le premier intervalle et négative dans le second.

c) La dérivée seconde $y'' = 8(1 + \cos x - 2\cos^2 x)$ s'annule pour $\cos x = 1$ et $\cos x = -\frac{1}{2}$; donc pour $x = 0$, $x = \frac{2\pi}{3}$, $x = \frac{4\pi}{3}$, $x = 2\pi$. En étudiant le signe de la dérivée seconde comme on vient d'étudier celui de la dérivée première, on voit que y'' ne s'annule en changeant de signe que pour $x = \frac{2\pi}{3}$ et $x = \frac{4\pi}{3}$. A ces valeurs de x correspondent des points d'inflexion.

d) On a le tableau :

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π		$\frac{4\pi}{3}$		2π
y'	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0
y	-1 *min.*	↗	8	↗	15 *max.*	↘	8	↘	-1 *min.*

3° $y = \cos x + \cos 2x$.

a) On a $y = 2\cos^2 x + \cos x - 1.$

La fonction s'annule pour $\cos x = 0{,}5$ et $\cos x = -1$; donc pour

$$x = \frac{\pi}{3},\ x = \pi,\ x = \frac{5\pi}{3}.$$

b) La dérivée $y' = -4\cos x \sin x - \sin x = -\sin x(4\cos x + 1)$ s'annule pour $\sin x = 0$ et $\cos x = -0{,}25$; donc pour $x = 0$, $x = \pi$ et encore pour deux autres angles que nous désignons par α et $2\pi - \alpha$ et qui, exprimés en degrés, valent approximativement $104^\circ\,28'$ et $255^\circ\,32'$.

c) On a le tableau :

x	0		α		π		$2\pi - \alpha$		2π
y'	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
y	2 *max.*	↘	$-\frac{9}{8}$ *min.*	↗	0 *max.*	↘	$-\frac{9}{8}$ *min.*	↗	2 *max.*

d) La dérivée seconde $y'' = -8\cos^2 x - \cos x + 4$ s'annule pour

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{129}}{16},$$

en changeant de signe. On en déduit qu'il y a quatre arcs α', $2\pi - \alpha'$, α'', $2\pi - \alpha''$ auxquels correspondent des points d'inflexion.

4° $y = 3 + 5\sin x - 2\sin^2 x$.

a) La fonction s'annule pour $\sin x = -0{,}5$; donc pour

$$x = \frac{7\pi}{6} \text{ et } x = \frac{11\pi}{6}.$$

b) La dérivée $y' = \cos x(5 - 4\sin x)$

s'annule pour $\cos x = 0$; donc pour $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$.

c) On a le tableau :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	3	$\nearrow$	6 *max.*	$\searrow$	-4 *min.*	$\nearrow$	3

d) La dérivée seconde $y'' = 8\sin^2 x - 5\sin x - 4$ s'annule pour

$$\sin x = \frac{5 - \sqrt{153}}{16},$$

en changeant de signe. On en déduit qu'il y a deux arcs auxquels correspondent des points d'inflexion.

5° $y = \sin^2 x \sin 2x$.

a) On a $$y = 2\sin^3 x \cos x.$$

La fonction s'annule pour $\sin x = 0$ et $\cos x = 0$; donc pour

$$x = 0,\ x = \frac{\pi}{2},\ x = \pi,\ x = \frac{3\pi}{2},\ x = 2\pi.$$

b) La dérivée $y' = 6\sin^2 x\cos^2 x - 2\sin^4 x = 2\sin^2 x(3\cos^2 x - \sin^2 x)$ s'annule pour $\sin x = 0$ et pour les valeurs de x données par l'équation

$$3\cos^2 x - \sin^2 x = 0 \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}.$$

Les valeurs cherchées de x sont donc

$$0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3},\ \pi,\ \frac{4\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3},\ 2\pi.$$

Pour étudier le signe de y', on fait six essais, un pour chaque intervalle.

c) On a le tableau :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
y'	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
y	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$ *max.*	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{8}$ *min.*	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$ *max.*	$\nearrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{8}$ *min.*	$\nearrow$	0

d) La dérivée seconde $y'' = 4\sin x\cos x(3\cos^2 x - 5\sin^2 x)$ s'annule quand on a

$$\sin x = 0;\quad \cos x = 0;\quad 3\cos^2 x - 5\sin^2 x = 0 \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} x = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Désignons par α le plus petit angle positif qui vérifie la relation $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{0,6}$; ce tangle est compris entre 30° et 45°. Les valeurs de x, qui annulent y'', sont par ordre de grandeur croissante :

$$0\ (+)\ \alpha\ (-)\ \frac{\pi}{2}\ (+)\ \pi - \alpha\ (-)\ \pi\ (+)\ \pi + \alpha\ (-)\ \frac{3\pi}{2}\ (+)\ 2\pi - \alpha (-)\ 2\pi.$$

Nous avons intercalé les signes que prend y'' dans les divers intervalles. On les obtient en faisant une substitution par intervalle : les valeurs de x choisies pour ces substitutions ont été

$$\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{6},\ \frac{7\pi}{6},\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4},\ \frac{11\pi}{6}.$$

De ce qui précède, on peut conclure que la courbe a neuf points d'inflexion. De plus, le tableau des variations montre que les points d'inflexion qui correspondent à

$$x = 0, \quad x = \pi \quad \text{et} \quad x = 2\pi$$

sont à tangente horizontale.

6° $y = \sin 2x + 2\cos x$.

a) On a $$y = 2\cos x(1 + \sin x).$$

La fonction s'annule pour $\cos x = 0$ et $\sin x = -1$; donc pour

$$x = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad x = \frac{3\pi}{2}.$$

b) La dérivée est

$$y' = -2\sin x(1 + \sin x) + 2\cos^2 x = -2(2\sin^2 x + \sin x - 1).$$

Elle s'annule pour $\sin x = -1$ et $\sin x = 0,5$; donc pour

$$x = \frac{\pi}{6}; \quad x = \frac{5\pi}{6}; \quad x = \frac{3\pi}{2}.$$

c) On a le tableau :

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
y	2	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ *max.*	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ *min.*	↗	0	↗	2

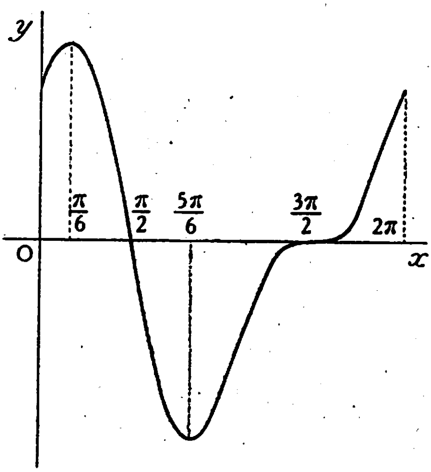


Fig. 46.

d) La dérivée seconde est

$$y'' = -2\cos x(4\sin x + 1).$$

Elle s'annule pour

$$\cos x = 0$$

$$\text{et}\quad \sin x = -\frac{1}{4}.$$

La 2e relation est vérifiée par deux angles que nous désignons par α et $3\pi - \alpha$ et qui, exprimés en degrés, valent environ 194° 29′ et 345° 31′. Les valeurs de x, qui annulent y'', sont donc

$$(-)\ \frac{\pi}{2}\ (+)\ \alpha\ (-)\ \frac{3\pi}{2}\ (+)\ 3\pi - \alpha\ (-)$$

Nous avons intercalé les signes de y'' pour chaque intervalle. On les trouve en faisant une substitution par intervalle.

De ce qui précède, il résulte que la courbe a quatre points d'inflexion. Le tableau des variations montre que le point d'inflexion qui correspond à $x = \frac{3\pi}{2}$ est à tangente horizontale.

7° $y = \dfrac{\cos 3x}{1 + \cos 2x}$.

a) On a $\qquad y = \dfrac{4\cos^3 x - 3\cos x}{2\cos^2 x} = \dfrac{4\cos^2 x - 3}{2\cos x},$

en supposant $\cos x \neq 0$. La fonction n'est pas définie pour $\cos x = 0$; quand $\cos x$ tend vers zéro, la fonction a comme limite l'infini.

La fonction s'annule pour $\cos x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, donc pour

$$x = \frac{\pi}{6};\ x = \frac{5\pi}{6};\ x = \frac{7\pi}{6};\ x = \frac{11\pi}{6}.$$

b) La dérivée est

$$y' = \frac{-\sin x(4\cos^2 x + 3)}{2\cos^2 x}$$

pour les valeurs de x pour lesquelles la fonction est définie. Cette dérivée s'annule pour $\sin x = 0$; donc pour

$$x = 0,\quad x = \pi,\quad x = 2\pi.$$

Elle a le signe contraire de $\sin x$.

c) On a le tableau :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2
y'	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	0
y	$0,5$ *max.*	$\searrow$	$\mp\infty$	$\searrow$	$-0,5$ *min.*	$\nearrow$	$\pm\infty$	$\nearrow$	$0,5$ *max.*

d) La courbe est asymptote aux droites : $x = \frac{\pi}{2}$; $x = \frac{3\pi}{2}$.

Elle n'a pas de points d'inflexion, car la dérivée seconde

$$y'' = \frac{-(4\cos^4 x - 3\cos^2 x + 6)}{2\cos^3 x}$$

ne s'annule pour aucune valeur de x.

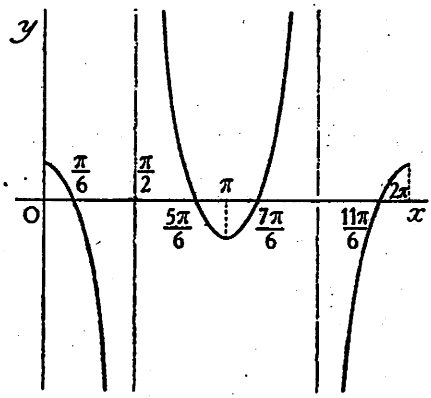


Fig. 47.

8° $y = \dfrac{(1 + \sin x)^2}{\sin x(1 - \sin x)}$.

a) La fonction n'est pas définie pour $\sin x = 0$ et $\sin x = 1$; donc pour les valeurs

$$0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ 2\pi.$$

Elle s'annule pour $\sin x = -1$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$.

b) La dérivée est

$$y' = \frac{\cos x(1 + \sin x)(3\sin x - 1)}{\sin^2 x(1 - \sin x)^2}$$

pour toutes les valeurs de x pour lesquelles la fonction est définie.

Le numérateur de cette dérivée s'annule quand on a

$$\cos x = 0; \quad 1 + \sin x = 0; \quad 3\sin x - 1 = 0.$$

Les solutions de la dernière équation, exprimées en degrés, sont environ 19°28′ et 160°32′. Nous les représenterons par α et $\pi - \alpha$.

Dans ces conditions, les valeurs de x, qui annulent y', sont

$$\alpha, \quad \pi - \alpha, \quad \frac{3\pi}{2}.$$

Pour déterminer le signe de y', on peut considérer les intervalles successifs formés par les arcs

$$0 \quad \alpha \quad \frac{\pi}{2} \quad \pi - \alpha \quad \pi \quad \frac{3\pi}{2} \quad 2\pi.$$

Dans chacun de ces intervalles, la dérivée est continue et différente de zéro. Il suffira donc de déterminer le signe de y' ou de $\cos x(3 \sin x - 1)$ pour une valeur de x par intervalle.

c) On a le tableau :

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$		$\pi - \alpha$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y'	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$
y	$+\infty$	$\searrow$	8 *min.*	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	8 *min.*	$\nearrow$	$\pm\infty$	$\nearrow$	0 *max.*	$\searrow$	$-\infty$

9° $y = \sqrt{\dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$.

a) La fonction n'est pas définie pour $\sin x = 1$ ou $x = \frac{\pi}{2}$; elle s'annule pour $\sin x = -1$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$.

b) La dérivée est $y' = \sqrt{\dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} \times \dfrac{\cos x}{(1 - \sin x)^2}$, en supposant x différent de $\frac{\pi}{2}$ et de $\frac{3\pi}{2}$.

Cette expression de y' peut être transformée. En supposant $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}\, x < 2\pi$, on a $\cos x = + \sqrt{1 - \sin^2 x}$ et $y' = \dfrac{1}{1 - \sin x}$.

En supposant $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$, on trouve $y' = \dfrac{-1}{1 - \sin x}$.

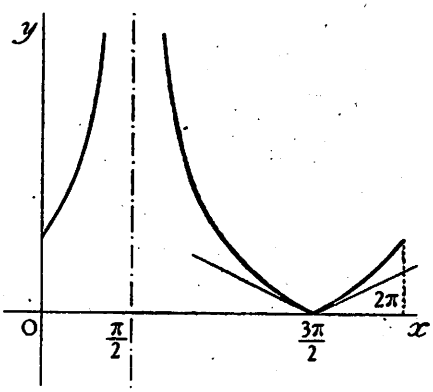


Fig. 48.

Pour $x = \frac{\pi}{2}$, la fonction n'a pas de dérivée. Quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$ par valeurs croissantes, la dérivée tend vers $+ \infty$; elle tend vers $- \infty$, quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$ par valeurs décroissantes.

Pour $x = \frac{3\pi}{2}$, la fonction n'a pas une dérivée unique; mais une dérivée à gauche, qui est $- 0{,}5$, et une dérivée à droite, qui est $+ 0{,}5$.

c) On a le tableau :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y'		$+$	|	$-$	$-0{,}5$ | $+0{,}5$	$+$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	0 *min.*	$\nearrow$	1

324. *La fonction* $y = \dfrac{ax + b}{a'x + b'}$ *peut-elle devenir maximum ou minimum?*

Cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x, sauf pour $x_1 = -\dfrac{b'}{a'}$.
L'expression générale de sa dérivée est

$$y' = \frac{ab' - ba'}{(a'x + b')^2}.$$

a) Si $ab' - ba' > 0$, la fonction est croissante, sauf pour $x = x_1$.
b) Si $ab' - ba' < 0$, la fonction est décroissante, sauf pour $x = x_1$.
c) Si $ab' - ba' = 0$, on peut poser $a = a'k$, $b = b'k$ et la fonction devient

$$y = \frac{k(a'x + b')}{a'x + b'} = k.$$

Elle se réduit à une constante.

On voit que la fonction n'a ni maximum, ni minimum, quelles que soient les constantes a, a', b, b'.

325. *Chercher les conditions requises pour que le trinôme* $ax^4 + bx^2 + c$ *admette un maximum sans admettre un minimum.*

Pour que la fonction $y = ax^4 + bx^2 + c$ admette un maximum sans admettre un minimum, il faut d'abord que la dérivée $y' = 2x(2ax^2 + b)$ ne s'annule que pour une seule valeur de x. Or y' s'annule toujours pour $x = 0$. Il faut donc que le second facteur $2ax^2 + b$ n'admette pas d'autre racine que zéro; ce qui exige $ab \geqslant 0$.

a) Si $ab > 0$, le facteur $2ax^2 + b$ est a un signe invariable. La dérivée s'annulera, en passant du signe $+$ au signe $-$, quand x passe en croissant par 0, à condition que a soit négatif. On doit donc avoir

$$a < 0, \quad \text{et par suite,} \quad b < 0.$$

b) Si $ab = 0$, on a $b = 0$ et par suite, $y' = 4ax^3$. On devra encore avoir $a < 0$.

326. *On donne la fonction* $y = x^3 + px - 1$. *Quelles valeurs faut-il attribuer à* p :

1° *Pour que la fonction n'admette ni maximum, ni minimum?*

2° *Pour que la fonction admette un maximum et un minimum et qu'elle ait trois racines distinctes?*

3° *Pour que la fonction admette un maximum et un minimum et qu'elle ait trois racines parmi lesquelles une racine double?*

1° La fonction $y = x^3 + px - 1$ n'admet ni maximum, ni minimum, si sa dérivée
$$y' = 3x^2 + p$$
ne s'annule pour aucune valeur de x; ou encore si elle s'annule, mais sans changer de signe.

a) Le trinôme $y' = 3x^2 + p$ ne s'annule pour aucune valeur de x, si on a $p > 0$.

b) Le trinôme $y' = 3x^2 + p$ s'annule pour $x = 0$, mais sans changer de signe, si on a $p = 0$.

2° *a*) Pour que la fonction admette un maximum et un minimum, il faut et il suffit que on ait $p < 0$.

En effet, dans ce cas, et dans ce cas seulement, la dérivée $y' = 3x^2 + p$ admet deux racines qui sont
$$x_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{-3p} \text{ et } x_2 = \frac{1}{3}\sqrt{-3p}.$$

De plus, pour $x = x_1$, la dérivée seconde $y'' = 6x$ est négative, tandis qu'elle est positive pour $x = x_2$.

Le maximum sera $\quad y_1 = -1 - \frac{2p}{9}\sqrt{-3p}$

et le minimum $\quad y_2 = -1 + \frac{2p}{9}\sqrt{-3p}.$

b) Le trinôme admet en plus trois racines distinctes, si la courbe qui représente les variations de la fonction coupe trois fois l'axe des x; donc si le maximum est positif et le minimum négatif.

Le minimum y_2 est toujours négatif. Le maximum y_1 sera positif si l'on a
$$-\frac{2p}{9}\sqrt{-3p} > 1.$$

Les deux membres de cette inégalité sont positifs. On peut donc élever au carré et on obtient ainsi la condition
$$4p^3 + 27 < 0.$$

3° Nous venons de voir que la condition, pour que la fonction admette un maximum et un minimum, est que p soit négatif. Nous avons vu de plus que, dans ce cas, le minimum est négatif. La fonction admettra donc une racine simple et une racine double si le maximum est nul; ce qui exige
$$-1 - \frac{2p}{9}\sqrt{-3p} = 0 \text{ ou } p = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}.$$

327. *Déterminer un polynôme du 3e degré en* x, *qui admette deux valeurs extrêmes, l'une pour* x = 1 *et l'autre pour* x = 2, *qui s'annule pour* x = 0 *et qui prenne la valeur* $-\frac{10}{3}$ *pour* x = 1. *Étudier les variations de ce polynôme.*

Comme le polynôme doit s'annuler pour $x = 0$, il sera de la forme

$$y = ax^3 + bx^2 + cx.$$

Sa dérivée $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ doit s'annuler pour $x = 1$ et $x = 2$. On a donc les équations

$$3a + 2b + c = 0 \text{ et } 12a + 4b + c = 0,$$

auxquelles il faut adjoindre l'équation

$$a + b + c = -\frac{10}{3}.$$

Ce système donne

$$a = -\frac{4}{3}; \quad b = 6; \quad c = -8.$$

Les variations du polynôme

$$\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - 8x$$

sont résumées dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	$-\frac{10}{3}$	↗	$-\frac{8}{3}$	↘	$-\infty$
			min.		*max.*		

328. *Étudier les variations de la fonction* $y = 2x^4 - x^2 + a$; *des signes de ses valeurs extrêmes, déduire en combien de points la courbe qui représente ces variations, rencontre l'axe des* x.

a) La dérivée $y' = 2x(4x^2 - 1)$ s'annule pour

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = \pm 0{,}5.$$

De plus, en étudiant le signe de la dérivée, on voit que :

à $x_1 = -\frac{1}{2}$ correspond un minimum $y_1 = a - \frac{1}{8}$;

à $x_2 = 0$ correspond un maximum $y_2 = a$;

à $x_3 = \frac{1}{2}$ correspond un minimum $y_3 = a - \frac{1}{8}$.

b) On a $\lim y = +\infty$, pour $x = \pm\infty$.

Par suite, la courbe, qui représente les variations de la fonction, commence par descendre de gauche à droite et finit par monter de gauche à droite.

Pour déterminer le nombre des points de rencontre de cette courbe avec l'axe des x, il faut comparer a avec 0 et $\frac{1}{8}$.

1° Si $a < 0$, les trois extrémés sont négatifs et la courbe coupe Ox en deux points.

2° Si $a = 0$, le maximum est nul et les minimums sont négatifs; la courbe touche l'axe des x en un point et le coupe en deux autres points.

3° Si $0 < a < \frac{1}{8}$, le maximum est positif et les minimums sont négatifs; la courbe coupe Ox en quatre points.

4° Si $a = \frac{1}{8}$, les deux minimums sont nuls et la courbe touche Ox en deux points.

5° Si $a > \frac{1}{8}$, les minimums sont positifs et il n'y a pas de point de rencontre.

329. *On donne la fonction* $\mathrm{y} = \dfrac{\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{ax} + 1}{\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{a}'\mathrm{x} + 1}$ *et on demande de trouver la relation qui doit exister entre* a *et* a' *pour que cette fonction admette un maximum et un minimum ayant des valeurs opposées.*

La dérivée de cette fonction est

$$y' = \frac{2(a' - a)(x^2 - 1)}{(x^2 + 2a'x + 1)^2}.$$

1° Si $a = a'$, la dérivée est nulle, quel que soit x. La fonction se réduit à une constante. Elle est égale à l'unité, sauf pour les valeurs de x (s'il y en a) qui annulent le dénominateur.

2° Si $a' = \pm 1 \neq a$, les deux termes de y' sont divisibles par $x + 1$ ou par $x - 1$ et y' ne s'annule plus que pour une seule valeur de x. Donc, dans ces cas, la fonction n'a qu'une seule valeur extrême.

3° Si $a \neq a'$ et $a' \neq \pm 1$, la dérivée s'annule pour $x_1 = 1$ et $x_2 = -1$. De plus, elle change de signe quand x passe par -1 ou par 1 en croissant. La fonction a donc deux valeurs extrêmes qui sont

$$y_1 = \frac{a + 1}{a' + 1} \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{a - 1}{a' - 1}.$$

La relation $y_1 + y_2 = 0$ donne alors

$$\frac{a + 1}{a' + 1} + \frac{a - 1}{a' - 1} = 0.$$

En multipliant par $(a' + 1)(a' - 1)$, qui est différent de zéro, on trouve $aa' = 1$. C'est la condition cherchée.

330. *Déterminer* p *et* p′ *de manière que la fonction* $\dfrac{4x^2 + px - 3}{x^2 + p'x + 3}$ *ait deux valeurs extrêmes, l'une pour* x = 0 *et l'autre pour* x = 1,5. *Étudier les variations de la fonction après avoir attribué à* p *et* p′ *les valeurs trouvées.*

La dérivée de cette fonction est

$$y' = \frac{(4p' - p)x^2 + 30x + 3(p + p')}{(x^2 + p'x + 3)^2}.$$

Le numérateur de y' doit admettre les racines 0 et 1,5. Son dénominateur ne s'annule pas pour $x = 0$; il ne doit pas s'annuler non plus pour $x = 1{,}5$. On obtient ainsi le système

$$p + p' = 0; \quad \frac{-30}{4p' - p} = \frac{3}{2}; \quad 4p' - p \neq 0 \quad \frac{3p'}{2} + \frac{21}{4} \neq 0.$$

Ce système donne $p = 4$; $p' = -4$.

Les variations de la fonction

$$y = \frac{4x^2 + 4x - 3}{x^2 - 4x + 3}$$

sont résumées dans le tableau :

x	$-\infty$		0		1		1,5		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
y	4	$\searrow$	-1 *min.*	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	-16 *max.*	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	4

331. *Déterminer* p *et* q *pour que la fonction* $\dfrac{x^2 + px + q^2}{x}$ *ait un maximum égal à zéro et un minimum égal à* 4. *Étudier les variations de la fonction après avoir attribué à* p *et* q *les valeurs trouvées.*

La dérivée $\qquad y' = \dfrac{x^2 - q^2}{x^2}$

admet deux racines pourvu que q soit différent de zéro. Ces racines sont

$$x_1 = -q \quad \text{et} \quad x_2 = q;$$

les valeurs extrêmes correspondantes sont

$$y_1 = p - 2q \quad \text{et} \quad y_2 = p + 2q.$$

a) Si on pose

$$p - 2q = 0, \quad p + 2q = 4,$$

on trouve $p = 2$; $q = 1$. Cette solution convient, car elle conduit à la fonction

$$y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x} \qquad (1)$$

dont les variations sont résumées dans le tableau :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0 max.	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	4 min.	$\nearrow$	$+\infty$

b) Si on pose $p - 2q = 4$, $p + 2q = 0$, on trouve $p = 2$, $q = -1$, et on est conduit à la même fonction (1).

332. *Déterminer le paramètre* a *pour que la fonction* $y = \dfrac{ax^2 + 20x}{x^2 + 2x - 3}$ *passe par un maximum pour* $x = -2$. *Étudier les variations de* y *après avoir remplacé* a *par la valeur trouvée.*

La dérivée
$$y' = \frac{(2a - 20)x^2 - 6ax - 60}{(x^2 + 2x - 3)^2}$$
doit s'annuler pour $x = -2$. Comme le dénominateur ne s'annule pas pour $x = -2$, il suffit d'avoir

$$4(2a - 20) + 12a - 60 = 0 \quad \text{ou} \quad a = 7.$$

Le numérateur de y' devient alors $-6(x^2 + 7x + 10)$ et il s'annule en passant du signe $+$ au signe $-$, quand x passe par -2 en croissant. A $x = -2$ correspond donc un maximum.

Les variations de la fonction $y = \dfrac{7x^2 + 20x}{x^2 + 2x - 3}$ sont résumées dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		-5		-3		-2		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
y	7	$\searrow$	$\frac{25}{4}$ min.	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	4 max.	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	7

333. *Déterminer* p *et* q *pour que les extrémés de la fonction* $\dfrac{5x^2 + px + q}{x^2 + 1}$ *soient* 7 *et* -3.

La dérivée de y est
$$y' = \frac{-px^2 + 2x(5 - q) + p}{(x^2 + 1)^2}.$$

Soient α la valeur de x qui correspond à $y = 7$ et β la valeur de x qui correspond à $y = -3$. Les nombres α et β sont les racines de y'; on a donc

$$\alpha + \beta = \frac{10 - 2q}{p} \quad (1) \qquad \alpha\beta = -1. \quad (2)$$

On sait que les extrémés de y sont les valeurs que prend le rapport $\dfrac{10x + p}{2x}$ des dérivées des deux termes de y quand on y remplace x par les racines de la dérivée y' (*Compléments*, 355). On a donc

$$7 = \frac{10\alpha + p}{2\alpha}; \quad -3 = \frac{10\beta + p}{2\beta};$$

ou bien

$$\alpha = \frac{p}{4}; \quad \beta = -\frac{p}{16}.$$

En remplaçant dans (2), on trouve $p = \pm 8$. On est ainsi conduit aux deux solutions :

$$p = 8,\ \alpha = 2,\ \beta = -0{,}5,\ q = -1;$$
$$p = -8,\ \alpha = -2,\ \beta = 0{,}5,\ q = -1.$$

a) La fonction $y = \dfrac{5x^2 + 8x - 1}{x^2 + 1}$ admet un minimum -3 pour $x = -0{,}5$, et un maximum 7 pour $x = 2$.

b) La fonction $y = \dfrac{5x^2 - 8x - 1}{x^2 + 1}$ admet un maximum 7 pour $x = -2$, et un minimum -3 pour $x = 0{,}5$.

Méthode indirecte. — Le réalisant de l'équation en x

$$y = \frac{5x^2 + px + q}{x^2 + 1} \quad \text{ou} \quad x^2(y - 5) - px + y - q = 0$$

est $\rho = p^2 - 4(y - 5)(y - q) = -4y^2 + 2y(2q + 10) + p^2 - 20q$.

Ce trinôme en y a pour racines 7 et -3 si l'on a

$$\frac{4q + 20}{4} = 4; \quad \frac{p^2 - 20q}{-4} = -21.$$

D'où

$$q = -1; \quad p = \pm 8.$$

En continuant ensuite, on aboutit aux mêmes résultats que par la méthode précédente.

334. *La fonction* $\mathrm{y} = \dfrac{\mathrm{x}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c}}{\mathrm{x}^2 + \mathrm{b'x} + \mathrm{c'}}$ *a un maximum égal à* 4 *pour* $\mathrm{x} = 1$ *et un minimum égal à* -5 *pour* $\mathrm{x} = -2$. *Déterminer* b, c, b', c'.

La dérivée de y est

$$y' = \frac{x^2(b' - b) + 2x(c' - c) + bc' - cb'}{(x^2 + b'x + c')^2}.$$

Si y admet des extrémés pour $x = 1$ et $x = -2$, le numérateur de y' doit s'annuler pour ces valeurs de x. On a donc

$$\frac{-2(c'-c)}{b'-b} = -1 \quad \text{ou} \quad 2(c'-c) = b'-b; \tag{1}$$

$$\frac{bc'-cb'}{b'-b} = -2 \quad \text{ou} \quad bc'-cb' = 2(b-b'). \tag{2}$$

On sait que les extrémés de y sont les valeurs que prend le rapport $\dfrac{2x+b}{2x+b'}$ des dérivées des deux termes de y quand on y remplace x par les racines de la dérivée y'. On a donc

$$4 = \frac{2+b}{2+b'} \quad \text{ou} \quad b - 4b' = 6; \tag{3}$$

$$-5 = \frac{-4+b}{-4+b'} \quad \text{ou} \quad b + 5b' = 24. \tag{4}$$

Le système (1), (2), (3), (4) donne

$$b = 14, \ c = 9, \ b' = 2, \ c' = 3.$$

La fonction proposée devient $y = \dfrac{x^2 + 14x + 9}{x^2 + 2x + 3}$ et elle admet effectivement un maximum égal à 4 pour $x = 1$, et un minimum égal à -5 pour $x = -2$.

Méthode indirecte. — Considérons l'équation

$$y = \frac{x^2 + bx + c}{x^2 + b'x + c'} \quad \text{ou} \quad x^2(y-1) + x(b'y - b) + c'y - c = 0.$$

Pour $y = 4$, cette équation devient

$$3x^2 + x(4b' - b) + 4c' - c = 0$$

et elle a une racine double, égale à 1; ce qui donne les équations

$$\frac{b-4b'}{3} = 2 \quad \text{ou} \quad b - 4b' = 6; \tag{1}$$

$$\frac{4c'-c}{3} = 1 \quad \text{ou} \quad 4c' - c = 3. \tag{2}$$

Pour $y = -5$, l'équation devient

$$-6x^2 - x(5b' + b) - 5c' - c = 0$$

et elle a une racine double égale à -2; ce qui donne les équations

$$\frac{5b'+b}{6} = 4 \quad \text{ou} \quad 5b' + b = 24; \tag{3}$$

$$\frac{5c'+c}{6} = 4 \quad \text{ou} \quad 5c' + c = 24. \tag{4}$$

Le système (1), (2), (3), (4) donne

$$b = 14, \ c = 9, \ b' = 2, \ c' = 3.$$

335. *On donne la fonction* $y = x^2 + \frac{1}{x} + ax + b$. *Déterminer* a *et* b *de façon que la fonction admette un maximum égal à zéro pour* $x = -0,5$. *Étudier les variations de la fonction après avoir remplacé* a *et* b *par les valeurs trouvées.*

La dérivée
$$y' = 2x - \frac{1}{x^2} + a$$
doit s'annuler pour $x = -0,5$, ce qui donne $a = 5$.

Écrivons que la fonction s'annule pour $x = -0,5$. Il vient
$$\frac{1}{4} - 2 - \frac{5}{2} + b = 0 \quad \text{ou} \quad b = \frac{17}{4}.$$

La fonction devient donc
$$y = x^2 + \frac{1}{x} + 5x + \frac{17}{4}.$$

Elle admet effectivement un maximum pour $x = -0,5$, car sa dérivée
$$y' = \frac{2x^3 + 5x^2 - 1}{x^2} = \frac{(2x + 1)(x + 1 + \sqrt{2})(x + 1 - \sqrt{2})}{x^2}$$
passe du signe + au signe — en s'annulant quand x passe par $-0,5$ en croissant.

Les variations de $y = x^2 + \frac{1}{x} + 5x + \frac{17}{4}$ sont résumées dans le tableau :

x	$-\infty$		$-2,414$		$-0,5$		0		$0,414$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-2,406$ *min.*	$\nearrow$	0 *max.*	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	$8,906$ *min.*	$\nearrow$	$+\infty$

336. *Déterminer le nombre des extrémés de la fonction* $y = \frac{x^2 - x - c}{x^2 + x - c}$.

La dérivée de cette fonction est
$$y' = \frac{2x^2 + 2c}{(x^2 + x - c)^2}.$$

Le numérateur a pour réalisant $\rho = -16c$.

1° Si $c > 0$, on a $\rho < 0$; y' ne s'annule pour aucune valeur de x et la fonction y n'a ni maximum, ni minimum.

2° Si $c = 0$, on a
$$y = \frac{x^2 - x}{x^2 + x} = \frac{x(x - 1)}{x(x + 1)}.$$

La fonction n'est pas définie pour $x = 0$. Pour les autres valeurs de x, elle se réduit à la fonction homographique
$$y = \frac{x - 1}{x + 1},$$
qui n'a ni maximum ni minimum.

3° Si $c < 0$, on a $\rho > 0$ et le numérateur de y' s'annule pour deux valeurs de x. A chaque racine du numérateur de y' correspond un extrémé de la fonction, pourvu que cette racine de $2x^2 + 2c$ ne soit pas en même temps une racine de $x^2 + x - c$.

Pour voir ce qui en est, calculons le résultant des deux trinômes

$$2x^2 + 2c \quad \text{et} \quad x^2 + x - c.$$

Il est $R = 4c(4c + 1)$.

a) Si $-0{,}25 < c < 0$ ou $c < -0{,}25$, le résultant R est différent de zéro. Aucune racine de $2x^2 + 2c$ n'annule $x^2 + x - c$ et la fonction y a deux extrémés. Le maximum correspond à $x = -\sqrt{-c}$ et le minimum à $x = \sqrt{-c}$.

b) Si $c = -0{,}25$, on trouve

$$y = \left(\frac{2x - 1}{2x + 1}\right)^2.$$

La fonction n'est pas définie pour $x = -0{,}5$. Pour les autres valeurs de x, sa dérivée est

$$y' = \frac{8(2x - 1)}{(2x + 1)^3}.$$

La dérivée s'annule pour $x = 0{,}5$ en passant de valeurs négatives à des valeurs positives. Donc la fonction est minimum pour $x = 0{,}5$. Le minimum est $y = 0$.

337. *Quelles formes peuvent prendre les courbes qui représentent les variations des fonctions suivantes, quand le paramètre* a *prend toutes les valeurs possibles?*

1° $\mathrm{y} = \dfrac{1}{\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x} + \mathrm{a}}$.

a) Le réalisant du dénominateur est $1 - a$. Le nombre des valeurs de x pour lesquelles la fonction n'est pas définie dépendra donc de $1 - a$.

b) La dérivée de la fonction est

$$y' = \frac{-2(x - 1)}{(x^2 - 2x + a)^2}.$$

On voit que la fonction admettra un maximum $y_1 = \dfrac{1}{a - 1}$ pour $x = 1$, à moins que 1 ne soit racine du dénominateur, ce qui aurait lieu si l'on avait $a - 1 = 0$ ou $a = 1$.

1er cas : $1 - a < 0$ ou $a > 1$. — La fonction est définie pour toutes les valeurs de x. On a le tableau des variations :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+	0	—	
y	0	↗	y_1 *max.*	↘	0

La courbe est située au-dessus de l'axe des x; elle est asymptote à l'axe des x et présente un point maximum pour $x = 1$. (Voir Fig. 18).

2e cas : $1 - a > 0$ ou $a < 1$. — Le dénominateur a deux racines α et β, telles qu'on ait $\alpha < 1 < \beta$, car 1 est la demi-somme des racines du dénominateur. La fonction n'est pas définie pour $x = \alpha$ et $x = \beta$.

On a le tableau :

x	$-\infty$		α		1		β		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
y	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	y_1 *max.*	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

La courbe est formée de trois branches (Voir Fig. 17). La branche de gauche est placée au-dessus de l'axe des x; elle est asymptote à cet axe et à la droite $x = \alpha$. La seconde branche est placée en-dessous de l'axe des x. Elle est asymptote aux droites $x = \alpha$ et $x = \beta$. La troisième branche est placée au-dessus de l'axe des x; elle est asymptote à cet axe et à la droite $x = \beta$.

3e cas : $1 - a = 0$ ou $a = 1$. — Dans ce cas,

$$y = \frac{1}{(x-1)^2} \quad \text{et} \quad y' = \frac{-2}{(x-1)^3}.$$

La fonction n'est pas définie pour $x = 1$. On a le tableau :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$-$	
y	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

La courbe est formée de deux branches placées au-dessus de l'axe des x. Chaque branche est asymptote à l'axe des x et à la droite $x = 1$. (Voir Fig. 19).

2° $y = \dfrac{x}{x^2 - 2ax + 4}$.

a) Le nombre des valeurs de x pour lesquelles la fonction n'est pas définie dépend du réalisant du dénominateur qui est $a^2 - 4$.

b) La dérivée de la fonction est

$$y' = \frac{-x^2 + 4}{(x^2 - 2ax + 4)^2}$$

pour toutes les valeurs de x pour lesquelles la fonction est définie. L'examen de cette dérivée montre que la fonction proposée admet un minimum $y_1 = \dfrac{-1}{4+2a}$ pour $x = -2$ et un maximum $y_2 = \dfrac{1}{4-2a}$ pour $x = 2$, pourvu que 2 et -2 ne soient pas racines du dénominateur, ce qui exige $a \neq \pm 2$.

1er cas : $a < -2$ ou $a > 2$. — Le dénominateur de la fonction admet deux racines α et β $(\alpha < \beta)$ et la fonction n'est pas définie pour

$$x = \alpha \text{ et } x = \beta.$$

On a $\alpha < a < \beta$, car a est la demi-somme des racines du dénominateur. De plus, les nombres -2 et $+2$ comprennent l'une des racines α et β; car en désignant le dénominateur par $f(x)$, on a

$$f(-2)\,f(2) = (8+4a)\,(8-4a) = 16(4-a^2) < 0.$$

a) Si $a < -2$, on aura l'ordre

$$\alpha \quad -2 \quad \beta \quad 2$$

et le tableau des variations :

x	$-\infty$		α		-2		β		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	y_1 *min.*	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	y_2 *max.*	↘	0

b) Si $a > 2$, on a l'ordre

$$-2 \quad \alpha \quad 2 \quad \beta$$

et le tableau des variations :

x	$-\infty$		-2		α		2		β		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
y	0	↘	y_1 *min.*	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	y_2 *max.*	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

c) Les deux cas précédents conduisent à des graphiques analogues, formés de trois branches. (Voir Fig. 24).

2e cas : $-2 < a < 2$. — Le dénominateur n'a pas de racine et la fonction est définie pour toutes les valeurs de x.

On a le tableau :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	↘	y_1 *min.*	↗	y_2 *max.*	↘	0

La courbe n'a qu'une branche, asymptote à l'axe des x. (Voir Fig. 20).

3e cas : $a = -2$. — La fonction devient

$$y = \frac{x}{(x+2)^2}.$$

Elle n'est pas définie pour $x = -2$ et sa dérivée

$$y' = \frac{-x^2+4}{(x+2)^4}$$

cesse d'exister pour cette valeur de x.

On a le tableau des variations :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$-$	|	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	$-\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{8}$ *max.*	$\searrow$	0

En doublant les ordonnées, on a la courbe de la Fig. 49.

Elle est formée de deux branches dont chacune est asymptote aux droites

$$y = 0, \quad x = -2.$$

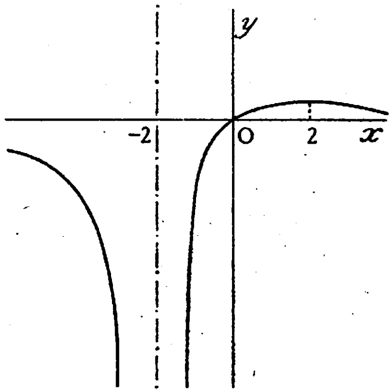


Fig. 49.

4e cas : $a = 2$. — La fonction devient

$$y = \frac{x}{(x-2)^2}.$$

Elle n'est pas définie pour $x = 2$ et par le fait, sa dérivée

$$y' = \frac{-x^2+4}{(x-2)^4}$$

cesse d'exister pour $x = 2$. On a le tableau des variations :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	|	$-$	
y	0	$\searrow$	$-\frac{1}{8}$ *min.*	$\nearrow$	$+\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	0

Le graphique de la fonction est analogue au précédent.

3° $y = \dfrac{x}{x^2 - 2x + a^2}$.

a) Le nombre des valeurs de x pour lesquelles la fonction n'est pas définie dépend du réalisant du dénominateur qui est $1 - a^2$.

b) La dérivée de la fonction est

$$y' = \frac{-x^2 + a^2}{(x^2 - 2x + a^2)^2}$$

pour toutes les valeurs de x pour lesquelles la fonction est définie.

Si $a \neq 0$, la dérivée s'annule pour deux valeurs de x

$$x_1 = -a \quad \text{et} \quad x_2 = a,$$

auxquelles correspondent deux valeurs extrêmes de la fonction

$$y_1 = \frac{-1}{2a + 2} \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{1}{2a - 2},$$

pourvu que $-a$ et a ne soient pas racines du dénominateur de la fonction, ce qui exige $a \neq \pm 1$.

1er cas : $a < -1$. — Le dénominateur n'a pas de racine et la fonction est définie pour toutes les valeurs de x. On a le tableau :

x	$-\infty$		a		$-a$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	↘	y_2 *min.*	↗	y_1 *max.*	↘	0

La courbe n'a qu'une branche, asymptote à l'axe des x. (Voir Fig. 20).

2e cas : $a > 1$. — Le tableau des variations et la courbe sont analogues aux précédents. Seulement le minimum correspond à $-a$ et le maximum à a.

3e cas : $-1 < a < 0$. — Le dénominateur de la fonction admet deux racines α et β $(\alpha < \beta)$ et la fonction n'est pas définie pour ces valeurs de x.

Pour classer les nombres $-a$ et a par rapport aux racines, on remarque qu'en désignant le dénominateur par $f(x)$, on a

$$f(a) = 2a(a - 1) > 0,$$
$$f(-a) = 2a(a + 1) < 0.$$

Comme d'ailleurs a est inférieur à 1, qui est la demi-somme des racines, on a le classement

$$a \quad \alpha \quad -a \quad \beta.$$

Cela étant, on peut dresser le tableau des variations :

x	$-\infty$	a		α		$-a$		β		$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
y	0 $\searrow$	y_2 *min.*	$\nearrow$ $+\infty$	|	$-\infty$ $\nearrow$	y_1 *max.*	$\searrow$ $-\infty$	|	$+\infty$ $\searrow$	0

Le graphique est formé de trois branches, asymptotes aux droites $x = a$, $x = -a$, $y = 0$. (Voir Fig. 24).

4e cas : $0 < a < 1$. — Le tableau des variations et le graphique sont analogues aux précédents. Seulement on a le classement

$$-a \quad \alpha \quad a \quad \beta.$$

De plus, le minimum correspond à $-a$ et le maximum à a.

5e cas : $a = 0$. — Dans ce cas,

$$y = \frac{x}{x^2 - 2x} = \frac{1}{x-2} \quad \text{et} \quad y' = \frac{-1}{(x-2)^2}.$$

On a le tableau :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'	$-$		|	$-$	
y	0	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	0

La courbe est une hyperbole équilatère, asymptote aux droites $y = 0$ et $x = 2$. (Voir Fig.16).

6e cas : $a = \pm 1$. — La fonction devient

$$y = \frac{x}{(x-1)^2}$$

dont les variations sont analogues à celles de la fonction étudiée au 4e cas de l'exercice précédent.

4° $y = \sqrt{x^3 + ax}$.

La fonction n'est définie que pour les valeurs de x qui vérifient la relation $$x(x^2 + a) \geqslant 0.$$

Si $a \geqslant 0$, la fonction est définie et continue dans l'intervalle $(0, +\infty)$.

Si $a < 0$, on peut poser $a = -b^2$, b étant un nombre positif, et la fonction devient

$$y = \sqrt{x(x^2 - b^2)}.$$

Elle est définie et continue dans les intervalles $(-b, 0)$ et $(b, +\infty)$.

On peut encore remarquer que la fonction s'annule pour $x = 0$ et que

$$\lim y = +\infty, \quad \text{pour} \quad x = +\infty.$$

1er cas : $a > 0$. — *a*) La dérivée

$$y' = \frac{3x^2 + a}{2\sqrt{x^3 + ax}}$$

est positive pour toutes les valeurs de x pour lesquelles la fonction est définie, donc dans l'intervalle $(0, +\infty)$. Toutefois pour $x = 0$, la fonction n'a pas de dérivée, mais une dérivée à droite qui est $+\infty$.

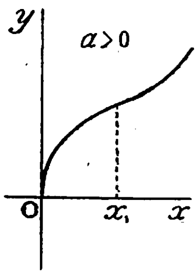


Fig. 50.

Il en résulte que la courbe est tangente à Oy en O et qu'elle monte de gauche à droite (Fig. 50).

b) La dérivée seconde

$$y'' = \frac{3x^4 + 6ax^2 - a^2}{4\sqrt{(x^3 + ax)^3}}$$

ne s'annule que pour une seule valeur positive de x qui est

$$x_1 = \sqrt{\frac{a}{3}(2\sqrt{3} - 3)}.$$

La dérivée seconde change de signe pour $x = x_1$. Cette valeur de x est donc l'abscisse d'un point d'inflexion de la courbe.

2e cas : $a = 0$. — *a*) La dérivée $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ s'annule pour $x = 0$; elle est positive pour $x > 0$. La courbe est tangente à Ox en O et monte ensuite de gauche à droite (Fig. 51).

b) La dérivée seconde $y'' = \dfrac{3}{4\sqrt{x}}$

ne s'annule pour aucune valeur positive de x; il en résulte que la courbe n'a pas de point d'inflexion.

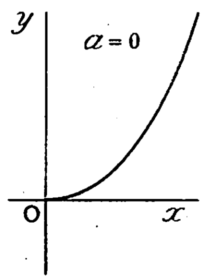


Fig. 51.

3e cas : $a = -b^2 < 0$. — *a*) La fonction

$$y = \sqrt{x(x^2 - b^2)}$$

définie dans les intervalles $(-b, 0)$, $(b, +\infty)$, s'annule pour $x = 0$ et $x = \pm b$.

b) Pour les valeurs de x prises dans les intervalles $(-b, 0)$, $(b, +\infty)$, la fonction admet la dérivée

$$y' = \frac{3x^2 - b^2}{2\sqrt{x(x^2 - b^2)}}$$

qui s'annule pour $x_1 = -\frac{b}{3}\sqrt{3}$. On a le tableau :

x	$-b$		x_1		0		b		$+\infty$
y'	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$		$+\infty$	$+$	
y	0	$\nearrow$	y_1 *max.*	$\searrow$	0		0	$\nearrow$	$+\infty$

La courbe est formée de deux branches. La première branche part du point $(-b, 0)$, est tangente à la droite $x = -b$ au point $(-b, 0)$, monte jusqu'au point maximum, puis descend jusqu'à l'origine; elle est encore tangente à Oy au point $(0, 0)$. La seconde branche part du point $(b, 0)$, est tangente à la droite $x = b$ au point $(b, 0)$, puis monte indéfiniment de gauche à droite.

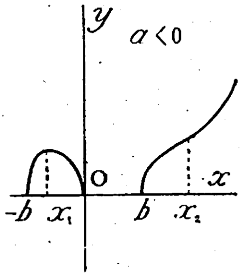


Fig. 52.

c) La dérivée seconde

$$y'' = \frac{3x^4 - 6b^2x^2 - b^4}{4\sqrt{(x^3 - b^2x)^3}}$$

s'annule pour la valeur $x_2 = b\sqrt{\frac{1}{3}(2\sqrt{3} + 3)}$

comprise dans l'intervalle $(b, +\infty)$, en changeant de signe. Le nombre x_2 est l'abscisse d'un point d'inflexion.

338. *Étudier les variations de la fonction* $y = \frac{4x^2 + 4x - 3}{x^2 - 4x + 3}$; *de cette étude, déduire le nombre et les signes des racines de l'équation*

$$x^2(m - 4) - 4x(m + 1) + 3(m + 1) = 0.$$

I. La fonction proposée est discontinue pour $x = 1$ et pour $x = 3$; elle s'annule pour $x = -1{,}5$ et pour $x = 0{,}5$. Sa limite est 4 pour x infini.

La dérivée de la fonction est

$$y' = \frac{-20x^2 + 30x}{(x^2 - 4x + 3)^2};$$

elle s'annule pour $x = 0$ et pour $x = 1{,}5$.

Les variations de la fonction sont résumées dans le tableau suivant, qui permet de construire la courbe des variations.

x	$-\infty$		0		1		$1{,}5$		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
y	4	↘	-1 *min.*	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-16 *max.*	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4

II. L'équation $x^2(m - 4) - 4x(m + 1) + 3(m + 1) = 0$ peut s'écrire

$$m = \frac{4x^2 + 4x - 3}{x^2 - 4x + 3}.$$

Ses racines sont les abscisses des points d'intersection de la droite $y = m$ avec la courbe $y = \frac{4x^2 + 4x - 3}{x^2 - 4x + 3}$ (Fig. 53).

Faisons croître m de $-\infty$ à $+\infty$. Nous pourrons lire sur la courbe les résultats suivants :

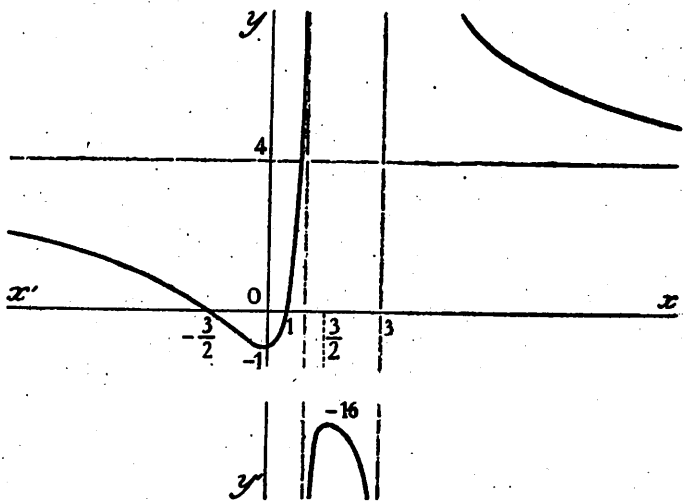


Fig. 53

$m < -16$; deux racines positives;
$m = -16$; une racine double égale à 1,5;
$-16 < m < -1$; pas de racine;
$m = -1$; une racine double nulle;
$-1 < m < 4$; deux racines de signes contraires;
$m = 4$; une racine égale à 0,75;
$m > 4$; deux racines positives.

339. *Étudier les variations de la fonction* $y = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 2x + 1}$. *Indiquer ensuite le nombre des racines de* $(m - 1)x^2 - 2(m - 3)x + m - 8 = 0$, *comprises entre* -1 *et* 5.

I. La fonction proposée est discontinue pour $x = 1$. Elle s'annule pour $x = 2$ et $x = 4$. Sa limite est 1 pour x infini.

La dérivée de la fonction est

$$y' = \frac{2(2x^2 - 7x + 5)}{(x^2 - 2x + 1)^2};$$

elle ne s'annule que pour $x = 2,5$.

Dressons le tableau des variations et construisons la courbe qui représente la fonction.

x	$-\infty$		1			2,5		$+\infty$
y'		+	|		$-$	0	+	
y	1	↗	$+\infty$ | $+\infty$		↘	$-\frac{1}{3}$ *min.*	↗	1

II. L'équation $(m-1)x^2 - 2(m-3)x + m - 8 = 0$ peut s'écrire

$$m = \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 2x + 1}.$$

Ses racines sont les abscisses des points d'intersection de la droite $y = m$ avec la courbe

$$y = \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 2x + 1}.$$

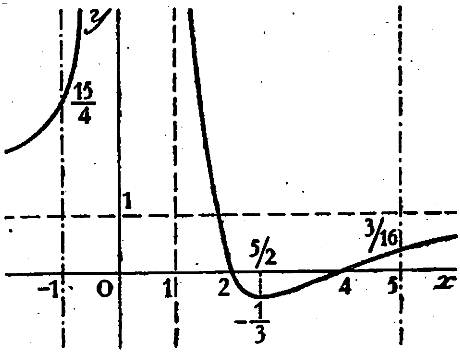


Fig. 54.

Faisons croître m de $-\infty$ à $+\infty$. Nous pourrons lire sur la figure les résultats suivants :

a) L'équation a deux racines comprises entre -1 et 5, si

$$-\frac{1}{3} < m < \frac{3}{16} \text{ ou si } m > \frac{15}{4};$$

b) elle n'en a qu'une seule si $m = -\frac{1}{3}$ ou si $\frac{3}{16} \leqslant m \leqslant \frac{15}{4}$.

340. *Étudier les variations de la fonction* $y = 2\sin^2 x - 3\cos x$ *quand l'arc varie de* 0 *à* 2π. *Chercher ensuite le nombre d'arcs compris entre* 0 *et* 2π *qui vérifient l'équation* $2\sin^2 x - 3\cos x - m = 0$.

La fonction

$$y = 2(1 - \cos^2 x) - 3\cos x = -2\cos^2 x - 3\cos x + 2$$

ne s'annule que pour $\cos x = \frac{1}{2}$; on a alors $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$. La dérivée est

$$y' = -4\cos x(-\sin x) + 3\sin x = \sin x(4\cos x + 3).$$

Les valeurs de x, comprises entre 0 et 2π, qui annulent la dérivée sont a, π et b, en désignant par a et b les arcs qui ont pour cosinus le nombre $-0{,}75$; ces arcs a et b, mesurés en degrés, valent approximativement 138°35′25″ et 221°24′35″.

On a le tableau suivant :

x	0		a		π		b		2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	-3	↗	$\frac{25}{8}$ *max.*	↘	3 *min.*	↗	$\frac{25}{8}$ *max.*	↘	-3

La courbe est symétrique par rapport à $x = \pi$, car y prend la même valeur pour $\pi - x$ et $\pi + x$.

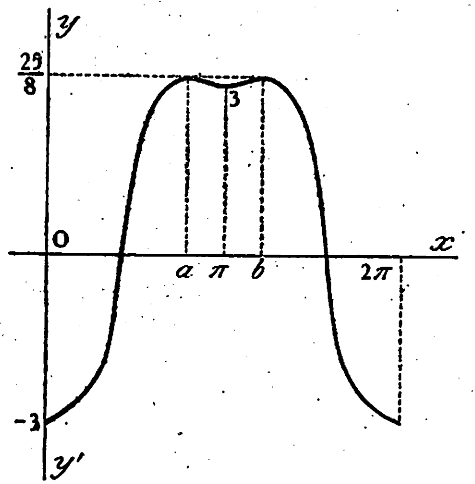


Fig. 55

II. En considérant l'égalité
$$2 \sin^2 x - 3 \cos x = m \quad (1)$$
comme une équation en x, les racines de cette équation sont les abscisses des points d'intersection de la droite $y = m$ avec le graphique de la fonction $y = 2 \sin^2 x - 3 \cos x$ (Fig. 55).

L'examen de ce graphique nous permettra donc de déterminer le nombre des racines de l'équation (1), comprises entre 0 et 2π.

a) $-3 \leqslant m < 3$: deux racines. Si $m = -3$, ces racines sont 0 et 2π; si $m = 0$, elles sont $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$.

b) $m = 3$: trois racines, dont une est égale à π.

c) $3 < m < \frac{25}{8}$: quatre racines.

d) $m = \frac{25}{8}$: deux racines qui sont a et b.

341. *Étudier les variations de la fonction* $y = 4x + 1 + \frac{1}{x}$; *chercher ensuite le nombre d'arcs compris entre* $-\frac{\pi}{2}$ *et* $\frac{\pi}{2}$ *qui vérifient l'équation* $4 \sin^2 x + (1 - m) \sin x + 1 = 0$.

I. La fonction proposée n'est pas définie pour $x = 0$; son graphique admet deux asymptotes dont les équations sont $x = 0$ et $y = 4x + 1$. La dérivée
$$y' = 4 - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}(4x^2 - 1)$$
s'annule pour $x = \pm 0{,}5$. On a le tableau :

x	$-\infty$		$-0{,}5$		0		$0{,}5$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-3 *max.*	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	5 *min.*	↗	$+\infty$

II. L'équation
$$4 \sin^2 z + (1 - m) \sin z + 1 = 0$$
peut s'écrire
$$m = 4 \sin z + 1 + \frac{1}{\sin z},$$
et on a $\quad -1 \leqslant \sin z \leqslant 1.$

Il en résulte que les valeurs de sin z qui vérifient cette équation sont les abscisses des points d'intersection de la droite $y = m$ avec la portion de la courbe
$$y = 4x + 1 + \frac{1}{x} \text{ (Fig. 56)},$$
qui est comprise entre les droites
$$x \pm 1 = 0.$$

En ne considérant que les valeurs de z comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, on a les résultats suivants :

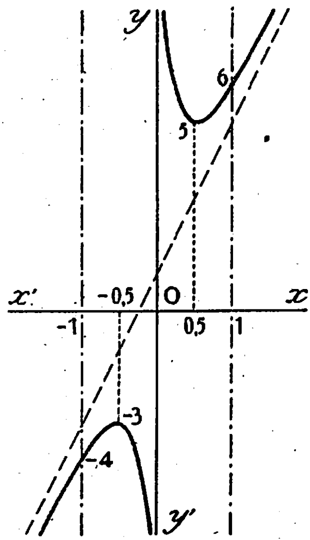


Fig. 56

1° $m < -4$: une valeur négative pour sin z et z.

2° $m = -4$: deux valeurs négatives pour sin z et z; l'une des valeurs de sin z est -1; l'arc correspondant est $-\frac{\pi}{2}$.

3° $-4 < m < -3$: deux valeurs négatives pour sin z et z.

4° $m = -3$: on a $\sin z = -\frac{1}{2}$ et $z = -\frac{\pi}{6}$.

5° $m = 5$: on a $\sin z = \frac{1}{2}$ et $z = \frac{\pi}{6}$.

6° $5 < m < 6$: deux valeurs positives pour sin z et z.

7° $m = 6$: deux valeurs positives pour sin z et z; l'une des valeurs de sin z est 1; l'arc correspondant est $\frac{\pi}{2}$.

8° $m > 6$: une valeur positive pour sin z et z.

342. *Étudier les variations de l'aire d'un rectangle inscrit dans un cercle.*

Soit x l'un des côtés du rectangle inscrit dans le cercle de rayon R. L'autre dimension du rectangle sera $\sqrt{4R^2 - x^2}$ et l'aire du rectangle
$$S = x\sqrt{4R^2 - x^2}.$$

La question revient à étudier les variations de cette fonction dans l'intervalle (0, 2R). Elle est positive dans cet intervalle et elle varie dans le même sens que la fonction

$$y = x^2(4R^2 - x^2).$$

La dérivée $y' = 4x(2R^2 - x^2)$ s'annule pour deux valeurs acceptables

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = R\sqrt{2}.$$

On a le tableau :

x	0		$R\sqrt{2}$		2R
y'	0	+	0	—	
y	0	↗	$4R^4$	↘	0
S	0	↗	$2R^2$ *max.*	↘	0

Le rectangle maximum est le carré inscrit.

Méthode des principes. — S est maximum absolu avec

$$S^2 = x^2(4R^2 - x^2);$$

donc lorsqu'on a

$$x^2 = 4R^2 - x^2 \quad \text{ou} \quad x = R\sqrt{2}.$$

343. *Dans un cercle, on mène une corde perpendiculaire à un diamètre; on joint les extrémités de la corde aux extrémités du diamètre et on demande d'étudier les variations de la différence des aires des triangles ainsi formés.*

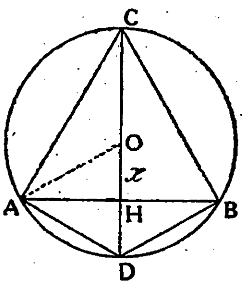


Fig. 57.

Soit $OH = x$ la distance du centre O à la corde AB. Les aires des triangles ABC et ABD sont

$$ABC = (R + x)\sqrt{R^2 - x^2}$$
$$ABD = (R - x)\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Leur différence est

$$S = 2x\sqrt{R^2 - x^2}.$$

La question revient à étudier les variations de cette fonction dans l'intervalle (0, R). Elle est positive dans cet intervalle et varie dans le même sens que la fonction

$$y = 4x^2(R^2 - x^2).$$

La dérivée $y' = 8x(R^2 - 2x^2)$ s'annule pour deux valeurs acceptables

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{R}{2}\sqrt{2}.$$

On a le tableau :

x	0		x_1		R
y'	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	R^4	$\searrow$	0
S	0	$\nearrow$	R^2 *max.*	$\searrow$	0

La différence des aires des deux triangles est maximum quand la corde AB est le côté du carré inscrit.

Méthode des principes. — S est maximum absolu avec $x^2(R^2 - x^2)$; donc lorsqu'on a
$$x^2 = R^2 - x^2 \quad \text{ou} \quad x = \frac{R}{2}\sqrt{2}.$$

344. *Étudier les variations de l'aire d'un triangle rectangle, sachant que la somme de l'hypoténuse et de la hauteur correspondante est* a.

Soit x la hauteur du triangle rectangle; l'hypoténuse sera $a - x$ et l'aire
$$S = \frac{x(a-x)}{2}.$$

On sait que dans un triangle rectangle, la hauteur est inférieure ou égale à la moitié de l'hypoténuse. On a donc $x \leqslant \frac{a}{3}$ et la question revient à étudier les variations de la fonction S dans l'intervalle $\left(0, \frac{a}{3}\right)$.

La dérivée $S' = \frac{a - 2x}{2}$ ne s'annule pour aucune valeur acceptable de x et on a le tableau :

x	0		$\frac{a}{3}$
S'		$+$	
S	0	$\nearrow$	$\frac{a^2}{9}$

La fonction n'a pas de maximum relatif; $\frac{a^2}{9}$ est la plus grande valeur de l'aire du triangle.

Méthode des principes. — S est maximum absolu avec $x(a - x)$; donc lorsqu'on a l'égalité $x = a - x$, si cela est possible. Cette égalité exige $x = \frac{a}{2}$, ce qui est impossible, x devant rester inférieur ou égal à $\frac{a}{3}$.

Formons alors la différence des deux facteurs

$$d = x - (a - x) = 2x - a.$$

Lorsque x croît de 0 à $\frac{a}{3}$, la valeur absolue de d décroît de a à $\frac{a}{3}$. Elle est donc la plus petite possible en valeur absolue pour $x = \frac{a}{3}$. La fonction S est maximum absolu pour la même valeur de x.

345. *Aux quatre coins d'une feuille carrée de carton, on enlève des carrés égaux. Étudier les variations du volume de la boîte obtenue en relevant les quatre rectangles du pourtour.*

Soient a le côté du carré de carton et x le côté du carré à enlever. La hauteur de la boîte sera x et l'aire du fond $(a - 2x)^2$. En appelant V le volume, on aura

$$V = x(a - 2x)^2.$$

La question revient à étudier les variations de cette fonction dans l'intervalle $\left(0, \frac{a}{2}\right)$. La dérivée

$$V' = (a - 2x)^2 - 4x(a - 2x) = (2x - a)(6x - a)$$

s'annule pour $x_1 = \frac{a}{6}$ et $x_2 = \frac{a}{2}$.

On a le tableau :

x	0		x_1		x_2
V′		+	0	—	0
V	0	↗	$\frac{2a^3}{27}$ *max.*	↘	0

La dérivée seconde $V'' = 24x - 8a$ s'annule pour $x = \frac{a}{3}$, en changeant de signe. Cette valeur de x est donc l'abscisse d'un point d'inflexion de la courbe qui représente les variations du volume.

MÉTHODE DES PRINCIPES. — V est maximum absolu avec $2x(a - 2x)^2$; donc lorsqu'on a

$$\frac{2x}{1} = \frac{a - 2x}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{a}{6}.$$

346. *Même question en remplaçant la feuille carrée de carton par une feuille rectangulaire.*

Soit x le côté des carrés que nous enlevons aux quatre coins d'un rectangle, dont les dimensions sont $2a$ et $2b$ $(a < b)$.

Les dimensions du fond de la boîte seront $2a - 2x$ et $2b - 2x$ et

$$V = 4x(x - a)(x - b).$$

La question revient à étudier les variations de V dans l'intervalle $(0, a)$. La dérivée de la fonction est

$$V' = 4[3x^2 - 2(a + b)x + ab].$$

Le trinôme entre crochets, que nous désignons par $f(x)$, admet deux racines et a est compris entre ces racines, car on a

$$f(a) = a^2 - ab < 0.$$

Ces racines sont d'ailleurs positives, car la somme et le produit des racines de $f(x)$ le sont. Le trinôme $f(x)$ et la dérivée V' s'annulent donc pour une valeur acceptable de x, qui vaut

$$x_1 = \frac{1}{3}\left(a + b - \sqrt{a^2 + b^2 - ab}\right).$$

En désignant la valeur correspondante de V par V_1, on a le tableau :

x	0		x_1		a
V'		$+$	0	$-$	
V	0	$\nearrow$	V_1	$\searrow$	0
			max.		

Méthode des principes. — V est maximum absolu avec

$$2x(a - x)(b - x).$$

La somme des facteurs de ce produit est constante; seulement les égalités

$$2x = a - x = b - x$$

forment un système impossible, car $a \neq b$. La méthode des principes est donc inapplicable.

347. *Étudier les variations du volume d'un cône de révolution dont la surface latérale est πa^2.*

Soient x le rayon de la base, y la hauteur et V le volume du cône. On a

$$\pi a^2 = \pi x\sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad V = \frac{\pi}{3}x^2 y.$$

Ces relations donnent

$$y = \frac{\sqrt{a^4 - x^4}}{x} \quad (1) \quad \text{et} \quad V = \frac{\pi}{3}x\sqrt{a^4 - x^4}.$$

La relation (1) montre que x ne peut être supérieur à a. La question revient donc à étudier la fonction V dans l'intervalle $(0, a)$.

La dérivée $V' = \dfrac{\pi(a^4 - 3x^4)}{3\sqrt{a^4 - x^4}}$ s'annule pour une valeur acceptable

$$x_1 = \sqrt[4]{\frac{a^4}{3}} = \frac{a}{3}\sqrt[4]{27}.$$

En désignant par V_1 la valeur correspondante de V, on a le tableau :

x	0		x_1		a
V'		$+$	0	$-$	
V	0	$\nearrow$	V_1 *max.*	$\searrow$	0

MÉTHODE DES PRINCIPES. — V est maximum absolu avec $x^4(a^4 - x^4)^2$; donc lorsqu'on a $\dfrac{x^4}{1} = \dfrac{a^4 - x^4}{2}$ ou $x = \dfrac{a}{3}\sqrt[4]{27}$.

348. *Étudier les variations du volume engendré par un triangle rectangle à hypoténuse constante, quand il tourne autour d'un côté de l'angle droit.*

Soient x le côté autour duquel le triangle tourne, y le second côté, a l'hypoténuse et V le volume engendré. On a

$$V = \frac{\pi}{3}xy^2 = \frac{\pi}{3}x(a^2 - x^2).$$

La question revient à étudier cette fonction dans l'intervalle $(0, a)$.

La dérivée $V' = \dfrac{\pi}{3}(a^2 - 3x^2)$ s'annule pour $x_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. La valeur correspondante de la fonction est $V_1 = \dfrac{2\pi a^3\sqrt{3}}{27}$. On a :

x	0		x_1		a
V'		$+$	0	$-$	
V	0	$\nearrow$	V_1 *max.*	$\searrow$	0

MÉTHODE DES PRINCIPES. — V est maximum absolu avec $x^2(a^2 - x^2)^2$; donc lorsqu'on a

$$\frac{x^2}{1} = \frac{a^2 - x^2}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{a}{3}\sqrt{3}.$$

349. *Étudier les variations du volume engendré par un rectangle à périmètre constant, quand il tourne autour d'un de ses côtés.*

Soient x et y les dimensions du rectangle, $2p$ son périmètre et V le volume qu'il engendre en tournant autour du côté y. On a

$$x + y = p \quad \text{et} \quad V = \pi x^2 y.$$

De ces deux relations, on déduit

$$y = p - x \quad (1) \quad \text{et} \quad V = \pi x^2(p - x).$$

La relation (1) montre que x ne peut dépasser p. Nous devons donc étudier les variations de V dans l'intervalle $(0, p)$.

La dérivée $V' = \pi x(2p - 3x)$ s'annule pour une seule valeur acceptable $x_1 = \frac{2p}{3}$ et la valeur correspondante de la fonction est $V_1 = \frac{4\pi p^3}{27}$.

On a :

x	0		x_1		p
V'		+	0	—	
V	0	↗	V_1 *max.*	↘	0

On peut remarquer que la valeur de y qui correspond à $x = x_1$ est $y = \frac{p}{3}$. Le cylindre engendré est donc maximum quand sa hauteur est la moitié du rayon de la base.

Méthode des principes. — V est maximum absolu avec $x^2(p - x)$; donc lorsqu'on a

$$\frac{x}{2} = \frac{p - x}{1} \quad \text{ou} \quad x = \frac{2p}{3}.$$

350. *Étudier les variations du volume d'un segment sphérique à une base. sachant que sa surface convexe est* πa^2. (x = *hauteur du segment sphérique*),

Soient x la hauteur du segment sphérique, y le rayon de la sphère et V le volume du segment sphérique.

On a les relations

$$2\pi xy = \pi a^2 \quad \text{et} \quad V = \frac{\pi}{3} x^2(3y - x).$$

De ces deux relations, on déduit

$$y = \frac{a^2}{2x} \quad \text{et} \quad V = \frac{\pi}{6}x(3a^2 - 2x^2).$$

L'expression de V montre qu'on doit avoir

$$3a^2 - 2x^2 \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad x \leqslant \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

La question revient donc à étudier les variations de V dans l'intervalle $\left(0, \frac{a\sqrt{6}}{2}\right)$. La dérivée $V' = \frac{\pi}{2}(a^2 - 2x^2)$ s'annule pour $x_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

La valeur correspondante de la fonction est $V_1 = \dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{6}$ et on a le tableau :

x	0		$\frac{a\sqrt{2}}{2}$		$\frac{a\sqrt{6}}{2}$
V'		$+$	0	$-$	
V	0	$\nearrow$	V_1 *max.*	$\searrow$	0

MÉTHODE DES PRINCIPES. — V est maximum absolu avec $2x^2(3a^2 - 2x^2)^2$; donc lorsqu'on a $\dfrac{2x^2}{1} = \dfrac{3a^2 - 2x^2}{2}$ ou $x = \dfrac{a}{2}\sqrt{2}$.

350bis. *Étudier les variations du volume d'un solide inscrit dans une sphère donnée et formé d'un cylindre surmonté de deux cônes droits ayant même base que le cylindre* ($2x$ = *hauteur du cylindre*).

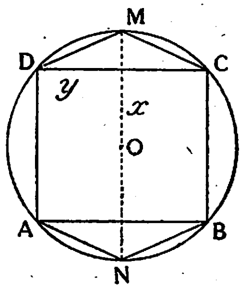


Fig. 58.

Soient $2x$ la hauteur du cylindre, y le rayon des bases communes au cylindre et aux cônes, R le rayon de la sphère.

Le volume du cylindre est $2\pi xy^2$ et celui des deux cônes est $\dfrac{2\pi}{3}(R - x)y^2$. On a donc

$$V = \frac{2\pi}{3} y^2(R + 2x) = \frac{2\pi}{3}(R^2 - x^2)(R + 2x).$$

La longueur x ne peut pas devenir supérieure à R et la question revient à étudier les variations de V dans l'intervalle (0, R).

La dérivée $V' = \dfrac{4\pi}{3}(R^2 - Rx - 3x^2)$ s'annule pour

$$x_1 = \frac{R}{6}(-1 + \sqrt{13}).$$

La valeur correspondante de V est

$$V_1 = \frac{\pi R^3}{81}(35 + 13\sqrt{13}).$$

On a le tableau :

x	0		x_1		R
V'		$+$	0	$-$	
V	0	$\nearrow$	V_1 *max.*	$\searrow$	0

MÉTHODE DES PRINCIPES. — V est maximum absolu avec

$$(R + x)(3R - 3x)(R + 2x).$$

La somme des facteurs de ce produit est constante; seulement les facteurs ne peuvent pas devenir égaux. La méthode des principes ne peut donc pas servir.

351. *Étudier les variations de la surface latérale d'un tronc de cône inscrit dans une sphère et ayant pour base un grand cercle.*

Soient x le rayon de la petite base du cône, y sa hauteur et R le rayon de la sphère.

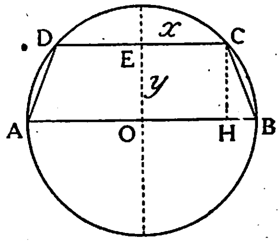


Fig. 59.

On a $\quad S = \pi BC(R + x).$

Mais $\quad BC = \sqrt{y^2 + (R - x)^2}$

et $\quad y^2 = R^2 - x^2.$

On a donc $\quad S = \pi(R + x)\sqrt{2R^2 - 2Rx},$
et nous devons étudier les variations de cette fonction dans l'intervalle (0, R).

La dérivée $S' = \dfrac{\pi R(R - 3x)}{\sqrt{2R^2 - 2Rx}}$ ne s'annule que pour $x_1 = \dfrac{R}{3}$. La valeur correspondante de la fonction est $S_1 = \dfrac{8\pi R^2\sqrt{3}}{9}$ et on a le tableau :

x	0		x_1		R
S'		$+$	0	$-$	
S	$\pi R^2\sqrt{2}$	$\nearrow$	S_1 *max.*	$\searrow$	0

MÉTHODE DES PRINCIPES. — S est maximum absolu avec

$$(R + x)\sqrt{R - x} \quad \text{et} \quad (R + x)^2(R - x);$$

donc lorsqu'on a
$$\frac{R + x}{2} = \frac{R - x}{1} \quad \text{ou} \quad x = \frac{R}{3}.$$

352. *Étudier les variations du volume engendré par un triangle isocèle inscrit dans un cercle et tournant autour de sa base.*

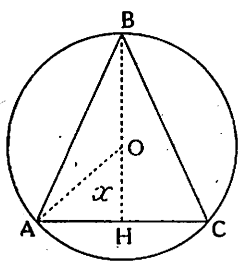


Fig. 60.

Soient $OH = x$ et V le volume engendré.

On a

$$V = 2\pi BH^2 \times \frac{AH}{3} = \frac{2\pi}{3}(R + x)^2\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Nous devons étudier les variations de cette fonction dans l'intervalle $(-R, R)$. La dérivée $\dfrac{2\pi(R + x)^2(2R - 3x)}{3\sqrt{R^2 - x^2}}$ s'annule pour $x_1 = \dfrac{2R}{3}$.

La valeur correspondante de V est $V_1 = \dfrac{50\pi R^3\sqrt{5}}{81}$, et on a le tableau :

x	$-R$		0		x_1		R
V'		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
V	0	$\nearrow$	$\dfrac{2\pi R^3}{3}$	$\nearrow$	V_1 *max.*	$\searrow$	0

MÉTHODE DES PRINCIPES. — V est maximum absolu avec

$$(R + x)^4 (R^2 - x^2) = (R + x)^5 (R - x);$$

donc lorsqu'on a

$$\frac{R + x}{5} = \frac{R - x}{1} \quad \text{ou} \quad x = \frac{2R}{3}.$$

352bis. *Un triangle rectangle tourne autour de son hypoténuse* a. *La hauteur* x *correspondant à l'hypoténuse, le divise en deux autres triangles. Étudier les variations de la différence des volumes des cônes engendrés par ces triangles.*

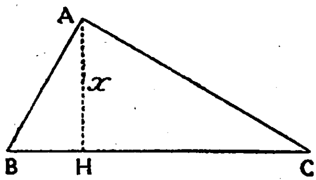


Fig. 61.

Soit V la différence des volumes des cônes engendrés par les triangles ACH et ABH. Nous supposons que le triangle ACH reste supérieur au triangle ABH, ou, autrement dit, que le point H se déplace du sommet B jusqu'au point milieu du segment BC. On a

$$V = \frac{\pi}{3}x^2(CH - BH); \quad CH + BH = a; \quad CH \times BH = x^2.$$

Par suite,

$$(CH - BH)^2 = (CH + BH)^2 - 4CH \times BH = a^2 - 4x^2,$$

et l'expression de V devient

$$V = \frac{\pi}{3}x^2\sqrt{a^2 - 4x^2}.$$

Nous devons étudier les variations de V dans l'intervalle $\left(0, \dfrac{a}{2}\right)$.

La dérivée $V' = \dfrac{2\pi x(a^2 - 6x^2)}{3\sqrt{a^2 - 4x^2}}$ s'annule pour $x_1 = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. La valeur correspondante de la fonction est $V_1 = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{54}$ et on a le tableau :

x	0		$\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$		$\dfrac{a}{2}$
V'		$+$	0	$-$	
V	0	$\nearrow$	V_1 *max.*	$\searrow$	0

MÉTHODE DES PRINCIPES. — V est maximum absolu avec

$$(4x^2)^2\,(a^2 - 4x^2);$$

donc lorsqu'on a

$$\frac{4x^2}{2} = \frac{a^2 - 4x^2}{1} \quad \text{ou} \quad x = \frac{a}{6}\sqrt{6}.$$

353. *Étudier les variations de la surface latérale et du volume d'un côue droit inscrit dans une sphère.*

a) Surface latérale. — En désignant par x la hauteur du cône, par S sa surface latérale et par R le rayon de la sphère, on trouve

$$S = \pi x\sqrt{2R(2R - x)}.$$

La dérivée $S' = \dfrac{\pi R(4R - 3x)}{\sqrt{2R(2R - x)}}$ s'annule pour $x_1 = \dfrac{4R}{3}$; la valeur correspondante de S est $S_1 = \dfrac{8\pi R^2\sqrt{3}}{9}$ et on a le tableau :

x	0		x_1		2R
S'		+	0	—	
S	0	↗	S_1 *max.*	↘	0

b) Volume. — Le volume V est donné par l'expression

$$V = \frac{\pi x^2}{3}(2R - x); \quad \text{d'où} \quad V' = \frac{\pi x(4R - 3x)}{3}.$$

La dérivée s'annule pour $x_1 = 0$ et $x_2 = \dfrac{4R}{3}$, et on a le tableau :

x	0		x_2		2R
V'		+	0	—	
V	0	↗	$\dfrac{32\pi R^3}{81}$ *max.*	↘	0

On remarque que c'est la même valeur de x qui donne le cône de surface latérale ou de volume maximum.

MÉTHODE DES PRINCIPES. — *a)* S est maximum absolu avec

$$x\sqrt{2R - x} \quad \text{et} \quad x^2(2R - x);$$

donc lorsqu'on a

$$\frac{x}{2} = \frac{2R - x}{1} \quad \text{ou} \quad x = \frac{4R}{3}.$$

b) V est maximum absolu avec $x^2(2R - x)$; donc lorsqu'on a

$$\frac{x}{2} = \frac{2R - x}{1} \quad \text{ou} \quad x = \frac{4R}{3}.$$

354. ***Étudier les variations de l'aire d'un trapèze isocèle circonscrit à un cercle:***

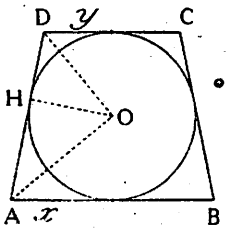


Fig. 62.

Soient $2x$ et $2y$ les bases du trapèze et R le rayon du cercle.

On a $$S = 2R(x + y).$$

Le triangle rectangle AOD donne
$$xy = R^2.$$

En tirant y de la deuxième relation, il vient
$$S = 2R\left(x + \frac{R^2}{x}\right).$$

Cette fonction n'est pas définie pour $x = 0$ et nous devons étudier ses variations pour les valeurs positives de x.

La dérivée $S' = \dfrac{2R(x^2 - R^2)}{x^2}$ s'annule pour $x = \pm$ R et on a le tableau:

x	0		R		$+\infty$
S′	‖	$-$	0	$+$	
S	‖ $+\infty$	↘	$4R^2$ *min.*	↗	$+\infty$

Le trapèze minimum est le carré circonscrit au cercle.

Les variations sont représentées par une branche d'hyperbole dont les asymptotes sont : $S = 2Rx$ et $x = 0$.

Méthode des principes. — S est minimum absolu avec

$$x + \frac{R^2}{x}; \quad \text{donc pour } x = \frac{R^2}{x} \quad \text{ou} \quad x = R.$$

355. ***Étudier les variations de l'aire d'un triangle isocèle circonscrit à un rectangle dont les dimensions sont*** a ***et*** b.

Soit x la hauteur du triangle. On a
$$S = HM \times x.$$

Les triangles semblables donnent
$$\frac{2HM}{a} = \frac{x}{x - b} \quad \text{ou} \quad HM = \frac{ax}{2(x - b)}.$$

L'expression de l'aire du triangle est donc
$$S = \frac{ax^2}{2(x - b)}.$$

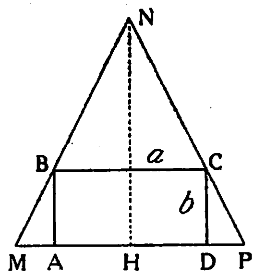


Fig. 63.

Cette fonction n'est pas définie pour $x = b$ et nous devons étudier ses variations pour les valeurs de x supérieures à b.

La dérivée $S' = \dfrac{ax(x-2b)}{2(x-b)^2}$ s'annule pour $x = 0$ et $x = 2b$. On a le tableau :

x	b		$2b$		$+\infty$
S'	‖	$-$	0	$+$	
S	‖ $+\infty$	$\searrow$	$2ab$ *min.*	$\nearrow$	$+\infty$

Les variations sont représentées par une branche d'hyperbole. L'une des asymptotes est la droite $x = b$; l'autre est la droite $S = \dfrac{a}{2}x + \dfrac{ab}{2}$, car la fonction peut s'écrire

$$S = \frac{a}{2}x + \frac{ab}{2} + \frac{ab^2}{2(x-b)}.$$

Méthode des principes. — S est minimum absolu lorsque les fonctions

$$\frac{x-b}{x^2} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{b}{x}\right) \quad \text{et} \quad \frac{b}{x}\left(1 - \frac{b}{x}\right)$$

passent par un maximum absolu; donc lorsqu'on a

$$\frac{b}{x} = 1 - \frac{b}{x} \quad \text{ou} \quad x = 2b.$$

356. *Étudier les variations de l'aire d'un losange circonscrit à un rectangle dont les dimensions sont* 2a *et* 2b.

Considérons le rectangle ABCD dont les dimensions sont $AB = 2a$ et $BC = 2b$. Soient $EG = 2x$ et $FH = 2y$ les deux diagonales du losange circonscrit et S son aire. On a

$$S = 2xy.$$

Les triangles semblables OFG et IBG donnent

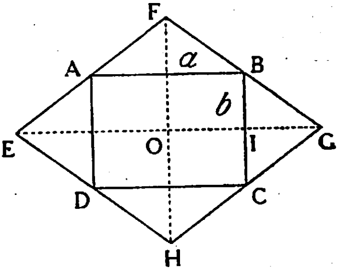


Fig. 64.

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{x-a}; \quad \text{d'où} \quad y = \frac{bx}{x-a} \quad \text{et} \quad S = \frac{2bx^2}{x-a}.$$

Cette fonction est définie dans l'intervalle $(a, +\infty)$, sauf pour $x = a$. La dérivée

$$S' = \frac{2bx(x - 2a)}{(x - a)^2}$$

s'annule pour $x = 0$ et $x = 2a$. On a le tableau :

x	a		$2a$		$+\infty$
S'		$-$	0	$+$	
S	$+\infty$	$\searrow$	$8ab$ *min.*	$\nearrow$	$+\infty$

Les variations sont représentées par une branche d'hyperbole dont les asymptotes sont

$$S = 2bx + 2ab \quad \text{et} \quad x = a,$$

car la fonction peut s'écrire

$$S = 2bx + 2ab + \frac{2a^2b}{x - a}.$$

MÉTHODE DES PRINCIPES. — On raisonne comme pour l'exercice précédent.

357. *Étudier les variations du périmètre d'un triangle isocèle circonscrit à un cercle.*

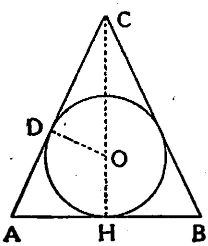


Fig. 65.

Soient x la hauteur du triangle et y son périmètre. On a

$$y = 2CD + 4AH.$$

Le triangle rectangle OCD donne

$$CD = \sqrt{\overline{OC}^2 - \overline{OD}^2} = \sqrt{x^2 - 2Rx};$$

les triangles semblables COD et ACH donnent

$$\frac{AH}{R} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2Rx}} \quad \text{ou} \quad AH = \frac{Rx}{\sqrt{x^2 - 2Rx}}.$$

Par suite, on a

$$y = 2\sqrt{x^2 - 2Rx} + \frac{4Rx}{\sqrt{x^2 - 2Rx}} = \frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt{x - 2R}}.$$

Nous devons étudier les variations de cette fonction pour $x > 2R$. La fonction est définie et positive pour ces valeurs de x. Elle varie donc dans le même sens que la fonction $z = y^2$. On a

$$z = \frac{4x^3}{x - 2R} \quad \text{et} \quad z' = \frac{8x^2(x - 3R)}{(x - 2R)^2}.$$

La dérivée s'annule pour $x = 0$ et $x = 3R$ et on a le tableau :

x	$2R$		$3R$		$+\infty$
z'	$\|$	$-$	0	$+$	
z	$\|\ +\infty$	$\searrow$	$108R^2$	$\nearrow$	$+\infty$
y	$\|\ +\infty$	$\searrow$	$6R\sqrt{3}$ *min.*	$\nearrow$	$+\infty$

MÉTHODE DES PRINCIPES. — y est minimum absolu lorsque les fonctions

$$\frac{\sqrt{x-2R}}{x\sqrt{x}}, \quad \frac{x-2R}{x^3} = \frac{1}{x^2}\left(1-\frac{2R}{x}\right), \quad \left(\frac{2R}{x}\right)^2\left(1-\frac{2R}{x}\right)$$

passent par un maximum absolu; donc lorsqu'on a

$$\frac{2R}{2x} = 1 - \frac{2R}{x} \quad \text{ou} \quad x = 3R.$$

358. *Étudier les variations du périmètre d'un trapèze isocèle dont l'aire est égale à* a^2 *et dont les angles aigus mesurent* 45°. (x = *hauteur*).

Soit $2y$ la petite base du trapèze; la grande base est $2x + 2y$ et, en désignant le périmètre par z, on a

$$z = 2(x + x\sqrt{2} + 2y).$$

L'aire du trapèze est

$$x(2y + x) = a^2.$$

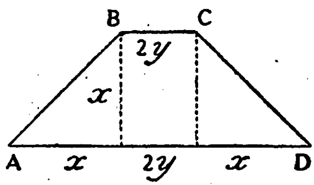


Fig. 66

On a donc

$$2y = \frac{a^2}{x} - x, \ (1) \quad \text{et} \quad z = 2\left(\frac{a^2}{x} + x\sqrt{2}\right).$$

Comme y doit être positif, l'égalité (1) montre que x ne peut pas être plus grand que a. Nous étudierons donc les variations de z dans l'intervalle $(0, a)$. La dérivée

$$z' = \frac{2(x^2\sqrt{2} - a^2)}{x^2}$$

s'annule pour $x = \frac{a}{2}\sqrt[4]{8}$, soit environ, $x = 0{,}84a$. La valeur correspondante du périmètre est $4a\sqrt[4]{2}$, soit environ $4{,}76a$. On a le tableau :

x	0		$0{,}84a$		a
z'	$\|$	$-$	0	$+$	
z	$\|\ +\infty$	$\searrow$	$4{,}76a$ *min.*	$\nearrow$	$4{,}83a$

La variation est représentée par un arc de courbe qui appartient à une hyperbole, asymptote aux droites

$$z = 2x\sqrt{2} \quad \text{et} \quad x = 0.$$

MÉTHODE DES PRINCIPES. — z est minimum absolu avec $\frac{a^2}{x} + x\sqrt{2}$; donc lorsqu'on a

$$\frac{a^2}{x} = x\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{a}{2}\sqrt[4]{8}.$$

358bis. *Étudier les variations de la surface latérale d'un cône de révolution dont le volume est* $\frac{\pi a^3}{3}$.

Soient x le rayon, y la hauteur et S la surface latérale du cône. On a les relations :

$$S = \pi x\sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\pi a^3}{3} = \frac{\pi x^2 y}{3}.$$

En éliminant y, il vient

$$S = \pi\sqrt{x^4 + \frac{a^6}{x^2}}.$$

Cette fonction varie dans le même sens que la fonction

$$z = x^4 + \frac{a^6}{x^2}$$

dont nous étudierons les variations dans l'intervalle $(0, +\infty)$. La fonction n'est pas définie et n'a pas de dérivée pour $x = 0$. Sa dérivée est

$$z' = \frac{2(2x^6 - a^6)}{x^3}$$

pour les autres valeurs considérées de x. Cette dérivée s'annule pour $x_1 = \frac{a}{2}\sqrt[6]{32}$. La valeur correspondante de z est $z_1 = \frac{3a^4\sqrt[3]{2}}{2}$ et celle de S, $S_1 = \frac{\pi a^2\sqrt[6]{432}}{2}$. On a le tableau :

x	0		x_1		$+\infty$
z'		$-$	0	$+$	
z	$+\infty$	$\searrow$	z_1	$\nearrow$	$+\infty$
S	$+\infty$	$\searrow$	S_1 *min.*	$\nearrow$	$+\infty$

MÉTHODE DES PRINCIPES. — S est minimum absolu avec $x^4 + \frac{a^6}{x^2}$.

Or on a
$$x^4 \times \left(\frac{a^6}{x^2}\right)^2 = a^{12}.$$

S est donc minimum absolu quand on a
$$\frac{x^4}{1} = \frac{a^6}{2x^2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{a}{2}\sqrt[6]{32}.$$

359. *Étudier les variations de la surface totale d'un cylindre dont le volume est* πa^3.

Soient x le rayon, y la hauteur et S la surface totale du cylindre. On a les relations
$$S = 2\pi(x^2 + xy) \quad \text{et} \quad \pi a^3 = \pi x^2 y.$$

En éliminant y, il vient
$$S = 2\pi\left(x^2 + \frac{a^3}{x}\right).$$

Nous étudierons les variations de l'aire S pour x positif. La dérivée $S' = \frac{2\pi(2x^3 - a^3)}{x^2}$ s'annule pour $x_1 = \frac{a\sqrt[3]{4}}{2}$. La valeur correspondante de S est $S_1 = 3\pi a^2\sqrt[3]{2}$. On a le tableau :

x	0		x_1		$+\infty$
S'		$-$	0	$+$	
S	$+\infty$	$\searrow$	S_1 *min.*	$\nearrow$	$+\infty$

MÉTHODE DES PRINCIPES. — S est minimum absolu avec $x^2 + \frac{a^3}{x}$.

Or on a
$$x^2 \times \left(\frac{a^3}{x}\right)^2 = a^6.$$

S est donc minimum absolu quand on a
$$\frac{x^2}{1} = \frac{a^3}{2x} \quad \text{ou} \quad x = \frac{a}{2}\sqrt[3]{4}.$$

360. *Le volume d'un segment sphérique à une base est* $\frac{\pi}{6}a^3$. *Étudier les variations de sa surface convexe.*

Soient x la hauteur du segment, y le rayon de la base et S la surface convexe. On a les relations
$$S = 2\pi R x = \pi(x^2 + y^2); \quad \frac{\pi a^3}{6} = \frac{\pi x^3}{6} + \frac{\pi x y^2}{2}.$$

En éliminant y, on obtient la fonction

$$S = \frac{\pi}{3}\left(2x^2 + \frac{a^3}{x}\right)$$

dont nous étudierons les variations dans l'intervalle $(0, +\infty)$. La dérivée

$$S' = \frac{\pi(4x^3 - a^3)}{3x^2}$$

s'annule pour $x_1 = \frac{a}{2}\sqrt[3]{2}$. La valeur correspondante de S est $S_1 = \frac{\pi a^2\sqrt[3]{4}}{2}$.

et on a le tableau

x	0		x_1		$+\infty$
S'	‖	$-$	0	$+$	
S	‖ $+\infty$	↘	S_1 *min.*	↗	$+\infty$

MÉTHODE DES PRINCIPES. — On raisonne comme pour l'exercice précédent.

360bis. *Par un point* A *pris sur une demi-droite issue du centre* O *d'une sphère, on mène un cône circonscrit à la sphère et on le limite au sommet* A *et au cercle de contact. Calculer la surface latérale de ce cône et étudier ses variations* ($x = OA$).

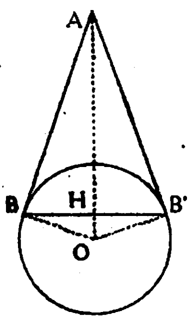


Fig. 67.

La surface latérale du cône est $S = \pi BH \times AB$.

On a :

$$AB = \sqrt{x^2 - R^2};$$

$$AH = \frac{AB^2}{OA} = \frac{x^2 - R^2}{x}; \quad OH = \frac{OB^2}{OA} = \frac{R^2}{x};$$

$$BH = \sqrt{OH.AH} = \frac{R}{x}\sqrt{x^2 - R^2}.$$

Il vient donc

$$S = \frac{\pi R(x^2 - R^2)}{x}.$$

Nous étudierons les variations de cette fonction dans l'intervalle $(R, +\infty)$. La dérivée

$$S' = \frac{\pi R(x^2 + R^2)}{x^2}$$

est toujours positive et on a le tableau ci-contre.

x	R		$+\infty$
S'		$+$	
S	0	↗	$+\infty$

La variation est représentée par un arc de courbe qui appartient à une hyperbole asymptote aux droites $S = Rx$ et $x = 0$, car la fonction peut s'écrire

$$S = \pi R x - \frac{\pi R^3}{x}.$$

MÉTHODE DES PRINCIPES. — S est minimum absolu avec

$$\frac{x^2 - R^2}{x} = x - \frac{R^2}{x}; \text{ donc pour } x = \frac{R^2}{x} \text{ ou } x = R.$$

361. *Étudier les variations du volume d'un cône circonscrit à un hémisphère et dont la base repose sur le plan diamétral qui limite l'hémisphère.*

Soient x le rayon de la base du cône, y sa hauteur et R le rayon de l'hémisphère. Le volume du cône a pour expression $V = \frac{\pi}{3}x^2y$.

Le double de la surface du triangle rectangle AOC donne

$$OA \times OC = AC \times OD \quad \text{ou} \quad xy = R\sqrt{x^2 + y^2}.$$

En éliminant x, il vient

$$V = \frac{\pi R^2 y^3}{3(y^2 - R^2)}.$$

Nous étudierons les variations de cette fonction dans l'intervalle $(R, +\infty)$. La dérivée

$$V' = \frac{\pi R^2 y^2 (y^2 - 3R^2)}{3(y^2 - R^2)^2}$$

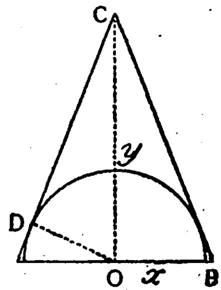


Fig. 68.

s'annule pour $y = 0$ et $y = \pm R\sqrt{3}$. On a le tableau :

y	R		$R\sqrt{3}$		$+\infty$
V'		$-$	0	$+$	
V	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{\pi R^3\sqrt{3}}{2}$ *min.*	$\nearrow$	$+\infty$

MÉTHODE DES PRINCIPES. — V est minimum absolu lorsque les fonctions

$$\frac{y^2 - R^2}{y^3} = \frac{1}{y}\left(1 - \frac{R^2}{y^2}\right), \ \frac{R}{y}\left(1 - \frac{R^2}{y^2}\right), \ \frac{R^2}{y^2}\left(1 - \frac{R^2}{y^2}\right)^2$$

passent par un maximum absolu; donc lorsqu'on a

$$\frac{R^2}{y^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{R^2}{y^2}\right) \quad \text{ou} \quad y = R\sqrt{3}.$$

362. *Étudier les variations de la somme des deux zones vues sur deux sphères O et O′ de même rayon, d'un point de la ligne des centres* (OO′ = d).

Soient R le rayon commun des deux sphères et S la somme des surfaces des deux zones.

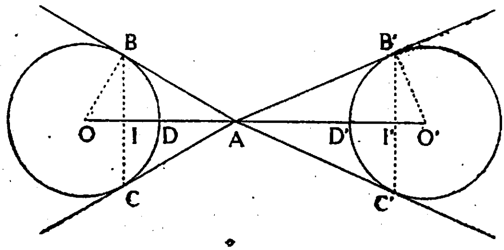


Fig. 69.

Posons OA $= x$. On a

$$S = 2\pi R(DI + D'I').$$

Les triangles AOB et AO′B′ donnent

$$R^2 = x.OI; \quad R^2 = (d - x)O'I'.$$

On en déduit

$$OI = \frac{R^2}{x}; \quad O'I' = \frac{R^2}{d - x};$$

puis,
$$DI = \frac{Rx - R^2}{x}; \quad D'I' = \frac{R(d - x) - R^2}{d - x}.$$

L'expression de la fonction devient, après avoir remplacé DI et D′I′ par leur valeur,

$$S = 2\pi\left(2R^2 - \frac{dR^3}{x(d - x)}\right).$$

Nous étudierons les variations de cette fonction S dans l'intervalle (R, d — R), en supposant $d > 2R$.

La dérivée $S' = \dfrac{2\pi dR^3(d - 2x)}{x^2(d - x)^2}$ s'annule pour $x_1 = \dfrac{d}{2}$ et on a le tableau :

x	R		x_1		$d - R$
S'		+	0	—	
S	S_2	↗	S_1 *max.*	↘	S_2

Nous avons posé

$$S_1 = \frac{4\pi R^2(d - 2R)}{d}; \quad S_2 = \frac{2\pi R^2(d - 2R)}{d - R}.$$

MÉTHODE DES PRINCIPES. — S est maximum absolu lorsque $\frac{1}{x(d-x)}$ est minimum absolu; ou encore, lorsque $x(d-x)$ est maximum absolu; donc lorsqu'on a

$$x = d - x \quad \text{ou} \quad x = \frac{d}{2}.$$

363. *Dans une sphère on inscrit un tronc de cône ayant pour bases un grand cercle et une section parallèle à ce grand cercle. Étudier les variations du rapport du volume de ce tronc de cône à celui de la sphère ayant pour diamètre la hauteur du tronc* (x = *rayon de la section*).

Le volume du tronc de cône est

$$\frac{\pi}{3}\text{OE}(\text{R}^2 + x^2 + \text{R}x)$$

$$= \frac{\pi}{3}(\text{R}^2 + x^2 + \text{R}x)\sqrt{\text{R}^2 - x^2}.$$

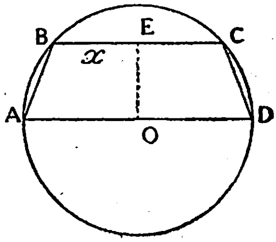


Fig. 70.

Le volume de la sphère est

$$\frac{\pi}{6}\overline{\text{OE}}^3 = \frac{\pi}{6}(\text{R}^2 - x^2)\sqrt{\text{R}^2 - x^2}.$$

Le rapport des deux volumes est

$$y = \frac{2(x^2 + \text{R}x + \text{R}^2)}{\text{R}^2 - x^2}.$$

Nous étudierons les variations de ce rapport dans l'intervalle (0, R) où il est défini, sauf pour $x = \text{R}$. La dérivée

$$y' = \frac{2\text{R}(x^2 + 4\text{R}x + \text{R}^2)}{(\text{R}^2 - x^2)^2}$$

s'annule pour $x = -\text{R}(2 \pm \sqrt{3})$. Aucune de ces valeurs n'est comprise entre 0 et R. On a le tableau ci-contre.

x	0		R
y'		+	
y	2	↗	$+\infty$

La fonction n'a ni maximum, ni minimum.

364. *Dans une sphère on mène un plan* BC *perpendiculaire au diamètre* AD *Étudier les variations du rapport du volume du segment sphérique à une base* BDC *au volume du cône* BAC (x = *hauteur du cône*).

Le volume du segment sphérique est

$$\frac{\pi}{}\overline{\text{BE}}^2 \times \text{DE} + \frac{\pi}{6}\overline{\text{DE}}^3 = \frac{\pi}{3}(2\text{R} - x)^2(\text{R} + x);$$

et celui du cône

$$\frac{\pi}{3}\overline{\text{BE}}^2 \times \text{AE} = \frac{\pi x^2}{3}(2\text{R} - x).$$

Le rapport à étudier est donc après simplification

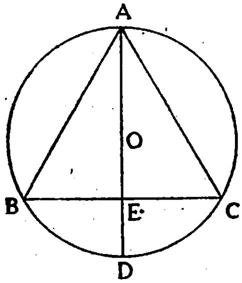


Fig. 71.

$$y = \frac{(2R - x)(R + x)}{x^2} = \frac{2R^2 + Rx - x^2}{x^2}.$$

Nous étudierons la variation du rapport dans l'intervalle (0, 2R).

La dérivée

$$y' = \frac{-Rx(x + 4R)}{x^4}$$

ne s'annule que pour la valeur non acceptable $x = -4R$. On a le tableau :

x	0		2R
y'	‖	$-$	
y	‖ $+\infty$	↘	0

La fonction n'a ni maximum, ni minimum.

365. ***Étudier les variations de la surface latérale et de la surface totale d'un cône droit circonscrit à une sphère.***

1° *Surface latérale.* — Soient x le rayon de la base du cône et y sa surface latérale. On a

$$y = \pi x \times AC = \pi x(CD + x).$$

Les triangles CDO et CAH donnent

$$\frac{CD}{R} = \frac{CH}{x} = \frac{\sqrt{CD(CD + 2x)}}{x}.$$

Cette égalité donne

$$CD = \frac{2R^2x}{x^2 - R^2}.$$

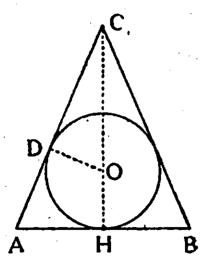


Fig. 72.

L'expression de la fonction devient, après substitution,

$$y = \frac{\pi x^2(x^2 + R^2)}{x^2 - R^2}.$$

Nous étudierons les variations de cette fonction dans l'intervalle $(R, +\infty)$, où elle est définie, sauf pour $x = R$. La dérivée

$$y' = \frac{2\pi x(x^4 - 2R^2x^2 - R^4)}{(x^2 - R^2)^2}$$

s'annule pour $x_1 = R\sqrt{1 + \sqrt{2}}$; $x_2 = -R\sqrt{1 + \sqrt{2}}$; $x_3 = 0$.

La seule racine supérieure à R est x_1 qui vaut environ 1,55R; la valeur correspondante de y est $y_1 = \pi R^2(3 + 2\sqrt{2})$, soit environ $5{,}83\pi R^2$.

On a le tableau :

x	R		x_1		$+\infty$
y'	||	$-$	0	$+$	
y	|| $+\infty$	$\searrow$	y_1 *min.*	$\nearrow$	$+\infty$

Méthode des principes. — La fonction y est minimum absolu avec

$$\frac{x^4 + R^2x^2}{x^2 - R^2} = x^2 + 2R^2 + \frac{2R^4}{x^2 - R^2} = x^2 - R^2 + \frac{2R^4}{x^2 - R^2} + 3R^2;$$

et aussi avec $x^2 - R^2 + \dfrac{2R^4}{x^2 - R^2}$; donc quand on a

$$x^2 - R^2 = \frac{2R^4}{x^2 - R^2}; \quad \text{d'où} \quad x = R\sqrt{1 + \sqrt{2}}.$$

2° *Surface totale.* — La surface totale du cône circonscrit à la sphère est

$$z = \pi x^2 + \pi x(CD + x).$$

En remplaçant $\pi x(CD + x)$ par sa valeur précédemment calculée, il vient

$$z = \frac{2\pi x^4}{x^2 - R^2}.$$

Nous étudierons les variations de cette fonction dans l'intervalle $(R, +\infty)$, où elle est définie, sauf pour $x = R$. La dérivée

$$z' = \frac{4\pi x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2}$$

s'annule pour $x_1 = R\sqrt{2}$; $x_2 = -R\sqrt{2}$; $x_3 = 0$.

La seule valeur de x supérieure à R est x_1. La valeur correspondante de la fonction est $z_1 = 8\pi R^2$.

On a le tableau :

x	R		$R\sqrt{2}$		$+\infty$
z'	||	$-$	0	$+$	
z	|| $+\infty$	$\searrow$	$8\pi R^2$ *min.*	$\nearrow$	$+\infty$

MÉTHODE DES PRINCIPES. — z est minimum absolu lorsque les fonctions

$$\frac{x^2 - R^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{R^2}{x^2}\right) \quad \text{et} \quad \frac{R^2}{x^2}\left(1 - \frac{R^2}{x^2}\right)$$

passent par un maximum absolu; donc lorsqu'on a

$$\frac{R^2}{x^2} = 1 - \frac{R^2}{x^2} \quad \text{ou} \quad x = R\sqrt{2}.$$

366. *Étudier les variations du périmètre d'un rectangle inscrit dans un cercle.*

Soient x l'un des côtés du rectangle et $2p$, son périmètre. On a

$$p = x + \sqrt{4R^2 - x^2}.$$

Nous devons étudier cette fonction dans l'intervalle $(0, 2R)$. La dérivée

$$p' = \frac{\sqrt{4R^2 - x^2} - x}{\sqrt{4R^2 - x^2}}$$

s'annule pour $x = R\sqrt{2}$.

Pour étudier le signe de la dérivée, on remarque qu'elle a le même signe que son numérateur. Celui-ci est une fonction continue de x dans l'intervalle $(-2R, 2R)$ et, par suite, il ne peut changer de signe qu'en s'annulant. Il a donc un signe unique dans chacun des intervalles

$$(-2R, R\sqrt{2}), \quad (R\sqrt{2}, 2R).$$

Pour déterminer ce signe, il suffit de faire deux substitutions, une pour chaque intervalle.

Pour $x = 0$, le numérateur est égal à $2R$;
pour $x = \frac{3R}{2}$, il est égal à $\frac{R}{2}(\sqrt{7} - 3)$.

La dérivée est donc positive dans l'intervalle $(-2R, R\sqrt{2})$ et négative dans l'intervalle $(R\sqrt{2}, 2R)$. On a le tableau :

x	0		$R\sqrt{2}$		$2R$
p'	1	$+$	0	$-$	
p	$2R$	$\nearrow$	$2R\sqrt{2}$ *max.*	$\searrow$	$2R$

MÉTHODE DES PRINCIPES. — p est maximum absolu avec

$$p^2 = 4R^2 + 2x\sqrt{4R^2 - x^2}, \quad x\sqrt{4R^2 - x^2}, \quad x^2(4R^2 - x^2);$$

donc lorsqu'on a

$$x^2 = 4R^2 - x^2 \quad \text{ou} \quad x = R\sqrt{2}.$$

367. *Étudier les variations de la somme de la base et de la hauteur d'un triangle isocèle inscrit dans un cercle.*

Soient x la hauteur et y la somme de la base et de la hauteur du triangle isocèle inscrit dans le cercle de rayon R. On a

$$y = x + 2\sqrt{x(2R - x)}.$$

Cette fonction n'est définie que dans l'intervalle (0, 2R). Sa dérivée

$$y' = \frac{\sqrt{x(2R - x)} + 2R - 2x}{\sqrt{x(2R - x)}}$$

ne s'annule que pour $x_1 = \frac{R}{5}(5 + \sqrt{5})$, soit environ 1,447R. On détermine le signe du numérateur dans les intervalles

$$(0, x_1) \quad \text{et} \quad (x_1, 2R),$$

en faisant deux substitutions, une pour chaque intervalle (Voir no 366).

On a le tableau :

x	0		x_1		$2R$
y'	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$
y	0	$\nearrow$	$R(1+\sqrt{5})$ *max.*	$\searrow$	$2R$

368. *Dans un demi-cercle construit sur* AB *comme diamètre, on inscrit un trapèze ayant* AB *comme base. Étudier les variations de l'aire et du périmètre de ce trapèze* (2x = *petite base*).

1o *Aire du trapèze.* — Posons AB = 2R. La hauteur du trapèze sera $\sqrt{R^2 - x^2}$ et son aire

$$S = (R + x)\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Nous étudierons les variations de cette fonction dans l'intervalle (0, R), où elle est définie. La seule racine acceptable de la dérivée

$$S' = \frac{-2x^2 - Rx + R^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} \quad \text{est} \quad x_1 = \frac{R}{2}.$$

x	0		x_1		R
S'		$+$	0	$-$	
S	R^2	$\nearrow$	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$ *max.*	$\searrow$	0

Le trapèze dont l'aire est maximum, est la moitié d'un hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon R.

MÉTHODE DES PRINCIPES. — S est maximum absolu avec

$$(R + x)^2 (R^2 - x^2) = (R + x)^3 (R - x);$$

donc lorsqu'on a

$$\frac{R + x}{3} = \frac{R - x}{1} \quad \text{ou} \quad x = \frac{R}{2}.$$

2° *Périmètre du trapèze.* — Soit $2p$ ce périmètre. On a

$$p = R + x + \sqrt{2R^2 - 2Rx}.$$

Nous étudierons les variations de cette fonction dans l'intervalle (0, R); elle est définie dans l'intervalle $(-\infty, R)$. La racine de la dérivée

$$p' = \frac{\sqrt{2R^2 - 2Rx} - R}{\sqrt{2R^2 - 2Rx}} \quad \text{est} \quad x_1 = \frac{R}{2}.$$

On détermine le signe du numérateur de p' dans les intervalles $(0, x_1)$ et (x_1, R), en faisant deux substitutions, une pour chaque intervalle (Voir n° 366). On a le tableau :

x	0		x_1		R
p'		+	0	—	$-\infty$
p	$R(1+\sqrt{2})$	↗	$\frac{5R}{2}$ *max.*	↘	2R

On remarque que l'aire et le périmètre sont maximums pour la même valeur de x.

369. *On inscrit un rectangle dans un demi-cercle de diamètre* AB *et on construit sur le côté parallèle à* AB *un triangle rectangle isocèle. Étudier les variations de l'aire du pentagone obtenu* (2x = *côté du rectangle parallèle à* AB).

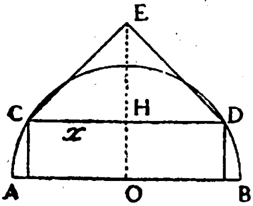


Fig. 73.

La hauteur OH du rectangle est $\sqrt{R^2 - x^2}$; la hauteur EH du triangle rectangle isocèle est égale à la moitié CH $= x$ de sa base. L'aire du pentagone est

$$S = x^2 + 2x\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Cette fonction est définie dans l'intervalle $(-R, R)$. Nous devons étudier ses variations dans l'intervalle (0, R). La dérivée est

$$S' = \frac{2(x\sqrt{R^2 - x^2} + R^2 - 2x^2)}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Pour obtenir les valeurs de x qui annulent S', nous avons à résoudre l'équation

$$x\sqrt{R^2 - x^2} = 2x^2 - R^2. \qquad (1)$$

Les valeurs de x qui vérifient cette équation doivent satisfaire à l'inéquation

$$x(2x^2 - R^2) > 0,$$

ce qui exige $\quad -\frac{R}{2}\sqrt{2} < x < 0 \quad$ ou $\quad x > \frac{R}{2}\sqrt{2}.$

Élevant au carré, on obtient l'équation

$$5x^4 - 5R^2x^2 + R^4 = 0,$$

dont les racines acceptables pour l'équation (1) sont

$$x_1 = -R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \quad \text{et} \quad x_2 = R\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}.$$

On détermine ensuite le signe du numérateur de S′ dans les intervalles

$$(0, x_2), \quad (x_2, R),$$

en faisant deux substitutions, une pour chaque intervalle (Voir no 366).

On a le tableau :

x	0		x_2		R
S′		+	0	—	
S	0	↗	S_2 *max.*	↘	R^2

en posant $\quad S_2 = \frac{R^2}{2}(1 + \sqrt{5}).$

370. *Un carré tourne autour d'un axe passant par un de ses sommets et situé dans le plan du carré sans le traverser. Étudier les variations du volume engendré* (x = *projection d'un côté du carré sur l'axe*).

Soient $AD = a$ le côté du carré et $AD' = x$ la projection du côté AD sur l'axe.

Comme les triangles ADD′, ABB′, BCE sont égaux, on a

$$AD' = BB' = BE = x$$

et $\quad DD' = AB' = CE = \sqrt{a^2 - x^2}.$

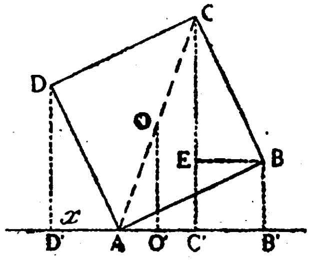


Fig. 74.

On a :

$$\text{Vol. ABC} = \frac{AB}{3}\,\text{surf. BC} = \frac{AB}{3}\cdot\pi BC(BB'+CC') = \frac{\pi}{3}a^2(2x + \sqrt{a^2 - x^2});$$

$$\text{Vol. ADC} = \frac{AB}{3}\cdot\pi CD(CC' + DD') = \frac{\pi}{3}a^2(x + 2\sqrt{a^2 - x^2}).$$

En ajoutant, il vient

$$V = \pi a^2(x + \sqrt{a^2 - x^2}).$$

Cette fonction est définie dans l'intervalle $(-a, a)$; nous devons étudier ses variations dans l'intervalle $(0, a)$. La dérivée

$$V' = \frac{\pi a^2(\sqrt{a^2 - x^2} - x)}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

s'annule pour $x_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Pour déterminer le signe de son numérateur dans les intervalles $(0, x_1)$ et (x_1, a), on fait deux substitutions, une pour chaque intervalle (Voir no 366). On a le tableau :

x	0		x_1		a
V'		$+$	0	$-$	
V	πa^3	$\nearrow$	$\pi a^3\sqrt{2}$ *max.*	$\searrow$	πa^3

Lorsque le volume engendré est maximum, on a

$$x = \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

Le triangle ADD′ est alors un triangle rectangle isocèle. L'angle DAD′ sera égal à 45o comme l'angle DAC et la diagonale AC est perpendiculaire à l'axe.

Méthode des principes. — V est maximum absolu avec

$$(x + \sqrt{a^2 - x^2})^2 = a^2 + 2x\sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{et} \quad x^2(a^2 - x^2);$$

donc lorsqu'on a

$$x^2 = a^2 - x^2 \quad \text{ou} \quad x = \frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

Le *théorème de Guldin* conduit plus rapidement au même résultat. Ce théorème donne en effet

$$V = a^2 \times 2\pi OO',$$

et la distance OO′ est maximum quand la diagonale AC est perpendiculaire à l'axe.

371. *Étudier les variations du volume, de la surface latérale et de la surface totale d'un cylindre inscrit dans une sphère.*

1o *Volume.* — Soit x le rayon de la base du cylindre. On a

$$V = \pi x^2 \times 2\sqrt{R^2 - x^2} = 2\pi x^2\sqrt{R^2 - x^2}.$$

La dérivée $V' = \dfrac{2\pi x(2R^2 - 3x^2)}{\sqrt{R^2 - x^2}}$ s'annule pour $x = \pm\dfrac{R}{3}\sqrt{6}$ et $x = 0$.

En remarquant qu'à $x_1 = \dfrac{R\sqrt{6}}{3}$ correspond la valeur $V_1 = \dfrac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$,

on a le tableau :

x	0		x_1		R
V'		+	0	—	
V	0	↗	V_1 *max.*	↘	0

Méthode des principes. — V est maximum absolu avec

$$x^2\sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{et} \quad (x^2)^2\,(R^2 - x^2);$$

donc lorsqu'on a

$$\frac{x^2}{2} = \frac{R^2 - x^2}{1} \quad \text{ou} \quad x = \frac{R}{3}\sqrt{6}.$$

2° *Surface latérale.* — Cette surface latérale a comme expression

$$y = 2\pi x \times 2\sqrt{R^2 - x^2} = 4\pi x\sqrt{R^2 - x^2}.$$

La dérivée $y' = \dfrac{4\pi(R^2 - 2x^2)}{\sqrt{R^2 - x^2}}$ s'annule pour $x = \pm\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$. A la racine positive x_1 correspond la valeur $y_1 = 2\pi R^2$ et on a le tableau :

x	0		x_1		R
y'		+	0	—	
y	0	↗	y_1 *max.*	↘	0

Méthode des principes. — y est maximum absolu avec

$$x\sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{et} \quad x^2(R^2 - x^2);$$

donc lorsqu'on a

$$x^2 = R^2 - x^2 \quad \text{ou} \quad x = \frac{R}{2}\sqrt{2}$$

3° *Surface totale.* — Cette surface totale a comme expression

$$z = 2\pi x^2 + 4\pi x\sqrt{R^2 - x^2} = 2\pi\left(x^2 + 2x\sqrt{R^2 - x^2}\right).$$

La dérivée de cette fonction est

$$z' = \frac{4\pi(x\sqrt{R^2 - x^2} + R^2 - 2x^2)}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Elle s'annule (Voir n° 369) pour

$$x_1 = -R\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} \quad \text{et} \quad x_2 = R\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}.$$

La racine x_2 est comprise entre 0 et R. La valeur correspondante de la fonction est $z_2 = \pi R^2(1 + \sqrt{5})$.

On détermine ensuite le signe de z' comme au nº **366.** On a le tableau :

x	0		x_2		R
z'		$+$	0	$-$	
z	0	$\nearrow$	z_2 *max.*	$\searrow$	$2\pi R^2$

CHAPITRE XVI

Maximums et minimums absolus.

372. *Trouver le maximum absolu des fonctions suivantes* (a > 0) :

1º $x(a - x)^2$, en supposant $0 < x < a$.

Cette fonction est maximum absolu, quand on a

$$\frac{x}{1} = \frac{a - x}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{a}{3}.$$

Rép. $\dfrac{4a^3}{27}$.

2º $x(a^2 - x^2)$, en supposant $0 < x < a$.

Cette fonction est maximum absolu en même temps que $x^2(a^2 - x^2)^2$; donc quand on a

$$\frac{x^2}{1} = \frac{a^2 - x^2}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Rép. $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{9}$.

3º $5x^3(a^2 - x^2)$, en supposant $0 < x < a$.

Cette fonction est maximum absolu en même temps que les fonctions

$$x^3(a^2 - x^2) \quad \text{et} \quad x^6(a^2 - x^2)^2 = (x^2)^3(a^2 - x^2)^2;$$

donc quand on a

$$\frac{x^2}{3} = \frac{a^2 - x^2}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

Rép. $\dfrac{6a^5\sqrt{15}}{25}$.

4° $x^4(a-x)^2$, en supposant $0 < x < a$.

Cette fonction est maximum absolu quand on a

$$\frac{x}{4} = \frac{a-x}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{2a}{3}.$$

Rép. $\dfrac{16a^6}{729}$.

5° $x^2(a-2x)^3$, en supposant $0 < 2x < a$.

Cette fonction est maximum absolu en même temps que

$$4x^2(a-2x)^3 = (2x)^2\,(a-2x)^3;$$

donc quand on a

$$\frac{2x}{2} = \frac{a-2x}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{a}{5}.$$

Rép. $\dfrac{27a^5}{3125}$.

6° $x\sqrt{a^4-x^4}$, en supposant $0 < x < a$.

Cette fonction est maximum absolu en même temps que $x^4(a^4-x^4)^2$; donc quand on a

$$\frac{x^4}{1} = \frac{a^4-x^4}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{a\sqrt[4]{27}}{3}.$$

Rép. $\dfrac{a^3\sqrt[4]{12}}{3}$.

7° $\dfrac{x-a}{x^3}$, en supposant $x > a$.

Cette fonction est maximum absolu en même temps que les fonctions

$$\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{a}{x}\right);\ \frac{a^2}{x^2}\left(1-\frac{a}{x}\right);\ \left(\frac{a}{x}\right)^2\left(1-\frac{a}{x}\right);$$

donc quand on a

$$\frac{a}{2x} = 1 - \frac{a}{x} \quad \text{ou} \quad x = \frac{3a}{2}.$$

Rép. $\dfrac{4}{27a^2}$.

8° $\dfrac{x^2-2a^2}{3x^4}$, en supposant $x^2 > 2a^2$.

Cette fonction est maximum absolu en même temps que les fonctions

$$\frac{x^2-2a^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}\left(1-\frac{2a^2}{x^2}\right);\ \frac{2a^2}{x^2}\left(1-\frac{2a^2}{x^2}\right);$$

donc quand on a $\dfrac{2a^2}{x^2} = 1 - \dfrac{2a^2}{x^2}$ ou $x = 2a$.

Rép. $\dfrac{1}{24a^2}$.

9° $\dfrac{x}{x^2+1}$, en supposant $x > 0$.

Le maximum absolu de cette fonction correspond à la valeur de x qui rend minimum absolu la fonction

$$\frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}.$$

Cette dernière fonction est minimum absolu quand on a

$$x = \frac{1}{x} \quad \text{ou} \quad x = 1.$$

Rép. $\dfrac{1}{2}$.

10° $\dfrac{x^3}{x^5+1}$, en supposant $x > 0$.

Le maximum absolu de cette fonction correspond à la valeur de x qui rend minimum absolu la fonction

$$\frac{x^5+1}{x^3} = x^2 + \frac{1}{x^3}.$$

Comme $(x^2)^3 \times \left(\dfrac{1}{x^3}\right)^2 = 1$, on doit avoir $\dfrac{x^2}{3} = \dfrac{1}{2x^3}$ ou $x = \dfrac{\sqrt[5]{48}}{2}$.

Rép. $\dfrac{\sqrt[5]{108}}{5}$.

11° $x\sqrt{x(2a-x)}$, en supposant $0 < x < 2a$.

Cette fonction est maximum absolu avec $x^3(2a-x)$; donc lorsqu'on a

$$\frac{x}{3} = \frac{2a-x}{1} \quad \text{ou} \quad x = \frac{3a}{2}.$$

Rép. $\dfrac{3a^2}{4}\sqrt{3}$.

12° $x + \sqrt{a^2-x^2}$, en supposant $0 < x < a$.

Cette fonction est maximum absolu en même temps que les fonctions

$(x+\sqrt{a^2-x^2})^2 = a^2 + 2x\sqrt{a^2-x^2}$; $x\sqrt{a^2-x^2}$; $x^2(a^2-x^2)$;
donc lorsqu'on a

$$x^2 = a^2 - x^2 \quad \text{ou} \quad x = \frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

Rép. $a\sqrt{2}$.

373. *Trouver le minimum absolu des fonctions suivantes* ($a > 0$) :

1° $x + \dfrac{1}{x^2}$, en supposant $x > 0$.

On a

$$x^2 \times \frac{1}{x^2} = 1.$$

La fonction est donc minimum absolu quand on a

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{x^2} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt[3]{2}.$$

Rép. $\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}$.

2° $\dfrac{a^3 + x^3}{x}$, en supposant $x > 0$. — On a

$$\frac{a^3 + x^3}{x} = \frac{a^3}{x} + x^2 \quad \text{et} \quad \left(\frac{a^3}{x}\right)^2 \times x^2 = a^6.$$

La fonction est donc minimum absolu quand on a

$$\frac{a^3}{2x} = x^2 \quad \text{ou} \quad x = \frac{a\sqrt[3]{4}}{2}.$$

Rép. $\dfrac{3a^2\sqrt[3]{2}}{2}$.

3° $\dfrac{a^5 + x^5}{x^2}$, en supposant $x > 0$. — On a

$$\frac{a^5 + x^5}{x^2} = \frac{a^5}{x^2} + x^3 \quad \text{et} \quad \left(\frac{a^5}{x^2}\right)^3 \times (x^3)^2 = a^{15}.$$

La fonction est donc minimum absolu quand on a

$$\frac{a^5}{3x^2} = \frac{x^3}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{a\sqrt[5]{162}}{3}$$

Rép. $\dfrac{5a^3\sqrt[5]{72}}{6}$.

4° $\dfrac{x^3}{(x-a)^2}$, en supposant $x > a$.

Le minimum absolu de cette fonction correspond à la valeur de x qui rend maximum absolu les fonctions

$$\frac{(x-a)^2}{x^3} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{a}{x}\right)^2 \quad \text{et} \quad \frac{a}{x}\left(1 - \frac{a}{x}\right)^2.$$

La fonction proposée est donc minimum absolu quand on a

$$\frac{a}{x} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x}\right) \quad \text{ou} \quad x = 3a.$$

Rép. $\dfrac{27a}{4}$.

5° $\dfrac{x^4}{(4x-a)^3}$, en supposant $4x > a$.

Le minimum absolu de cette fonction correspond à la valeur de x qui rend maximum absolu les fonctions

$$\frac{(4x-a)^3}{x^4} = \frac{1}{x}\left(4 - \frac{a}{x}\right)^3 \quad \text{et} \quad \frac{a}{x}\left(4 - \frac{a}{x}\right)^3.$$

La fonction proposée est donc minimum absolu quand on a

$$\frac{a}{x} = \frac{1}{3}\left(4 - \frac{a}{x}\right) \quad \text{ou} \quad x = a. \qquad \textbf{Rép.} \ \frac{a}{27}.$$

6° $\dfrac{x^5}{(x^2 - a^2)^2}$, en supposant $x > a$.

Le minimum absolu de cette fonction correspond à la valeur de x qui rend maximum absolu les fonctions

$$\frac{(x^2 - a^2)^2}{x^5} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)^2; \ \frac{a}{x}\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)^2; \ \frac{a^2}{x^2}\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)^4.$$

La fonction proposée est donc minimum absolu quand on a

$$\frac{a^2}{x^2} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right) \quad \text{ou} \quad x = a\sqrt{5}. \qquad \textbf{Rép.} \ \frac{25a\sqrt{5}}{16}.$$

7° $\dfrac{(x^2 + 3a^2)^2}{16x}$, en supposant $x > 0$.

Cette fonction est minimum absolu en même temps que les fonctions

$$\frac{(x^2 + 3a^2)^2}{x} = \left(x\sqrt{x} + \frac{3a^2}{\sqrt{x}}\right)^2; \quad x\sqrt{x} + \frac{3a^2}{\sqrt{x}}.$$

Comme $x\sqrt{x} \times \left(\dfrac{3a^2}{\sqrt{x}}\right)^3 = 27a^6$, on doit avoir

$$\frac{x\sqrt{x}}{1} = \frac{3a^2}{3\sqrt{x}} \quad \text{ou} \quad x = a.$$

Rép. a^3.

8° $\dfrac{x^2 + ax - a^2}{x - a}$, en supposant $x > a$. — On a

$$\frac{x^2 + ax - a^2}{x - a} = \frac{x^2 + a(x - a)}{x - a} = \frac{x^2}{x - a} + a.$$

Le minimum absolu de cette fonction correspond à la valeur de x qui rend maximum absolu les fonctions

$$\frac{x - a}{x^2}, \quad \frac{1}{x}\left(1 - \frac{a}{x}\right), \quad \frac{a}{x}\left(1 - \frac{a}{x}\right).$$

Donc la fonction est minimum absolu lorsqu'on a

$$\frac{a}{x} = 1 - \frac{a}{x} \quad \text{ou} \quad x = 2a.$$

Rép. $5a$.

374. *Trouver le maximum absolu de* x^5y^3, *sachant que* $140x^2 + 6y^7 = 41$ *et que* x *et* y *sont positifs.*

La fonction $x^5y^3 = (x^2)^{\frac{5}{2}} \times (y^7)^{\frac{3}{7}}$ est maximum absolu en même temps que la fonction

$$(140x^2)^{\frac{5}{2}} \times (6y^7)^{\frac{3}{7}};$$

donc quand on a

$$140x^2 : \frac{5}{2} = 6y^7 : \frac{3}{7} \quad \text{ou} \quad 4x^2 = y^7.$$

La relation $140x^2 + 6y^7 = 41$ donne, en remplaçant y^7 par $4x^2$,

$$4x^2 = 1.$$

Par suite, $x = \frac{1}{2}$, $y = 1$ et le maximum absolu est $\frac{1}{32}$.

375. *Trouver le minimum absolu de l'expression* $x + 2y + 3z$, *sachant que* $12x^2y^3z^4 = 1$ *et que* x, y *et* z *sont positifs.*

Le produit $$x^2(2y)^3(3z)^4$$
est constant. Le minimum absolu a donc lieu quand on a

$$\frac{x}{2} = \frac{2y}{3} = \frac{3z}{4}.$$

En joignant à ces équations la relation $12x^2y^3z^4 = 1$, on a un système de trois équations à trois inconnues.

D'où $x = 1$, $y = \frac{3}{4}$, $z = \frac{2}{3}$ et le minimum absolu est $\frac{9}{2}$.

376. *Trouver le minimum absolu de* $x^2 + y^2$, *sachant que*

$$y(y^2 + 3x^2) = a^3$$

et que x, y *et* a *sont positifs.*

On a

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{3}[2y^2 + (y^2 + 3x^2)] \quad \text{et} \quad 2y^2(y^2 + 3x^2)^2 = 2a^6.$$

La fonction est donc minimum absolu quand on a

$$\frac{2y^2}{1} = \frac{y^2 + 3x^2}{2}; \quad \text{d'où} \quad x = y = \frac{a\sqrt[3]{2}}{2}.$$

Rép. $\frac{a^2\sqrt[3]{4}}{2}$.

N. B. *Dans les six exercices suivants,* x, y *et* z *sont des variables positives;* a, b, ... *sont des constantes positives; les exposants* m, n, ... *sont des constantes rationnelles positives.*

377. *Trouver le maximum absolu du produit* $x^my^nz^p$, *sachant que*

$$ax^m + by^n + cz^p = 3abck.$$

Le produit $x^my^nz^p$ est maximum absolu en même temps que

$$abcx^my^nz^p = ax^m \times by_n \times cz^p;$$

donc quand on a

$$ax^m = by^n = cz^p = abck.$$

Par suite, $x^m = bck;\quad y^n = ack;\quad z^p = abk.$
Rép. $a^2b^2c^2k^3$.

378. *Sachant que* ax + by = k, *trouver les valeurs de* x *et de* y *auxquelles correspond la plus grande valeur de* x^my^n.

La fonction x^my^n est maximum absolu en même temps que

$$a^mx^mb^ny^n = (ax)^m(by)^n;$$

donc quand on a

$$\frac{ax}{m} = \frac{by}{n}.$$

Les proportions donnent

$$\frac{ax}{m} = \frac{by}{n} = \frac{ax + by \text{ ou } k}{m + n}.$$

Par suite, $$x = \frac{mk}{a(m+n)};\quad y = \frac{nk}{b(m+n)}.$$

379. *Sachant que* x + y + z = k, *trouver les valeurs de* x, y, z *auxquelles correspond le maximum absolu de* (ax + a′) (by + b′) (cz + c′).

Ce produit est maximum absolu en même temps que

$$\frac{1}{abc}(ax + a')(by + b')(cz + c') = \left(x + \frac{a'}{a}\right)\left(y + \frac{b'}{b}\right)\left(z + \frac{c'}{c}\right).$$

Or, la somme de ces trois facteurs est constante; donc le produit sera maximum absolu quand on aura

$$x + \frac{a'}{a} = y + \frac{b'}{b} = z + \frac{c'}{c}.$$

Ces équations, jointes à $x + y + z = k$, fournissent x, y et z.

380. *Sachant que* $ax^p + by^q = k$, *trouver les valeurs de* x *et de* y *qui rendent maximum absolu le produit* x^my^n.

On a $$x^my^n = (x^p)^{\frac{m}{p}} \times (y^q)^{\frac{n}{q}}.$$

Cette fonction est maximum absolu en même temps que

$$(ax^p)^{\frac{m}{p}} \times (by^q)^{\frac{n}{q}};$$

donc quand on a

$$ax^p : \frac{m}{p} = by^q : \frac{n}{q} \quad\text{ou}\quad \frac{ax^p}{mq} = \frac{by^q}{np}.$$

Cette équation, jointe à la relation $ax^p + by^q = k$, donne

$$x^p = \frac{mqk}{a(np + mq)};\quad y^q = \frac{npk}{b(np + mq)}.$$

381. *Trouver les valeurs de* x *et de* y *qui rendent minimum absolu la somme* $ax^p + by^q$, *sachant que* $x^m y^n = k$.

On a $$x^m y^n = (x^p)^{\frac{m}{p}} \times (y^q)^{\frac{n}{q}} = k.$$

Le produit $$(ax^p)^{\frac{m}{p}} \times (by^q)^{\frac{n}{q}}$$
est donc une constante. Par suite, la somme $ax^p + by^q$ est minimum absolu quand on a
$$ax^p : \frac{m}{p} = by^q : \frac{n}{q} \quad \text{ou} \quad npax^p = mqby^q.$$

Cette équation, jointe à la relation $x^m y^n = k$, donne la valeur de x et de y.

382. *Trouver le minimum absolu de la fonction* $x^m + \dfrac{1}{x^n}$.

On a $$(x^m)^n \times \left(\frac{1}{x^n}\right)^m = 1.$$

La fonction proposée est donc minimum absolu quand on a
$$\frac{x^m}{n} = \frac{1}{mx^n} \quad \text{ou} \quad x^{m+n} = \frac{n}{m}.$$

Rép. $\dfrac{\sqrt[m+n]{m^n n^m}\,(m+n)}{mn}$.

383. *Décomposer le nombre positif* 2a *en deux parties positives, telles que la somme des quotients obtenus en divisant chaque partie par l'autre, soit minimum absolu.*

Supposons que l'on ait $x + y = 2a$. Le produit des deux termes de la fonction $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$ est constant. La fonction est donc minimum absolu quand on a
$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x} \quad \text{ou} \quad x = y = a.$$

Le minimum absolu est 2.

384. *Par un point pris sur la base d'un triangle, on mène des parallèles aux deux autres côtés. Trouver le maximum absolu de l'aire du parallélogramme ainsi obtenu.*

Soit ABC le triangle donné. Par le point N pris sur le côté AB, menons des parallèles aux deux autres côtés. Nous obtenons ainsi le parallélogramme CMNP.

Posons BC $= a$, AH $= h$, CM $= x$.

L'aire du parallélogramme est
$$S = CM \times NK = CM \times DH.$$

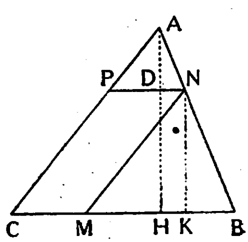


Fig. 75.

Or les triangles semblables ANP et ABC donnent

$$\frac{AD}{AH} = \frac{NP}{BC} \quad \text{ou} \quad \frac{h - DH}{h} = \frac{x}{a}.$$

D'où $$DH = \frac{ah - hx}{a} \quad \text{et} \quad S = \frac{hx}{a}(a - x).$$

L'aire est maximum absolu quand on a

$$x = a - x \quad \text{ou} \quad x = \frac{a}{2}.$$

Elle vaut alors $\frac{ah}{4}$, c'est-à-dire la moitié de l'aire du triangle.

385. *De tous les triangles de même périmètre et de même base, quel est celui qui a la plus grande aire?*

Soient $2p$ le périmètre constant et a la base commune des triangles. L'aire du triangle est

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Les deux premiers facteurs sont constants. Le maximum absolu de S a lieu en même temps que celui du produit $(p - b)(p - c)$. Or ces deux facteurs ont une somme constante, car

$$p - b + p - c = 2p - (b + c) = a.$$

Le produit est maximum absolu lorsque

$$p - b = p - c \quad \text{ou} \quad b = c.$$

Le triangle cherché est isocèle; ses trois côtés sont a, $\frac{2p-a}{2}$, $\frac{2p-a}{2}$ et

$$S = \frac{a}{2}\sqrt{p(p-a)}.$$

386. *Trouver le maximum absolu de l'aire du triangle obtenu en joignant le centre d'un cercle aux extrémités d'une corde.*

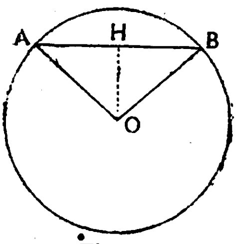


Fig. 76.

Soient OA = R; OH = x; AB = $2y$.

L'aire du triangle a comme expression

$$S = xy.$$

Elle est maximum absolu en même temps que x^2y^2; donc quand on a

$$x^2 = y^2 = \frac{R^2}{2} \quad \text{ou} \quad x = y = \frac{R\sqrt{2}}{2};$$

car le triangle rectangle OAH donne $x^2 + y^2 = R^2$.

Le triangle AOB est alors le quart du carré inscrit dans le cercle; son aire est $\frac{R^2}{2}$.

387. *De tous les triangles rectangles de même hypoténuse, quel est celui qui a la plus grande aire?*

Soient a l'hypoténuse, x et $\sqrt{a^2 - x^2}$ les côtés de l'angle droit. L'aire du triangle rectangle est

$$S = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2}.$$

L'aire du triangle est maximum absolu avec $x^2(a^2 - x^2)$, donc quand on a

$$x^2 = a^2 - x^2 \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Le triangle rectangle isocèle répond à la question. Son aire est $\frac{a^2}{4}$.

388. *Parmi tous les triangles rectangles de même aire, quel est celui qui a la plus petite hypoténuse?*

Soient x et y les deux côtés de l'angle droit, et $\frac{k^2}{2}$, l'aire du triangle. On aura $xy = k^2$. Si z désigne l'hypoténuse, on a aussi

$$z^2 = x^2 + y^2.$$

z sera minimum absolu en même temps que z^2. Or, z^2 est la somme de deux nombres dont le produit vaut k^4. Le minimum absolu aura donc lieu lorsque

$$x^2 = y^2 \quad \text{ou} \quad x = y = k.$$

Le triangle rectangle cherché est donc le triangle rectangle isocèle.

389. *Trouver le minimum absolu de l'aire d'un triangle isocèle circonscrit à un cercle donné.*

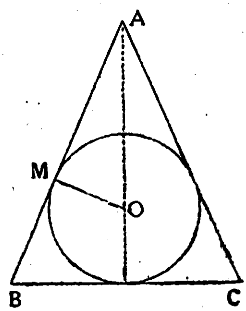


Fig. 77.

Soient $2x$ la base et y la hauteur du triangle ABC. On a

$$S = xy.$$

Les triangles OAM et BAH donnent

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OM}{BH} = \frac{AM}{AH},$$

ou

$$\frac{y - R}{AM + x} = \frac{R}{x} = \frac{AM}{y}.$$

De ces deux relations, on déduit

$$y = \frac{2Rx^2}{x^2 - R^2} \quad \text{et } S = \frac{2Rx^3}{x^2 - R^2}.$$

Le minimum absolu de S correspond à la même valeur de x que le maximum absolu des fonctions

$$\frac{x^2 - R^2}{x^3} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{R^2}{x^2}\right); \quad \frac{R}{x}\left(1 - \frac{R^2}{x^2}\right); \quad \frac{R^2}{x^2}\left(1 - \frac{R^2}{x^2}\right)^2.$$

Le minimum absolu a donc lieu quand on a

$$\frac{R^2}{x^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{R^2}{x^2}\right) \quad \text{ou} \quad x = R\sqrt{3}.$$

Le triangle qui a la plus petite aire est le triangle équilatéral circonscrit au cercle; son aire est $3R^2\sqrt{3}$.

390. *De tous les triangles de même périmètre, quel est celui qui a la plus grande aire?*

L'aire d'un triangle a comme expression

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

S sera maximum absolu en même temps que le produit

$$(p-a)(p-b)(p-c).$$

Or, la somme des facteurs de ce produit est constante, car on a

$$p - a + p - b + p - c = 3p - (a + b + c) = p.$$

Le produit est donc maximum absolu quand on a

$$p - a = p - b = p - c \quad \text{ou} \quad a = b = c.$$

Le triangle cherché est le triangle équilatéral. Son aire est $\frac{p^2\sqrt{3}}{9}$.

391. *Parmi tous les triangles de même aire, quel est celui qui a le plus petit périmètre?*

Supposons que l'on ait

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = k^2.$$

De cette égalité, on déduit

$$p(p-a)(p-b)(p-c) = k^4;$$

puis, $$\frac{a+b+c}{3}(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) = \frac{16k^4}{3}.$$

La somme des facteurs du premier membre étant $\frac{4}{3}(a+b+c)$, cette somme et $a + b + c$ seront minimums lorsque

$$\frac{a+b+c}{3} = b + c - a = c + a - b = a + b - c.$$

Ces égalités donnent $a = b = c$. Le triangle cherché est donc équilatéral.

392. *D'un point pris à l'intérieur d'un triangle, on mène une perpendiculaire à chaque côté. Quel est le point auquel correspond le maximum absolu du produit de ces perpendiculaires?*

Soient x, y, z les perpendiculaires qui correspondent respectivement aux côtés a, b, c. On a

$$ax + by + cz = 2S.$$

Le produit xyz est maximum absolu en même temps que le produit $(ax)(by)(cz)$; donc quand on a

$$ax = by = cz = \frac{2S}{3}.$$

En désignant par h_a, h_b, h_c les hauteurs du triangle, on aura

$$x = \frac{h_a}{3}; \quad y = \frac{h_b}{3}; \quad z = \frac{h_c}{3}.$$

Le point cherché est le point de concours des médianes du triangle.

392bis. *De tous les triangles rectangles pour lesquels le produit de la hauteur par l'un des segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse est constant, quel est celui qui a la plus petite hypoténuse?*

Soient z l'hypoténuse, h la hauteur, x et y les segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse, k^2 la valeur du produit constant hx. On a

$$z = x + y; \quad xy = h^2; \quad hx = k^2.$$

Éliminons h et y. On trouve

$$h = \frac{k^2}{x}, \quad y = \frac{k^4}{x^3}; \quad \text{puis} \quad z = x + \frac{k^4}{x^3}.$$

Cette somme z est minimum absolu quand on a

$$\frac{x}{3} = \frac{k^4}{x^3}; \quad \text{d'où} \quad x = k\sqrt[4]{3} \quad \text{et} \quad y = \frac{k\sqrt[4]{3}}{3}.$$

On trouve ensuite

$$z = \frac{4k\sqrt[4]{3}}{3} \quad \text{et} \quad h = \frac{k\sqrt[4]{27}}{3}.$$

393. *Quel est le parallélipipède rectangle de volume maximum inscrit dans une sphère de rayon donné* R?

Soient x, y, z les trois dimensions. Le volume $V = xyz$ est maximum en même temps que son carré $x^2y^2z^2$. Or on a

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2.$$

Donc le maximum a lieu pour

$$x^2 = y^2 = z^2 = \frac{4R^2}{3} \quad \text{ou} \quad x = y = z = \frac{2R}{3}\sqrt{3}.$$

Le solide cherché est un cube de volume $\dfrac{8R^3\sqrt{3}}{9}$.

394. *De tous les parallélipipèdes rectangles de même volume, quel est celui qui a la plus petite surface totale?*

Soient x, y, z les trois dimensions, V le volume et S la surface totale.

La surface totale

$$S = 2(xy + yz + zx)$$

est minimum absolu quand on a

$$xy = yz = zx \quad \text{ou} \quad x = y = z = \sqrt[3]{V},$$

car le produit $xy \times yz \times zx$ ou $x^2y^2z^2$ est constant et égal à V^2.

Le parallélipipède cherché est un cube dont la surface totale est $6\sqrt[3]{V^2}$.

395. *De tous les parallélipipèdes rectangles de même surface totale, quel est celui qui a le plus grand volume?*

Le volume $V = xyz$ est maximum absolu en même temps que son carré

$$V^2 = x^2y^2z^2 = xy.yz.zx.$$

Or on a

$$2(xy + yz + zx) = S.$$

On doit donc avoir

$$xy = yz = zx = \frac{S}{6} \quad \text{ou} \quad x = y = z = \frac{\sqrt{6S}}{6}.$$

Le parallélipipède cherché est un cube. Son volume est

$$V = \frac{S\sqrt{6S}}{36}.$$

396. *Sur une droite, on donne deux points* A *et* B, *distants de* a. *On marque sur cette droite un point* M, *entre* A *et* B, *et on demande le maximum et le minimum absolus de la somme des volumes des deux sphères ayant pour diamètres* AM *et* BM.

Soient $AM = x$, $BM = y$ et S la somme des volumes des deux sphères. On a

$$S = \frac{\pi}{6}(x^3 + y^3) = \frac{\pi}{6}[(x + y)^3 - 3xy(x + y)] = \frac{\pi}{6}(a^3 - 3axy).$$

Comme $x + y = a$, le produit xy est maximum absolu quand $x = y$. Le produit xy est d'ailleurs essentiellement positif; il est donc minimum absolu quand l'un des facteurs est nul.

La somme des volumes est minimum absolu quand $x = y = \frac{a}{2}$. Le point M est alors au milieu de AB et on a

$$S = \frac{\pi}{6}\left(a^3 - \frac{3a^3}{4}\right) = \frac{\pi a^3}{24}.$$

La somme des volumes est maximum absolu quand M est en A ou en B. On a alors

$$S = \frac{\pi a^3}{6}.$$

397. *Construire un prisme droit creux, à base carrée* (5 *faces*), *et trouver le maximum du volume pour une surface donnée.*

Soient x le côté de la base, y la hauteur, a^2 la surface donnée et V le volume. On a les équations

$$a^2 = x^2 + 4xy; \quad V = x^2y.$$

Tirons y de la première relation et remplaçons dans la seconde. Il vient

$$V = \frac{x(a^2 - x^2)}{4}.$$

V est maximum absolu avec $x^2(a^2 - x^2)^2$, donc quand on a

$$x^2 = \frac{a^2 - x^2}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

On trouve ensuite $y = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ et $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$.

398. *Parmi tous les prismes droits, à base hexagonale régulière, inscrits dans une même sphère, quel est celui qui a le plus grand volume?*

Soient x le côté de a base, $2y$ la hauteur et R le rayon de la sphère.

La surface de la base du prisme est $\dfrac{3x^2\sqrt{3}}{2}$. La hauteur étant $2y$, on a

$$V = 3x^2y\sqrt{3}.$$

On a aussi
$$x^2 + y^2 = R^2;$$
donc
$$V = 3y(R^2 - y^2)\sqrt{3}.$$

Le produit $y(R^2 - y^2)$ est maximum absolu avec $y^2(R^2 - y^2)$, donc lorsqu'on a

$$y^2 = \frac{R^2 - y^2}{2} \quad \text{ou} \quad y = \frac{R\sqrt{3}}{3}.$$

On a alors $x = \dfrac{R}{3}\sqrt{6}$ et le volume maximum est $2R^3$.

398bis. *Parmi tous les cônes de révolution de même volume* $\dfrac{2}{3}\pi a^3$, *quel est celui qui a la plus petite génératrice?*

Soient x le rayon de la base, y la hauteur et z la génératrice du cône. On a les relations
$$\frac{\pi}{3}x^2y = \frac{2\pi}{3}a^3 \quad \text{et} \quad z^2 = x^2 + y^2.$$

En éliminant x^2, il vient
$$z^2 = \frac{2a^3}{y} + y^2.$$

Le produit $\left(\dfrac{2a^3}{y}\right)^2 \times y^2$ est constant. Par suite, z^2 et z passent par un minimum absolu quand on a

$$\frac{2a^3}{2y} = y^2 \quad \text{ou} \quad y = a.$$

Alors $x = a\sqrt{2}$ et la plus petite génératrice est $z = a\sqrt{3}$.

399. *Parmi tous les cylindres de même volume $2\pi a^3$, quel est celui qui est inscrit dans la plus petite sphère?*

Soient x le rayon de la base et y la demi-hauteur du cylindre. On a les relations

$$2\pi a^3 = 2\pi x^2 y \quad \text{et} \quad R^2 = x^2 + y^2.$$

En éliminant x^2, il vient

$$R^2 = y^2 + \frac{a^3}{y}.$$

Le produit $y^2 \times \left(\dfrac{a^3}{y}\right)^2$ est constant. Par suite, R^2 et R passent par un minimum absolu quand on a

$$y^2 = \frac{a^3}{2y} \quad \text{ou} \quad y = \frac{a\sqrt[3]{4}}{2}.$$

Alors $x^2 = a^2\sqrt[3]{2}$ et le rayon minimum est donné par la relation

$$R^2 = \frac{3a^2}{2}\sqrt[3]{2}.$$

400. *Inscrire un rectangle dans un triangle, de manière que le volume engendré par ce rectangle, en tournant autour de sa base, soit maximum absolu.*

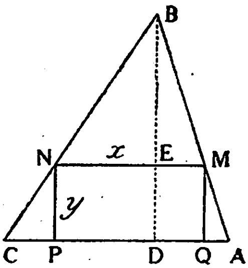


Fig. 78.

Soient b et h la base et la hauteur du triangle, x et y celles du rectangle inscrit.

Le volume engendré par le rectangle est

$$V = \pi y^2 x.$$

Or les triangles semblables ABC et MBN donnent

$$\frac{MN}{AC} = \frac{BE}{BD} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{b} = \frac{h-y}{h}.$$

D'où $\quad x = \dfrac{b}{h}(h-y) \quad$ et $\quad V = \dfrac{\pi b}{h} y^2(h-y).$

Ce volume est maximum absolu lorsque

$$\frac{y}{2} = \frac{h-y}{1} \quad \text{ou} \quad y = \frac{2h}{3}.$$

Alors $\quad x = \dfrac{b}{3} \quad$ et $\quad V = \dfrac{4\pi b h^2}{27}.$

400bis. *De tous les triangles isocèles inscrits dans un cercle, quel est celui qui, en tournant autour d'une tangente menée par son sommet, engendre le plus grand volume?*

Soit AD $= x$ la hauteur du triangle. Le volume engendré par ABC a pour expression

$$V = \frac{2\pi}{3}\,AD^2 \times BC = \frac{4\pi}{3}\,x^2\sqrt{x(2R-x)}.$$

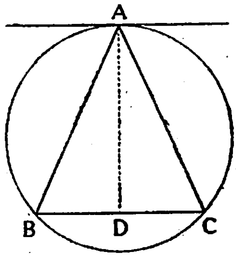


Fig. 79.

Le produit

$$x^2\sqrt{x(2R-x)} = \sqrt{x^5(2R-x)}$$

est maximum absolu lorsque

$$\frac{x}{5} = \frac{2R-x}{1} \quad \text{ou} \quad x = \frac{5R}{3}.$$

Le volume maximum est $V = \dfrac{100\pi R^3\sqrt{5}}{81}$.

401. *Trouver le minimum absolu du volume engendré par un losange circonscrit à un cercle de rayon* R, *en tournant autour d'une de ses diagonales.*

Soient $2x$ et $2y$ les diagonales du losange. Le volume engendré par le losange, en tournant autour de la diagonale AC, est

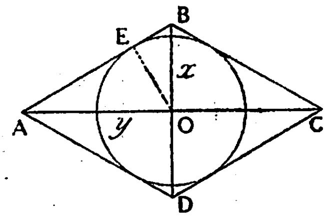


Fig. 80.

$$V = \frac{2\pi}{3}\,x^2 y.$$

Le triangle rectangle AOB donne

$$AB^2 = x^2 + y^2; \quad AB.R = xy;$$

On en tire $y^2 = \dfrac{R^2x^2}{x^2-R^2}$.

Par suite, $V^2 = \dfrac{4\pi^2R^2}{9} \times \dfrac{x^6}{x^2-R^2}$.

Les fonctions $\dfrac{x^6}{x^2-R^2}$, V^2 et V

passent par un minimum absolu lorsque les fonctions

$$\frac{x^2-R^2}{x^6} = \frac{1}{x^4}\left(1-\frac{R^2}{x^2}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{R^2}{x^2}\right)^2\left(1-\frac{R^2}{x^2}\right)$$

passent par un maximum absolu; donc lorsqu'on a

$$\frac{R^2}{2x^2} = 1 - \frac{R^2}{x^2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{R\sqrt{6}}{2}.$$

Le volume maximum est $\pi R^3\sqrt{3}$.

Exercices de récapitulation

PREMIÈRE SÉRIE

RADICAUX, EXPOSANTS, NOMBRES COMPLEXES.

402. *Calculer les expressions suivantes :*

1° $x = (28 - 10\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} - (7 + 4\sqrt{3})^{\frac{-1}{2}}$. — On a

$$\sqrt{28 - 10\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{28 + 22}{2}} - \sqrt{\frac{28 - 22}{2}} = 5 - \sqrt{3}.$$

$$(7 + 4\sqrt{3})^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}} = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

Donc $x = 3$.

2° $x = (26 + 15\sqrt{3})^{\frac{2}{3}} - (26 + 15\sqrt{3})^{-\frac{2}{3}}$.

Le second terme de cette expression est égal à $(26 - 15\sqrt{3})^{\frac{2}{3}}$.

En appliquant la formule

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b),$$

on a ensuite

$$x^3 = (26 + 15\sqrt{3})^2 - (26 - 15\sqrt{3})^2 - 3(676 - 675)^{\frac{2}{3}} \times x$$
$$= 4 \times 26 \times 15\sqrt{3} - 3x.$$

En posant $x = y\sqrt{3}$, cette égalité devient

$$3y^3\sqrt{3} = 4 \times 26 \times 15\sqrt{3} - 3y\sqrt{3}$$

ou

$$y^3 + y - 520 = 0.$$

Cette dernière équation peut s'écrire

$$(y - 8)(y^2 + 8y + 65) = 0.$$

Elle n'est vérifiée que par $y = 8$. On a donc $x = 8\sqrt{3}$.

3° $x = (\sqrt{3} + 1)\sqrt[3]{9 - 5\sqrt{3}} + (\sqrt{3} - 1)\sqrt[3]{9 + 5\sqrt{3}}$. — On a

$$(\sqrt{3} + 1)^3 = 10 + 6\sqrt{3} \quad \text{et} \quad (\sqrt{3} - 1)^3 = 6\sqrt{3} - 10.$$

On peut donc écrire

$$x = \sqrt[3]{(9 - 5\sqrt{3})(10 + 6\sqrt{3})} + \sqrt[3]{(5\sqrt{3} + 9)(6\sqrt{3} - 10)}$$
$$= \sqrt[3]{4\sqrt{3}} + \sqrt[3]{4\sqrt{3}} = 2\sqrt[6]{48}.$$

403. *Rendre rationnel le dénominateur de l'expression*

$$x = \frac{12\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} - 6\sqrt[3]{b^2}}{3\sqrt[3]{a^2} - 4\sqrt[3]{ab} - 4\sqrt[3]{b^2}}.$$

Après avoir décomposé le numérateur et le dénominateur en facteurs, on peut simplifier par $3\sqrt[3]{a} + 2\sqrt[3]{b}$, et il vient

$$x = \frac{4\sqrt[3]{a} - 3\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a} - 2\sqrt[3]{b}} = \frac{(4\sqrt[3]{a} - 3\sqrt[3]{b})\,(\sqrt[3]{a^2} + 2\sqrt[3]{ab} + 4\sqrt[3]{b^2})}{a - 8b}$$

ou

$$x = \frac{4a + 5\sqrt[3]{a^2b} + 10\sqrt[3]{ab^2} - 12b}{a - 8b}.$$

404. *Rendre rationnels les dénominateurs des fractions suivantes :*

1° $X = \dfrac{1}{2 - \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}}.$

En posant $a = \sqrt[3]{2}$, le dénominateur devient

$$a^3 - a^2 + a = a(a^2 - a + 1)$$

et son produit par $a^2(a + 1)$ est $a^3(a^3 + 1)$. On a donc

$$X = \frac{\sqrt[3]{4}\,(\sqrt[3]{2} + 1)}{2(2 + 1)} = \frac{2 + \sqrt[3]{4}}{6}.$$

2° $X = \dfrac{3}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{12}}.$

En posant $a = \sqrt[3]{3}$ et $b = \sqrt[3]{2}$, le dénominateur devient

$$a + ab + ab^2 = a(1 + b + b^2)$$

et son produit par $a^2(b - 1)$ est $a^3(b^3 - 1)$. On a donc

$$X = \frac{3\sqrt[3]{9}(\sqrt[3]{2} - 1)}{3(2 - 1)} = \sqrt[3]{9}(\sqrt[3]{2} - 1).$$

3° $X = \dfrac{1}{2 + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}.$

En posant $a = \sqrt[3]{2}$, le dénominateur devient

$$a^3 + a^2 - a = a(a^2 + a - 1) = a[(a^2 + a + 1) - 2].$$

Son produit par $a^2(a - 1)$ est

$$a^3[(a^3 - 1) - 2(a - 1)] = 2(3 - 2a).$$

On a donc

$$X = \frac{\sqrt[3]{4}\,(\sqrt[3]{2} - 1)}{2(3 - 2\sqrt[3]{2})} = \frac{2 - \sqrt[3]{4}}{2(3 - 2\sqrt[3]{2})}.$$

Pour achever, il suffit de multiplier les deux termes de X par

$$9 + 6\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{4}.$$

Le dénominateur devient alors $2(27 - 16) = 22$.

4° $X = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{x+y}}$.

En multipliant les deux termes de X par

$$A = (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})^2 + (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})\sqrt[3]{x+y} + \sqrt[3]{(x+y)^2},$$

il vient $$X = \frac{A}{3\sqrt[3]{xy}\,(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})}.$$

Il suffit à présent de multiplier les deux termes de X par

$$\sqrt[3]{x^2y^2}\,(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}).$$

Le dénominateur devient alors $3xy(x - y)$.

5° $X = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}}$.

En posant $a = \sqrt[3]{x}$, $b = \sqrt[3]{y}$, $c = \sqrt[3]{z}$, le dénominateur devient $a + b + c$. En multipliant les deux termes de X par $A = \Sigma a^2 - \Sigma ab$, le dénominateur devient $\Sigma a^3 - 3abc$. On a donc

$$X = \frac{A}{x + y + z - 3\sqrt[3]{xyz}}.$$

Pour achever, il suffit de multiplier les deux termes de X par

$$(x + y + z)^2 + 3(x + y + z)\sqrt[3]{xyz} + 9\sqrt[3]{x^2y^2z^2}.$$

Le dénominateur devient alors

$$(x + y + z)^3 - 27xyz.$$

6° $X = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z}}$.

Cet exercice se traite comme le précédent, après avoir remplacé $-\sqrt[3]{z}$ par $+\sqrt[3]{-z}$.

405. *Calculer la valeur des expressions suivantes :*

1° $X = \dfrac{2a\sqrt{1 + x^2}}{x + \sqrt{1 + x^2}}$ pour $x = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}} - \sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$.

La question n'a de sens que si a et b sont différents de zéro et de mêmes signes. On trouve

$$1 + x^2 = \frac{(a + b)^2}{4ab}.$$

a) Si a et b sont positifs, on a $\sqrt{1 + x^2} = \dfrac{a + b}{2\sqrt{ab}}$,

et $$X = \frac{2a(a + b)}{(\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2}) + (a + b)} = a + b.$$

b) Si a et b sont négatifs, on a $\sqrt{1+x^2} = \dfrac{-(a+b)}{2\sqrt{ab}}$,

et
$$X = \frac{-2a(a+b)}{(\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2}) - (a+b)} = a + b.$$

2° $X = \dfrac{\sqrt{a+bx} + \sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a-bx}}$ pour $x = \dfrac{2ac}{b(c^2+1)}$.

X n'est défini que si a, b et c sont différents de zéro. Il faut de plus qu'on ait $\quad a + bx \geqslant 0$ et $a - bx \geqslant 0$;
ou bien $\quad -a \leqslant bx \leqslant a$,
et ces dernières relations ne sont compatibles que si on suppose $a > 0$. En y remplaçant x par sa valeur, on trouve
$$-(c^2+1) \leqslant 2c \leqslant c^2 + 1.$$
On vérifie aisément que ces nouvelles relations sont satisfaites, quel que soit c.

En résumé, on doit supposer $a > 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

On a ensuite, en rendant le dénominateur rationnel,
$$X = \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2x^2}}{bx};$$
et, en remplaçant x par sa valeur dans $a^2 - b^2x^2$,
$$a^2 - b^2x^2 = \frac{a^2(c^2-1)^2}{(c^2+1)^2}.$$

a) $c^2 - 1$ est positif pour $c < -1$ et pour $c > 1$. On a alors
$$\sqrt{a^2 - b^2x^2} = \frac{a(c^2-1)}{c^2+1} \quad \text{et} \quad X = \frac{2ac^2}{c^2+1} : \frac{2ac}{c^2+1} = c.$$

b) $c^2 - 1$ est négatif pour $-1 < c < 0$ et pour $0 < c < 1$. On a alors
$$\sqrt{a^2 - b^2x^2} = \frac{-a(c^2-1)}{c^2+1} \quad \text{et} \quad X = \frac{2a}{c^2+1} : \frac{2ac}{c^2+1} = \frac{1}{c}.$$

c) Si $c = \pm 1$, on a $a^2 - b^2x^2 = 0$ et $X = \pm 1$.

3° $X = \dfrac{a^2 - b^2}{2(a^2+b^2)}\left(x^{\frac{1}{p}} + x^{\frac{1}{q}}\right)$ pour $x = \left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2pq}{q-p}}$.

On peut écrire
$$x^{\frac{1}{p}} + x^{\frac{1}{q}} = x^{\frac{1}{p}}\left(1 + x^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\right) = x^{\frac{1}{p}}\left(1 + x^{\frac{p-q}{pq}}\right).$$
Or, on a
$$x^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2q}{q-p}}; \quad x^{\frac{p-q}{pq}} = \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{-2}.$$
$$1 + x^{\frac{p-q}{pq}} = 1 + \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 = \frac{2(a^2+b^2)}{(a+b)^2}.$$

En remplaçant dans X, on trouve finalement

$$X = \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{q+p}{q-p}}.$$

4o $X = xy + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}(y^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$,

$$\text{pour}\quad x = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) \quad\text{et}\quad y = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right).$$

La question n'a de sens que si l'on suppose a et b différents de zéro. On trouve :

$$x = \frac{a^2+1}{2a};\quad y = \frac{b^2+1}{2b};\quad xy = \frac{(a^2+1)(b^2+1)}{4ab};$$

$$x^2 - 1 = \frac{(a^2-1)^2}{4a^2};\quad y^2 - 1 = \frac{(b^2-1)^2}{4b^2}.$$

Considérons les intervalles (les nombres $+1$ et -1 étant exclus)

$$(-\infty, -1), (0, 1) \quad\text{et}\quad (-1, 0), (1, +\infty).$$

a) Si a et b sont pris dans le même intervalle ou dans le même groupe d'intervalles, les expressions $\dfrac{a^2-1}{2a}$ et $\dfrac{b^2-1}{2b}$ sont de mêmes signes et

$$X = \frac{(a^2+1)(b^2+1)}{4ab} + \frac{(a^2-1)(b^2-1)}{4ab} = \frac{a^2b^2+1}{2ab}.$$

b) Si a et b sont pris dans deux intervalles ne faisant pas partie du même groupe, les expressions $\dfrac{a^2-1}{2a}$ et $\dfrac{b^2-1}{2b}$ sont de signes contraires et

$$X = \frac{(a^2+1)(b^2+1)}{4ab} - \frac{(a^2-1)(b^2-1)}{4ab} = \frac{a^2+b^2}{2ab}.$$

c) Si a ou b est égal à ± 1, X se réduit à son premier terme.

406. *Vérifier les égalités suivantes :*

1o $2^{\frac{1}{2}}\left[2a + (a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}\right]\left[a - (a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} = (a+b)^{\frac{3}{2}} - (a-b)^{\frac{3}{2}}$, en supposant $a > b > 0$.

En appliquant la théorie des radicaux doubles, on trouve

$$2^{\frac{1}{2}}\left[a - (a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} = (a+b)^{\frac{1}{2}} - (a-b)^{\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

Mais on a aussi

$$2a + (a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} = \left((a+b)^{\frac{1}{2}}\right)^2 + (a+b)^{\frac{1}{2}}(a-b)^{\frac{1}{2}} + \left((a-b)^{\frac{1}{2}}\right)^2, \tag{2}$$

et le produit des expressions (1) et (2) donne le résultat demandé.

2o $(a^2 + \sqrt[3]{a^4b^2})^{\frac{1}{2}} + (b^2 + \sqrt[3]{a^2b^4})^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$, quand $a > 0$ et $b > 0$.

Comme a et b sont positifs, les deux membres de l'égalité proposée sont positifs et il suffit de montrer que le carré du premier membre est le cube de

$$a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}.$$

En élevant le premier membre au carré, on trouve

$$a^2 + \sqrt[3]{a^4b^2} + b^2 + \sqrt[3]{a^2b^4} + 2\sqrt{a^2\sqrt[3]{a^2b^4} + b^2\sqrt[3]{a^4b^2} + 2a^2b^2}.$$

Or, on a

$$a^2\sqrt[3]{a^2b^4} + b^2\sqrt[3]{a^4b^2} + 2a^2b^2 = (a\sqrt[3]{ab^2} + b\sqrt[3]{a^2b})^2.$$

En remplaçant, le carré du premier membre devient

$$a^2 + 3\sqrt[3]{a^4b^2} + 3\sqrt[3]{a^2b^4} + b^2 = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^3.$$

3° Si $b > 0$, on a $\left\{\left[a + (a^2 + b^3)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}} + \left[a - (a^2 + b^3)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}\right\}^2 + 2b =$
$\left\{b^3 + 2a^2 + \left[(b^3 + 2a^2)^2 - b^6\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}} + \left\{b^3 + 2a^2 - \left[(b^3 + 2a^2)^2 - b^6\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}}.$

On peut vérifier aisément que tous les termes des deux membres de cette égalité sont définis quand $b > 0$.

a) En effectuant le carré indiqué dans le premier membre, celui-ci devient

$$\left[a + (a^2 + b^3)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{2}{3}} + \left[a - (a^2 + b^3)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{2}{3}} + 2(-b^3)^{\frac{1}{3}} + 2b$$
$$= \left[a + (a^2 + b^3)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{2}{3}} + \left[a - (a^2 + b^3)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{2}{3}}. \qquad (1)$$

b) En appliquant la théorie des radicaux doubles, on trouve

$$\left\{b^3 + 2a^2 + \left[(b^3 + 2a^2)^2 - b^6\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}} = (a^2 + b^3)^{\frac{1}{2}} \pm a;$$
$$\left\{b^3 + 2a^2 - \left[(b^3 + 2a^2)^2 - b^6\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}} = (a^2 + b^3)^{\frac{1}{2}} \mp a.$$

Si $a > 0$, il faut prendre dans les seconds membres de ces égalités, le signe supérieur affectant a; si $a < 0$, il faut prendre le signe inférieur. Quel que soit le signe de a, le second membre de l'égalité proposée est donc égal à

$$\left[(a^2 + b^3)^{\frac{1}{2}} + a\right]^{\frac{2}{3}} + \left[(a^2 + b^3)^{\frac{1}{2}} - a\right]^{\frac{2}{3}}. \qquad (2)$$

c) En comparant (1) et (2), on voit que l'égalité proposée est exacte.

407. *Sachant que l'on a* $8p > 1$, *calculer*

$$x = \left[p + \frac{p+1}{3}\left(\frac{8p-1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}} + \left[p - \frac{p+1}{3}\left(\frac{8p-1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}.$$

Comme on suppose $p > \frac{1}{8}$, le second membre est réel. En représentant son premier terme par a et le second par b, l'identité

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

donne
$$x^3 = 2p + 3x\left[p^2 - \left(\frac{p+1}{3}\right)^2 \times \frac{8p-1}{3}\right]^{\frac{1}{3}};$$

ou
$$x^3 = 2p + x(1 - 2p).$$

On obtient ainsi l'équation

$$x^3 + (2p - 1)x - 2p = 0 \quad \text{ou} \quad (x - 1)(x^2 + x + 2p) = 0.$$

Comme $8p > 1$, la seule racine réelle de cette équation est 1. On a donc $x = 1$.

408. *Si* a *et* b *désignent des nombres rationnels, l'expression*

$$x = \sqrt[3]{a + \frac{8b^3 + a}{3b}\sqrt{\frac{a - b^3}{3b}}} + \sqrt[3]{a - \frac{8b^3 + a}{3b}\sqrt{\frac{a - b^3}{3b}}}$$

est *rationnelle quand elle est réelle.*

Pour que x soit réel, il suffit qu'on ait

$$\frac{a - b^3}{b} > 0 \quad \text{ou} \quad b(a - b^3) > 0.$$

En raisonnant ensuite comme dans l'exercice précédent, on aboutit à l'équation

$$bx^3 - (4b^3 - a)x - 2ab = (x - 2b)(bx^2 + 2b^2x + a) = 0.$$

Si $b(a - b^3) > 0$, la seule racine réelle de cette équation est $x = 2b$.

409. *La* n^e *réduite de la fraction continue égale à* N *est* $\frac{A_n}{B_n}$. *Calculer*

$$S_n = \frac{A_1}{B_1} + \frac{1}{B_1B_2} - \frac{1}{B_2B_3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{B_{n-1}B_n}$$

et chercher sa limite pour n *infini.*

On a

$$\frac{1}{B_1B_2} = \frac{A_2}{B_2} - \frac{A_1}{B_1}, \quad \frac{1}{B_2B_3} = \frac{A_2}{B_2} - \frac{A_3}{B_3}; \dots$$

En remplaçant et en réduisant, on trouve

$$S_n = \frac{A_n}{B_n} \quad \text{et} \quad \lim S_n = N.$$

410. *Si* $\frac{A_n}{B_n}$ *est la* n^e *réduite de* $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$, *montrer que :*

1° $A_3 + A_5 + \dots + A_{2n-1} = A_{2n} - A_2$;
2° $B_3 + B_5 + \dots + B_{2n-1} = B_{2n} - B_2$.

En effet, on a $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) = (1, 1, 1, \dots)$. Il en résulte que

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2} \quad \text{et} \quad B_n = B_{n-1} + B_{n-2}.$$

La première égalité donne

$$\begin{aligned} A_{2n} &= A_{2n-1} + A_{2n-2} \\ A_{2n-2} &= A_{2n-3} + A_{2n-4} \\ &\dots\dots\dots\dots \\ A_6 &= A_5 + A_4 \\ A_4 &= A_3 + A_2. \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre et en réduisant, on trouve la première relation demandée. On démontre la seconde d'une façon analogue.

411. *Si* $x = (0; a, b; \dots)$, $y = (0; 2a, 2b; \dots)$ *et* $z = (0; 3a, 3b; \dots)$, *on a*

$$x(y^2 - z^2) + 2y(z^2 - x^2) + 3z(x^2 - y^2) = 0.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= (a, b; \dots) = \left(a, b, \frac{1}{x}\right) = \frac{ab + 1 + ax}{b + x} \\ \frac{1}{y} &= (2a, 2b; \dots) = \left(2a, 2b, \frac{1}{y}\right) = \frac{4ab + 1 + 2ay}{2b + y} \\ \frac{1}{z} &= (3a, 3b; \dots) = \left(3a, 3b, \frac{1}{z}\right) = \frac{9ab + 1 + 3az}{3b + z}. \end{aligned}$$

Ces égalités donnent

$$ax^2 + abx = b; \quad ay^2 + 2aby = b; \quad az^2 + 3abz = b.$$

En égalant les premiers membres et en simplifiant par a, il vient

$$x^2 + bx = y^2 + 2by; \quad x^2 + bx = z^2 + 3bz.$$

Il suffit à présent d'éliminer b pour obtenir la relation demandée.

412. *Démontrer que*

$$p(a_1, pqa_2, a_3, pqa_4, \dots) = (pa_1, qa_2, pa_3, qa_4, \dots).$$

Posons $x = (a_1, pqa_2, a_3, pqa_4, \dots)$; $y = (pa_1, qa_2, pa_3, qa_4, \dots)$; puis désignons par $\frac{A_n}{B_n}$ et $\frac{S_n}{T_n}$ les n^{es} réduites de x et de y.

I. Les deux premières réduites de x sont

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{a_1}{1}; \quad \frac{A_2}{B_2} = \frac{pqa_1a_2 + 1}{pqa_2}.$$

Les deux premières réduites de y sont

$$\frac{S_1}{T_1} = \frac{pa_1}{1}; \quad \frac{S_2}{T_2} = \frac{pqa_1a_2 + 1}{qa_2}.$$

On voit que l'on a

$$S_1 = pA_1, \; T_1 = B_1; \quad S_2 = A_2, \; T_2 = \frac{1}{p} B_2.$$

II. Montrons ensuite que, si les termes des réduites de rang $2n - 1$ et $2n$ satisfont à des relations analogues, il en sera de même pour les termes des deux réduites suivantes.

Supposons que
$$S_{2n-1} = pA_{2n-1};\ T_{2n-1} = B_{2n-1};\ S_{2n} = A_{2n};\ T_{2n} = \frac{1}{p} B_{2n}; \qquad (1)$$
et démontrons que
$$S_{2n+1} = pA_{2n+1};\ T_{2n+1} = B_{2n+1};\ S_{2n+2} = A_{2n+2};\ T_{2n+2} = \frac{1}{p}B_{2n+2}.$$
En effet, on a
$$\frac{A_{2n+1}}{B_{2n+1}} = \frac{A_{2n}a_{2n+1} + A_{2n-1}}{B_{2n}a_{2n+1} + B_{2n-1}};\quad \frac{A_{2n+2}}{B_{2n+2}} = \frac{A_{2n+1}pqa_{2n+2} + A_{2n}}{B_{2n+1}pqa_{2n+2} + B_{2n}};$$
et, en tenant compte des égalités (1),
$$\frac{S_{2n+1}}{T_{2n+1}} = \frac{S_{2n}pa_{2n+1} + S_{2n-1}}{T_{2n}pa_{2n+1} + T_{2n-1}} = \frac{p(A_{2n}a_{2n+1} + A_{2n-1})}{B_{2n}a_{2n+1} + B_{2n-1}} = \frac{pA_{2n+1}}{B_{2n+1}};$$
$$\frac{S_{2n+2}}{T_{2n+2}} = \frac{S_{2n+1}qa_{2n+2} + S_{2n}}{T_{2n+1}qa_{2n+2} + T_{2n}} = \frac{A_{2n+1}pqa_{2n+2} + A_{2n}}{B_{2n+1}qa_{2n+2} + \frac{1}{p}B_{2n}} = \frac{A_{2n+2}}{\frac{1}{p}B_{2n+2}}.$$

III. De ce qui précède, il résulte que l'on a
$$\frac{S_n}{T_n} = p \times \frac{A_n}{B_n}.$$
D'où
$$\lim \frac{S_n}{T_n} = p \lim \frac{A_n}{B_n} \quad \text{ou} \quad y = px.$$

413. *Deux fractions continues périodiques simples sont inverses, lorsque leurs périodes sont formées des mêmes quotients incomplets, mais écrits dans unr odre inverse.*

Si l'on représente par α la fraction continue inverse de la fraction périodique simple $(a, b, c, \ldots, p, q, r; \ldots)$,

$-\dfrac{1}{\alpha}$ *sera la racine négative de l'équation du second degré dont la racine positive est la valeur de la fraction continue donnée.*

Désignons par x la valeur de la fraction continue
$$(a, b, c, \ldots, p, q, r; \ldots);$$
par $\dfrac{Q}{Q'}$, $\dfrac{R}{R'}$ les réduites correspondant aux quotients incomplets q et r.

On a
$$x = (a, b, c, \ldots, p, q, r, x) = \frac{Rx + Q}{R'x + Q'}$$
et x est la racine positive de l'équation
$$R'x^2 + (Q' - R)x - Q = 0. \qquad (1)$$
Soit ensuite
$$\alpha = (r, q, p, \ldots, c, b, a; \ldots) \text{ ou } \alpha = (r, q, p, \ldots, c, b, a, \alpha).$$

Les réduites correspondant aux quotients incomplets b et a seront $\frac{R'}{Q'}$ et $\frac{R}{Q}$ (94) et on aura

$$\alpha = \frac{R\alpha + R'}{Q\alpha + Q'} \text{ ou } Q\alpha^2 + (Q' - R)\alpha - R' = 0. \qquad (2)$$

Or, en remplaçant dans le premier membre de l'équation (1) x par $-\frac{1}{\alpha}$, on trouve

$$\frac{R'}{\alpha^2} - \frac{Q' - R}{\alpha} - Q = -\frac{1}{\alpha^2}[Q\alpha^2 + (Q' - R)\alpha - R'].$$

Il en résulte que l'équation (2) exprime que $-\frac{1}{\alpha}$ est la racine négative de l'équation (1).

414. *Si l'on désigne par* $\frac{Q}{Q'}$ *et* $\frac{R}{R'}$ *les deux dernières réduites de la fraction continue* (α, a, b, ..., q, r), *et par* $\frac{U}{U'}$ *et* $\frac{V}{V'}$ *les deux dernières réduites de la fraction* (α, a, b, ..., q, r, r, q, ..., b, a, α), *on a*

$$\frac{U}{U'} = \frac{RR' + QQ'}{R'^2 + Q'^2} \quad \textit{et} \quad \frac{V}{V'} = \frac{R^2 + Q^2}{RR' + QQ'}.$$

En effet, remarquons que les deux dernières réduites de la fraction (r, q, ..., b, a, α) sont $\frac{R'}{Q'}$ et $\frac{R}{Q}$ (94). Par suite,

$$\frac{U}{U'} = (\alpha, a, b, \ldots, q, r, r, q, \ldots, b, a)$$
$$= \left(\alpha, a, b, \ldots, q, r, \frac{R'}{Q'}\right) = \frac{RR' + QQ'}{R'^2 + Q'^2};$$

et

$$\frac{V}{V'} = (\alpha, a, b, \ldots, q, r, r, q, \ldots, b, a, \alpha)$$
$$= \left(\alpha, a, b, \ldots, q, r, \frac{R}{Q}\right) = \frac{R^2 + Q^2}{RR' + QQ'}.$$

415. *Montrer que la somme des racines cubiques de l'unité est nulle et que l'une des racines cubiques complexes est le carré de l'autre.*

Soient 1, α, α' les racines cubiques de l'unité. L'identité

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x - \alpha)(x - \alpha')$$

donne $1 + \alpha + \alpha' = 0$. Elle donne aussi $\alpha\alpha' = 1$ et, comme $\alpha \times \alpha^2 = 1$, on a $\alpha' = \alpha^2$.

Conséquence. — Si k est une racine cubique complexe de l'unité, on a $1 + k + k^2 = 0$.

416. *Si α est une racine cubique complexe de l'unité, montrer que l'on a :*

1° $(1 - \alpha + \alpha^2)(1 + \alpha - \alpha^2) = 4.$
En remplaçant α^2 par $-1 - \alpha$, il vient
$(1 - \alpha + \alpha^2)(1 + \alpha - \alpha^2) = -2\alpha(2 + 2\alpha) = -4(\alpha + \alpha^2) = 4.$

2° $(1 - \alpha)(1 - \alpha^2)(1 - \alpha^4)(1 - \alpha^5) = 9.$
Comme $\alpha^4 = \alpha$ et $\alpha^5 = \alpha^2$, le premier membre vaut
$$(1 - \alpha)^2 (1 - \alpha^2)^2 = (1 - \alpha - \alpha^2 + \alpha^3)^2.$$
Or, $\alpha^3 = 1 = -\alpha - \alpha^2$. L'expression est donc égale à 9.

3° $(1 - \alpha + \alpha^2)(1 - \alpha^2 + \alpha^4)(1 - \alpha^4 + \alpha^8) \ldots$ ($2n$ facteurs) $= 2^{2n}$.
On a (1°)
$(1 - \alpha + \alpha^2)(1 - \alpha^2 + \alpha^4) = (1 - \alpha + \alpha^2)(1 + \alpha - \alpha^2) = 4.$
Le produit des deux facteurs suivants $1 - \alpha^4 + \alpha^8$ et $1 - \alpha^8 + \alpha^{16}$ vaut également $(1 - \alpha + \alpha^2)(1 + \alpha - \alpha^2)$ ou 4, car $\alpha^4 = \alpha$, $\alpha^8 = \alpha^2$ et $\alpha^{16} = \alpha$.

La même proposition s'applique au produit des deux facteurs de rangs $2p - 1$ et $2p$. En effet, les puissances de α contenues dans ces facteurs ont respectivement pour exposants 2^{2p-2}, 2^{2p-1} et 2^{2p-1}, 2^{2p}. Or, une puissance de 2 dont l'exposant est pair, est un multiple de 3, plus 1, ce que l'on voit en écrivant $2^{2m} = 4^m = (3 + 1)^m$ et en développant $(3 + 1)^m$ par la formule du binôme; et une puissance de 2 dont l'exposant est impair, est un multiple de 3, plus 2. Les puissances de α qui se trouvent dans les deux facteurs considérés, valent donc respectivement α, α^2 et α^2, α.

Il résulte de ce qui précède que le produit donné est égal à 4^n ou 2^{2n}.

417. *Si* $x = \cos\theta + i\sin\theta$, *ramener à la forme trigonométrique les nombres* $x^2 - 1$ *et* $x^2 + 1$.

1° On a
$$x^2 - 1 = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 - 1 = (\cos 2\theta - 1) + i\sin 2\theta$$
$$= -2\sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta.$$
a) Si $\sin\theta > 0$, on écrira
$$x^2 - 1 = 2\sin\theta[\sin(-\theta) + i\cos\theta]$$
$$= 2\sin\theta\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right].$$
Le module est $2\sin\theta$; l'argument est $\frac{\pi}{2} + \theta$.

b) Si $\sin\theta < 0$, on écrira
$$x^2 - 1 = (-2\sin\theta)(\sin\theta - i\cos\theta)$$
$$= (-2\sin\theta)\left[\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right].$$
Le module est $-2\sin\theta$; l'argument est $\theta - \frac{\pi}{2}$.

c) Si $\sin\theta = 0$, on a
$$\theta = k\pi;\quad x = \pm 1;\quad x^2 - 1 = 0.$$

2° On a
$$x^2 + 1 = (1 + \cos 2\theta) + i\sin 2\theta = 2\cos^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta.$$

a) Si $\cos\theta > 0$, on écrira
$$x^2 + 1 = 2\cos\theta(\cos\theta + i\sin\theta).$$
Le module est $2\cos\theta$; l'argument est θ.

b) Si $\cos\theta < 0$, on écrira
$$x^2 + 1 = (-2\cos\theta)(-\cos\theta - i\sin\theta)$$
$$= (-2\cos\theta)[\cos(\theta + \pi) + i\sin(\theta + \pi)].$$
Le module est $-2\cos\theta$; l'argument est $\theta + \pi$.

c) Si $\cos\theta = 0$, on a
$$\theta = (2k + 1)\frac{\pi}{2};\quad x = \pm i;\quad x^2 + 1 = 0.$$

418. *Résoudre l'équation* $(x + yi)^3 = 1$, x *et* y *étant réels.*

Cette équation peut s'écrire
$$(x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)i = 1;$$
ou encore, $\quad x^3 - 3xy^2 = 1;\quad 3x^2y - y^3 = 0.$

Ces deux dernières équations forment un système en x et y. Il se dédouble en deux autres.

a) Le système $y = 0$, $x^3 - 3xy^2 = 1$ donne
$$x = 1;\quad y = 0.$$

b) Le système $3x^2 - y^2 = 0$, $x^3 - 3xy^2 = 1$ donne
$$x = -\frac{1}{2};\quad y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Remarque. — On aboutit aux mêmes résultats en égalant $x + yi$ successivement aux trois racines cubiques de l'unité, qui sont 1, $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

419. *Former une équation du troisième degré en* x *dont les racines sont*
$$a + b + c,\quad a + bk + ck^2,\quad a + ck + bk^2,$$
k *étant une racine cubique complexe de l'unité.*

En désignant les racines de l'équation à former par α, β, γ, cette équation est, par exemple, $\quad (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = 0,$
ou $\quad x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma = 0.$

On trouve ensuite
$$\alpha + \beta + \gamma = 3a + b(1 + k + k^2) + c(1 + k + k^2) = 3a.$$
$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3a^2 - 3bc.$$
$$\alpha\beta\gamma = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

L'équation cherchée est donc
$$x^3 - 3ax^2 + (3a^2 - 3bc)x - a^3 - b^3 - c^3 + 3abc = 0.$$

420. *Quelle relation doit exister entre* a, p *et* q, *pour que* a + bi *soit une racine de l'équation* $x^3 + px + q = 0$, a, b, p *et* q *étant des nombres réels.*

En remplaçant x par $a + bi$, il vient

$$a^3 - 3ab^2 + ap + q + (3a^2b - b^3 + bp)i = 0.$$

Cette égalité se décompose en deux autres :

$$a^3 - 3ab^2 + ap + q = 0; \qquad (1)$$
$$b(3a^2 - b^2 + p) = 0. \qquad (2)$$

a) Si $b = 0$, (1) donne $a^3 + ap + q = 0$.

b) Si $b \neq 0$, on a $b^2 = 3a^2 + p$ et (1) devient, en remplaçant,

$$8a^3 + 2ap - q = 0.$$

421. *Calculer les racines carrées des expressions suivantes, sachant que* a, b, c *et* d *sont réels et que* d *est positif.*

1° $4ab + 2(a^2 - b^2)i$.

L'équation

$$4ab + 2(a^2 - b^2)i = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

donne le système

$$x^2 - y^2 = 4ab; \quad xy = a^2 - b^2. \qquad (1)$$

a) Si $a^2 \neq b^2$, x et y sont différents de zéro. L'élimination de y donne l'équation $x^4 - 4abx^2 - (a^2 - b^2)^2 = 0$.

Les racines réelles de cette équation sont $\pm (a + b)$. Les deux racines carrées cherchées sont donc

$$\pm [(a + b) + (a - b)i].$$

b) Si $a^2 = b^2$, le système (1) devient

$$x^2 - y^2 = 4ab; \quad xy = 0.$$

Si a et b sont de mêmes signes, on a $x = \pm 2a$, $y = 0$;
Si a et b ont des signes contraires, on a $x = 0$, $y = \pm 2a$;
Si $a = b = 0$, il vient $x = y = 0$.

2° $a^2c - b^2cd + 2abci\sqrt{d}$.

On est conduit au système

$$x^2 - y^2 = a^2c - b^2cd; \quad xy = abc\sqrt{d}.$$

a) Si $abc \neq 0$, x et y sont différents de zéro. L'élimination de y donne l'équation

$$x^4 - (a^2c - b^2cd)x^2 - a^2b^2c^2d = 0.$$

Les racines de la résolvante de cette équation bicarrée sont a^2c et $-b^2cd$.

Si $c > 0$, les deux racines carrées cherchées sont

$$\pm \left(a\sqrt{c} + bi\sqrt{cd}\right).$$

Si $c < 0$, les deux racines carrées cherchées sont

$$\pm \left(b\sqrt{-cd} - ai\sqrt{-c}\right).$$

b) Si $abc = 0$, parmi les lettres a, b, c, il y en a une ou plusieurs qui sont nulles. L'expression proposée se réduit à $a^2c - b^2cd$; elle est positive, nulle ou négative. Dans le premier cas, elle a deux racines carrées réelles; dans le second cas, sa racine carrée est zéro; dans le troisième cas, elle a deux racines carrées imaginaires.

422. *Déterminer tous les systèmes de valeurs réelles de* x *et de* y *pour lesquelles l'expression* $(x + yi)^3$ *est réelle et supérieure à* 8. — *Interprétation graphique* (*E. M. Armes spéciales*, 1902).

On a $$(x + yi)^3 = x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i.$$

Pour que $(x + yi)^3$ soit réel et supérieur à 8, on doit avoir
$$3x^2y - y^3 = 0 \quad \text{et} \quad x^3 - 3xy^2 > 8.$$

L'équation $3x^2y - y^3 = 0$ se décompose en deux autres
$$y = 0 \quad \text{et} \quad 3x^2 - y^2 = 0.$$

a) Si $y = 0$, l'inéquation $x^3 - 3xy^2 > 8$ devient
$$x^3 > 8 \quad \text{ou} \quad x > 2.$$

b) Si $3x^2 - y^2 = 0$ ou $y = \pm x\sqrt{3}$, l'inéquation devient
$$-8x^3 > 8 \quad \text{ou} \quad x < -1.$$

Les valeurs de x et de y qui répondent à la question, sont les coordonnées des points de la droite $y = 0$ situés dans la région positive de la droite $x - 2 = 0$; ou encore, les coordonnées des points des droites $y = \pm x\sqrt{3}$, qui sont situés dans la région négative de la droite $x + 1 = 0$. Ces points forment donc trois demi-droites que l'on peut construire aisément.

423. *Sachant que* 41 *est une somme de deux carrés, trouver des entiers* A *et* B, *tels que l'on ait* $A^2 + B^2 = 41^6$. (*E. M. Armes spéciales*, 1924).

Les égalités
$$41 = 16 + 25 = (4 + 5i)(4 - 5i) = (5 + 4i)(5 - 4i)$$
donnent $$41^6 = (4 + 5i)^6 (4 - 5i)^6 = (5 + 4i)^6 (5 - 4i)^6.$$

En posant $$41^6 = A^2 + B^2 = (A + Bi)(A - Bi),$$
on pourra prendre
$$A + Bi = (4 \pm 5i)^6 \quad \text{ou} \quad A + Bi = (5 \pm 4i)^6.$$

En développant les seconds membres de ces égalités par la formule du binôme, il vient
$$A = \pm 42\,471, \quad B = \pm 54\,280,$$
les doubles signes étant indépendants l'un de l'autre.

424. *Valeurs de* m *pour que* $(x + y)^m - x^m - y^m$ *s'annule pour* $x = \alpha y$, α *étant une racine cubique complexe de l'unité* (x *et* y *sont différents de zéro*).

En remplaçant x par αy, l'expression devient
$$E = [(1 + \alpha)^m - \alpha^m - 1]y^m.$$

Cette expression est nulle, quel que soit y, si
$$(1 + \alpha)^m - \alpha^m - 1 = 0,$$
ou encore, si
$$E = (-\alpha^2)^m - \alpha^m - 1 = 0,$$
car l'égalité $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$ donne $1 + \alpha = -\alpha^2$.

a) Si m est impair, on a
$$E = -\alpha^{2m} - \alpha^m - 1.$$
Si m est un multiple de 3, on a $E = -3 \neq 0$.

Si m n'est pas un multiple de trois, on a $\alpha^m \neq 1$ et on peut écrire
$$E = \frac{-(\alpha^{3m} - 1)}{\alpha^m - 1}$$
et cette expression est nulle, car $\alpha^{3m} = 1$.

b) Si m est pair, on a
$$E = \alpha^{2m} - \alpha^m - 1.$$
En posant successivement $m = 3k$, $m = 3k + 1$, $m = 3k + 2$, on trouve pour E les valeurs
$$-1, \quad \alpha^2 - \alpha - 1 = 2\alpha^2, \quad -\alpha^2 + \alpha - 1 = 2\alpha,$$
qui ne sont pas nulles.

En résumé, m doit être impair, mais non multiple de 3.

425. *On considère l'équation* $z^2 - 2pz + 1 = 0$, *dans laquelle*
$$p = \sin \varphi + i \cos \varphi.$$

1° *Montrer, sans calculer les racines* z' *et* z'' *de l'équation, que leurs modules sont inverses et que la somme de leurs arguments est un multiple de* 2π.

En posant
$$z' = r'(\cos \alpha' + i \sin \alpha'), \quad z'' = r''(\cos \alpha'' + i \sin \alpha''),$$
on trouve
$$z'z'' = r'r''[\cos (\alpha' + \alpha'') + i \sin (\alpha' + \alpha'')] = 1.$$
De cette égalité, on déduit
$$r'r'' = 1; \quad \alpha' + \alpha'' = 2k\pi,$$
k étant un entier réel.

2° *Trouver les valeurs de l'angle* φ *pour lesquelles les racines* z' *et* z'' *sont réelles, ou sont de la forme* ai, *a étant réel.*

a) Si les racines sont réelles, leur somme
$$2p = 2(\sin \varphi + i \cos \varphi)$$
est aussi réelle; on doit donc avoir
$$\cos \varphi = 0 \quad \text{ou} \quad \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}. \tag{1}$$
Réciproquement, si $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}$, p est égal à ± 1 et l'équation devient $z^2 \pm 2z + 1 = 0$. Ses racines sont réelles.

La relation (1) exprime donc la condition nécessaire et suffisante pour que les racines soient réelles.

b) Si les racines sont de la forme ai, leur somme $2p$ est de la même forme; on doit donc avoir

$$\sin\varphi = 0 \quad \text{ou} \quad \varphi = k\pi.$$

Réciproquement, si $\varphi = k\pi$, p est égal à $\pm i$ et l'équation proposée devient $z^2 \pm 2iz + 1 = 0$. Les racines de ces équations sont

$$\pm i(1 \pm \sqrt{2}).$$

Donc pour que les racines soient imaginaires, il faut et il suffit que φ soit un multiple de π.

3° *Calculer le module et l'argument des nombres* z' — p *et* z'' — p.

L'équation donnée peut s'écrire $(z - p)^2 = p^2 - 1$ et ceci montre que les valeurs de $z' - p$, $z'' - p$ sont les racines carrées du nombre $p^2 - 1$. Calculons le module r et l'argument θ de $p^2 - 1$; les racines carrées de $p^2 - 1$ auront pour module commun $\sqrt{r}$ et pour arguments $\dfrac{\theta}{2}$ et $\dfrac{\theta}{2} + \pi$ (*Compléments*, **105**).

Nous avons

$$p^2 - 1 = (\sin\varphi + i\cos\varphi)^2 - 1 = -2\cos^2\varphi + 2i\sin\varphi\cos\varphi.$$

a) Si $\cos\varphi > 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned} p^2 - 1 &= 2\cos\varphi(-\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= 2\cos\varphi[\cos(\pi - \varphi) + i\sin(\pi - \varphi)]. \end{aligned}$$

Le module de $p^2 - 1$ est $2\cos\varphi$ et son argument, $\pi - \varphi$; par suite, les modules des racines carrées de $p^2 - 1$ sont égaux à $\sqrt{2\cos\varphi}$ et leurs arguments sont $\dfrac{\pi - \varphi}{2}$ et $\dfrac{\pi - \varphi}{2} + \pi$.

b) Si $\cos\varphi < 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned} p^2 - 1 &= -2\cos\varphi(\cos\varphi - i\sin\varphi) \\ &= -2\cos\varphi[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)]. \end{aligned}$$

On en déduit que les modules des racines carrées de $p^2 - 1$ sont égaux à $\sqrt{-2\cos\varphi}$ et que leurs arguments sont $-\dfrac{\varphi}{2}$ et $-\dfrac{\varphi}{2} + \pi$.

4° cos φ *étant négatif, montrer que les nombres* z' + i *et* z'' + i *ont le même module et que les nombres* z' — i *et* z'' — i *ont le même argument.*

Résolvons l'équation $z^2 - 2pz + 1 = 0$. Son réalisant est $p^2 - 1$ et l'une des racines carrées de $p^2 - 1$ est $\sqrt{-2\cos}\left(\cos\dfrac{\varphi}{2} - i\sin\dfrac{\varphi}{2}\right)$, car $\cos\varphi < 0$. Les racines z' et z'' sont donc données par es expressions

$$z = \sin\varphi + i\cos\varphi \pm \sqrt{-2\cos\varphi}\left(\cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

a) $z' + i$ et $z'' + i$ sont les valeurs des expressions

$$z + i = \sin\varphi + i\cos\varphi + i \pm \sqrt{-2\cos\varphi}\left(\cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

ou, en remplaçant $\sin\varphi + i(\cos\varphi + 1)$ par

$$2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + 2i\cos^2\frac{\varphi}{2} = 2i\cos\frac{\varphi}{2}\cos\left(\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$z + i = \left(\cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2}\right)\left[\pm\sqrt{-2\cos\varphi} + 2i\cos\frac{\varphi}{2}\right].$$

Le module de ces deux expressions est

$$1 \times \sqrt{-2\cos\varphi + 4\cos^2\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{2}.$$

Donc $z' + i$ et $z'' + i$ ont le même module.

b) $z' - i$ et $z'' - i$ sont les valeurs des expressions

$$z - i = \sin\varphi + i\cos\varphi - i \pm \sqrt{-2\cos\varphi}\cos\left(\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

Or, on a

$$\sin\varphi + i(\cos\varphi - 1) = 2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

Par suite, on a

$$z - i = \left(\cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2}\right)\left(2\sin\frac{\varphi}{2} \pm \sqrt{-2\cos\varphi}\right)$$

$$= \left(2\sin\frac{\varphi}{2} \pm \sqrt{-2\cos\varphi}\right)\left[\cos\left(-\frac{\varphi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\varphi}{2}\right)\right].$$

Or, $\cos\varphi$ étant négatif, on peut supposer $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$, et, par suite, $\frac{\pi}{4} < \frac{\varphi}{2} < \frac{3\pi}{4}$; donc $\sin\frac{\varphi}{2}$ est positif. D'autre part, $2\sin\frac{\varphi}{2}$ est supérieur à $\sqrt{-2\cos\varphi}$, car $-2\cos\varphi = 4\sin^2\frac{\varphi}{2} - 2$.

Il en résulte que les expressions $2\sin\frac{\varphi}{2} \pm \sqrt{-2\cos\varphi}$ sont des nombres positifs; ce sont donc les modules des nombres $z - i$.

On en conclut que les nombres $z' - i$ et $z'' - i$ ont le même argument $-\frac{\varphi}{2}$.

Remarque. — Si $\cos\varphi > 0$, on peut montrer d'une façon analogue que les modules des nombres $z' + i$ et $z'' + i$ sont $2\cos\frac{\varphi}{2} \pm \sqrt{2\cos\varphi}$ et qu'ils ont pour argument $\frac{\pi - \varphi}{2}$; on montre également que les nombres $z' - i$ et $z'' - i$ ont le même module $\sqrt{2}$.

426. *Calculer* $\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$ *et* $\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$ *en fonction des sinus et des cosinus des angles* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

On a

$$\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$$
$$= (\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2) \ldots (\cos\alpha_4 + i\sin\alpha_4).$$

Le second membre peut s'écrire

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3\cos\alpha_4 + i\,\Sigma\sin\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3\cos\alpha_4$$
$$-\,\Sigma\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_3\cos\alpha_4 - i\,\Sigma\sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3\cos\alpha_4$$
$$+\sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3\sin\alpha_4.$$

Comme ce nombre complexe est égal à

$$\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4),$$

on a, en égalant les parties réelles et les coefficients de i,

$$\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = \cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3\cos\alpha_4$$
$$-\,\Sigma\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_3\cos\alpha_4 + \sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3\sin\alpha_4$$
$$\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = \Sigma\sin\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3\cos\alpha_4$$
$$-\,\Sigma\sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3\cos\alpha_4.$$

427. *Montrer que la somme des racines cinquièmes de l'unité est nulle. Montrer aussi que la somme des puissances* p*es de ces racines est égale à* 5 *quand* p *est un multiple de* 5 *et qu'elle est nulle quand* p *n'est pas un multiple de* 5.

1° Les racines cinquièmes de l'unité sont

1; $\alpha = \cos 72° + i\sin 72°$; $\alpha^2 = \cos 144° + i\sin 144°$; etc.

En désignant leur somme par S, on trouve

$$S = 1 + 2\cos 72° + 2\cos 144° = 1 + 4\cos 108°\cos 36° = 1 - 4\sin 18°\cos 36°.$$

On obtient $\sin 18°$ et $\cos 36°$, en prenant la mesure, en fonction du rayon, du demi-côté du décagone convexe régulier et de l'apothème du pentagone convexe régulier, inscrits dans un cercle. On a

$$\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}; \quad \cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

et $$S = 1 - 4 \times \frac{\sqrt{5}-1}{4} \times \frac{\sqrt{5}+1}{4} = 0.$$

2° Pour calculer la somme des puissances p^{es} des racines, on peut distinguer cinq cas :

Si $p = 5k$, on a $1 + \alpha^{5k} + \alpha^{10k} + \alpha^{15k} + \alpha^{20k} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$.

Si $p = 5k + 1$, on a

$$1 + \alpha^{5k+1} + \alpha^{10k+2} + \alpha^{15k+3} + \alpha^{20k+4} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0; \text{ etc.}$$

428. *Étant donnée l'équation* $x^m = 1$, *démontrer les propositions suivantes :*

1° *A toute racine de cette équation en correspond une autre, conjuguée de la première.*

L'expression générale des racines m^{es} de l'unité positive est

$$\cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}.$$

Aux nombres entiers p et $-p$ correspondent les racines

$$\cos\frac{2p\pi}{m} + i\sin\frac{2p\pi}{m}$$

et
$$\cos\frac{-2p\pi}{m} + i\sin\frac{-2p\pi}{m} = \cos\frac{2p\pi}{m} - i\sin\frac{2p\pi}{m},$$

qui sont deux nombres complexes conjugués.

2° *Le produit ou le quotient de deux racines est aussi une racine.*

Le produit et le quotient des racines qui correspondent à $k = p$ et $k = p'$ sont

$$\left(\cos\frac{2p\pi}{m} + i\sin\frac{2p\pi}{m}\right)\left(\cos\frac{2p'\pi}{m} + i\sin\frac{2p'\pi}{m}\right) = \cos\frac{2(p+p')\pi}{m} + i\sin\frac{2(p+p')\pi}{m};$$

$$\frac{\cos\frac{2p\pi}{m} + i\sin\frac{2p\pi}{m}}{\cos\frac{2p'\pi}{m} + i\sin\frac{2p'\pi}{m}} = \cos\frac{2(p-p')\pi}{m} + i\sin\frac{2(p-p')\pi}{m}.$$

On voit que ce sont aussi des racines m^{es} de l'unité positive.

3° *Toute puissance d'une racine est aussi une racine.*

On a, par exemple,

$$\left(\cos\frac{2p\pi}{m} + i\sin\frac{2p\pi}{m}\right)^n = \cos\frac{2np\pi}{m} + i\sin\frac{2np\pi}{m}.$$

4° *Si le nombre entier* p *est premier avec* m, *les puissances de la racine* $\cos\frac{2p\pi}{m} + i\sin\frac{2p\pi}{m}$ *reproduisent toutes les autres racines.*

On vient de voir que les puissances de $\cos\frac{2p\pi}{m} + i\sin\frac{2p\pi}{m}$ sont des racines. Les arguments des m premières puissances sont

$$\frac{p}{m}\times 2\pi;\quad \frac{2p}{m}\times 2\pi;\quad \frac{3p}{m}\times 3\pi;\quad \ldots;\frac{mp}{m}\times 2\pi.$$

Les restes des divisions $\frac{p}{m}, \frac{2p}{m}, \ldots, \frac{mp}{m}$

sont des entiers inférieurs à m. De plus, ils sont tous différents, car si on avait $hp = mq + r,\quad h'p = mq' + r,$
on aurait aussi $(h - h')p = (q - q')m$
et m, qui est premier avec p, devrait diviser $h - h'$; ce qui est impossible, car m est supérieur en valeur absolue à $h - h'$.

Les restes de ces divisions sont donc, à l'ordre près,

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad \dots,\quad m-1.$$

On en déduit que les puissances en question valent, à l'ordre près,

$$1;\quad \cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m};\quad \cos\frac{2.2\pi}{m} + i\sin\frac{2.2\pi}{m};$$

$$\dots;\ \cos\frac{(m-1)\pi}{m} + i\sin\frac{(m-1)\pi}{m}.$$

DEUXIÈME SÉRIE

POLYNOMES, DÉTERMINANTS, ÉQUATIONS.

429. *Condition pour que* $a \quad + a^{m-1} + \dots + a + 1$ *soit divisible par* $a^n + a^{n-1} + \dots + a + 1$.

En multipliant le dividende et le diviseur par $a - 1$, ils deviennent $a^{m+1} - 1$ et $a^{n+1} - 1$. Il faut et il suffit donc que $m + 1$ soit un multiple de $n + 1$ (133).

430. *Calculer les coefficients du trinôme* $ax^4 + bx^3 + c$, *sachant que le produit des restes obtenus en le divisant successivement par* $x^2 + 1$ *et* $x^3 + 1$ *est* $2x^2 - 12x + 10$.

Ces restes sont (132)

$$-bx + a + c \quad \text{et} \quad -ax - b + c.$$

Le produit $(bx - a - c)(ax + b - c)$ est donc identique au trinôme $2x^2 - 12x + 10 = 2(x-1)(x-5)$. Pour cela, il faut et il suffit que les coefficients de x^2 soient égaux et que les deux trinômes aient les mêmes racines; ce qui donne

$$ab = 2;\quad \frac{a+c}{b} = 5;\quad \frac{c-b}{a} = 1; \tag{1}$$

ou bien,

$$ab = 2;\quad \frac{a+c}{b} = 1;\quad \frac{c-b}{a} = 5. \tag{2}$$

Le système (1) admet les deux solutions

$$a = 2,\quad b = 1,\quad c = 3;\quad a = -2,\quad b = -1,\quad c = -3.$$

Le système (2) est impossible.

431. *Déterminer* k *pour que* $a^4 + b^4 + c^4 + k(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$ *soit divisible par* $a + b + c$. *Trouver ensuite d'autres facteurs sans nouveaux calculs.*

En faisant $a = -b - c$, on doit avoir

$$(b + c)^4 + b^4 + c^4 + k[(b + c)^2(b^2 + c^2) + b^2c^2] = 0;$$

d'où $k = -2$. Le polynôme

$$P(a) \equiv a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

est donc le polynôme cherché. Comme il ne renferme que des puissances paires de a, on aura

$$P(-b - c) = P(b + c) = 0$$

et il est divisible également par $a - b - c$.

Seulement $P(a)$ est homogène et symétrique en a, b et c; étant divisible par $a - b - c$, il est donc divisible aussi par $b - a - c$ et par $c - a - b$.

REMARQUE. — On a

$P(a) = (a + b + c)(a - b - c)(-a + b - c)(-a - b + c)$, car les deux membres sont du 4^e degré en a et les coefficients de a^4 sont égaux à 1.

432. *Dans l'équation* $x^4 - 8x^3 + mx^2 - 8x - 3 = 0$, *déterminer* m, *sachant que la somme de deux racines est égale à la somme des deux autres, puis résoudre l'équation.*

Désignons le premier membre de l'équation par $f(x)$ et soient x_1, x_2, x_3, x_4 ses racines. On a l'identité

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$$

Cette identité donne le système

$$\begin{aligned}&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8.\\&x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = m\\&x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 8.\\&x_1x_2x_3x_4 = -3.\end{aligned}$$

Dans les trois premières équations, mettons en évidence les sommes $x_1 + x_2$ et $x_3 + x_4$, qui sont égales, par l'hypothèse; il vient

$$\begin{aligned}&2(x_1 + x_2) = 2(x_3 + x_4) = 8\\&(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_1x_2 + x_3x_4 = m\\&x_1x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4(x_1 + x_2) = 8.\end{aligned}$$

De là, on tire d'abord

$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 4$; $x_1x_2 + x_3x_4 = m - 16$; $4(x_1x_2 + x_3x_4) = 8$;
puis $x_1x_2 + x_3x_4 = 2$; $m = 18$.

Les produits x_1x_2 et x_3x_4, ayant pour somme 2 et pour produit -3, sont les racines de l'équation $z^2 - 2z - 3 = 0$; par suite,

$$x_1x_2 = 3, \; x_3x_4 = -1.$$

Comme $x_1 + x_2 = 4$, $x_3 + x_4 = 4$, x_1 et x_2 sont les racines de $x^2 - 4x + 3 = 0$; et x_3, x_4 sont celles de $x^2 - 4x - 1 = 0$. Donc,

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 3; \quad x_3 = 2 - \sqrt{5}; \quad x_4 = 2 + \sqrt{5}.$$

433. *Décomposer en facteurs les expressions suivantes :*

1° $a(b - c)^3 + b(c - a)^3 + c(a - b)^3$.

Cette expression est un polynôme du 3^e degré en a; il est divisible par $a - b$ et $a - c$; le coefficient du 1^{er} terme est $c - b$. En désignant le polynôme par $P(a)$, nous pourrons écrire

$$P(a) = (c - b)(a - b)(a - c)(a - x).$$

Égalons les termes indépendants de a. Il vient

$$bc^3 - b^3c = - bcx(c - b) \quad \text{ou} \quad x = -(b + c).$$

Rép. $(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)$.

2° $a^4(b^2 - c^2) + b^4(c^2 - a^2) + c^4(a^2 - b^2)$.

Cette expression peut être considérée comme un polynôme du second degré en a^2. Le coefficient du premier terme de ce polynôme est $b^2 - c^2$ et il est divisible par $a^2 - b^2$ et $a^2 - c^2$.

Rép. $(b^2 - c^2)(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)$.

3° $a(b^4 - c^4) + b(c^4 - a^4) + c(a^4 - b^4)$.

Cette expression est divisible par $a - b$, $a - c$, $b - c$; donc aussi par $(a - b)(a - c)(b - c)$. Ce diviseur est homogène et du 3^e degré en a, b, c; l'expression proposée est homogène et du 5^e degré en a, b, c; mais tous deux changent de signe quand on permute deux des lettres a, b, c. Il en résulte que le quotient est homogène, symétrique et du second degré en a, b, c. En désignant l'expression proposée par E, nous pourrons écrire

$$E = (a - b)(a - c)(b - c)[m(a^2 + b^2 + c^2) + n(ab + bc + ca)],$$

m et n étant des constantes indépendantes de a, b, c.

En faisant successivement $a = 0$, $b = 1$, $c = -1$ et $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$ dans l'égalité précédente, on obtient le système

$$2 = -2(2m - n), \quad 14 = -2(5m + 2n)$$

qui donne $m = n = -1$.

Rép. $(a - b)(b - c)(c - a)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)$.

4° $(bc + ca + ab)^3 - b^3c^3 - c^3a^3 - a^3b^3$.

L'expression $(A + B + C)^3 - A^3 - B^3 - C^3$ est un polynôme du second degré en A. Le coefficient de A^2 est $3(B + C)$ et le polynôme est divisible par $A + B$ et $A + C$. On a donc

$$(A + B + C)^3 - A^3 - B^3 - C^3 = 3(A + B)(B + C)(C + A).$$

Faisons $A = bc$, $B = ca$, $C = ab$ et il vient :

Rép. $3abc(a + b)(b + c)(c + a)$.

5° $(x - a)^3(b - c)^3 + (x - b)^3(c - a)^3 + (x - c)^3(a - b)^3$.

L'expression est un polynôme du 3^e degré en x. Le coefficient de x^3 est

$$(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3.$$

Le polynôme est divisible par $x - a$, $x - b$, $x - c$ et en le désignant par $P(x)$, on a

$$P(x) = [(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3] (x - a) (x - b) (x - c).$$

La quantité entre crochets est un polynôme du second degré en a. Le coefficient de a^2 est $3(c - b)$. L'expression est divisible par $a - b$ et $a - c$. Elle vaut donc

$$3(c - b) (a - b) (a - c).$$

Rép. $3(a - b) (b - c) (c - a) (x - a) (x - b) (x - c)$.

6° $(a + b + c)^3 - (b + c - a)^3 - (c + a - b)^3 - (a + b - c)^3$.

L'expression s'annule pour $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$. Elle est donc divisible par abc.

D'autre part, l'expression est symétrique en a, b et c, car elle ne change pas quand on permute deux de ces lettres. Le diviseur abc est également symétrique en a, b, c.

L'expression donnée et le diviseur étant homogènes, symétriques et du 3e degré par rapport à a, b, c, le quotient est homogène, symétrique et de degré zéro par rapport à ces lettres. C'est donc une constante A et on peut poser

$$(a + b + c)^3 - (b + c - a)^3 - (c + a - b)^3 - (a + b - c)^3 = A\,abc.$$

Faisons $a = b = c = 1$ dans cette identité et il vient $A = 24$.

Rép. $24abc$.

7° $(a + b + c)^5 - (b + c - a)^5 - (c + a - b)^5 - (a + b - c)^5$.

Comme dans l'exercice précédent, l'expression est divisible par abc et on montrerait que le quotient doit être homogène, symétrique et de degré 2 par rapport à a, b, c. Le quotient sera donc de la forme

$$m(a^2 + b^2 + c^2) + n(ab + bc + ca).$$

Désignons l'expression proposée par E. On aura

$$E = abc[m(a^2 + b^2 + c^2) + n(ab + bc + ca)].$$

En faisant successivement $a = b = c = 1$ et $a = -1, b = c = 1$, on obtient le système

$$m + n = 80; \quad 3m - n = 240.$$

Celui-ci donne $m = 80$; $n = 0$.

Rép. $80abc(a^2 + b^2 + c^2)$.

434. *Décomposer en facteurs l'expression*

$$(x + y)^7 - x^7 - y^7.$$

Montrer ensuite que l'égalité $a + b + c = 0$ *entraîne*

$$6(a^7 + b^7 + c^7) = 7(a^3 + b^3 + c^3) (a^4 + b^4 + c^4).$$

1° Posons $A = (x + y)^7 - x^7 - y^7$. On a

$$A = (x + y) [(x + y)^6 - x^6 + x^5y - x^4y^2 + x^3y^3 - x^2y^4 + xy^5 - y^6],$$

ou encore, après avoir développé $(x + y)^6$ par la formule du binôme,

$$A = 7xy(x + y) (x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4).$$

En remplaçant $3x^2y^2$ par $x^2y^2 + 2x^2y^2$, on voit aisément que le dernier facteur du produit précédent peut s'écrire $(x^2 + xy + y^2)^2$. On trouve ainsi

$$A = 7xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)^2.$$

2° Si $a + b + c = 0$, on a

$$a^7 + b^7 + c^7 = a^7 + b^7 - (a + b)^7 = -7ab(a + b)(a^2 + ab + b^2)^2;$$

et $$a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 - (a + b)^3 = -3ab(a + b).$$

En remplaçant $a^7 + b^7 + c^7$ et $a^3 + b^3 + c^3$ par leur valeur dans l'égalité à vérifier, celle-ci se réduit, après simplification, à la suivante

$$2(a^2 + ab + b^2)^2 = a^4 + b^4 + (a + b)^4,$$

qu'on vérifiera aisément.

435. *Vérifier les identités suivantes :*

1° $(a^2 - 1)(b^2 - 1)(c^2 - 1) + (a + bc)(b + ca)(c + ab)$
$$\equiv (abc + 1)(a^2 + b^2 + c^2 + 2abc - 1).$$

Les deux membres peuvent être considérés comme des polynômes en a. Ils sont du troisième degré par rapport à cette lettre et le coefficient de a^3 est chaque fois bc.

Or, on peut vérifier aisément que ces polynômes sont égaux, quels que soient b et c, pour trois valeurs distinctes de a; par exemple, pour $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$. Donc ils sont identiques.

2° $\Sigma(a + b)^3 - 3(a + b)(b + c)(c + a) \equiv 2(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$.

L'identité à vérifier peut s'écrire

$$\Sigma(a + b)^3 - 2(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) = 3(a + b)(b + c)(c + a).$$

Le premier membre est un polynôme du second degré en a; il s'annule pour $a = -b$ et $a = -c$; le coefficient de a^2 est $3(b + c)$. Donc le premier membre est identique au second.

3° $\Sigma(b - c)^3(b + c - 2a) \equiv 0$.

Le premier membre peut être considéré comme un polynôme du 4^e degré en a. On peut vérifier aisément qu'il s'annule pour

$$a = b, \quad a = c, \quad a = \frac{b + c}{2}, \quad a = 2b - c, \quad a = 2c - b.$$

Si l'on suppose $b \neq c$, ces cinq valeurs de x sont distinctes; donc le polynôme est identiquement nul dans ce cas.

On vérifie aisément qu'il se réduit aussi à zéro, quand on suppose $b = c$.

4° $abc(a + b + c)^3 - (ab + bc + ca)^3 \equiv abc\Sigma a^3 - \Sigma a^3b^3$.

Cette identité peut s'écrire

$$abc[(a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3)]$$
$$= (ab + bc + ca)^3 - (a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3).$$

L'expression $(a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3)$ est homogène, symétrique et du troisième degré en a, b et c; elle s'annule pour $a = -b$, $a = -c$, $b = -c$.

On peut donc poser

$$(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = k(a + b)(b + c)(c + a),$$

k étant une constante qui ne dépend pas de a, b, c. En faisant ensuite $a = b = c = 1$, on trouve $k = 3$. Le premier membre vaut donc

$$3abc(a + b)(b + c)(c + a).$$

On montrerait d'une manière analogue que le second membre peut être mis sous la même forme.

5° $(\Sigma a^2)^3 + 2(\Sigma ab)^3 - 3\Sigma a^2(\Sigma ab)^2 \equiv (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)^2$.

On a

$$2(\Sigma ab)^3 - 3\Sigma a^2(\Sigma ab)^2 = (\Sigma ab)^2 (2\Sigma ab - 3\Sigma a^2)$$
$$= (\Sigma ab)^2 [(a + b + c)^2 - 4(a^2 + b^2 + c^2)];$$

et $$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(\Sigma a^2 - \Sigma ab).$$

En remplaçant dans l'identité, il vient

$$(\Sigma a^2)^3 - 4(\Sigma ab)^2\Sigma a^2 = (\Sigma a)^2 [(\Sigma a^2 - \Sigma ab)^2 - (\Sigma ab)^2]. \qquad (1)$$

L'expression entre crochets peut s'écrire

$$(\Sigma a^2)^2 - 2\Sigma ab \times \Sigma a^2 = \Sigma a^2(\Sigma a^2 - 2\Sigma ab).$$

En remplaçant dans (1) et en divisant les deux membres par Σa^2, il reste à montrer qu'on a

$$(\Sigma a^2)^2 - (2\Sigma ab)^2 = (a + b + c)^2 [\Sigma a^2 - 2\Sigma ab].$$

Le premier membre est une différence de deux carrés. Il est donc égal à un produit de deux facteurs, qui sont

$$\Sigma a^2 + 2\Sigma ab = (a + b + c)^2 \quad \text{et} \quad \Sigma a^2 - 2\Sigma ab.$$

6° $(a + b)^2 (b + c)^2 (c + a)^2 \equiv \Sigma a^4(b + c)^2 + 2(\Sigma ab)^3 - 2a^2b^2c^2$.

On a

$$(a + b)(b + c)(c + a) = \Sigma a^2(b + c) + 2abc$$

et par suite,

$$(a + b)(b + c)(c + a) - 4abc = \Sigma a^2(b + c) - 2abc.$$

Multiplier ces égalités membre à membre, soustraire membre à membre le résultat de l'identité proposée, puis simplifier par 2. Il reste à montrer que l'on a

$$2abc(a + b)(b + c)(c + a) = (\Sigma ab)^3 + a^2b^2c^2 - \Sigma a^2b^2(c + a)(c + b).$$

Le second membre est un polynôme homogène, symétrique et du sixième degré par rapport à a, b et c. Il s'annule pour $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, $a = -b$, $a = -c$, $b = -c$. On peut donc poser

$$(\Sigma ab)^3 + a^2b^2c^2 - \Sigma a^2b^2(c + a)(c + b) = kabc(a + b)(b + c)(c + a),$$

k étant une constante indépendante de a, b, c. En faisant $a = b = c = 1$, on trouve $k = 2$. L'identité est donc démontrée.

436. *Simplifier les expressions suivantes :*

1° $$\frac{x + a}{a(a - b)(a - c)} + \frac{x + b}{b(b - c)(b - a)} + \frac{x + c}{c(c - a)(c - b)}.$$

Après simplification, cette expression se réduit à un binôme du premier degré en x. Posons

$$\frac{x+a}{a(a-b)(a-c)}+\frac{x+b}{b(b-c)(b-a)}+\frac{x+c}{c(c-a)(c-b)}=\mathrm{A}x+\mathrm{B}.$$

Faisons successivement $x=-a$ et $x=-b$. On obtient le système

$$-\mathrm{A}a+\mathrm{B}=-\frac{1}{bc};\quad -\mathrm{A}b+\mathrm{B}=-\frac{1}{ac}.$$

D'où $\mathrm{A}=\frac{1}{abc}$, $\mathrm{B}=0$ et l'expression proposée se réduit à $\frac{x}{abc}$.

2° $\dfrac{[(x+1)^7-x^7-1]\,[(x+1)^3-x^3-1]}{[(x+1)^5-x^5-1]^2}$.

On a démontré (434) que

$$(x+1)^7-x^7-1=7x(x+1)(x^2+x+1)^2.$$

On peut montrer également que

$$(x+1)^5-x^5-1=5x(x+1)(x^2+x+1);$$
$$(x+1)^3-x^3-1=3x(x+1).$$

En remplaçant et en simplifiant, l'expression proposée se réduit à $\frac{21}{25}$.

437. *Condition pour que* x^4+1 *soit divisible par* $\mathrm{x}^2+\mathrm{px}+\mathrm{q}$.

L'identité $x^4+1\equiv(x^2+px+q)(x^2+ax+b)$ donne le système

$$a+p=0;\quad ap+q+b=0;\quad bp+aq=0;\quad bq=1.$$

La 1re équation donne $a=-p$ et la dernière, $b=\frac{1}{q}$. En remplaçant dans la 2e et la 3e, on trouve

$$-p^2+q+\frac{1}{q}=0\quad\text{et}\quad\frac{p(1-q^2)}{q}=0.$$

Cette dernière équation exige $p=0$, ou $q=-1$, ou $q=1$.

Mais on ne peut pas prendre $p=a=0$, car cela donnerait

$$q+b=0,\quad bq=1;$$

ce qui est impossible, car deux nombres opposés ne peuvent avoir un produit égal à 1. L'hypothèse $q=-1$ doit être rejetée aussi, car elle donne $-p^2-1-1=0$, ce qui est impossible. Il reste donc $q=1$. De là on tire

$$b=1;\quad p=\pm\sqrt{2};\quad a=\mp\sqrt{2}.$$

D'où $$x^4+1=(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1).$$

438. *Démontrer que le polynôme entier*

$$\mathrm{f(x)}=\mathrm{n^2x^n(x-1)^2+(x^n-1)(x+1)-2nx^n(x-1)}$$

est divisible par $(\mathrm{x}-1)^3$.

Le polynôme $f(x)$ est divisible par $x - 1$, car il s'annule pour $x = 1$. Le quotient est

$$\begin{aligned} Q(x) &= n^2x^n(x-1) - 2nx^n + (x+1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) \\ &= n^2x^n(x-1) - [(2n-1)x^n - 2x^{n-1} - \dots - 2x - 1]. \end{aligned}$$

Le polynôme $Q(x)$ est encore divisible par $x - 1$, car il s'annule pour $x = 1$. Le quotient est

$$Q_1(x) = n^2x^n - [(2n-1)x^{n-1} + (2n-3)x^{n-2} + \dots + 5x^2 + 3x + 1].$$

Le polynôme $Q_1(x)$ s'annule pour $x = 1$, car on a

$$Q_1(1) = n^2 - [(2n-1) + (2n-3) + \dots + 5 + 3 + 1] = 0.$$

Il est donc divisible par $x - 1$. Le quotient est

$$Q_2(x) = n^2x^{n-1} + (n-1)^2x^{n-2} + \dots + 9x^2 + 4x + 1.$$

Il résulte de ce qui précède que $f(x)$ est divisible par $(x-1)^3$ et que le quotient est $Q_2(x)$.

Remarque. — On peut utiliser les propriétés des dérivées. Les deux premières dérivées de $f(x)$ sont

$$\begin{aligned} f'(x) = n^3x^{n-1}(x-1)^2 &+ 2n^2x^n(x-1) + nx^{n-1}(x+1) \\ &+ (x^n - 1) - 2n^2x^{n-1}(x-1) - 2nx^n, \end{aligned}$$

ou, en réunissant le 2e et le 5e, puis le 3e et le 6e terme du second membre,

$$f'(x) = n^3x^{n-1}(x-1)^2 + 2n^2x^{n-1}(x-1)^2 - nx^{n-1}(x-1) + (x^n - 1);$$

$$\begin{aligned} f''(x) = n^3(n-1)x^{n-2}(x-1)^2 &+ 2n^3x^{n-1}(x-1) + 2n^2(n-1)x^{n-2}(x-1)^2 \\ &+ 4n^2x^{n-1}(x-1) - n(n-1)x^{n-2}(x-1). \end{aligned}$$

Elles s'annulent comme $f(x)$ pour $x = 1$. Donc $f(x)$ est divisible par $(x-1)^3$.

439. *Trouver un polynôme du quatrième degré, connaissant sa dérivée seconde* $ax^2 + bx + c$ *et sachant qu'il est divisible par cette dérivée seconde.*

Soit $P(x) \equiv Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$ le polynôme cherché. En identifiant sa dérivée seconde $12Ax^2 + 6Bx + 2C$ avec $ax^2 + bx + c$, on trouve

$$A = \frac{a}{12}; \quad B = \frac{b}{6}; \quad C = \frac{c}{2}.$$

Soit ensuite $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ le quotient de la division de $P(x)$ par $ax^2 + bx + c$. L'identité

$$P(x) \equiv (ax^2 + bx + c)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$$

donne le système

$$\begin{gathered} A = a\alpha; \quad B = b\alpha + a\beta; \quad C = c\alpha + b\beta + a\gamma; \\ D = c\beta + b\gamma; \quad E = c\gamma. \end{gathered}$$

Les trois premières équations donnent

$$\alpha = \frac{1}{12}; \quad \beta = \frac{b}{12a}; \quad \gamma = \frac{5ac - b^2}{12a^2}.$$

Les deux dernières équations donnent alors

$$D = \frac{b(6ac - b^2)}{12a^2}; \quad E = \frac{c(5ac - b^2)}{12a^2}.$$

440. *Le polynôme* $(a + b + c)^5 - a^5 - b^5 - c^5$ *est divisible par le polynôme* $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$. *Trouver le quotient.*

On montre aisément que le premier polynôme est divisible par le produit $(a + b)(b + c)(c + a)$ et que le second est égal à

$$3(a + b)(b + c)(c + a).$$

La division est donc possible. Les deux polynômes sont homogènes et symétriques par rapport aux lettres a, b, c. Le quotient sera homogène, symétrique et du second degré par rapport aux mêmes lettres. Il est donc de la forme

$$m(a^2 + b^2 + c^2) + n(ab + bc + ca)$$

et on a, en désignant le premier polynôme par P,

$$P \equiv 3(a + b)(b + c)(c + a)[m(a^2 + b^2 + c^2) + n(ab + bc + ca)].$$

En faisant successivement $a = b = c = 1$ et $a = 0$, $b = c = 1$, on trouve

$$3m + 3n = 10; \quad 2m + n = 5.$$

Ce système donne $m = n = \frac{5}{3}$. Le quotient est donc

$$\frac{5}{3}(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca).$$

441. *Condition pour que* $x^{2n} + px^n + q$ *soit divisible par* $x^2 + x + 1$.

Il faut et il suffit que

$$(x^{2n} + px^n + q)(x - 1) = x^{2n+1} - x^{2n} + px^{n+1} - px^n + qx - q \quad (1)$$

soit divisible par $x^3 - 1$ et le quotient de ces deux dernières expressions est égal au quotient cherché.

a) Si $n = 3m$, (1) devient

$$x^{6m+1} - x^{6m} + px^{3m+1} - px^{3m} + qx - q,$$

et en y faisant $x^3 = 1$, on trouve

$$(x - 1)(1 + p + q).$$

Cette expression est identiquement nulle si $1 + p + q = 0$; c'est la condition cherchée.

En remplaçant n par $3m$ et p par $-1 - q$, le polynôme $x^{2n} + px^n + q$ devient

$$x^{6m} - (q + 1)x^{3m} + q = (x^{3m} - q)(x^{3m} - 1)$$

et le quotient est

$$(x^{3m} - p)(x^{3m-3} + x^{3m-6} + \ldots + x^3 + 1)(x - 1).$$

b) Si $n = 3m + 1$, (1) devient

$$x^{6m+3} - x^{6m+2} + px^{3m+2} - px^{3m+1} + qx - q, \qquad (2)$$

et en y faisant $x^3 = 1$, on trouve

$$x^2(p - 1) + x(q - p) + 1 - q.$$

Cette expression est identiquement nulle, si $p = q = 1$; (2) devient alors

$$x^{6m+3} - x^{6m+2} + x^{3m+2} - x^{3m+1} + x - 1$$

ou

$$(x^{6m+3} - 1) - x^{3m+2}(x^{3m} - 1) - x(x^{3m} - 1).$$

Le quotient est donc

$$(x^{6m} + x^{6m-3} + \dots + 1) - (x^{3m+2} + x)(x^{3m-3} + x^{3m-6} + \dots + 1).$$

c) Si $n = 3m + 2$, (1) devient

$$x^{6m+5} - x^{6m+4} + px^{3m+3} - px^{3m+2} + qx - q, \qquad (3)$$

et en y faisant $x^3 = 1$, on trouve encore $p = q = 1$. (3) devient alors

$$x^{3m+2}(x^{3m+3} - 1) - x(x^{6m+3} - 1) + (x^{3m+3} - 1).$$

Le quotient est donc

$$(x^{3m+2} + 1)(x^{3m} + x^{3m-3} + \dots + 1) - x(x^{6m} + x^{6m-3} + \dots + 1).$$

442. *Montrer que* $x^{20p+4} + x^{15p+3} + x^{10p+2} + x^{5p+1} + 1$ *est divisible par* $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ *et trouver le quotient.*

Désignons le dividende par A et le diviseur par B. On aura

$$A - B = x^4(x^{20p} - 1) + x^3(x^{15p} - 1) + x^2(x^{10p} - 1) + x(x^{5p} - 1).$$

Chacune des parenthèses du second membre est divisible par $x^{5p} - 1$, et on peut écrire

$$A - B = (x^{5p} - 1)P,$$

en désignant par le P le polynôme

$$x^4(x^{15p} + x^{10p} + x^{5p} + 1) + x^3(x^{10p} + x^{5p} + 1) + x^2(x^{5p} + 1) + x.$$

Mais on a aussi

$$x^{5p} - 1 = (x^5 - 1)(x^{5p-5} + x^{5p-10} + \dots\dots + 1)$$

et

$$x^5 - 1 = (x - 1)B.$$

Par suite,

$$A - B = B(x - 1)(x^{5p-5} + x^{5p-10} + \dots + 1)P.$$

A est donc divisible par B et le quotient est

$$1 + (x - 1)(x^{5p-5} + x^{5p-10} + \dots + 1)P.$$

443. *Si* m *est un multiple impair de* 3, *le polynôme*

$$(x + y)^m - x^m - y^m - 3(x + y)(xy)^{\frac{m-1}{2}}$$

est divisible par $x^2 + xy + y^2$.

Le diviseur peut s'écrire $(x - \alpha y)(x - \alpha' y)$, α et α' étant les racines cubiques complexes de l'unité. Il suffit donc de montrer que le polynôme est divisible par $x - \alpha y$ et par $x - \alpha' y$.

En remplaçant x dans le polynôme par αy, on trouve

$$R = y^m\left[(1+\alpha)^m - \alpha^m - 1 - 3\left(\alpha^{\frac{m-1}{2}} + \alpha^{\frac{m+}{2}}\right)\right]. \qquad (1)$$

L'égalité $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$ donne $1 + \alpha = -\alpha^2$; $(1 + \alpha)^m$ vaut donc $(-\alpha^2)^m$. Mais m est un multiple impair de 3; par suite, on a $\alpha^m = 1$ et $(-\alpha^2)^m = -\alpha^{2m} = -1$.

En posant ensuite $m = 3(2n + 1)$, il vient

$$\alpha^{\frac{m-1}{2}} + \alpha^{\frac{m+1}{2}} = \alpha^{3n+1} + \alpha^{3n+2} = \alpha^{3n}(\alpha + \alpha^2) = -1.$$

Remplaçons dans (1). On trouve $R = 0$. Le polynôme est donc divisible par $x - \alpha y$; on montrerait d'une façon analogue qu'il est divisible par $x - \alpha' y$.

444. *Calculer les coefficients de* x^{n-2} *et* x^{n-3} *dans le produit*

$$(x+1)(x+2)\dots(x+n).$$

I. Dans le développement du produit, chaque puissance x^{n-2} a pour coefficient le produit de deux des n premiers nombres $1, 2, 3, \dots, n$.

Le premier coefficient cherché a donc pour expression

$$A = \Sigma ab,$$

les nombres a et b formant une combinaison simple quelconque des n premiers nombres entiers, pris 2 à 2. Or on a

$$(\Sigma a)^2 = \Sigma a^2 + 2\Sigma ab.$$

Il en résulte que

$$A = \frac{1}{2}\left[(\Sigma a)^2 - \Sigma a^2\right] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

ou

$$A = \frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2).$$

II. De même, chaque puissance x^{n-3} a pour coefficient le produit de trois des n premiers nombres entiers. Le second coefficient cherché a donc pour expression

$$B = \Sigma abc,$$

les nombres a, b, c formant une combinaison simple quelconque des n premiers nombres entiers, pris 3 à 3.

Si on effectue, sans réduction, le produit des deux sommes Σab et Σa, le produit effectué contient deux sortes de termes. Il contient d'abord tous les nombres de la forme a^2b. Ensuite, il contient trois fois chaque nombre abc; le nombre 1.2.3, par exemple, s'y trouve sous les formes 1.2.3, 1.3.2, 2.3.1. On peut donc écrire

$$\Sigma ab\, \Sigma a = 3\Sigma abc + \Sigma a^2 b \quad \text{ou} \quad A\Sigma a = 3B + \Sigma a^2 b. \qquad (1)$$

On peut remarquer encore qu'en effectuant, sans réduction, le produit des deux sommes Σa^2 et Σa, le produit effectué est la somme de tous les nombres de la forme a^2b et de tous les nombres de la forme a^3. Par suite,

$$\Sigma a^2\, \Sigma a = \Sigma a^2 b + \Sigma a^3.$$

En tenant compte de cette relation, l'égalité (1) donne

$$3B = A\Sigma a - \Sigma a^2\, \Sigma a + \Sigma a^3. \qquad (2)$$

Or, on a

$$a = \frac{n(n+1)}{2}; \quad \Sigma a^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad \Sigma a^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

En remplaçant dans (2), on trouve finalement

$$B = \frac{1}{48}(n-2)(n-1)n^2(n+1)^2.$$

445. *La somme des carrés des* n *premiers nombres entiers est une expression de la forme* $an^3 + bn^2 + cn$. *Déterminer* a, b *et* c.

Quel que soit l'entier positif n, on a

$$an^3 + bn^2 + cn = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2. \qquad (1)$$

La relation (1) doit encore avoir lieu quand on remplace n par $n+1$; par suite,

$$a(n+1)^3 + b(n+1)^2 + c(n+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2. \qquad (2)$$

Retranchons membre à membre (1) de (2); il vient

$$a(3n^2 + 3n + 1) + b(2n+1) + c = (n+1)^2,$$

ou $\quad (3a-1)n^2 + (3a + 2b - 2)n + a + b + c - 1 = 0.$

Le polynôme 1er membre étant nul, quel que soit l'entier positif n, on a le système

$$3a - 1 = 0; \quad 3a + 2b - 2 = 0; \quad a + b + c - 1 = 0.$$

Ce système donne

$$a = \frac{1}{3}; \quad b = \frac{1}{2}; \quad c = \frac{1}{6}.$$

La somme des carrés des n premiers nombres entiers est donc

$$S = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

446. *Étant donnés les nombres constants* a, b, c, p, q *et* r, *on considère la suite dont le terme de rang* n *est*

$$u_n = ap^n + bq^n + cr^n. \qquad (1)$$

Montrer que l'on peut déterminer trois nombres constants x, y *et* z, *tels que l'on ait pour toutes les valeurs de* n,

$$u_{n+1} = xu_n + yu_{n-1} + zu_{n-2} \qquad (2)$$

Dans (2) remplaçons u_{n+1}, u_n, u_{n-1}, u_{n-2} par leurs expressions en fonction de a, b, c, p, q et r; puis groupons les termes en p, q et r. On obtient ainsi l'égalité

$$ap^{n-2}(p^3 - xp^2 - yp - z) + bq^{n-2}(q^3 - xq^2 - yq - z) + cr^{n-2}(r^3 - xr^2 - yr - z) = 0.$$

Pour que cette égalité ait lieu pour toutes les valeurs entières de n, il suffit qu'elle ait lieu, quels que soient p^{n-2}, q^{n-2} et r^{n-2}; par conséquent, il suffit que les coefficients de ces nombres soient nuls. On obtient ainsi un système de trois équations en x, y et z,

$$\begin{aligned} p^2x + py + z &= p^3 \\ q^2x + qy + z &= q^3 \\ r^2x + ry + z &= r^3. \end{aligned}$$

En résolvant ce système par la méthode d'élimination ou par les déterminants, on trouve (si les nombres p, q et r sont différents)

$$x = p + q + r; \quad y = -(pq + qr + rp); \quad z = pqr.$$

REMARQUE. — Le système précédent peut être résolu par une méthode remarquable.

Si les trois équations admettent une solution $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$, cela prouve que p, q et r sont les racines de l'équation du troisième degré

$$f(X) = X^3 - x'X^2 - y'X - z' = 0.$$

Le polynôme $f(X)$ est donc identique au produit

$$(X - p)(X - q)(X - r),$$

ce qui donne, en égalant les coefficients des mêmes puissances de X,

$$x' = p + q + r; \quad y' = -(pq + qr + rp); \quad z' = pqr.$$

447. *Trouver le quotient de* $x^{2n} - 2x^n + 1$ *par* $x^2 - 2x + 1$; *calculer le coefficient de* x^p *dans ce quotient. Le quotient étant ordonné par rapport aux puissances décroissantes de* x, *calculer la somme des coefficients de rang pair et la somme des coefficients de rang impair.*

1° On voit immédiatement qu'on a

$$\frac{x^{2n} - 2x^n + 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x^n - 1)^2}{(x - 1)^2} = (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)^2.$$

2° En effectuant et en ordonnant le carré, on trouve

$$x^{2n-2} + 2x^{2n-3} + 3x^{2n-4} + \dots + nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \dots + 3x^2 + 2x + 1.$$

Ce développement montre que deux termes équidistants des extrêmes ont même coefficient, de sorte que le coefficient de x^p, égal à celui de $x^{2(n-1)-p}$, est

$$p + 1 \quad \text{si} \quad p \leqslant n - 1$$

ou

$$2n - (p + 1) \quad \text{si} \quad p > n - 1.$$

3° La suite formée par les $2n - 1$ coefficients du développement est

$$1, 2, 3, \dots, n - 1, n, n - 1, \dots, 3, 2, 1.$$

Si n est impair, la somme des coefficients de rang pair est

$$2[2 + 4 + \dots + (n - 1)] = \frac{n^2 - 1}{2};$$

et celle des coefficients de rang impair,

$$2[1 + 3 + \dots + (n - 2)] + n = \frac{n^2 + 1}{2}.$$

Si n est pair, la somme des coefficients de rang pair est

$$2[2 + 4 + \ldots + (n - 2)] + n = \frac{n^2}{2};$$

et celle des coefficients de rang impair,

$$2[1 + 3 + \ldots (n - 1)] = \frac{n^2}{2}.$$

REMARQUE. — Désignons par $Q(x)$ le quotient, par S la somme des coefficients de rang impair et par S′ la somme des coefficients de rang pair. Considérons ensuite l'identité

$$Q(x) \equiv (x^{n-1} + \ldots + x + 1)^2 \equiv x^{2n-2} + 2x^{2n-3} + \ldots + 2x + 1.$$

On a $$Q(1) = n^2 = S + S'.$$

En faisant ensuite $x = -1$, on trouve $S - S' = 1$ ou $S - S' = 0$, suivant que n est impair ou pair. Par suite,

$$\text{si } n \text{ est pair, } S = S' = \frac{n^2}{2};$$

$$\text{si } n \text{ est impair, } S = \frac{n^2+1}{2},\ S' = \frac{n^2-1}{2}.$$

448. *Démontrer les formules suivantes :*

$$1^o\ C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \ldots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

En multipliant les deux membres par $n + 1$, l'égalité à démontrer devient

$$(n+1)C_n^0 + \frac{n+1}{2}C_n^1 + \frac{n+1}{3}C_n^2 + \ldots + \frac{n+1}{n+1}C_n^n = 2^{n+1} - 1.$$

Mais, $$\frac{n+1}{p+1}C_n^p = C_{n+1}^{p+1}.$$

L'égalité à démontrer peut donc s'écrire

$$C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 + \ldots + C_{n+1}^{n+1} = 2^{n+1} - 1,$$

ce qui est une formule connue.

$$2^o\ C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 - \frac{1}{4}C_n^3 + \ldots + \frac{(-1)^n}{n+1}C_n^n = \frac{1}{n+1}.$$

On raisonne comme pour l'exercice précédent.

$$3^o\ \frac{1}{2}C_n^1 - \frac{2}{3}C_n^2 + \frac{3}{4}C_n^3 - \frac{4}{5}C_n^4 + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}C_n^n = \frac{1}{n+1}.$$

Le premier membre est égal à la différence entre

$$C_n^1 - C_n^2 + C_n^3 - C_n^4 + \ldots + (-1)^{n-1}C_n^n$$

et $$\frac{1}{2}C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^2 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n+1}C_n^n.$$

Il est donc égal à (2°)

$$1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}.$$

4° $\frac{1}{n}C_n^1 - \frac{2}{n-1}C_n^2 + \frac{3}{n-2}C_n^3 - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{n}{1}C_n^n = (-1)^{n+1}$.

Le terme général est en valeur absolue

$$\frac{p}{n-p+1}C_n^p = C_n^{p-1}.$$

Le premier membre vaut donc

$C_n^0 - C^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1} = -(-1)^n C_n^n = (-1)^{n+1}$.

5° $C_n^1 - 2^2C_n^2 + 3^2C_n^3 - 4^2C_n^4 + \ldots + (-1)^{n-1}n^2C_n^n = 0$.

Le 1er membre de cette égalité peut être décomposé en une somme de n termes de la forme $\sum_{p=q}^{p=n}(-1)^{p-1}pC_n^p$, q étant pris successivement égal à 1, 2, 3, ..., n. Soient $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, les termes de cette somme. On a :

$A_1 = 0$ (195, 4°)
$A_2 = A_1 - C^1 = -n$
$A_3 = A_2 + 2C_n^2 = n(n-2) = nC_{n-2}^1$
$A_4 = A_3 - 3C_n^3 = -nC_{n-2}^2$
....
$A_{n-1} = A_{n-2} + (-1)^{n-2}(n-2)C_n^{n-2} = (-1)^{n-2}nC_{n-2}^{n-3}$
$A_n = A_{n-1} + (-1)^{n-1}(n-1)C_n^{n-1} = (-1)^{n-1}nC_{n-2}^{n-2}$.

En additionnant ces égalités membre à membre, on voit que le 1er membre de l'égalité proposée est égal à

$-n(C_{n-2}^0 - C_{n-2}^1 + C_{n-2}^2 - C_{n-2}^3 + \ldots + (-1)^{n-2}C_{n-2}^{n-2})$,

c'est-à-dire, à zéro.

6° $\frac{1}{n+1}C^1 - \frac{2}{n}C_n^2 + \frac{3}{n-1}C_n^3 - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{n}{2}C_n^n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$.

Le terme général du premier membre est en valeur absolue

$$\frac{p}{n-p+2}C_n^p = \frac{n-p+1}{p-1}C_n^{p-2} = \left[\frac{n}{p-1} - 1\right]C_n^{p-2}.$$

Le premier membre S de la formule à démontrer vaut donc

$$\frac{n}{n+1} - \left(\frac{n}{1} - 1\right)C_n^0 + \left(\frac{n}{2} - 1\right)C_n^1 - \ldots + (-1)^{n-1}\left(\frac{n}{n-1} - 1\right)C_n^{n-2}$$
$$= \frac{n}{n+1} - n\left(C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 - \ldots + (-1)^{n-2}\frac{1}{n-1}C_n^{n-2}\right)$$
$$+ [C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^{n-2}C_n^{n-2}]. \qquad (1)$$

La première expression entre parenthèses est égale à (2°)

$$\frac{1}{n+1} - \frac{(-1)^{n-1}}{n}C_n^{n-1} - \frac{(-1)^n}{n+1}C_n^n;$$

la formule $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^nC_n^n = 0$ donne aussi

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^{n-2}C_n^{n-2}$$
$$= -(-1)^{n-1}C_n^{n-1} - (-1)^nC_n^n.$$

En remplaçant dans l'expression (1), on trouve

$$S = (-1)^n \frac{n}{n+1} - (-1)^n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}.$$

449. *Démontrer les formules suivantes par la méthode de récurrence.*

1° $P_n = (n-1)P_{n-1} + (n-2)P_{n-2} + \dots + 2P_2 + P_1 + 1.$

a) Cette formule est vraie pour $n = 2$, car on a $P_2 = P_1 + 1 = 2$.

b) Si elle est vraie pour $n = p$, elle le sera aussi pour $n = p + 1$, car on a, en tenant compte de l'hypothèse,

$$pP_p + (p-1)P_{p-1} + \dots + 2P_2 + P_1 + 1 = pP_p + P_p = P_{p+1}.$$

c) La formule est donc générale.

2° $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^r C_n^r = \dfrac{(-1)^r(n-1)!}{r!(n-r-1)!}.$

Le second membre de cette formule vaut $(-1)^r C_{n-1}^r$.

a) La formule est vraie pour $r = 1$, car on a

$$C_n^0 - C^n = 1 - n = (-1)C_{n-1}^1.$$

b) Si la formule est vraie pour $r = p$, elle l'est aussi pour $r = p + 1$.

En effet, en tenant compte de l'hypothèse, on a

$$\begin{aligned}
C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^p C_n^p + (-1)^{p+1} C_n^{p+1} \\
&= (-1)^p C_{n-1}^p + (-1)^{p+1} C_n^{p+1} \\
&= (-1)^p \frac{p+1}{n-p-1} C_{n-1}^{p+1} + (-1)^{p+1} \frac{n}{n-p-1} C_{n-1}^{p+1} \\
&= (-1)^{p+1} \left(-\frac{p+1}{n-p-1} + \frac{n}{n-p-1}\right) C_{n-1}^{p+1} \\
&= (-1)^{p+1} C_{n-1}^{p+1}.
\end{aligned}$$

c) La formule est donc générale.

3° $2^{n-1} - 2^{n-3}C_{n-2}^1 + 2^{n-5}C_{n-3}^2 - 2^{n-7}C_{n-4}^3 + \dots = n.$

Cette formule se vérifie immédiatement pour $n = 1$, $n = 2$. Supposons qu'elle soit vraie pour n et $n + 1$, puis démontrons qu'elle subsiste encore pour $n + 2$.

1er cas : n est pair et égal à $2p$. — On a

$$\begin{aligned}
n &= 2^{n-1} - 2^{n-3}C_{n-2}^1 + 2^{n-5}C_{n-3}^2 - \dots + (-1)^{p-1} 2C_{n-p}^{p-1}; \\
2(n+1) &= 2^{n+1} - 2^{n-1}C_{n-1}^1 + 2^{n-3}C_{n-2}^2 \\
&\quad - 2^{n-5}C_{n-3}^3 + \dots + (-1)^p\, 2C_{n-p}^p.
\end{aligned}$$

Retranchons la 1re de ces égalités de la seconde. Il vient

$$\begin{aligned}
n + 2 = 2^{n+1} - 2^{n-1}(C_{n-1}^1 + 1) + 2^{n-3}(C_{n-2}^2 + C_{n-2}^1) \\
- 2^{n-5}(C_{n-3}^3 + C_{n-3}^2) + \dots + (-1)^{p-1} 2^3 (C_{n+1-p}^{p-1} + C_{n+1-p}^{p-2}) \\
+ (-1)^p\, 2(C_{n-p}^p + C_{n-p}^{p-1})
\end{aligned}$$

La 1^re parenthèse vaut $n = C_n^1$; les autres se simplifient par la relation $C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1}$, et on a

$$n + 2 = 2^{n+1} - 2^{n-1}C_n^1 + 2^{n-3}C_{n-1} - 2^{n-5}C_{n-2}^3 + \dots$$
$$+ (-1)^{p-1}2^{\sigma}\, C_{n+2-p}^{p-1} + (-1)^p 2C_{n-p+1}^p,$$

ce qui est la formule proposée pour $n + 2$.

2^e cas : n est impair et égal à $2p + 1$. — On a

$$n = 2^{n-1} - 2^{n-3}C_{n-2} + 2^{n-5}C_{n-3}^2 - \dots + (-1)_n 2^0 C_{n-p-1}^p;$$
$$2(n + 1) = 2^{n+1} - 2^{n-1}C_{n-1}^1 + 2^{n-3}C_{n-2} - 2^{n-5}C_{n-3}$$
$$+ \dots + (-1)^{p-1}2^0\, C_{n-p-1}^{p+1}.$$

En continuant comme ci-dessus, on trouve

$$n + 2 = 2^{n+1} - 2^{n-1}C_n^1 + 2^{n-3}C_{n-1}^2 - 2^{n-5}C_{n-2}^3$$
$$+ \dots + (-1)^{p-1}2^2C_{n-p+1}^p + (-1)^p 2^0 C_{n-\alpha}^{+}.$$

450. *Démontrer la formule*

$$\sum_{p=1}^{p=n} (3^{p-1} + 3^{p-2} + \dots + 3 + 1)C_n^p = 2^{n-1}(2^n - 1).$$

Le terme général vaut

$$(3^{p-1} + 3^{p-2} + \dots + 3 + 1)C_n^p = \frac{3^p - 1}{2}C_n^p.$$

Faisons successivement $p = 1, 2, 3, \dots, n$. On trouve :

pour $p = 1$ $\qquad \frac{3}{2}C_n^1 - \frac{1}{2}C_n^1;$

pour $p = 2$ $\qquad \frac{3^2}{2}C_n^2 - \frac{1}{2}C_n^2;$

....

pour $p = n$ $\qquad \frac{3^n}{2}C_n^n - \frac{1}{2}C_n^n.$

En additionnant membre à membre, il vient

$$S = \frac{1}{2}[3C_n^1 + 3^2C_n^2 + \dots + 3^nC_n^n] - \frac{1}{2}[C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n]$$
$$= \frac{1}{2}[(1 + 3)^n - 1] - \frac{1}{2}[(1 + 1)^n - 1] = \frac{2^{2n}}{2} - \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}(2^n - 1).$$

451. *Démontrer que l'on a identiquement :*

$$1^\circ\ 1 + \frac{x}{1} + \frac{x(x + 1)}{2!} + \dots + \frac{x(x + 1) \dots (x + n - 1)}{n!}$$
$$= \frac{(x + 1)(x + 2) \dots (x + n)}{n!}.$$

On vérifie aisément que l'identité est vraie pour $n = 2$. De plus, si on suppose que l'identité est vraie pour une valeur donnée de n, elle l'est encore pour $n + 1$; car, si l'on ajoute $\dfrac{x(x+1)\ldots(x+n)}{(n+1)!}$ aux deux membres de l'identité proposée, le second membre devient

$$\frac{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}{n!} + \frac{x(x+1)\ldots(x+n)}{(n+1)!} = \frac{(x+1)(x+2)\ldots(x+n+1)}{(n+1)!}.$$

AUTRE MÉTHODE. — On peut remarquer aussi que les deux membres de l'identité à démontrer sont des polynômes entiers en x du n^e degré, que le coefficient de x^n est chaque fois $\dfrac{1}{n!}$ et que les deux membres prennent des valeurs numériques égales, quand on attribue successivement à x les n valeurs $0, -1, -2, \ldots, -(n-1)$.

$$2^\circ \quad \frac{C_n^1}{x+1} - \frac{2C_n^2}{x+2} + \frac{3C_n^3}{x+3} - \ldots = \frac{n!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}.$$

Faisons disparaître les dénominateurs et réunissons tous les termes dans le premier membre. L'identité à démontrer devient

$$C_n^1(x+2)\ldots(x+n) - 2C_n^2(x+1)(x+3)\ldots(x+n) + \ldots$$
$$+ (-1)^{p-1}pC_n^p(x+1)\ldots[x+(p-1)][x+(p+1)]\ldots(x+n)$$
$$+ \ldots - n! = 0.$$

Le premier membre est un polynôme entier en x du $(n-1)^e$ degré. Il s'annule quand on y remplace x par l'un des n nombres $-1, -2, -3, \ldots, -n$. En faisant, par exemple, $x = -p$, on trouve

$$(-1)^{p-1}pC_n^p(-p+1)\ldots[-p+(p-1)][-p+(p+1)]\ldots(-p+n)-n!$$
$$= (-1)^{2p-2}pC_n^p(p-1)(p-2)\ldots 2.1 \times 1.2.3\ldots(n-p) - n!$$
$$= A_n^p \times (n-p)! - n! = n! - n! = 0.$$

Le polynôme est donc identiquement nul et l'identité est démontrée.

REMARQUE. — De cette dernière identité, on peut déduire diverses relations entre les coefficients binômiaux. En faisant successivement $x = 0$, $1, 2$, puis $x = -(n+1)$, on trouve, par exemple :

$$C_n^1 - C_n^2 + C_n^3 - C_n^4 + \ldots = 1;$$

$$\frac{1}{2}C_n^1 - \frac{2}{3}C_n^2 + \frac{3}{4}C_n^3 - \frac{4}{5}C_n^4 + \ldots = \frac{1}{n+1};$$

$$\frac{1}{3}C_n^1 - \frac{2}{4}C_n^2 + \frac{3}{5}C_n^3 - \frac{4}{6}C_n^4 + \ldots = \frac{2}{(n+1)(n+2)};$$

$$\frac{1}{n}C_n^1 - \frac{2}{n-1}C_n^2 + \frac{3}{n-2}C_n^3 - \frac{4}{n-3}C_n^4 + \ldots = (-1)^{n-1}.$$

452. *Si* p *est un nombre premier, l'expression* C_{p-1}^{q} *est égale à un multiple de* p, *augmenté de* $(-1)^q$.

En effet, si l'on suppose

$$C_{p-1}^{a} = M.p + (-1)^a,$$

on a
$$C_{p-1}^{a+1} = \frac{p-a-1}{a+1}C_{p-1}^{a} = \frac{p-(a+1)}{a+1}[M.p + (-1)^a]$$
$$= \frac{p}{a+1}[M.p + (-1)^a] - M.p + (-1)^{a+1}.$$

Mais le diviseur $a+1$ est plus petit que le nombre premier p. Donc il est premier avec p et la division de $M.p + (-1)^a$ par $a+1$ se fait exactement. Il en résulte que C_{p-1}^{a+1} est un multiple de p plus $(-1)^{a+1}$.

Ainsi, si le théorème est vrai pour $q = a$, il s'applique pour $q = a+1$. Or, il est vrai pour $q = 1$, car on a

$$C_{p-1}^{1} = p-1.$$

Donc il est général.

453. *Chercher si trois coefficients consécutifs du développement de* $(x+a)^m$ *peuvent être en progression arithmétique.*

En effet, on a :

$$C_m^n = \frac{m-n+1}{n}C_m^{n-1};$$

$$C_m^{n+1} = \frac{m-n}{n+1}C_m^n = \frac{(m-n)(m-n+1)}{n(n+1)}C_m^{n-1}.$$

Par suite, si on suppose que les coefficients

$$C_m^{n-1},\quad C_m^n,\quad C_m^{n+1}$$

sont en progression arithmétique, on aura

$$\frac{2(m-n+1)}{n} = 1 + \frac{(m-n)(m-n+1)}{n(n+1)};$$

ou bien, $4n^2 - 4mn + m^2 - m - 2 = 0$.

Comme m est positif, cette équation en n admet deux racines, qui sont

$$n = \frac{m \pm \sqrt{m+2}}{2}. \tag{1}$$

Mais n doit être entier; de plus, on doit avoir

$$n-1 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad n+1 \leqslant m,$$

ce que l'on peut écrire $1 \leqslant n \leqslant m-1$.

a) Pour que les racines (1) soient entières, il suffit d'avoir $m = k^2 - 2$, k étant un nombre entier (supérieur à 1, puisque m est positif). En effet, on a alors

$$n = \frac{k^2 - 2 \pm k}{2}$$

et on voit aisément que ces deux valeurs de n sont entières.

b) La résolution des inéquations

$$1 \leqslant \frac{k^2 - 2 + k}{2} \leqslant k^2 - 3$$

donne alors $k > 2$, si l'on tient compte de ce que k est un entier poitifs. Les inéquations

$$1 \leqslant \frac{k^2 - 2 - k}{2} \leqslant k^2 - 3$$

conduisent au même résultat.

c) Il en résulte que le problème a deux solutions quand $m = k^2 - 2$, k étant un entier supérieur à 2.

454. *On considère le développement de* $(x + y)^n$, *ordonné suivant les puissances décroissantes de* x; *quatre termes consécutifs sont* 2916, 4860, 4320 *et* 2160. *Calculer* x, y, n, *sachant que ce sont des nombres entiers* (*E. M. Armes spéciales*, 1927).

Si 2916 est le $(p + 1)^e$ terme du développement de $(x + y)^n$, on a

$$C_n^p\, x^{n-p}y^p = 2916 = 2^2.3^6 \tag{1}$$

$$C_n^{p+1}\, x^{n-p-1}y^{p+1} = 4860 = 2^2.3^5.5$$

$$C_n^{p+2}\, x^{n-p-2}y^{p+2} = 4320 = 2^5.3^3.5$$

$$C_n^{p+3}\, x^{n-p-3}y^{p+3} = 2160 = 2^4.3^3.5.$$

En divisant membre à membre chacune de ces égalités par la précédente, on trouve

$$\frac{n-p}{p+1} \times \frac{y}{x} = \frac{5}{3}; \quad \frac{n-p-1}{p+2} \times \frac{y}{x} = \frac{8}{9}; \quad \frac{n-p-2}{p+3} \times \frac{y}{x} = \frac{1}{2}.$$

Divisons membre à membre la 1re égalité par la 2e, puis par la 3e.

On obtient le système

$$\frac{(n-p)(p+2)}{(n-p-1)(p+1)} = \frac{15}{8}; \quad \frac{(n-p)(p+3)}{(n-p-2)(p+1)} = \frac{10}{3}.$$

Ce système donne $n = 6$; $p = 1$.

En remplaçant dans (1), il vient $x^5y = 3^5.2$. Donc

$$x = 3, \quad y = 2 \quad \text{ou} \quad x = -3, \quad y = -2.$$

Les nombres donnés sont les 2e, 3e, 4e, 5e termes du développement de l'un des binômes

$$(3 + 2)^6 \quad \text{et} \quad (-3 - 2)^6.$$

455. *Si* a *et* b *sont deux nombres positifs différents et si* n *est un entier positif, on a* $(a + b)^n < 2^{n-1}(a^n + b^n)$.

En supposant $a > b$, on peut écrire

$$a^n = \left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right)^n \quad \text{et} \quad b^n = \left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right)^n.$$

L'application de la formule du binôme donne

$$a^n = \left(\frac{a+b}{2}\right)^n + C_n^1\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{a-b}{2}\right) + C\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{a-b}{2}\right) + \dots$$

$$b^n = \left(\frac{a+b}{2}\right)^n - C_n^1\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{a-b}{2}\right) + C_n^2\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 - \dots$$

Additionnons ces deux égalités membre à membre. Il vient

$$a^n + b^n = 2\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^n + C_n^2\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \dots\right].$$

Tous les termes des crochets qui suivent le premier sont positifs. Par suite,

$$2\left(\frac{a+b}{2}\right)^n < a^n + b^n \quad \text{ou} \quad (a+b)^n < 2^{n-1}(a^n + b^n).$$

Autre méthode. — La somme des coefficients du développement de $(a+b)^n$ est 2^n. Dans ce développement, remplaçons chaque terme $C_n^p a^{n-p}b^p$ par C_n^p termes $a^{n-p}b^p$, puis groupons les termes symétriques deux à deux; $(a+b)^n$ sera égal à une somme de 2^{n-1} termes de la forme $a^rb^s + a^sb^r$, où $r + s = n$. Il suffit alors de montrer que l'on a

$$a^rb^s + a^sb^r < a^n + b^n \quad \text{ou} \quad a^r(b^s - a_s) < b^r(b^s - a^s).$$

Pour que cette égalité soit vraie, on doit avoir $a^r < b^r$ ou $a^r > b^r$, suivant que a est inférieur ou supérieur à b, ce qui est évident.

456. *Si* $(1 + x + x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n}$ (1)
montrer qu'on a :

1° $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} = 3^n$.

Il suffit de faire $x = 1$.

2° $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_{2n} = 1$.

Il suffit de faire $x = -1$.

3° Les coefficients symétriques du développement sont égaux.

En effet, en remplaçant x par $\frac{1}{x}$, on a

$$\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_{2n}}{x^{2n}};$$

et, en multipliant ensuite les deux membres par x^{2n}, il vient

$$(x^2 + x + 1)^n = a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + \dots + a_{2n-1}x + a_{2n}. \qquad (2)$$

Or les polynômes (1) et (2) sont identiques; donc

$$a_0 = a_{2n}; \quad a_1 = a_{2n-1}; \dots$$

4° $(a_0)^2 - (a_1)^2 + (a_2)^2 - \dots + (-1)^{n-1}(a_{n-1})^2 = \frac{1}{2}a_n[1 - (-1)\ a_n]$.

De l'identité (2), on déduit

$$(x^2 - x + 1)^n = a_0x^{2n} - a_1x^{2n-1} + \dots - a_{2n-1}x + a_{2n}$$

En multipliant membre à membre cette identité et l'identité (1), on voit que le coefficient de x^{2n} dans le développement de $(1 + x^2 + x^4)^n$ est

$$2[(a_0)^2 - (a_1)^2 + \ldots + (-1)^{n-1}(a_{n-1})^2] + (-1)^n(a_n)^2.$$

Mais, en remplaçant x par x^2 dans l'identité (1), on a

$$(1 + x^2 + x^4)^n = a_0 + a_1x^2 + a_2x^4 + \ldots + a_nx^{2n} + \ldots + a_{2n}x^{4n}.$$

On a donc

$$2[(a_0)^2 - (a_1)^2 + \ldots + (-1)^{n-1}(a_{n-1})^2] + (-1)^n(a_n)^2 = a_n,$$

et, de cette égalité, on déduit aisément la formule demandée.

457. *Si* $(1 + x + \ldots + x^p)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{np}x^{np}$, *montrer qu'on a*

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + npa_{np} = \frac{np}{2}(p + 1)^n.$$

La dérivée du premier membre de l'identité donnée est

$$n(1 + x + x^2 + \ldots + x^p)^{n-1}(1 + 2x + 3x^2 + \ldots + px^{p-1}).$$

Celle du second membre est

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots npa_{np}x^{np-1}.$$

En égalant ces deux dérivées et en faisant $x = 1$, on obtient la formule demandée.

458. a) *Trouver le minimum absolu de* $p!\,q!$, *sachant que* $p + q = n$.

Posons $A_{p,q} = p!\,q!$. On peut écrire

$$\frac{A_{p,q}}{A_{p+1,\,q-1}} = \frac{p!\,q!}{(p+1)!\,(q-1)!} = \frac{q}{p+1} = \frac{n-p}{p+1}.$$

1° Si $n = 2k + 1$, le rapport devient

$$\frac{2k+1-p}{p+1}.$$

Il est supérieur à 1 pour $p < k$; égal à 1 pour $p = k$; inférieur à 1 pour $p > k$. Le minimum absolu de $p!\,q!$ est donc dans ce cas $A_{k,\,k+1} = A_{k+1,\,k}$.

2° Si $n = 2k$, le rapport devient

$$\frac{2k-p}{p+1}.$$

Il est supérieur à 1 pour $p < k$ et inférieur à 1 pour $p \geqslant k$. Le minimum absolu est donc dans ce cas $A_{k,k}$.

b) *Trouver le minimum absolu du produit* $z = p!\,q!\,r!\ldots t!$ *de* m *factorielles, sachant que* $p + q + r + \ldots + t = n$.

Tant que la différence $p - q$ n'est pas nulle ou égale à 1 en valeur absolue, on peut diminuer z; la même remarque s'applique à p et r, q et r...; le produit z est donc minimum absolu quand il est de la forme

$$k!\,k!\ldots(k+1)!\,(k+1)!,$$

le nombre des factorielles de ce produit étant m, mais le nombre x des factorielles $k!$ devant encore être déterminé.

Les hypothèses donnent

$$kx + (k + 1)(m - x) = n \quad \text{ou} \quad km + m - x = n. \qquad (1)$$

Soit Q le quotient entier de la division de n par m et R le reste de cette division. L'égalité (1) pourra s'écrire

$$km + m - x = mQ + R \quad \text{ou} \quad k + \frac{m - x}{m} = Q + \frac{R}{m}.$$

Si $R \neq 0$, $\frac{m - x}{m}$ et $\frac{R}{m}$ sont des fractions proprement dites et on a

$$k = Q \quad \text{et} \quad m - x = R.$$

Il en résulte que, dans ce cas, le produit minimum comprend $m - R$ factorielles $Q!$ et R factorielles $(Q + 1)!$

Si $R = 0$, on a $km + m - x = Qm$.

On peut supposer $x = 0$ ou $x = m$. Dans les deux cas, on trouve que le produit minimum comprend m factorielles $Q!$

c) *Trouver le plus grand coefficient du développement de*

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m)^n.$$

Le coefficient du terme général de ce développement est

$$\frac{n!}{p!\, q! \dots t!}.$$

Le numérateur de cette fraction est une constante; la fraction est donc maximum absolu quand son dénominateur est minimum absolu. Or ce dénominateur est un produit de m factorielles et

$$p + q + r + \dots + t = n.$$

La question a donc été résolue au point précédent.

459. *Démontrer le théorème de Fermat en utilisant la formule du binôme, ou encore, en utilisant la formule qui donne la* n*e puissance d'un polynôme.*

Soit a un nombre entier non divisible par le nombre premier n. Il faut démontrer que la différence $a^{n-1} - 1$ est divisible par n.

I. On a l'identité

$$a^n = [1 + (a - 1)]^n = C_n^0 + C_n^1(a - 1) + \dots$$
$$+ C_n^k(a - 1)^k + \dots + C_n^n(a - 1)^n.$$

Or tous les coefficients binômiaux, sauf les deux extrêmes, sont des multiples de n. En effet, le numérateur de

$$C_n^k = \frac{n(n - 1) \dots (n - k + 1)}{k!}$$

renferme le facteur premier n et chaque facteur du dénominateur est inférieur à n. L'identité précédente peut donc s'écrire

$$a^n = 1 + M.n + (a - 1)^n.$$

Dans cette identité, faire successivement a égal à a, $a - 1$, $a - 2$, ..., 3, 2; puis additionner membre à membre les égalités obtenues. Il vient

$$a^n = (a - 1) + \text{M}.n + 1 \quad \text{ou} \quad a(a^{n-1} - 1) = \text{M}.n.$$

Comme n est premier avec le facteur a, on peut donc écrire

$$a^{n-1} - 1 = \text{M}.n.$$

II. La n^e puissance d'un polynôme est donnée par la formule

$$(a_1 + a_2 + ...)^n = \Sigma(a_1)^n + \Sigma\frac{n!}{\alpha!\,\beta!...}(a_1)^\alpha(b_1)^\beta...$$

Tous les coefficients $\dfrac{n!}{\alpha!\,\beta!...}$ sont des multiples de n, car le numérateur renferme le facteur premier n et chaque facteur du dénominateur est inférieur à n. Par suite, en supposant que le polynôme compte a termes, il vient, en faisant $a_1 = a_2 = a_3 = ... = 1$,

$$a^n = a + \text{M}.n \quad \text{ou} \quad a(a^{n-1} - 1) = \text{M}.n;$$

d'où on conclut encore que $a^{n-1} - 1$ est un multiple de n.

460. *Trouver le nombre des permutations des* 2n *premiers nombres dans lesquelles la somme de deux nombres à égale distance des extrêmes est constante.*

Désignons respectivement par G_{2n} et par G_{2n-2} le nombre des permutations des $2n$ et des $2n - 2$ premiers nombres dans lesquelles la somme de deux nombres à égale distance des extrêmes est constante; G_{2n} et G_{2n-2} garderaient la même valeur si, au lieu de considérer les premiers nombres, on considérait des nombres consécutifs quelconques.

La somme de deux nombres, à égale distance des extrêmes, d'une des G_{2n} permutations considérées est $2n + 1$, car la somme de tous les nombres est $(1 + 2n)n$ et il y a n groupes de deux nombres, à somme constante.

Parmi les G_{2n} permutations considérées, il y a N_1 permutations commençant par 1. Leur dernier nombre est $2n$, car la somme constante est $2n + 1$; de plus, en supprimant dans une de ces permutations les nombres 1 et $2n$, il reste une permutation quelconque des nombres 2, 3, ..., $2n - 1$, dans laquelle la somme de deux nombres à égale distance des extrêmes est constante. On a donc $N_1 = G_{2n-2}$.

On passe des N_1 permutations acceptables, commençant par 1, aux N_2 permutations acceptables, commençant par 2, en permutant d'abord les chiffres 1 et 2, puis les nombres $2n$ et $2n - 1$. On a donc $N_1 = N_2$.

On montrerait d'une façon analogue qu'il y a G_{n-2} permutations acceptables commençant par 3, 4, ... On a donc

$$G_{2n} = 2nG_{2n-2}.$$

En faisant $n = 2, 3, ..., n$, on trouve

$$G_4 = 2.2G_2 = 2^2(1.2); \quad G_6 = 2.3G_4; \quad .....; \quad G_{2n} = 2nG_{2n-2}.$$

En multipliant membre à membre, il vient

$$G_{2n} = 2^n.\,n!$$

461. *Parmi les permutations des* n *lettres* a_1, a_2, ..., a_n, *combien y en a-t-il où aucune lettre n'est à sa place naturelle?*

1° Le nombre des permutations de k lettres a_1, a_2, ..., a_k, où h lettres désignées d'avance ($h \leqslant k$), et ces h lettres seulement, occupent leurs places naturelles est égal au nombre des permutations de $k + 1$ lettres a_1, a_2, a_3, ..., a_k, a_{k+1} où les mêmes h lettres ainsi qu'une autre lettre a_x, et ces $h + 1$ lettres seulement, occupent leurs places naturelles.

En effet, considérons une permutation des k lettres où les h lettres, et ces h lettres seulement, occupent leurs places naturelles. A sa suite, écrivons la lettre a_{k+1}. Permutons a_x avec la lettre a_y qui occupe la place de a_x; puis a avec a_{k+1}. Nous aurons ainsi une permutation des $k + 1$ lettres où a_x et les h autres lettres, et ces lettres seulement, occupent leurs places naturelles .

Par des transformations inverses, on passerait d'une permutation des $k + 1$ lettres où a_x et les h autres lettres, et ces lettres seulement, occupent leurs places naturelles à une permutation des k premières lettres où les h lettres, et ces lettres seulement, occupent leurs places naturelles.

2° CONSÉQUENCES.—*a*) Le nombre des permutations de k lettres où $k—h$ lettres désignées d'avance, et ces lettres seulement, n'occupent pas leursplaces naturelles est égal au nombre des permutations de $k + 1$ lettres (les k premières plus une autre) où les mêmes $k — h$ lettres, et ces lettres seulement, n'occupent par leurs places naturelles.

b) *Le nombre des permutations de* n *lettres où* p *lettres désignées d'avance, et ces lettres seulement, n'occupent pas leur places naturelles ne change pas lorsque* n *varie, pourvu que les* p *lettres désignées se trouvent toujours parmi les lettres considérées.*

3° Résolvons à présent le problème proposé. Les permutations des n lettres peuvent se partager en $n + 1$ classes, suivant que n, $n — 1$, ..., p, ..., 2, 1, 0 lettres n'occupent pas leurs places naturelles. Le nombre des permutations où p lettres n'occupent pas leurs places naturelles est $C_n^p Q_p$, en désignant par Q_p le nombre des permutations où p lettres *désignées d'avance*, et ces lettres seulement, n'occupent pas leurs places naturelles.

On peut donc écrire
$P_n = C_n^n Q_n + C_n^{n-1} Q_{n-1} + ... + C_n^p Q_p + ... + C_n^1 Q_1 + C_n^0 Q_0$, les symboles Q_n, Q_{n-1}, ..., Q_1, Q_0 ayant des significations analogues à celles de Q_p. En faisant croître n à partir de 1, on introduira successivement les symboles Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, ... et ces symboles gardent constamment la même valeur. On trouve ainsi :

$$\begin{aligned}
P_1 &= Q_1 + Q_0 \\
P_2 &= Q_2 + 2Q_1 + Q_0 \\
P_3 &= Q_3 + 3Q_2 + 3Q_1 + Q_0 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
P &= Q_n + C_n^{n-1} Q_{n-1} + \dots + C_n^1 Q_1 + Q_0.
\end{aligned}$$

Ces égalités donnent :

$$Q_1 = P_1 - Q_0 = P_1 - 1$$
$$Q_2 = P_2 - 2P_1 + 1$$
$$Q_3 = P_3 - 3P_2 + 3P_1 - 1$$

et en général,

$$Q_n = P_n - C_n^{n-1} P_{n-1} + C_n^{n-2} P_{n-2} - \ldots\ldots + (-1)^{n-1} C_n^1 P_1 + (-1)^n.$$

462. *Calculer les déterminants suivants :*

1°
$$\begin{vmatrix} (a+b-c-d)^4 & (a+b-c-d)^2 & 1 \\ (a-b+c-d)^4 & (a-b+c-d)^2 & 1 \\ (a-b-c+d)^4 & (a-b-c+d)^2 & 1 \end{vmatrix}$$

En permutant C_1 et C_3, on obtient un déterminant de Vandermonde, qui est égal au produit des trois facteurs suivants :

$$(a+b-c-d)^2 - (a-b+c-d)^2 = 2(a-d) \times 2(b-c);$$
$$(a-b+c-d)^2 - (a-b-c+d)^2 = 2(a-b) \times 2(c-d);$$
$$(a-b-c+d)^2 - (a+b-c-d)^2 = 2(a-c) \times 2(d-b).$$

On a donc

$$D = 64(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$$

2°
$$\begin{vmatrix} a^2b^2 + c^2d^2 & ab + cd & 1 \\ a^2c^2 + b^2d^2 & ac + bd & 1 \\ a^2d^2 + b^2c^2 & ad + bc & 1 \end{vmatrix}$$

Remplacer C_1 par $C_1 + 2abcdC_3$; puis permuter C_1 et C_3. On a alors un déterminant de Vandermonde dont les trois facteurs sont :

$$(ab+cd) - (ac+bd) = (a-d)(b-c);$$
$$(ac+bd) - (ad+bc) = (a-b)(c-d);$$
$$(ad+bc) - (ab+cd) = (a-c)(d-b).$$

On a donc

$$D = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$$

3°
$$\begin{vmatrix} p^2 & q^2 & r^2 \\ (p+1)^2 & (q+1)^2 & (r+1)^2 \\ (p-1)^2 & (q-1)^2 & (r-1)^2 \end{vmatrix}$$

Ce déterminant D est homogène par rapport aux lettres p, q et r. En remplaçant L_2 par $L_2 - L_1$ et L_3 par $L_3 - L_1$, puis L_3 par $L_3 + L_2$, on voit qu'il est du 3^e degré par rapport à ces lettres.

Le déterminant D s'annule pour $p = q$ et $p = r$. On a donc

$$D = (p-q)(p-r)Q.$$

En faisant $q = r$, il vient $Q = 0$, en supposant que p, q et r sont différents. On peut donc écrire

$$Q = (q-r)Q' \quad \text{et} \quad D = (p-q)(p-r)(q-r)Q'.$$

$(p - q)(p - r)(q - r)$ est un polynôme homogène du 3^{e} degré en p, q et r; Q' est donc indépendant de ces lettres. Pour déterminer sa valeur, faisons $p = 0$, $q = -1$ et $r = 1$. Il vient

$$8 = 2Q' \quad \text{ou} \quad Q' = 4.$$

On a donc $\qquad D = 4(p - q)(p - r)(q - r).$

4° $\begin{vmatrix} \cos 3a & \cos 2a & \cos a & 1 \\ \cos 3b & \cos 2b & \cos b & 1 \\ \cos 3c & \cos 2c & \cos c & 1 \\ \cos 3d & \cos 2d & \cos d & 1 \end{vmatrix}$

On a

$$D = |\, 4\cos^3 a - 3\cos a \quad 2\cos^2 a - 1 \quad \cos a \quad 1 \,|$$

ou, en remplaçant C_1 par $C_1 + 3C_3$ et C_2 par $C_2 + C_4$,

$$D = |\, 4\cos^3 a \quad 2\cos^2 a \quad \cos a \quad 1 \,| = 8 \,|\, \cos^3 a \quad \cos^2 a \quad \cos a \quad 1 \,|.$$

Le déterminant restant est égal à $|\, 1 \quad \cos a \quad \cos^2 a \quad \cos^3 a \,|$, qui est un déterminant de Vandermonde. En le développant, on trouve

$$D = 8(\cos b - \cos a)(\cos c - \cos a)(\cos d - \cos a)(\cos c - \cos b)$$
$$(\cos d - \cos b)(\cos d - \cos c).$$

On pourrait remplacer chaque différence de cosinus par un produit de sinus.

463. *Si le déterminant* $|\, a_i \quad b_i \quad c_i \,|$ *est nul* ($i = 1, 2, 3$), *montrer que le déterminant*

$$\Delta = |\, la_i + mb_i + nc_i \quad l'a_i + m'b_i + n'c_i \quad l''a_i + m''b_i + n''c_i \,|$$

est nul. (*E. M. Armes spéciales*, 1924).

En effet, Δ peut être décomposé en une somme de 27 déterminants. Dans chacun d'eux, mettons en évidence les facteurs communs aux éléments d'une même colonne. Les 27 déterminants restants sont tous nuls, parce qu'ils ont deux colonnes identiques, ou parce qu'ils sont égaux en valeur absolue au déterminant donné.

464. *On donne le déterminant*

$$\Delta = \begin{vmatrix} ax^3 + bx^2 + cx + d & a'x^3 + b'x^2 & a''x^3 + b''x^2 \\ a + b + c + d & a' + b' & a'' + b'' \\ b + 2c + 3d & b' & b'' \end{vmatrix}$$

où a, b, ..., b'' *sont des constantes telles que* Δ *soit différent de zéro pour* $x = 0$. *Démontrer, sans développer* Δ, *qu'il y a une valeur unique de* x *différente de l'unité qui annule* Δ *et déterminer cette valeur.* (*E. M. Armes spéciales*, 1925).

Pour $x = 0$, le déterminant devient $d(a'b'' - b'a'')$. On a donc

$$a'b'' - b'a'' \neq 0 \quad \text{et} \quad d \neq 0.$$

Dans Δ, remplaçons L_2 par $L_2 - L_3$; puis, dans le nouveau déterminant, L_1 par $L_1 - L_2x^3 - L_3x^2$. En effectuant, on trouve

$$\Delta = (a'b'' - b'a'')\,[(c + 2d)x^3 - (2c + 3d)x^2 + cx + d],$$

ou

$$\Delta = (a'b'' - b'a'')\,(x - 1)^2\,[(c + 2d)x + d].$$

Cette égalité montre que Δ s'annule pour $x = 1$, et aussi pour $x = -\dfrac{d}{c + 2d}$, pourvu toutefois que $c + 2d$ soit différent de zéro. Cette dernière racine diffère de 1, si $c + 3d \neq 0$.

465. *Si α_1, β_1, α_2, β_2, α_3, β_3 sont les racines de trois trinômes du second degré et si les équations*

$$(\alpha_i + 1)(\beta_i + 1)x + (\alpha_i + \beta_i)y = \alpha_i\beta_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

sont compatibles, l'un au moins des trois trinômes est une combinaison linéaire des deux autres (*E. M. Armes spéciales*, 1926).

Les équations proposées peuvent s'écrire

$$(\alpha_i\beta_i + \alpha_i + \beta_i + 1)x + (\alpha_i + \beta_i)y = \alpha_i\beta_i.$$

Si ces équations sont compatibles, leur éliminant est nul.

Or cet éliminant est

$$|\,\alpha_i\beta_i + \alpha_i + \beta_i + 1 \quad \alpha_i + \beta_i \quad \alpha_i\beta_i\,| = |\,1 \quad \alpha_i + \beta_i \quad \alpha_i\beta_i\,|$$

$$= \left|\,1 \quad -\frac{b_i}{a_i} \quad \frac{c_i}{a_i}\,\right| = -\frac{1}{a_1a_2a_3}\left|\,a_i \quad b_i \quad c_i\,\right|.$$

On a donc

$$|\,a_i \quad b_i \quad c_i\,| = 0.$$

En remplaçant dans ce déterminant C_1 par $C_1x^2 + C_2x + C_3$, il vient

$$|\,a_ix^2 + b_ix + c_i \quad b_i \quad c_i\,| = 0,$$

ou, en développant par rapport aux éléments de la 1re colonne,

$$A_1(a_1x^2 + b_1x + c_1) + A_2(a_2x^2 + b_2x + c_2) + A_3(a_3x^2 + b_3x + c_3) = 0.$$

Dans cette égalité, A_1, A_2 et A_3 sont indépendants de x et différents de zéro, en général. Elle montre donc que l'un des trinômes est une combinaison linéaire des deux autres (est une fonction du premier degré par rapport aux deux autres).

466. *Résoudre les systèmes suivants* :

1° $(a + 1)x + y + z = a + 1$
$x + (a + 1)y + z = a + 3$
$x + y + (a + 1)z = -2a - 4.$

Le déterminant du système est $D = a^2(a + 3)$.

a) Si $D \neq 0$, le système donne

$$x = \frac{a + 1}{a}; \quad y = \frac{a + 3}{a}; \quad z = -\frac{2a + 4}{a}.$$

b) Si $a = 0$, le système devient

$$x + y + z = 1; \quad x + y + z = 3; \quad x + y + z = -4.$$

Il est impossible.

c) Si $a = -3$, le système se réduit à
$$-2x + y + z = -2; \quad x - 2y + z = 0; \quad x + y - 2z = 2.$$
Le système est indéterminé, car en additionnant les équations membre à membre, on trouve $0.x + 0.y + 0.z = 0$, et cette équation peut remplacer l'une des trois équations, la troisième, par exemple. En résolvant alors les deux premières équations par rapport à x et y, par exemple, on trouve
$$x = \frac{1}{3}(3z + 4); \quad y = \frac{1}{3}(3z + 2).$$

2° $(x + y)(a - b) = a(y - z)$
$(y + z)(c - a) = c(z - x)$
$(z + x)(a - b) = b(x - y)$.

Ce système admet évidemment la solution $x = y = z = 0$. Il n'est donc jamais impossible. En calculant le déterminant du système, on trouve
$$D = 2ab(a - 2b + c).$$
Si $D \neq 0$, le système admet une solution unique, qui sera, d'après ce qui précède, $x = y = z = 0$.

Si $D = 0$, le système est indéterminé, car il n'est jamais impossible. Différents cas doivent être examinés.

I. Si $a = 0$, le système devient
$$bx + by = 0; \quad cx + cy = 0; \quad 2bx - by + bz = 0.$$
a) Si $b = 0$ et $c \neq 0$, le système se réduit à $x + y = 0$.
b) Si $b = c = 0$, le système est complètement indéterminé.
c) Si $b \neq 0$, le système devient
$$x + y = 0; \quad 2x - y + z = 0.$$
D'où $x = -y = -\frac{z}{3}$.

II. Si $b = 0$, le système devient
$$ax + az = 0; \quad cx + (c - a)y - az = 0.$$
Le cas $a = b = 0$ a été examiné. Nous supposons donc $a \neq 0$.

a) Si $c = 0$, le système devient $x + z = y + z = 0$. D'où
$$x = y = -z.$$
b) Si $c \neq 0$, le système devient en remplaçant x dans la seconde équation par $-z$,
$$x + z = 0; \quad (a - c)y + (a + c)z = 0.$$
Il admet une infinité de solutions, données par les formules,
$$x = -z = (a - c)t; \quad y = (a + c)t.$$

III. Supposons a, b différents de zéro et $a - 2b + c = 0$. Le système devient, en remplaçant b par sa valeur,
$$(a - c)x - (a + c)y + 2az = 0 \qquad (1)$$
$$cx - (a - c)y - az = 0 \qquad (2)$$
$$2cx - (a + c)y - (a - c)z = 0. \qquad (3)$$

En éliminant y entre (1) et (3), puis x entre (2) et (3), on obtient les équations

$$(a - 3c)x + (3a - c)z = 0; \quad (3c - a)y - (a + c)z = 0,$$

qui peuvent remplacer les équations (1) et (2). Ces équations donnent

$$x = (3a - c)t; \quad y = (a + c)t; \quad z = (3c - a)t.$$

Ces formules donnent les solutions du système, car en remplaçant dans (3), on voit que cette équation est vérifiée par les mêmes valeurs de x, y et z.

REMARQUE. — La forme du système et sa résolution peuvent être simplifiées par un changement d'inconnues. En posant

$$X = y + z; \quad Y = z + x; \quad Z = x + y,$$

le système devient

$$bZ = aY; \quad aX = cZ; \quad (2b - a)Y = bX.$$

3° $a^2x + b^2y + c^2z = 1$

$a^3x + b^3y + c^3z = a + b + c$

$a^4x + b^4y + c^4z = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca.$

Le déterminant du système est

$$D = a^2b^2c^2(a - b)(b - c)(c - a).$$

On trouve ensuite

$$N_x = a^2b^2c^2(c - b); \quad N_y = a^2b^2c^2(a - c); \quad N_z = a^2b^2c^2(b - a).$$

a) Si $D \neq 0$, le système donne

$$x = \frac{1}{(a - b)(a - c)}; \quad y = \frac{1}{(b - a)(b - c)}; \quad z = \frac{1}{(c - a)(c - b)}.$$

b) Supposons qu'une seule des trois lettres a, b, c soit nulle. Soit, par exemple, $a = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Le système devient

$$b^2y + c^2z = 1; \quad b^3y + c^3z = b + c; \quad b^4y + c^4z = b^2 + c^2 + bc.$$

Le déterminant du système formé par les deux premières équations est $b^2c^2(c - b)$.

Si $b \neq c$, les deux premières équations donnent

$$y = \frac{1}{b(b - c)}; \quad z = \frac{1}{c(c - b)}; \quad x \text{ arbitraire};$$

et cette solution vérifie la 3e équation, car, en calculant l'éliminant du système, on voit qu'il est nul.

Si $b = c$, le système devient

$$b^2(y + z) = 1; \quad b^2(y + z) = 2; \quad b^2(y + z) = 3$$

et il est impossible.

c) Supposons que deux lettres seulement soient nulles. Soit, par exemple, $a = b = 0$, $c \neq 0$. Le système se réduit à $c^2z = 1$.

On a donc $z = \frac{1}{c^2}$, x et y étant quelconques.

d) Si $a = b = c = 0$, le système est impossible, à cause de la première équation.

Dans ce qui suit, nous supposerons a, b et c différents de zéro.

e) Supposons que deux lettres seulement soient égales. Soit, par exemple, $a = b \neq c$. Le système devient

$$\begin{aligned} a^2x + a^2y + c^2z &= 1 \\ a^3x + a^3y + c^3z &= 2a + c \\ a^4x + a^4y + c^4z &= 3a^2 + c^2 + 2ac. \end{aligned}$$

Les deux premières équations peuvent être résolues par rappport à y et z, car on a $a^2c^3 - a^3c^2 = a^2c^2(c - a) \neq 0$; mais les valeurs que l'on trouve pour y et z, ne vérifient pas la 3e équation, car le déterminant caractéristique relatif à cette équation est

$$\begin{vmatrix} a^2 & c^2 & 1 \\ a^3 & c^3 & 2a + c \\ a^4 & c^4 & 3a^2 + c^2 + 2ac \end{vmatrix} = a^4c^2(c - a) \neq 0.$$

Le système est donc impossible.

f) Si $a = b = c$, le système est impossible, car il devient

$$a^2(x + y + z) = 1; \quad a^2(x + y + z) = 3; \quad a^2(x + y + z) = 6.$$

En résumé, le système a une solution unique quand $D \neq 0$; il est indéterminé quand une seule lettre est nulle, les deux autres étant différentes, ou quand deux lettres seulement sont nulles; il est impossible dans tous les autres cas.

4°
$$\begin{aligned} ax + by + bz + bt &= c \\ bx + ay + bz + bt &= c \\ bx + by + az + bt &= c \\ bx + by + bz + at &= c. \end{aligned}$$

Le déterminant du système est $D = (a + 3b)(a - b)^3$.

a) Si $D \neq 0$, on trouve

$$x = y = z = t = \frac{c}{a + 3b}.$$

b) Si $a = b \neq 0$, le système se réduit à l'équation

$$a(x + y + z + t) = c.$$

c) Si $a = -3b \neq 0$, les trois premières équations peuvent être résolues par rapport à x, y, z, car on a

$$\delta = \begin{vmatrix} -3b & b & b \\ b & -3b & b \\ b & b & -3b \end{vmatrix} = -16b^3 \neq 0.$$

Prenons δ comme déterminant principal. Le déterminant caractéristique relatif à la 4e équation sera

$$\delta_4 = \begin{vmatrix} -3b & b & b & c \\ b & -3b & b & c \\ b & b & -3b & c \\ b & b & b & c \end{vmatrix} = -64b^3c.$$

Si $c \neq 0$, on a $\delta_4 \neq 0$ et le système est impossible.
Si $c = 0$, on a $\delta_4 = 0$ et le système se réduit à ses trois premières équations qui donnent $x = y = z = t$.

d) Si $a = b = 0$, le système est impossible ou complètement indéterminé, suivant qu'on a $c \neq 0$ ou $c = 0$.

467. *Trouver les conditions de compatibilité des équations :*

1° $x + ay = b$; $ax + y = c$; $bx + cy = 1$.

a) Si $a^2 - 1 \neq 0$, les deux premières équations donnent

$$x = \frac{ac - b}{a^2 - 1}; \quad y = \frac{ab - c}{a^2 - 1}.$$

La condition de compatibilité est

$$E = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{vmatrix} = 2abc + 1 - a^2 - b^2 - c^2 = 0.$$

b) Si $a = 1$, le système devient

$$x + y = b; \quad x + y = c; \quad bx + cy = 1.$$

Si $b \neq c$, e système est impossible; si $b = c$, il se réduit au suivant

$$x + y = b; \quad x + y = \frac{1}{b}.$$

Il est donc impossible ou indéterminé, suivant que l'on a $b \neq \pm 1$ ou $b = \pm 1$.

c) Si $a = -1$, le système devient

$$x - y = b; \quad x - y = -c; \quad bx + cy = 1.$$

Si $b \neq -c$, le système est impossible; si $b = -c$, il se réduit au suivant

$$x - y = b; \quad x - y = \frac{1}{b}.$$

Il est donc impossible ou indéterminé, suivant que l'on a

$$b \neq \pm 1 \quad \text{ou} \quad b = \pm 1.$$

2° $bcx + c^2y = b^2$; $c^2x + acy = a^2$; $b^2x + a^2y = ab$.

Nous supposerons a, b et c différents de zéro.

Le déterminant du système formé par les deux premières équations est $D = c^2(ab - c^2)$.

I. Supposons $c^2 - ab \neq 0$. L'éliminant du système est (215, 6°)

$$E = \begin{vmatrix} bc & c^2 & b^2 \\ c^2 & ac & a^2 \\ b^2 & a^2 & ab \end{vmatrix} = abc(3abc - a^3 - b^3 - c^3)$$

ou $E = abc(a + b + c)(ab + bc + ca - a^2 - b^2 - c^2)$.

Le 3e facteur de E n'est nul que si l'on a $a = b = c$. Mais cela est impossible, quand $c^2 - ab \neq 0$. Par suite, les trois équations ne sont compatibles que si l'on a $a + b + c = 0$.

En résolvant le système formé par les deux premières équations, on trouve

$$x = -\frac{a}{c}; \quad y = -\frac{b}{c}.$$

On aurait abouti à la même condition de compatibilité, si l'on avait supposé $a^2 - bc \neq 0$ ou $b^2 - ac \neq 0$. On peut remarquer d'ailleurs que les relations $a^2 - bc \neq 0$, $b^2 - ac \neq 0$, $c^2 - ab \neq 0$ sont des conséquences de la relation $a + b + c = 0$; car si on remplace dans $a^2 - bc$, par exemple, b par $-a-c$, on trouve $a^2 + ac + c^2$ qui est différent de zéro, à moins que $a = c = 0$.

II. Si $a^2 - bc = b^2 - ac = c^2 - ab = 0$, on a aussi

$$(a-b)(a+b+c) = (b-c)(a+b+c) = (c-a)(a+b+c) = 0,$$

et par suite, $a = b = c$. Le système se réduit à l'équation $x + y = 1$. Il est indéterminé.

3° $ax + bz = m(1 + cy)$
$m(ax - bz) = 1 - cy$
$ax + bz = p(1 - cy)$
$p(ax - bz) = 1 + cy.$

Nous supposerons a, b, c, m, p différents de zéro.

Le déterminant du système formé par les trois premières équations est $2abcm(p + m)$. L'éliminant du système est

$$\begin{vmatrix} a & -cm & b & m \\ am & c & -bm & 1 \\ a & cp & b & p \\ ap & -c & -bp & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

a) Si $p + m \neq 0$, les trois premières équations sont compatibles et le système est possible. On trouve

$$x = \frac{mp+1}{a(m+p)}; \quad y = \frac{p-m}{c(m+p)}; \quad z = \frac{mp-1}{b(m+p)}.$$

b) Si $p + m = 0$, la 1re et la 3e équation ne sont pas compatibles et le système est impossible.

4° $x + y + z = a + b + c$
$ax + by + cz = a^2 + b^2 + c^2$
$bx + cy + az = a^2 + b^2 + c^2$
$cx + ay + bz = 4ab.$

Le déterminant du système formé par les trois premières équations est

$$D = ab + bc + ca - a^2 - b^2 - c^2.$$

Il est différent de zéro, à moins que l'on ait $a = b = c$.

L'éliminant du système formé par les quatre équations est

$$E = (a + b - c)^2 D.$$

a) Si les nombres a, b, c ne sont pas tous égaux, les quatre équations sont compatibles, pourvu qu'on ait

$$a + b = c.$$

En résolvant le système formé par les trois premières équations, on trouve

$$x = 0; \quad y = 2b; \quad z = 2a.$$

b) Si $a = b = c \neq 0$, le système devient

$$x + y + z = 3a; \quad x + y + z = 4a.$$

Il est impossible.

c) Si $a = b = c = 0$, le système se réduit à $x + y + z = 0$.

468. *On donne* : 1° *deux systèmes d'axes rectangulaires* xOy, x'O'y'; 2° *les coordonnées* a, b *de* O' *et l'angle* $(0 < \alpha < \pi)$ *des axes* Ox, O'x'. *On demande* : 1° *de considérer le cas où les axes* x'O'y' *ne peuvent s'appliquer sans retournement sur les axes* xOy *et de trouver le système d'équations permettant de déterminer éventuellement la position d'un point* M *tel que ses coordonnées* x *et* y *soient respectivement égales à ses coordonnées* x' *et* y'; 2° *de démontrer que ce système est en général impossible*; 3° *de démontrer que si, pour un angle* α *donné, le système est possible, il y a une infinité de solutions situées sur une parallèle à la bissectrice de l'angle* (Ox, O'x'). (*E. M. Armes spéciales*, 1912).

Comme les axes $x'O'y'$ ne peuvent s'appliquer sans retournement sur les axes xOy, on a $(O'x', O'y') = -\dfrac{\pi}{2}$.

La relation de Chasles donne

$$(Ox, O'y') + (O'y', O'x') + (O'x', Ox) = 0.$$

Mais on a :

$$(O'y', O'x') = -(O'x', O'y') = \frac{\pi}{2}; \; (O'x', Ox) = -(Ox, O'x') = -\alpha.$$

En posant $(Ox, O'y') = \beta$, on a donc

$$\beta + \frac{\pi}{2} - \alpha = 0 \quad \text{ou} \quad \beta = \alpha - \frac{\pi}{2}.$$

Si pour le point M, on a $x = x'$ et $y = y'$, les formules générales de transformation donnent

$$x = a + x \cos \alpha + y \sin \alpha;$$
$$y = b + x \sin \alpha - y \cos \alpha;$$

ou bien,

$$x(\cos \alpha - 1) + y \sin \alpha + a = 0 \qquad (1)$$
$$x \sin \alpha - y(\cos \alpha + 1) + b = 0. \qquad (2)$$

Le déterminant de ce système est nul. Le système est donc impossible ou indéterminé. Pour que le système soit indéterminé, on doit avoir

$$b(\cos \alpha - 1) = a \sin \alpha.$$

Les valeurs acceptables de α sont donc les angles qui vérifient la relation

$$\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = -\frac{a}{b} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\frac{a}{b}.$$

Pour chacune de ces valeurs de α, le système (1), (2) se réduit, par exemple, à l'équation (1). En remplaçant cos α et sin α en fonction de $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, elle s'écrit

$$2ax + 2by = a^2 + b^2.$$

La droite qui représente cette équation est le lieu des points M, tels que l'on ait $x = x'$ et $y = y'$. Son coefficient angulaire est $-\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. C'est donc une parallèle à la bissectrice de l'angle (Ox, O'x').

469. *Quel est le nombre qui, dans le système de base* 10, *s'écrit avec les chiffres* a, b, c *dans l'ordre* abc; *et qui, dans le système de base* 9, *s'écrit avec ces chiffres dans l'ordre* bca?

On a l'équation

$$100a + 10b + c = 81b + 9c + a,$$

ou

$$99a - 71b - 8c = 0.$$

En résolvant par rapport à b et c, on trouve

$$b = -3a + 8t; \quad c = 39a - 71t. \qquad (1)$$

On doit avoir

$$0 < -3a + 8t < 10 \quad \text{et} \quad -1 < 39a - 71t < 10.$$

Ces inégalités peuvent s'écrire respectivement

$$t > \frac{3a}{8}; \quad t < \frac{3a+10}{8}; \quad t < \frac{39a+1}{71}; \quad t > \frac{39a-10}{71}. \qquad (2)$$

Pour qu'elles soient compatibles, on doit avoir

$$\frac{3a}{8} < \frac{39a+1}{71} \quad \text{ou} \quad a > -\frac{8}{99};$$

$$\frac{39a-10}{71} < \frac{3a+10}{8} \quad \text{ou} \quad a < 7\frac{97}{99};$$

et, en résumé, a étant entier et positif,

$$1 \leqslant a \leqslant 7.$$

En faisant des essais successifs, on constate que pour $a = 2$, les inégalités (2) donnent $t = 1$; et qu'aux autres valeurs de a ne correspond aucune valeur entière de t. Les relations (1) donnent ensuite $b = 2$, $c = 7$. Le nombre cherché s'écrit donc 227, dans le système de base 10.

470. *Quel que soit l'entier positif* k, *on peut toujours trouver une infinité de valeurs entières et positives de* a, *en progression arithmétique et telles que* x *étant entier, on ait* $\sqrt{x} = (a;\ 3,\ k,\ 3,\ 2a;\ \ldots)$.

On peut écrire

$$\sqrt{x} = (a,\ 3,\ k,\ 3,\ a + \sqrt{x}).$$

Les quatre premières réduites du second membre sont

$$\frac{a}{1}; \quad \frac{3a+1}{3}; \quad \frac{3ak+k+a}{3k+1}; \quad \frac{9ak+3k+6a+1}{9k+6}.$$

On a donc

$$\sqrt{x} = \frac{(9ak+3k+6a+1)\left(a+\sqrt{x}\right)+3ak+k+a}{(9k+6)\left(a+\sqrt{x}\right)+3k+1}.$$

Faisons disparaître le dénominateur et réduisons les termes semblables. Il vient

$$(9k+6)x = (9k+6)a^2 + 6ak + 2a + k.$$

Cette égalité donne

$$x = a^2 + \frac{6ak+2a+k}{9k+6} = a^2 + t. \tag{1}$$

Nous avons posé $\qquad \dfrac{6ak+2a+k}{9k+6} = t.$

Cette égalité donne l'équation en a et t,

$$(6k+2)a - (9k+6)t = -k. \tag{2}$$

a) Si k est impair, l'équation (2) admet des solutions entières, car les coefficients $2(3k+1)$ et $9k+6$ sont premiers entre eux. En effet, dans ce cas, 2 est premier avec $9k+6$. Or $3k+1$ est également premier avec $9k+6$, car $3k+1$ et $9k+6$ sont les dénominateurs de la 3e et de la 4e réduite de $\sqrt{x}$. Donc $2(3k+1)$ est premier avec $9k+6$.

b) Si k est pair, posons $k = 2k'$. L'équation (2) devient

$$(6k'+1)a - (9k'+3)t = -k'. \tag{3}$$

En cherchant par divisions successives le *p. g. c. d.* de $9k'+3$ et de $6k'+1$, on trouve qu'il est 1. Les coefficients $9k'+3$ et $6k'+1$ sont donc premiers entre eux et l'équation (2) admet également des solutions entières dans ce cas.

Il résulte de l'exposé précédent, qu'on peut déterminer une infinité de valeurs entières de a. Si A est une première valeur de a, toutes les valeurs entières de a seront données, suivant le cas, par

$$a = \mathrm{A} + (9k+6)\theta \quad \text{ou} \quad a = \mathrm{A} + (9k'+3)\theta.$$

Ces formules montrent que les valeurs de a sont en progression arithmétique. Parmi elles, il y a d'ailleurs une infinité de valeurs positives, auxquelles correspondent des valeurs entières et positives de t, car les coefficients de a et de t dans les équations (2) et (3) ont des signes contraires. A chacun de ces systèmes de valeurs pour a et t, l'égalité (1) fait correspondre une valeur entière et positive de x.

EXEMPLES. — I. Si $k = 1$, (2) devient $8a - 15t = -1$. Par suite,

$$a = 13 + 15\theta; \quad t = 7 + 8\theta.$$

On peut former le tableau :

$$\begin{aligned} a &= 13, \quad 28, \quad 43, \dots \\ t &= 7, \quad 15, \quad 23, \dots \\ x = a^2 + t &= 176, \ 799, \ 1872, \dots \end{aligned}$$

II. Si $k = 2$, (3) devient $7a - 12t = -1$. Par suite,

$$a = 5 + 12\theta; \quad t = 3 + 7\theta.$$

On peut former le tableau :

$$\begin{aligned} a &= 5, \quad 17, \quad 29, \dots \\ t &= 3, \quad 10, \quad 17, \dots \\ x = a^2 + t &= 28, \ 299, \ 858, \dots \end{aligned}$$

TROISIÈME SÉRIE

LIMITES ET VARIATIONS DES FONCTIONS.

471. *En appliquant la définition de la limite d'une fonction, montrer que l'on a :*

1° $\lim \dfrac{1}{x^2 - 1} = \infty$ pour $x = 1$.

En effet, cette fonction est définie pour les valeurs de x, suffisamment grandes en valeur absolue. De plus, on aura

$$\left| \frac{1}{(1+h)^2 - 1} \right| = \frac{1}{|2h + h^2|} > \mathrm{N} \quad \text{ou} \quad |2h + h^2| < \frac{1}{\mathrm{N}},$$

si l'on a
$$2|h| + h^2 < \frac{1}{\mathrm{N}},$$

car $2|h| + h^2 \geqslant |2h + h^2|$. Mais $h^2 < |h|$, car h est très petit en valeur absolue. Il suffira donc d'avoir

$$3|h| < \frac{1}{\mathrm{N}} \quad \text{ou} \quad |h| < \frac{1}{3\mathrm{N}}.$$

2° $\lim (x^3 - 5x^2 - 2x) = 0$ pour $x = 0$.

En effet, cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x. De plus, on aura

$$|h^3 - 5h^2 + 2h| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |h^3| + 5h^2 + 2|h| < \varepsilon,$$

car on a
$$|h^3 - 5h^2 + 2h| \leqslant |h^3| + 5h^2 + 2|h|.$$

Mais on a $|h^3| < |h|$ et $h^2 < |h|$, car h est très petit en valeur absolue. Il suffira donc d'avoir

$$8|h| < \varepsilon \quad \text{ou} \quad |h| < \frac{\varepsilon}{8}.$$

3° $\lim \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} = -1$ pour $x = 1$.

En effet, on a

$$\frac{(1+h)^2 - 4(1+h) + 3}{(1+h)^2 - 1} + 1 = \frac{2(1+h)^2 - 4(1+h) + 2}{(1+h)^2 - 1} = \frac{2h}{h+2}.$$

Pour que cette expression soit inférieure à ε en valeur absolue, il suffit d'avoir

$$2\,|\,h\,| < \varepsilon\,|\,h + 2\,|, \text{ ou encore, } 2\,|\,h\,| < \varepsilon\,(2 - |\,h\,|),$$

car on a $|\,h + 2\,| \geqslant 2 - |\,h\,|$. Cette inégalité est satisfaite quand on a

$$|\,h\,|(2 + \varepsilon) < 2\varepsilon \quad \text{ou} \quad |\,h\,| < \frac{2\varepsilon}{2 + \varepsilon}.$$

472. *Calculer les limites des fonctions suivantes :*

1° $y = \dfrac{x\sqrt{x} - x\sqrt{a} + a\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{x - a}$ pour $x = a$.

Pour que cette fonction soit définie on doit avoir

$$x \geqslant 0; \quad a \geqslant 0; \quad x \neq a.$$

Le numérateur peut s'écrire

$$(x + a)\,(\sqrt{x} - \sqrt{a}).$$

Pour les valeurs positives de x, différentes de a, on a

$$y = \frac{x + a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}.$$

Le numérateur de cette fraction tend vers $2a$ et le dénominateur vers $2\sqrt{a}$. Par suite, $\lim y = \sqrt{a}$.

2° $y = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2a} + \sqrt{x - 2a}}{\sqrt{x^2 - 4a^2}}$ pour $x = 2a$.

Cette fonction n'est définie que si on suppose $x > 2a \geqslant 0$.

a) Supposons d'abord $a > 0$. En multipliant les deux termes de y par $\sqrt{x} + \sqrt{2a} - \sqrt{x - 2a}$, il vient

$$y = \frac{2\sqrt{2a(x - 2a)}}{(\sqrt{x} + \sqrt{2a} - \sqrt{x - 2a})\sqrt{x^2 - 4a^2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2a}}{(\sqrt{x} + \sqrt{2a} - \sqrt{x - 2a})\sqrt{x + 2a}}.$$

Le dénominateur tend vers $4a\sqrt{2}$. Par suite, $\lim y = \dfrac{\sqrt{a}}{2a}$.

b) Si $a = 0$, on a

$$y = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}} = \frac{2}{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad \lim y = +\infty.$$

3° $y = \dfrac{x}{(x+1)\sqrt{x(1-x^2)}\sqrt{1-\sqrt{1-x}}}$ pour $x = 0$.

Cette fonction n'est définie que si $0 < x < 1$. Nous ferons donc tendre x vers zéro par valeurs positives et nous aurons $x = \sqrt{x^2}$.

En multipliant les deux termes de y par $\sqrt{1+\sqrt{1-x}}$, il vient

$$y = \frac{x\sqrt{1+\sqrt{1-x}}}{(x+1)\sqrt{x(1-x^2)}\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x}}}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}.$$

Le numérateur tend vers $\sqrt{2}$ et le dénominateur vers 1. Par suite, $\lim y = \sqrt{2}$.

4° $y = \dfrac{\sqrt[3]{2(2-x)} + \sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2} + 4(2-x)}$ pour $x = 2$.

Cette fonction est définie dans l'intervalle $(-2, 2)$, sauf pour $x = 2$ qui annule le dénominateur. Nous ferons donc tendre x vers 2 par valeurs inférieures à 2. Nous aurons $2 - x > 0$ et la fonction pourra s'écrire

$$y = \frac{\sqrt[3]{2}\sqrt[6]{(2-x)^2} + \sqrt{2+x}\sqrt[6]{(2-x)^3}}{\sqrt{2+x}\sqrt[6]{(2-x)^3} + 4\sqrt[6]{(2-x)^6}},$$

ou encore, en simplifiant par $\sqrt[6]{(2-x)^2}$,

$$y = \frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt{2+x}\sqrt[6]{2-x}}{\sqrt{2+x}\sqrt[6]{2-x} + 4\sqrt[6]{(2-x)^4}}.$$

Le numérateur tend vers $\sqrt[3]{2}$; le dénominateur tend vers zéro par valeurs positives. Par suite, $\lim y = +\infty$.

5° $y = \dfrac{1-\sqrt{2-\sqrt{4-3x}}}{1-\sqrt{2-\sqrt{\dfrac{1}{3-2x}}}}$ pour $x = 1$.

Cette fonction n'est définie que si on a

$$4 - 3x \geqslant 0; \quad 3 - 2x > 0; \quad 2 - \sqrt{4-3x} \geqslant 0;$$

$$2 - \sqrt{\frac{1}{3-2x}} \geqslant 0 \text{ et } \neq 1.$$

En résolvant ce système, on voit que y est défini dans l'intervalle $\left(0, \dfrac{4}{3}\right)$, sauf pour $x = 1$.

Soient A le binôme conjugué du numérateur de y et B le binôme conjugué du dénominateur. En multipliant les deux termes de y par AB, il vient

$$y = \frac{B(-1+\sqrt{4-3x})}{A\left(-1+\sqrt{\frac{1}{3-2x}}\right)}.$$

Cette fraction n'est pas définie pour $x = 1$. En multipliant ses deux termes par

$$A' = 1 + \sqrt{4-3x} \quad \text{et} \quad B' = 1 + \sqrt{\frac{1}{3-2x}},$$

il vient

$$y = \frac{BB'(3-3x)}{AA'\left(\frac{1}{3-2x}-1\right)} = \frac{3BB'(1-x)(3-2x)}{2AA'(x-1)} = \frac{3BB'(2x-3)}{2AA'}.$$

Le numérateur de cette dernière fraction tend vers -12 et le dénominateur vers 8. Par suite, $\lim y = -\frac{3}{2}$.

6° $y = \dfrac{(\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x})\sqrt[12]{x}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}$ pour x infini.

Cette fonction n'est définie que pour $x \geqslant 0$. Nous ferons donc tendre x vers l'infini par valeurs positives.

Divisons les deux termes de y par $\sqrt[3]{x} = \sqrt[4]{x} \times \sqrt[12]{x}$. Il vient

$$y = \frac{\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}-1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}-1} \quad \text{ou} \quad y = \frac{a^3-1}{a^4-1}, \text{ en posant } \quad a = \sqrt[12]{1+\frac{1}{x}}.$$

Simplifions par $a - 1$. Nous aurons

$$y = \frac{a^2+a+1}{a^3+a^2+a+1}.$$

Si x tend vers $+\infty$, on a

$$\lim a = 1 \quad \text{et} \quad \lim y = \frac{3}{4}.$$

473. *Chercher la limite des expressions*

$$\sqrt{ax^2+bx+c} \pm \sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right),$$

où a *est positif, pour* x *infini.*

Comme a est positif, les expressions proposées sont définies pour les valeurs de x suffisamment grandes en valeur absolue.

1° Si x tend vers $-\infty$, l'expression

$$A = \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$$

tend évidemment vers $+\infty$.

Si x tend vers $+\infty$, A tend vers zéro, car on a

$$A = \frac{4ac - b^2}{4a} : \left[\sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)\right]$$

et le diviseur de cette expression tend vers $+\infty$.

2° On montre d'une façon analogue que la limite de

$$B = \sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$$

est 0 quand x tend vers $-\infty$, et $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Conséquences. — 1° Quand x tend vers $+\infty$, on peut poser

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \varepsilon,$$

ε étant une variable qui tend vers zéro.

2° Quand x tend vers $-\infty$, on peut poser

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = -\sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \varepsilon,$$

ε étant une variable qui tend vers zéro.

474. *Trouver la limite des fonctions suivantes pour* x *infini.*

1° $y = \sqrt{x^2 + 4x + 3} + \sqrt{x^2 + 8x + 5} - \sqrt{4x^2 + 1}.$

1re Méthode. — *a*) Quand x tend vers $+\infty$, on peut poser (473)

$$\sqrt{x^2 + 4x + 3} = x + 2 + \varepsilon,$$
$$\sqrt{x^2 + 8x + 5} = x + 4 + \varepsilon',$$
$$\sqrt{4x^2 + 1} = 2x + \varepsilon'',$$

ε, ε', ε'' étant des variables qui tendent vers zéro, quand x tend vers $+\infty$. On a donc

$$y = 6 + (\varepsilon + \varepsilon' - \varepsilon'') \quad \text{et} \quad \lim y = 6.$$

b) Quand x tend vers $-\infty$, on peut poser (473)

$$\sqrt{x^2 + 4x + 3} = -(x + 2) + \varepsilon,$$
$$\sqrt{x^2 + 8x + 5} = -(x + 4) + \varepsilon',$$
$$\sqrt{4x^2 + 1} = -2x + \varepsilon'',$$

ε, ε', ε'' étant des variables qui tendent vers zéro, quand x tend vers $-\infty$. On a donc

$$y = -6 + (\varepsilon + \varepsilon' - \varepsilon'') \text{ et } \lim y = -6.$$

2ᵉ MÉTHODE. — *a*) Supposons que x tende vers $+\infty$. On peut écrire

$$y = (\sqrt{x^2+4x+3}-x) + (\sqrt{x^2+8x+5}-x) - (\sqrt{4x^2+1}-2x).$$

La fonction y est ainsi décomposée en une somme algébrique de trois fonctions. Cherchons la limite de chacune séparément. On a

$$\sqrt{x^2+4x+3}-x = \frac{4x+3}{\sqrt{x^2+4x+3}+x}.$$

En divisant les deux termes de cette fraction par $x = \sqrt{x^2}$, elle devient

$$\frac{4+\dfrac{3}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}+1}$$

et on voit que sa limite est 2 quand x tend vers l'infini.

On trouve d'une façon analogue

$$\lim(\sqrt{x^2+8x+5}-x) = 4 \quad \text{et} \quad \lim(\sqrt{4x^2+1}-2x) = 0.$$

On a donc $\lim y = 6$ pour $x = +\infty$.

b) Supposons que x tende vers $-\infty$. On peut écrire

$$y = (\sqrt{x^2+4x+3}+x) + (\sqrt{x^2+8x+5}+x) - (\sqrt{4x^2+1}+2x).$$

On a

$$\sqrt{x^2+4x+3}+x = \frac{4x+3}{\sqrt{x^2+4x+3}-x}.$$

En divisant les deux termes de cette fraction par $x = -\sqrt{x^2}$, elle devient

$$\frac{4+\dfrac{3}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}-1}$$

et on voit que sa limite est -2 quand x tend vers l'infini.

On trouve d'une façon analogue

$$\lim(\sqrt{x^2+8x+5}+x) = -4 \quad \text{et} \quad \lim(\sqrt{4x^2+1}+2x) = 0.$$

On a donc $\lim y = -6$ pour $x = -\infty$.

$$2^\circ\ y = \sqrt{x^2+3x+1} + \sqrt{x^2+7x+3} + \sqrt{4x^2-2x+7} - \sqrt{16x^2+13x+4}.$$

En appliquant l'une ou l'autre des méthodes qu'on vient d'indiquer (1°), on trouve

$$\lim y = \frac{23}{8} \text{ quand } x \text{ tend vers } +\infty;$$

$$\lim y = -\frac{23}{8} \text{ quand } x \text{ tend vers } -\infty.$$

3° $y = \sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 4x + 1} + \sqrt{x^2 + 6x + 1} + \dots$
$+ \sqrt{x^2 + 2nx + 1} - \sqrt{n^2x^2 + 1}.$

On trouve

$$\lim y = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{ou} \quad \lim y = -\frac{n(n+1)}{2},$$

suivant que l'on fait tendre x vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

4° $y = x(\sqrt{x^2 - 3x + 7} - \sqrt{x^2 - 3x + 2})$.

En multipliant et en divisant par

$$\sqrt{x^2 - 3x + 7} + \sqrt{x^2 - 3x + 2},$$

il vient

$$y = \frac{5x}{\sqrt{x^2 - 3x + 7} + \sqrt{x^2 - 3x + 2}}.$$

a) Si x tend vers $+\infty$, on divise les deux termes de cette fraction par $x = \sqrt{x^2}$ et on trouve

$$\lim y = \frac{5}{2}.$$

b) Si x tend vers $-\infty$, on divise par $x = -\sqrt{x^2}$ et on trouve

$$\lim y = -\frac{5}{2}.$$

5° $y = \dfrac{x^3 + 7x^2 + 8x - 1}{x^2 + 2x - 3} - \sqrt{x^2 - 8x + 3}.$

En faisant la division de $x^3 + 7x^2 + 8x - 1$ par $x^2 + 2x - 3$, on trouve

$$x^3 + 7x^2 + 8x - 1 = (x^2 + 2x - 3)(x + 5) + x + 14.$$

a) Si x tend vers $+\infty$, on peut poser (1°)

$$\sqrt{x^2 - 8x + 3} = x - 4 + \varepsilon,$$

ε étant une variable qui tend vers zéro, quand x tend vers $-\infty$. Il vient donc

$$y = x + 5 + \frac{x + 14}{x^2 + 2x - 3} - (x - 4 + \varepsilon)$$

ou
$$y = 9 + \frac{x + 14}{x^2 + 2x - 3} - \varepsilon.$$

Par suite, $\lim y = 9$.

b) Si x tend vers $-\infty$, on peut poser (1°)

$$\sqrt{x^2 - 8x + 3} = -(x - 4 + \varepsilon).$$

Il vient donc

$$y = 2x + 1 + \frac{x + 14}{x^2 + 2x - 3} + \varepsilon$$

et
$$\lim y = \lim (2x + 1) = -\infty.$$

475. *Trouver la limite de* $y = \sqrt{ax^2 + bx + c} - mx$ *pour* x *infini.*

Il faut supposer que a est positif; sinon le radicand devient négatif pour les valeurs de x suffisamment grandes en valeur absolue.

a) Supposons qu'on ait $m \neq \pm\sqrt{a}$.

Si x tend vers $+\infty$, on peut écrire, en mettant $x = \sqrt{x^2}$ en évidence,

$$y = x\left[\sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}} - m\right].$$

Le premier facteur tend vers l'infini et le second vers $\sqrt{a} - m$, qui n'est pas nul. On a donc $\lim y = \infty$.

Si x tend vers $-\infty$, on trouve de même, après avoir mis $x = -\sqrt{x^2}$ en évidence,

$$y = x\left[-\sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}} - m\right]$$

et on a encore $\lim y = \infty$.

b) Si $m = \sqrt{a}$, on a $\lim y = +\infty$ quand x tend vers $-\infty$.

Pour trouver la limite de y, quand x tend vers $+\infty$, écrivons

$$y = \sqrt{ax^2 + bx + c} - x\sqrt{a} = \frac{bx + c}{\sqrt{ax^2 + bx + c} + x\sqrt{a}}.$$

On divise ensuite les deux termes de cette fraction par $x = \sqrt{x^2}$. On trouve ainsi $\lim y = \dfrac{b}{2\sqrt{a}}$.

c) Si $m = -\sqrt{a}$, on a $\lim y = +\infty$ quand x tend vers $+\infty$. En raisonnant ensuite comme dans le cas précédent, on trouve

$$\lim y = -\frac{b}{2\sqrt{a}} \text{ quand } x \text{ tend vers } -\infty.$$

476. *Trouver la limite de* $y = \sqrt{x^2 + 4x + 1} - ax - b$ *pour* x *infini.*

Cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x non comprises entre $-2-\sqrt{3}$ et $-2+\sqrt{3}$. Pour trouver sa limite pour x infini, on pourrait raisonner comme au numéro 270, 10°. Nous utiliserons ici les résultats de l'exercice 473.

a) Si x tend vers $+\infty$, on peut poser

$$\sqrt{x^2 + 4x + 1} = x + 2 + \varepsilon,$$

étant une variable qui tend vers zéro; y devient donc

$$y = (1 - a)x + (2 - b) + \varepsilon.$$

Par suite, si $a < 1$, $\lim y = +\infty$;
si $a > 1$, $\lim y = -\infty$;
si $a = 1$, $\lim y = 2 - b$.

b) Si x tend vers $-\infty$, on peut poser

$$\sqrt{x^2 + 4x + 1} = -(x + 2) + \varepsilon,$$

ε étant une variable qui tend vers zéro; y devient donc

$$y = -(a + 1)x - (b + 2) + \varepsilon.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} &\text{si } a < -1, && \lim y = -\infty; \\ &\text{si } a > -1, && \lim y = +\infty; \\ &\text{si } a = -1, && \lim y = -(b + 2). \end{aligned}$$

477. *Si* x *est compris entre* 0 *et* 1, *on a*

$$\lim nx^n = 0 \quad et \quad \lim n(n-1)x^n = 0$$

quand n *tend vers l'infini par valeurs entières positives.*

1° Posons $x = \dfrac{1}{1+\alpha}$; α sera un nombre positif. On a

$$nx^n = \frac{n}{(1+\alpha)^n} < \frac{n}{1 + n\alpha + \dfrac{n(n-1)\alpha^2}{2}};$$

ou, en divisant les deux termes de la dernière fraction par n,

$$nx^n < \frac{1}{\dfrac{1}{n} + \alpha + \dfrac{(n-1)\alpha^2}{2}}.$$

Le second membre de cette inégalité tend vers zéro. Il en résulte que nx^n, qui est positif, a également comme limite zéro pour n infini.

2° On a

$$n(n-1)x^n = \frac{n(n-1)}{(1+\alpha)^n} < \frac{n(n-1)}{1 + n\alpha + \dfrac{n(n-1)\alpha^2}{2} + \dfrac{n(n-1)(n-2)\alpha^3}{1.2.3}}.$$

Or, en divisant le second membre de cette inégalité haut et bas par $n(n-1)$, on reconnaît qu'il a comme limite zéro pour n infini. Il en résulte

$$\lim n(n-1)x^n = 0 \text{ pour } n \text{ infini.}$$

478. *Trouver la limite du produit*

$$1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n \times x^{n^2}$$

pour n *infini* $(0 < x < 1)$.

Le produit peut s'écrire

$$(1 \times x^n) \times (2 \times x^n) \times (3 \times x^n) \times \ldots \times (n \times x^n). \tag{1}$$

On vient de montrer (477) que nx^n a comme limite zéro pour n infini. A fortiori, les autres facteurs du produit (1) tendent-ils vers zéro. Le produit donné tend donc vers zéro.

479. *Si* a > 1, *montrer que* $\lim \frac{a^x}{x} = +\infty$, *quand* x *tend vers l'infini par valeurs positives.*

I. Montrons d'abord que la fonction $\frac{a^x}{x}$ est croissante pour les valeurs positives suffisamment grandes de x.

A cet effet, il suffit de montrer qu'on a

$$\frac{a^{x+h}}{x+h} > \frac{a^x}{x}, \tag{1}$$

pour les valeurs positives suffisamment grandes de x, h étant un nombre positif. L'inégalité (1) peut s'écrire

$$x \times a^h > x + h,$$

ou, en posant $a^h = 1 + \alpha$ $(\alpha > 0)$,

$$x \times \alpha > h.$$

Or cette inégalité est vérifiée par les valeurs positives suffisamment grandes de x, ce qui démontre le théorème.

II. Dès lors, à toute valeur suffisamment grande de x correspondent deux nombres entiers n et $n + 1$, tels qu'on ait

$$n \leqslant x < n + 1 \quad \text{et} \quad \frac{a^n}{n} \leqslant \frac{a^x}{x} < \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Or $\lim \frac{a^n}{n} = \lim \frac{a^{n+1}}{n+1} = +\infty$, pour $n = +\infty$ (272). Donc

$$\lim \frac{a^x}{x} = +\infty \text{ pour } x = +\infty.$$

480. *Calculer les sommes suivantes, et trouver leur limite pour* n *infini, sachant que* x *est positif et inférieur à* 1.

1° $1 + 3x + 5x^2 + \ldots + (2n - 1)x^{n-1}$. — On a

$$S_n = 1 + 3x + 5x^2 + \ldots + (2n - 1)x^{n-1}$$
$$xS_n = x + 3x^2 + \ldots + (2n - 3)x^{n-1} + (2n - 1)x^n;$$

et, en retranchant membre à membre,

$$S_n(1 - x) = 1 + 2x + 2x^2 + \ldots + 2x^{n-1} - (2n - 1)x^n$$
$$= \frac{2(1 - x^n)}{1 - x} - 1 - (2n - 1)x^n.$$

D'où
$$S_n = \frac{2(1 - x^n)}{(1 - x)^2} - \frac{1 + (2n - 1)x^n}{1 - x}.$$

Comme $x < 1$, on sait que $\lim x^n = 0$ pour n infini. On montrerait comme au n° 477 qu'on a aussi $\lim (2n - 1)x^n = 0$ pour n infini. Il vient donc

$$\lim S_n = \frac{2}{(1 - x)^2} - \frac{1}{1 - x} = \frac{1 + x}{(1 - x)^2}.$$

2° $1 + 2^2x + 3^2x^2 + \dots + n^2x^{n-1}$. — On a

$$S_n = 1 + 2^2x + 3^2x^2 + \dots + n^2x^{n-1}$$
$$xS_n = x + 2^2x^2 + \dots + (n-1)^2x^{n-1} + n^2x^n,$$

et, en retranchant membre à membre,

$$S_n(1-x) = [1 + 3x + 5x^2 + \dots + (2n-1)x^{n-1}] - n^2x^n.$$

D'où $$S_n = \frac{2(1-x^n)}{(1-x)^3} - \frac{1+(2n-1)x^n}{(1-x)^2} - \frac{n^2x^n}{1-x}.$$

On montrerait comme au n° 477 que $\lim n^2x^n = 0$ pour x infini. On a donc :

$$\lim S_n = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

3° $1 + 3x + 6x^2 + \dots + \dfrac{n(n+1)}{2}x^{n-1}$.

Comme $\dfrac{p(p+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \dots + p$, la somme donnée peut s'écrire

$$S_n = 1 + (1+2)x + (1+2+3)x^2 + \dots + (1+2+\dots+n)x^{n-1},$$

ou encore,

$$S_n = (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}) + 2x(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-2}) + \dots + (n-1)x^{n-2}(1+x) + nx^{n-1}.$$

On a donc

$$S_n = \frac{1-x^n}{1-x} + \frac{2x(1-x^{n-1})}{1-x} + \dots + (n-1)x^{n-2}\frac{1-x^2}{1-x} + nx^{n-1}\frac{1-x}{1-x}$$
$$= \frac{1}{1-x}[1 + 2x + \dots + (n-1)x^{n-2} + nx^{n-1} - x^n(1+2+3+\dots+n)].$$

Or on a (273,5°)

$$1 + 2x + \dots + nx^{n-1} = \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x}.$$

Il vient donc finalement

$$S_n = \frac{1}{1-x}\left[\frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x} - \frac{n(n+1)}{2}x^n\right].$$

Quand n tend vers l'infini par valeurs entières positives, on a (477)

$$\lim (1-x^n) = 1; \quad \lim nx^n = 0; \quad \lim n(n+1)x^n = 0.$$

Par suite, $$\lim S_n = \frac{1}{(1-x)^3}.$$

481. *Calculer les sommes* ($r > 1$)

$$S = 1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \dots + \frac{1}{r^{n-1}} \quad \textit{et} \quad T = \frac{1}{r} + \frac{2}{r^2} + \dots + \frac{n}{r^n}$$

et calculer leur limite pour n *infini.*

1° Les termes de la somme S sont en progression géométrique; on a

$$S = \left(1 - \frac{1}{r^n}\right) : \left(1 - \frac{1}{r}\right) = \frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r-1)}.$$

En retranchant de S la somme T multipliée par r, on trouve

$$S - rT = -T + \frac{n}{r^n} \quad \text{ou} \quad S - (r-1)T = \frac{n}{r^n}. \tag{1}$$

Cette formule donne

$$T = \frac{1}{r-1}\left(\frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r-1)} - \frac{n}{r^n}\right) = \frac{r^{n+1} - r(n+1) + n}{r^n(r-1)^2}.$$

2° Comme $\lim \frac{1}{r^n} = 0$, on a

$$\lim S = 1 : \left(1 - \frac{1}{r}\right) = \frac{r}{r-1}.$$

L'égalité (1) montre qu'on a aussi

$$\lim T = \frac{1}{r-1}\left(\lim S - \lim \frac{n}{r^n}\right).$$

Or (477), $\lim \frac{n}{r^n} = 0$. Par suite, $\lim T = \frac{r}{(r-1)^2}$.

482. *Calculer la somme des termes de la suite*

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \dots + \frac{2^{n-1}}{1+x^{2^{n-1}}}$$

et trouver sa limite pour n *infini.*

Si $x = -1$, le premier terme de la suite n'est pas défini.

Si $x = 1$, on trouve $S_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2}$ et $\lim S_n = +\infty$.

Soit $x \neq \pm 1$. Le terme général de la suite peut s'écrire

$$\frac{2^{p-1}}{1+x^{2^{p-1}}} = \frac{2^{p-1}(1 - x^{2^{p-1}})}{1 - x^{2^p}} = \frac{2^{p-1}(2 - 1 - x^{2^{p-1}})}{1 - x^{2^p}}$$

$$= \frac{2^p}{1 - x^{2^p}} - \frac{2^{p-1}}{1 - x^{2^{p-1}}}.$$

Si l'on fait dans cette expression du terme général, $p = n$, $n - 1$, ..., 2, 1 et qu'on additionne, il reste

$$S_n = \frac{2^n}{1 - x^{2^n}} - \frac{1}{1-x}.$$

a) Si $|x| < 1$, on a

$$\lim 2^n = \infty; \quad \lim x^{2^n} = \lim (x^2)^{2^{n-1}} = 0; \quad \lim S_n = \infty.$$

b) Soit ensuite $|x| > 1$. On peut écrire

$$\frac{2^n}{1-x^{2n}} = \frac{2^n}{x^{2n}} : \left[\frac{1}{x^{2n}} - 1\right].$$

Le dividende peut s'écrire $\frac{2.2^{n-1}}{(x^2)^{2n-1}}$ et $\lim 2^{n-1} = +\infty$; il tend donc vers zéro (477). Le diviseur tend vers -1. On a donc

$$\lim S_n = \frac{1}{x-1}.$$

483. *Démontrer que* $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$ *quand* $n \geqslant 3$.

On vérifie aisément que cette inégalité est fausse quand $n = 1$ ou 2, mais qu'elle est exacte quand $n = 3$.

Pour démontrer que $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$ quand $n > 3$, il suffit de montrer qu'on a

$$n^{n+1} > (n+1)^n,$$

ou $$n \times n^n > n^n + \frac{n}{1} n^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} n^{n-2} + \ldots + 1,$$

ou encore,

$$n \times n^n > n^n + n^n + \frac{n-1}{2} n^{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{3!} n^{n-2} + \ldots$$

Le second membre de cette inégalité compte $n+1$ termes; chacun des $n-1$ derniers est inférieur à $\frac{n^n}{2}$. Le second membre est donc inférieur à

$$2n^n + \frac{n-1}{2} n^n = \frac{n+3}{2} n^n.$$

Or, $\frac{n+3}{2} < n$, quand $n > 3$. L'inégalité est donc exacte pour $n > 3$.

484. *Trouver la limite des fonctions suivantes quand* n *croît indéfiniment par valeurs entières positives.*

1° $y = \sqrt[n]{n}$.

On vient de montrer que cette fonction est décroissante (483). Elle reste évidemment supérieure à 1; démontrons qu'elle tend vers 1. A cet effet, il suffit de montrer que pour toutes les valeurs suffisamment grandes de n, on a

$$\sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon \quad \text{ou} \quad n < (1+\varepsilon)^n,$$

ε étant un nombre positif arbitraire.

Or, $$(1+\varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2.$$

Il suffit donc de montrer qu'on a

$$n < 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{n} - \frac{\varepsilon}{n-1} < \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Or cette inégalité est vérifiée pour les valeurs suffisamment grandes de n. Donc $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

2° $y = \dfrac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n+1]{n+1}}$.

Il résulte de l'exercice précédent que le numérateur et le dénominateur tendent vers 1. Donc $\lim y = 1$.

485. *Calculer la limite des expressions suivantes pour* x *infini, sachant que* a *et* b *sont positifs.*

1° $y = \dfrac{a^x - b^x}{a^x + b^x}$. — On peut écrire

$$y = 1 - \frac{2}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^x + 1}.$$

Supposons d'abord que x tende vers l'infini par valeurs positives.

a) Si $a > b$, on a

$$\lim \left(\frac{a}{b}\right)^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim y = 1.$$

b) Si $a < b$, on a

$$\lim \left(\frac{a}{b}\right)^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim y = -1.$$

c) Si $a = b$, y est constamment nul.

Si x tend vers $-\infty$, y a pour limite -1 ou $+1$, suivant que a est supérieur ou inférieur à b.

2° $y = \dfrac{a^{2x+1} + a^{-(2x+1)} + 1}{a^{2x} + a^{-2x} + 1}$.

En multipliant les deux termes de la fraction par a^{2x+1}, elle devient

$$y = \frac{a^2 \times a^{4x} + a \times a^{2x} + 1}{a(a^{4x} + a^{2x} + 1)}.$$

Supposons d'abord que x tende vers l'infini par valeurs positives.

a) Si $a < 1$, on a

$$\lim a^{4x} = 0, \quad \lim a^{2x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim y = \frac{1}{a}.$$

b) Si $a > 1$, on a $\lim a^{4x} = \lim a^{2x} = +\infty$. En écrivant

$$y = \frac{a^2 + \dfrac{a}{a^{2x}} + \dfrac{1}{a^{4x}}}{a\left(1 + \dfrac{1}{a^{2x}} + \dfrac{1}{a^{4x}}\right)},$$

on voit que $\lim y = a$.

c) Si $a = 1$, on a constamment $y = 1$.

Si x tend vers $-\infty$, y tend vers $\frac{1}{a}$ ou a, suivant que a est supérieur ou inférieur à 1.

3° $y = \left[\left(\frac{x+1}{x}\right)^x - \frac{x+1}{x}\right]^{-x}$. — On a

$$\lim \left[\frac{x+1}{x}\right]^x = \lim \left[1 + \frac{1}{x}\right]^x = e \quad \text{et} \quad \lim \frac{x+1}{x} = 1.$$

La limite de l'expression entre crochets est donc $e - 1$ pour x infini.

a) Supposons que x tende vers l'infini par valeurs positives et soit α un nombre positif constant, tel qu'on ait

$$\alpha < e - 2 \quad \text{ou} \quad e - 1 > 1 + \alpha.$$

Pour les valeurs suffisamment grandes de x, on a

$$\left[\frac{x+1}{x}\right]^x - \frac{x+1}{x} > 1 + \alpha \quad \text{et} \quad \left[\left(\frac{x+1}{x}\right)^x - \frac{x+1}{x}\right]^x > (1+\alpha)^x.$$

Pour les mêmes valeurs de x, on aura

$$0 < y < \frac{1}{(1+\alpha)^x}.$$

Or, $\frac{1}{(1+\alpha)^x}$ devient et reste inférieur à tout nombre positif arbitraire ε, quand x tend vers l'infini par valeurs positives. Donc $\lim y = 0$.

b) On montrerait d'une façon analogue que $\lim y = +\infty$, quand x tend vers l'infini par valeurs négatives.

486. *Les expressions*

$$\sqrt{2}.\sqrt[4]{2}.\sqrt[8]{2}\ldots, \quad \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}}, \quad \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$$

renferment n *radicaux. Calculer leur valeur et trouver leur limite pour* n *infini.*

1° Le première expression est égale à une puissance de 2 dont l'exposant est

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Cet exposant a comme limite 1 pour n infini. Or, une fonction exponentielle est une fonction continue. La limite cherchée est donc 2.

2° Désignons par $u_1, u_2, \ldots, u_n$ les nombres $\sqrt{2}$, $\sqrt{2\sqrt{2}}$, ... Ces nombres sont des puissances de 2 dont les exposants sont

$$\frac{1}{2}, \frac{1+2}{2^2}, \frac{1+2+2^2}{2^3}, \ldots, \frac{1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}}{2^n}.$$

L'exposant de u_n peut s'écrire

$$\frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Il tend vers 1. On a donc $\lim u_n = 2$.

3° Désignons par $u_1, u_2, \ldots, u_n$ les nombres $\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \ldots$ On a

$$u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}};\quad (u_n)^2 = 2 + u_{n-1};\quad 4 - (u_n)^2 = 2 - u_{n-1};$$

$$2 - u_n = \frac{2 - u_{n-1}}{2 + u_n}.$$

Dans cette dernière égalité, faisons successivement

$$n = 2, 3, 4, \ldots, n.$$

En multipliant les égalités ainsi obtenues, membre à membre, il vient

$$2 - u_n = \frac{2 - u_1}{(2 + u_2)(2 + u_3)\ldots(2 + u_n)} = \frac{2}{(2 + u_1)(2 + u_2)\ldots(2 + u_n)}$$

On a donc

$$0 < 2 - u_n < \frac{2}{2^n}.$$

Par suite, $\lim (2 - u_n) = 0$ et $\lim u_n = 2$.

Autre méthode. — a) La suite $u_1, u_2, \ldots$ est croissante. En effet, on a $u_1 = \sqrt{2} < u_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$. Il suffit donc de montrer que si l'on a $u_p > u_{p-1}$, il s'ensuit $u_{p+1} > u_p$; ce qui a lieu, car l'inégalité

$$u_{p+1} = \sqrt{2 + u_p} > u_p = \sqrt{2 + u_{p-1}}$$

est équivalente à $2 + u_p > 2 + u_{p-1}$ ou $u_p > u_{p-1}$.

b) Chaque terme de la suite est inférieur à 2, car $u_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} < 2$ et si $u_p < 2$, on a

$$u_{p+1} = \sqrt{2 + u_p} < \sqrt{2 + 2} = 2.$$

c) u_n croissant avec n et restant inférieur à 2, tend vers une limite x, pour laquelle on a

$$x = \sqrt{2 + x},\quad x^2 = 2 + x;\quad \text{d'où}\quad x = -1 \quad\text{ou}\quad 2.$$

Seule la racine positive convient. On a donc $\lim u_n = 2$.

487. *Calculer la somme*

$$\frac{4}{18} + \frac{5}{56} + \ldots + \frac{n + 1}{n(n + 3)(n - 2)}$$

et trouver sa limite pour n *infini.*

En posant

$$\frac{n+1}{n(n+3)(n-2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+3} + \frac{C}{n-2},$$

on obtient le système

$$A + B + C = 0; \quad A - 2B + 3C = 1; \quad -6A = 1;$$

sa solution est $A = -\frac{1}{6}$; $B = -\frac{2}{15}$; $C = \frac{3}{10}$.

On a ensuite :

$$u_3 = \frac{A}{3} + \frac{B}{6} + \frac{C}{1}$$

$$u_4 = \frac{A}{4} + \frac{B}{7} + \frac{C}{2}$$

....

$$u_n = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+3} + \frac{C}{n-2}.$$

En ajoutant membre à membre, il vient

$$S_n = A\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}\right] + B\left[\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{n+3}\right] + C\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-2}\right].$$

Dans chaque parenthèse figure la somme $\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{n-2}$. On peut supprimer dans le second membre le produit de cette somme par $A + B + C$, qui est nul. Il reste alors

$$S_n = A\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right] + B\left[\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n+3}\right] + C\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right].$$

Quand n tend vers l'infini, les fractions $\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n+3}$ tendent vers zéro et S_n tend vers une limite S, qui est

$$S = A\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right] + C\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right] = \frac{499}{900}.$$

488. *Trouver la limite, pour* n *infini, de l'expression*

$$y = \left[1 - \frac{1}{2^2}\right]\left[1 - \frac{1}{3^2}\right]\left[1 - \frac{1}{4^2}\right] \dots \left[1 - \frac{1}{n^2}\right].$$

Cette expression peut être considérée comme un produit de deux facteurs qui sont

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \ldots\ldots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$$

et
$$\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \ldots\ldots \times \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

On a donc

$$y = \frac{n+1}{2n} \quad \text{et} \quad \lim y = \frac{1}{2}.$$

489. *Calculer la limite des expressions*

$$2^n \sin \frac{a}{2^n} \quad \textit{et} \quad \cos \frac{a}{2} \cos \frac{a}{4} \ldots \cos \frac{a}{2^n}$$

quand n *croît indéfiniment.*

1° On a

$$y = 2^n \sin \frac{a}{2^n} = a \times \frac{2^n}{a} \times \sin \frac{a}{2^n} = a\left[\sin \frac{a}{2^n} : \frac{a}{2^n}\right].$$

Quand n croît indéfiniment, on trouve

$$\lim \frac{a}{2^n} = 0; \quad \lim\left[\sin \frac{a}{2^n} : \frac{a}{2^n}\right] = 1; \quad \lim y = a.$$

2° On peut écrire

$$\sin a = 2\sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} = 4\sin \frac{a}{4} \cos \frac{a}{2} \cos \frac{a}{4}$$
$$= \ldots = 2^n \sin \frac{a}{2^n} \cos \frac{a}{2} \cos \frac{a}{4} \ldots \cos \frac{a}{2^n}.$$

Comme $\lim 2^n \sin \frac{a}{2^n} = a$, on a

$$\lim \cos \frac{a}{2} \cos \frac{a}{4} \ldots\ldots \cos \frac{a}{2^n} = \frac{\sin a}{a}.$$

490. *On forme une suite illimitée de nombres* $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ *définie par les conditions*

$$u_1 = a; \quad u_2 = b; \quad u_n = \frac{u_{n-2} + u_{n-1}}{2}.$$

Démontrer que u_n *tend vers une limite quand* n *croît indéfiniment. Trouver cette limite.* (*E. M. Armes spéciales*, 1929).

La formule
$$u_n = \frac{u_{n-2} + u_{n-1}}{2} \tag{1}$$

donne
$$2u_n + u_{n-1} = 2u_{n-1} + u_{n-2}.$$

Cette formule de récurrence permet d'écrire

$$2u_n + u_{n-1} = 2u_{n-1} + u_{n-2} = 2u_{n-2} + u_{n-3} = \dots = 2u_2 + u_1 = 2b + a,$$

ou
$$2u_n + u_{n-1} = 2b + a. \qquad (2)$$

La formule (1) donne aussi

$$u_n - u_{n-1} = -\frac{1}{2}(u_{n-1} - u_{n-2}) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2(u_{n-2} - u_{n-3}) = \dots.$$

et par suite,

$$u_n - u_{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(u_2 - u_1) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(b - a). \qquad (3)$$

En additionnant (2) et (3) membre à membre, il vient

$$3u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(b - a) + (2b + a).$$

Quand n croît indéfiniment, $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-}$ tend vers zéro et on a

$$\lim 3u_n = 2b + a \quad \text{et} \quad \lim u_n = \frac{2b + a}{3}.$$

AUTRE MÉTHODE. — L'égalité

$$u_n - u_{n-1} = -\frac{1}{2}(u_{n-1} - u_{n-2})$$

donne successivement

$$u_3 - u_2 = -\frac{1}{2}(b - a);\ u_4 - u_3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2(b - a);\ \dots;$$

$$u_n - u_{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(b - a).$$

En additionnant ces égalités membre à membre, on trouve

$$u_n - u_2 = (b - a)\left[-\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right]$$

$$= -\frac{1}{3}(b - a)\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right].$$

On a donc

$$\lim (u_n - u_2) = \frac{1}{3}(a - b) \quad \text{et} \quad \lim u_n = \frac{a + 2b}{3}.$$

491. *Chercher les conditions pour que les fonctions suivantes soient indépendantes de* x.

1° $y = \dfrac{ax + b}{a'x + b'}$.

Cette fonction est définie et continue pour toutes les valeurs de x qui n'annulent pas $a'x + b'$. Pour qu'elle se réduise à une constante pour les mêmes valeurs de x, il faut et il suffit que sa dérivée $y' = \dfrac{ab' - ba'}{(a'x + b')^2}$ soit identiquement nulle, ou encore, que l'on ait $ab' - ba' = 0$.

1° *Minimum absolu de* $x^2 + y^2$, *quand* $ax + by = c$.

En appliquant *l'identité de Lagrange à quatre lettres*, on trouve

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2 = (ay - bx)^2,$$

ou
$$x^2 + y^2 = \frac{1}{a^2 + b^2}[c^2 + (ay - bx)^2].$$

Cette égalité montre que la fonction $x^2 + y^2$ a un minimum absolu égal à $\dfrac{c^2}{a^2 + b^2}$ quand $ay - bx = 0$.

Ce minimum a lieu pour les valeurs de x et de y vérifiant le système

$$ax + by = c; \quad ay - bx = 0.$$

De ces équations, on tire

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{ax + by}{a^2 + b^2} = \frac{c}{a^2 + b^2}; \quad \text{puis} \quad x = \frac{ac}{a^2 + b^2}; \quad y = \frac{bc}{a^2 + b^2}.$$

2° $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$.

y est défini et continu pour toutes les valeurs de x qui n'annulent pas son dénominateur. Poour les mêmes valeurs de x, y admet une dérivée finie

$$y' = \frac{(ab' - ba')x^2 + 2(ac' - ca')x + bc' - cb'}{(ax^2 + b'x + c')^2}.$$

Pour que cette dérivée soit nulle pour les mêmes valeurs de x, il faut et il suffit qu'on ait

$$ab' - ba' = ac' - ca' = bc' - cb' = 0.$$

Si a', b' et c' sont différents de zéro, ces conditions peuvent s'écrire

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

2° *Minimum absolu de* $x^2 + y^2 + z^2$, *quand* $ax + by + cz = d$.

On raisonne comme pour l'exercice précédent, en partant *de l'identité de Lagrange à six lettres*

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2$$
$$= (az - cx)^2 + (bx - ay)^2 + (cy - bz)^2.$$

Le minimum absolu est $\dfrac{d^2}{a^2 + b^2 + c^2}$ et il a lieu pour

$$x = \frac{ad}{a^2 + b^2 + c^2}; \quad y = \frac{bd}{a^2 + b^2 + c^2}; \quad z = \frac{cd}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

3° *Maximum absolu de* $ax + by$ *quand* $x^2 + y^2 = k^2$.

Les identités

$$(ax + by)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy$$
$$(bx - ay)^2 = b^2x^2 + a^2y^2 - 2abxy$$

donnent

$$(ax + by)^2 + (bx - ay)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$$

ou

$$(ax + by)^2 = k^2(a^2 + b^2) - (bx - ay)^2.$$

La fonction $ax + by$ a un maximum absolu égal à $k\sqrt{a^2 + b^2}$, pour les valeurs de x et de y vérifiant le système

$$bx - ay = 0; \quad x^2 + y^2 = k^2.$$

Ce système donne

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{k}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

D'où

$$x = \frac{ak}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad y = \frac{bk}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

4° *Maximum absolu de* $x^{13}y^{12}$ *quand* $x^2y^3 + x^3y^2 = 180$.

On a

$$x^{13}y^{12} = (x^2y^3)^2 \times (x^3y^2)^3.$$

La fonction est maximum absolu quand

$$\frac{x^2y^3}{2} = \frac{x^3y^2}{3}; \quad x^2y^3 + x^3y^2 = 180.$$

Ce système donne $x = 3$, $y = 2$. Le maximum absolu est $3^{13}.2^{12}$.

5° *Maximum absolu de* $(x + 1)(y + 1)$ *quand* $2^x.3^y = 5$.

On a

$$2^{x+1}.3^{y+1} = 30 \quad \text{et} \quad (x + 1)\log 2 + (y + 1)\log 3 = \log 30.$$

$(x + 1)(y + 1)$ est maximum absolu avec $(x + 1)\log 2 \times (y + 1)\log 3$, donc quand on a

$$(x + 1)\log 2 = (y + 1)\log 3 = \frac{\log 30}{2}.$$

Si x tend vers zéro par valeurs négatives, on a

$$\lim \frac{1}{x} = -\infty; \quad \lim 2^{\frac{1}{x}} = 0; \quad \lim y = 2.$$

Si x tend vers zéro par valeurs positives, on a

$$\lim \frac{1}{x} = +\infty; \quad \lim 2^{\frac{1}{x}} = +\infty;$$

et
$$\lim y = \lim \left[1 + \frac{2}{2^{\frac{1}{x}}}\right] : \lim \left[1 + \frac{1}{2^{\frac{1}{x}}}\right] = 1.$$

Les limites à gauche et à droite de y, pour $x = 0$, sont donc finies et distinctes. Il en résulte que y a pour $x = 0$ une discontinuité par saut brusque.

494. *Étudier la continuité de la fonction* $y = x^2 + E\left(\frac{1}{1 + x^2}\right)$, *sachant que* $E\left(\frac{1}{1 + x^2}\right)$ *représente le plus grand entier contenu dans* $\frac{1}{1 + x^2}$.

Si $x \neq 0$, on a $\frac{1}{1 + x^2} < 1$ et y se réduit à x^2; si $x = 0$, on a $E\left(\frac{1}{1 + x^2}\right) = 1$ et $y = 1$. La fonction y est donc définie pour toutes les valeurs de x.

Si x tend vers zéro par valeurs positives ou négatives, $y = x^2$ tend vers zéro. Ainsi, quand x tend vers zéro, y tend vers une limite qui diffère de la valeur de y pour $x = 0$. Donc la fonction n'est pas continue pour $x = 0$. Elle est évidemment continue pour les autres valeurs de x.

495. *Dans les exercices suivants,* x, y *et* z *sont des variables positives*; a, b, ... *sont des constantes positives.*

1° *Minimum absolu de* $x^2 + y^2$, *quand* $ax + by = c$.

En appliquant *l'identité de Lagrange à quatre lettres*, on trouve

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2 = (ay - bx)^2,$$

ou
$$x^2 + y^2 = \frac{1}{a^2 + b^2}[c^2 + (ay - bx)^2].$$

Cette égalité montre que la fonction $x^2 + y^2$ a un minimum absolu égal à $\frac{c^2}{a^2 + b^2}$ quand $ay - bx = 0$.

Ce minimum a lieu pour les valeurs de x et de y vérifiant le système

$$ax + by = c; \quad ay - bx = 0.$$

De ces équations, on tire

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{ax + by}{a^2 + b^2} = \frac{c}{a^2 + b^2}; \quad \text{puis} \quad x = \frac{ac}{a^2 + b^2}; \quad y = \frac{bc}{a^2 + b^2}.$$

2° *Minimum absolu de* $x^2 + y^2 + z^2$, *quand* $ax + by + cz = d$.

On raisonne comme pour l'exercice précédent, en partant *de l'identité de Lagrange à six lettres*

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2$$
$$= (az - cx)^2 + (bx - ay)^2 + (cy - bz)^2.$$

Le minimum absolu est $\dfrac{d^2}{a^2 + b^2 + c^2}$ et il a lieu pour

$$x = \frac{ad}{a^2 + b^2 + c^2}; \quad y = \frac{bd}{a^2 + b^2 + c^2}; \quad z = \frac{cd}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

3° *Maximum absolu de* $ax + by$ *quand* $x^2 + y^2 = k^2$.

Les identités

$$(ax + by)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy$$
$$(bx - ay)^2 = b^2x^2 + a^2y^2 - 2abxy$$

donnent

$$(ax + by)^2 + (bx - ay)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$$

ou

$$(ax + by)^2 = k^2(a^2 + b^2) - (bx - ay)^2.$$

La fonction $ax + by$ a un maximum absolu égal à $k\sqrt{a^2 + b^2}$, pour les valeurs de x et de y vérifiant le système

$$bx - ay = 0; \quad x^2 + y^2 = k^2.$$

Ce système donne

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{k}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

D'où

$$x = \frac{ak}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad y = \frac{bk}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

4° *Maximum absolu de* $x^{13}y^{12}$ *quand* $x^2y^3 + x^3y^2 = 180$.

On a

$$x^{13}y^{12} = (x^2y^3)^2 \times (x^3y^2)^3.$$

La fonction est maximum absolu quand

$$\frac{x^2y^3}{2} = \frac{x^3y^2}{3}; \quad x^2y^3 + x^3y^2 = 180.$$

Ce système donne $x = 3$, $y = 2$. Le maximum absolu est $3^{13}.2^{12}$.

5° *Maximum absolu de* $(x + 1)(y + 1)$ *quand* $2^x.3^y = 5$.

On a

$$2^{x+1}.3^{y+1} = 30 \quad \text{et} \quad (x + 1)\log 2 + (y + 1)\log 3 = \log 30.$$

$(x + 1)(y + 1)$ est maximum absolu avec $(x + 1)\log 2 \times (y + 1)\log 3$, donc quand on a

$$(x + 1)\log 2 = (y + 1)\log 3 = \frac{\log 30}{2}.$$

Ce système donne

$$x + 1 = \frac{\log 30}{\log 4}; \quad x = \frac{\log 30}{\log 4} - 1, \text{ ou approx. } 1{,}453;$$

$$y + 1 = \frac{\log 30}{\log 9}; \quad y = \frac{\log 30}{\log 9} - 1, \text{ ou approx. } 0{,}547.$$

Le maximum absolu est $\dfrac{(\log 30)^2}{\log 4 \times \log 9}$.

496. *Déterminer* x *pour que* 3, 2 — x *et* $\sqrt{x^2 + 8x + 7}$ *soient les mesures des côtés d'un triangle; chercher ensuite le maximum absolu de l'aire de ce triangle.*

1° Il faut d'abord que les côtés soient réels et positifs; ce qui exige $2 - x > 0$ et $x^2 + 8x + 7 > 0$. Ces inégalités sont satisfaites pour

$$x < -7 \quad \text{et} \quad -1 < x < 2.$$

Il faut ensuite qu'un côté soit compris entre la somme et la différence des deux autres. On doit donc avoir :

$$\sqrt{x^2 + 8x + 7} > |\, 3 - (2 - x)\,| = |\, 1 + x \,|;$$

$$\sqrt{x^2 + 8x + 7} < 3 + 2 - x = 5 - x.$$

Les deux membres de ces inégalités étant positifs, on peut les élever au carré. Il vient ainsi

$$x^2 + 8x + 7 > x^2 + 2x + 1 \quad \text{ou} \quad x > -1$$

et

$$x^2 + 8x + 7 < x^2 - 10x + 25 \quad \text{ou} \quad x < 1.$$

En résumé, on doit avoir $-1 < x < 1$.

2° Posons

$$2p = 3 + 2 - x + \sqrt{x^2 + 8x + 7} = 5 - x + \sqrt{x^2 + 8x + 7}.$$

L'aire du triangle est

$$S = \sqrt{p(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{[(5 - x)^2 - (x^2 + 8x + 7)]\,[x^2 + 8x + 7 - (1 + x)^2]}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{3(1 + x)\,(1 - x)}.$$

La somme des facteurs du produit $(1 + x)(1 - x)$ est constante. S est donc maximum absolu quand on a $1 + x = 1 - x$ ou $x = 0$.

L'aire maximum est $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

497. *Chercher les conditions pour que la fonction* $x^3 + 3px + q$ *admette deux extrémés opposés.*

La dérivée de $y = x^3 + 3px + q$ est

$$y' = 3(x^2 + p).$$

Pour que y admette deux extrémés, il faut et il suffit que y' admette deux racines distinctes, ou bien, que l'on ait $p < 0$.

Quand cette condition est remplie, les racines de y' sont

$$x_1 = \sqrt{-p} \quad \text{et} \quad x_2 = -x_1 = -\sqrt{-p}.$$

Les deux extrémés sont

$$(x_1)^3 + 3px_1 + q \quad \text{et} \quad -(x_1)^3 - 3px_1 + q.$$

Pour que leur somme soit nulle, il faut et il suffit qu'on ait $q = 0$.

498. *Déterminer* m *pour que le graphique de* $\mathrm{y = x^3 - 1 - m(x - 1)}$ *soit tangent à l'axe des* x.

Si la courbe est tangente à l'axe des x, l'abscisse du point de contact vérifie les équations

$$y = x^3 - 1 - m(x - 1) = 0 \quad \text{et} \quad y' = 3x^2 - m = 0.$$

La première équation donne, après avoir remplacé m par $3x^2$, $x = -0{,}5$ et $x = 1$. La deuxième équation donne ensuite les valeurs cherchées de m,

$$m = 0{,}75 \quad \text{et} \quad m = 3.$$

Pour $m = \frac{3}{4}$, on a la fonction $y = x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$ dont le graphique est tangent à Ox au point $(-0{,}5,\ 0)$; pour $m = 3$, on a la fonction $y = x^3 - 3x + 2$, dont le graphique est tangent à Ox au point $(1, 0)$.

499. *Un polynôme entier* f(x) *du* 5^e^ *degré et ses deux* 1^res^ *dérivées s'annulent pour* x = 5; *il a un minimum nul pour* x = 0, *et un maximum égal à* 108 *pour* x = 2. *Déterminer ce polynôme et étudier ses variations.*

Le polynôme $f(x)$ est divisible par $(x - 5)^3$, car il s'annule, ainsi que ses deux premières dérivées, pour $x = 5$; il est également divisible par x^2, car, ayant un minimum nul pour $x = 0$, il s'annule ainsi que sa dérivée pour $x = 0$. On a donc, A étant une constante,

$$y = Ax^2(x - 5)^3;$$

$$y' = A[2x(x - 5)^3 + 3x^2(x - 5)^2] = Ax(x - 5)^2\,(5x - 10).$$

La dérivée s'annule deux fois, en changeant de signe. La fonction a donc deux extrémés, un pour $x = 0$ et un autre pour $x = 2$. Ce dernier extrémé est $-108A = 108$; d'où $A = -1$.

On a donc

$$y = -x^2(x - 5)^3; \quad y' = -5x(x - 2)\,(x - 5)^2;$$

et le tableau :

x	$-\infty$		0		2		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	0 *Min.*	↗	108 *Max.*	↘	0	↘	$-\infty$

La dérivée seconde $-10(x-5)(2x^2-8x+5)$ s'annule en changeant de signe pour $x=5$; à cette valeur de x correspond donc un point d'inflexion du graphique.

500. *Étudier les variations de la fonction*

$$y = \left(4+\frac{m}{2}-x^2\right)^2 + [2(1-m)-x]^2$$

et classer les extrémés par ordre de grandeur.

En calculant la dérivée de y, on trouve

$$y' = 2(x-2)(2x^2+4x+1-m).$$

La dérivée s'annule pour $x=2$. L'équation

$$\varphi(x) = 2x^2+4x+1-m = 0$$

donne deux autres racines α et β $(\alpha < \beta)$ de la dérivée, si

$$4-2(1-m) > 0 \quad \text{ou} \quad m > -1.$$

Ces racines comprennent 2, si

$$\varphi(2) = 17-m < 0 \quad \text{ou} \quad m > 17.$$

Si m est compris entre -1 et 17, 2 est extérieur aux racines de $\varphi(x)=0$ et comme $2 > \dfrac{\alpha+\beta}{2} = -1$, 2 sera supérieur aux racines.

En tenant compte de ces résultats, on est conduit à distinguer les cas suivants :

1° $m \leqslant -1$. — La fonction n'a qu'une valeur extrême qui est un minimum et qui a lieu pour $x=2$.

2° Si $-1 < m < 17$, les variations de la fonction sont données par le tableau :

x	$-\infty$		α		β		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	y_1 *Min.*	$\nearrow$	y_2 *Max.*	$\searrow$	y_3 *Min.*	$\nearrow$	$+\infty$

Comme $y_2 > y_1$ et $y_2 > y_3$, il suffit de comparer y_1 et y_3. On a successivement

$$\begin{aligned} y_1 - y_3 &= \left(4+\frac{m}{2}-\alpha^2\right)^2 + (2-2m-\alpha)^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2 - (2m)^2 \\ &= (4+m-\alpha^2)(4-\alpha^2) + (2-4m-\alpha)(2-\alpha) \\ &= (2-\alpha)[(4-\alpha^2)(2+\alpha) + m(2+\alpha) + 2 - 4m - \alpha] \\ &= (2-\alpha)[(4-\alpha^2)(2+\alpha) + (1-m)(2-\alpha)] \\ &= (2-\alpha)^2[(2+\alpha)^2 + 1 - m]. \end{aligned}$$

En remplaçant $1 - m$ par sa valeur tirée de la relation $\varphi(\alpha) = 0$, il vient

$$y_1 - y_3 = (2 - \alpha)^2 \, [(2 + \alpha)^2 - 2\alpha(2 + \alpha)] = (2 - \alpha)^3 \, (2 + \alpha).$$

Mais $2 - \alpha > 0$; donc $y_1 - y_3$ a le signe de $2 + \alpha$. Or, en comparant -2 aux racines de l'équation $\varphi(x) = 0$, on reconnaît aisément que

$$< -2 < \beta, \quad \text{si} \quad 1 < m < 17;$$
$$-2 < \quad < \quad \text{si} \quad -1 < m < 1.$$

Par suite, y_1 est supérieur ou inférieur à y_3 suivant que m est pris dans l'intervalle $(-1, 1)$ ou dans l'intervalle $(1, 17)$. Si $m = 1$, on a $\alpha + 2 = 0$ et $y_1 = y_3$.

3° S $m > 17$, le tableau des variations s'obtient en échangeant 2 et β dans le tableau précédent (2°).

On calcule ensuite la différence $y_1 - y_3$ et on y remplace $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ par leurs valeurs tirées de l'équation $\varphi(x) = 0$. On trouve ainsi $y_1 - y_3 < 0$ ou $y_1 < y_3$.

4° Si $m = 17$, la dérivée devient $y' = 4(x - 2)^2 \, (x + 4)$. La fonction n'a qu'une valeur extrême qui est un minimum, pour $x = -4$.

501. *On considère les fonctions* :

$$y = x^3 + 3px + q \quad \textit{et} \quad z = x^3 + 3p'x^2 + q'.$$

Déterminer p *et* q *de telle sorte que la fonction* y *admette un maximum égal au maximum de la fonction* z, *et un minimum égal au minimum de la fonction* z.

La dérivée de y est $y' = 3x^2 + 3p$. En supposant p négatif, elle admet deux racines

$$x_1 = -\sqrt{-p} \quad \text{et} \quad x_2 = \sqrt{-p},$$

et elle est négative entre ces limites. Pour $x = x_1$, on aura un maximum $y_1 = -2p\sqrt{-p} + q$, et pour $x = x_2$, on aura un minimum $y_2 = 2p\sqrt{-p} + q$.

La dérivée de z est $z' = 3x^2 + 6p'x$. En supposant p' différent de zéro, elle admet deux racines distinctes

$$x_3 = -2p' \quad \text{et} \quad x_4 = 0.$$

Elle aura deux extrémés qui sont

$$z_3 = 4p'^3 + q' \quad \text{et} \quad z_4 = q'.$$

1° Si $p' > 0$, z_3 est un maximum et z_4, un minimum. On a le système

$$-2p\sqrt{-p} + q = 4p'^3 + q', \quad 2p\sqrt{-p} + q = q',$$

qui donne
$$p = -p'^2, \quad q = 2p'^3 + q'.$$

2° Si $p' < 0$, z_3 est un minimum et z_4, un maximum. On a le système

$$-2p\sqrt{-p} + q = q', \quad 2p\sqrt{-p} + q = 4p'^3 + q',$$

qui donne encore
$$p = -p'^2, \quad q = 2p'^3 + q'.$$

502. *On considère la fraction rationnelle*

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

dont un terme est du second degré et l'autre du premier ou du second degré. Déterminer le nombre de ses extrémés, et comparer ces extrémés quand il y en a deux.

I. NOMBRE DES EXTRÉMÉS. — Désignons le numérateur de y par $P(x)$ et le dénominateur par $Q(x)$. Le résultant des équations $P(x) = 0$ et $Q(x) = 0$ est $R = (ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb')$.

Pour toutes les valeurs de x qui n'annulent pas $Q(x)$, la fonction y admet une dérivée finie. Le dénominateur de cette dérivée y' est $[Q(x)]^2$; son numérateur est

$$\varphi(x) = (2ax + b)(a'x^2 + b'x + c') - (ax^2 + bx + c)(2a'x + b') \qquad (1)$$

ou $\varphi(x) = (ab' - ba')x^2 + 2(ac' - ca')x + bc' - cb'$;
c'est un trinôme du second degré en x dont le réalisant est R.

1er cas : $R = 0$. — *Montrons que la fonction n'a pas d'extrémé dans ce cas.*

1° Si $ab' - ba' \neq 0$, les équations $P(x) = 0$ et $Q(x) = 0$ ont une seule racine réelle commune et y se réduit à une fonction homographique ou à une fonction linéaire.

2° Si $ab' - ba' = 0$, l'hypothèse $R = 0$ exige $ac' - ca' = 0$ et les équations $P(x) = 0$ et $Q(x) = 0$ ont deux racines réelles ou complexes communes; y se réduit alors à une constante.

2e cas : $R < 0$. — *La fonction n'a pas d'extrémé*, car la dérivée y' ne s'annule pour aucune valeur de x.

3e cas : $R > 0$ et $ab' - ba' \neq 0$. — Le numérateur $\varphi(x)$ de y' a deux racines distinctes x_1 et x_2.

Si l'une de ces racines annule $Q(x)$, l'hypothèse $R > 0$ exige qu'elle n'annule pas $P(x)$. L'expression (1) de $\varphi(x)$ montre alors qu'elle annule $Q'(x) = 2a'x + b'$. Elle annule donc $Q(x)$ et sa dérivée, et par suite, elle est une racine double de $Q(x)$. Réciproquement, si $Q(x)$ a une racine double, celle-ci annule $Q'(x)$, et aussi $\varphi(x)$, à cause de l'expression (1) de $\varphi(x)$. De tout cela, il résulte que :

1° Si $b'^2 - 4a'c' \neq 0$, aucune des deux racines distinctes de $\varphi(x)$ n'annule $Q(x)$. *La fonction a deux extrémés* et on voit aisément que l'un est un maximum et l'autre un minimum.

2° Si $b'^2 - 4a'c' = 0$, l'une des racines de $\varphi(x)$ annule $Q(x)$. Pour cette valeur de x, la fonction y est discontinue par passage à l'infini; sans changement de signe, car y' change de signe, quand x passe par la racine considérée de $\varphi(x)$.

A l'autre racine de $\varphi(x)$ correspond *un extrémé* de y.

4e cas : $R > 0$ et $ab' - ba' = 0$. — L'hypothèse $R > 0$ exige alors $ac' - ca' \neq 0$; $\varphi(x)$ est donc un binôme du premier degré en x qui admet toujours une racine x_1. En raisonnant comme pour le 3e cas, on aboutit aux conclusions suivantes :

1° Si $b'^2 - 4a'c' \neq 0$, x_1 n'annule pas $Q(x)$ et y a *un extrémé*.

2° Si $b'^2 - 4a'c' = 0$, x_1 annule $Q(x)$ et y n'a *pas d'extrémé*. Pour $x = x_1$, la fonction y est discontinue par passage à l'infini sans changement de signe.

Résumé.

1° $R \leqslant 0$; ni maximum, ni minimum.

2° $R > 0$ et $ab' - ba' \neq 0$ $\left\{\begin{array}{l} b'^2 - 4a'c' \neq 0; \text{ un maximum et un minimum.} \\ b'^2 - 4a'c' = 0; \text{ un extrémé et une discontinuité} \\ \quad \text{par passage à l'infini, sans changement de signe.} \end{array}\right.$

3° $R > 0$ et $ab' - ba' = 0$ $\left\{\begin{array}{l} b'^2 - 4a'c' \neq 0; \text{ un extrémé.} \\ b'^2 - 4a'c' = 0; \text{ pas d'extrémé, mais une discon-} \\ \quad \text{tinuité par passage à l'infini sans changement} \\ \quad \text{de signe.} \end{array}\right.$

De ce tableau, il résulte que les conditions nécessaires et suffisantes pour que y ait deux extrémés sont

$$R > 0; \quad ab' - ba' \neq 0; \quad b'^2 - 4a'c' \neq 0.$$

Supposons que ces conditions soient remplies et proposons-nous de comparer les deux extrémés de y.

II. Comparaison des deux extrémés de y. — Soient x_1, x_2 les racines de $\varphi(x)$ et de y', et y_1, y_2 les valeurs correspondantes de y.

En supposant $y' = 0$, la relation (1) devient

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} = \frac{2ax + b}{2a'x + b'},$$

pourvu que $Q(x)$ et $Q'(x)$ soient différents de zéro. Or, x_1 et x_2 annulent y' sans annuler $Q(x)$ et $Q'(x)$. Par suite, pour $x = x_1$ ou x_2, la fraction y est égale au rapport des dérivées de ses deux termes. On peut donc écrire

$$y_1 = \frac{2ax_1 + b}{2a'x_1 + b'} \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{2ax_2 + b}{2a'x_2 + b'}.$$

On en déduit

$$y_1 - y_2 = \frac{2ax_1 + b}{2a'x_1 + b'} - \frac{2ax_2 + b}{2a'x_2 + b'} = \frac{2(ab' - ba')(x_1 - x_2)}{4a'^2x_1x_2 + 2a'b'(x_1 + x_2) + b'^2}$$

ou, en remplaçant x_1x_2 et $x_1 + x_2$ par leurs valeurs,

$$y_1 - y_2 = \frac{2(ab' - ba')(x_1 - x_2)}{b'^2 - 4a'c'}. \tag{2}$$

Supposons que x_1 désigne la plus petite racine de $\varphi(x)$.

1° Si $ab' - ba' > 0$, on voit aisément que y_1 est le maximum de y. L'égalité (2) montre que ce maximum est supérieur au minimum y_2 quand $b'^2 - 4a'c' < 0$; il est inférieur au minimum quand $b'^2 - 4a'c' > 0$.

2° Si $ab' - ba' < 0$, on voit aisément que y_2 est le maximum de y. L'égalité (2) montre que ce maximum est encore supérieur au minimum y_1 quand $b'^2 - 4a'c' < 0$; et inférieur au minimum quand $b'^2 - 4a'c' > 0$.

503. *On considère les trinômes* ($aa' \neq 0$)

$$P(x) = ax^2 + bx + c \quad \textit{et} \quad Q(x) = a'x^2 + b'x + c'$$

et on suppose que la fonction $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *admette un maximum et un minimum.*

Montrer que :

1° *Le résultant* $R = (ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb')$ *des trinômes* P(x) *et* Q(x) *est positif.*

2° *Si les racines* α', β' *de* Q(x) *existent, elles sont alternées avec les valeurs* x', x'' *de* x *pour lesquelles* y *devient maximum et minimum.*

3° *Si, en plus,* P(x) *admet deux racines distinctes* α, β, *les nombres* α, β *sont tous deux dans l'intervalle* (α', β') *ou tous deux en dehors.*

1° La dérivée de y est $y' = \dfrac{\varphi(x)}{[Q(x)]^2}$, en posant

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= (2ax + b)\,Q(x) - (2a'x + b')\,P(x) \qquad (1)\\ &= (ab' - ba')x^2 + 2(ac' - ca')x + (bc' - cb').\end{aligned}$$

Par hypothèse, y admet deux valeurs extrêmes, ce qui exige que $\varphi(x)$ ait deux racines distinctes x' et x'', ou encore, que le réalisant de $\varphi(x)$, qui est R, soit positif.

2° Si $Q(x)$ a des racines α', β', celles-ci sont distinctes (**502,I**). Pour montrer qu'elles sont alternées avec les racines x', x'' de $\varphi(x)$, il suffit de montrer que $\varphi(\alpha')$ et $\varphi(\beta')$ ont des signes différents, ou encore, que l'on a

$$\varphi(\alpha') \times \varphi(\beta') < 0.$$

En prenant $\varphi(x)$ sous la forme (1), on voit que l'on a

$$\varphi(\alpha') \times \varphi(\beta') = (2a'\alpha' + b')(2a'\beta' + b')\,P(\alpha')\,P(\beta').$$

En remplaçant $\alpha' + \beta'$ et $\alpha'\beta'$ par leurs valeurs, il vient

$$\begin{aligned}(2a'\alpha' + b')(2a'\beta' + b') &= 4a'^2\alpha'\beta' + 2a'b'(\alpha' + \beta') + b'^2\\ &= 4a'c' - b'^2;\end{aligned}$$

cette expression est le réalisant de $Q(x) = 0$, changé de signe; elle est donc négative, puisque $Q(x)$ a deux racines réelles.

D'autre part, on a (*Première partie*, **965**)

$$P(\alpha') \times P(\beta') = \frac{R}{a'^2},$$

qui est positif comme R(1°). Par suite,

$$\varphi(\alpha') \times \varphi(\beta') < 0.$$

3° Pour que α' et β' soient entre α et β, il suffit d'avoir $aP(\alpha') < 0$ et $aP(\beta') < 0$; ou encore,

$$P(\alpha') \times P(\beta') > 0 \quad \text{et} \quad a[P(\alpha') + P(\beta')] < 0.$$

Pour que α' et β' soient extérieurs à α et β, il suffit d'avoir $aP(\alpha') > 0$ et $aP(\beta') > 0$; ou encore,

$$P(\alpha') \times P(\beta') > 0 \quad \text{et} \quad a[P(\alpha') + P(\beta')] > 0.$$

Par suite, pour que α' et β' soient à la fois entre α et β ou en dehors, il suffit d'avoir $P(\alpha') \times P(\beta') > 0$ et on a vu au 2° que cette condition est réalisée. Cela entraîne, inversement, que α et β sont à la fois entre α' et β' ou en dehors.

504. *Déterminer* m *pour que la fonction* $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + m}$ *ait un maximum et un minimum, le maximum étant plus petit que le minimum.*

La dérivée de y est

$$y' = \frac{-4x^2 + 2x(m+1) - 4}{(x^2 - 4x + m)^2}.$$

1° Le numérateur de y' doit admettre deux racines distinctes, ce qui exige

$$(m+1)^2 - 16 = m^2 + 2m - 15 > 0.$$

Cette inéquation est vérifiée par

$$m < -5 \quad \text{et} \quad m > 3. \tag{1}$$

2° Aucune de ces racines ne doit annuler le dénominateur de y'. Le résultant des trinômes $-4x^2 + 2x(m+1) - 4$ et $x^2 - 4x + m$ doit donc être différent de zéro. On est ainsi conduit à la relation

$$m^3 - 2m^2 - 23m + 60 = (m-3)(m-4)(m+5) \neq 0.$$

En plus des conditions (1), on doit donc avoir

$$m \neq 4. \tag{2}$$

On aurait abouti au même résultat en écrivant que le dénominateur de y ne doit pas avoir de racine double (**502**, I).

3° Soient α, β les racines de y', α étant la plus petite; et y_1, y_2 les valeurs extrêmes correspondantes de y. Le numérateur de y' est négatif pour $x < \alpha$, positif pour $\alpha < x < \beta$, négatif pour $x > \beta$; donc y_1 est un minimum et y_2, un maximum.

Le rapport des dérivées des termes de y est $\dfrac{2x}{2x-4}$. On a donc

$$y_1 = \frac{\alpha}{\alpha - 2}; \quad y_2 = \frac{\beta}{\beta - 2};$$

et la relation $y_1 > y_2$ donne

$$\frac{\alpha}{\alpha - 2} - \frac{\beta}{\beta - 2} > 0 \quad \text{ou} \quad \frac{2(\beta - \alpha)}{\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 4} > 0;$$

ou encore, $\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 4 > 0$, car $\beta > \alpha$. En remplaçant $\alpha\beta$ et $\alpha + \beta$, il vient

$$-m + 4 > 0 \quad \text{ou} \quad m < 4. \tag{3}$$

4° Les relations (1), (2), (3) montrent qu'on doit avoir

$$m < -5 \quad \text{ou} \quad 3 < m < 4.$$

REMARQUE. — Comme $ab' - ba' = -4 < 0$, l'étude du nº **502** montre qu'il suffit d'avoir

$$b'^2 - 4a'c' = 4 - m > 0;$$
$$R = (m + 1)^2 - 16 = (m + 5)(m - 3) > 0.$$

La résolution de ces inéquations donne encore

$$m < -5 \text{ ou } 3 < m < 4.$$

505. *Déterminer* p *et* q *pour que la fonction*

$$y = \frac{2x^2 + px + 3}{x^2 + qx + 2q - 3}$$

ait une seule valeur extrême.

Nous utiliserons les résultats de la discussion du nº **502**. On trouve :

$$R = 2p^2q - 4pq^2 - 3p^2 + 22q^2 + 3pq - 72q + 81;$$
$$ab' - ba' = 2q - p;$$
$$b'^2 - 4a'c' = q^2 - 8q + 12 = (q - 2)(q - 6).$$

La fonction n'a qu'une valeur extrême dans les deux cas suivants :

1º $R > 0$; $ab' - ba' \neq 0$; $b'^2 - 4a'c' = 0$.

La relation

$$b'^2 - 4a'c' = (q - 2)(q - 6) = 0$$

donne

$$q = 2 \quad \text{et} \quad q = 6.$$

a) Si $q = 2$, les deux premières relations deviennent

$$R = (p - 5)^2 > 0 \quad \text{et} \quad ab' - ba' = 4 - p \neq 0.$$

Elles sont vérifiées si p est différent de 4 et de 5.

b) Si $q = 6$, les deux premières relations deviennent

$$R = 9(p - 7)^2 > 0 \quad \text{et} \quad ab' - ba' = 12 - p \neq 0.$$

Elles sont vérifiées si p est différent de 7 et de 12.

2º $R > 0$; $ab' - ba' = 0$; $b'^2 - 4a'c' \neq 0$.

La relation

$$ab' - ba' = 2q - p = 0$$

donne $p = 2q$. En faisant $p = 2q$, R se réduit à $(4q - 9)^2$. Par suite, il suffit d'avoir

$$p = 2q; \quad q \text{ différent de } 2,\ 2{,}25 \text{ et } 6.$$

506. *La fonction* $y = \dfrac{x^2 - 2px + 1}{x - q}$ *a pour maximum* a *et pour minimum* b. *Calculer* p *et* q.

Soient α et β les valeurs de x qui correspondent respectivement aux valeurs a et b de y. La dérivée

$$y' = \frac{x^2 - 2qx + 2pq - 1}{(x - q)^2}$$

aura pour racines α et β, ce qui donne

$$\alpha + \beta = 2q \quad \text{et} \quad \alpha\beta = 2pq - 1. \qquad (1)$$

Les valeurs extrêmes de y sont les valeurs du rapport $\dfrac{2x-2p}{1}$ des dérivées des deux termes de y pour $x = \alpha$ et $x = \beta$. On a donc

$$a = 2\alpha - 2p \quad \text{et} \quad b = 2\beta - 2p. \tag{2}$$

En remplaçant dans (1) α et β par leurs valeurs tirées des relations (2), il vient

$$a + b + 4p = 4q$$
$$(a + 2p)(b + 2p) = 4(2pq - 1).$$

Ce système donne

$$p = \pm\frac{1}{2}\sqrt{ab+4}, \quad q = \frac{1}{4}(a + b \pm 2\sqrt{ab+4}),$$

les signes $+$ étant en correspondance, ainsi que les signes $-$. On trouve également

$$\alpha = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{ab+4}); \quad \beta = \frac{1}{2}(b \pm \sqrt{ab+4}). \tag{3}$$

Ces réponses exigent $ab + 4 \geqslant 0$. D'autre part, y' étant positif pour les valeurs de x extérieures à ses racines, et négatif pour les valeurs de x intérieures à ses racines, le maximum de y correspond à la plus petite racine de y'. On doit donc avoir $\alpha < \beta$, ou, en tenant compte de (3), $a < b$.

Les conditions $ab + 4 \geqslant 0$ et $a < b$ sont d'ailleurs suffisantes, car si $a < b$, on a aussi $\alpha < q < \beta$. Les racines du numérateur de la dérivée y' n'annulent donc pas son dénominateur.

507. *Dans quels cas, les fonctions suivantes n'ont-elles ni maximum, ni minimum?*

1° $y = \dfrac{x^2 + px + q}{x^2 + qx + p}$.

Le résultant des deux termes de cette fraction est

$$R = (p - q)^2 (1 + p + q);$$

c'est aussi le réalisant du numérateur de la dérivée

$$y' = \frac{x^2(q-p) + 2x(p-q) + p^2 - q^2}{(x^2 + qx + p)^2}.$$

La fonction n'a ni maximum, ni minimum dans les cas suivants (502, I) :

1° $p = q$. — On a alors $y = 1$, pour toutes les valeurs de x pour lesquelles y est définie.

2° $p + q + 1 \leqslant 0$ avec $p \neq q$. — Dans ces deux cas, le numérateur de y' ne s'annule jamais en changeant de signe.

En supposant $p + q + 1 = 0$, on a pour $x \neq 1$,

$$y = \frac{(x-1)(x+p+1)}{(x-1)(x-p)} = \frac{x+p+1}{x-p}.$$

2° $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{cx^2 + bx + a}$.

Le résultant des deux termes de cette fraction est

$$R = (a - c)^2 (a + b + c) (a - b + c).$$

Nous supposerons que a, b et c ne sont pas nuls simultanément. Dans ces conditions, la fonction n'a ni maximum, ni minimum dans les trois cas suivants :

1er cas : R = 0. — Le résultant R est nul dans trois cas :

1° $a = c$. — On a alors $y = 1$, pour toutes les valeurs de x qui n'annulent pas le dénominateur.

2° $a + b + c = 0$. — Dans ce cas, on a, si $x \neq 1$,

$$y = \frac{-(x - 1)[x(b + c) + c]}{(x - 1)(cx + b + c)} = -\frac{x(b + c) + c}{cx + b + c}.$$

3° $a - b + c = 0$. — On a alors, si $x \neq -1$,

$$y = \frac{(x + 1)[x(b - c) + c]}{(x + 1)(cx + b - c)} = \frac{x(b - c) + c}{cx + b - c}.$$

2e cas : $R < 0$. — Ce cas se présente quand on a

$$a \neq c \quad \text{et} \quad (a + b + c)(a - b + c) < 0.$$

3e cas : $R > 0$, $ab - bc = 0$; $b^2 - 4ac = 0$. — L'égalité $ab - bc = 0$ donne $b = 0$, car $R > 0$ exige $a \neq c$; l'égalité $b^2 - 4ac = 0$ exige alors $a = 0$ ou $c = 0$.

1° Si $a = b = 0$ avec $c \neq 0$, on a $y = \dfrac{1}{x^2}$ et y n'a pas de valeur extrême.

2° Si $b = c = 0$ avec $a \neq 0$, on a $y = x^2$. La discussion générale **(502)** ne s'applique pas dans ce cas, car y n'est plus une fraction rationnelle. De fait, $y = x^2$ a un minimum nul pour $x = 0$.

508. *Où doit se trouver le point* (a, b), *pour que la fonction*

$$y = \frac{x^2 - 4bx + 2a}{2ax^2 - 4bx + 1}$$

n'ait ni maximum, ni minimum ?

Le résultant des deux termes de y est

$$R = (2a - 1)^2 (2a + 4b + 1)(2a - 4b + 1),$$

et on doit avoir $R \leqslant 0$. Après avoir construit les droites

$$2a - 1 = 0, \quad 2a + 4b + 1 = 0, \quad 2a - 4b + 1 = 0,$$

on constate que (a, b) doit se trouver sur une de ces droites, ou dans l'un des angles obtus formés par les deux dernières droites.

Le problème n'a pas d'autre solution, car le système **(502, I, 4e cas)**

$$R > 0; \quad -4b + 8ab = 4b(2a - 1) = 0; \quad 4b^2 - 2a = 0$$

exige $a = b = 0$ et pour ces valeurs de a et de b, y se réduit à x^2.

509. *Trouver les conditions pour que la fonction*

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

présente un minimum égal à 1 *pour* $x = -1$ *et un maximum égal à* 2 *pour* $x = 1$.

La dérivée est

$$y' = \frac{(ab' - ba')x^2 + 2(ac' - ca')x + (bc' - cb')}{(a'x^2 + b'x + c')^2}.$$

Le numérateur de y' a pour racines -1 et $+1$, ce qui donne :

$$ab' - ba' \neq 0;$$

$$\frac{2(ac' - ca')}{ab' - ba'} = 0 \quad \text{ou} \quad ac' - ca' = 0; \tag{1}$$

$$\frac{bc' - cb'}{ab' - ba'} = -1 \quad \text{ou} \quad bc' - cb' = ba' - ab'. \tag{2}$$

Les valeurs des extrémés sont celles que prend le rapport $\dfrac{2ax + b}{2a'x + b'}$ pour $x = -1$ et $x = 1$; ce qui donne :

$$\frac{-2a + b}{-2a' + b'} = 1 \quad \text{ou} \quad 2a - b = 2a' - b'; \tag{3}$$

$$\frac{2a + b}{2a' + b'} = 2 \quad \text{ou} \quad 2a + b = 4a' + 2b'. \tag{4}$$

La fonction passe par un minimum pour $x = -1$ et par un maximum pour $x = 1$. Le numérateur de y' est donc négatif pour les valeurs de x extérieures à l'intervalle $(-1, 1)$, ce qui donne

$$ab' - ba' < 0. \tag{5}$$

Les relations (1), (2), (3), (4), (5) expriment des conditions nécessaires.

Résolvons par rapport à a, b, c et c' le système formé par les quatre premières relations. Les égalités (3) et (4) donnent

$$a = \frac{1}{4}(6a' + b'); \quad b = \frac{1}{2}(2a' + 3b').$$

En remplaçant dans (1) et (2), il vient ensuite

$$c = a; \quad c' = a';$$

et (5) devient

$$b'^2 - 4a'^2 < 0. \tag{6}$$

Ces conditions sont d'ailleurs suffisantes, car (6) donne

$$(2a' + b')(2a' - b') = (a' + b' + c')(a' - b' + c') \neq 0;$$

ce qui montre que le dénominateur de y et de y' ne s'annule pas pour $x = -1$ et pour $x = 1$.

510. *Quelles valeurs faut-il donner à* m *pour que la fonction*

$$y = \frac{x^2 + mx + 1}{x^2 + x + 1}$$

reste comprise entre -3 et $+3$ *pour toutes les valeurs de* x *?*

La fonction y est définie pour toutes les valeurs de x. Pour x infini, elle a comme limite 1. Sa dérivée est

$$y' = \frac{(x^2 - 1)(1 - m)}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

Si $m = 1$, la fonction est constante et égale à 1.

Si $m \neq 1$, la dérivée s'annule pour $x = +1$ ou -1; les valeurs que prend alors la fonction

$$f(+1) = \frac{2 + m}{3} \quad \text{et} \quad f(-1) = 2 - m$$

sont les extrémés de la fonction.

Si $1 - m > 0$, la dérivée est négative entre -1 et 1. Quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$, la fonction croît de 1 à $f(-1)$, qui est un maximum; elle décroît ensuite de $f(-1)$ à $f(+1)$, qui est un minimum, puis elle croît de $(+1)$ à 1.

Si $1 - m < 0$, les variations de la fonction sont analogues, mais $f(-1)$ est un minimum et $f(+1)$, un maximum.

Il résulte de ce qui précède que y reste compris entre $f(-1)$ et $f(+1)$. Pour que y reste compris entre -3 et $+3$, il faut et il suffit que $f(-1)$ et $f(+1)$ soient compris entre -3 et 3; ce qui donne :

$$-3 < 2 - m < 3 \quad \text{ou} \quad -1 < m < 5;$$

et

$$-9 < 2 + m < 9 \quad \text{ou} \quad -11 < m < 7.$$

Ainsi, m doit être compris entre -1 et 5.

511. *Étudier les variations des fonctions suivantes :*

1° $y = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{2x^2 - 2x + m}$.

Le réalisant du dénominateur est $1 - 2m$. Par suite, si $m > 0{,}5$, la fonction est définie pour toutes les valeurs de x; si $m = 0{,}5$, la fonction n'est pas définie pour $x = 0{,}5$ qui est alors la racine du dénominateur; si $m < 0{,}5$, le dénominateur admet deux racines x_1 et x_2 ($x_1 < x_2$) et y n'est pas définie pour ces valeurs de x.

La dérivée est

$$y' = \frac{-2(x + 1)(3x - m - 1)}{(2x^2 - 2x + m)^2}.$$

Le numérateur de y' s'annule pour $x = -1$ et pour $x = \dfrac{m + 1}{3}$. Or, en désignant le dénominateur de y par $P(x)$, on a

$$P(-1) = m + 4; \tag{1}$$

$$P\left(\frac{m + 1}{3}\right) = \frac{1}{9}(2m^2 + 7m - 4) = \frac{1}{9}(m + 4)(2m - 1). \tag{2}$$

Les racines du numérateur de y' sont donc les racines de y', si m est différent de -4 et de 0,5.

L'inéquation $\dfrac{m+1}{3} > -1$ donne $m > -4$. Par suite, -1 est la plus petite ou la plus grande racine de y', suivant que l'on a $m > -4$ ou $m < -4$.

Ces préliminaires conduisent aux cas suivants :

1er cas : $m < -4$. — L'examen des signes des expressions (1) et (2) montre que P(x) a deux racines distinctes x_1 et x_2 et qu'on a le classement

$$\frac{m+1}{3} \qquad x_1 \qquad -1 \qquad x_2.$$

On a le tableau :

x	$-\infty$	$\frac{m+1}{3}$		x_1		-1		x_2		$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
y	$0{,}5$ ↘	*Min.*	↗ $+\infty$	| $-\infty$	↗	*Max.*	↘ $-\infty$	| $+\infty$	↘	$0{,}5$

2e cas : $m = -4$. — Pour $x \neq -1$, on a

$$y = \frac{(x+1)^2}{2(x+1)(x-2)} = \frac{x+1}{2(x-2)}.$$

3e cas : $-4 < m < 0{,}5$. — Pour obtenir le tableau des variations, il suffit d'échanger $\dfrac{m+1}{3}$ et -1 dans le tableau du premier cas.

4e cas : $m = 0{,}5$. — On a

$$y = \frac{2(x+1)^2}{(2x-1)^2} \quad \text{et} \quad y' = \frac{-12(x+1)(2x-1)}{(2x-1)^4}.$$

Le tableau suivant donne les variations de y.

x	$-\infty$		-1		$0{,}5$			$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	|		$-$	
y	$0{,}5$	↘	0 *Min.*	↗	$+\infty$ | $+\infty$		↘	$0{,}5$

5e cas : $m > 0{,}5$. — On a le tableau :

x	$-\infty$		-1		$\frac{m+1}{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$0{,}5$	↘	*Min.*	↗	*Max.*	↘	$0{,}5$

2° $y = x^2 + \dfrac{m^2}{x^2 - 1}$.

Cette fonction n'est pas définie pour $x = \pm 1$. Sa dérivée est

$$y' = \frac{2x[x^2 - (1 - m)]\,[x^2 - (1 + m)]}{(x^2 - 1)^2}.$$

Le numérateur de y' peut admettre jusque cinq racines; pour trouver leur nombre, il faut comparer m à ± 1. Pour que ces racines du numérateur de y' n'annulent pas son dénominateur, il suffit que m soit différent de zéro.

1er cas : $m < -1$. — La dérivée a trois racines, 0 et $\pm\sqrt{1 - m}$; elle a le signe de $x(x^2 - 1 + m)$. On a le tableau :

x	$-\infty$	$-\sqrt{1-m}$		-1		0		1		$\sqrt{1-m}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$
y	$+\infty \searrow$	*Min.*	$\nearrow +\infty$	|	$-\infty \nearrow$	*Max.*	$\searrow -\infty$	|	$+\infty \searrow$	*Min.*	$\nearrow +\infty$

2e cas : $m = -1$. — On a

$$y = x^2 + \frac{1}{x^2 - 1} \quad \text{et} \quad y' = \frac{2x^3(x^2 - 2)}{(x^2 - 1)^2}.$$

La dérivée a trois racines, 0 et $\pm\sqrt{2}$; elle a le signe de $x(x^2 - 2)$. Le tableau des variations s'obtient en remplaçant $\pm\sqrt{1 - m}$ par $\pm\sqrt{2}$ dans le tableau précédent.

3e cas : $-1 < m < 0$. — La dérivée a cinq racines, qui sont 0 et $\pm\sqrt{1 \pm m}$, et on a le classement

$$-\sqrt{1 - m},\quad -1,\quad -\sqrt{1 + m},\quad 0,\quad \sqrt{1 + m},\quad 1,\quad \sqrt{1 - m}.$$

De là, on déduit aisément le tableau des variations; il y a trois minimums et deux maximums.

4e cas : $m = 0$. — Si $x \neq \pm 1$, on a $y = x^2$.

5e cas : $0 < m < 1$. — Ce cas est analogue au 3e, mais on a le classement

$$-\sqrt{1 + m},\quad -1,\quad -\sqrt{1 - m},\quad 0,\quad \sqrt{1 - m},\quad 1,\quad \sqrt{1 + m}.$$

6e cas : $m = 1$. — On a $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2 - 1}$ (Voir 2e cas).

7e cas : $m > 1$. — La dérivée a trois racines, 0 et $\pm\sqrt{1 + m}$; elle a le signe de $x(x^2 - 1 - m)$. On a le tableau :

x	$-\infty$	$-\sqrt{1+m}$		-1		0		1		$\sqrt{1+m}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$
y	$+\infty \searrow$	*Min.*	$\nearrow +\infty$	|	$-\infty \nearrow$	*Max.*	$\searrow -\infty$	|	$+\infty \searrow$	*Min.*	$\nearrow +\infty$

512. *Étudier les variations de la fonction*

$$y = ax + 2 + \frac{4}{x}.$$

Construire la courbe correspondant à a = 1 *et déterminer le nombre des solutions de l'équation* $\sin z + 2 + \dfrac{4}{\sin z} = m$, *comprises entre* $-\dfrac{\pi}{2}$ *et* $\dfrac{\pi}{2}$.

I. Quel que soit a, la fonction est discontinue pour $x = 0$. La courbe qui représente les variations est toujours asymptote aux droites $y = ax + 2$ et $x = 0$; c'est une hyperbole.

La dérivée de la fonction est

$$y' = a - \frac{4}{x^2} = \frac{ax^2 - 4}{x^2}.$$

1° Si $a > 0$, la dérivée s'annule pour $x = \pm \dfrac{2}{\sqrt{a}}$ et elle est négative entre ces racines. On a donc :

pour $x_1 = -\dfrac{2}{\sqrt{a}}$ un maximum $y_1 = -4\sqrt{a} + 2$;

pour $x_2 = \dfrac{2}{\sqrt{a}}$ un minimum $y_2 = 4\sqrt{a} + 2$.

On a le tableau :

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
y'		+	0	—	|	—	0	+	
y	$-\infty$ ↗		*Max.*	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	*Min.*	↗	$+\infty$

2° Si $a < 0$, il n'y a ni maximum, ni minimum.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		—	|	—	
y	$+\infty$	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	$-\infty$

3° Si $a = 0$, y se réduit à la fonction homographique $y = 2 + \dfrac{4}{x}$.

II. Si $a = 1$, on a le tableau des variations et la courbe ci-dessous :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		+	0	—	|	—	0	+	
y	$-\infty$	↗	-2 *Max.*	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	6 *Min.*	↗	$+\infty$

La droite $x = -1$ coupe la courbe au point $(-1, -3)$; la droite $x = 1$ la coupe au point $(1, 7)$.

Les valeurs de sin x qui vérifient l'équation
$$\sin x + 2 + \frac{4}{\sin x} = m$$
sont les abscisses des points d'intersection de la droite $y = m$ avec la portion de la courbe ci-contre comprise entre les droites $x = -1$ et $x = 1$. Par suite :

1° $m < -3$: une valeur négative pour sin x et x.

2° $-3 < m < 7$: pas de solution.

3° $m > 7$: une valeur positive pour sin x et x.

4° $m = -3$; on a, $\sin x = -1$ et $x = -\frac{\pi}{2}$.

5° $m = 7$; on a $\sin x = 1$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

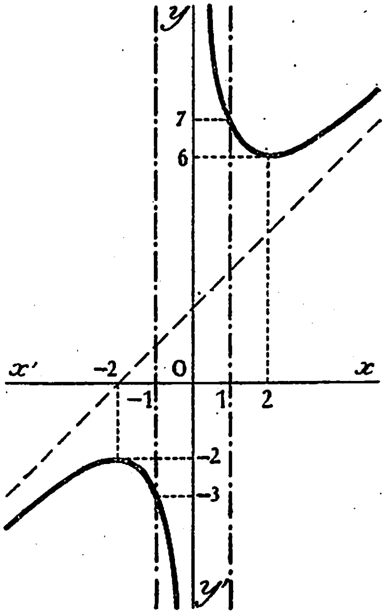


Fig. 81

513. *On considère la fonction*
$$y = x\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}.$$

1° *Étudier la continuité de la fonction.*

2° *Chercher la limite de* $y - x$ *pour* x *infini.*

3° *Étudier les variations de la fonction* (*E. M. Armes spéciales*, 1932).

1° La fonction est définie si $(x-1)(x-2) > 0$; ce qui a lieu quand $x < 1$ et quand $x > 2$; elle est définie aussi pour $x = 1$.

En appliquant ensuite les théorèmes sur la continuité des fonctions composées, on montrerait aisément que la fonction est continue pour les mêmes valeurs de x.

2° On peut écrire
$$y - x = x\left[\sqrt{\frac{x-1}{x-2}} - 1\right] = x\left[\frac{x-1}{x-2} - 1\right] : \left[\sqrt{\frac{x-1}{x-2}} + 1\right]$$
$$\text{ou} \qquad y - x = \frac{\dfrac{x}{x-2}}{\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}} + 1}.$$

Quand x tend vers l'infini, on a

$$\lim \frac{x}{x-2} = 1; \quad \lim \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} = 1; \quad \lim (y - x) = \frac{1}{2}.$$

3° Calculons la dérivée de y, en supposant $x < 1$ ou $x > 2$. On a

$$y' = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} - \frac{x}{2(x-2)^2}\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}.$$

Comme $(x-2)^2$ et $(x-1)(x-2)$ sont positifs, on a

$$\frac{x}{2(x-2)^2}\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} = \frac{x}{2\sqrt{(x-1)(x-2)^3}};$$

et $$\sqrt{\frac{x-1}{x-2}} = \sqrt{\frac{(x-1)^2(x-2)^2}{(x-1)(x-2)^3}} = \frac{2(x-1)(x-2)}{2\sqrt{(x-1)(x-2)^3}}.$$

Par suite,

$$y' = \frac{2(x-1)(x-2) - x}{2\sqrt{(x-1)(x-2)^3}} = \frac{2x^2 - 7x + 4}{2\sqrt{(x-1)(x-2)^3}}.$$

Les racines de cette dérivée sont

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{4}, \text{ ou, approximativement } \quad x_1 = 0{,}72; \quad x_2 = 2{,}78.$$

Elle a le signe de son numérateur; elle est donc positive pour $x < x_1$ et pour $x > x_2$.

A $x = x_1$ correspond un maximum

$$y_1 = \frac{7-\sqrt{17}}{4}\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{4}} = \frac{1}{4}\sqrt{142 - 34\sqrt{17}} \text{ ou appr. } 0{,}3.$$

A $x = x_2$ correspond un minimum

$$y_2 = \frac{7+\sqrt{17}}{4}\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{4}} = \frac{1}{4}\sqrt{142 + 34\sqrt{17}} \text{ ou appr. } 4{,}2.$$

On peut former ainsi le tableau suivant :

x	$-\infty$		x_1		1		2		x_2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$-\infty$		$-\infty$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	y_1 *Max.*	$\searrow$	0		$+\infty$	$\searrow$	y_2 *Min.*	$\nearrow$	$+\infty$

Ce tableau montre que la courbe qui représente les variations de y est tangente à la droite $x = 1$ et qu'elle est asymptote à la droite $x = 2$.

514. *Étudier les variations de la fonction* (a < b)

$$y = x\sqrt{(x-a)\cdot(b-x)}.$$

Cette fonction n'est définie que si x est compris entre a et b. Pour ces valeurs de x, la fonction est continue et admet pour dérivée

$$y' = \sqrt{(x-a)(b-x)} + \frac{x(a+b-2x)}{2\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

$$= -\frac{4x^2 - 3x(a+b) + 2ab}{2\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$$

Cette dérivée a le signe contraire du trinôme

$$f(x) = 4x^2 - 3x(a+b) + 2ab.$$

Le réalisant de $f(x)$ est $\rho = 9a^2 - 14ab + 9b^2$. Supposons qu'on n'ait pas a ou $b = 0$. Dans ces conditions, ρ est toujours positif, car ρ peut être considéré comme un trinôme en a et on voit aisément que ce trinôme n'a pas de racines réelles. Donc le trinôme $f(x)$ a toujours deux racines distinctes α et β $(\alpha < \beta)$.

Pour déterminer le nombre des extrémés de y, il faut comparer a et b à α et β. On a

$$f(a) = -a(b-a); \quad f(b) = b(b-a).$$

Or $b - a$ est positif; donc $f(a)$ a le signe contraire de a et $f(b)$ a le signe de b. On est donc conduit à distinguer trois cas :

1er cas : $a < b < 0$. — On a $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. On a donc

$$a < \alpha < b < \beta,$$

et comme on ne doit faire varier x que dans l'intervalle (a, b), on a le tableau des variations :

x	a		α		b
y'		$-$	0	$+$	
y	0	↘	*Min.*	↗	0

La dérivée à droite pour $x = a$ et la dérivée à gauche pour $x = b$ sont infinies. La courbe est tangente aux droites $x = a$, $x = b$.

2e cas : $a < 0 < b$. — On a $f(a) > 0$, $f(b) > 0$. Donc a et b sont extérieurs aux racines. Mais α et β sont de signes contraires, car leur produit a le signe de ab. Par suite,

$$a < \alpha < \beta < b$$

et on a le tableau :

x	a		α		0		β		b
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	0	↘	*Min.*	↗	0	↗	*Max.*	↘	0

La courbe passe par l'origine et elle est encore tangente aux droites $x = a$ et $x = b$.

3e cas : $0 < a < b$. — On a $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ et
$\alpha < a < \beta < b$.

x	a		β		b
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	*Max.*	↘	0

La courbe est tangente aux droites $x = a$ et $x = b$.

CAS PARTICULIERS. — Il nous reste à examiner les cas où a ou b est nul.

4e cas : $a < 0$, $b = 0$. — Dans ce cas, on a

$$y = x\sqrt{-x(x-a)}; \quad y' = \frac{-x(4x-3a)}{2\sqrt{-x(x-a)}}.$$

Le tableau des variations est analogue à celui du premier cas, dans lequel on fera $b = 0$ et $\alpha = \frac{3a}{4}$.

5e cas : $a = 0$, $b > 0$. — On a

$$y = x\sqrt{x(b-x)}; \quad y' = \frac{-x(4x-3b)}{2\sqrt{x(b-x)}}.$$

Le tableau des variations est analogue à celui du troisième cas, dans lequel on fera $a = 0$ et $\beta = \frac{3b}{4}$.

515. *Les sphères* O *et* O′, *extérieures l'une à l'autre, ont pour rayons* R *et* 2R; *la distance des centres est* OO′ = d. *Trouver la condition pour que la somme des aires des zones vues d'un point* A *de* OO′ *ait un maximum.*

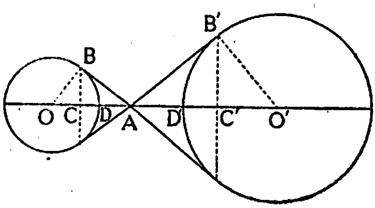


Fig. 82.

En posant OA $= x$, on a

$$S = 2\pi R(CD + 2C'D'). \qquad (1)$$

Les triangles AOB et AO′B′ donnent

$$R^2 = x.OC \quad \text{et} \quad 4R^2 = (d-x)O'C'.$$

On en déduit

$$OC = \frac{R^2}{x} \quad \text{et} \quad O'C' = \frac{4R^2}{d-x};$$

puis

$$CD = R - \frac{R^2}{x} \quad \text{et} \quad C'D' = 2R - \frac{4R^2}{d-x}.$$

En remplaçant CD et C′D′ dans (1), il vient

$$S = 2\pi R^2\left(5 - \frac{R}{x} - \frac{8R}{d - x}\right).$$

S est maximum pour la valeur de x qui rend minimum l'expression

$$z = \frac{1}{x} + \frac{8}{d - x}.$$

La dérivée de z est

$$z' = -\frac{1}{x^2} + \frac{8}{(d - x)^2} = \frac{7x^2 + 2dx - d^2}{x^2(d - x)^2}.$$

Cette dérivée s'annule, en passant du négatif au positif, pour sa plus grande racine $x_1 = \frac{d}{7}(-1 + 2\sqrt{2})$. A cette valeur de x correspond un minimum de z.

Pour que le maximum correspondant de S soit acceptable, il faut que le point A soit compris entre D et D′, c'est-à-dire, qu'on ait

$$R < \frac{d}{7}(-1 + 2\sqrt{2}) < d - 2R.$$

La première inégalité donne

$$d > R(2\sqrt{2} + 1)$$

et la seconde, $$d > \frac{R}{2}(4 + \sqrt{2}).$$

En résumé, on doit avoir $d > R(2\sqrt{2} + 1)$. Le maximum de S est alors

$$2\pi R^2\left[5 - \frac{R(9 + 4\sqrt{2})}{d}\right].$$

Dans le cas particulier où $d = R(2\sqrt{2} + 1)$, on a $x_1 = R$. Le point A est alors en D et le maximum est $4\pi R^2(2 - \sqrt{2})$.

516. *Étudier les variations de la surface totale d'un cylindre inscrit dans un solide formé de deux cônes droits égaux appliqués l'un contre l'autre par leurs bases. — Discussion.*

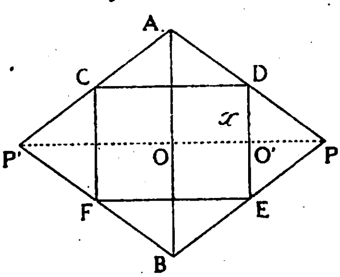


Fig. 83.

Soient R le rayon et h la hauteur de chacun des cônes donnés, x le rayon de la base du cylindre. On a

$$S = 2\pi x^2 + 2\pi x \times 2OO'.$$

Les triangles semblables PO′E et POB donnent

$$\frac{x}{R} = \frac{h - OO'}{h}; \quad \text{d'où} \quad OO' = \frac{h}{R}(R - x).$$

Par suite, $$S = \frac{2\pi}{R}\left[(R - 2h)x^2 + 2Rhx\right].$$

La question revient à étudier les variations de S dans l'intervalle (0,R).

1er **cas** : $R - 2h > 0$. — Le trinôme entre crochets a un minimum
$$\frac{-R^2h^2}{R - 2h} \quad \text{pour} \quad x_1 = \frac{-Rh}{R - 2h}.$$

On a l'ordre $x_1 < 0 < R$. Il en résulte que la surface totale n'a ni maximum, ni minimum. Elle croît de 0 à $2\pi R^2$ quand x croît de 0 à R.

2e **cas** : $R - 2h < 0$. — Le trinôme entre crochets a un maximum
$$\frac{R^2h^2}{2h - R} \quad \text{pour} \quad x_1 = \frac{Rh}{2h - R}.$$

a) Si $h > R$, on a $0 < x_1 < R$. En posant $S_1 = \frac{2\pi Rh^2}{2h - R}$, on a le tableau :

x	0		x_1		R
S	0	↗	S_1 *Max.*	↘	$2\pi R^2$

b) Si $h = R$, on a $x_1 = R$, et S varie comme dans le 1er cas.

c) Si $\frac{R}{2} < h < R$, on a $x_1 > R$, et S varie comme dans le 1er cas.

3e **cas** : $R - 2h = 0$. — La fonction devient
$$S = 2\pi Rx.$$
La surface est proportionnelle à x. Elle croît de 0 à $2\pi R^2$ quand x croît de 0 à R.

517. *Étudier les variations du volume d'une pyramide triangulaire régulière inscrite dans une sphère donnée.*

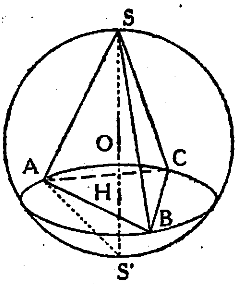


Fig. 84.

Soient $SH = x$ la hauteur de la pyramide et R le rayon de la sphère.

a) Calculons d'abord l'aire du triangle équilatéral ABC. L'angle SAS' étant inscrit dans une demi-circonférence est droit, et le triangle rectangle SAS' dont AH est la hauteur, donne
$$AH^2 = SH.S'H = x(2R - x).$$

Le côté AB du triangle équilatéral ABC inscrit dans le cercle ABC de rayon AH est
$$AB = AH\sqrt{3} = \sqrt{3x(2R - x)}.$$

L'aire de ce triangle de hauteur $\frac{3AH}{2}$ vaut donc

$$\frac{3AH \times AB}{4} = \frac{3x(2R - x)\sqrt{3}}{4}.$$

b) Le volume de la pyramide SABC est

$$y = \frac{SH}{3} \times ABC = \frac{x^2(2R - x)\sqrt{3}}{4}.$$

Nous devons étudier les variations de cette fonction dans l'intervalle (0, 2R). La dérivée

$$y' = \frac{x(4R - 3x)\sqrt{3}}{4}$$

s'annule pour $x = 0$ et $x_1 = \frac{4R}{3}$, et on a le tableau :

x	0		x_1		2R
y'	0	+	0	—	
y	0	↗	*Max.*	↘	0

Le maximum vaut $\frac{8R^3\sqrt{3}}{27}$, soit environ $0,513R^3$.

En calculant SA et AB pour $x = x_1$, on voit que la pyramide dont le volume est maximum, est un tétraèdre régulier.

MÉTHODE DES PRINCIPES. — y est maximum absolu avec $x^2(2R - x)$; donc lorsqu'on a

$$\frac{x}{2} = \frac{2R - x}{1} \quad \text{ou} \quad x = \frac{4R}{3}.$$

518. ***Etudier les variations du volume et de la surface totale d'une pyramide triangulaire régulière circonscrite à une sphère, donnée.***

Considérons une pyramide triangulaire régulière SABC circonscrite à une sphère de centre O et de rayon R.

Cette sphère est tangente au plan ABC au point I qui est le centre du triangle équilatéral ABC, et au plan SAB en un point E situé sur la hauteur SH du triangle isocèle ASB.

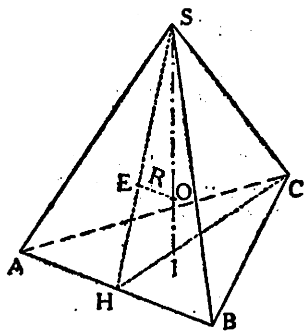


Fig. 85

Posons $SI = x$ et $IH = y$.

1° VOLUME DE LA PYRAMIDE. — L'aire de la base est
$$AH \times CH = y\sqrt{3} \times 3y = 3y^2\sqrt{3}.$$
Le volume de la pyramide a donc comme expression
$$V = xy^2\sqrt{3}.$$
Les triangles semblables SIH et SOE donnent
$$\frac{SI}{SE} = \frac{SH}{SO} = \frac{IH}{OE} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{SE} = \frac{SE + y}{x - R} = \frac{y}{R}.$$
De ces égalités, on déduit
$$SE = \frac{Rx}{y}; \quad y^2 = \frac{R^2x}{x - 2R}; \quad V = \frac{R^2x^2\sqrt{3}}{x - 2R}.$$
Nous étudierons les variations de la fonction V dans l'intervalle (2R, $+\infty$), où elle est définie, sauf pour $x = 2R$.

La dérivée $$V' = \frac{R^2x(x - 4R)\sqrt{3}}{(x - 2R)^2}$$
s'annule pour $x_1 = 0$ et $x_2 = 4R$. On a le tableau :

x	2 R		4R		$+\infty$
V'	$\mid -\infty$	$-$	0	$+$	
V	$\mid +\infty$	$\searrow$	$8R^3\sqrt{3}$ *(min.)*	$\nearrow$	$+\infty$

Les variations de la fonction sont représentées par une branche d'hyperbole dont les asymptotes sont
$$y = xR^2\sqrt{3} + 2R^3\sqrt{3} \quad \text{et} \quad x = 2R,$$
car la fonction peut s'écrire
$$y = (x + 2R)R^2\sqrt{3} + \frac{4R^4\sqrt{3}}{x - 2R}.$$
En calculant AS et AB pour $x = 4R$, on trouve
$$AB = AS = 2R\sqrt{6}.$$
La pyramide régulière de volume minimum est donc le tétraèdre régulier circonscrit à la sphère.

2° SURFACE TOTALE. — La surface totale a comme expression
$$S = AH.CH + 3AH.SH.$$
On a $\quad AH = y\sqrt{3}; \quad CH = 3y; \quad SH = \sqrt{x^2 + y^2}.$

En remplaçant AH, CH, SH, puis y, par leur valeur dans l'expression de S, il vient
$$S = \frac{3Rx^2\sqrt{3}}{x - 2R} = V \times \frac{3}{R}.$$
Par suite, S a un minimum pour $x = 4R$ et ce minimum est égal à
$$8R^3\sqrt{3} \times \frac{3}{R} = 24R^2\sqrt{3}.$$

MÉTHODE DES PRINCIPES. — V et S passent par un minimum absolu en même temps que

$$\frac{x^2}{x-2R}.$$

Mais cette fonction est minimum absolu lorsque les fonctions

$$\frac{x-2R}{x^2} = \frac{1}{x}\left(1-\frac{2R}{x}\right) \quad \text{et} \quad \frac{2R}{x}\left(1-\frac{2R}{x}\right)$$

passent par un maximum absolu; donc lorsqu'on a

$$\frac{2R}{x} = 1 - \frac{2R}{x} \quad \text{ou} \quad x = 4R.$$

519. *Étudier les variations du périmètre d'un triangle rectangle circonscrit à un cercle donné.*

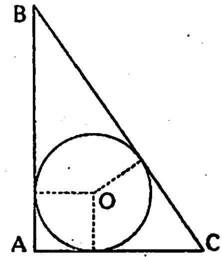


Fig. 86.

Soient x et y les côtés de l'angle droit, z l'hypoténuse, $2p$ le périmètre et r le rayon du cercle inscrit.

La somme des côtés de l'angle droit est égale à l'hypoténuse augmentée de $2r$.

$$x + y = z + 2r.$$

Le périmètre est donc

$$2p = (x+y) + (x+y-2r) = 2(x+y-r).$$

Le double de la surface du triangle est

$$xy = 2pr.$$

En éliminant y, il vient

$$p = \frac{x^2 - rx}{x-2r}.$$

Nous étudierons les variations de cette fonction dans l'intervalle $(2r, +\infty)$. La dérivée

$$p' = \frac{x^2 - 4rx + 2r^2}{(x-2r)^2}$$

s'annule pour $x_1 = r(2-\sqrt{2})$ et $x_2 = r(2+\sqrt{2})$. La racine x_2 est supérieure à $2r$. La valeur correspondante de la fonction est

$$p_2 = r(3+2\sqrt{2}).$$

On a le tableau :

x	$2r$		x_2		$+\infty$
p'	$-\infty$	$-$	0	$+$	1
p	$+\infty$	$\searrow$	p_2 *Min.*	$\nearrow$	$+\infty$

Les variations de la fonction sont représentées par une branche d'hyperbole dont les asymptotes sont
$$p = x + r \quad \text{et} \quad x = 2r,$$
car la fonction peut s'écrire
$$p = x + r + \frac{2r^2}{x - 2r}.$$

On remarque encore que pour $x = r(2 + \sqrt{2})$, on a aussi $y = r(2 + \sqrt{2})$; le triangle rectangle de périmètre minimum est donc le triangle rectangle isocèle circonscrit au cercle donné.

Méthode des principes. — On a
$$p = x + r + \frac{2r^2}{x - 2r} = 3r + (x - 2r) + \frac{2r^2}{x - 2r}.$$
Par suite, p est minimum absolu avec
$$(x - 2r) + \frac{2r^2}{x - 2r};$$
donc lorsqu'on a
$$x - 2r = \frac{2r^2}{x - 2r} \quad \text{ou} \quad x = r(2 + \sqrt{2}).$$

520. *Étudier les variations de l'aire d'un triangle rectangle dont le périmètre est* 2p.

Soient x, y les deux côtés de l'angle droit du triangle rectangle, z son hypoténuse et S sa superficie.

On a les relations
$$x + y + z = 2p; \quad x^2 + y^2 = z^2; \quad 2S = xy.$$
Les deux premières relations peuvent s'écrire
$$z + y = 2p - x; \quad z^2 - y^2 = x^2.$$
On en déduit
$$z - y = \frac{x^2}{2p - x}; \quad \text{puis} \quad y = \frac{2p(p - x)}{2p - x}.$$
En remplaçant y par sa valeur dans la 3e relation, il vient
$$S = \frac{p(x^2 - px)}{x - 2p}.$$

Nous étudierons les variations de cette fonction dans l'intervalle $(0, p)$. La dérivée
$$S' = \frac{p(x^2 - 4px + 2p^2)}{(x - 2p)^2}$$
s'annule pour $x_1 = p(2 - \sqrt{2})$ et $x_2 = p(2 + \sqrt{2})$. La racine x_1 est comprise entre 0 et p. La valeur correspondante de la fonction est
$$S_1 = p^2(3 - 2\sqrt{2}).$$

On a le tableau :

x	0		x_1		p
S'		$+$	0	$-$	
S	0	$\nearrow$	S_1 *Max.*	$\searrow$	0

On remarque que pour $x = p(2 - \sqrt{2})$, on a aussi $y = p(2 - \sqrt{2})$. Le triangle maximum est donc le triangle rectangle isocèle de périmètre $2p$.

521. *Un secteur circulaire* AOB *tourne autour du rayon* OA. *Étudier les variations du volume du secteur sphérique engendré, sachant que le rayon* OA *est variable, mais que la distance du point* B *à la droite* OA *a une longueur constante* a.

Posons $BD = a$, $AD = x$ et soit R le rayon variable de la sphère dont le secteur sphérique fait partie. Le volume du secteur sphérique a pour expression

$$V = \frac{R}{3} \times 2\pi R \times x = \frac{2\pi R^2 x}{3}.$$

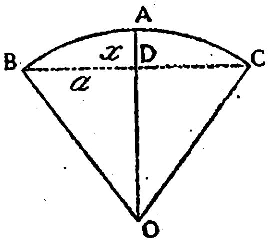


Fig. 87.

De la relation $a^2 = x(2R - x)$, on déduit

$$R = \frac{x^2 + a^2}{2x}; \quad \text{puis} \quad V = \frac{\pi(x^2 + a^2)^2}{6x}.$$

La variable x est positive et ne peut pas dépasser a. Nous étudierons donc les variations de V dans l'intervalle $(0, a)$. La dérivée

$$V' = \frac{\pi(x^2 + a^2)(3x^2 - a^2)}{6x^2}$$

s'annule pour $x_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ et $x_2 = -\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. La racine x_1 est comprise entre 0 et a. La valeur correspondante de la fonction est

$$V_1 = \frac{8\pi a^3\sqrt{3}}{27}.$$

On a le tableau :

x	0		x_1		a
V'		$-$	0	$+$	
V	$+\infty$	$\searrow$	V_1 *Min.*	$\nearrow$	$\dfrac{2\pi a^3}{3}$

MÉTHODE DES PRINCIPES. — V est minimum absolu en même temps que les fonctions

$$\frac{(x^3+a^2)^2}{x} = \left[x\sqrt{x} + \frac{a^2}{\sqrt{x}}\right]^2 \quad \text{et} \quad x\sqrt{x} + \frac{a^2}{\sqrt{x}}.$$

Or on a $$x\sqrt{x} \times \left[\frac{a^2}{\sqrt{x}}\right]^3 = a^6.$$

La fonction est donc minimum absolu quand on a

$$\frac{x\sqrt{x}}{1} = \frac{a^2}{3\sqrt{x}} \quad \text{ou} \quad x = \frac{a}{3}\sqrt{3}.$$

522. *Un secteur circulaire* AOB *tourne autour du rayon* OA. *Étudier les variations de la surface totale du secteur sphérique engendré, sachant que le rayon* OA *a une longueur constante* R.

Posons $AD = x$. On a (Fig. 87)

$$S = 2\pi Rx + \pi BD \times OB = \pi R[2x + \sqrt{x(2R-x)}].$$

Cette fonction est définie dans l'intervalle $(0, 2R)$. La dérivée

$$S' = \frac{\pi R[2\sqrt{x(2R-x)} + R - x]}{\sqrt{x(2R-x)}}$$

ne s'annule que pour une seule valeur de x,

$$x_1 = \frac{R(5+2\sqrt{5})}{5}, \quad \text{soit environ } 1{,}9R.$$

La valeur correspondante de la fonction est

$$S_1 = \pi R^2(2+\sqrt{5}).$$

Pour étudier le signe de la dérivée dans les intervalles $(0, x_1)$ et $(x_1, 2R)$, on fait deux substitutions, une pour chaque intervalle. (Voir n° **320**, 6°).

On a le tableau :

x	0		x_1		$2R$
S'		$+$	0	$-$	
S	0	$\nearrow$	S_1 *Max.*	$\searrow$	$4\pi R^2$

523. *Un secteur circulaire* AOB *tourne autour du rayon* OA. *Étudier les variations de la surface totale du secteur sphérique engendré, sachant que le volume du secteur sphérique est* $\frac{4\pi a^3}{3}$.

Soient x le rayon du secteur et y la hauteur de la zone qui lui sert de base. On a

$$\frac{4\pi a^3}{3} = \frac{x}{3} \times 2\pi xy$$

et $$S = 2\pi xy + \pi x\sqrt{y(2x-y)}.$$

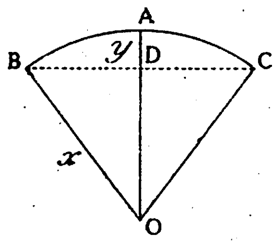


Fig. 88.

En tirant y de la première relation et en remplaçant dans la seconde, il vient

$$S = \frac{2a\pi}{x}[2a^3 + \sqrt{a(x^3-a^3)}].$$

Cette fonction est définie dans l'intervalle $(a, +\infty)$ La dérivée de la fonction est

$$\frac{a^2\pi[x^3 + 2a^3 - 4a\sqrt{a(x^3-a^3)}]}{x^2\sqrt{a(x^3-a^3)}}.$$

Une valeur de x ne peut être racine de l'équation

$$4a\sqrt{a(x^3-a^3)} = x^3 + 2a^3 \qquad (1)$$

que si elle satisfait à la relation

$$x^3 + 2a^3 \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad x \geqslant -a\sqrt[3]{2}.$$

En élevant (1) au carré, il vient

$$x^6 - 12a^3x^3 + 20a^6 = 0; \quad \text{d'où} \quad x^3 = 2a^3; \quad x^3 = 10a^3.$$

L'équation (1) admet deux racines acceptables

$$x_1 = a\sqrt[3]{2}; \quad x_2 = a\sqrt[3]{10}.$$

Les valeurs correspondantes de la fonction sont

$$S_1 = 3\pi a^2\sqrt[3]{4}; \quad S_2 = \pi a^2\sqrt[3]{100}.$$

Pour étudier le signe de la dérivée dans les intervalles

$$(a, x_1), \quad (x_1, x_2), \quad (x_2, +\infty),$$

on fait trois substitutions, une pour chaque intervalle. (Voir no 320, 6o).

On a le tableau :

x	a		x_1		x_2		$+\infty$
S'		$+$	0	$-$	0	$+$	
S	$4\pi a^2$	↗	S_1 *Max.*	↘	S_2 *Min.*	↗	$+\infty$

524. *On donne un segment* OA = a. *Du point* O *comme centre, on décrit une sphère de rayon variable qui coupe* OA *en* D. *Étudier les variations* :

1o *De la zone vue du point* A;

2o *De la longueur du diamètre* BC *du petit cercle de la sphère qui délimite la zone précédente*;

3° *Du volume du segment sphérique à une base dont cette zone est la surface convexe;*

4° *De la somme des cônes droits* ABC *et* OBC;

5° *Du rapport de la surface latérale du cône* ABC *à l'aire de la zone* BCD.

Considérons le segment $OA = a$ et une sphère ayant un rayon variable $OD = x$ plus petit que a.

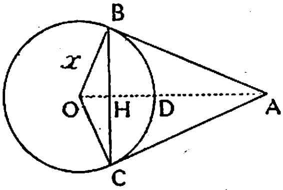


Fig. 89.

1° *Zone vue du point* A. — L'aire de cette zone est

$$S = 2\pi x \times DH.$$

Le triangle rectangle OAB donne

$$OH = \frac{x^2}{a} \quad \text{et} \quad DH = \frac{ax - x^2}{a}.$$

Par suite, $$S = \frac{2\pi(ax^2 - x^3)}{a}.$$

Nous étudierons les variations de cette fonction dans l'intervalle $(0, a)$. Sa dérivée $S' = \dfrac{2\pi x(2a - 3x)}{a}$ s'annule pour $x_1 = 0$ et $x_2 = \dfrac{2a}{3}$.

Les valeurs correspondantes de la fonction sont

$$S_1 = 0; \quad S_2 = \frac{8\pi a^2}{27}.$$

On a le tableau :

x	0		x_2		a
S'		$+$	0	$-$	
S	0	↗	S_2 *Max.*	↘	0

La courbe qui représente ces variations, a un point d'inflexion pour $x = \dfrac{a}{3}$, car pour cette valeur de x, la dérivée seconde $\dfrac{4\pi(a - 3x)}{a}$ s'annule en changeant de signe.

Méthode des principes. — S est maximum absolu avec $x^2(a - x)$; donc lorsqu'on a

$$\frac{x}{2} = \frac{a - x}{1} \quad \text{ou} \quad x = \frac{2a}{3}.$$

2° *Longueur du diamètre* BC. — Désignons par y la longueur du diamètre BC du petit cercle qui délimite la zone précédente. On a

$$= 2BH = 2\sqrt{OB^2 - OH^2} = 2\sqrt{x^2 - \frac{x^4}{a^2}} = \frac{2}{a}\sqrt{a^2x^2 - x^4}.$$

La dérivée $y' = \dfrac{2(a^2 - 2x^2)}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$ s'annule pour $x = \pm \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

On a le tableau :

x	0		$\frac{a\sqrt{2}}{2}$		a
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	a *Max.*	$\searrow$	0

Méthode des principes. — y est maximum absolu avec $x^2(a^2 - x^2)$; donc lorsqu'on a

$$x^2 = a^2 - x^2 \quad \text{ou} \quad x = \frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

3° *Volume du segment sphérique* BDC. — On a

$$V = \frac{\pi}{6}\,DH^3 + \frac{\pi}{2}\,BH^2 \times DH = \frac{\pi x^3(x - a)^2\,(x + 2a)}{3a^3}.$$

Les racines de la dérivée $V' = \dfrac{2\pi x^2(x - a)\,(x^2 + ax - a^2)}{a^3}$ sont

$$x_1 = 0,\quad x_2 = a;\quad x_3 = \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2};\quad x_4 = \frac{-a(\sqrt{5} + 1)}{2}.$$

En posant $V_3 = \dfrac{\pi a^3}{6}(5\sqrt{5} - 11)$, on a le tableau :

x	0		x_3		a
V'	0	$+$	0	$-$	0
V	0	$\nearrow$	V_3 *Max.*	$\searrow$	0

4° *Somme des cônes* ABC *et* OBC. — On a

$$V = \frac{\pi}{3}\,BH^2(OH + AH) = \frac{\pi x^2(a^2 - x^2)}{3a}.$$

La dérivée $$V' = \frac{2\pi x(a^2 - 2x^2)}{3a}$$

s'annule pour $$x = 0 \quad \text{et} \quad x = \pm\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

On a le tableau :

x	0		$\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$		a
V′	0	$+$	0	$-$	
V	0	$\nearrow$	$\dfrac{\pi a^3}{12}$ *Max.*	$\searrow$	0

La courbe qui représente ces variations a un point d'inflexion pour $x = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$, car la dérivée seconde $V'' = \dfrac{2\pi(a^2 - 6x^2)}{3a}$ s'annule pour cette valeur de x, en changeant de signe.

Méthode des principes. — V est maximum absolu avec $x^2(a^2 - x^2)$; donc lorsqu'on a

$$x^2 = a^2 - x^2 \quad \text{ou} \quad x = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

5° *Rapport de la surface latérale du cône* ABC *à l'aire de la zone* BCD. — On a

$$z = \frac{\pi BH \cdot AB}{2\pi x \cdot DH} = \frac{a^2 - x^2}{2x(a - x)} = \frac{a + x}{2x}.$$

La dérivée $z' = -\dfrac{a}{2x^2}$ est négative quand x est compris entre 0 et a. Par suite, la fonction z décroît constamment quand x croît de 0 à a et elle n'a ni maximum, ni minimum.

525. *Le mouvement rectiligne d'un point est défini par l'équation* $x = t^3 - 3t^2 - 9t + 3$. *Étudier ce mouvement, la vitesse et l'accélération du point à chaque instant.*

La dérivée de x est

$$x' = 3t^2 - 6t - 9 = 3(t + 1)(t - 3).$$

Elle est négative entre les racines -1 et 3; par suite, on a un maximum $x_1 = 8$ pour $t = -1$, et un minimum $x_2 = -24$ pour $t = 3$.

La vitesse $v = x'$ a pour dérivée $x'' = 6(t - 1)$; elle a un minimum égal à -12 pour $t = 1$.

L'accélération $\gamma = x'' = 6(t - 1)$ croît avec t; elle s'annule et change de signe pour $t = 1$.

Le tableau et les courbes ci-dessous représentent ces variations.

t	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
v	$+\infty$	↘	0	↘	-12 *Min.*	↗	0	↗	$+\infty$
γ	$-\infty$	↗	-12	↗	0	↗	12	↗	$+\infty$
x	$-\infty$	↗	8 *Max.*	↘	-8	↘	-24 *Min.*	↗	$+\infty$

Le mouvement du point est figuré en trait plein.

Le graphique présente un point d'inflexion pour $t = 1$. On voit aussi que le point mobile passe trois fois par l'origine.

La vitesse est figurée en trait discontinu et l'accélération en trait mixte.

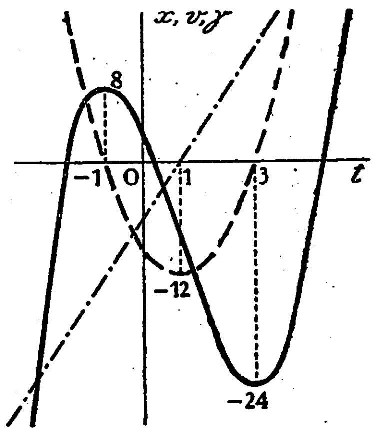


Fig. 90.

526. *Un point* M, *mobile sur un axe* x'Ox, *est animé d'un mouvement uniformément varié. En prenant comme unité de longueur le mètre et comme unité de temps la seconde, son accélération est* 4, *l'abscisse initiale* — 195 *et la vitesse initiale* — 4. *On demande :*

1° *d'écrire l'équation du mouvement;*

2° *de déterminer l'abscisse minimum de* M *et l'instant correspondant;*

3° *de déterminer l'instant où* M *passe par l'origine.*

1° L'équation d'un mouvement rectiligne uniformément varié est, en général, $x = at^2 + bt + c$ et la vitesse $v = x' = 2at + b$. (*Compl.* 327).

Ces équations montrent que c représente l'abscisse initiale, b la vitesse initiale et $2a$ l'accélération.

On a donc, dans le cas actuel,

$$x = 2t^2 - 4t - 195.$$

2° x est minimum quand $x' = 4t - 4$ est nul, c'est-à-dire, pour $t = 1$ sec. Ce minimum est — 197 mètres.

3° On a $x = 0 = 2t^2 - 4t - 195$ pour

$$t = \frac{2 \pm 19{,}85}{2}.$$

Ainsi, M passe à l'origine au bout de 10,92 sec. et il y était passé 8,92 secondes avant l'origine des temps.

527. *Un point mobile* M *parcourt une droite d'un mouvement uniformément varié. Il passe en un point* A *avec une vitesse de* 15 *mètres par seconde, en se dirigeant vers un point* B, *distant de* 10 *mètres du premier. Il passe en* B *avec une vitesse de* 10 *mètres par seconde, mais de sens contraire à la première. Chercher l'équation du mouvement de* M *et la distance maximum du point* M *de* A.

Prenons pour origine le point A où passe le mobile au temps $t = 0$, et pour sens positif le sens de A vers B. En désignant la mesure du vecteur AM par x et l'accélération par γ, on a (**526**)

$$x = \frac{1}{2}\gamma t^2 + 15t \quad \text{et} \quad v = \gamma t + 15.$$

Soit θ le moment où M passe en B avec une vitesse -10. On a

$$10 = \frac{1}{2}\gamma\theta^2 + 15\theta \quad \text{et} \quad -10 = \gamma\theta + 15.$$

Ces équations donnent

$$\theta = 4 \quad \text{et} \quad \gamma = -6{,}25.$$

L'équation du mouvement devient $x = -\dfrac{25}{8}t^2 + 15t.$

L'abscisse x est maximum pour $t = 2{,}4$ sec.; ce maximum est 18 mètres.

528. *Sur une droite* $x'Ox$, *un point* M *se déplace d'un mouvement uniformément varié; à l'instant initial, il passe en* O *avec une vitesse de* 5 *m. par sec. dirigée vers* Ox; *l'accélération du mouvement est* — 2. *Un autre mobile* N *se déplace sur la même droite d'un mouvement uniforme dans le sens* Ox *avec une vitesse de* 2 *m. par sec.; à l'instant initial,* N *est en* A, *qui est à* 2 *m. à droite de* O.

1° *Trouver les instants et les positions des rencontres des deux points.*

2° *Étudier les variations de la mesure du vecteur* NM.

L'équation du mouvement de M est

$$x_1 = -t^2 + 5t;$$

et celle de N, $$x_2 = 2t + 2.$$

Les mobiles se rencontrent quand $x_1 = x_2$, ce qui donne

$$-t^2 + 5t = 2t + 2 \quad \text{ou} \quad t^2 - 3t + 2 = 0.$$

D'où $$t_1 = 1 \text{ sec.} \quad \text{et} \quad t_2 = 2 \text{ sec.}$$

A ces moments les mobiles ont pour abscisses 4 m. et 6 m.

2° On peut écrire

$$\overline{NM} = \overline{OM} - \overline{ON} = x_1 - x_2 = -(t^2 - 3t + 2).$$

L'expression de $\overline{NM}$ étant un trinôme du second degré en t, on peut étudier aisément ses variations. $\overline{NM}$ est maximum pour $t = 1{,}5$. On a alors $\overline{NM} = 0{,}25$.

529. *Deux points* M_1 *et* M_2 *parcourent l'axe* $x'Ox$ *d'un mouvement uniformément varié.* M_1 *part de* O *avec une vitesse de* 6 *m. par seconde et met* 6 *secondes pour arriver au point* A *d'abscisse* 90 *m.* M_2 *passe en* O *deux secondes après le départ de* M_1, *se dirigeant vers les abscisses positives avec une vitesse de* 36 *m. par seconde et atteint son abscisse maximum trois secondes après son passage en* O.

Trouver les équations des mouvements et déterminer les points de rencontre.

1° Soient x_1 l'abscisse du point M_1 à l'instant t et γ_1 son accélération. On a l'équation

$$x_1 = \frac{1}{2}\gamma_1 t^2 + 6t.$$

En écrivant que $x_1 = 90$ pour $t = 6$, on trouve

$$90 = 18\gamma_1 + 36 \quad \text{ou} \quad \gamma_1 = 3;$$

l'équation du mouvement de M_1 est donc

$$x_1 = \frac{3}{2}t^2 + 6t.$$

2° Soient x_2 l'abscisse de M_2 à l'instant t et

$$x_2 = \frac{1}{2}\gamma_2 t^2 + bt + c$$

l'équation du mouvement de M_2. Sa vitesse à l'instant t sera $v_2 = \gamma_2 t + b$.

Pour $t = 2$, on a $x_2 = 0$; d'où

$$2\gamma_2 + 2b + c = 0. \tag{1}$$

Pour $t = 2$, on a $v_2 = 36$; d'où

$$2\gamma_2 + b = 36. \tag{2}$$

L'abscisse de M_2 est maximum quand $v_2 = 0$ ou quand $t = 5$; d'où

$$5\gamma_2 + b = 0. \tag{3}$$

Les équations (1), (2), (3) donnent

$$\gamma_2 = -12; \quad b = 60; \quad c = -96;$$

et l'équation du mouvement de M_2 est

$$x_2 = -6t^2 + 60t - 96.$$

3° Les mobiles se rencontrent quand leurs abscisses sont égales, ce qui donne

$$\frac{3}{2}t^2 + 6t = -6t^2 + 60t - 96 \quad \text{ou} \quad 5t^2 - 36t + 64 = 0.$$

D'où $t_1 = 3{,}2$ sec.; $t_2 = 4$ sec.

Il y a donc deux points de rencontre. Leurs abscisses sont 34,56 m. et 48 m.

530. *Deux points mobiles,* M_1 *et* M_2, *se déplacent sur un axe. Les équations des mouvements sont*

$$x_1 = t^4 - t^2 \quad \textit{et} \quad x_2 = t^3 - t^2.$$

1° *Calculer la vitesse et l'accélération de chaque mobile.*

2° *Déterminer les positions des mobiles quand* M_2 *a une vitesse nulle, puis quand* M_1 *a une vitesse nulle.*

3° *Étudier les variations de leur distance.*

4° *Résumer par ordre chronologique les principales particularités du mouvement.*

1° Les vitesses sont

$$v_1 = 4t^3 - 2t \quad \text{et} \quad v_2 = 3t^2 - 2t.$$

Les accélérations sont

$$\gamma_1 = 12t^2 - 2 \quad \text{et} \quad \gamma_2 = 6t - 2.$$

2° M_2 a une vitesse nulle quand $3t^2 - 2t = 0$, c'est-à-dire pour $t = 0$ et $t = \frac{2}{3}$.

Quand $t = 0$, on a $x_1 = x_2 = 0$; quand $t = \frac{2}{3}$, on a

$$x_1 = -\frac{20}{81}; \quad x_2 = -\frac{4}{27}.$$

M_1 a une vitesse nulle quand $4t^3 - 2t = 0$, c'est-à-dire pour $t = 0$ et $t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. On a vu le cas $t = 0$.

Quand $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on a $x_1 = -\frac{1}{4}$ et $x_2 = \frac{-(2-\sqrt{2})}{4}$.

Quand $t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, on a $x_1 = -\frac{1}{4}$ et $x_2 = \frac{-(2+\sqrt{2})}{4}$.

3° La distance des deux mobiles $y = |x_1 - x_2|$ passe par une valeur extrême en même temps que

$$y^2 = (x_1 - x_2)^2 = (t^4 - t^3)^2,$$

dont la dérivée est

$$2(t^4 - t^3)(4t^3 - 3t^2) = 2t^5(t - 1)(4t - 3).$$

On a le tableau :

x	$-\infty$		0		$0{,}75$		1		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{27}{256}$	↘	0	↗	$+\infty$
			Min.		*Max.*		*Min.*		

4° Formons le tableau des variations des vitesses et des espaces en fonction de t.

t	$-\infty$		-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
v_1	$-\infty$		$-$		0	$+$	0	$-$	0				$+$		$+\infty$
x_1	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$ *Min.*	$\nearrow$	0 *Max.*	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$ *Min.*		$\nearrow$		0	$\nearrow$	$+\infty$
v_2	$+\infty$			$+$			0		$-$		0		$+$		$+\infty$
x_2	$-\infty$			$\nearrow$			0 *Max.*		$\searrow$		$-\frac{4}{27}$ *Min.*	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Pour $t = -\infty$, M_1 est à $+\infty$ et M_2 à $-\infty$. Ils se rapprochent ensuite, car ils marchent en des sens opposés. Pour $t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, M_1 change de sens, mais il est rejoint par M_2 pour $t = 0$. A partir de $t = 0$, tous deux marchent vers $-\infty$. Ils changent à nouveau de sens, M_1 pour $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et M_2 pour $t = \frac{2}{3}$, puis ils se rejoignent pour $t = 1$. A partir de ce moment, tous deux marchent vers $+\infty$, mais comme on a constamment $v_1 > v_2$, M_2 ne rejoint plus M_1.

Exercices proposés aux concours d'admission à l'École Militaire

DIVISION « ARMES SPÉCIALES »

Dans la 1re Partie de ces *Exercices d'algèbre*, voir les numéros : **1018** (1903), **1019** (1904), **997** (1905), **998** (1906), **999** (1910), **964** (1911), **1001** (1913), **695** (1920), **968** (1922), **1023** (1930).

Dans la 2^{e} Partie de ces *Exercices d'algèbre*, voir les numéros : **422** (1902), **230** (1908), **172** (1909), **468** (1912), **233**, 5° (1923), **423** (1924), **463** (1924), **464** (1925), **465** (1926), **454** (1927), **490** (1929).

531 (1928). *On donne deux axes rectangulaires* x'x, y'y *et un point dont les coordonnées sont* a *et* b. *Dans quelle région se trouve le point* M *si l'équation* $f(x) = 4x^2 + 4(a+b)x + a^2 + b^2 = 0$ *a ses racines comprises entre* -1 *et* $+1$?

Les conditions nécessaires et suffisantes sont :

$$\rho = 8ab \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad ab \geqslant 0;$$
$$f(-1) = (a-2)^2 + (b-2)^2 - 4 = C(a, b) > 0;$$
$$f(+1) = (a+2)^2 + (b+2)^2 - 4 = C'(a, b) > 0$$
$$\frac{S}{2} = -\frac{a+b}{2} > -1 \quad \text{ou} \quad a+b-2 < 0;$$
$$\frac{S}{2} = -\frac{a+b}{2} < 1 \quad \text{ou} \quad a+b+2 > 0.$$

On construit alors les circonférences $C(a, b) = 0$, $C'(a, b) = 0$ et les droites $a + b \pm 2 = 0$; puis, on détermine les régions positive et négative pour chacune de ces lignes et pour les axes. Le lieu de M est formé par les parties du 1er angle, du 3^{e} angle et des axes, situées entre les deux circonférences.

532 (1931). *On donne* $A_1 \neq 0$, $P(x) = A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n$ *et*
$$\varphi(x) \equiv n(n-1)P(x) - [1 + 2(n-1)x]P'(x) + x^2P''(x) \equiv 0,$$
$P'(x)$ et $P''x$ *étant les deux premières dérivées de* P(x). *Démontrer qu'on a la relation* $\dfrac{A_p}{A_{p+1}} = \dfrac{p(p+1)}{n-p}$; *puis, chercher* $\lim\left(\dfrac{p(p+1)}{p^2-p}\right)^p$ *pour* p *infini*.

1° En égalant à zéro le coefficient de x^{n-p-1} dans $\varphi(x)$, on obtient l'équation
$$n(n-1)A_{p+1} - (n-p)A_p - 2(n-1)(n-p-1)A_{p+1} + (n-p-1)(n-p-2)A_{p+1} = 0,$$
qui peut s'écrire $(n-p)A_p = (p^2+p)A_{p+1}$.

2° On a
$$\frac{p^2+p}{p^2-p}=1+\frac{2}{p-1}.$$
En posant $\frac{p-1}{2}=m$, on trouve ensuite $p=2m+1$; puis
$$\left(\frac{p(p+1)}{p^2-p}\right)^p=\left(1+\frac{1}{m}\right)^{2m+1}=\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^2\left(1+\frac{1}{m}\right).$$
La limite de cette expression est e^2 pour m infini ou pour p infini.

533 (1932). *On considère la fonction* $\mathrm{y}=\mathrm{x}\sqrt{\frac{\mathrm{x}-1}{\mathrm{x}-2}}$. *Chercher la limite de la différence* $\mathrm{y}-\mathrm{x}$ *ponr* x *infini et étudier les variations de* y (Voir Exercice **513**).

Remarque. — On a $\lim\frac{y}{x}=1$ et $\lim(y-1\times x)=\frac{1}{2}$ pour x infini. Il s'ensuit (*Compléments*, **290**, Rem.) que la droite $y=x+0{,}5$ est une asymptote.

Suivant que x décroît ou croît indéfiniment, la différence $y-(x+0{,}5)$ tend vers zéro par valeurs négatives ou par valeurs positives. La courbe est donc en-dessous de l'asymptote du côté des x négatifs, et au-dessus de l'asymptote du côté des x positifs.

534 (1933). *Calculer l'expression* $(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)^{2n}$ *de deux façons différentes dans le cas où* $\alpha=\frac{\pi}{4}$ *et* $\mathrm{n}=4\mathrm{k}+1$. *Du résultat, déduire la relation*
$$C_{2n}^1-C_{2n}^3+C_{2n}^5-\dots-C_{2n}^{n-} =2^{n-1}-\frac{1}{2}C_{2n}^n.$$

Des données $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $n=4k+1$, on déduit en supposant $p+q=2n$,
$$\cos 2n\alpha=0;\ \sin 2n\alpha=1;\ \cos^p\alpha\sin^q\alpha=\frac{1}{2^n}.$$

La valeur de l'expression proposée est donc
$$\cos 2n\alpha+i\sin 2n\alpha=0+i; \qquad (1)$$
et aussi $(2n=8k+2)$
$$\frac{1}{2}[C_{2n}^0-C_{2n}+\dots-C_{2n}^{2n}+i(C_{2n}^1-C_{2n}^3+\dots+C_{2n}^{2n-1})]. \qquad (2)$$

En égalant alors les coefficients de i dans (1) et (2), il vient
$$C_{2n}^1-C_{2n}^3+\dots-C_{2n}^{n-2}+C_{2n}^n-C_{2n}^{n+2}+\dots-C_{2n}^{2n-3}+C_{2n}^{2n-1}=2^n.$$
De là, on déduit $2(C_{2n}^1-C_{2n}^3+\dots-C_{2n}^{n-2})+C_{2n}^n=2^n$.

535 (1934). *Trouver la condition pour qu'on puisse décomposer le polynôme* $x^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + f$ *en un produit de deux trinômes du second degré en* x, *de telle manière que la somme de ces trinômes soit un carré parfait. — Calculer ensuite les racines de* $x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 27 = 0$ *et construire dans le plan de deux axes rectangulaires le quadrilatère dont les sommets ont ces racines comme affixes.*

1° En identifiant le polynôme proposé et le produit des trinômes $x^2 + px + q$, $x^2 + p'x + q'$ et en tenant compte de ce que la somme de ces trinômes est un carré parfait, on obtient le système

$$p + p' = 4b;\ q + q' + pp' = 6c;\ pq' + p'q = 4d;\ qq' = f;$$
$$(p + p')^2 - 8(q + q') = 0.$$

On en déduit le système équivalent

$$p + p' = 4b;\ q + q' = 2b^2;\ pp' = 6c - 2b^2;$$
$$qq' = f;\ pq' + p'q = 4d.$$

Il s'ensuit que p et p', q et q' sont respectivement les racines réelles ou complexes des équations

$$y^2 - 4by + 6c - 2b^2 = 0;\quad y^2 - 2b^2y + f = 0.$$

On résout ces équations et on remplace dans $pq' + p'q = 4d$. En tenant compte des doubles signes, on trouve alors, par deux élévations au carré,

$$(3b^2 - 3c)\,(b^4 - f) = 2(b^3 - d)^2. \qquad (1)$$

2° Dans le cas de l'équation proposée, on a $b = 3$, $c = 9$, $d = 27$, $f = 27$ et ces valeurs vérifient la relation (1). On trouve ensuite

$$p = 6,\ p' = 6,\ q = 9 + \sqrt{54},\ q' = 9 - \sqrt{54}.$$

Les racines cherchées sont $-3 \pm i\sqrt[4]{54}$ et $-3 \pm \sqrt[4]{54}$. Ce sont les affixes des sommets d'un carré.

536 (1935). *Des variations de la fonction* $y = x^3 - x^2 + 1$, *déduire celles de* $Y = \dfrac{2}{x^3 - x^2 + 1}$. *Chercher ensuite la limite de* $z = \dfrac{2}{1 + 3^x - 2^x}$ *pour* x *infini et représenter graphiquement les résultats obtenus.*

1° Après avoir étudié les variations de y, on en déduit celles de Y en appliquant les théorèmes généraux (*Compléments*, 286).

x	$-\infty$		x_1		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{23}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$
Y	0	$\searrow$	$\mp\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{54}{23}$	$\searrow$	0

La courbe qui représente les variations de Y est asymptote aux droites $y=0$ et $x=x_1$.

2° Si $x \to -\infty$, $3^x - 2^x \to 0$ par valeurs négatives, car 3^x et 2^x tendent vers zéro, 3^x étant constamment inférieur à 2^x. Donc, $z \to 2$ par valeurs décroissantes et $z-2 \to 0$ par valeurs positives.

Si $x \to +\infty$, en écrivant $z = \frac{2}{2^x} : \left[\frac{1}{2^x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x - 1\right]$, on voit que z tend vers zéro par valeurs positives.

La courbe qui représente les variations de z est asymptote à la droite $z=2$ du côté des x négatifs et elle y est au-dessus de cette droite; elle est asymptote à la droite $z=0$ du côté des x positifs et elle y est au-dessus de cette droite.

537 (1936). *Étudier les variations de* $y = \dfrac{x^2+4x-a^2}{x^2+8x+a^2}$ *quand* $0 \leqslant a^2 < 12$. — *Discussion et recherche de la vraie valeur s'il y a lieu.*

Le résultant du numérateur et du dénominateur est $4a^2(a^2-12)$. Dans les limites indiquées, il ne s'annule que pour $a^2=0$. Il s'ensuit que les deux termes de y ne peuvent avoir une racine commune que si $a^2=0$.

a) Si $a^2=0$, on a $y = \dfrac{x^2+4x}{x^2+8x}$. Cette fonction est indéterminée pour $x=0$.

La vraie valeur pour $x=0$ est 4/8 ou 1/2. Pour $x \neq 0$, y se réduit à une fonction homographique.

b) Si $0 < a^2 < 12$, le dénominateur de y a deux racines, x_1 et x_2; pour ces valeurs de x, y n'est pas défini. Pour les autres valeurs de x, la dérivée est

$$y' = \frac{4(x^2+a^2x+3a^2)}{(x^2+8x+a^2)^2}.$$

Le réalisant de son numérateur est $a^2(a^2-12)$; il est négatif pour les valeurs considérées de a^2. Il s'ensuit que la dérivée est positive pour les valeurs de x pour lesquelles elle est définie et que la fonction n'a pas d'extrémé.

On a le tableau :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		+	|	+	|	+	
y	1	↗	$\pm\infty$	↗	$\pm\infty$	↗	1

La courbe représentative est formée de trois branches. Les asymptotes sont $x=x_1$, $x=x_2$, $y=1$.

538 (1937). *Les segments* OA = x, OB = y, OC = z, OD = u, *situés dans le même plan, forment des angles adjacents* AOB, BOC, COD *égaux chacun à* 60°. *Les aires des triangles* AOB, BOC, COD *sont en* P. G. *Calculer la raison* r *de cette progression, sachant que la somme des segments* x, y, z, u *est* a, *que la somme de leurs inverses est* 1/b *et que la somme des aires des trois triangles est* k². *Discuter,* a *et* b *étant des constantes,* k² *un paramètre.*

On a le système :

$$x + y + z + u = a \tag{1}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{u} = \frac{1}{b} \tag{2}$$

$$(xy + yz + zu)\frac{\sqrt{3}}{4} = k^2 \quad \text{ou} \quad xy + yz + zu = \frac{4k^2\sqrt{3}}{3} \tag{3}$$

$$r = \frac{yz\sqrt{3}}{4} : \frac{xy\sqrt{3}}{4} = \frac{zu\sqrt{3}}{4} : \frac{yz\sqrt{3}}{4} \quad \text{ou} \quad r = \frac{z}{x} = \frac{u}{y}. \tag{4}$$

Les équations (4), (2) et (1) donnent $xu = yz = ab$. En tenant compte de (3), on a alors le système

$$xy + zu = \frac{4k^2\sqrt{3}}{3} - ab; \quad xy \times zu = xu \times yz = a^2b^2.$$

Donc xy et zu sont les racines de l'équation

$$f(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2 - \left(\frac{4k^2\sqrt{3}}{3} - ab\right)\mathrm{X} + a^2b^2 = 0, \tag{5}$$

dont le réalisant est $\left(\frac{4k^2\sqrt{3}}{3} - 3ab\right)\left(\frac{4k^2\sqrt{3}}{3} + ab\right)$.

1° Si $4k^2 > 3ab\sqrt{3}$, (5) admet deux racines positives distinctes. Si α est une quelconque de ces racines, les équations (3) et (4) donnent

$$1 + \frac{z}{x} + \frac{z}{x} \times \frac{u}{y} = \frac{4k^2\sqrt{3}}{3xy} \quad \text{ou} \quad r^2 + r + 1 - \frac{4k^2\sqrt{3}}{3\alpha} = 0.$$

La somme des racines de cette équation en r est négative; donc elle ne donne jamais deux valeurs acceptables pour r. Elle en donne une, si on a

$$\mathrm{P} = 1 - \frac{4k^2\sqrt{3}}{3\alpha} < 0 \quad \text{ou} \quad \alpha < \frac{4k^2\sqrt{3}}{3}.$$

Ainsi, le nombre des valeurs acceptables de r est égal au nombre des racines de (5) qui sont inférieures à $\beta = \frac{4k^2\sqrt{3}}{3}$. Or on vérifie aisément que β est supérieur aux racines de (5). Donc à chaque racine de (5) correspond une valeur de r.

2° Si $4k^2 = 3ab\sqrt{3}$, (5) devient $X^2 - 2abX + a^2b^2 = 0$. Cette équation a une racine double égale à ab. On a donc $xy = zu = ab$; $xu = yz = ab$. Par suite, $x = z$, $y = u$ et (4) donne $r = 1$.

539 (1938). *Trouver les conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients du polynôme* $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s$ *pour que ce polynôme soit décomposable en un produit de deux trinômes du second degré* T_1 *et* T_2, *de manière que si* T_1 *admet les racines quelconques* α *et* β, *celles de* T_2 *soient* α/β *et* β/α. — *En supposant que ces conditions soient satisfaites et que l'on ait* $p = r$ *et* $s = 2$, *calculer les racines de* T_1 *et* T_2.

1° En posant $\alpha + \beta = a$ et $\alpha\beta = b$, on a

$$T_1 \equiv x^2 - ax + b \quad \text{et} \quad T_2 \equiv x^2 - \frac{a^2 - 2b}{b} x + 1.$$

L'identification du polynôme donné et de T_1T_2 donne $b = s$ et le système

$$a^2 + as - 2s = -ps \quad (1)$$
$$a^3 - 2as + s^2 + s = qs \quad (2)$$
$$a^2 + a - 2s = -r. \quad (3)$$

Les équations (1) et (3) donnent $a(s-1) = r - ps$. En remplaçant alors a par sa valeur dans (3) et (2), on obtient les relations cherchées :

$$(r-ps)^2 + (r-ps)(s-1) + (r-2s)(s-1)^2 = 0 \quad (5)$$
$$(r-ps)^3 - 2s(r-ps)(s-1)^2 + (s^2+s-qs)(s-1)^3 = 0. \quad (6)$$

2° Si $p = r$ et $s = 2$, les équations (5) et (6) donnent $p = \pm 2$, $q = 3$.
Si $p = 2$, on a : $a = -2$, $b = 2$; $\alpha = -1 + i$, $\beta = -1 - i$;
si $p = -2$, on a : $a = b = 2$; $\alpha = 1 + i$, $\beta = 1 - i$.

540 (1939). *Démontrer que la fonction* $y = x^3 + x + 1$ *admet une racine comprise entre* -1 *et* 0. — *Étudier les variations de la fonction.* — *Les logarithmes considérés étant népériens, y a-t-il des valeurs de* x *comprises entre* -1 *et* 0 *qui vérifient les inéquations*

$$|\log(1+x)| > |\log(1+x^2)| > |\log(1+x^3)|\,?$$

1° La fonction est continue; elle prend des valeurs de signes contraires (-1 et 1) pour $x = -1$ et $x = 0$; elle est toujours croissante, car sa dérivée $y' = 3x^2 + 1$ est toujours positive. Donc elle s'annule pour une valeur de x et une seule, $x = x_1$, comprise entre -1 et 0.

2° La dérivée $y' = 3x^2 + 1$ est toujours positive. Voici le tableau des variations de la fonction.

x	$-\infty$		-1		x_1		0		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

La dérivée seconde est $y'' = 6x$. Dans l'intervalle $(-\infty, 0)$, la courbe est concave vers les y négatifs; dans l'intervalle $(0, +\infty)$, elle est concave vers les y positifs. Le point $(0, 1)$ est un point d'inflexion de la courbe; l'équation de la tangente en ce point est $y - 1 = x$.

3° Des relations $-1 < x < 0$, on déduit

$$0 < 1 + x < 1; \quad 1 + x^2 > 1; \quad 0 < 1 + x^3 < 1.$$

La base des logarithmes népériens étant supérieur à 1, on a donc

$$|\log(1 + x)| = \log \frac{1}{1 + x}; \ |\log(1 + x^3)| = \log \frac{1}{1 + x^3};$$

$$|\log(1 + x^2)| = \log(1 + x^2).$$

De plus, les inéquations

$$\log \frac{1}{1 + x} > \log(1 + x^2) > \log \frac{1}{1 + x^3}$$

sont équivalentes aux inéquations

$$\frac{1}{1 + x} > 1 + x^2 > \frac{1}{1 + x^3}.$$

Ce système d'inéquations donne les solutions $x_1 < x < 0$.

DIVISION « TOUTES ARMES »

541 (1946). *On donne l'équation* $\sqrt{\mathrm{a} + \mathrm{x}} + \sqrt{\mathrm{x}} = \mathrm{M}$ *où* a *est une constante donnée* ($\pm$ C) *et* M *un paramètre variable.*

On demande de la résoudre. On indiquera le nombre de solutions x *suivant les valeurs du paramètre* M.

1° Écrivons les conditions initiales: $x + a \geqslant 0$, $x \geqslant 0$, $\mathrm{M} \geqslant 0$ (car les deux radicaux sont de signe +).

2° $\sqrt{a + x} = \mathrm{M} - \sqrt{x}$ ou $a + x = \mathrm{M}^2 + x - 2\mathrm{M}\sqrt{x}$.

ou
$$\mathrm{M}^2 - a = 2\mathrm{M}\sqrt{x} \qquad (1)$$

Si $\mathrm{M}^2 - a \geqslant 0$,

a) il y a une solution possible $x = \dfrac{(\mathrm{M}^2 - a)^2}{4\mathrm{M}^2}$ si $\mathrm{M} \neq 0$ (donc $\mathrm{M} > 0$)

b) si $\mathrm{M} = 0$, l'équation est impossible ($\mathrm{M}^2 - \mathrm{a} \neq 0$, donc > 0) ou indéterminée ($\mathrm{M}^2 = a$).

Si $\mathrm{M}^2 - a < 0$, il n'y a pas de solution (réelle du moins).

3° La solution (1) remplit toujours la condition $x \geqslant 0$. Voyons si elle remplit la première $x + a \geqslant 0$.

Pour cela, il faut $\dfrac{(M^2 - a)^2}{4M^2} + a \geqslant 0.$

ou après avoir effectué (puisque $4M^2 \geqslant 0$) :

$$(M^2 + a)^2 \geqslant 0,$$

ce qui est.

D'autre part, cette solution vérifie réellement l'équation initiale et n'est pas une solution étrangère. En effet,

$$\sqrt{a + \frac{(M^2 - a)^2}{4M^2}} + \frac{M^2 - a}{2M}$$

vaut bien M.

4° EN RÉSUMÉ, il y a une solution $x = \dfrac{(M^2 - a)^2}{4M^2}$ si $M > 0$ et si $M^2 - a > 0$

Ceci a lieu dans les deux cas suivants :

1) $a \leqslant 0$ et $M > 0$

2) $a > 0$ et $M > \sqrt{a}$.

Dans les autres cas, il n'existe pas de solution.

542 (1947). *Le sommet* B *d'un mât planté verticalement dans le sol se trouve à la hauteur* l *au-dessus du pied* A *du mât. Celui-ci porte un repère* C *à la hauteur* $\frac{2}{3}$ l *au-dessus de* A.

On demande :

1° *à quelle distance* x *du pied* A *dans le plan horizontal de ce point, doit se placer un observateur dont l'œil* O *est à la hauteur* h *au-dessus du plan horizontal précité pour voir chacune des parties* AC *et* CB *sous le même angle;*

2° *de déterminer entre quelles limites peut varier* h *pour que le problème soit possible;*

3° *de déterminer le maximum de* x.

OC étant bissectrice de l'angle BOA, on doit avoir $\dfrac{BO}{AO} = \dfrac{BC}{CA} = \dfrac{1}{2}$. (1)

Traçons OD perpendiculaire à AB. On a $AD = h$ et $DB = l - h$ et par conséquent :

a) dans le triangle BDO : $BO = \sqrt{x^2 + (l - h)^2}$

b) dans le triangle DOA : $AO = \sqrt{x^2 + h^2}$.

D'où (1) devient :

$$2\sqrt{x^2 + (l - h)^2} = \sqrt{x^2 + h^2}.$$

Élevons au carré et réduisons :

$$3x^2 + 4l^2 - 8lh + 3h^2 = 0.$$

Or on peut supposer $x > 0$, les deux solutions étant égales en valeur absolue; la distance x peut d'ailleurs se prendre tout autour du mât et donner les points de la circonférence centrée en A et de rayon x.

$$x = \sqrt{-h^2 + \frac{8}{3}lh - \frac{4}{3}l^2}.$$

2° Cette solution existe si le radicand est positif ou nul. Celui-ci admet les racines :

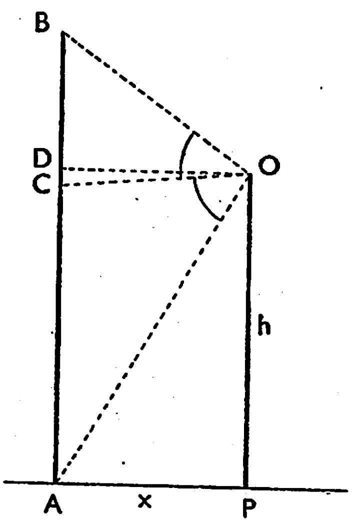


Fig. 91

$$\frac{4}{3}l \pm \sqrt{\frac{16}{9}l^2 - \frac{4}{3}l^2} = \frac{4}{3}l \pm \frac{2}{3}l = \begin{cases} 2l \\ \frac{2}{3}l \end{cases}$$

Il faut donc que

$$\frac{2}{3}l \leqslant h \leqslant 2l.$$

3° x est maximum : *a*) pour une valeur déterminée de l quand

$$h = \frac{4}{3}l.$$

Ce x maximum vaut $\frac{4}{9}l$.

b) pour une valeur déterminée de h quand

$$l = h.$$

Ce x maximum vaut $h\,\frac{\sqrt{3}}{3}$.

543 (1948). *On donne* 1) *la fonction* $y = \dfrac{2 - 3x}{x^2 - 3x + 2}$

2) *la droite* (d) : $y = mx + p$.

On demande de déterminer m *et* p *pour que la droite passe par le maximum et par le minimum de la fonction.*

1° Les extrémés s'obtiennent par la dérivée

$$y' = \frac{3x^2 - 4x}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$

qui s'annule en $x = 0$ et $x = \frac{4}{3}$ et est négative dans l'intervalle de x : $(0, \frac{4}{3})$.

$x = 0$ donne donc un maximum de valeur 1 et $x = \frac{4}{3}$, un minimum de valeur 9.

2° La droite doit passer par les points $(0, 1)$ et $(\frac{4}{3}, 9)$. Donc l'équation de (d) fournit les conditions :

$a)$ $(0,1)$: $\quad 1 = p$

$b)$ $(\frac{4}{3}, 9)$: $\quad 9 = \frac{4}{3} m + p$.

Ainsi $\quad p = 1 \qquad m = 6$.

La droite cherchée a l'équation

$$y = 6x + 1.$$

544 (1949). *Cinq nombres entiers sont des termes consécutifs d'une progression arithmétique.*

Déterminez ces nombres sachant que

a) leur somme est égale à 15 *et*

b) que la somme de leurs inverses est égale à $\frac{71}{105}$.

Soient $a - 2r$, $a - r$, a, $a + r$, $a + 2r$ ces nombres.

On voit tout de suite que leur somme vaut $5a = 15$. Donc $a = 3$.

La deuxième condition est donc

$$\frac{1}{3 - 2r} + \frac{1}{3 - r} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 + r} + \frac{1}{3 + 2r} = \frac{71}{105}$$

ou, en groupant et en simplifiant :

$$\frac{1}{9 - 4r^2} + \frac{1}{9 - r^2} = \frac{6}{105}$$

ou
$$\frac{18 - 52^2}{81 - 45r^2 + 42^4} = \frac{2}{35}$$

Toutes réductions faites, on a

$$8r^4 + 85r^2 - 468 = 0.$$

Les seules racines acceptables sont $r = \pm 2$ qui donnent la même progression :

$$-1 \quad 1 \quad 3 \quad 5 \quad 7.$$

545 (1950). *On donne la fonction* $y = kx^2(2 - x)$ ($k =$ *paramètre*).

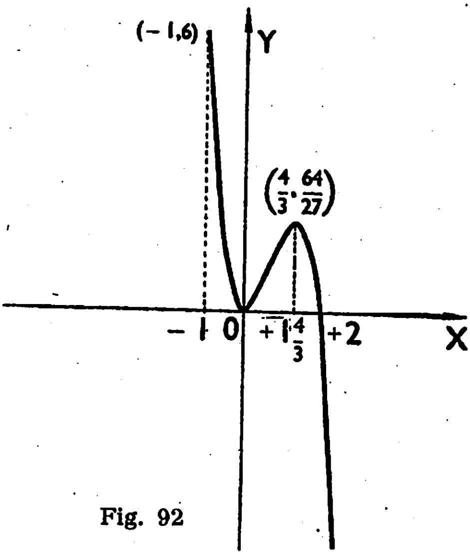


Fig. 92

On demande :

a) *de déterminer* k *de manière que la dérivée première* y′ *soit égale à* − 8 *pour* x = 2;

b) *d'étudier les variations de la fonction* y *dans laquelle on donne à* k *la valeur obtenue au* a) *et de les représenter graphiquement en axes rectangulaires, pour* x *variant de* $-\infty$ *à* $+\infty$;

c) *de déterminer pour la valeur de* k *obtenue au* a) *les valeurs de* x *qui satisfont à l'inéquation :*

$$kx^2(2 - x) \geqslant x$$

et de représenter en trait fort sur le graphique de la fonction établi au b) *les parties de la courbe correspondant à ces valeurs de* x.

a) On a : $y = 2kx^2 - kx^3$ et $y' = 4kx - 3kx^2$.

On doit avoir : $-8 = 8k - 12k$; d'où : $k = 2$.

b) La fonction pour $k = 2$ s'écrit :

$$y = 4x^2 - 2x^3 \text{ et sa dérivée } y' = 8x - 6x^2.$$

y' est positif dans l'intervalle de x $(0, +\frac{3}{4})$ où la fonction est donc croissante. En dehors de là, y décroît. La fonction existe d'ailleurs et est continue de $-\infty$ à $+\infty$; elle admet la racine double 0 (OX tangent en O à la courbe) et la racine $\frac{4}{3}$.

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{64}{27}$	↘	0	↘	$-\infty$

c) $2x^2(2-x) \geqslant x$.

$$4x^2 - 2x^3 - x \geqslant 0$$
$$x(-2x^2 + 4x - 1) \geqslant 0.$$

La condition de nullité est réalisée en

$$x = -2 - \sqrt{2}, \quad -2 + \sqrt{2} \quad \text{et} \quad 0.$$

L'inégalité a lieu dans les intervalles

$$(-\infty, -2-\sqrt{2}) \quad \text{et} \quad (-2+\sqrt{2}, 0).$$

Le deuxième intervalle peut être marqué sur le graphique (figure 2); l'autre se trouve à gauche au delà du point $(-1{,}6)$.

546 (1951). 1) *Mettez sous sa forme la plus simple, l'expression :*

$$\mathrm{a} - \mathrm{b} - [\mathrm{a}^2(3\mathrm{b} - \mathrm{a})^2 - 4\mathrm{ab}^3]^{\frac{1}{2}}$$

2) *On donne la fonction*

$$\frac{\mathrm{x}^2 + \mathrm{a} + \mathrm{b}}{\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{a} + 1}$$

On demande de donner à a *et* b *des valeurs telles que la fonction présente un extrémum de valeur* $-\frac{1}{3}$ *pour* $\mathrm{x} = \frac{5}{2}$.

1) Désignons par E l'expression globale proposée. En effectuant le crochet après avoir mis a en évidence, il vient

$$E = a - b - [a(a^3 - 6a^2b + 9ab^2 - 4b^3)]^{\frac{1}{2}}.$$

La parenthèse est divisible par $(a-b)$: on le voit en remplaçant a par b. D'où

$$E = a - b - [a(a-b)(a^2 - 5ab + 4b^2)]^{\frac{1}{2}}$$
$$= a - b - [a(a-b)^2(a-4b)]^{\frac{1}{2}}$$

Si $a > b$ $\quad E = a - b - (a-b)\sqrt{a(a-4b)} = (a-b)\,[1 - \sqrt{a^2 - 4ab}]$

Si $a < b$ $\quad E = a - b + (a-b)\sqrt{a(a-4b)} = (a-b)\,[1 + \sqrt{a^2 - 4ab}]$

Si $a = b$ $\quad E = 0.$

2) La fonction a la dérivée

$$\frac{-(a+2)x^2 + 2(1-b)\,x + a + 2b}{(x^2 - 2x + 1)^2}$$

qui doit s'annuler pour $x = \frac{5}{2}$. D'où

$$-(a+2)\frac{25}{4} + (1-b)5 + a + 2b = 0$$

ou $\quad + 21a + 12b + 30 = 0 \quad$ ou $\quad 7a + 4b + 10 = 0.$

Pour $x = \frac{5}{2}$, la fonction doit valoir $-\frac{1}{3}$. Donc

$$\frac{25 + 10a + 4b}{9} = -\frac{1}{3}$$

ou $$5a + 2b + 14 = 0.$$

Finalement $$a = -6 \quad \text{et} \quad b = 8.$$

547 (1952). 1) $3a^5 - 33a^3b^2 - 5a^4b + 14a^2b^3 : a^2 + 7ab = ?$

2) $mx - 4y = 4\sqrt{3}$

$3x - my = 6.$

Déterminez pour m *une valeur qui rende le système impossible et une valeur qui rende le système indéterminé.*

3) *Faites la représentation graphique des variations de la fonction* y *définie par la relation* $3y + 2x - 8 = 0$.

4) *Résolvez l'équation* $5x^3 + 6x^2 - 12x - 40 = 0$ *(racines réelles seulement).*

5) *Calculez pour* $x = 2$ *la valeur de la dérivée de la fonction*

$$\frac{3 - x}{5 - x^2} - 3x(4 + x^2)$$

1) Divisons d'abord par a [le diviseur vaut $a(a + 7b)$]. Puis appliquons la loi du quotient après avoir ordonné.

$$3a^4 - 5a^3b - 33a^2b^2 + 14ab^3 = (a + 7b)\,(3a^3 - 26a^2b + 149ab^2 - 1029b^3) + 7203b^4$$

2) Pour l'impossibilité, on doit avoir :

$\frac{m}{3} = \frac{-4}{-m} \neq \frac{4\sqrt{3}}{6}$. D'où les conditions $\begin{cases} m^2 = 12 \text{ ou } m = \pm 2\sqrt{3} \\ 4m\sqrt{3} \neq 24 \text{ ou } m \neq 2\sqrt{3} \end{cases}$

Le système est impossible si $m = -2\sqrt{3}$.

Pour l'indétermination, on remplace le signe $\neq$ par le signe $=$. L'indétermination a lieu pour $m = 2\sqrt{3}$.

3) C'est une droite passant par les points $(4, 0)$ et $(0, \frac{8}{3})$.

4) La loi du quotient donne le diviseur $(x - 2)$ et donc la racine 2. Le quotient vaut $5x^2 + 16x + 20$ et ses racines sont imaginaires.

5) Sa dérivée vaut : $\dfrac{-x^2+6x-5}{(5-x^2)^2} - 12 + 9x^2$. Pour $x = 2$, elle prend la valeur 27.

548 (1953). 1) $-x^2 + 5(m-2)x + m$. *Déterminez les valeurs du paramètre* m *pour lesquelles cette fonction de la variable* x *est positive et décroissante dans tout l'intervalle* $(-2, 0)$.

2) *Dans une des progressions qui définissent un certain système de logarithmes figurent les termes :* ... 64 ... 4096... 32.768... *Les termes homologues de l'autre sont* ... 2 ... 4 ... 6 ...

Déterminez dans ce système le nombre qui a $\frac{4}{3}$ *comme logarithme.*

1) La fonction passe par un maximum ($a < 0$) et ne peut donc décroître qu'à partir de $x = \dfrac{b}{2a} = \dfrac{5(m-2)}{2}$. Cette dernière valeur doit donc vérifier :

$$\frac{5(m-2)}{2} \leqslant -2$$

$$\text{ou} \quad m \leqslant \frac{6}{5}.$$

La fonction doit être positive entre -2 et 0. Comme elle décroît, il suffit qu'elle soit positive pour $x = 0$, c'est-à-dire que $m > 0$.

Finalement $$0 < m \leqslant \frac{6}{5}$$

2) Supposons insérés $m-1$ et $n-1$ moyens entre les premiers et deuxièmes, entre les premiers et les troisièmes termes des progressions. On aura :

$$\frac{4-2}{m} = \frac{5-2}{n} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{m} = \frac{3}{n}$$

et $$\sqrt[m]{\frac{4096}{64}} = \sqrt[n]{\frac{32768}{64}} \quad \text{ou} \quad \sqrt[m]{64} = \sqrt[n]{512}.$$

On prend donc $m = 2k$ et $n = 3k$.

Pour insérer 4/3 dans la deuxième progression, prenons $k = 3$. On a alors les progressions représentées partiellement et avec les anciens termes mis entre crochets.

$$\begin{array}{cccccccccc} \ldots & 2^3 & 2^4 & 2^5 & [8^2] & 8^3 & [8^4] & [8^5] & \ldots \\ \ldots & 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & [2] & 3 & [4] & [5] & \ldots \end{array}$$

Dans le système envisagé, $\frac{4}{3}$ est donc le logarithme de 4.

549 (1954) *Dans une progression géométrique à termes positifs, le premier terme vaut* 4 *et la somme des logarithmes des six premiers termes vaut le quart de la somme des logarithmes des neuf termes suivants. Calculez la raison de cette progression.*

La progression se présente sous la forme :

$$4 \quad 4q\ldots\ldots 4q^5 \quad 4q^6 \quad 4q^7 \quad 4q^8 \quad 4q^9\ldots\ldots 4q^{14}$$

On a ($q > 0$)

$$\log 4 + \log 4q + \ldots + \log 4q^5 = \frac{1}{4}[\log 4q^6 + \ldots + \log 4q^{14}]$$

ou
$$\log 4^6 q^{15} = \frac{1}{4}\log 4^9 q^{105}$$

ou
$$\log 4^6 q^{15} = \log \sqrt[4]{4^9 q^{105}}$$

$$4^6 q^{15} = \sqrt[4]{4^9 q^{105}}$$

$$4^6 q^{15} = \sqrt[4]{4^9 q^{105}}$$

Posons $q^{15} = x$. L'équation s'écrit en élevant à la 4e puissance

$$4^{15} x^4 = x^7.$$

On a donc la solution $x = 0$ ($q = 0$) à rejeter et la solution venant de

$$x^3 = 4^{15} \qquad x = 4^5 \qquad q = (4^5)^{\frac{1}{15}} = \sqrt[3]{4}$$

550 (1955). 1) *Dans une progression géométrique de dix termes positifs, le quatrième est* 24 *et la somme des logarithmes des dix termes vaut*

$$45 \log 2 - 5 \log 3.$$

Calculez le premier terme et la raison de cette progression.

2) *Étudiez les variations de la fonction*

$$5x^4 - 12x^3 + 6x^2 + 4x - 3$$

au point de vue de la continuité, du signe, de la croissance, des extrema. Esquissez-en la représentation graphique en axes rectangulaires et dessinez la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 0$. *Écrivez l'équation de cette tangente.*

1) Soient a, aq, aq^2, aq^3, aq^4, ..., aq^9 cette progression.

On a : $$aq^3 = 24$$

et $\log a + (\log a + \log q) + (\log a + 2\log q) + \ldots + (\log a + 9\log q)$
$= 45 \log 2 - 5 \log 3.$

ou
$$\begin{cases} aq^3 = 24 \\ 10\log a + 45\log q = 45\log 2 - 5\log 3 \end{cases}$$

ou
$$\begin{cases} aq^3 = 24 \\ \log(a^{10}q^{45}) = \log\left(\dfrac{2^{45}}{3^5}\right) \end{cases}$$

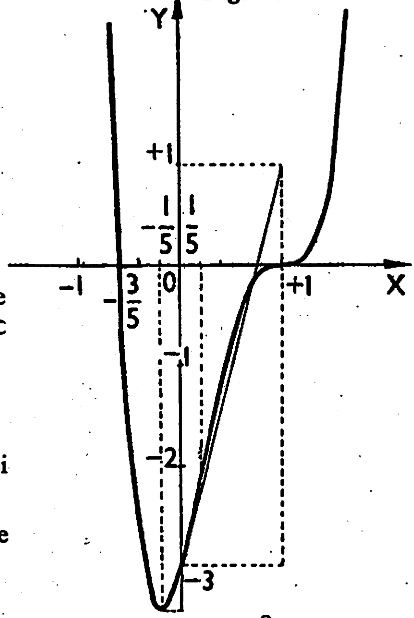
$$\text{ou}\quad \begin{cases} aq^3 = 24 \\ a^{10}q^{45} = \dfrac{2^{45}}{3^5} \end{cases}$$

Finalement : $$q^3 = \frac{24}{a}$$

$$\text{et}\quad a^{10}\left(\frac{24}{a}\right)^{15} = \frac{2^{45}}{3^5}$$

$$\text{ou}\quad a = 81 \quad \text{et} \quad q = \frac{2}{3}$$

Fig. 93



2) Cette fonction est continue de $-\infty$ à $+\infty$. Elle devient $+\infty$ pour $x = \pm\infty$

Elle peut s'écrire :

$$(x-1)^3(5x+3)$$

comme on le voit en appliquant la loi du reste et celle du quotient.

Elle s'annule donc en changeant de signe en $x = 1$ et $x = -\frac{3}{5}$.

Positive pour $x < -\frac{3}{5}$, elle est négative entre $x = -\frac{3}{5}$ et $x = 1$ et positive pour $x > 1$.

Sa dérivée $y' = 20x^3 - 36x^2 + 12x + 4 = 4(x-1)^2(5x+1)$ est négative pour $x < -\frac{1}{5}$ et positive au-delà. La fonction y décroît à gauche de $x = -\frac{1}{5}$ et croît à droite : il y a un minimun en $x = -\frac{1}{5}$.

De plus la dérivée y' s'annule sans changer de signe en $x = 1$ où la fonction y s'annule aussi : en ce point, OX est une tangente inflexionnelle. La dérivée $y'' = 12(5x^2 - 6x + 1)$ montre qu'il y a inflexion en $x = \frac{1}{5}$ et en $x = 1$.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{5}$		$-\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↘	$-\frac{432}{125}$	↗	$-\frac{256}{125}$	↗	0	↗	$+\infty$

La tangente au point $(0, -3)$ a pour équation

$$y + 3 = [y']_{x=0}$$

ou $$y + 3 = 4x.$$

DIVISION « POLYTECHNIQUE »

551 (1946). *On donne l'équation* $\sqrt{x^2 + 4x} = (x + 1 + \lambda)$ où λ *est un paramètre réel.*

On demande :

1° *de déterminer les valeurs de* λ *pour lesquelles l'équation admet une racine* x *réelle;*

2° *d'étudier les variations de* x *en fonction de* λ *dans les intervalles où cette racine existe et de les représenter graphiquement.*

On déterminera :

a) les points où la courbe rencontre les axes ainsi que la tangente en chacun d'eux;

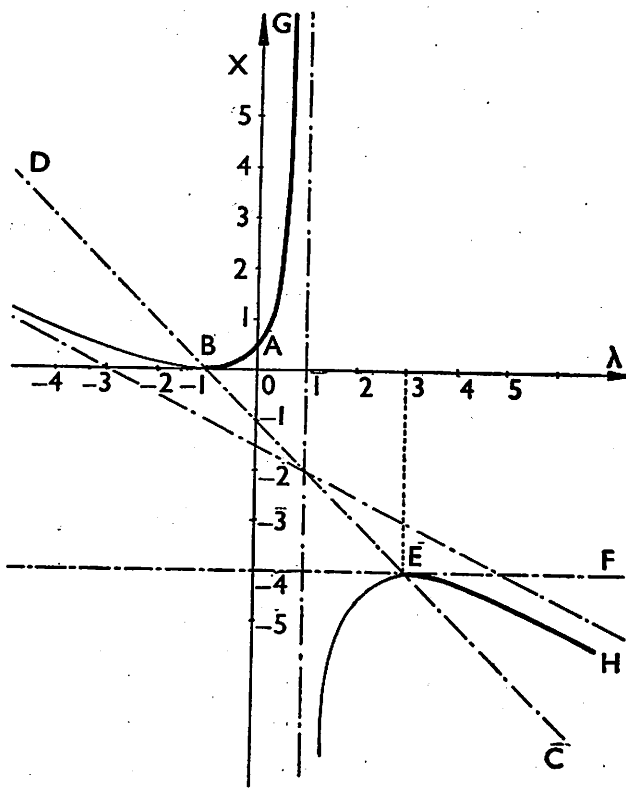


Fig. 94

b) le sens des variations de x;

c) les valeurs ou les limites de x *aux bornes des intervalles considérés.*

1° 1) Posons d'abord les conditions initiales

a) $x^2 + 4x \geqslant 0$ c'est-à-dire $x \leqslant -4$ ou $x \geqslant 0$.

b) $x + 1 + \lambda \geqslant 0$ puisque le premier membre l'est aussi, vu le signe du radical.

Les régions DBλ et FEC conviennent avec leurs frontières.

2) Élevons au carré l'équation :

$$x^2 + 4x = x^2 + 1 + \lambda^2 + 2x + 2\lambda x + 2\lambda$$

D'où
$$2(1 - \lambda)x = (1 + \lambda)^2.$$

Si $\lambda = 1$, l'équation initiale devient impossible. Donc λ étant nécessairement non égal à 1, on aura comme solution (provisoirement, au moins)

$$x = \frac{(1 + \lambda)^2}{2(1 - \lambda)}$$

3) Cette solution doit vérifier les conditions initiales c'est-à-dire se trouver dans les régions DBλ et FEC. De plus, $\lambda \neq 1$.

2° 1) La rencontre avec les axes a lieu en A ($\lambda = 0$, $x = \frac{1}{2}$) et B ($x = 0$, $\lambda = -1$). B est un point de tangence de OX.

La tangente a le coefficient angulaire

$$x'_\lambda = \frac{(1 + \lambda)(3 - \lambda)}{2(1 - \lambda)^2}$$

Ce coefficient angulaire vaut en A : $\frac{3}{2}$ et en B : 0 (tangente en A : $\lambda = \frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$; tangente en B : $\lambda = -1$).

2) x'_λ étant positif dans l'intervalle de λ ; $(-1, 3)$: la racine x y croît. En dehors, elle décroît. Il y a un maximum -4 en $\lambda = 3$ et un minimum nul en $\lambda = -1$.

3) Il y a une asymptote verticale $\lambda = 1$ et une asymptote oblique

$$x = -\frac{1}{2}(\lambda + 3)$$

La courbe est une hyperbole.

4) Finalement les solutions (x, λ) se trouvent sur les tronçons AG_∞ et EH_∞ de la courbe, bornes inférieures comprises.

552 (1947). *On donne le système de trois équations linéaires à trois inconnues* x, y *et* z :

$$\begin{aligned} ax + by - cz &= 1 \\ cx + (a-1)z &= c \\ cy + (b-2c)z &= 0 \end{aligned}$$

a, b, c *étant des paramètres qui peuvent rendre toutes les valeurs réelles possibles.*

On demande de résoudre le système et d'en discuter les solutions, d'après les valeurs des paramètres, par application de la théorie des déterminants.

Le système peut s'écrire :

$$\begin{aligned} ax + by - cz &= 1 \\ cx + 0y + (a-1)z &= c \\ 0x + cy + (b-2c)z &= 0. \end{aligned}$$

Son déterminant fondamental vaut :

$$D = \begin{vmatrix} a & b & -c \\ c & 0 & a-1 \\ 0 & c & b-2c \end{vmatrix} \begin{aligned} &= -c^3 - a^2c + ac - b^2c + 2bc^2 \\ &= -c^3 - ac(a-1) - bc(b-2c) \end{aligned}$$

$$D = -c(b-c)^2 + ac(1-a) = c[a(1-a) - (b-c)^2].$$

1^er^ CAS : $D \neq 0$. Il y a alors, d'après ce théorème de Cramer, une solution

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b & -c \\ c & 0 & a-1 \\ 0 & c & b-2c \end{vmatrix}}{D} = \frac{-c^3 - c(a-1) - bc(b-2c)}{D} = \frac{1 - a - (b-c)^2}{a(1-a) - (b-c)^2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & -c \\ c & c & a-1 \\ 0 & 0 & b-2c \end{vmatrix}}{D} = \frac{(a-1)(b-2c)}{a(1-a) - (b-c)^2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & 0 & c \\ 0 & c & 0 \end{vmatrix}}{D} = \frac{(1-a)c}{a(1-a) - (b-c)^2}$$

2^e^ CAS : $D = 0$. Ceci peut se produire dans deux cas :

a) si $c = 0$

$$D = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix}$$

1) Si $b \neq 0$ on peut prendre $\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}$ comme déterminant principal avec la première et la deuxième équations comme équations principales.

On en tire $z = 0$ et $ax + by = 1$. Il y a indétermination simple.

2) Si $b = 0$, on prend $\begin{vmatrix} a & o \\ o & a-1 \end{vmatrix}$ comme déterminant principal.

α) Si $a \neq 0$ et $\neq 1$, avec la première et la deuxième équations comme équations principales, on obtient $z = 0$ et $ax = 1$. Il y a indétermination simple (sur y).

β) Si $a = 0$, il y a impossibilité.

γ) Si $a = 1$, $x = 1$; y et z sont indéterminés.

b) Si $a(1-a) - (b-c)^2 = 0$ ou $a(1-a) = (b-c)^2$. On peut supposer b et $c \neq 0$ et $a \neq 0$ et $\neq 1$ à cause de ce qui précède.

Le déterminant principal sera par exemple $\begin{vmatrix} a & b \\ c & o \end{vmatrix} = -bc$ et les deux premières équations seront principales.

On en tire $x = \dfrac{(a-1)z}{c} - 1$ et $y = \dfrac{a(a-1)^2}{bc} + \dfrac{1+cz-a}{b}$

Reportons dans la troisième équation; il vient, toutes réductions faites

$$z[a(a-1) + b - c)^2] + c(1-a) = 0$$
$$0z + c(1-a) = 0.$$

Donc le système est impossible vu les hypothèses.

553 (1948). *On considère un polynôme entier en* x, P(x) *tel que sa division par* (x — 1) *donne pour reste* (— 30) *et que sa division par* (x — 2) *donne pour reste* (— 54).

On demande

1° *de déterminer le reste de sa division par* $x^2 - 3x + 2$;

2° *de déterminer le polynôme* P (x) *sachant qu'il est du quatrième degré et qu'il est divisible par* x $(x^2 + 5)$;

3° *de résoudre l'équation* P(x) = 0.

1° On a en vertu de la loi du reste :

$$P(1) = -30 \qquad P(2) = -54.$$

Or $(x-1)(x-2) = (x^2 - 3x + 2)$.

D'où, posant $P(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + \alpha x + \beta$ (le degré du reste vaut 1 au maximum), on peut écrire :

$$P(1) = \alpha + \beta = -30$$
$$P(2) = 2\alpha + \beta = -54$$

Ceci donne $\alpha = -24 \qquad \beta = -6$.

Le reste cherché vaut donc $-24x - 6$.

2° On peut écrire vu le degré imposé au polynôme :

$$P(x) = x(x^2 + 5)\ (nx + p)$$

avec les conditions :

$$P(1) = 6(n + p) = -30$$
$$P(2) = 18(+2n + p) = -54.$$

De là on tire : $n = 2$ et $p = -7$.

Le polynôme est donc $P(x) = x(x^2 + 5)\ (2x - 7)$.

3° Les racines sont $0,\ \dfrac{7}{2}$ et $\pm i\sqrt{5}$.

554 (1949). *On donne la fonction*

$$y = \frac{6x^2 - 13x + 5}{3x^2 - 5x - 2}$$

On demande :

1° *d'étudier ses variations pour* x *variant de* $-\infty$ *à* $+\infty$ *(par application de la théorie des dérivées) ;*

2° *de construire sa courbe représentative en axes rectangulaires* xOy.

1) La fonction existe partout de $-\infty$ à $+\infty$.

2) Elle est continue partout sauf pour les valeurs $x = -\dfrac{1}{3}$ et $x = 2$ annulant le dénominateur. On a ainsi deux asymptotes verticales de sa courbe.

3) Elle s'annule pour $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = \dfrac{5}{3}$. Ceci donne les points de sections de sa courbe avec $0x$. Cette courbe rencontre Oy en $(0, -\dfrac{5}{2})$.

4) Pour $x = \pm\infty$, y tend vers 2 : ceci donne une asymptote horizontale de sa courbe.

5) Calculons la dérivée :

$$y' = \frac{(3x^2 - 5x - 2)\ (12x - 13) - (6x^2 - 13x + 5)\ (6x - 5)}{(3x^2 - 5x - 2)^2}$$

$$= \frac{9x^2 - 54x + 51}{(3x^2 - 5x - 2)^2}$$

qui s'annule pour $x = 3 \pm \sqrt{\dfrac{10}{3}}$

et qui est négative entre les racines susdites, positive en dehors de cet intervalle.

6) Faisons un tableau de variation :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$3-\sqrt{\frac{10}{3}}$		$\frac{5}{3}$		2		$3+\sqrt{\frac{10}{3}}$		$+\infty$
y'		$+$	$\Vert$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$+2$	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	M	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+2$

$$M = \frac{120-23\sqrt{30}}{60-13\sqrt{30}} \qquad m = \frac{120+23\sqrt{30}}{60+13\sqrt{30}}$$

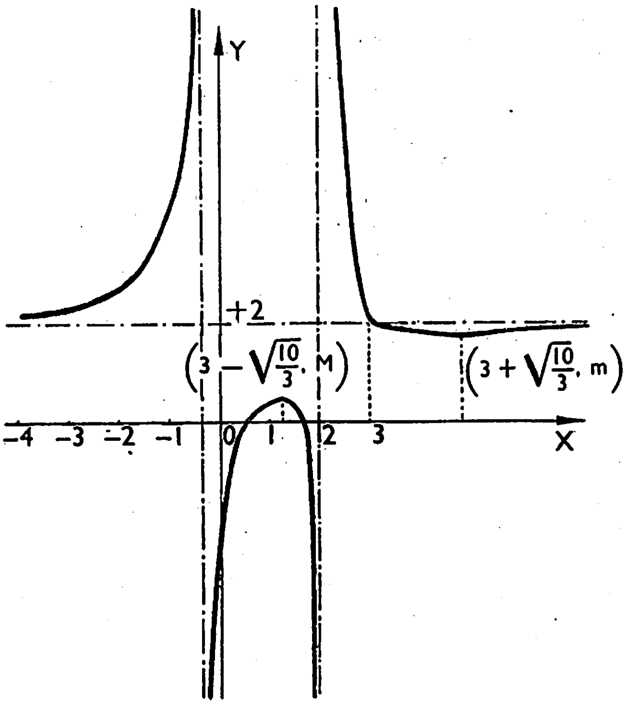


Fig. 95

555 (1950). *On donne la fonction* $F(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$.

On demande :

1° *de vérifier que* $x = \sqrt{-1} = i$ *est un zéro de* $F(x)$*;*

2° *de transformer* $F(x)$ *en un produit de facteurs binômes compte tenu du* 1°*;*

3° *de rechercher par application de la théorie des dérivées et par deux procédés différents si* $F(x)$ *présente un ou des extrémés et quelle en est la valeur;*

4° *de déterminer (en justifiant) si la courbe figurative de* F(x) *présente un ou plusieurs points d'inflexion.*

1° i et $-i$ sont racines de $F(x)$ car :

$$(\pm i)^4 - 4(\pm i)^3 + 5(\pm i)^2 - 4(\pm i) + 4$$
$$= 1 \pm 4i - 5 \mp 4i + 4 = 0.$$

2° En vertu du 1° $(x + i)$ et $(x - i)$ sont diviseurs de $F(x)$ et donc de même leur produit $(x^2 + 1)$

$$F(x) = (x^2 + 1)(x^2 + \alpha x + 4).$$

Par identification, on a tout de suite : $\alpha = -4$.

$$F(x) = (x^2 + 1)(x - 2)^2.$$

3° La dérivée $F'(x)$ vaut $2(2x^3 - 6x^2 + 5x - 2)$ et s'annule pour $x = 2$ seulement.

La dérivée est négative pour $x < 2$ et positive au-delà : il y a donc un minimum qui vaut zéro.

REMARQUE : Voici un second procédé. La dérivée seconde $F''(x)$ est

$$12x^2 - 24x + 10$$

Pour $x = 2$, $F''(2) = 10 > 0$, et donc $F'(x)$ est croissante dans l'intervalle de x : $(+2 - \delta, +2 + \delta)$, c'est-à-dire qu'elle s'annule en passant du négatif au positif au point $x = 2$. Dès lors $F(x)$ admet un minimum pour $x = 2$.

4° La dérivée seconde $2[6x^2 - 12x + 5]$

s'annule pour $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{6}}{2}$ en changeant de signe : il y a donc deux points d'inflexion.

556 (1951). *On considère en axes rectangulaires* Oxy *la fonction* y = f(x) *dont le second membre est un polynôme entier en* x *du quatrième degré divisible par* $(x^2 - 1)$; *cette fonction présente un minimum* $-\dfrac{27}{16}$ *pour* $x = -\dfrac{1}{2}$ *et au point* A *d'abscisse* 1, *la tangente à la courbe représentative est parallèle à* Ox.

On demande :

1° *de déterminer* f(x)

2° *d'étudier les variations de* y = f(x) *et d'en faire la représentation graphique (zéros, infinis, extrémés, inflexions, etc).*

1° Soit $y = (x^2 - 1)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$, la fonction où on doit donc déterminer α, β, γ.

$$y' = (x^2 - 1)(2\alpha x + \beta) + 2x(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$$
$$= 4\alpha x^3 + 3\beta x^2 - 2(\alpha - \gamma)x - \beta \text{ doit s'annuler pour } x = -\frac{1}{2} \text{ et } x = 1.$$

D'où $$2\alpha - \beta - 4\gamma = 0 \qquad (1)$$

et $$\alpha + \beta + \gamma = 0 \qquad (2).$$

De plus, la fonction pour $x = -1/2$ doit valoir $-\frac{27}{16}$:

Donc $$-\frac{3}{4}\left(\frac{\alpha}{4} - \frac{\beta}{2} + \gamma\right) = -\frac{27}{16}$$

ou $$\alpha - 2\beta + 4\gamma = 9 \qquad (3).$$

Le système (1), (2), (3) admet la solution :

$$\alpha = \gamma = 1 \qquad \beta = -2.$$

La fonction vaut donc :

$$y = (x^2 - 1)(x^2 - 2x + 1) = (x-1)^3 (x+1).$$

2° La fonction existe et est continue de $-\infty$ à $+\infty$.

Elle s'annule pour $x = 1$ (zéro triple) et $x = -1$ (coupures avec Ox). Elle rencontre Oy en $y = -1$.

Elle tend vers $+\infty$ pour $x = \pm\infty$.

La dérivée $y' = (x-1)^3 + 3(x+1)(x-1)^2 = 2(x-1)^2(2x+1)$ s'annule (comme prévu) pour $x = 1$ et $x = -\frac{1}{2}$. Elle est positive pour $x > -\frac{1}{2}$ (sauf en $x = 1$ où elle est nulle).

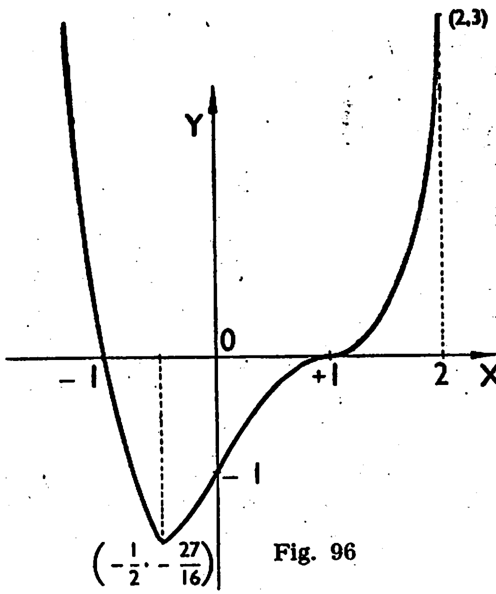


Fig. 96

La dérivée seconde $y'' = (x-1)^2 4 + 2(4x+2)(x-1) = (x-1)(12x)$ s'annule pour $x = 0$ et $x = 1$ (inflexions).

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↘	$-\frac{27}{16}$	↗	-1	↗	0	↗	$+\infty$

557 (1952). *La fonction*

$$y = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + mx + n} \quad (a, b, m \text{ et } n \neq 0).$$

présente deux extrémés : l'un vaut 5/3 *pour* $x = -2$*; l'autre* -1 *pour* $x = 0$.

On demande :

a) de déterminer cette fonction (calcul de a, b, m *et* n*);*

b) d'étudier (par application de la théorie des dérivées) les variations de la fonction ainsi obtenue et de la représenter graphiquement en axes rectangulaires Oxy).

N. B. *On ne recherchera pas les points d'inflexion éventuels.*

$$a)\ y' = \frac{(x^2 + mx + n)\ (2x + a) - (x^2 + ax + b)\ (2x + m)}{(x^2 + mx - n)^2}$$

$$= \frac{x^2 (m - a) + 2x (n - b) + na - mb}{(x^2 + mx + n)^2}$$

y' doit annuler pour $x = -2$ et $x = 0$. D'où :

$$4(m - a) - 4(n - b) + na - mb = 0$$

et $$na - mb = 0$$

c'est-à-dire : $$\begin{cases} m - n = a - b & (1) \\ na = mb & (2). \end{cases}$$

Pour $x = -2$ [et $x = 0$] la fonction doit valoir 5/3 [et -1].

D'où $\dfrac{4 - 2a + b}{4 - 2m + n} = \dfrac{5}{3}$ ou $6a - 3b - 10m + 5n + 8 = 0$ (3)

et $\dfrac{b}{n} = -1$ ou $b = -n$ (4).

Le système (1), (2), (3) et (4) admet la solution :

$$a = -1 \qquad b = -1 \qquad m = 1 \qquad n = 1.$$

Finalement $$y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 + x + 1}$$

b) La fonction existe et est continue de $-\infty$ à $+\infty$

Elle admet les zéros (coupures avec Ox) : $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; elle coupe Oy en $(0, -1)$.

Pour $x = \pm \infty$, elle tend vers 1 ($y = 1$ est une asymptote horizontale).

La dérivée vaut $y' = \dfrac{2x^2 + 4x}{(x^2 + x + 1)^2}$ et s'annule pour $x = 0$ et $x = -2$ (comme prévu). Elle est négative entre ces deux valeurs.

x	$-\infty$		-2		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		0		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
y	1	$\nearrow$	$\frac{5}{3}$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

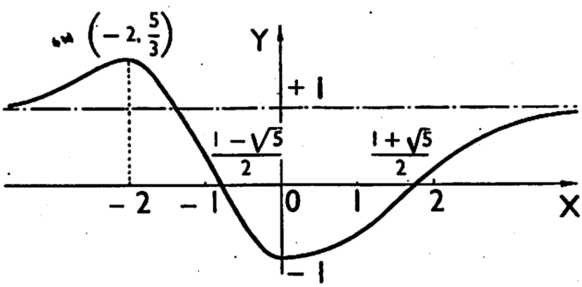


Fig. 97

558 (1953). *On donne la fonction*

$$y = \sqrt{\frac{1-3x}{x^2-4x+3}}.$$

On demande :

1° *d'étudier ses variations par application de la théorie des dérivées;*

2° *de la représenter graphiquement en axes rectangulaires* Oxy.

N. B. *On ne recherchera pas les points d'inflexion éventuels.*

La fonction existe quand le radicand est positif, c'est-à-dire dans les intervalles de x : $(-\infty, \frac{1}{3})$ et $(1, 3)$.

Elle est continue dans ces intervalles sauf aux limites du 2° (asymptotes verticales $x = 1$ et $x = 3$).

Elle s'annule pour $x = -\infty$ (Ox est asymptote horizontale) et pour $x = \frac{1}{3}$. Elle coupe Oy en $(0, \frac{\sqrt{3}}{3})$.

$$1^\circ \quad y' = \frac{\dfrac{(x^2-4x+3)(-3)-(1-3x)(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2}}{2\sqrt{\dfrac{1-3x}{x^2-4x+3}}}.$$

$$= \frac{3x^2-2x-5}{2\sqrt{1-3x}\,(x^2-4x+3)^{\frac{3}{2}}}$$

La dérivée donc est négative entre $x=-1$ et $x=\frac{5}{3}$, points où elle s'annule.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		1		$\frac{5}{3}$		3
y'		$+$	0	$-$				$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	0		$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

y' est infinie pour $x=\frac{1}{3}$, $x=1$ et $x=3$.

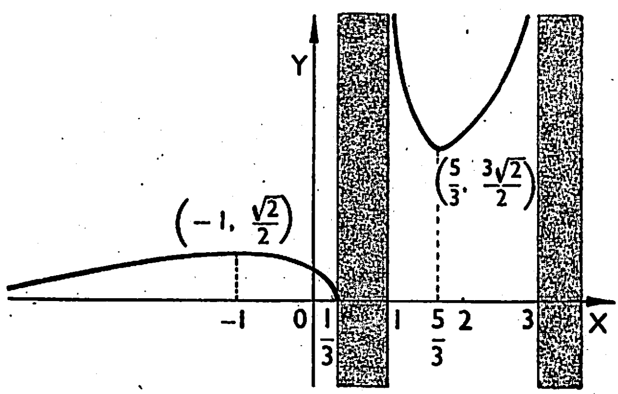


Fig. 98

559 (1954). *On donne la fonction* $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$, *quotient de deux trinômes complets du deuxième degré à coefficients entiers.*

— *Le trinôme numérateur est tel que sa courbe figurative (en axes rectangulaires* xOy*) présente un minimum* $\left(-\frac{16}{3}\right)$ *pour* $x = -\frac{2}{3}$; *ce trinôme est en outre divisible par* $(x + 2)$.

— *Le trinôme dénominateur est tel que sa division par* $x^2 + 1$ *donne comme reste* $11x - 3$ *et la somme des carrés des racines du trinôme égalé à zéro vaut* $\frac{101}{25}$.

On demande :

1) *de déterminer les deux trinômes (sans employer la théorie des dérivées);*

2) *de dire si la fonction* y *ainsi obtenue peut ou non présenter un ou des extrêmes et pourquoi;*

3) *de vérifier la réponse donnée au* 2) *par l'étude des variations de la fonction* y *(au moyen de la théorie des dérivées).*

1) *a*) On a pour le premier trinôme :

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{3} \qquad \text{ou} \qquad 3b = 4a. \tag{1}$$

$$\frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{16}{3} \qquad \text{ou} \qquad 12ac - 3b^2 = -64a. \tag{2}$$

De plus, -2 est racine : $\quad 4a - 2b + c = 0 \quad$ (3).

Le système (1), (2), (3) donne $a = +3 \quad b = 4 \quad c = -4.$

On écarte la solution $a = b = c = 0$.

b) Quant au dénominateur, on a :

$$a'x^2 + b'x + c' = a'(x^2 + 1) + 11x - 3$$

et donc, par identification :

$$b' = 11 \qquad c' = a' - 3. \tag{4}$$

La seconde condition donne

$$x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x'' = +\frac{b'^2 - 2a'c'}{a'^2} = \frac{101}{25} \tag{5}$$

On a finalement par (4) et (5)

$$a' = 5 \qquad b' = 11 \qquad c' = 2.$$

On écarte la solution non entière $a' = -\frac{605}{161}$.

c) Ainsi la fonction s'écrit

$$y = \frac{3x^2 + 4x - 4}{5x^2 + 11x + 2}$$

Elle peut se simplifier car $x = -2$ est racine du numérateur et du dénominateur. On a alors

$$y = \frac{3x-2}{5x+1}$$

2) C'est une fonction homographique ne se réduisant pas à une constante, et donc toujours croissante ou décroissante et qui admet un point d'infini $x = -\frac{1}{5}$.

3) $y' = \frac{(5x+1)(3)-(3x-2)(5)}{(5x+1)^2} = \frac{13}{(5x+1)^2} > 0.$

La fonction proposée est bien croissante de $-\infty$ à $+\infty$. Elle admet l'asymptote horizontale $y = \frac{3}{5}$ et l'asymptote verticale $x = -\frac{1}{5}$.

Elle coupe les axes en $(0, -2)$ et en $(\frac{2}{3}, 0)$.

560 (1955). *On donne l'équation*

$$(m-1)x^2 + 2(m-2)x + 3(m-3) = 0$$

où m *est un paramètre réel.*

On demande :

1° *de déterminer les valeurs du paramètre* m *pour que cette équation admette des racines réelles;*

2° *de calculer ces racines en fonction de* m;

3° *de déterminer le nombre et le signe des racines suivant les valeurs du paramètre* m;

4° *dans le cas où l'équation donnée admet deux racines* x′ et x″ *de calculer la fonction* $y = \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}$ *en fonction de* m;

5° *d'étudier les variations de* y *considérée comme fonction de* m *et de représenter graphiquement cette fonction dans un système d'axes rectangulaires* mOy.

1° $\rho = (m-2)^2 - 3(m-1)(m-3) = -2m^2 + 8m - 5$ est $\geqslant 0$ si

$$\frac{4-\sqrt{6}}{2} \leqslant m \leqslant \frac{4+\sqrt{6}}{2}.$$

Il y a alors deux racines réelles distinctes ($\rho > 0$) ou égales ($\rho = 0$).

2° $x = \frac{2 - m \pm \sqrt{-2m^2+8m-5}}{m-1}$.

3° $P = \dfrac{3(m-3)}{m-1}$ est positif pour m extérieur à l'intervalle de m : (1, 3).

$S = \dfrac{-2(m-2)}{m-1}$ est positif dans l'intervalle de m : (1, 2).

m	p	P	S	NOMBRE ET SIGNE DES RACINES
$-\infty$				
	$-$	$+$	$-$	pas de racines
$\dfrac{4-\sqrt{6}}{2}$	0	$+$	$-$	$x'' = x' < 0$
	$+$	$+$	$-$	$x'' < x' < 0$
1	$+$			une racine infinie ; l'autre vaut -3.
	$+$	$-$	$+$	$x'' < 0 < x'$ $\quad \lvert x''\rvert < \lvert x'\rvert$
2	$+$	$-$	0	$x'' < 0 < x'$ $\quad \lvert x''\rvert = \lvert x'\rvert$
	$+$	$-$	$-$	$x'' < 0 < x'$ $\quad \lvert x''\rvert > \lvert x'\rvert$
3	$+$	0	$-$	$x'' < 0 = x'$
	$+$	$+$	$-$	$x'' < x' < 0$
$\dfrac{4+\sqrt{6}}{2}$	0	$+$	$-$	$x'' = x' < 0$
	$-$	$+$	$-$	pas de racines
$+\infty$				

4° $y = \dfrac{1}{x'} + \dfrac{1}{x''} = \dfrac{x' + x''}{x'x''} = \dfrac{2(2-m)}{3(m-3)}$.

5° y est une fonction homographique d'asymptotes $y = -\dfrac{2}{3}$ et $m = 3$; elle coupe les axes en $\left(0, -\dfrac{4}{9}\right)$ et en $(2, 0)$. Si on ne prend en considération que sa partie où les racines sont réelles, il faut la limiter à l'intervalle de m :

$$\left(\frac{4-\sqrt{6}}{2}, \frac{4+\sqrt{6}}{2}\right).$$

TROISIÈME PARTIE

Exercices proposés dans les Éléments de Calcul Intégral

Calcul Intégral

1. *Rechercher les différentielles des fonctions suivantes :*

(Pour les deux premières (e^x et Log$x$), cette recherche théorique est indispensable, si elle n'a pas été faite au cours. Voir les livres de théorie).

3. $y = x^2(x-1)$

$$dy = x^2\,d(x-1)+(x-1)\,d(x^2) = x^2\,dx+(x-1)\,2\,xdx = (x^2+2x^2-2x)dx$$
$$= (3x^2-2x)\,dx.$$

4. $y = (a\sqrt{x}+b)(x+c\sqrt{x})$

$$dy = (a\sqrt{x}+b)\,d\,(x+c\sqrt{x}) + (x+c\sqrt{x})\,d\,(a\sqrt{x}+b)$$
$$= (a\sqrt{x}+b)\left(dx+\frac{cdx}{2\sqrt{x}}\right)+(x+c\sqrt{x})\frac{adx}{2\sqrt{x}}$$
$$= \left[(a\sqrt{x}+b)(2\sqrt{x}+c)+(x+c\sqrt{x})a\right]\frac{dx}{2\sqrt{x}}$$
$$= \left[2ax+2b\sqrt{x}+ac\sqrt{x}+bc+ax+ac\sqrt{x}\right]\frac{dx}{2\sqrt{x}}$$
$$= \left[3ax+2ac\sqrt{x}+2b\sqrt{x}+bc\right]\frac{dx}{2\sqrt{x}}$$
$$= \left[\frac{3ax+bc}{2\sqrt{x}}+ac+b\right]dx.$$

5. $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$

$$dy = \frac{(x+1)\,d\,(2x-1)-(2x-1)\,d\,(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)2dx-(2x-1)\,dx}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{3dx}{(x+1)^2}.$$

6. $y = \sqrt{7x+5}$

$$dy = \frac{d(7x+5)}{2\sqrt{7x+5}} = \frac{7dx}{2\sqrt{7x+5}}.$$

7. $y = \dfrac{a^2 + x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

$$dy = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}\, d(a^2 + x^2) - (a^2 + x^2)\dfrac{d(a^2 - x^2)}{2\sqrt{a^2 - x^2}}}{a^2 - x^2}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 - x^2}\, 2\, xdx + (a^2 + x^2)\dfrac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{a^2 - x^2}$$

$$= \frac{(a^2 - x^2)\, 2xdx + (a^2 + x^2)\, xdx}{(a^2 - x^2)^{3/2}} = \frac{x\,(3a^2 - x^2)\, dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}}.$$

8. $y = \sqrt{\dfrac{2x - 3}{x - 4}}$

$$dy = \frac{d\,\dfrac{2x - 3}{x - 4}}{2\sqrt{\dfrac{2x - 3}{x - 4}}} = \frac{\dfrac{(x-4)\, d\,(2x-3) - (2x-3)\, d\,(x-4)}{(x-4)^2}}{2\sqrt{\dfrac{2x-3}{x-4}}}$$

$$= \frac{(x-4)\, 2dx - (2x-3)\, dx}{2\sqrt{(2x-3)\,(x-4)^3}} = \frac{-5dx}{2\sqrt{(2x-3)\,(x-4)^3}}.$$

9. $y = \sin 3x + \cos 3x$

$$dy = d \sin 3x + d \cos 3x = (\cos 3x)\, d(3x) + (-\sin 3x)\, d(3x)$$
$$= 3\,(\cos 3x - \sin 3x)\, dx.$$

10. $y = \sin \dfrac{x}{2} - \cos \dfrac{x}{2}$

$$dy = d \sin \frac{x}{2} - d \cos \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2}\, d\left(\frac{x}{2}\right) - \left(-\sin \frac{x}{2}\right) d\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right) dx.$$

11. $y = \dfrac{\sin x}{1 + \operatorname{tg} x}$

$$dy = \frac{(1 + \operatorname{tg} x)\, d\sin x - \sin x\, d\,(1 + \operatorname{tg} x)}{(1 + \operatorname{tg} x)^2}$$

$$= \frac{(1 + \operatorname{tg} x) \cos x - \sin x\, \dfrac{1}{\cos^2 x}}{(1 + \operatorname{tg} x)^2}\, dx = \frac{\cos x + \sin x - \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}}{(1 + \operatorname{tg} x)^2}\, dx$$

$$= \frac{\cos x + \left(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\right)\sin x}{(1 + \operatorname{tg} x)^2}\,dx = \frac{\cos^3 x - \sin^3 x}{(\cos x + \sin x)^2}\,dx.$$

12. $y = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x.$

$$dy = \frac{1}{3}\left(3\operatorname{tg}^2 x\right)\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx - \frac{dx}{\cos^2 x} + dx$$

$$= dx\left[\frac{\operatorname{tg}^2 x - 1}{\cos^2 x} + 1\right] = dx\left[\frac{-\cos 2x}{\cos^4 x} + 1\right] = dx\left[1 - \frac{4\cos 2x}{(1+\cos 2x)^2}\right]$$

$$= dx\left[\frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{(1+\cos 2x)^2}\right] = dx\left(\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}\right)^2 = \operatorname{tg}^4 x\,dx.$$

2. *Rechercher les intégrales indéfinies des fonctions suivantes :*

1. $y = ax^3$

$$\int ax^3\,dx = a\int x^3\,dx = \frac{ax^4}{4} + C.$$

2. $y = 2x - 5$

$$\int (2x-5)\,dx = \frac{1}{2}\int (2x-5)\,d(2x-5) = \frac{(2x-5)^2}{2} + C.$$

3. $y = (x^2 - 5x - 3)(2x - 5)$

$$\int (x^2-5x-3)(2x-5)\,dx$$

$$= \int (x^2-5x-3)\,d(x^2-5x-3) = \frac{(x^2-5x-3)^2}{2} + C.$$

4. $y = m\cos mx$

$$\int m\cos mx\,dx = \int \cos mx\,d(mx) = \sin mx + C.$$

5. $y = -m\sin mx$

$$\int -m\sin mx\,dx = \int (-\sin mx)\,d(mx) = \cos mx + C.$$

6. $y = -e^{-x}$

$$\int -e^{-x}\,dx = \int e^{-x}\,d(-x) = e^{-x} + C.$$

7. $y = \frac{m}{\cos^2 mx}$

$$\int \frac{m}{\cos^2 mx}\,dx = \int \frac{d(mx)}{\cos^2 mx} = \operatorname{tg}(mx) + C.$$

8. $y = -\dfrac{m}{\sin^2 mx}$

$$\int \frac{-m}{\sin^2 mx}\, dx = \int -\frac{d\,(mx)}{\sin^2 mx} = \cot mx + C.$$

9. $y = x^{1/2}$

$$\int x^{1/2}\, dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + C.$$

10. $y = x^{-3/2}$

$$\int x^{-3/2}\, dx = -2x^{-1/2} + C.$$

11. $y = \sin mx \cos mx$

$$\int \sin mx \cos mx\, dx = \frac{m}{4}\int (-2 \sin mx \cos mx)\, d\,(2\,mx)$$

$$= \frac{m}{4}\int -\sin 2\,mx\, d\,(2\,mx) = \frac{m}{4}\cos 2\,mx + C.$$

12. $y = \sin x \cos^2 x.$

$$\int \sin x \cos^2 x\, dx = \int \cos^2 x (\sin x\, dx) = -\int \cos^2 x\, d(\cos x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

3. *Intégrer par décomposition.*

1. $y = 3x^3 - 2x^2 + x - 3.$

$$\int (3x^3 - 2x^2 + x - 1)\, dx = \int 3x^3\, dx - \int 2x^2\, dx + \int x\, dx - \int dx$$

$$= 3\int x^3 dx - 2\int x^2 dx + \int x\, dx - \int dx = \frac{3x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + C.$$

2. $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^3}$

$$\int \frac{x^3 - 1}{x^3}\, dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^3}\right) dx = \int dx - \int \frac{dx}{x^3} = x - \int x^{-3} dx$$

$$= x - \frac{x^{-2}}{-2} + C = x + \frac{1}{2x^2} + C.$$

3. $y = 3 \sin^2 x + \cos x + 5x.$

$$\int (3 \sin^2 x + \cos x + 5x)\, dx = 3\int \sin^2 x\, dx + \int \cos x\, dx + 5\int x\, dx$$

$$= \frac{3}{2}\int 2 \sin^2 x\, dx + \sin x + \frac{5x^2}{2} + C = \frac{3}{2}\int (1 - \cos 2x)\, dx + \sin x$$

$$+ \frac{5x^2}{2} + C = \frac{3}{2} x - \frac{3}{4}\int \cos 2x\, d(2x) + \sin x + \frac{5x^2}{2} + C$$

$$=\frac{3}{2}x+\frac{5x^2}{2}-\frac{3}{4}\sin 2x+\sin x+C.$$

4. $y=\dfrac{3}{x^2-1}$

$$\int\frac{3}{x^2-1}dx=3\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{3}{2}\left[\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{dx}{x+1}\right]$$
$$=\frac{3}{2}\int\frac{d(x-1)}{(x-1)}-\frac{3}{2}\int\frac{d(x+1)}{(x+1)}$$
$$=\frac{3}{2}\left[\operatorname{Log}(x-1)-\operatorname{Log}(x+1)+\operatorname{Log}C\right]$$
$$=\frac{3}{2}\operatorname{Log}\frac{C(x-1)}{x+1}=\operatorname{Log}\left[\frac{C(x-1)}{x+1}\right]^{3/2}.$$

5. $y=\dfrac{1}{4-x^2}$

$$\int\frac{dx}{4-x^2}=\int\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2+x}\right]dx=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{2-x}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{2+x}$$
$$=-\frac{1}{4}\int\frac{d(2-x)}{2-x}+\frac{1}{4}\int\frac{d(2+x)}{2+x}=-\frac{1}{4}\operatorname{Log}(2-x)+\frac{1}{4}\operatorname{Log}(2+x)$$
$$+\frac{1}{4}\operatorname{Log}C=\frac{1}{4}\operatorname{Log}\left[C\frac{2+x}{2-x}\right]=\operatorname{Log}\sqrt[4]{\frac{C(2+x)}{2-x}}.$$

6. $y=\dfrac{2}{x^2}+3\sin x-2\cos x+\dfrac{4}{\sin^2 x}$

$$\int\left(\frac{2}{x^2}+3\sin x-2\cos x+\frac{4}{\sin^2 x}\right)dx$$
$$=2\int x^{-2}dx-3\int(-\sin x)dx-2\int\cos x\,dx-4\int\left(-\frac{dx}{\sin^2 x}\right)$$
$$=2x^{-1}-3\cos x-2\sin x-4\cot x+C.$$

4. *Intégrer par substitution.*

1. $y=(px+q)^2 \qquad (px+q=u)$

$$\int(px+q)^2\,dx=\int(px+q)^2\frac{1}{p}\,d(px)=\frac{1}{p}\int(px+q)^2\,d(px+q)$$
$$=\frac{1}{p}\frac{(px+q)^3}{3}+C.$$

2. $y=(p-qx)^3 \qquad (p-qx=u)$

$$\int(p-qx)^2\,dx=-\frac{1}{q}\int(p-qx)^2\,d(-qx)=-\frac{1}{q}\int(p-qx)^2 d(p-qx)$$
$$=-\frac{1}{q}\frac{(p-qx)^3}{3}+C=\frac{(qx-p)^3}{3q}+C.$$

3. $y = \dfrac{2}{x - a}$ $(x - a = u)$

$$\int \frac{2}{x-a}dx = 2\int \frac{d(x-a)}{x-a} = 2\operatorname{Log}(x-a) + \operatorname{Log} C = \operatorname{Log} C(x-a)^2.$$

4. $y = (p + qx)^{3/2}$ $(p + qx = u)$

$$\int (p+qx)^{3/2}\,dx = \frac{1}{q}\int (p+qx)^{3/2}\,d(p+qx)$$

$$= \frac{1}{q}\frac{(p+qx)^{5/2}}{5/2} + C = \frac{2}{5q}(p+qx)^{5/2} + C.$$

5. $y = \dfrac{3}{(x+2)^2}$ $(x + 2 = u)$

$$\int \frac{3}{(x+2)^2}dx = 3\int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2} = 3\int (x+2)^{-2}\,d(x+2)$$

$$= 3\frac{(x+2)^{-1}}{-1} + C = \frac{-3}{x+2} + C.$$

6. $y = \dfrac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$ $(x = \operatorname{tg} t)$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \int \frac{d\operatorname{tg} t}{(1+\operatorname{tg}^2 t)^{3/2}} = \int \frac{\dfrac{dt}{\cos^2 t}}{\left(\dfrac{1}{\cos^2 t}\right)^{3/2}}$$

$$= \int \frac{dt}{\cos^2 t}\cos^3 t = \int \cos t\,dt = \sin t + C = \frac{\operatorname{tg} t}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} + C$$

$$= \pm\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C. \ (+ \text{ avec } x > 0\,;\ - \text{ avec } x < 0).$$

7. $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$ $(x + 1 = u^2)$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x+1}} = \int \frac{x^2\,d(x+1)}{\sqrt{(x+1)}} = \int \frac{(u^2-1)^2\,d(u^2)}{u} = \int \frac{(u^2-1)^2\,2u\,du}{u}$$

$$= 2\int (u^2-1)^2\,du = 2\int (u^4 - 2u^2 + 1)\,du = \frac{2u^5}{5} - \frac{4u^3}{3} + 2u + C$$

$$= \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{4}{3}(x+1)^{3/2} + 2(x+1)^{1/2} + C.$$

$$= (x+1)^{1/2}\left[\frac{2}{5}(x+1)^2 - \frac{4}{3}(x+1) + 2\right] + C$$

$$= \frac{2}{15}(3x^2 - 4x + 8)\sqrt{x+1} + C.$$

8. $y = x^2\sqrt{x+3}$ $\qquad (x + 3 = u^2)$

$$\int x^2\sqrt{x+3}\,dx = \int (u^2-3)^2\,u\,d\,(u^2-3) = \int (u^2-3)^2 u\,2u\,du$$

$$= 2\int (u^2-3)^2\,u^2\,du = 2\int (u^6 - 6u^4 + 9u^2)\,du$$

$$= \frac{2u^7}{7} - \frac{12u^5}{5} + 6u^3 + C = \frac{2u^3}{35}(5u^4 - 42u^2 + 105) + C$$

$$= \frac{2}{35}(x+3)^{3/2}(5x^2 - 12x + 24) + C.$$

9. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ $\qquad (x = a \sin t)$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\;d\,(a\sin t)$$

$$= \int \sqrt{a^2\cos^2 t}\,(a\cos t\,dt) = \int a^2\cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\int 2\cos^2 t\,dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt = \frac{a^2}{2}\int dt + \frac{a^2}{2}\int \cos 2t\,dt$$

$$= \frac{a^2\,t}{2} + \frac{a^2}{2}\int \cos 2t\,\frac{d\,(2t)}{2} = \frac{a^2\,t}{2} + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C.$$

Or $\sin t = \frac{x}{a}$ et $t = \text{arc}\sin\frac{x}{a} = \frac{a^2}{2}\left[\text{arc}\sin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}(2\sin t\cos t) + C\right]$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\,\text{arc}\sin\frac{x}{a} \pm \frac{ax}{2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\,\text{arc}\sin\frac{x}{a} \pm \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

10. $y = \sqrt{a^2 + x^2}$ $\qquad (\sqrt{a^2+x^2} = t - x)$

La substitution donne $a^2 + x^2 = t^2 - 2tx + x^2$. D'où $x = \dfrac{t^2 - a^2}{2t}$.

De là : $t - x = t - \dfrac{t^2-a^2}{2t} = \dfrac{t^2+a^2}{2t}$

Dès lors aussi $dx = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{t\,(2t) - (t^2-a^2)}{t^2}\right] dt = \dfrac{t^2+a^2}{2t^2}\,dt.$

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \int \left(\frac{t^2+a^2}{2t}\right)\left(\frac{t^2+a^2}{2t^2}\right) dt = \frac{1}{4}\int \frac{(t^2+a^2)^2}{t^3}\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\int t\,dt + \frac{a^2}{2}\int\frac{dt}{t} + \frac{a^4}{4^2}\int\frac{dt}{t^3} = \frac{t^2}{8} + \frac{a^2}{2}\,\text{Log}\,t - \frac{a^4}{8t^2} + C.$$

Revenant à x, il vient

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\,\text{Log}\,(x + \sqrt{a^2+x^2}) + \frac{1}{8}\left[t^2 - \frac{a^4}{t^2}\right] + C.$$

Le crochet peut s'écrire successivement :

$$\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\left(t-\frac{a^2}{t}\right)$$

$$=\left(\sqrt{a^2+x^2}+x+\frac{a^2}{\sqrt{a^2+x^2}+x}\right)\left(\sqrt{a^2+x^2}+x-\frac{a^2}{\sqrt{a^2+x^2}+x}\right)$$

$$=\frac{(2a^2+2x^2+2x\sqrt{a^2+x^2})(2x^2+2x\sqrt{a^2+x^2})}{(\sqrt{a^2+x^2}+x)^2}$$

$$=\frac{(2a^2+2x^2+2x\sqrt{a^2+x^2})\,2x}{\sqrt{a^2+x^2}+x}$$

$$=\frac{4x\left[\sqrt{a^2+x^2}\left(\sqrt{a^2+x^2}+x\right)\right]}{\sqrt{a^2+x^2}+x}=4x\sqrt{a^2+x^2}$$

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\operatorname{Log}C\,(x+\sqrt{x^2+a^2})+\frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2}.$$

5. *Intégrer par parties.*

1. $y = x\,e^x \quad (u = x)$

$$I=\int x\,e^x\,dx=\int x\,de^x \quad u=x \quad v=e^x$$

$$=x\,e^x-\int e^x\,dx=x\,e^x-e^x+C.$$

2. $y = x^2e^x \quad (u = x^2)$

$$I=\int x^2e^x\,dx=\int x^2\,de^x \quad u=x \quad v=e^x$$

$$=x^2\,e^x-\int e^x\,d\,(x^2)=x^2\,e^x-\int e^x 2x\,dx=x^2\,e^x-2\int e^x\,x\,dx.$$

En vertu du précédent exercice on obtient :

$$I=x^2\,e^x-2x\,e^x+2e^x+C.$$

3. $y = e^x \cos x \quad (u = \cos x)$

et

4. $y = e^x \sin x \quad (u = \sin x)$

$$I=\int e^x\cos x\,dx=\int \cos x\,de^x \quad u=\cos x \quad v=e^x$$

$$=\cos x\,e^x-\int e^x\,d\,(\cos x)=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx=e^x\cos x+J. \quad (1)$$

$$J=\int e^x\sin x\,dx=\int \sin x\,de^x \quad u=\sin x \quad v=e^x$$

$$=\sin x\,e^x-\int e^x\cos x\,dx=\sin x\,e^x-I. \quad (2)$$

Regroupons les deux résultats (1) et (2) avec I et J aux premiers membres

$$\begin{cases} I - J = e^x \cos x \\ I + J = e^x \sin x \end{cases} \quad \text{D'où} \quad \begin{cases} I = \dfrac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C \\ J = \dfrac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C. \end{cases}$$

5. $y = x \cos mx$ $(u = x)$

$$I = \int x \cos mx\, dx = \frac{1}{m}\int x \cos mx\, d(mx) = \frac{1}{m}\int x\, d\sin mx$$

$$u = x \quad v = \sin mx$$

$$I = \frac{1}{m}\left[x \sin mx - \int \sin mx\, dx\right] = \frac{1}{m}\left[x \sin mx - \frac{1}{m}\int \sin mx\, d(mx)\right]$$

$$= \frac{1}{m} x \sin mx + \frac{1}{m^2}\cos mx + C.$$

6. $y = x^m \operatorname{Log} x$ $(u = \operatorname{Log} x)$

$$I = \int x^m \operatorname{Log} x\, dx = \int \operatorname{Log} x\,(x^m\, dx) = \int \operatorname{Log} x\, d\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right)$$

$$u = \operatorname{Log} x \quad v = x^{m+1}$$

$$I = \frac{1}{m+1}\int \operatorname{Log} x\, d x^{m+1} = \frac{1}{m+1}\left[(\operatorname{Log} x).x^{m+1} - \int x^{m+1}\, d \operatorname{Log} x\right]$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1}\operatorname{Log} x - \frac{1}{m+1}\int x^{m+1}\frac{dx}{x} = \frac{x^{m+1}}{m+1}\operatorname{Log} x - \frac{1}{m+1}\int x^m dx$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1}\operatorname{Log} x - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left[\operatorname{Log} x - \frac{1}{m+1}\right] + C$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1}\operatorname{Log}\frac{x}{e^{\frac{1}{m+1}}} + C.$$

7. $y = x\, e^{-x}$

$$I = \int x e^{-x} dx = -\int x e^{-x} d(-x) = -\int x de^{-x} \qquad u = x \quad v = e^{-x}$$

$$= -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - \int e^{-x}\, d(-x)$$

$$= -x e^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x}(1 + x) + C.$$

8. $y = x^2 \sin x.$

$$I = \int x^2 \sin x\, dx = \int x^2\, d(-\cos x) \qquad u = x^2 \quad v = -\cos x$$

$$= -x^2 \cos x - \int(-\cos x)\, d(x^2) = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\, dx.$$

Le n° 5, avec $m = 1$ donne la valeur de la dernière intégrale

$$I = -x^2 \cos x + 2 [x \sin x + \cos x] + C$$
$$= (2 - x^2) \cos x + 2 x \sin x + C.$$

6. *Calculer des intégrales définies :*

La représentation graphique donnée ici aide à comprendre les compensations éventuelles par les aires positives et négatives. On peut aussi renoncer à cette manière de concevoir l'exercice et calculer le résultat compensé; les calculs réalisés le permettent aisément là où ce n'est pas déjà fait.

L'unité d'aire — représentée par des hachures obliques ou par quatre petits cercles aux sommets — est un carré ou un rectangle construit sur les unités prises sur les axes de coordonnées.

Les aires calculées sont hachurées verticalement (1).

1. $\int_0^1 dx$

$$\int_0^1 dx = \left[x \right]_0^1 = 1 - 0 = 1.$$

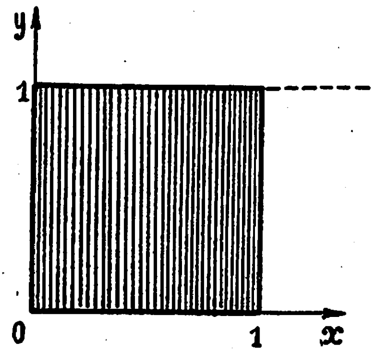


Fig. 1

2. $\int_0^3 x^2 dx$

$$\int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{27}{3} - 0 = 9.$$

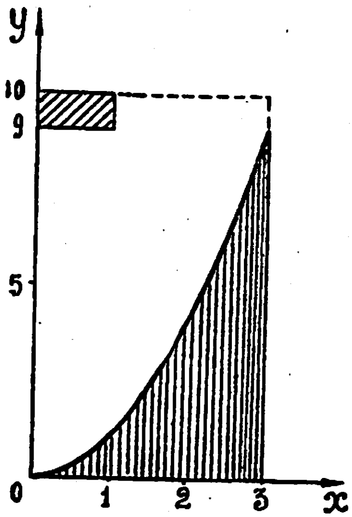


Fig. 2

(1) Il importe cependant de bien remarquer que la mesure de l'aire n'est qu'*une* interprétation de l'intégrale définie. Celle-ci peut représenter toute autre chose comme en physique, l'aire d'un cycle de Carnot correspond à un travail.

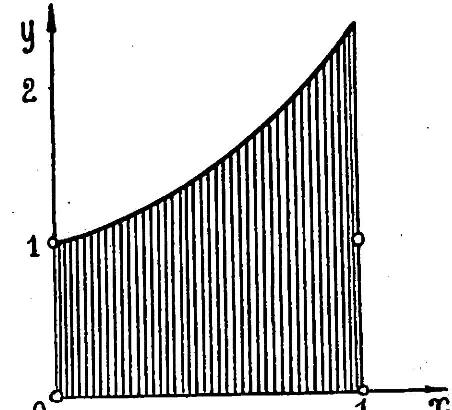


Fig. 3

3. $\int_0^{+1}\left(\frac{1}{3}x^3 + x + 1\right)dx$

$$\int_0^{+1}\left(\frac{x^3}{3} + x + 1\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2} + x\right]_0^{+1}$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{19}{12}.$$

4. $\int_{-1}^{+1} e^{2x-1}dx$

$$\int_{-1}^{+1} e^{2x-1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} e^{2x-1}\,d(2x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} e^{2x-1}\,d(2x-1)$$

$$= \left[\frac{1}{2}e^{2x-1}\right]_{-1}^{+1}$$

$$= \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e^{-3}$$

$$= \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e^{-3}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{e^{4-1}}{e^3}.$$

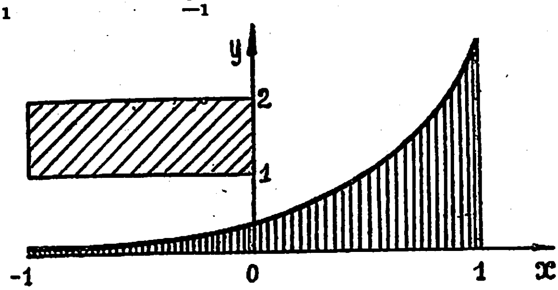


Fig. 4

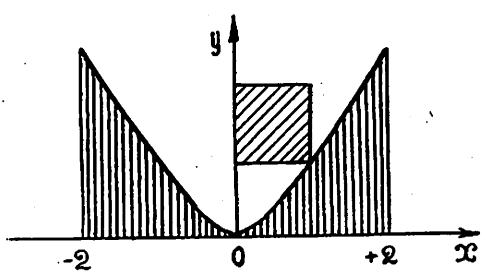


Fig. 5

5. $\int_{-2}^{2} x\sqrt[3]{x}\,dx$

$$\int_{-2}^{2} x\sqrt[3]{x}\,dx = \int_{-2}^{+2} x^{4/3}\,dx$$

$$= \left[\frac{x^{7/3}}{7/3}\right]_{-2}^{+2} = \left[\frac{3}{7}x^{7/3}\right]_{-2}^{+2}$$

$$= \frac{24}{7}\sqrt[3]{2}.$$

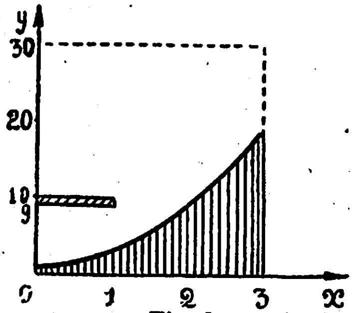


Fig. 6

6. $\int_0^3 (2x^2 + 1)dx$

$$\int_0^3 (2x^2+1)\,dx = 2\int_0^3 x^2\,dx + \int_0^3 dx$$

$$= \left[2\frac{x^3}{3} + x\right]_0^3 = 18 + 3 - 0 = 21.$$

7. $\int_1^2 \frac{dx}{(3x+1)^2}$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{d(3x+1)}{(3x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^2 (3x+1)^{-2}\,d(3x+1)$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{(3x+1)^{-1}}{-1}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{3x+1}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{7} + \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{28}.$$

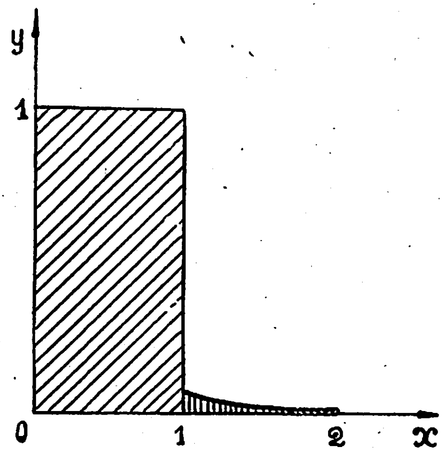


Fig. 7

8. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+1}}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+1}} = \int_0^1 (2x+1)^{-1/3}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (2x+1)^{-1/3}\,d(2x+1)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(2x+1)^{+2/3}}{2/3}\right]_0^1$$

$$= \frac{3}{4}\left[(2x+1)^{2/3}\right]_0^1 = \frac{3}{4}\left[\sqrt[3]{9} - 1\right].$$

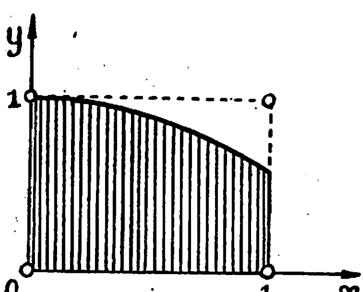


Fig. 8

9. $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$$

$$= -\cos\pi + \cos 0 = +1 + 1 = +2.$$

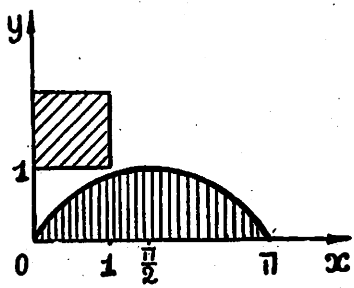


Fig. 9

10. $\int_{-\pi}^{+\pi} \sin ax \, dx$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin ax \, dx = \frac{1}{a}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos ax \, d(ax) = \frac{1}{a}\Big[-\cos ax\Big]_{-\pi}^{+\pi}$$

$$= \frac{1}{a}\Big[-\cos a\pi + \cos a\pi\Big] = 0$$

La courbe est symétrique. De $-\pi$ à 0, l'aire est égale en valeur absolue à l'aire de 0 à π et de signe contraire. Si on veut avoir l'aire géométrique, il faut doubler l'aire de 0 à π. On obtient $2\left[\frac{1}{a}(-\cos ax)\right]_0^{\pi}$

$$= \frac{2}{a}\Big[-\cos a\pi + \cos 0\Big] = \frac{2}{a}(1 - \cos a\pi) = \frac{4}{a}\sin^2\frac{\pi a}{2}.$$

11. $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x \, dx$

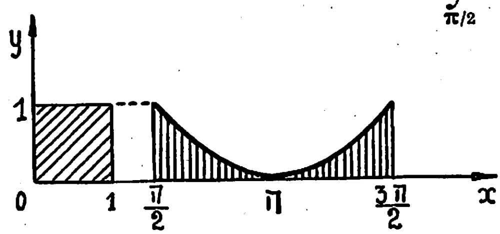


Fig. 10

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x \, dx = \Big[\sin x\Big]_{\pi/2}^{3\pi/2}$$

$$= \sin\frac{3\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}$$

$= -1 + 1 = 0$. Même remarque qu'au précédent exercice. Il vient pour valeur de l'aire totale

$$2\Big[\sin x\Big]_{\pi}^{3\pi/2} = 2\Big[-1 - 0\Big] = -2.$$

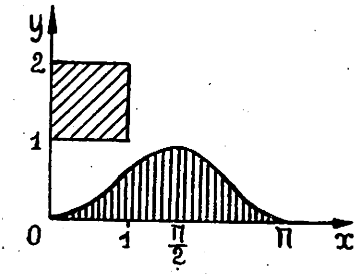


Fig. 11

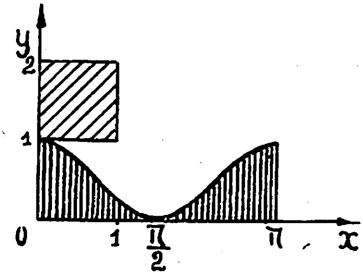


Fig. 12

12. $\int_0^\pi \sin^2 x \, dx \, . \int_0^\pi \cos^2 x \, dx$

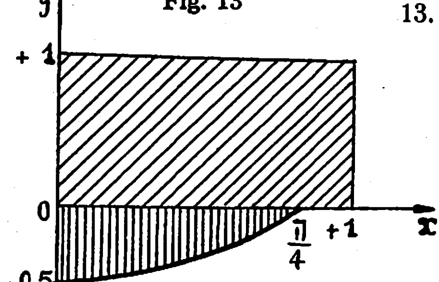
$$\int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1 - \cos 2x) \, dx = \left[\frac{x}{2}\right]_0^\pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos 2x \, dx$$

$$= \left[\frac{x}{2}\right]_0^\pi - \frac{1}{4}\int_0^\pi \cos 2x \, d(2x) = \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} \quad \text{(Fig. 11)}$$

$$\int_0^\pi \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1 + \cos 2x) \, dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} \quad \text{(Fig. 12)}$$

Le produit vaut $\frac{\pi^2}{4}$.

Fig. 13



13. $\int_0^{\pi/4} \sin(x - \pi/4) \cos(x - \pi/4) dx$

$$\int_0^{\pi/4} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \cos 2x \, dx = -\frac{1}{4}\int_0^{\pi/4} \cos 2x \, d(2x)$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\sin 2x\right]_0^{\pi/4} = -\frac{1}{4}\left[1\right] = -\frac{1}{4}.$$

14. $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \, dx$

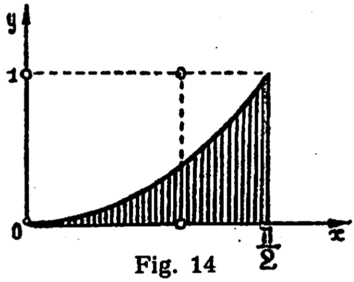


Fig. 14

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \, dx = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[x - \int \cos 2x \, d(2x) + \int \cos^2 2x \, dx\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{4}\left[x - \sin 2x + \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{4}\left[x - \sin 2x + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int \cos 4x \frac{d(4x)}{4}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2} - \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}\left[\frac{3\pi}{4}\right] = \frac{3\pi}{16}.$$

15. $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sin x \sin 2x \, dx$

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sin x \sin 2x \, dx = \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} 2 \sin x \sin 2x \, dx = \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} (-\cos 3x + \cos x) dx$$

$$= -\frac{1}{6}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos 3x \, d(3x) + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x \, dx = \left[-\frac{1}{6}\sin 3x + \frac{1}{2}\sin x\right]_{\pi/2}^{3\pi/2}$$

$$= -\frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{4}{3}.$$

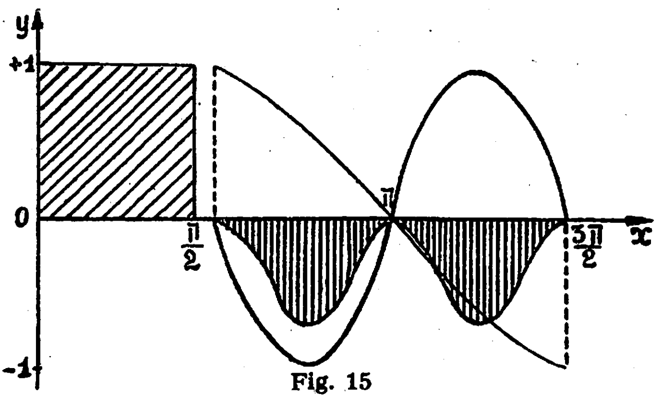


Fig. 15

16. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (\sin x + \cos x)dx$

$$\int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (\sin x + \cos x)dx = \Big[-\cos x + \sin x\Big]_{-\pi/4}^{+3\pi/4}$$

$$= +\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

(Voir figure de l'exercice 7. 4).

7. *Applications.*

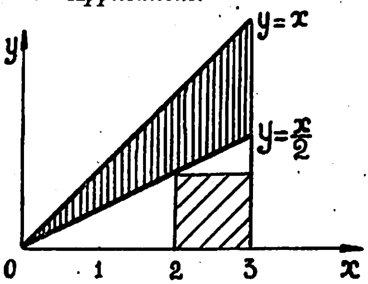


Fig. 16

1. *Recherché la surface du triangle dont les côtés sont les droites :*

$$x = y,\ y = \frac{x}{2} \text{ et } x = 3.$$

$$S = \int_0^3 x\,dx - \int_0^3 \frac{x}{2}dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4}\right]_0^3$$

$$= \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^3 = \frac{9}{4}.$$

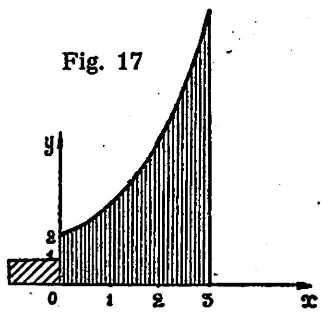
2. *Recherche la surface de la figure limitée par les lignes d'équations :*

$$y = 0, x = 0, x = 3 \text{ et } y = x^2 + 2.$$

$$S = \int_0^3 (x^2 + 2)dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x\right]_0^3$$

$$= 9 + 6 = 15.$$

Fig. 17



3. *Rechercher la surface limitée par l'axe des* x *et la courbe d'équation*

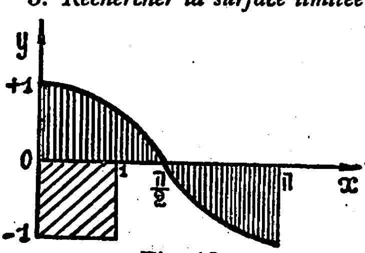


Fig. 18

$$y = \cos x, \quad 0 < x < \pi.$$

$$S = \int_0^\pi \cos x dx = \Big[\sin x\Big]_0^\pi = 0.$$

Il faut prendre $2\Big[\sin x\Big]_0^{\pi/2}$

$= 2\,[1 - 0] = 2$ pour avoir l'aire totale.

4. *Rechercher l'aire comprise dans l'une des arches de la courbe*

$$y = \sin x + \cos x.$$

La courbe s'obtient par addition géométrique. Une arche est limitée par exemple par les abscisses $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$. Ces arches se reproduisent identiques mais en alternant

$$S = \int_{3\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x + \cos x) dx$$

$$= \Big[-\cos x + \sin x \Big]_{3\pi/4}^{5\pi/4}$$

$$= + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}.$$

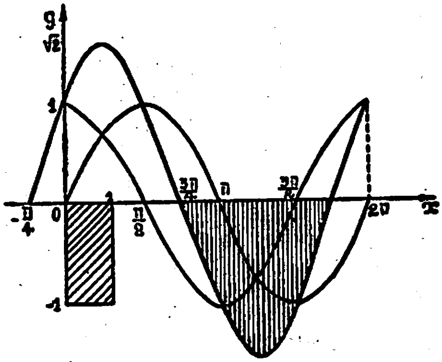


Fig. 19

5. *Rechercher l'aire comprise entre la parabole* $y = -x^2 + 4x + 6$ *et la corde joignant les points* (1, 9) *et* (4, 6).

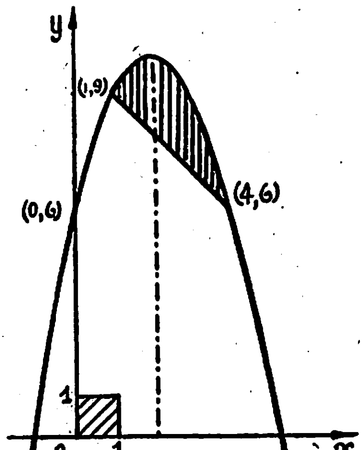


Fig. 20

Equation de la corde :

$$y - 9 = \frac{6-9}{4-1}(x-1)$$

ou $y = -x + 10$

$$S = \int_4^1 \Big[(-x^2 + 4x + 6) - (-x + 10) \Big] dx$$

$$S = \int_1^4 \Big(-x^2 + 5x - 4 \Big) dx$$

$$= \Big[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x \Big]_1^4 = -\frac{64}{3} + 40 - 16 + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4$$

$$= -21 + 28 - \frac{5}{2} = 7 - \frac{5}{2} = \frac{9}{2}.$$

6. *Calculer l'aire comprise entre les droites* x = 0 *et* x = 4 *et les courbes* y = x² *et* y = x³.

$$S = \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx + \int_1^4 (x^3 - x^2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_1^4$$

$$= \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] + \left[64 - \frac{64}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{128}{3} + \frac{1}{12} = 42\frac{5}{6}.$$

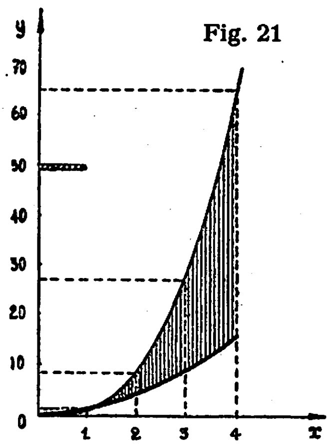


Fig. 21

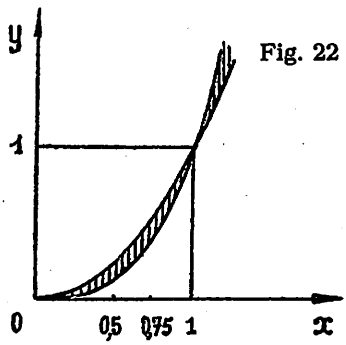


Fig. 22

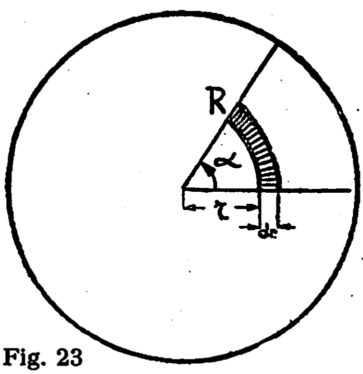


Fig. 23

7. *Rechercher l'aire d'un secteur circulaire.*

On fait la somme de « bandes » d'ouverture α, de largeur dr, si elles sont à la distance r du centre et assimilables à des rectangles (1)

$$S = \int_0^R (\alpha r)dr = \alpha\int_0^R r\,dr = \alpha\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R = \frac{\alpha R^2}{2}.$$

Dans le cas du cercle : $\alpha = 2\pi$ et l'aire vaut πR^2.

8. *Rechercher l'aire d'un segment hyperbolique lorsque l'hyperbole a comme équation* xy = k².

$$S = \int_a^b \frac{k^2}{x}\,dx = k^2\int_a^b \frac{dx}{x} = k^2\Big[\mathrm{Log}\,x\Big]_a^b = k^2\,\mathrm{Log}\,\frac{b}{a}$$

(voir la figure 13, *page* 26 *du fascicule de théorie).*

(1) Ceci se démontre rigoureusement en Analyse Supérieure ainsi que d'autres approximations du même genre faites plus loin.

9. *Quelle est la parabole* $y = ax^2 + bx + c$ *passant par le point* $(-1, 0)$ *et qui admet pour tangente au point* $(1, -2)$ *la droite d'équation* $y = 3x - 5$?

1° condition [passage en $(-1, 0)$] : $0 = a - b + c$.

2° condition [passage en $(1, -2)$] : $-2 = a + b + c$.

3° condition [tangente de coefficient angulaire 3] :

$$y'_{x=1} = [2ax + b]_{x=1} = 2a + b = 3.$$

On trouve $a = 2$; $b = -1$ et $c = -3$.

10. *Une parabole* $y = ax^2 + bx + c$ *coupe l'axe des* x *aux points* $(-1, 0)$ *et* $(2, 0)$. *La surface de la figure limitée par la courbe et l'axe des* x *est* $\frac{21}{2}$.

Rechercher cette parabole.

1° condition [passage en $(-1, 0)$] : $0 = a - b + c$.

2° condition [passage en $(2, 0)$] : $0 = 4a + 2b + c$.

D'où on tire : $b = -a$ et $c = -2a$. L'équation de la parabole est donc :

$$y = ax^2 - ax - 2a.$$

3° condition [d'aire] : $S = \int_{x=-1}^{x=2} (ax^2 - ax - 2a)\, dx$

$$= \left[\frac{ax^3}{3} - \frac{ax^2}{2} - 2ax\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{8a}{3} - 2a - 4a\right) - \left(-\frac{a}{3} - \frac{a}{2} + 2a\right)$$

$= -\frac{9a}{2}$. Cette aire doit vérifier l'égalité : $-\frac{9a}{2} = \frac{21}{2}$.

D'où $a = -\frac{7}{3}$. L'équation de la parabole est dès lors :

$$y = -\frac{7}{3}x^2 + \frac{7}{3}x + \frac{14}{3}.$$

11. *Déterminer* a, b, c *pour que* $(ax^2 + bx + c)\sqrt{5 - 2x}$ *soit une intégrale de* $y = x\sqrt{5 - 2x}$.

Il suffit que la dérivée de $(ax^2 + bx + c)\sqrt{5 - 2x}$, c'est-à-dire :

$$(ax^2 + bx + c)\frac{-2}{2\sqrt{5 - 2x}} + \sqrt{5 - 2x}\,(2ax + b)$$

vaille $x\sqrt{5 - 2x}$. Écrivons — en la simplifiant — cette condition :

$$\frac{-(ax^2 + bx + c) + (5 - 2x)(2ax + b)}{\sqrt{5 - 2x}} = x\sqrt{5 - 2x}$$

ou $\quad -5ax^2 + x(-3b + 10a) - c + 5b = 5x - 2x^2.$

Identifions les coefficients des termes de même puissance à gauche et à droite :

$$5a = 2 \qquad a = \frac{2}{5}$$

$$-3b + 10a = 5 \qquad b = -\frac{1}{3}$$

$$-c + 5b = 0 \qquad c = -\frac{5}{3}$$

12. *Sachant que par définition la vitesse d'un mobile à l'instant* t *est* $v = \frac{de}{dt}$ *et que pour un mobile animé d'un mouvement uniformément accéléré, on a* $v = at + v_0$, *calculer* e *en fonction de* t *et donner une signification physique à la constante.*

Si $de = vdt$, on obtient $e = \int vdt$. Dans le cas du mouvement rectiligne uniformément accéléré, il vient :

$$e = \int (at + v_0)\, dt = \frac{at^2}{2} + v_0 t + C.$$

Pour $t = o$, on trouve l' « espace » initial (ou la position initiale) e_0 :

$$e_0 = C.$$

Ceci donne la signification de la constante arbitraire.

13. *Calculer le travail qu'il faut fournir pour pomper jusqu'au bord l'eau d'un réservoir hémisphérique dont la profondeur est de 3 m.*

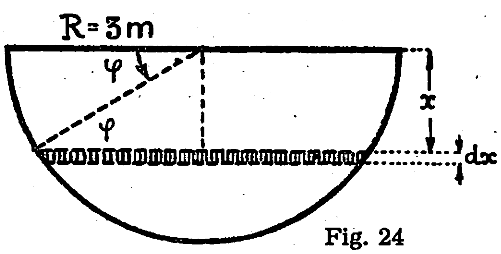


Fig. 24

Soit une tranche d'épaisseur dx située à la profondeur x. Pour l'amener au bord, il faut effectuer un travail égal à son poids (dirigé suivant la verticale) multiplié par le déplacement (vertical aussi).

Le volume de la tranche est celui d'un cylindre infiniment mince de hauteur dx et de rayon $3 \cos \varphi$; ce volume vaut donc $9\pi \cos^2 \varphi \, dx$ (avec la condition : $x = 3 \sin \varphi$). Le poids s'exprime par la même expression puisque l'eau a le poids spécifique 1 gr'/cm³. Exprimons tout en kg' et en mètres; le travail nécessaire pour la tranche envisagée sera : $(9\pi \cos^2 \varphi \, dx)\, x$ kgm.

Pour l'ensemble du liquide, on aura :

$$\mathcal{T} = \int_0^{\pi/2} (9\,\pi \cos^2 \varphi\, dx)\, x \text{ kgm.}$$

Or $dx = 3 \cos \varphi\, d\,\varphi$. D'où $\mathcal{T} = 81\,\pi \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos^3 \varphi\, d\,\varphi$ kgm.

$$\mathcal{T} = -\,81\,\pi \int_0^{\pi/2} \cos^3\varphi\, d\cos\varphi = 81\,\pi \left[\frac{\cos^4 \varphi}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{81\,\pi}{4} = 63{,}585 \text{ kgm.}$$

14. *Un ressort prend une flèche d'un centimètre sous une charge de 5 Kg. Chercher le travail qu'il faut dépenser pour comprimer ce ressort de 3 cm, étant donné que la flèche est proportionnelle à la charge.*

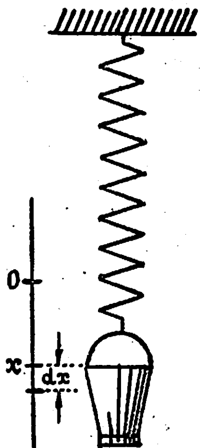


Fig. 25

Le coefficient d'élasticité vaut 1 cm/5kg = 0,2 cm/kg. Quand l'index du ressort est à la position x (à x cm de la position d'équilibre), l'effort qu'il subit $0{,}2x$ soit à l'extension, soit à la compression.

Pour le comprimer de dx à partir de la position x, il faut effectuer un travail de $0{,}2x dx$ kgcm.

Si la compression atteint 3 cm, le travail total en kgcm sera :

$$\mathcal{T} = \int_0^3 0{,}2\, x\, dx = 0{,}2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = 0{,}9 \text{ kgcm.}$$

Exercices de récapitulation

1. *Rechercher les différentielles de :*

1. $y = (3x^2 + 1)\sqrt{1 - x^4}$

$$dy = \left[\frac{(3x^2 + 1)(-\,4x^3)}{2\sqrt{1 - x^4}} + \sqrt{1 - x^4}\,(6x).\right] dx$$

$$= \frac{-\,12x^5 - 4x^3 + 12\,x - 12x^6}{2\sqrt{1 - x^4}}\, dx$$

$$= \frac{-\,6x^6 - 6x^5 - 2x^3 + 6x}{\sqrt{1 - x^4}}\, dx$$

$$= -\,\frac{6x}{\sqrt{1 - x^4}}\left(x^5 + x^4 + \frac{x^2}{3} - 1\right) dx.$$

2. $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2-4}}{x^5} = \dfrac{(x^2-4)^{1/3}}{x^5}$.

$$dy = \left[\frac{x^5\, 1/3\,(x^2-4)^{-2/3}(2x) - (x^2-4)^{1/3}\, 5x^4}{x^{10}}\right] dx$$

$$= \left[\frac{2x^2}{3\sqrt[3]{(x^2-4)^2}} - 5\sqrt[3]{x^2-4}\right]\frac{dx}{x^6}$$

$$= \frac{2x^2 - 15(x^2-4)}{3\sqrt[3]{(x^2-4)^2}}\frac{dx}{x^6} = \frac{60-13x^2}{3(x^2-4)^{2/3}}\frac{dx}{x^6}.$$

3. $y = (x+2)\operatorname{Log}(4-x^2)$

$$= \left[(x+2)\frac{-2x}{4-x^2} + \operatorname{Log}(4-x^2)\right] dx$$

$$= \left[\operatorname{Log}(4-x^2) + \frac{2x}{x-2}\right] dx$$

$$= \operatorname{Log}\left[(4-x^2)\, e^{\frac{2x}{x-2}}\right] dx.$$

4. $y = e^x(x^3-1) + e^{-x}(x^3+1)$

$$dy = [e^x(3x^2) + (x^3-1)e^x + e^{-x}(3x^2) + (x^3+1)(-e^{-x})]\, dx.$$

$$dy = [e^x(x^3+3x^2-1) - e^{-x}(x^3-3x^2+1)]\, dx.$$

$$= [x^3(e^x - e^{-x}) + (3x^2-1)(e^x+e^{-x})]\, dx.$$

5. $y = \sin^2 4x \operatorname{tg} x^2$

$$dy = \left[\sin^2 4x \frac{2x}{\cos^2 x^2} + \operatorname{tg} x^2 (8\sin 4x\cos 4x)\right] dx$$

$$= \frac{\sin 4x}{\cos x^2}\left[\frac{2x\sin 4x}{\cos x^2} + 8\sin x^2\cos 4x\right] dx$$

$$= \left[\frac{2x\sin^2 4x}{\cos^2 x^2} + 4\operatorname{tg} x^2 \sin 8x\right] dx.$$

6. $y = \operatorname{Log}\cos(2x-1) + e^{\sin\sqrt{x}}$

$$dy = \left[\frac{-2\sin(2x-1)}{\cos(2x-1)} + e^{\sin\sqrt{x}}\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right] dx$$

$$= \left[-2\operatorname{tg}(2x-1) + \frac{e^{\sin\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right] dx.$$

2. *Rechercher les intégrales indéfinies suivantes :*

1. $$\int\frac{(1-x^4)}{x}\, dx = \int\frac{dx}{x} - 4\int dx + 6\int x\, dx - 4\int x^2\, dx + \int x^3\, dx$$

$$= \operatorname{Log} x - 4x + 3x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{x^4}{4} + C.$$

2. $\displaystyle\int (1+\sqrt{x})^2\,dx = \int dx + 2\int \sqrt{x}\,dx + \int x\,dx$

$\displaystyle = x + 2\int x^{1/2}\,dx + \frac{x^2}{2} + \mathrm{C}$

$\displaystyle = x + \frac{4}{3}x^{3/2} + \frac{x^2}{2} + \mathrm{C}.$

3. $\displaystyle\int \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\,dx = -\int \frac{de^{-x}}{1-e^{-x}} = -\int \frac{du}{1-u} = \int \frac{d(u-1)}{u-1}$

$= \mathrm{Log}\,\mathrm{C}\,(u-1) = \mathrm{Log}\,\mathrm{C}\,(e^{-x}-1).$

4. $\displaystyle\int \frac{5\cos 2x\,dx}{3-\sin 2x} = \frac{5}{2}\int \frac{d\sin 2x}{3-\sin 2x} = \frac{5}{2}\int \frac{du}{3-u} = -\frac{5}{2}\int \frac{d(3-u)}{3-u}$

$\displaystyle = -\frac{5}{2}\,\mathrm{Log}\,\mathrm{C}\,(3-u) = \mathrm{Log}\left[\mathrm{C}\,(3 \quad \sin 2x)\right]^{-5/2}.$

5. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{tg}\,x\,dx}{\mathrm{Log}\cos x} = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x}\cdot\frac{1}{\mathrm{Log}\cos x}$

$\displaystyle = -\int \frac{d\cos x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\mathrm{Log}\cos x} = -\int \frac{d\,\mathrm{Log}\cos x}{\mathrm{Log}\cos x}$

$= -\,\mathrm{Log}\,[\mathrm{C}\,\mathrm{Log}\cos x].$

6. $\displaystyle\int x\,\mathrm{tg}^2 x\,dx = \int \mathrm{tg}^2 x\,d\left(\frac{x^2}{2}\right)$

$\displaystyle = \frac{x^2}{2}\,\mathrm{tg}^2 x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{\cos^2 x}\,dx = \frac{x^2}{2}\,\mathrm{tg}^2 x - \int x^2\frac{\sin x\,dx}{\cos^3 x}$

$\displaystyle = \frac{x^2}{2}\,\mathrm{tg}^2 x + \int \frac{x^2\,d\cos x}{\cos^3 x} = \frac{x^2}{2}\,\mathrm{tg}^2 x - \frac{1}{2}\int x^2\,d\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)$

$\displaystyle = \frac{x^2}{2}\,\mathrm{tg}^2 x - \frac{x^2}{2\cos^2 x} + \int \frac{1}{\cos^2 x}\,x\,dx.$

$\displaystyle = \frac{x^2}{2}\,\mathrm{tg}^2 x - \frac{x^2}{2\cos^2 x} + \int x\,d\,\mathrm{tg}\,x$

$\displaystyle = \frac{x^2}{2}\,\mathrm{tg}^2 x - \frac{x^2}{2\cos^2 x} + x\,\mathrm{tg}\,x - \int \mathrm{tg}\,x\,dx$

$\displaystyle = \frac{x^2}{2}\,\mathrm{tg}^2 x - \frac{x^2}{2}(1+\mathrm{tg}^2 x) + x\,\mathrm{tg}\,x - \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x}$

$\displaystyle = -\frac{x^2}{2} + x\,\mathrm{tg}\,x + \mathrm{Log}\cos x + \mathrm{C}.$

7. $$\int \frac{\operatorname{Log} x}{x^2}\,dx = \int \operatorname{Log} x\, d\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x}\operatorname{Log} x - \int\left(-\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x}$$
$$= -\frac{1}{x}\operatorname{Log} x + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\operatorname{Log} x - \frac{1}{x} + C$$
$$= -\frac{1}{x}\left[\operatorname{Log} x + 1\right] + C = -\frac{1}{x}\operatorname{Log} ex + C$$
$$= \operatorname{Log} C(ex)^{-1/x}.$$

8. $$\int \cos^3 x\, dx = \int \cos^2 x\, d\sin x = \int (1 - \sin^2 x)\, d\sin x$$
$$= \int (1 - u^2)\, du = \int du - \int u^2\, du = u - \frac{u^3}{3} + C$$
$$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

9. $$\int \frac{dx}{x^2 + x - 2} = \int \frac{dx}{(x+2)(x-1)} = \int \frac{dx}{3}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right]$$
$$= \frac{1}{3}\left[\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+2}\right] = \frac{1}{3}\left[\int \frac{d(x-1)}{x-1} - \int \frac{d(x+2)}{x+2}\right]$$
$$= \frac{1}{3}[\operatorname{Log} C(x-1) - \operatorname{Log}(x+2)] = \operatorname{Log}\left[\frac{C(x-1)}{x+2}\right]^{1/3}.$$

10. $$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{d(x^2)}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\int \frac{d(a^2 - x^2)}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\int \frac{du}{2\sqrt{u}}$$
$$= -\sqrt{u} + C = -\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

11. $$\int \frac{\sin x/2\, dx}{\sqrt{\cos x/2}} = -2\int \frac{d\cos x/2}{\sqrt{\cos x/2}}$$
$$= -4\int \frac{d\cos x/2}{2\sqrt{\cos x/2}} = -4\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = -4\sqrt{u} + C$$
$$= -4\sqrt{\cos x/2} + C.$$

12. $$\int \sqrt{\sin^3 2x}\cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{\sin^3 2x}\, d\sin 2x$$
$$= \frac{1}{2}\int \sqrt{u^3}\, du = \frac{1}{2}\int u^{3/2}\, du = \frac{1}{5}u^{5/2} + C$$
$$= \frac{1}{5}\sin^{5/2} 2x + C.$$

3. *Rechercher les intégrales définies suivantes :*

$$1.\quad \int_0^{\pi/3} \operatorname{tg} x\, dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x\, dx}{\cos x}$$

$$= -\int_0^{\pi/3} \frac{d \cdot \cos x}{\cos x} = -\Big[\operatorname{Log} \cos x\Big]_0^{\pi/3}$$

$$= -\operatorname{Log} \cos \frac{\pi}{3} = -\operatorname{Log} \frac{1}{2} = \operatorname{Log} 2.$$

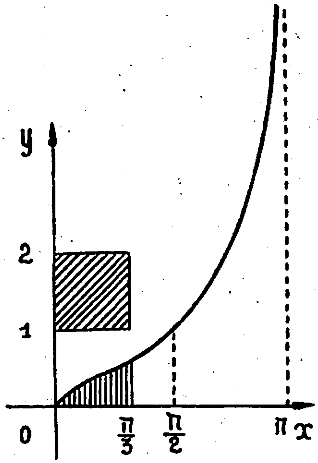


Fig. 26

$$2.\quad \int_{+4}^{+7} \frac{dx}{(x-3)(x+5)} = \frac{1}{8}\int_{+4}^{+7} dx \left[\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+5}\right]$$

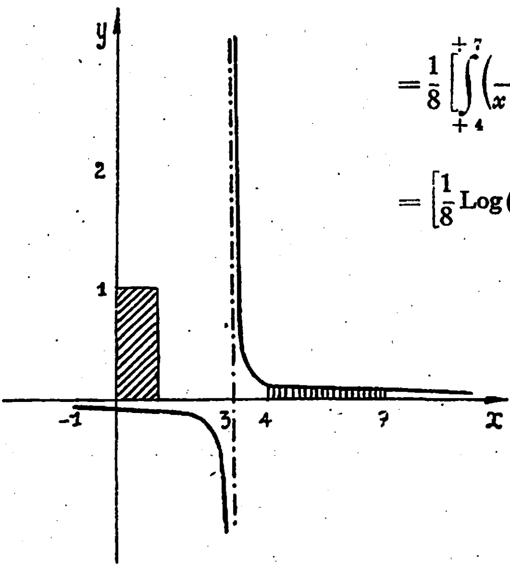


Fig. 27

$$= \frac{1}{8}\left[\int_{+4}^{+7} \left(\frac{dx}{x-3} - \frac{dx}{x-5}\right)\right.$$

$$= \left[\frac{1}{8} \operatorname{Log}(x-3) - \frac{1}{8} \operatorname{Log}(x+5)\right]_{+4}^{+7}$$

$$= \left[\operatorname{Log} \sqrt[8]{\frac{x-3}{x+5}}\right]_{+4}^{+7}$$

$$= \operatorname{Log} \sqrt[8]{\frac{1}{3}} - \operatorname{Log} \sqrt[8]{\frac{1}{9}}$$

$$= \operatorname{Log} \sqrt[8]{3}.$$

3. $$\int_1^{2e} \operatorname{Log} x\, dx = \Big[x \operatorname{Log} x\Big]_1^{2e} - \int_1^{2e} x \frac{dx}{x} = \Big[x \operatorname{Log} x - x\Big]_1^{2e}$$

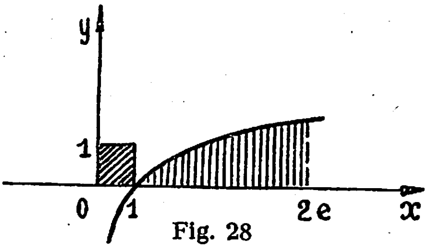


Fig. 28

$$= 2e \operatorname{Log} 2e - 2e + 1$$
$$= 2e\,(\operatorname{Log} 2 + \operatorname{Log} e) - 2e + 1$$
$$= 2e \operatorname{Log} 2 + 1$$
$$= \operatorname{Log}(2^{2e} e).$$

4. $$\int_{+\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\cos(x+a)}{\sin x}\, dx = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cot x \cos a\, dx - \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin a\, dx$$
$$= \cos a \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\cos x\, dx}{\sin x} - \sin a \int_{\pi/4}^{3\pi/4} dx = \Big[\cos a \operatorname{Log} \sin x - x \sin a\Big]_{\pi/4}^{3\pi/4}$$
$$= \cos a \operatorname{Log} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3\pi}{4} \sin a - \cos a \operatorname{Log} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4} \sin a$$
$$= -\frac{\pi}{2} \sin a.$$

5. $$\int_0^{\operatorname{Log}\sqrt{a}} \sqrt{a - e^{2x}}\, e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{Log}\sqrt{a}} \sqrt{a - e^{2x}}\, d\, e^{2x}$$
$$= -\frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{Log}\sqrt{a}} (a - e^{2x})^{1/2}\, d(a - e^{2x}) = -\frac{1}{3}\Big[(a - e^{2x})^{3/2}\Big]_0^{\operatorname{Log}\sqrt{a}}$$
$$= \frac{1}{3}(a-1)^{3/2}.$$

6. $$\int_0^a x^{2/3}(a^{5/3} - x^{5/3})^{7/4}\, dx = \frac{3}{5} \int_0^a (a^{5/3} - x^{5/3})^{7/4}\, dx^{5/3}$$
$$= -\frac{3}{5} \int (a^{5/3} - x^{5/3})^{7/4}\, d(a^{5/3} - x^{5/3}) = -\frac{12}{55}\Big[(a^{5/3} - x^{5/3})^{11/4}\Big]_0^a$$
$$= +\frac{12}{55} a^{55/12}.$$

4. *Applications.*

1. *Calculer l'aire enfermée entre les courbes :*

$$y = x^2 + 2x + 1 \qquad y = x^2 - 2$$
$$x = 0 \qquad y = 0 \qquad x = 2$$

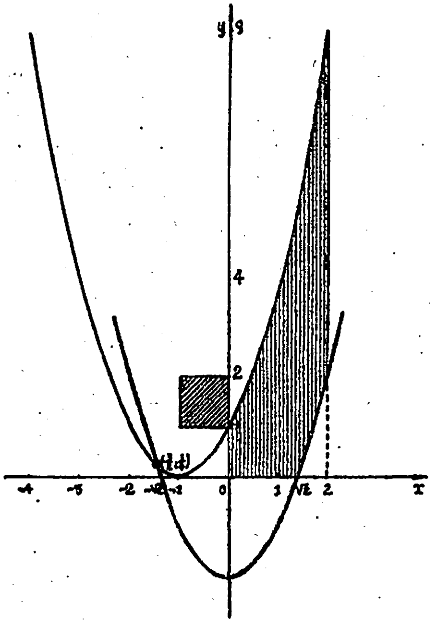


Fig. 29

$$S = \int_0^{\sqrt{2}} (x^2 + 2x + 1)\,dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} [(x^2 + 2x + 1) - (x^2 - 2)]\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x\right]_0^{\sqrt{2}} + \int_{\sqrt{2}}^{2} (2x + 3)\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{8}}{3} + 2\sqrt{2} + \left[x^2 + 3x\right]_{\sqrt{2}}^{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} + 2 + \sqrt{2} + 4 + 6 - 2 - 3\sqrt{2}$$

$$= 10 - \frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

2. *Idem pour* $y = \frac{1}{x} \quad y = e^{x/4} \quad x = 1 \quad$ et $\quad x = 2$

$$\int_1^2 \left(e^{x/4} - \frac{1}{x}\right) dx$$

$$= \left[4\,e^{x/4} - \operatorname{Log} x\right]_1^2$$

$$= 4\,(e^{1/2} - e^{1/4}) - \operatorname{Log} 2.$$

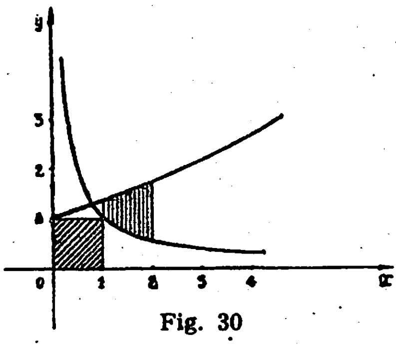


Fig. 30

3. *Un point matériel est assujetti à se mouvoir sur un cercle de rayon* R *sous l'action d'une force tangentielle* F. *Calculer le travail fourni pour un demi-tour quand la force — qui dépend de la position* α *du point — a les valeurs suivantes* (k *est une constante donnée;* α *mesure l'angle du rayon* OM *avec un rayon fixe* OX *et varie par exemple de* 0 *à* π) *:*

1° $k\alpha$; 2° $k \sin \alpha$

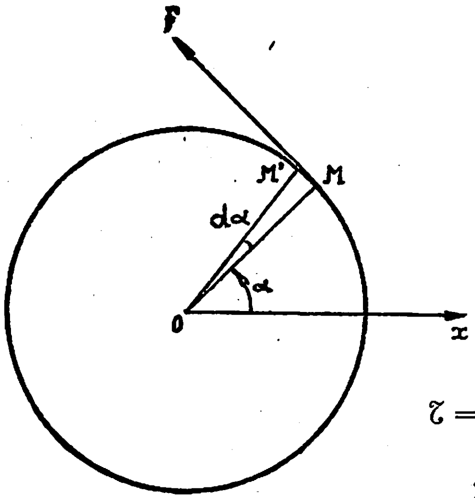


Fig. 31

1° Sur l'arc MM' de longueur $R d\alpha$, la force est pratiquement constante et égale à $k\alpha$ et le travail sur MM' vaut donc $(k\alpha) R d\alpha$ car l'arc $R d\alpha$ et la force F ont même direction. Pour un demi-tour $(0 \leqslant \alpha \leqslant \pi)$, il vaudra

$$\mathcal{T} = \int_0^\pi (k\alpha) R d\alpha = kR \left[\frac{\alpha^2}{2}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2 kR}{2}$$

2° De même

$$\mathcal{T} = \int_0^\pi (k \sin \alpha) R d\alpha = kR \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = kR \left[-\cos \alpha\right]_0^\pi = 2kR.$$

4. *Quel est le volume engendré par la rotation autour de* $y = 0$, *de la courbe* $y = \sqrt{x^2 + 1}$, *entre les plans d'abscisses* 1 *et* 3 *?*

Entre les abscisses x et $x + dx$ se trouve une tranche élémentaire du volume cherché. Cette tranche vaut pratiquement un cylindre de hauteur dx et de base égale à un cercle de rayon $y = \sqrt{x^2 + 1}$. La tranche a donc comme volume $\pi(x^2 + 1)dx$. Le volume total cherché sera :

$$V = \int_1^3 \pi(x^2 + 1)dx = \pi\left[\frac{x^3}{3} + x\right]_1^3 = \frac{32\pi}{3}.$$

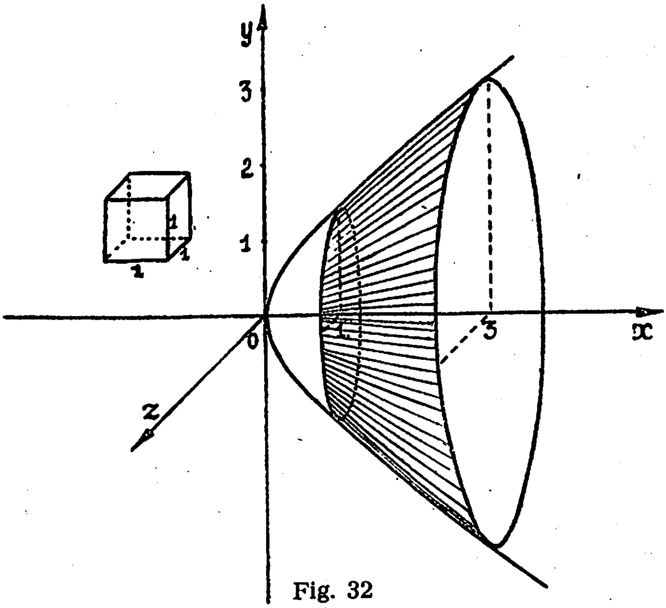


Fig. 32

5. *Idem pour la courbe* $y = e^x$ *entre les abscisses* 0 *et* 1.

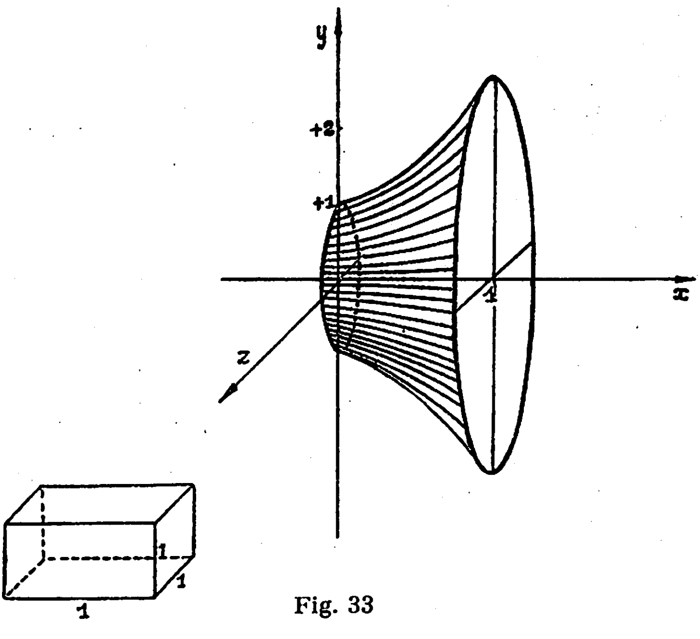


Fig. 33

$$V = \int_0^1 [\pi\, e^{2x}]\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^1 e^{2x}\, d(2x) = \frac{\pi}{2}\left[e^{2x}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}(e^2 - 1).$$

6. *Donner les développements limités de sin* $\frac{x}{2}$, *cos* ax, *sin* x^2, *cos* $\frac{a}{x}$

En se servant des formules des pages 36 et 37 du fascicule de théorie, on obtient immédiatement par substitution de l'argument convenable à l'argument x :

$$\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} < \sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2}$$

$$1 - \frac{a^2x^2}{2} < \cos ax < 1 + \frac{a^2x^2}{2} - \frac{a^4x^4}{24}$$

$$x^2 - \frac{x^6}{6} < \sin x^2 < x^2$$

$$1 - \frac{a^2}{2x^2} < \cos\frac{a}{x} < 1 - \frac{a^2}{2x^2} + \frac{a^4}{24x^4}.$$

N. B. : Les arguments des nombres trigonométriques sont supposés positifs et suffisamment petits. Ils doivent être exprimés dans l'unité radian.

Exercices sur les fonctions trigonométriques inverses

1. *Chercher les différentielles de :*

1. $y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

$$dy = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2}\, d\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{x^2+1}{x^2+2} \cdot \frac{-\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} \cdot dx.$$

$$dy = \frac{-x\, dx}{(x^2+2)\sqrt{x^2+1}}.$$

2. $y = \arc \sin \frac{x-1}{x+1}$. $(x \geqslant -1)$

$$dy = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}}\, d\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{x+1}{\sqrt{4x}} \cdot \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} \cdot dx$$

$$dy = \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}.$$

3. $y = e^{\text{arc tg}\sqrt{x}}$

$$dy = e^{\text{arc tg}\sqrt{x}}\, d\,(\text{arc tg}\sqrt{x}) = e^{\text{arc tg}\,x}\, \frac{1}{1+x}\, d\sqrt{x}$$

$$dy = \frac{e^{\text{arc tg}\sqrt{x}}\, dx}{2(1+x)\sqrt{x}}.$$

4. $y = \text{Log arc sin}\, \frac{1}{x}$ $(x \geqslant 1)$

$$dy = \frac{1}{\text{arc sin}\,\frac{1}{x}}\, d\left(\text{arc sin}\,\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\text{arc sin}\,\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\, d\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$dy = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}\ \text{arc sin}\,\frac{1}{x}} \left(\frac{-dx}{x^2}\right) = \frac{-dx}{x\sqrt{x^2-1}\ \text{arc sin}\,\frac{1}{x}}.$$

5. $y = \text{arc cos Log}\, x$ $1 \leqslant x \leqslant e.$

$$dy = d\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc sin Log}\, x\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-\text{Log}^2 x}}\, d\,\text{Log}\, x$$

$$= \frac{-dx}{x\sqrt{1-\text{Log}^2 x}}.$$

2. *Rechercher les intégrales indéfinies suivantes :*

1. $$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\frac{x}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\ \text{arc tg}\,\frac{x}{a}.$$

2. $$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{3}{4}+x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2}} = -\int \frac{d\left(\frac{1}{2}-x\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2}}$$

$$= -\arcsin\left(\frac{1}{2}-x\right) + \text{C}.$$

3. $$\int \frac{dx}{4x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(2x+1)^2+4} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{1+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\,\text{arc tg}\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

4. $$\int \frac{x-1}{x^2+4}\,dx = \int \frac{x\,dx}{x^2+4} - \int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{d\,(x^2)}{x^2+4} - \int \frac{dx}{x^2+4}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\,(x^2+4)}{x^2+4} - \frac{1}{2}\int \frac{d\frac{x}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{Log}\,(x^2+4) - \frac{1}{2}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{2} + \text{C}$$

$$= \text{Log}\,\text{C}\sqrt{x^2+4} - \frac{1}{2}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{2}.$$

5. $$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}+1}$$ Posons $e^x = u$; $x = \text{Log}\,u$; $dx = \frac{du}{u}$.

$$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}+1} = \int \frac{du}{u\left(u+\frac{1}{u}+1\right)} = \int \frac{du}{u^2+u+1} = \frac{du}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{du}{\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\left(u+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1} = \frac{8}{3\sqrt{3}}\int \frac{d\,\frac{\sqrt{3}}{2}\left(u+\frac{1}{2}\right)}{\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\left(u+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}$$

$$= \frac{8}{3\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\,\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\left(u+\frac{1}{2}\right)\right] + \text{C}$$

$$= \frac{8}{3\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\,\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\left(e^x+\frac{1}{2}\right)\right] + \text{C}.$$

3. *Rechercher les intégrales définies suivantes :*

1. $\displaystyle\int_0^1 \text{arc sin } x\, dx$

Par parties, il vient :

$$\int_0^1 \text{arc sin } x\, dx = \Big[x \text{ arc sin } x\Big]_0^1 - \int_0^1 x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \Big[x \text{ arc sin } x\Big]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d\,(x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \Big[x \text{ arc sin } x\Big]_0^1 + \int_0^1 \frac{d\,(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \Big[x \text{ arc sin } x + \sqrt{1-x^2}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

2. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{e-1}} \text{Log}\,(1+x^2)\, dx$

$$= \int_0^{\sqrt{e-1}} \text{Log}\,(1+x^2)\, dx = \Big[x \text{ Log}\,(1+x^2)\Big]_0^{\sqrt{e-1}} - \int_0^{\sqrt{e-1}} x \frac{2x\, dx}{1+x^2}$$

$$= \sqrt{e} - 1 - 2\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{x^2\, dx}{1+x^2} = \sqrt{e} - 1 - 2\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{(x^2+1-1)\, dx}{1+x^2}$$

$$= \sqrt{e-1} - 2\int_0^{\sqrt{e-1}} dx + 2\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{dx}{1+x^2} = \sqrt{e-1} - 2\Big[x - \text{arc tg}\, x\Big]_0^{\sqrt{e-1}}$$

$$= \sqrt{e-1} - 2\Big[\sqrt{e-1} - \text{arc tg}\sqrt{e-1}\Big]$$

$$= 2 \text{ arc tg}\sqrt{e-1} - \sqrt{e-1}.$$

La troisième partie de ce volume
ainsi que les solutions des questions posées à l'Ecole Militaire depuis 1946
sont de R. GRAAS
licencié-agrégé en sciences mathématiques.

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

Solutions des exercices proposés dans le Traité d'Algèbre élémentaire.

CHAPITRE I. — Introduction 5
CHAPITRE II. — Les nombres relatifs 12
CHAPITRE III. — Expressions algébriques 21
CHAPITRE IV. — Polynômes 27
CHAPITRE V. — Fractions algébriques 64
CHAPITRE VI. — Équations 76
CHAPITRE VII. — Équations simultanées 84
CHAPITRE VIII. — Inéquations 95
CHAPITRE IX. — Problèmes du premier degré 98
CHAPITRE X. — Discussion d'équations et d'inéquations du premier degré 125
CHAPITRE XI. — Discussion de problèmes 143
CHAPITRE XII. — Détermination d'un point 156
CHAPITRE XIII. — Des Fonctions 162
CHAPITRE XIV. — Radicaux du second degré 176
CHAPITRE XV. — Équations du second degré 184
CHAPITRE XVI. — Équations bicarrées et radicaux doubles . . 213
CHAPITRE XVII. — Trinôme du second degré 220
CHAPITRE XVIII. — Inéquations et applications 241
CHAPITRE XIX. — Équations réductibles au second degré . . . 286
CHAPITRE XX. — Équations simultanées d'un degré supérieur au premier. 309
CHAPITRE XXI. — Problèmes d'un degré supérieur au premier . 333
CHAPITRE XXII. — Progressions 368
CHAPITRE XXIII. — Logarithmes 394
CHAPITRE XIV. — Intérêts composés 407
CHAPITRE XXV. — Annuités 421

Exercices de récapitulation.

1re SÉRIE. — Calcul algébrique 451
2e SÉRIE. — Premier degré 472
3e SÉRIE. — Second degré 499

Exercices proposés à l'École Militaire (Armes simples) . . . 574

DEUXIÈME PARTIE

Solutions des exercices proposés dans les Compléments d'Arithmétique et d'Algèbre.

CHAPITRE	I.	— Nombres irrationnels	579
CHAPITRE	II.	— Radicaux et exposants	583
CHAPITRE	III.	— Des fractions continues	590
CHAPITRE	IV.	— Les nombres complexes	601
CHAPITRE	VII.	— Polynômes entiers	619
CHAPITRE	VIII.	— Analyse combinatoire et binôme de Newton	632
CHAPITRE	IX.	— Déterminants et équations linéaires	660
CHAPITRE	X.	— Analyse indéterminée	690
CHAPITRE	XI.	— Limites	712
CHAPITRE	XII.	— Continuité et variations	741
CHAPITRE	XIII.	— Fonction exponentielle et logarithme	755
CHAPITRE	XIV.	— Les dérivées	772
CHAPITRE	XV.	— Emploi des dérivées pour l'étude des variations des fonctions	784
CHAPITRE	XVI.	— Maximums et minimums absolus	878

Exercices de récapitulation.

1re SÉRIE.	— Radicaux, exposants, nombres complexes	894
2e SÉRIE.	— Polynômes, déterminants, équations	913
3e SÉRIE.	— Limites et variations des fonctions	949

Exercices proposés à l'École Militaire.

Division « Armes spéciales » . . . 1008
Division « Toutes Armes » . . . 1014
Division « Polytechnique » . . . 1024

TROISIÈME PARTIE

Solutions des exercices proposés dans les Éléments de Calcul Intégral . . . 1039

TABLES . . . 1073

Imprimé en Belgique par les Établissements Casterman, S. A., Tournai. D 301