Enseignement Moyen et Enseignement Normal

ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE

PAR

N. J. SCHONS

QUATRIÈME ÉDITION

LA PROCURE :

NAMUR
BOULEVARD ERNEST MÉLOT, 14

BRUXELLES
RUE DES TANNEURS, 161

TOURNAI
ÉTABLISSEMENTS CASTERMAN, S. A.
1946

AVERTISSEMENT

I. *Ces Éléments d'Algèbre contiennent les matières à enseigner dans les Humanités anciennes, division grecque-latine, ainsi que dans les Écoles normales (programme obligatoire et programme facultatif).*

II. *Les exercices proposés sont précédés de deux numéros. Dans les vingt-quatre premiers chapitres, le second numéro renvoie à la Première Partie de nos EXERCICES D'ALGÈBRE, sauf pour les n^{os}* 413 *à* 420 *(chap. XIV),* 634 *et* 635 *(chap. XXII); pour ces numéros et dans les trois derniers chapitres, il renvoie à la Seconde Partie des mêmes EXERCICES.*

III. *Beaucoup de questions traitées dans ce volume sont exposées d'une façon plus complète dans notre TRAITÉ et dans nos COMPLÉMENTS.*

ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE

CHAPITRE PREMIER

Introduction.

§ I. — RÉSOLUTION DE PROBLÈMES PAR LA MÉTHODE ALGÉBRIQUE.

1. Beaucoup de problèmes peuvent être résolus par *la méthode algébrique;* elle est ordinairement plus simple et plus rapide que les méthodes étudiées en arithmétique.

2. Exemple. — *La somme des âges de trois personnes est* 82 *ans. La deuxième a le double de l'âge de la première et la troisième a* 7 *ans de plus que la deuxième. Trouver l'âge de chaque personne.*

Solution arithmétique. — L'âge de la deuxième personne est le double de l'âge de la première. L'âge de la troisième est donc le double de l'âge de la première, plus 7 ans.

La somme des trois âges, ou 82 ans, sera égale à cinq fois l'âge de la première plus 7 ans. Le quintuple de l'âge de la première est donc 82 — 7 ou 75 ans.

L'âge de la première personne est le cinquième de 75 ans, ou 15 ans; la deuxième a 30 ans et la troisième 37 ans.

Solution algébrique. — Appelons x l'âge de la première personne. L'âge de la deuxième sera $2x$ et celui de la troisième, $2x + 7$. Mais la somme des trois âges est 82. On peut donc écrire

$$x + 2x + 2x + 7 = 82 \quad \text{ou} \quad 5x + 7 = 82. \qquad (1)$$

Les deux nombres $5x + 7$ et 82 étant égaux, si on retranche 7 de chacun d'eux, on obtiendra des nombres égaux. On a donc

$$5x = 75 \quad \text{ou} \quad x = 15.$$

Ainsi, la première personne a 15 ans, la seconde 30 ans et la troisième 37 ans.

3. Pour résoudre le problème précédent par la méthode algébrique: 1° nous avons désigné l'une des *inconnues* du problème par la lettre x; 2° nous avons cherché ensuite l'égalité (1), appelée *équation du problème*; 3° puis, nous avons *résolu* cette équation.

Nous allons maintenant exposer quelques notions sur les équations et les problèmes, que nous compléterons dans la suite.

4. Définitions. — *Une* **équation** *est une égalité qui n'est vérifiée que par certaines valeurs particulières attribuées aux lettres qu'elle renferme; ces lettres sont les* **inconnues.**

L'égalité $5x - 3 = 7$ est une équation, car on voit aisément qu'elle n'est vérifiée que pour $x = 2$.
Les équations que nous considérons pour le moment ne renferment qu'une inconnue et elles ne sont vérifiées que par une seule valeur de cette inconnue.

On appelle **solution** *d'une équation un nombre qui, mis à la place de l'inconnue, fait prendre aux deux membres des valeurs égales.*

Le nombre 2 est une solution de l'équation $5x - 3 = 7$.

5. Résoudre une équation, *c'est chercher ses solutions.* — On se base sur les principes suivants :

I. *Si on ajoute ou si on retranche un même nombre aux deux membres d'une égalité, on a encore une égalité.*

II. *Si on multiplie ou si on divise les deux membres d'une égalité par un même nombre, on a encore une égalité.*

Conséquence. — *On peut faire passer un terme d'un membre d'une équation dans l'autre à condition de* **changer le signe** *de ce terme.*
En effet, soit l'équation $5x - 3 = 7$. On peut ajouter 3 aux deux membres; il vient ainsi

$$5x - 3 + 3 = 7 + 3 \quad \text{ou} \quad 5x = 7 + 3.$$

6. Exemples. — I. *Résoudre l'équation* $7x - 3x + 5x = 23 - 5$.

1° Cette équation peut s'écrire $9x = 18$.
Nous avons remplacé les termes inconnus par un seul, et les termes connus par un seul; autrement dit, nous avons *réduit les termes semblables.*
2° Divisons les deux membres par 9, qui est appelé *coefficient* de x.
Il vient $$x = 18 : 9 = 2.$$

Vérification. — Pour $x = 2$, le premier membre vaut $14 - 6 + 10$ ou 18 et il est égal au second membre.

II. *Résoudre l'équation* $11x - 7 = 6x + 28$.

1° Cette équation peut s'écrire $11x - 6x = 28 + 7$.
Nous avons fait passer les termes qui renferment l'inconnue dans le premier membre, et les termes connus dans le second.

2° Réduisons les termes semblables; $5x = 35$.

3° Divisons par 5; $x = 35 : 5 = 7$.

Vérification. — Pour $x = 7$, le premier membre vaut $77 - 7$ ou 70; le second membre vaut $42 + 28$ ou 70.

III. *Résoudre l'équation* $2x + 5 = 7x - 10$.

1° Transposons les termes inconnus dans le *second* membre (la transposition dans le premier membre conduirait *à une soustraction impossible*) et les termes connus dans le premier.

$$5 + 10 = 7x - 2x.$$

2° Réduisons les termes semblables.

$$15 = 5x \quad \text{ou} \quad 5x = 15.$$

3° Divisons par 5; $x = 15 : 5 = 3$.

Vérification. — Pour $x = 3$, chaque membre devient 11.

IV. *Résoudre l'équation* $\dfrac{9x}{10} = \dfrac{13}{5} + \dfrac{x}{4}$.

1° Faisons disparaître les dénominateurs; à cet effet, multiplions les deux membres par 20, qui est le p. p. c. m. des dénominateurs. Il vient

$$18x = 52 + 5x;$$

2° Puis, $18x - 5x = 52$.

3° Réduisons $13x = 52$.

4° Enfin, divisons par 13 et nous trouvons $x = 52 : 13 = 4$.

Vérification. — Pour $x = 4$, chaque membre vaut $\dfrac{18}{5}$.

7. Règle. — Les quatre exemples précédents conduisent à la règle de résolution suivante.

1° *Chasser les dénominateurs, en multipliant les deux membres par le p. p. c. m. des dénominateurs.*

2° *Faire passer dans l'un des membres les termes qui renferment l'inconnue et dans l'autre les termes connus.*

3° *Réduire les termes semblables.*

4° *Diviser les deux membres par le coefficient de l'inconnue.*

8. La résolution d'un problème comprend deux parties : 1° la mise en équation; 2° la résolution de l'équation.

9. Mise en équation. — 1° *On représente l'inconnue ou l'une des inconnues du problème par la lettre* x.

2° *On déduit de l'énoncé du problème une phrase qui exprime l'égalité de deux grandeurs.*

Cette phrase se trouve parfois dans l'énoncé même. D'autres fois, il faut la déduire de l'énoncé à l'aide d'un raisonnement.

3° *On exprime les grandeurs qui entrent dans la relation d'égalité au moyen des nombres donnés et de l'inconnue* x, *comme si cette dernière était déjà connue.*

4° *On obtient ainsi l'équation du problème.*

10. Exemples. — I. *Du double d'un nombre, on retranche* 16. *On obtient ainsi sa moitié augmentée de* 2. *Quel est ce nombre?*

1° Soit x le nombre inconnu.

2° Le double du nombre, diminué de 16 = la moitié du nombre, augmentée de 2.

3° Le double du nombre, diminué de 16 vaut $2x - 16$. La moitié du nombre, augmentée de 2 vaut $\frac{x}{2} + 2$.

4° L'équation du problème sera $2x - 16 = \frac{x}{2} + 2$.

La résolution de cette équation donne $x = 12$. Donc le nombre cherché est 12.

II. *Trois personnes doivent se partager* 2200 *fr de la manière suivante : la* 2

3° La dépense des hommes sera représentée par $30x$; celle des femmes par $28(15 - x)$ ou $420 - 28x$.

4° On a l'équation $30x + 420 - 28x = 440$.

D'où $x = 10$. Il y avait 10 hommes et 5 femmes.

§ II. — REPRÉSENTATION DES NOMBRES PAR DES LETTRES. — FORMULES.

11. En arithmétique et en géométrie, on est souvent amené à représenter des nombres par des lettres et à établir *des formules* qui donnent la solution de tous les problèmes d'un même type. Il en est ainsi, par exemple, dans *la théorie de l'intérêt simple.*

12. Problème. — *Calculer l'intérêt produit par un capital de* 1285 *fr placé au taux de* 5 % *pendant* 9 *mois.*

Au moyen d'une règle de trois, on trouve que cet intérêt, exprimé en francs, est égal à

$$\frac{5 \times 1285 \times 9}{100 \times 12} \quad \text{ou} \quad 1285 \times \frac{5}{100} \times \frac{9}{12}.$$

13. Il existe beaucoup de problèmes du même type que le précédent. Tous sont des cas particuliers du problème général suivant, dans lequel les données sont représentées par des lettres.

14. Problème général. — *Calculer l'intérêt produit par un capital de* c *francs placé au taux de* i *pour* 1 *franc pendant* n *années.*

Dans cet énoncé, i fr est l'intérêt produit par un franc en un an; si le capital est placé, par exemple, à 3 %, on a $i = 0{,}03$. Donc c fr produiront en un an ci fr d'intérêt.

D'autre part, n est le temps *exprimé en années*; suivant que le capital est placé, par exemple, pendant 2 ans, pendant 3 mois ou pendant un an et demi, on a $n = 2, \frac{3}{12}$ ou $\frac{3}{2}$. L'intérêt pour un an étant ci fr, l'intérêt pour n années sera cin fr.

Ainsi, si on désigne l'intérêt cherché par I fr, on a l'égalité

$$\mathrm{I} = cin,$$

qui est *la formule de l'intérêt simple.* Elle montre, d'une façon simple et claire, que l'intérêt d'un capital est toujours égal à un produit de trois facteurs : le capital c, le taux i pour un franc, le temps n exprimé en années.

15. Une formule *est une égalité dont le premier membre est l'inconnue d'un problème général et dont le second membre indique les calculs à effectuer sur les données du problème pour obtenir la valeur de l'inconnue.*

16. Avantages des formules. — 1° Elles indiquent d'une manière simple et précise les calculs à effectuer pour obtenir la valeur d'une inconnue.

2° Elles dispensent de tout raisonnement dans la résolution d'un problème de même type que le problème général. Il suffit, en effet, de remplacer dans le second membre chaque lettre par sa valeur particulière et d'effectuer les opérations.

Ainsi, l'intérêt d'un capital de 13 600 fr placé pendant 45 jours au taux de 6% est

$$13\,600 \times 0{,}06 \times \frac{45}{360} \text{ ou } 102 \text{ fr.}$$

3° D'une formule donnée, on peut en déduire d'autres qui donnent la solution de nouveaux problèmes généraux.

Ainsi, de la formule $I = cin$, on déduit les formules

$$c = \frac{I}{in}; \quad i = \frac{I}{cn}; \quad n = \frac{I}{ci}.$$

Celles-ci donnent la solution des problèmes généraux relatifs à la recherche du capital, du taux et du temps.

Remarque. — Nous avons établi la formule de l'intérêt à titre d'exemple; on pourra rappeler ici d'autres formules arithmétiques et géométriques.

EXERCICES

ÉQUATIONS A RÉSOUDRE.

1. (1)
1° $x+3=8$
2° $x-2=7$
3° $4=x-1$
4° $13=x+3$
5° $4x+3=51$
6° $6x-21=3$
7° $27=4x-9$
8° $3x+5=2x+9$
9° $5x-3=4x+8$
10° $7x-9=6x-3$
11° $x+3=2x-4$
12° $1=17x-16x$
13° $4x+1=x+25$
14° $7x-5=5x+1$
15° $3x-2=5x-10$
16° $8x-3=6-x$
17° $10x-7=3+8x$
18° $3-5x=7x+3$.

2. (2)
1° $80-5x=20+x-12$
2° $7x-10=15+5x-3$
3° $460-11x=x+150-2x$
4° $8x-5=7x-2{,}75-2x$
5° $0=9-6x-19+10x$
6° $0{,}5x-6{,}3=3{,}7x-9{,}5$
7° $4{,}3x-3{,}9=2{,}4x+5{,}6$
8° $8{,}3-3x=2{,}1+7{,}2x+6{,}2$
9° $10x-2{,}05=4{,}9x+1{,}75-2{,}5x$
10° $0{,}2x-0{,}089x+1{,}78=x-16$.

3. (3) 1° $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=10$

2° $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=11$

3° $36-\frac{4x}{9}=8$

4° $\frac{x}{2}-2-\frac{x}{4}+\frac{x}{5}=1$

5° $\frac{7x}{8}-5=\frac{9x}{10}-8$

6° $\frac{2x}{7}+\frac{x}{11}=4\frac{1}{7}$

7° $\frac{x}{3}-\frac{1}{3}-\frac{x}{4}+\frac{1}{4}=\frac{x}{5}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{x}{6}$

8° $18x+\frac{x}{4}+\frac{5x}{6}-36-8x=360+\frac{x}{12}$

9° $\frac{2}{3}x-\frac{7}{4}x-5=\frac{5}{6}x+\frac{x}{2}-\frac{39}{2}$

10° $x+\frac{3x}{4}+\frac{9x}{16}+\frac{27x}{64}+\frac{81x}{256}=8591.$

PROBLÈMES.

4. (4) On augmente un nombre de 37 et on trouve 152. Quel est ce nombre?

5. (5) Trouver le nombre dont le double augmenté de 7 égale 33.

6. (6) Trouver le nombre dont le triple diminué de 15 donne 66.

7. (7) On retranche 34 au quintuple d'un nombre. Il reste le triple de ce nombre. Quel est-il?

8. (8) Un nombre augmenté de 90 donne une somme qui surpasse de 18 le quintuple du nombre. Quel est-il?

9. (9) Au cinquième d'un nombre on retranche 12 et il reste 7. Quel est ce nombre?

10. (10) Trouver le nombre dont le triple diminué de 7 égale le double augmenté de 3.

11. (11) Les trois quarts d'un nombre diminués de 8 égalent l'excès de 69 sur le double du nombre. Quel est ce nombre?

12. (12) Au triple d'un nombre on ajoute son double et on trouve $38\frac{1}{3}$. Quel est ce nombre?

13. (13) On multiplie un nombre par 15, puis on retranche 29 du produit. Le résultat surpasse de 21 le quintuple du nombre. Quel est ce nombre?

14. (14) Trouver un nombre dont les six septièmes dépassent d'une unité la moitié plus le tiers du nombre.

15. (15) On ajoute $6\frac{1}{4}$ à un nombre. On aurait eu le même résultat si on l'avait multiplié par $7\frac{1}{4}$. Quel est ce nombre?

16. (16) De la moitié d'un capital on retranche 5 % du capital et on trouve 2250 fr. Quel est ce capital?

17. (17) On a vendu successivement le tiers, le quart et le sixième d'une pièce de drap. Il en reste encore 15 mètres. Trouver la longueur de la pièce.

18. (18) Partager 5754 fr entre deux personnes de manière que la part de la première vaille les trois quarts de celle de la seconde.

19. (19) Combien a coûté une auto d'occasion, sachant qu'après y avoir fait pour 800 fr de réparations on l'a vendue 19 280 fr, et qu'ainsi on a gagné les deux cinquièmes du prix d'achat?

20. (20) Un marchand achète deux chevaux pour 8800 fr. Trouver les prix respectifs des deux chevaux, sachant que le premier coûte les sept quarts du second.

21. (21) Quelle est la valeur d'un champ sachant que les trois cinquièmes du prix font autant que les trois quarts diminués de 750 fr?

22. (22) Deux frères ont ensemble 55 ans et l'âge du plus jeune vaut les cinq sixièmes de l'âge de l'aîné. Quels sont leurs âges?

23. (23) Quelqu'un a acheté une pièce de drap. En la vendant 12 fr le mètre, il gagnerait 100 fr. En la vendant 9 fr le mètre, il perdrait 23 fr. Quelle est la longueur de la pièce?

24. (24) Le tiers d'un capital est placé à 5 % et le reste à 4 %. L'intérêt annuel est 130 fr. Trouver ce capital.

FORMULES.

25. (25) Calculer la valeur acquise C par un capital c placé à intérêts simples au taux i pour un franc, après n années. — *Applications numériques* :

1° $c = 1500$; $i = 0{,}05$; temps 13 ans, 4 mois; $C = ?$
2° $C = 86700$; $i = 0{,}04$; temps 6 mois; $c = ?$
3° $C = 9072$; $c = 9000$; temps 2 mois, 12 jours; $i = ?$
4° $C = 7850$; $c = 7536$; $i = 0{,}06$; $n = ?$

26. (26) Que devient la formule de l'intérêt simple, si le taux est t %? Calculer alors c, t, i, n.

Que devient la même formule si n représente des mois?

27. (27) Calculer la valeur actuelle a d'un billet de c fr, payable après n années et escompté en dehors au taux i pour un franc. — *Applications numériques* :

1° $c = 8000$; $i = 0{,}035$; temps 45 jours; $a = ?$
2° $c = 8166$; $a = 7880$; $i = 0{,}06$; $n = ?$
3° $c = 8000$; escompte 100 fr; temps 3 mois; $i = ?$
4° Escompte 450 fr; temps 18 jours; $i = 0{,}06$; $c = ?$

28. (28) Un tonneau de vin contient a litres. On vend ce vin à b fr le décalitre. Trouver le prix de vente v.

29. (29) Une marchandise a coûté a fr. Trouver le prix de vente v ou v', suivant que l'on veut gagner t % 1° sur le prix d'achat; 2° sur le prix de vente.

Calculer v *et* v', *quand on* a : 1° $a = 1700$; $t = 5$; 2° $a = 2350$; $t = 12$; 3° $a = 155$; $t = 20$.

30. (30) Quel est le titre T d'un lingot qui contient a gr d'or et b gr de cuivre?

31. (31) La densité D d'un corps dont le volume est V cm³ et la masse M gr, a pour expression $D = \frac{M}{V}$.

Calculer D *dans les cas suivants :*

1° La masse est 149,6 gr et le volume 17 cm³;

2° La masse est 2 kg et le volume 150 cm³;

3° La masse est 2,625 kg et le volume 3,5 l.

Calculer la masse dans les cas suivants : 1° D = 1,29 et le volume est 41 dm³; 2° D = 1,84 et le volume est 821 dl; D = 11,4 et le volume est 93 cm³.

Calculer le volume dans les cas suivants : 1° D = 19,25 et la masse est 596,75 gr; 2° D = 10,5 et la masse est 304,5 kg; 3° D = 2,6 et la masse est 1261 dg.

32. (32) Un mark-or (R. M.) vaut sensiblement 1,25 franc-or. Montrer que, si a marks-or valent b francs-or, on a les formules

$$a = b - \frac{b}{5}; \quad b = a + \frac{a}{4}.$$

33. (33) Calculer les hauteurs d'un triangle dont on connaît l'aire S et les côtés a, b, c. Calculer aussi le rayon R du cercle circonscrit, sachant que l'on a $S = \frac{abc}{4R}$.

CHAPITRE II

Les nombres relatifs.

§ I. — NOTIONS.

17. Sur un thermomètre, on voit deux fois la suite des nombres 1, 2, 3, ...; ils sont inscrits une fois à partir du zéro en montant, et une fois en descendant. Par suite, pour indiquer une température, il ne suffit pas de dire qu'elle est 10°, par exemple; il faut encore dire si elle est supérieure ou inférieure à zéro.

Pour distinguer les unes des autres les températures supérieures à zéro et celles inférieures à zéro, on place le signe + devant les nombres placés au-dessus du zéro et le signe — devant les autres. On obtient ainsi des nombres positifs et des nombres négatifs.

18. *On appelle* **nombre positif** *un nombre arithmétique affecté du signe* + ; *et* **nombre négatif** *un nombre arithmétique affecté du signe* —.

Les nombres $+7$, $+\frac{2}{3}$ sont positifs; -5, $-\frac{3}{4}$ sont des nombres négatifs.

Les nombres *positifs*, les nombres *négatifs* et le nombre *zéro*, qui n'a pas de signe, portent le nom de **nombres relatifs** ou de **nombres réels.**

Quand un nombre positif est employé seul, on sous-entend d'ordinaire le signe +. De plus, les nombres positifs sont regardés comme identiques aux nombres arithmétiques.

19. La **valeur absolue** d'un nombre relatif est le nombre arithmétique obtenu en supprimant le signe. On *indique* la valeur absolue en plaçant le nombre relatif entre deux traits verticaux.

On écrit, par exemple, $|+2| = 2$; $|-3| = 3$.

Ces égalités se lisent comme suit : *valeur absolue de* + 2 égale 2; *valeur absolue de* — 3 égale 3.

On appelle **nombres opposés** ceux qui ont la même valeur absolue et des signes contraires.

EXEMPLES : $+5$ et -5; $-\frac{3}{4}$ et $+\frac{3}{4}$.

20. Échelle des nombres relatifs. — Les nombres relatifs entiers peuvent être disposés de part et d'autre du nombre zéro de telle sorte que, plus les nombres s'écartent de zéro, plus leur valeur absolue augmente.

$$\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Entre les nombres entiers, on peut intercaler successivement les nombres fractionnaires dont les dénominateurs sont 2, 3, ... On obtient ainsi l'échelle des nombres relatifs rationnels.

On dit que tout nombre de cette échelle est *supérieur* à ceux qui sont à sa gauche, et *inférieur* à ceux qui sont à sa droite.

21. Emploi des lettres. — Comme en arithmétique, les lettres peuvent servir pour représenter des nombres. Soit a un nombre relatif. *Par convention, le symbole* $+$ a *représente le même nombre, et le symbole* $-$ a *représente le nombre opposé.*

Si $a = +3$, on a : $+a = +(+3) = +3$; $-a = -(+3) = -3$.
Si $a = -5$, on a : $+a = +(-5) = -5$; $-a = -(-5) = +5$.

REMARQUES. — I. Les signes $+$ et $-$ qui figurent dans les symboles $+a$ et $-a$ sont *les signes apparents* des nombres $+a$ et $-a$. Les exemples précédents montrent qu'il faut bien se garder de considérer le nombre $+a$ comme essentiellement positif et le nombre $-a$ comme essentiellement négatif.

II. La convention précédente revient à la suivante :

1° Deux signes identiques devant un nombre sont équivalents à un signe $+$.

2° Deux signes contraires devant un nombre sont équivalents à un signe $-$.

§ II. — APPLICATION DES NOMBRES RELATIFS A LA MESURE DES GRANDEURS.

22. Certaines grandeurs peuvent être comptées, comme la température (**17**), *dans deux sens opposés.*

Sur une droite horizontale $X'X$ (Fig. 1) les distances peuvent être comptées à partir d'un point O vers *la droite* ou vers *la gauche.* — A partir d'un certain moment, le temps peut être compté vers *l'avenir* ou vers *le passé.*

Les nombres arithmétiques ne suffisent pas pour mesurer convenablement ces grandeurs.

Pour fixer la position d'un point A de la droite X'X (Fig. 1), il ne suffit pas de dire qu'il se trouve par exemple à 3 cm du point O, car il existe sur cette droite deux points situés à 3 cm de O. Il faudra indiquer de plus si l'on considère le point situé à gauche de O ou celui qui est à sa droite.

Chaque fois qu'une grandeur peut être comptée dans deux sens opposés, on distingue les deux sens en les appelant, l'un *sens positif* et l'autre *sens négatif*. Les nombres qui mesurent la grandeur prise dans le sens positif sont affectés du signe + ; ceux qui la mesurent quand elle est prise dans le sens négatif, sont affectés du signe —.

23. Distances algébriques. — On appelle *droite orientée* ou *axe* une droite sur laquelle on a choisi un sens positif.

Considérons l'axe X'X; le sens positif est indiqué par une flèche.

Fig. 1.

La distance arithmétique du point A au point B est 2 cm. Mais le point B est *à droite* du point A. On dit que *la distance algébrique* du point A au point B est + 2 cm et on écrit AB = + 2.

La distance arithmétique du point A au point C est 6 cm. Mais le point C est *à gauche* du point A. On dit que *la distance algébrique* du point A au point C est — 6 cm et on écrit AC = — 6.

Montrer d'une façon analogue que CB = + 8 et BA = — 2.

24. Repérage des points d'un axe. — Soit O un point fixe de l'axe X'X (Fig. 1); c'est l'*origine* de l'axe. *On appelle abscisse d'un point* M *de l'axe la distance algébrique* OM.

L'unité étant le cm, les abscisses des points A, B, C sont OA = + 3, OB = + 5, OC = — 3. Représenter aussi les points D, E, F dont les abscisses sont respectivement + 1, — 2, + 4.

25. Mesure du temps. — Prenons l'heure de midi comme origine des temps et l'heure comme unité. Le temps t est *positif* ou *négatif*, suivant que l'instant considéré *suit* ou *précède* midi.

Dans ces conditions, à 6 heures du soir, le temps est $t = + 6$; à 10 heures du matin, il est $t = - 2$.

Inversement, si $t = + 3$, l'instant considéré suit midi de 3 heures et il est 3 heures du soir; et si $t = - 3$, il est 9 heures du matin.

§ III. — ADDITION.

26. Somme de deux nombres. — Considérons un axe X'X, l'unité de longueur étant le cm.

Fig. 2.

Un point mobile, en partant de A, se déplace d'abord de 4 cm vers la droite jusqu'en B, puis encore de 3 cm vers la droite jusqu'en C. Les distances algébriques parcourues sont AB $= + 4$ et BC $= + 3$. La position finale du point mobile aurait été la même s'il avait parcouru d'un trait la distance algébrique AC $= + 7$. Il est donc naturel de dire que $+ 7$ est la somme des nombres $+ 4$ et $+ 3$, et d'écrire

$$(+ 4) + (+ 3) = + 7. \qquad (1)$$

Si le point mobile se déplace d'abord de 4 cm vers la gauche à partir de A, puis de 3 cm vers la droite, on a AB $= - 4$, BC $= + 3$; la figure montre qu'on a AC $= - 1$. Par suite, en disant encore que la distance algébrique AC est la somme des distances algébriques AB et BC, on a dans ce cas,

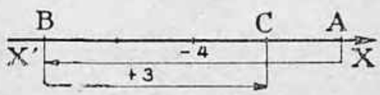


Fig. 3.

$$(- 4) + (+ 3) = - 1. \qquad (2)$$

Montrer par des graphiques qu'on a aussi :

$(+ 4) + (- 3) = + 1$ (3)	$(+ 4) + (- 4) = 0$ (5)
$(- 4) + (- 3) = - 7$ (4)	$(+ 4) + 0 = 4.$ (6)

Ces exemples, pris dans l'ordre (1) et (4), (2) et (3), (5), (6), conduisent à la règle suivante.

27. Règle. — *La somme de deux nombres relatifs est le nombre qu'on obtient comme suit :*

1° *Si les deux nombres sont* **de mêmes signes** *on forme la somme de leurs valeurs absolues, et on donne au résultat le signe commun.*

2° *Si les deux nombres sont* **de signes contraires,** *on fait la différence de leurs valeurs absolues et on donne au résultat le signe du terme qui a la plus grande valeur absolue.*

3° *Si les deux nombres sont* **opposés,** *leur somme est nulle.*

4° *Si l'un des nombres est* **nul,** *leur somme égale l'autre nombre.*

Remarque. — La somme de deux nombres peut être inférieure à l'un d'eux. Ainsi le nombre -3, qui est la somme des nombres $+2$ et -5, est inférieur au nombre $+2$.

28. Formule de Chasles. — Chacune des égalités (1), (2), (3), (4) renferme trois nombres qui sont respectivement les distances algébriques AB, BC, AC. Ces égalités peuvent être résumées en une seule

$$\mathrm{AB} + \mathrm{BC} = \mathrm{AC} \quad \text{ou} \quad \mathrm{AC} = \mathrm{AB} + \mathrm{BC}.$$

Cette égalité s'appelle *formule de Chasles.*

29. Définition. — *On appelle* **somme de plusieurs nombres** *rangés dans un certain ordre, le nombre qu'on obtient en formant la somme des deux premiers, puis la somme du résultat et du troisième, et ainsi de suite jusqu'au dernier.*

En considérant les nombres -5, $+9$, -7 et $+4$, on a :

$$(-5) + (+9) = +4;$$
$$(+4) + (-7) = -3;$$
$$(-3) + (+4) = +1.$$

Donc, $$(-5) + (+9) + (-7) + (+4) = +1.$$

Remarque. — *Dans une somme de plusieurs nombres, on peut remplacer les deux, trois, ... premiers termes par leur somme effectuée.*

On a, par exemple,

$$(-5) + (+9) + (-7) = (+4) + (-7).$$

En effet, pour calculer le premier membre, on doit additionner d'abord -5 et $+9$, ce qui donne $+4$. Il reste alors à additionner $+4$ et -7, comme dans le second membre.

30. Parenthèses. — Dans la somme $a + b + c$, on peut, comme dans l'exemple précédent, remplacer les deux premiers termes par leur somme effectuée. Pour l'indiquer, on convient d'écrire

$$a + b + c = (a + b) + c.$$

Les parenthèses signifient donc que l'addition indiquée entre parenthèses est supposée effectuée avant l'addition qui n'est pas comprise dans ces parenthèses; ou encore, que l'expression a + b *qu'elles renferment, doit être considérée comme un seul nombre auquel il faut ajouter* c.

31. Propriétés de l'addition. — Les propriétés fondamentales de l'addition des nombres relatifs sont les mêmes que celles de l'addition des nombres arithmétiques.

I. Dans une somme, on peut intervertir l'ordre des termes *(l'addition est une opération commutative).*

II. Dans une somme, on peut remplacer deux ou plusieurs termes par leur somme effectuée *(l'addition est une opération associative).*

En vertu de ces propriétés, on peut écrire

$$a + b + c + d = a + d + c + b$$

et $$a + b + c + d = a + (b + d) + c. \quad (1)$$

La démonstration de la deuxième propriété ne présente pas de difficulté. *Si les termes considérés sont les premiers,* la définition nous permet de les remplacer par leur somme. *S'ils ne sont pas les premiers,* on peut les y amener en intervertissant l'ordre des termes.

32. Conséquences. — I. *Dans une somme de plusieurs nombres, on peut remplacer un nombre par plusieurs autres dont il est la somme,* car l'égalité (1) peut s'écrire

$$a + (b + d) + c = a + b + c + d.$$

II. *Dans une somme de plusieurs nombres, on peut supprimer deux nombres opposés,* car on peut les remplacer par leur somme qui est nulle.

33. Règle pratique. — Pour effectuer une somme, on applique la règle suivante, déduite des propriétés de l'addition.

1° *On supprime les groupes de deux nombres opposés s'il y en a.*

2° *On calcule séparément la somme de tous les nombres positifs, et celle de tous les nombres négatifs.*

3° *On additionne les deux nombres ainsi obtenus.*

En considérant la somme

$$S = (+3) + (+2) + (-5) + (-3) + (-1) + (+7),$$

on a successivement

$$S = (+2) + (-5) + (-1) + (+7) = (+9) + (-6) = 3.$$

34. Application. — *Quand* a = − 5, b = + 3, c = − 2, d = + 7, *trouver la valeur numérique de l'expression* a + (b + c) + d.

1° On effectue d'abord les opérations indiquées dans les parenthèses.

$$b + c = (+3) + (-2) = +1.$$

2° On remplace les parenthèses et les lettres restantes par leur valeur.

$$a + (b + c) + d = (-5) + (+1) + (+7).$$

3° On applique la règle de l'addition (**33**).

$$a + (b + c) + d = (+8) + (-5) = +3.$$

§ IV. — SOUSTRACTION.

35. Différence de deux nombres. — I. En arithmétique, *on appelle différence de deux nombres*, 15 et 5 par exemple, *le nombre qu'il faut ajouter au second pour obtenir le premier.*

Ainsi, c'est parce que $5 + 10 = 15$, qu'on peut écrire $15 - 5 = 10$.

II. En algèbre, on garde la même définition. Soit à calculer la différence $(-7) - (+5)$. L'égalité

$$(+5) + (-12) = -7$$

montre que -12 est le nombre qu'il faut ajouter à $+5$ pour obtenir -7. Donc -12 est la différence entre -7 et $+5$ et on peut écrire

$$(-7) - (+5) = -12.$$

III. On voit aisément que la différence -12 entre -7 et $+5$ aurait pu s'obtenir également en effectuant la somme $(-7) + (-5)$, c'est-à-dire en ajoutant au premier nombre l'opposé du second. D'où la règle :

Pour obtenir la différence de deux nombres relatifs, il suffit d'ajouter au premier l'opposé du second.

36. Démonstration de la règle de la soustraction. — Soit à calculer, par exemple, la différence $(+5) - (-3)$. Au premier nombre $+5$, ajoutons $+3$ qui est l'opposé du second nombre. Le résultat $(+5) + (+3)$ est la différence cherchée.

En effet, si l'on y ajoute le second nombre -3, on obtient la somme $(+5) + (+3) + (-3)$ et celle-ci est égale au 1er nombre $+5$, car on peut supprimer les nombres opposés $+3$ et -3.

Remarque. — En arithmétique, une soustraction n'est possible que si le 2e nombre est inférieur ou égal au 1er. En algèbre, une soustraction est toujours possible, car elle se ramène à une addition.

37. Simplification des écritures. — *Pour indiquer la somme de plusieurs nombres relatifs, il suffit d'écrire ces nombres avec leurs signes l'un derrière l'autre. On peut supprimer aussi le signe du premier nombre quand ce signe est un +.*

En effet, on peut écrire, par exemple,

$$(+5) + (-3) + (+7) = 5 - 3 + 7,$$

car ajouter -3 à $+5$ ou 5, revient à retrancher l'opposé de -3, qui est $+3$ ou 3; et ajouter $+7$ revient à ajouter 7.

38. Définition. — *On appelle* **somme algébrique** *une suite d'additions et de soustractions à effectuer dans l'ordre indiqué.*

Soit, par exemple, la somme algébrique

$$A = (+3) - (-6) + (-5) - (+7).$$

Les nombres $+(+3)$, $-(-6)$, $+(-5)$, $-(+7)$ sont appelés **termes** de cette somme algébrique.

Calculons la valeur de A. En effectuant les calculs dans l'ordre indiqué, on trouve :

$$(+3) - (-6) = (+3) + (+6) = +9$$
$$(+9) + (-5) = +4$$
$$(+4) - (+7) = (+4) + (-7) = -3.$$

Donc, $A = -3$.

39. Théorème. — ***Une somme algébrique peut être effectuée au moyen d'une suite d'additions.***

En effet, en considérant la somme algébrique A, on peut écrire $(+3) - (-6) + (-5) - (+7) = (+3) + (+6) + (-5) + (-7)$, car pour retrancher -6 et $+7$, il suffit d'ajouter les nombres opposés qui sont $+6$ et -7.

REM. — En considérant la somme algébrique $a - b + c - d$ dont les termes sont $+a$, $-b$, $+c$, $-d$, on montre d'une façon analogue qu'on a

$$a - b + c - d = (+a) + (-b) + (+c) + (-d).$$

Cette égalité exprime que la valeur d'une somme algébrique peut s'obtenir en formant la somme de ses termes, ou encore qu'*une somme algébrique est égale à la somme de ses termes.*

§ V. — MULTIPLICATION.

40. Règle des signes. — On démontre en arithmétique que pour multiplier une différence par un nombre, il suffit de multiplier chaque terme par le nombre et de faire la différence des résultats obtenus. On a, par exemple,

$$(7 - 3) \times 5 = 7.5 - 3.5. \tag{1}$$

Pour obtenir le produit de 7 — 3 par 5 — 2, on retranche du résultat précédent le produit de 7 — 3 par 2, c'est-à-dire 7.2 — 3.2. On trouve ainsi

$$(7 - 3) \times (5 - 2) = 7.5 - 3.5 - 7.2 + 3.2. \tag{2}$$

L'examen des égalités (1) et (2) montre qu'*un produit partiel a le signe + quand les deux facteurs qui l'ont formé ont les mêmes signes et le signe — quand ils ont des signes différents.*

Souvent, *cette règle des signes* est énoncée comme suit :

+ par + donne +
— par — donne +
+ par — donne —
— par + donne —

Cette règle des signes est importante, car elle intervient dans la définition du produit de deux nombres relatifs.

41. Définition. — *On appelle* **produit de deux nombres relatifs** *le nombre qu'on obtient comme suit :*

1° *On forme le produit des valeurs absolues des deux facteurs;*

2° *On affecte ce produit du signe + quand les deux facteurs sont de mêmes signes et du signe — quand ils ont des signes contraires.*

Exemples : $(+3).(+5) = +15$; $(+3).(-5) = -15$;
$(-3).(-5) = +15$; $(-3).(+5) = -15$.

Remarque. — *On supprime d'ordinaire le signe de la multiplication* quand on opère sur des lettres ou quand le multiplicateur seul est littéral.

Ainsi, $a \times b$ et $3 \times a$ s'écrivent ab et $3a$.

42. Cas particuliers. — I. Si l'un des deux facteurs d'un produit est nul, le produit est nul.

II. Si l'un des facteurs est + 1, le produit est égal à l'autre facteur.

III. *Pour multiplier un nombre par — 1, on change son signe.*

IV. *Un nombre ne change pas quand on le multiplie deux fois par — 1.* — Ainsi, en considérant le nombre — 7, on a

$$(-7) \times (-1) = +7; \ (+7) \times (-1) = -7.$$

43. Définition. — *On appelle* **produit de plusieurs nombres relatifs** *rangés dans un certain ordre, le nombre qu'on obtient en multipliant le premier facteur par le second, le produit obtenu par le troisième et ainsi de suite jusqu'au dernier.*

Soit à calculer le produit $(+3).(-2).(+5)$. On a

$$(+3) \times (-2) = -6; \ (-6) \times (+5) = -30.$$

Donc, on a $\quad (+3).(-2).(+5) = -30.$

En tenant compte de ce résultat, on voit qu'on a aussi

$$(+3).(-2).(+5).(-1) = (-30) \times (-1) = +30.$$
$$(+3).(-2).(+5).(-1).(-4) = (+30) \times (-4) = -120.$$

44. Règle pratique. — Les exemples précédents montrent que le signe d'un produit ne dépend que du nombre de facteurs négatifs :

il est positif quand il y a 0, 2, 4, ... facteurs négatifs;

il est négatif quand il y a 1, 3, ... facteurs négatifs.

De là, on déduit la règle suivante :

Pour faire le produit de plusieurs nombres relatifs, on fait le produit de leurs valeurs absolues et on lui donne le signe + ou le signe —, selon que le nombre de facteurs négatifs est pair ou impair.

45. Propriétés de la multiplication. — Les propriétés fondamentales de la multiplication des nombres relatifs sont les mêmes que celles de la multiplication des nombres arithmétiques.

I. Dans un produit de plusieurs facteurs, on peut intervertir l'ordre des facteurs (*la multiplication est une opération commutative*).

II. Dans un produit de plusieurs facteurs, on peut remplacer deux ou plusieurs facteurs par leur produit effectué (*la multiplication est une opération associative*).

La propriété commutative se déduit de la règle pratique (44); la propriété associative se démontre alors comme la propriété associative de l'addition (31).

III. Pour multiplier une somme par un nombre, il suffit de multiplier chaque terme par ce nombre et de faire la somme des résultats *(la multiplication est une opération distributive par rapport à l'addition).*

En vertu de ces propriétés, on peut écrire :

$$abcd = adcb; \tag{1}$$

$$abcd = a \times (bc) \times d; \tag{2}$$

$$(a + b + c)m = am + bm + cm. \tag{3}$$

46. Conséquence. — *Dans un produit de plusieurs facteurs, on peut remplacer un facteur par plusieurs autres dont il est le produit,* car l'égalité (2) peut s'écrire

$$a \times (bc) \times d = abcd.$$

A titre d'application, justifier les égalités

$$(-8) \times (-375) \times (+2) = (-8) \times (-125) \times (+3) \times (+2)$$
$$= 1000 \times 6 = 6000.$$

47. Mise en évidence d'un facteur commun. — L'égalité (3) peut s'écrire

$$am + bm + cm = (a + b + c)m.$$

Tous les termes du premier membre de cette égalité renferment le facteur m. Quand on remplace le premier membre par le second, on dit qu'*on a mis le facteur commun* m *en évidence.*

§ VI. — DIVISION ET FRACTIONS.

48. *On appelle* **quotient** *de deux nombres* a *et* b, *le nombre* q *dont le produit par le diviseur* b *est égal au dividende* a.

On représente ce quotient par $a : b$ ou par $\frac{a}{b}$.

49. Règles. — I. Comme $a = bq$, la valeur absolue du dividende a est égale au produit des valeurs absolues du diviseur b et du quotient q. De là, on déduit la règle suivante :

On obtient la valeur absolue du quotient en divisant la valeur absolue du dividende par celle du diviseur.

II. De l'égalité $a = bq$, on déduit encore les conséquences suivantes : Si le dividende est positif, le diviseur et le quotient sont de mêmes signes; si le dividende est négatif, le diviseur et le quotient sont de signes contraires. On peut donc dresser le tableau ci-contre qui conduit à la règle des signes : *Deux nombres de mêmes signes ont un quotient positif; deux nombres de signes contraires ont un quotient négatif.*

DIVID.	DIVIS.	QUOT.
+	+	+
+	—	—
—	—	+
—	+	—

Voici des exemples :

$$\frac{+6}{+2} = +3; \quad \frac{-6}{-2} = +3;$$
$$\frac{+6}{-2} = -3; \quad \frac{-6}{+2} = -3.$$

50. Cas particuliers. — I. *Si le dividende seul est nul,* le quotient est nul. Ainsi, on a $0 : 5 = 0$, car $0 \times 5 = 0$.

II. *Si le diviseur seul est nul,* la division est impossible, car il n'existe pas de nombre dont le produit par zéro soit un nombre non nul.

III. *Si le dividende et le diviseur sont nuls,* n'importe quel nombre peut être considéré comme quotient de leur division, car le produit de n'importe quel nombre par zéro est nul.

Dans la suite nous ne diviserons jamais par zéro. *Quand le diviseur sera littéral, nous le supposerons toujours différent de zéro.*

51. *Deux nombres sont* **inverses** *quand leur produit est égal à* $+1$.

L'inverse d'un nombre a *différent de zéro est égal au quotient de l'unité par* a, car en multipliant ce quotient par le diviseur a, on retrouve le dividende $+1$.

Exemples : 3 et $\frac{1}{3}$; -2 et $-\frac{1}{2}$; $-\frac{2}{5}$ et $-\frac{5}{2}$.

52. Définition. — *On appelle* **fraction** *l'expression* $\frac{a}{b}$ *qui représente le quotient de deux nombres relatifs.*

Les nombres a et b sont *les termes* de la fraction. Le dénominateur b est toujours différent de zéro; s'il est égal à 1, on ne l'écrit pas : $\frac{a}{1}$ et a représentent donc le même nombre.

Les fractions algébriques jouissent de propriétés analogues à celles des fractions arithmétiques. Ces propriétés seront démontrées dans la suite (Chap. V). Le théorème suivant est particulièrement important.

53. Théorème. — ***On ne change pas la valeur d'une fraction en multipliant ou en divisant ses deux termes par un même nombre différent de zéro.***

On a, par exemple,

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \times (-3)}{8 \times (-3)} = \frac{-15}{-24}; \qquad \frac{-18}{9} = \frac{(-18):3}{9:3} = \frac{-6}{3}.$$

Conséquences. — I. Comme en arithmétique, ce théorème permet de *simplifier* une fraction et de *réduire plusieurs fractions au même dénominateur.*

II. On peut *changer les signes* des deux termes d'une fraction, sans changer sa valeur, car cela revient à les multiplier par -1

54. Addition et soustraction. — *Il est pratique de commencer par* **rendre les dénominateurs positifs** *s'ils ne le sont pas; on opère ensuite comme en arithmétique* — Exemple :

$$\frac{-1}{-15} - \frac{-2}{40} + \frac{3}{-75} = \frac{1}{15} - \frac{-1}{20} + \frac{-1}{25} = \frac{20}{300} - \frac{-15}{300} + \frac{-12}{300}$$
$$= \frac{20 + 15 - 12}{300} = \frac{23}{300}.$$

55. Multiplication et division. — *On applique les mêmes règles qu'en arithmétique.*

Exemples :

$$\frac{-2}{3} \times \frac{6}{-7} = \frac{(-2).6}{3.(-7)} = \frac{-12}{-21} = \frac{4}{7};$$
$$\frac{-3}{-4} : \frac{5}{3} = \frac{(-3).3}{(-4).5} = \frac{-9}{-20} = \frac{9}{20}.$$

Remarque. — *Diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse,* car la règle de la multiplication des fractions donne

$$\frac{a}{1} \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b} \quad \text{ou} \quad a \times \frac{1}{b} = a : b.$$

§ VII. — PUISSANCES ET RACINES.

56. Définitions. — **La n^e puissance** *d'un nombre est le produit de* n *facteurs égaux à ce nombre.*

La 5^e puissance de 3 est donc $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$.

L'exposant *d'une puissance est le nombre de facteurs égaux qui forment la puissance.*

Pour représenter une puissance d'un nombre, on écrit ce nombre, puis on place l'exposant à sa droite en haut. On a, par exemple,

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 \text{ (3 \textit{exposant} 5).}$$

57. Cas particuliers — I. La 2^e et la 3^e puissance d'un nombre s'appellent respectivement *carré* et *cube* du nombre.

II. On dit que la 1^{re} puissance d'un nombre est le nombre lui-même. On a donc $a = a^1$.

58. Racines. — Le carré de 5 étant égal à 25, on dit que 5 est *une racine carrée* de 25 et on écrit $5 = \sqrt{25}$.

En général, *un nombre* a *est appelé racine* n^e *de* A *si la* n^e *puissance de* a *est égale à* A; si a est positif, on écrit $a = \sqrt[n]{A}$.

L'expression $\sqrt[n]{A}$ est *un radical*; le signe $\sqrt[n]{\ }$ s'appelle aussi radical; le nombre n est *l'indice* du radical; l'indice 2 ne s'écrit pas.

Remarque. — *Un nombre négatif n'a pas de racine carrée,* car le carré d'un nombre est positif ou nul. Pour un motif analogue **(59)**, un nombre négatif n'a pas de racine 4^e, 6^e,...

59. Signes des puissances. — Les puissances d'un nombre sont des produits de plusieurs facteurs. Elles représentent donc un nombre *positif* ou *négatif* suivant que le nombre de facteurs négatifs est pair ou impair. Par suite :

1° *Toute puissance d'un nombre positif est un nombre positif.*

2° *Une puissance d'un nombre négatif est positive si l'exposant est pair, et négative si l'exposant est impair.*

Exemples : $(+2)^3 = 8$; $(-3)^2 = 9$; $(-5)^1 = -5$; $(-5)^3 = -125$

60. Théorème I. — ***Le produit de plusieurs puissances d'un même nombre est une puissance de ce nombre dont l'exposant est la somme des exposants des facteurs.***

Ainsi, on a $$a^3 \times a \times a^2 = a^{3+1+2} = a^6,$$
car le produit $a^3 \times a \times a^2$ est formé de six facteurs égaux à a.

61. Théorème II. — ***Le quotient de deux puissances d'un même nombre est une puissance de ce nombre ayant pour exposant l'excès de l'exposant du dividende sur celui du diviseur.***

Ainsi, on a $a^7 : a^4 = a^{7-4} = a^3$, car $a^3 \times a^4 = a^7$.

Ce théorème suppose que l'exposant du dividende soit supérieur à celui du diviseur.

Autres cas. — I. *L'exposant du dividende est égal à celui du diviseur.* — En appliquant le théorème précédent, on trouve que le quotient de a^n par a^n est a^{n-n} ou a^0. D'autre part, ce quotient vaut évidemment 1. Voilà pourquoi on *convient* d'écrire $a^0 = 1$.

II. *L'exposant du dividende est inférieur à celui du diviseur.* — Dans ce cas, on se contente de simplifier. On a, par exemple,

$$\frac{a^3}{a^7} = \frac{1}{a^7 : a^3} = \frac{1}{a^4}.$$

62. Théorème III. — ***Pour élever une puissance d'un nombre à une autre puissance, il suffit d'affecter ce nombre d'un exposant égal au produit des exposants.***

Ainsi, on a $(a^4)^3 = a^{12}$, car $(a^4)^3 = a^4 \times a^4 \times a^4 = a^{12}$ (60).

63. Théorème IV. — ***Pour élever un produit à une puissance, il suffit d'élever chaque facteur à cette puissance.***

Ainsi, on a $(a^2b^4c^3)^2 = a^4b^8c^6$, car
$$(a^2b^4c^3)^2 = a^2b^4c^3 \times a^2b^4c^3 = a^2 \times a^2 \times b^4 \times b^4 \times c^3 \times c^3 = a^4b^8c^6.$$

64. Théorème V. — ***Pour élever une fraction à une puissance, il suffit d'élever ses deux termes à cette puissance.***

On a, par exemple, $$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a.a.a}{b.b.b} = \frac{a^3}{b^3}.$$

EXERCICES

NOTION DES NOMBRES RELATIFS.

34. (37) Quelle est la valeur absolue des nombres $+2$, -1, $+5$, -10, -3?

35. (38) Des trois nombres -75, $+30$, -120, quel est le plus grand et quel est le plus petit en valeur absolue?

36. (39) Si a égale successivement -5, $+3$, 0, -1, -7, que vaut $-a$? Si $-a$ égale successivement $+9$, -7, $+1$, -4, que vaut a?

37. (40) Représenter les nombres $+2$; $-1{,}4$; $+4$; $-5{,}7$ et leurs opposés sur une droite orientée, l'unité de longueur étant le cm.

38. (41) Dessiner un thermomètre et figurer par des points les températures suivantes : 7^o, -10^o, 18^o, 23^o, -9^o. Un degré est représenté par 2 mm.

39. (42) Sur un axe orienté, indiquer par des points les dates suivantes rapportées à l'ère chrétienne : $+200$, -150, $+350$, -50. Un centimètre représentera 100 ans.

40. (43) Sur un axe, placer 4 points A, B, C, D, de manière que $AB = -40$, $BC = +70$, $CD = +120$. L'unité de longueur est le mm.

41. (44) Tracer un axe et y marquer 4 points A, B, C, D de manière que $AB = -5$, $BC = +9$, $CD = -3$. Trouver ensuite les distances algébriques AC, AD, BD. Prendre le centimètre pour unité de longueur.

42. (45) Sur une mire fixée à une pile d'un pont passant au-dessus de la Meuse, on a marqué 0 au niveau normal de l'eau; puis on l'a graduée en cm, positivement vers le haut et négativement vers le bas. Quel est le sens des indications $+4$, -27, $+123$, -120?

43. (46) Si l'on prend pour origine du temps l'heure de minuit dans la nuit du 31 décembre au premier janvier, par quels nombres relatifs doit-on représenter :

1er janvier, 3 h., 7 h., 15 h., 20 h.; 2 janvier, 4 h., 9 h., 20 h., 17 h.;

29 décembre, 7 h., 17 h., 12 h., 2h.; 31 décembre, 17 h., 5 h., 13 h., 12 h.

Figurer ces nombres sur un axe, en prenant pour unité de longueur le mm.

ADDITION.

44. (47) Effectuer les sommes suivantes :

1° $(-9)+(+5)$	4° $(+2)+(-7)$	7° $(+3{,}25)+(+4{,}75)$
2° $(-2)+(+10)$	5° $(-3)+(+5)$	8° $(-2{,}875)+(+9{,}375)$
3° $(+4)+(-25)$	6° $(-4)+(-12)$	9° $(+10{,}25)+(-39{,}75)$.

45. (48) Chercher la somme des nombres suivants :

1° -5 et 13	4° -7 et -13	7° $-9{,}7$ et $10{,}8$
2° 2 et -10	5° $-3{,}6$ et $2{,}4$	8° $7{,}2$ et $-10{,}7$
3° $\frac{2}{3}$ et $-\frac{5}{6}$	6° $-4\frac{1}{3}$ et $-2\frac{4}{7}$	9° $-\frac{3}{4}$ et $\frac{2}{7}$.

46. (49) Faire la somme des nombres relatifs suivants :

1° $+4, -7, -4, +8, +5, -1, -3$;
2° $-5, -8, +5, -9, -3, -2, +7$;
3° $+8{,}75, -5{,}65 + 12{,}35, -2{,}60, -7{,}25$;
4° $-2\frac{4}{5}, +\frac{3}{4}, -\frac{7}{5}, +\frac{3}{2}, -9\frac{3}{20}$.

47. (50) Calculer la somme $x = a + b + c + d + e$:
1° Quand $a = -7, b = -2, c = +3, d = +2, e = -9$;
2° Quand $a = -\frac{1}{6}, b = +\frac{2}{3}, c = +3, d = -1, e = -\frac{3}{4}$;
3° Quand $a = +3{,}25, b = -0{,}75, c = -0{,}9, d = +0{,}5, e = +2{,}7$.

48. (51) Exprimer algébriquement, en faisant usage de parenthèses :
1° La somme de 2 et 5, augmentée de 1;
2° La somme de -5 et 2, augmentée de -3;
3° Le nombre -3, augmenté de la somme de 2 et -4;
4° La somme de 7 et 3, augmentée de la somme de -1 et 3;
5° La somme de -4 et -10, augmentée de la somme de 7 et 15.

49. (52) Expliquer la signification des expressions suivantes :

1° $a + (b + c)$	3° $(a + b) + c$
2° $(a + b) + (c + d)$	4° $a + (b + c + d)$.

50. (53) Calculer la valeur numérique de ces expressions (**49**) :
1° Quand $a = -2, b = 1, c = 3, d = -5$;
2° Quand $a = \frac{2}{3}, b = 0, c = 4, d = -\frac{3}{5}$;
3° Quand $a = -5, b = 5, c = \frac{4}{7}, d = -\frac{2}{3}$.

51. (54) Représenter par des nombres relatifs les trajets successifs d'un cycliste qui, partant de Gembloux, fait successivement sur la grand-route Namur-Bruxelles 3 et 10 km dans la direction de Bruxelles, puis 20 km dans la direction opposée. Additionner ces nombres et interpréter le résultat.

52. (55) Un ballonnet s'élevant du sol, monte de 300 m, descend de 230 m, remonte de 560 m, descend de 400 m. Exprimer les montées et les descentes par des nombres relatifs, additionner et interpréter le résultat.

53. (56) Un thermomètre marque 10°; il monte de 7°, puis descend de 20°. Exprimer la température finale par une somme de nombres relatifs, effectuer et interpréter le résultat.

54. (57) Un négociant a 1200 fr en caisse. Il doit à ses fournisseurs 450 fr, 1245 fr, 565 fr. D'autre part des clients lui doivent 85 fr, 795 fr, 868 fr, 925 fr. Exprimer sa situation par une somme de nombres relatifs, effectuer et interpréter le résultat.

SOUSTRACTION.

55. (58) En appliquant la définition de la soustraction, faire la preuve des soustractions suivantes :

1° $(-3-(+2)=-5$ 4° $(+3)-(+10)=-7$

2° $(+7)-(-5)=+12$ 5° $(-6{,}25)-(-9{,}75)=+3{,}50$

3° $\left(+\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{3}{4}\right)=+\frac{17}{12}$ 6° $\left(-2\frac{1}{4}\right)-\left(-1\frac{3}{8}\right)=-\frac{7}{8}$.

56. (59) Effectuer les soustractions suivantes :

1° $(+3)-(-5)$. 4° $(-13)-(+20)$ 7° $(-2{,}6)-(+0{,}8)$

2° $(+2)-(+3)$ 5° $(-7)-(-3)$ 8° $(-7{,}25)-(-3{,}75)$

3° $\left(+\frac{9}{12}\right)-\left(+\frac{4}{3}\right)$ 6° $\left(-\frac{3}{20}\right)-\left(-\frac{7}{5}\right)$ 9° $\left(+16\frac{3}{4}\right)-\left(+7\frac{5}{8}\right)$.

57. (60) Quel nombre faut-il ajouter :

1° à $+7$ pour obtenir $+10$, -3, 0 ou $+5$?

2° à -4 pour obtenir $+20$, 0, -2 ou -20?

58. (61) Expliquer la signification des expressions suivantes :

1° $(a+b)-c$ 3° $(a-b)-(a+b)$

2° $(a-b)-c$ 4° $(a+b)+(a-c)$.

59. (62) Chercher la valeur numérique des expressions précédentes (**58**) :

1° Quand $a = -3$, $b = 2$, $c = -1$; 2° Quand $a = \frac{3}{4}$, $b = -\frac{2}{3}$, $c = 0$.

60. (66) Chercher la valeur numérique de $x = a - b + c - d$:

1° Pour $a = -48$;	$b = -30$;	$c = +85$;	$d = -12$;
2° Pour $a = -7$;	$b = +3$;	$c = -9$;	$d = +7$;
3° Pour $a = -35$;	$b = +24$;	$c = +18$;	$d = -17$;
4° Pour $a = +\frac{3}{4}$;	$b = -2\frac{1}{2}$;	$c = +\frac{7}{6}$;	$d = -4$;
5° Pour $a = -2{,}4$;	$b = -5{,}5$;	$c = +3{,}7$;	$d = -9{,}35$;
6° Pour $a = +3{,}4$;	$b = -2{,}9$;	$c = -6$;	$d = +2{,}9$.

61. (67) Même question pour la somme algébrique $a - b - c + d$.

62. (68) Expliquer la signification des expressions :

$$a - (b - c) + d \quad \text{et} \quad a + b - (c - d)$$

et chercher leur valeur numérique quand $a = -1$, $b = 3$, $c = -5$, $d = 4$.

MULTIPLICATION.

63. (69) Effectuer les multiplications suivantes :

1° $(+6) \times (-2)$

2° $(-4) \times (-5)$

3° $\left(-\frac{7}{3}\right) \times \left(+\frac{1}{4}\right)$

4° $\left(-\frac{5}{6}\right) \times \left(-\frac{9}{2}\right)$

5° $(-7) \times (-1)$

6° $(+15) \times (+2)$

7° $\left(-2\frac{1}{3}\right) \times \left(+\frac{5}{14}\right)$

8° $\left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right)$

9° $(+3) \times (-5) \times (-4) \times (+2)$

10° $(-8) \times (+2) \times (+7) \times (-5) \times (-3)$

11° $(+7) \times (-1) \times (-3) \times (-4) \times (-5)$

12° $(15 - 7 - 11 + 3) \times (-5)$.

64. (70) Calculer la valeur numérique du produit $abcd$:

1° Quand $a = +3$,	$b = -5$,	$c = -2$,	$d = +7$.
2° Quand $a = -5$,	$b = -1$,	$c = -3$,	$d = +10$.
3° Quand $a = -9$,	$b = -25$,	$c = +2$,	$d = -2{,}4$.
4° Quand $a = +2$;	$b = -\frac{14}{3}$;	$c = +\frac{5}{14}$;	$d = +\frac{1}{50}$.

65. (71) Calculer de deux manières différentes les expressions :

1° $(7 - 3 + 2) \times (+ 5)$ 3° $(- 12 + 21 - 7 + 5) \times (- 23)$
2° $(- 3 + 7 - 9) \times (- 11)$ 4° $(15 - 35 + 8 - 11) \times (+ 7)$.

DIVISION ET FRACTIONS.

66. (72) En appliquant la définition du quotient de deux nombres, vérifier les divisions suivantes :

1° $\dfrac{-15}{6} = -\dfrac{5}{2}$ 4° $\dfrac{-1}{-7} = \dfrac{1}{7}$ 7° $\left(-\dfrac{2}{3}\right) : \left(-\dfrac{5}{6}\right) = \dfrac{4}{5}$

2° $\dfrac{-15}{-12} = \dfrac{5}{4}$ 5° $\dfrac{3}{7} : \dfrac{6}{7} = \dfrac{1}{2}$ 8° $\dfrac{21}{15} : \left(-\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{14}{15}$

3° $\dfrac{8}{-14} = -\dfrac{4}{7}$ 6° $\left(-\dfrac{3}{4}\right) : \dfrac{3}{4} = -1$ 9° $\left(-\dfrac{56}{9}\right) : \dfrac{14}{3} = -\dfrac{4}{3}$.

67. (73) Quelle est la valeur du quotient $\dfrac{a}{b}$:

1° Pour $a = -7$, $b = +35$; 5° Pour $a = -5{,}58$, $b = +1{,}2$;

2° Pour $a = +228$, $b = -12$; 6° Pour $a = -\dfrac{3}{5}$, $b = -\dfrac{21}{7}$;

3° Pour $a = 0$, $b = -5$; 7° Pour $a = +2$, $b = 0$;

4° Pour $a = -28{,}6$ $b = -0{,}4$; 8° Pour $a = -7$, $b = -1$.

68. (74) Montrer que les expressions suivantes sont égales :

$$\frac{-6}{9},\ \frac{2}{-3},\ -\frac{20}{30},\ -\frac{-2}{-3},\ -\frac{10}{15}.$$

69. (75) Effectuer les opérations suivantes :

1° $\dfrac{-2}{3} + \dfrac{3}{7}$ 4° $\dfrac{9}{10} - \dfrac{3}{-40}$ 7° $\dfrac{-3}{4} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{7}{16}$

2° $\dfrac{-5}{-12} - \dfrac{7}{18}$ 5° $\dfrac{6}{-11} - \dfrac{7}{55}$ 8° $\dfrac{-7}{-9} - \dfrac{1}{-3} + 3$

3° $\dfrac{-7}{36} - \dfrac{-2}{3}$ 6° $2 - \dfrac{-9}{7} + \dfrac{-23}{28}$ 9° $\dfrac{-9}{4} + \dfrac{-9}{-4} + \dfrac{-3}{21}$.

70. (76) Effectuer les opérations suivantes :

1° $\dfrac{1}{-5} \times \dfrac{-15}{4}$ 4° $\dfrac{4}{5} \times \dfrac{-9}{8}$ 7° $\dfrac{-6}{7} \times \dfrac{5}{-2} \times \dfrac{-4}{-5}$

2° $\dfrac{3}{7} \times \dfrac{-11}{-6}$ 5° $\dfrac{2}{-5} \times \dfrac{3}{8}$ 8° $\left(\dfrac{-4}{9} - \dfrac{4}{-45}\right) \times \dfrac{9}{8}$

3° $\dfrac{32}{-4} \times \dfrac{-15}{8}$ 6° $\dfrac{-2}{3} \times 6 \times \dfrac{1}{-7}$ 9° $\left(3\dfrac{1}{7} - \dfrac{17}{14}\right) \times \dfrac{-2}{9}$.

71. (77) Effectuer les opérations suivantes :

1° $\frac{-4}{-5} : \frac{-2}{3}$ 3° $(-4) : \frac{-2}{5}$ 5° $\frac{-6}{7} : (-3)$

2° $\frac{-5}{7} : 3$ 4° $\frac{-6}{7} : \frac{-3}{8}$ 6° $\frac{-9}{-4} : \frac{3}{-2}$.

PUISSANCES.

72. (78) Réduire à une forme plus simple les expressions suivantes : aaa; aab; $3aa.2bb$; $abab$; $(abb)^2$; $(-aa)^2$; $(-3abbb)^3$; $(-2aab)^4$.

73. (79) Trouver le nombre des facteurs des produits suivants : $7a$; a^7; a^2; $2a$; a^3b; $5abc$; a^5; $5a$; $4a^3$; $3a^4$; $a(a+b)$; $a^2(a+b)$; $(a+b)^2$; $6a(a+b)^2$; $a^3(a+b)^4$; $7a^{n+1}$.

74. (80) Écrire sans exposant les expressions suivantes : a^2, $(-x)^3$, $(3x)^2$, $(ab)^4$, $(-ab)^3$, $(a-b)^2$, $x^2(x+y)^3$.

75. (81) Calculer la valeur de $x = a^n$ pour les valeurs suivantes de a et de n :

1° $a = -3, n = 4$ 4° $a = -1, n = 5$ 7° $a = -5, n = 3$

2° $a = 7, n = 2$ 5° $a = 6, n = 0$ 8° $a = -10, n = 4$

3° $a = -\frac{2}{7}, n = 2$ 6° $a = \frac{2}{3}, n = 5$ 9° $a = -\frac{2}{5}, n = 3$.

76. (82) Chercher la valeur numérique des produits suivants quand $a = +2$, $b = -1$, $c = +3$, $d = -2$ 4 :

a = 2
b = 1
c = 3
d = 4

1° $14a^2c$ 5° $-2a^3$ 9° $3ab^2c$ 13° $7a(b+c)$

2° $7ad$ 6° $-4a^2b^2$ 10° $-11abc$ 14° $-3ab^2(c-d)$

3° $\frac{5}{12}ab^2d$ 7° $-\frac{2}{5}ad$ 11° $\frac{2ab^2}{c^2}$ 15° $-\frac{4a^2}{b}(a-c)$

4° $\frac{2}{3}a^3b^2c$ 8° $-\frac{7ab^5}{2c}$ 12° $\frac{3(a+d)}{2b}$ 16° $\frac{7}{19}ad(b+d)$.

77. (83) Même question, quand $a = -5$, $b = \frac{2}{3}$, $c = 1, d = 0$.

78. (84) Effectuer les opérations suivantes :

1° $3^2.3^4$ 5° $(abc)^3$ 9° $4^3 : 4^2$ 13° $x^{m-2}x^4$

2° $(-2)(-2)^3$ 6° $(2a^2bc)^2$ 10° $5^4 : 5$ 14° $x^{m+2} : x^m$

3° $5.5^2.5^3$. 7° $(-ab^3)^3$ 11° $a^5 : a^2$ 15° $(-2)^{2n+1}$

4° $a^3a^4a^2$ 8° $(-3ax^2)^4$ 12° $x^4 : x^4$ 16° $x^{n+1}x^{n-1}$.

CHAPITRE III

Expressions algébriques.

§ I. — NOTIONS.

65. Définition. — *Une* **expression algébrique** *est un ensemble de nombres et de lettres avec l'indication d'opérations à effectuer.*

66. Expressions élémentaires. — Ce sont :

Une somme de plusieurs nombres : $a + b + c + d$.

Une différence de deux nombres : $a - b$.

Une somme algébrique : $a + b - c - d$.

Un produit de facteurs : abc.

Une puissance : a^n (n entier et positif).

Le quotient de deux nombres ou la fraction $\frac{a}{b}$ (b non nul).

Une racine d'un nombre positif : $\sqrt[3]{a}$.

67. Expressions composées. — Les expressions élémentaires représentent des nombres relatifs; on peut donc les additionner, les soustraire, etc. On obtient ainsi *des expressions algébriques composées.*

1re Convention : En général, pour indiquer qu'une expression doit entrer comme *un tout inséparable* dans une nouvelle expression, on emploie *les parenthèses, les barres de fraction et les radicaux.*

Exemples. — I. *Multiplier* a + b *par* c − d. — Ce produit s'écrit $(a + b)(c - d)$.

II. *Ajouter* b *au produit précédent, puis multiplier par* a + c. — On écrit

$$[(a + b)(c - d) + b](a + c).$$

On emploie les *crochets* pour ne pas devoir doubler les parenthèses.

III. *Diviser* a + b − c *par* a. — On écrit $(a + b - c) : a$ ou $\dfrac{a + b - c}{a}$.

IV. *Multiplier par* a *la racine carrée de* b + c. — On écrit $a\sqrt{b + c}$.

2ᵉ Convention : Toutefois, on ne met pas *un produit* entre parenthèses quand il est un terme d'une somme algébrique.

La même convention s'applique à une *puissance*, à un *quotient*, à un *radical*.

Ainsi, on écrit $ab - c^2 + \dfrac{a}{b}$ au lieu de $(ab) - (c^2) + \left(\dfrac{a}{b}\right)$.

68. Exemples. — Il n'est pas toujours facile pour un commençant de se rendre compte du sens d'une expression composée. C'est pourquoi nous expliquerons ici quelques exemples.

$5a - b$ est la *différence* entre $5a$ et b; $5(a - b)$ est un *produit* dont les facteurs sont 5 et $a - b$.

$a + bc$ est une *somme* dont les termes sont a et bc; $(a + b)c$ est un *produit* dont les facteurs sont $a + b$ et c.

$a - bc + d$ est une *somme algébrique*; ses termes sont a, $-bc$, $+d$; $(a - b)(c + d)$ est le *produit* des deux facteurs $a - b$ et $c + d$.

$a + b^2$ est la *somme* des deux termes a et b^2; $(a + b)^2$ est le *carré* de la somme $a + b$.

$\dfrac{a}{b} + c$ est une *somme* de deux termes $\dfrac{a}{b}$ et c; $\dfrac{a + c}{b}$ est une *fraction* ayant pour numérateur $a + c$.

$5ab^2$ est un *produit* dont les trois facteurs sont 5, a et b^2; $(5ab)^2$ est le *carré* du produit $5ab$.

$\sqrt{a + b}$ est la *racine carrée* de $a + b$; $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est la *somme* des racines carrées des nombres a et b.

69. Valeur numérique d'une expression. — *C'est le résultat que l'on obtient en remplaçant les lettres par des nombres et en effectuant ensuite* **dans l'ordre voulu** *les opérations indiquées.*

Exemples. — I. Soient $a = 16$, $b = 9$.

L'expression $5a - b$ est la différence entre $5a$ et b. Par suite, pour avoir sa valeur numérique, on devra calculer d'abord le produit $5a$, et ensuite en retrancher b. On trouve

$$5a - b = 5.16 - 9 = 80 - 9 = 71.$$

L'expression $5(a - b)$ est le produit de 5 par la différence $a - b$. Par suite, pour avoir sa valeur numérique, on devra calculer d'abord la différence $a - b$, et ensuite multiplier le résultat par 5. On trouve

$$5(a - b) = 5(16 - 9) = 5 \times 7 = 35.$$

II. En supposant $a = 16$, $b = 9$, $c = 2$, $d = 1$, on trouve d'une façon analogue :

$$a + bc = 16 + 18 = 34$$
$$a - bc + d = 16 - 18 + 1 = -1$$
$$a + b^2 = 16 + 81 = 97$$
$$\frac{a}{b} + c = \frac{16}{9} + 2 = \frac{34}{9}$$
$$5ab^2 = 5.16.81 = 6480$$
$$\sqrt{a+b} = \sqrt{25} = 5$$

$$(a + b)c = 25 \times 2 = 50$$
$$(a - b)(c + d) = 7.3 = 21$$
$$(a + b)^2 = 25^2 = 625$$
$$\frac{a + c}{b} = \frac{18}{9} = 2$$
$$(5ab)^2 = 720^2 = 518\,400$$
$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 4 + 3 = 7.$$

De ces exemples résultent les règles suivantes :

1re Règle. — *Lorsqu'une expression ne renferme ni parenthèses, ni barres de fraction, ni radicaux, on effectue :*

d'abord les produits, les quotients, les puissances;
puis, les additions et les soustractions.

2e Règle. — *Lorsqu'une expression renferme des parenthèses, des barres de fraction, des radicaux, on effectue d'abord les opérations indiquées*

entre parenthèses,
au-dessus et en dessous des barres de fraction,
sous les radicaux;

puis, les opérations restantes.

70. Applications. — I. Soit à chercher la valeur numérique de l'expression $(a + 2b)[3a - 2(3a^2 + 5ab)]$ pour $a = -2$, $b = 3$.

On trouve successivement :

$$3a^2 + 5ab = 3(-2)^2 + 5(-2).3 = 3.4 - 10.3 = 12 - 30 = -18$$
$$3a - 2(3a^2 + 5ab) = 3(-2) - 2(-18) = -6 + 36 = 30$$
$$a + 2b = -2 + 2.3 = -2 + 6 = 4$$
$$(a + 2b)[3a - 2(3a^2 + 5ab)] = 4 \times 30 = 120.$$

II. Quand $a = 4$, $b = 3$, on trouve :

$$\frac{a^2 + ab}{b^2 - ab} = \frac{16 + 12}{9 - 12} = \frac{28}{-3} = -\frac{28}{3}$$
$$a\sqrt{a^2 + b^2} = 4\sqrt{16 + 9} = 4\sqrt{25} = 4 \times 5 = 20.$$

71. Remarque. — Il peut arriver qu'une expression algébrique n'ait pas de valeur numérique pour certaines valeurs données aux lettres. On dit alors que l'expression n'est pas **définie** pour ces valeurs des lettres.

Ce cas ne se présente que si l'expression proposée contient l'indication d'une **opération impossible** : *division par zéro* (**50**), *extraction de la racine carrée, 4e ,6e, ... d'un nombre négatif* (**58**).

Ainsi pour $x = 3$, les expressions $\dfrac{x^2 - 5x + 9}{x - 3}$, $\dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ et $\sqrt{2 - x}$ ne sont pas définies.

72. Classification des expressions algébriques. — Une expression est *rationnelle* quand elle ne renferme aucun radical portant sur *des lettres*. Elle est *irrationnelle* dans le cas contraire.

Une expression rationnelle est *entière* quand, parmi les opérations indiquées, il ne se trouve aucune division par un diviseur *littéral*. Elle est *fractionnaire* dans le cas contraire.

Une expression rationnelle est *entière par rapport à une lettre* quand celle-ci n'entre dans aucun dénominateur. Elle est *fractionnaire par rapport à cette lettre* dans le cas contraire.

L'expression $\dfrac{3}{2}a^2b$ est entière; les expressions $\dfrac{a^2 - b}{c}$ et $a^2 - \dfrac{b}{c}$ sont fractionnaires, mais elles sont entières par rapport à a et b.

§ II. — MONOMES.

73. *On appelle* **monôme** *un produit de plusieurs facteurs.*

EXEMPLES : $3.a.(-4).b$ et $(-7).a.a^2.\left(-\dfrac{1}{3}\right).b.a.$

Pour simplifier l'écriture d'un monôme, on applique les propriétés d'un produit de plusieurs facteurs et des puissances :

1° *On remplace les facteurs numériques par leur produit qu'on place au commencement.*

2° *On groupe ensuite les puissances d'une même lettre et on les remplace par leur produit* (**60**).

On dit alors que le monôme est **réduit**.

EXEMPLES :

$$3.a.(-4).b = -12ab;$$
$$(-7).a.a^2.\left(-\frac{1}{3}\right).b.a = \frac{7}{3}a^4b.$$

74. Le coefficient *d'un monôme réduit est le facteur numérique qui précède les autres facteurs.*

Le coefficient de $\frac{7}{3}a^4b$ est $\frac{7}{3}$; celui de $-12ab$ est -12. Dans le monôme a^3bc, le coefficient est sous-entendu et vaut $+1$; celui de $-ab^2c^3$ est -1.

REMARQUE. — On considère parfois un monôme par rapport à certaines lettres; le produit des autres facteurs forme alors leur coefficient. Ainsi, dans le monôme $3ax^2$, le coefficient de x^2 est $3a$; de même, dans le monôme $2abx^2y^2$, le coefficient de x^2y^2 est $2ab$.

75. Degré d'un monôme entier. — Le degré d'un monôme entier par rapport à *une lettre* est l'exposant de cette lettre dans le monôme. Son degré par rapport *à plusieurs lettres* est la somme des exposants de ces lettres.

Le monôme $5a^2bc^3$ est du 2e degré par rapport à a et du 6e degré par rapport à toutes les lettres.

Le monôme $2a$ peut s'écrire $2ax^0$ (**61**) : il est donc de degré zéro par rapport à la lettre x. On dit encore qu'il est **indépendant** de x.

76. Monômes semblables. — Ce sont des monômes qui renferment la même partie littérale. Ils ne peuvent différer que par leurs coefficients.

$2ab^3$ et $-5ab^3$ sont des monômes semblables.

RÈGLE. — *Une somme algébrique dont les termes sont des monômes semblables, est égale à un monôme qui renferme la même partie littérale et qui a pour coefficient la somme des coefficients des monômes semblables.*

En effet, considérons la somme algébrique $7a - 3a + 2a$ dont les termes sont des monômes semblables. Tous les termes renferment le facteur commun a. En mettant ce facteur en évidence (**47**), on trouve

$$7a - 3a + 2a = (7 - 3 + 2)a = 6a.$$

§ III. — POLYNOMES.

77. Définition. — *Un polynôme est une somme algébrique dont les termes sont des monômes.* Un *binôme* n'a que deux termes; un *trinôme* en a trois.

L'expression $6x^3 - 2ax^2 + 7a^2x - a^3$ est un polynôme. Ses termes sont $+6x^3$, $-2ax^2$, $+7a^2x$, $-a^3$.

78. Propriétés d'un polynôme. — Comme toute somme algébrique, *un polynôme est égal à la somme de ses termes* (**39**). Ainsi, on peut écrire

$$6x^3 - 2ax^2 + 7a^2x - a^3 = (+6x^3) + (-2ax^2) + (+7a^2x) + (-a^3).$$

Par suite, dans un polynôme : 1° On peut intervertir l'ordre des termes; 2° on peut remplacer deux ou plusieurs termes par leur somme.

Nous nous servirons de ces deux propriétés pour *réduire* et *ordonner* les polynômes.

79. Réduction des termes semblables d'un polynôme. — *Réduire des termes semblables d'un polynôme* (s'il y en a), *c'est les remplacer par leur somme effectuée* (**76**).

Le polynôme $a^2 + 5b^2 + 2ab - 3a^2 - 5ab + 3ab$ renferme des termes semblables. En les réduisant, il devient

$$(1 - 3)a^2 + (2 - 5 + 3)ab + 5b^2 \quad \text{ou} \quad -2a^2 + 5b^2.$$

Un polynôme réduit est un polynôme dans lequel la réduction des termes semblables a été effectuée.

80. Polynôme ordonné. — Un polynôme est *ordonné par rapport à une lettre*, appelée *lettre ordonnatrice*, lorsque ses termes sont écrits dans un ordre tel que les exposants de cette lettre vont toujours en *croissant* ou en *décroissant* d'un terme au suivant.

Le polynôme $x^3 - 5ax^2 + 2a^2x - 5a^3$ est ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x et par rapport aux puissances croissantes de a.

Règle. — *Pour ordonner un polynôme, on réduit les termes semblables, puis on place les termes restants dans l'ordre voulu.*

Le polynôme $5a^2x^2 + x^4 - 3a^2x^2 + 2x^4 - 5a^2x^2 + a^3x - a^4$ peut s'écrire, en intervertissant l'ordre des termes et en groupant les termes semblables :

$$(x^4 + 2x^4) + (5a^2x^2 - 3a^2x^2 - 5a^2x^2) + a^3x - a^4$$

ou

$$3x^4 - 3a^2x^2 + a^3x - a^4.$$

Le polynôme précédent est **incomplet** : le terme du 3e degré en x manque. On pourrait le compléter en intercalant le terme $0.x^3$.

Remarque. — Avant d'effectuer une opération sur des polynômes, il importe de les réduire et de les ordonner. Les calculs ultérieurs en seront beaucoup facilités.

81. Degré d'un polynôme entier. — Le degré d'un polynôme entier par rapport à *une lettre* est donné par le plus fort exposant de cette lettre dans un même terme.

Son degré par rapport à *plusieurs lettres* est donné par la plus forte somme des exposants de ces lettres dans un même terme.

EXEMPLE : Le polynôme $2ax^4 - 5a^2x^2 + a^3$ est du 4e degré en x et du 3e degré en a. Il est du 5e degré par rapport aux lettres a et x.

REMARQUE. — Avant de chercher le degré d'un polynôme, il faut le réduire. Ainsi le polynôme $3x^2 + 5x - 3x^2 + 7$ semble être du second degré en x, alors qu'il est du premier degré.

82. Polynôme homogène. — Un polynôme est homogène par rapport à plusieurs lettres lorsque tous ses termes sont du même degré par rapport à ces lettres.

Le polynôme $ax^3 + x^4 - 2a^2x^2 - 5a^4$ est un polynôme homogène du 4e degré par rapport aux lettres a et x.

§ IV. — CALCUL ALGÉBRIQUE.

83. *Deux expresssions algébriques sont* **équivalentes** *lorsqu'elles prennent des valeurs numériques égales, quelles que soient les valeurs particulières attribuées aux lettres qui y entrent.*

Une égalité dont les deux membres sont des expressions équivalentes s'appelle **identité**. Quand on veut attirer l'attention sur le fait qu'une égalité est une identité, on remplace le signe $=$ par le signe $\equiv$.

Les égalités qui expriment les propriétés des opérations sur les nombres relatifs, sont des identités. On peut donc écrire

$$a + b \equiv b + a; \quad a + (b + c) \equiv a + b + c; \quad \text{etc.}$$

84. But du calcul algébrique. — *Le calcul algébrique a pour but de transformer une expression donnée en une autre équivalente, mais plus simple ou plus commode.*

Le chapitre IV sera consacré à l'étude du calcul algébrique des polynômes, et le chapitre V à l'étude du calcul algébrique des fractions. Cependant dans certains nos, nous nous limiterons aux polynômes rationnels entiers, que *nous appellerons simplement polynômes entiers*, ou aux expressions fractionnaires rationnelles.

L'addition, la soustraction et la multiplication de polynômes entiers conduisent toujours à des expressions équivalentes, car les règles que l'on applique pour effectuer ces opérations, sont déduites des propriétés des opérations sur les nombres relatifs.

EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES.

79. (85) Quelle distinction faites-vous entre :

1° $5a$ et a^5
2° a^2 et aa
3° $3a^2$ et $(3a)^2$
4° $4(a - b)$ et $4a - b$
5° $a - bc$ et $(a - b)c$
6° $4ab^3$, $4(ab)^3$ et $(4ab)^3$
7° $a - b^2$ et $(a - b)^2$
8° $ab + c$ et $a(b + c)$
9° $a - b + c$ et $a - (b + c)$
10° $a - \frac{b}{c}$ et $\frac{a - b}{c}$?

80. (86) Expliquer la signification des expressions algébriques suivantes.

1° $a - (b - c)$
2° $a + [b + (a - c)]$
3° $[(a - b) - c] + a$
4° $[a - (b + c)] + b$
5° $2a(b + c)^2$
6° $a^2 + \frac{b + c}{a}$
7° $\frac{a - b}{a} - \frac{a + b}{b}$
8° $(a - b) : (a + b)$
9° $(a^2 + ab + b^2)(a - b)$
10° $a^3 - abc + b^3 - c^3$
11° $(a - b)[a^2(a + b) + a^3] - b^4$
12° $a(a - b) + a[b - (c - d)]$
13° $\left(1 - \frac{a - b}{a + b}\right)\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}\right)$
14° $\left(3a - \frac{5b^2}{c}\right)^2 (b - c)^3$.

81. (87) Exprimer algébriquement :

1° Le double de x, le tiers de a, le double du carré de b, le carré de la somme de a et b, la moitié du produit de a par le carré de b.

2° Un nombre pair, un nombre impair, deux nombres consécutifs, deux nombres pairs consécutifs, trois nombres consécutifs dont le plus grand est a.

3° Le nombre qui surpasse x de 3; le nombre qui lui est inférieur de 5.

4° Le nombre qu'il faut ajouter à 7 pour avoir 12, ou $-$ 5, ou a.

5° Le nombre qu'il faut retrancher de 13 pour avoir 4, ou $-$ 7, ou x; les carrés des nombres trouvés.

6° Le nombre que l'on obtient en augmentant x de sa moitié et en multipliant le résultat par 5.

7° Le nombre que l'on obtient en retranchant la moitié de x du double de x.

8° Un nombre de deux chiffres composé de 4 dizaines et de 3 unités; de a dizaines et de b unités; ces nombres renversés.

9° Un nombre qui a b dizaines et dont la somme des chiffres est 10, ou $a + b$, ou $2a$, ou $3a + b$.

10° Une fraction dont les termes valent ensemble a et dont le dénominateur vaut b.

11° Le périmètre d'un rectangle dont le grand côté dépasse de a le petit côté b; l'aire de ce rectangle.

12° L'intérêt de la somme $a - b$ placée à p % pendant trois ans.

13° Le chemin parcouru en trois heures par un courrier qui fait x km en 5 h.

14° Le nombre par lequel il faut multiplier x pour obtenir $2a + b$.

82. (88) Si $a = -1$, $b = +2$, $c = -3$, $d = +4$, calculer la valeur numérique des expressions suivantes :

1° $a + b + c + d$

2° $a - b - c - d$

3° $ab + ac + ad - bc - bd + cd$

4° $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{c+d} + \dfrac{1}{a-c}$

5° $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} - \dfrac{c}{a} - \dfrac{d}{b}$

6° $\dfrac{b}{a} + \dfrac{d}{c} - \dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d}$

7° $abc - abd + acd - bcd$

8° $a^3 + b^3 - c^3 + d^3$

9° $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

10° $\dfrac{1}{a-b} - \dfrac{1}{c+d} + \dfrac{1}{d-b}$

11° $\dfrac{a^2 + ab + b^2}{a^3 - b^3} + \dfrac{c^2 - cd + d^2}{c^3 + d^3}$

12° $\dfrac{a^2 - ab + b^2}{a^3 + b^3} - \dfrac{c^2 + cd + d^2}{c^3 - d^3}$

83. (89) Si $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = +\dfrac{1}{3}$, $c = -\dfrac{1}{4}$, $d = +\dfrac{1}{5}$, calculer la valeur numérique des expressions suivantes :

1° $a(b + c) + c(b - c)$

2° $(a + b)(c - d) + abcd$

3° $3(a - b)^2 + 5(c + d)^2$

4° $\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{d} - \dfrac{d}{a}$

5° $\dfrac{a-b}{c+d} - \dfrac{c-d}{a+b}$

6° $2(a + b)^2 - 4(c - d)^2$

7° $(a^2 - b)(c^2 - d) - 4ab$

8° $(a + b - c + d)^2$

9° $\dfrac{a^2}{bc} + \dfrac{b^2}{cd} - \dfrac{c^2}{ad} - \dfrac{d^2}{ab}$

10° $\dfrac{a^2 - b^2}{c^2 - d^2} \times \left(\dfrac{2a}{d} - \dfrac{3b}{c}\right)$.

84. (90) Calculer la valeur numérique des expressions suivantes :

1° $6a^3b^2 - 5a^2b^3 + a^4b$, si $a = 5$, $b = -2$.

2° $5xy + 2x^2y - 3y^2 - 4x$, si $x = 3$, $y = 0{,}2$.

3° $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)$, si $a=3$, $b=0{,}2$, $c=-0{,}2$.

4° $[a^2-a(b-c)](a^2+b^2-c^2)$, si $a=-1$, $b=2$, $c=-3$.

5° $\dfrac{a^3-b^3}{a+b}-\dfrac{b^3+c^3}{b-c}+\dfrac{c^3-a^3}{a+c}$ si $a=-\dfrac{1}{3}$, $b=\dfrac{2}{5}$, $c=-\dfrac{1}{2}$.

MONOMES ET POLYNOMES.

85. (91) Écrire sans coefficient les expressions suivantes :

$2a$, $-3b$, $3xy$, $-5ab$, $4x^2$, $-2a^2b$, $3(a+b)$, $4(a-b)$, $2(3a+b)^3$.

86. (92) Écrire sans coefficient et sans exposant les expressions suivantes :

$3a^2$, $4b^2$, $-3a^3b^2$, $2a^2b^3x$, $2(x+y)^2$, $-4a^2(x^2-y^2)$, $3a^0(2x-y^2)^2$.

87. (93) Remplacer par un seul monôme les expressions suivantes :

1° $2a-5a+7a-10a$ 4° $-2a^2b+3a^2b-7a^2b+10a^2b$

2° $-x+3x-4x+9x$ 5° $4abc+2abc-4abc-7abc$

3° $-10x+2x+7x+x$ 6° $3a^2x-a^2x+2a^2x-4a^2x$.

88. (94) On donne les expressions :

1° $7a^2x^4$ 5° $2a^5-4a^3x^3+10ax-7a^5$

2° $2a^5x$ 6° $4ax^3-7a^2x^2+3a^3x-b^2x^4$

3° a^2b^2-ax 7° $ax^3+2a^2x-ax^3+ax$

4° $a^2x^2-ab^2x+b^4$ 8° $ax^2+x^2-a^2-ax^2$.

Trouver le degré de ces expressions. Quel est leur degré par rapport à a? par rapport à x?

89. (95) Ordonner par rapport aux puissances décroissantes de x les polynômes :

1° $7x^3+4y^3-3x^2y-xy^2$

2° $2x^4-3x^2-7x^2+x^3-2$

3° $x^4-x^2y^2-3xy^3+y^4+x^3y$

4° $25a^2x^2-3a^4-ax^3-4a^4-2a^3x+x^4$

5° $6x^5-3x^4-2x^4+5x^3-10x^2+6x^3$

6° $y^4+4x^3y-x^4-3x^2y^2+2xy^3$

7° $10x^4-15a^2x^2-5ax^3-4a^3x+6ax^3+2a^2x^2$

8° $-2x^2y^2+4x^3y+6x^4-9x^3y-6x^2y^2+2xy^3-y^4+3xy^3$.

90. (96) Les polynômes précédents sont-ils homogènes ou non? Sont-ils complets ou incomplets? Quels sont les termes qui manquent?

91. (97) Combien de termes renferme un polynôme complet et ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x, s'il est du 3ᵉ, du 7ᵉ ou du n^e degré en x?

92. (98) Ordonner par rapport aux puissances croissantes de a les polynômes :

1° $a^2 - 3a^3 - 5a^2 + 4a^3 + 3 + 7a^2 - 4$

2° $b^3 + 3a^2b + 3ab^2 + a^3 + 5a^2b - 3b^3 - 3ab^2$

3° $a^3 - ab^2 - b^3 + a^2b + 2a^3 + 2b^3 - 3ab^2$

4° $2a^2b^3 - 5a^3b^2 + 5ab^4 - 5a^4b - b^5 + a^5 + 5a^3b^2 - 3ab^4$.

CHAPITRE IV

Polynômes.

§ I. — ADDITION ET SOUSTRACTION.

85. Addition des monômes. — I. Exemple. — Soit à former la somme des monômes $+ 5a^2$, $+ 4ab$, $- 2a^2$. On a

$$(+ 5a^2) + (+ 4ab) + (- 2a^2) = 5a^2 + 4ab - 2a^2.$$

En effet :

$+ 5a^2$ peut s'écrire $5a^2$;
ajouter $+ 4ab$ revient à ajouter $4ab$;
ajouter $- 2a^2$ revient à retrancher son opposé $2a^2$.

En réduisant les termes semblables dans le résultat trouvé, on voit que la somme cherchée est $3a^2 + 4ab$.

II. Règle. — *Pour additionner des monômes, on les écrit à la suite l'un de l'autre; puis, on réduit les termes semblables, s'il y en a.*

86. Addition des polynômes. — I. 1ᵉʳ Exemple. — Soit à additionner les sommes $a + b + c$ et $d + e$. On a

$$(a + b + c) + (d + e) = a + b + c + d + e,$$

car dans une somme, on peut remplacer un terme par d'autres dont il est la somme.

II. 2e Exemple. — Soit à effectuer la somme

$$S = (3x^2 - 5x + 7) + (1 - x^2) + (2x - 3).$$

Chacun des polynômes peut être transformé en une somme (**78**) :

$$S = [(+ 3x^2) + (- 5x) + (+ 7)] + [(+ 1) + (- x^2)] + [(+ 2x) + (- 3)].$$

Pour effectuer la somme S, il suffit donc, comme dans le premier exemple, d'écrire à la suite l'un de l'autre les termes des trois polynômes. On trouve ainsi

$$S = (+ 3x^2) + (- 5x) + (+ 7) + (+ 1) + (- x^2) + (+ 2x) + (- 3)$$

ou (**85**) $$S = 3x^2 - 5x + 7 + 1 - x^2 + 2x - 3.$$

Dans ce résultat, on peut réduire les termes semblables. Il devient alors $2x^2 - 3x + 5$.

III. Règle. — *Pour additionner des polynômes, on les écrit à la suite l'un de l'autre en conservant les signes des différents termes; puis on réduit les termes semblables, s'il y en a.*

IV. Disposition pratique. — Après avoir ordonné les polynômes, on les écrit les uns en-dessous des autres, en plaçant les termes semblables dans la même colonne verticale. Il suffit alors d'effectuer.

$$\begin{array}{lrrr} & 3x^2 & - 5x & + 7 \\ & - x^2 & & + 1 \\ & & + 2x & - 3 \\ \hline \text{Somme :} & 2x^2 & - 3x & + 5. \end{array}$$

87. Retrancher un monôme. — I. Exemple. — Soit à retrancher le monôme $- 2a^2$ du polynôme $5a^2 - 3ab$. On a

$$(5a^2 - 3ab) - (- 2a^2) = 5a^2 - 3ab + 2a^2,$$

car pour retrancher le nombre $- 2a^2$, il suffit d'ajouter le nombre opposé $+ 2a^2$ ou $2a^2$.

En réduisant les termes semblables, le résultat devient $7a^2 - 3ab$.

II. Règle. — *Pour soustraire un monôme d'un polynôme, on l'écrit à la suite du polynôme, après avoir changé le signe du monôme à soustraire; puis on réduit les termes semblables s'il y en a.*

88. Retrancher un polynôme. — I. 1er Exemple. — Soit à effectuer la différence $a - (b - c)$. Elle est égale au polynôme $a - b + c$ que l'on obtient en écrivant à la suite de a les termes de $b - c$, après avoir changé leurs signes. Pour le prouver, il suffit de montrer qu'en ajoutant $b - c$ à $a - b + c$, on retrouve a (**35**).

En effet, on a

$$\begin{aligned}(a - b + c) + (b - c) &= a - b + c + b - c \\ &= a + (b - b) + (c - c) = a.\end{aligned}$$

II. 2e Exemple : De $4a^3b^2 + 3a - 2a^2b$ soustraire $3a - 6a^3b^2$.

En opérant comme pour le premier exemple, on trouve

$(4a^3b^2 + 3a - 2a^2b) - (3a - 6a^3b^2) = 4a^3b^2 + 3a - 2a^2b - 3a + 6a^3b^2$.

Dans ce résultat, on peut réduire les termes semblables. Il devient alors $10a^3b^2 - 2a^2b$.

III. Règle. — *Pour soustraire un polynôme d'un autre polynôme, on l'écrit à la suite de cet autre, après avoir changé les signes de ses termes; puis, on réduit les termes semblables, s'il y en a.*

IV. Disposition pratique. — Après avoir ordonné les polynômes, *on change les signes des termes du polynôme à soustraire*; puis, on l'écrit en-dessous de l'autre polynôme en plaçant les termes semblables dans la même colonne verticale. Il suffit alors d'effectuer l'*addition*.

$$\begin{array}{lrrr} & 4a^3b^2 & - 2a^2b & + 3a \\ & 6a^3b^2 & & - 3a \\ \hline \text{Différence :} & 10a^3b^2 & - 2a^2b. & \end{array}$$

89. Parenthèses. — En appliquant les règles de l'addition et de la soustraction, on trouve

$$a + (b - c) = a + b - c$$

et

$$a - (b - c) = a - b + c.$$

De ces égalités découlent ces deux autres règles :

1o *Dans un polynôme, on peut supprimer ou introduire des parenthèses précédées du signe +.*

2o *Dans un polynôme, on peut supprimer ou introduire des parenthèses précédées du signe —, à condition* **de changer les signes** *des termes qu'elles renferment.*

90. Parenthèses superposées. — On les fait disparaître successivement en appliquant les règles précédentes. On commence d'ordinaire par *les parenthèses intérieures.*

Exemple : $a - [b - (c - d)] + \{-[(a - b) - c]\}$

$= a - [b - c + d] + \{-[a - b - c]\}$

$= a - b + c - d + \{-a + b + c\} = a - b + c - d - a + b + c = \mathbf{2c - d}.$

EXERCICES

ADDITION.

Trouver la somme des expressions suivantes :

93. (99)
1° $a + 5b$ et $-3b$
2° $6a - 3b$ et $-3a$
3° $a + b$ et $a - b$
4° $-3a + 2b$ et $3a + 2b$
5° $4x^2 - 5y^2$ et $3xy + 2y^2$
6° $4ab^2 + 2ac$ et $-5ac + 2ab^2$
7° $3x^2 - 9$ et $8x - 45$
8° $-x + 3a$ et $x - 5a$
9° $7ab - 3ab^2$ et $-5ab + 2ab^2$
10° $3(a^2 - b^2)$ et $5(a^2 + b^2)$.

94. (100)
1° $3x, -7y, 3y, -y, 10x, -2y, -7x$
2° $3ab, -2a^2, 3b, 4b - 5ab, 2a^2$
3° $x^2, -\frac{3}{4}x^2, -\frac{2}{3}x^2, 2\frac{1}{2}, x^2 - 1$
4° $13a - 10b + 4c;\ \ a + 20b - c$
5° $-3x + 2y + z;\ 3x + 7y - 2z$
6° $4a^2 + ab + 5b^2;\ \ -6a^2 + 9ab - 3b^2$
7° $9a^3b^2 - 4a^5 + 3a^4b;\ \ 5a^5 - 9a^3b^2 - 2a^4b$
8° $4x^4y - 3x^3y^2 - 2x^5;\ \ 2x^3y^2 + 4x^5 - 8x^4y$.

95. (101)
1° $2x + 3y - z;\ \ -x + y + 2z;\ \ 3x - y + z$
2° $2a - b + 3c;\ \ a + 4b - c;\ \ 4a + 2b - 2c$
3° $x + 3y - 4z;\ \ 3x - y + z;\ \ 5x + y - 2z$
4° $2x^2 + 3 - x;\ \ 2x + x^2 - 5;\ \ 3x^2 - x - 3$
5° $-2x^2 + 4x + 2;\ \ x^2 - 6x + 3;\ \ 3x^2 + 3x - 5$
6° $x^3 + x - 2x^2 - 7;\ \ 3x^2 + 2 + 5x;\ \ x^3 + 6x + 2x^2$
7° $6x^4 + 3x^3;\ \ -2x^3 + 7x^2;\ \ -5x^2 - 2x;\ \ x^4 - x^3$
8° $-2x^3 + 2x^2y - 2xy^2 - y^3;\ \ x^3 - 8y^3;\ \ -4x^2y + 2xy^2$.

96. (102)
1° $\frac{3}{2}a^2b - \frac{3}{4}ab^2 + 2b^3;\ \frac{1}{2}a^3 - 2a^2b - \frac{3}{2}b^3;\ -\frac{3}{2}a^3 + ab^2 + \frac{1}{2}b^3$
2° $\frac{2}{3}xy + \frac{7}{5}y^2;\ \ -\frac{5}{8}x^2 + \frac{13}{5}y^2 - 2xy;\ \ \frac{3}{4}x^2 - \frac{19}{6}y^2 - \frac{1}{6}xy$
3° $\frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{5}y^2;\ \frac{5}{8}x^2 - \frac{1}{3}xy + \frac{3}{10}y^2;\ -\frac{3}{4}x^2 + \frac{14}{15}xy - y^2$
4° $\frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{4}b^2;\ \ \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{3}ab + \frac{1}{4}a^2;\ \ \frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}b^2$
5° $a^m + 6a^{m-1}b + 6a^{m-3}b^3 + 10a^{m-2}b^2 + b^4$
et $3a^{m-1}b + 5a^{m-2}b^2 + 3a^m - 5b^4 - 3a^{m-3}b^3$
6° $8a^{m-2}b^2 - 5a^m + 3a^{m-3}b^3 + 3b^4 + 6a^{m-1}b$
et $-7b^4 - 3a^{m-2}b^2 + 7a^{m-3}b^3 + 8a^m + 4a^{m-1}b$.

SOUSTRACTION.

97. (103) Soustraire :

1° $2x$ de $7x$	5° $-9y$ de $45y$
2° $-4y$ de $9y$	6° $12xy$ de $-7xy$
3° $13y$ de $-9y$	7° $-3x^2y$ de $6x^2y$
4° $2x$ de $-2x$	8° $-4x^2y^3z$ de $-9x^2y^3z$

98. (104) Opérer les soustractions suivantes :

1° De	$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$	retrancher	x^3-3xy^2
2° »	$6+x-x^2$	»	$4-x+x^2$
3° »	$4xy^2+y^3-9x^2y$	»	$x^3-3y^3-4xy^2-x^2y$
4° »	x^3+3x^2+x	»	$-x^4-x^3+3x$
5° »	$-x^3-x^4+x^5-x+1$	»	$x^4-1+x-x^2$
6° »	$8xy^3+2x^3y+5y^4$	»	$5x^3y+11xy^3-x^4-6y^4-3x^2y^2$.

99. (105) Combien doit-on ajouter

1° à $x-y$	pour	obtenir	x
2° à a^2-b^2	»	»	$2a^2$
3° à $x+y+z$	»	»	$x-z$
4° à x^3+x^2-x	»	»	$2x^3-x^2+2x$
5° à a^2+b^2-2ab	»	»	$4ab$
6° à a^2+b^2+2ab	»	»	$2a^2-b^2$
7° à a^2+b^2	»	»	a^2-b^2
8° à $2x^2+y^2-z^2$	»	»	$4x^2-y^2+2z^2$?

100. (106) On donne quatre polynômes :

1° $5x^2-3xy+y^2-3xz+2yz+z^2$;
2° $2x^2+5xy-3y^2+2xz-4yz+3z^2$;
3° $4x^2-7xy+5y^2-4xz-5yz+z^2$;
4° $2x^2+9xy-8y^2+3xz+3yz+2z^2$.

De la somme des deux premiers, retrancher la somme des deux derniers.

101. (107) On donne les polynômes :

$6x^2-3xy+2y^2-5xz+6yz-2z^2$; $x^2-xy+y^2+xz-yz-z^2$;
$2x^2+3xy-2y^2-3xz-4yz-5z^2$; $3x^2-6xy+3y^2-4xz+10yz+4z^2$.

Du premier, retrancher la somme des trois derniers.

PARENTHÈSES.

Faire disparaître les parenthèses et effectuer les réductions.

102. 1° $x^2 - (y^2 - z^2) + y^2 - (x^2 + z^2) - z^2 - (x^2 - y^2)$
(108) 2° $(4x^3 - 2x^2 + x + 1) - (-x^2 + 3x^3 - x - 7) - (x^3 - 4x^2 + 8 + 2x)$
3° $(2x - 3y + 4z) - (5z - 5x - 4y) + (y + z - 7x)$
4° $6x + 3y - (5x + 2y + 3z) + (-4x - 3y)$
5° $(6x + 5y) - (4x + y - 3z) - (2z + 5x + 3y)$
6° $3x^2y^2 + 4y^4 - (x^3y - 4x^2y^2 - 3xy^3 + 2y^4) - xy^3$
$- (4x^2y^2 + 3y^4) + 3x^4.$

103. 1° $x^2 - (y^2 - z^2) - [y^2 - (z^2 - x^2)] - [z^2 - (y^2 - x^2)]$
(109) 2° $[x^3 + y^3 - (3x^2y + 3xy^2)] - [(x^3 - 3x^2y) - (3xy^2 - y^3)]$
3° $(x + 2y - 6x) - [3y - (6x - 6y)]$
$- [(x - 3y) - (2x + 5y)]$
4° $[2x - (3y + z - 2t)] - [(2x - 3y) + (z - 2y)]$
$+ [2x - (3y + z) - 2t] - [(2x - 3y + z) - 2t]$
5° $7a - \{-3a - [4a - (5a - 2b)] - (-3b + 2a)\}$
6° $2a - (3b + 3c) - \{5b - (6c - 6b) + 5c - [4a - (2c - 5b)]\}.$

104. 1° $x^4 - \{4x^3 - [6x^2 - (4x - 1)]\}$
$- [x^4 + (4x^3 + 6x^2) - (4x - 1)]$
(110) 2° $[2x - (3y + z - 2)] - [(2x - 3y) + (z - 2)]$
$+ [2x - (3y + z) - 2] - [(2x - 3y + z) - 2]$
3° $a^5 - \{7 - (3a^4 - a^3)$
$- [8a^4 - (3a^2 - a + 3a^5 - 7) - 5] - 4\}$
4° $a + \{4b - [6c - (4d - 1)]\} - [(a + 4b) - (6c - 4d) - 1]$
5° $7x - [(a + x) - (a - x)] - \{2x - [(a - x) - (a + x)]\}$
6° $1 - (x - x^2) +$
$\{x^3 - x^4 - [(1 - x - x^2 - x^3 - x^4) - (2x^3 - 3x^2)]\}$
7° $2a^2 - [2b^2 - (a^2 + b^2)] - \{5b^2 - [3a^2 + (b^2 - 2a^2)]\}$
8° $x^4 - \{x^3 - [-4x^2 - (6x - 4) - 1]\}$
$- \{4x^3 - [6x^2 - (4x - 1)]\}.$

105. (111) Résoudre les équations suivantes :

1° $5x + (7 - x) = -1$
2° $8x + (x - 7) = 9x - (3 + 4x)$
3° $8x - (9 + 4x) - 5 = 7x - 6$
4° $0 = 14 + 2x - (3x + 6) - 8x$
5° $-9x = (7x + 15) - (10x - 8 + 5x)$
6° $-(10 - 8x) - (6 - 12x) = 2 - 4x$
7° $110 - (9x - 15) + 2x = 10 + [(5 - 7x) - 11x]$
8° $-[-(12x - 9) + 8x - 60] + (9 + x) = 0$
9° $x - [(3 - 6x) - (12x - 9)] = x + 15$
10° $(7x - 6) + [(5x - 4) - (2 - 3x) + x] = -4.$

§ II. — MULTIPLICATION.

91. Produit de monômes. — I. Exemple. — Soit à effectuer le produit

$$P = (-3a^2) \times 5ab^2 \times (-2b^3).$$

Dans un produit, on peut remplacer un facteur par d'autres dont il est le produit; on peut remplacer aussi plusieurs facteurs par leur produit effectué. En appliquant successivement ces deux propriétés, il vient :

$$\begin{aligned} P &= (-3) \times a^2 \times 5 \times a \times b^2 \times (-2) \times b^3 \\ &= 30 \times (a^2 \times a) \times (b^2 \times b^3). \end{aligned}$$

Mais le produit de plusieurs puissances d'un même nombre est une puissance de ce nombre dont l'exposant est la somme des exposants des facteurs. En remarquant que $a = a^1$, on a donc $a^2.a = a^3$ et $b^2.b^3 = b^5$; puis,

$$(-3a^2) \times 5ab^2 \times (-2b^3) = 30a^3b^5.$$

II. Règle. — Pour former le produit de plusieurs monômes :

1° *On écrit le produit de leurs coefficients en ayant soin d'observer la règle des signes.*

2° *On écrit à la suite les lettres qui figurent dans les monômes en affectant chacune d'elles d'un exposant égal à la somme des exposants qu'elle a dans les monômes.*

92. Produit d'un polynôme par un monôme. — I. Exemple. — Soit à effectuer le produit

$$(a^4 - 7a^2b^2 + 2b^4) \times 3ab.$$

Le multiplicande peut être transformé en une somme; on a

$$a^4 - 7a^2b^2 + 2b^4 = (+a^4) + (-7a^2b^2) + (+2b^4).$$

Pour multiplier cette somme par $3ab$, il suffit (**45**, III) de multiplier chacun de ses termes par $3ab$, ce qui donne

$$+3a^5b, \quad -21a^3b^3, \quad +6ab^5;$$

et de faire ensuite la somme des résultats obtenus, ce qu'on fait en les écrivant à la suite l'un de l'autre (**85**). Donc

$$(a^4 - 7a^2b^2 + 2b^4) \times 3ab = 3a^5b - 21a^3b^3 + 6ab^5.$$

II. Règle. — *Pour multiplier un polynôme par un monôme, on multiplie chaque terme du polynôme par le monôme et on fait la somme des résultats obtenus.*

93. Parenthèses. — De la règle de la multiplication d'un polynôme par un monôme, on déduit cette autre règle :

Pour faire disparaître des parenthèses précédées ou suivies d'un facteur, on multiplie tous les termes du polynôme entre parenthèses par ce facteur, puis on forme la somme des résultats.

Voici un exemple *de parenthèses superposées.*

$$3[-(-a^2) - 2b] + (-b)[2(a-b) - 6]$$
$$= 3[a^2 - 2b] - b[2a - 2b - 6] = 3a^2 - 6b - 2ab + 2b^2 + 6b$$
$$= 3a^2 - 2ab + 2b^2.$$

MULTIPLICATION DE DEUX POLYNOMES ENTIERS.

94. Théorème. — ***Pour faire le produit de deux polynômes, on multiplie chaque terme du premier par chaque terme du second et on forme la somme des résultats.***

En effet, dans le produit $(a + b - c)(x - y)$, on peut considérer $x - y$ comme représentant un nombre X. On a alors

$$(a + b - c)X = aX + bX - cX;$$

et, en remplaçant X par $x - y$,

$$(a + b - c)X = a(x - y) + b(x - y) - c(x - y).$$

Si on fait disparaître les parenthèses, le résultat devient

$$ax - ay + bx - by - cx + cy;$$

c'est la somme des produits obtenus en multipliant chaque terme du multiplicande par chaque terme du multiplicateur.

95. Produit de deux polynômes entiers. — On applique la règle suivante :

1° *On ordonne les deux polynômes de la même façon.*

2° *On multiplie le multiplicande successivement par chaque terme du multiplicateur.*

3° *On additionne les produits partiels en réduisant les termes semblables.*

Soit à multiplier $3x^3 + 3x - 1$ par $2x^2 + x - 3$. *Pour aciliter la réduction des termes semblables,* on dispose les calculs comme suit :

MULTIPLICANDE :	$3x^3 \qquad + 3x - 1$
MULTIPLICATEUR :	$2x^2 + x - 3$
produit par $2x^2$:	$6x^5 \qquad + 6x^3 - 2x^2$
produit par x :	$+ 3x^4 \qquad + 3x^2 - x$
produit par -3 :	$- 9x^3 \qquad - 9x + 3$
PRODUIT RÉDUIT :	$6x^5 + 3x^4 - 3x^3 + x^2 - 10x + 3.$

96. Propriétés du produit de deux polynômes entiers ordonnés. — Supposons que les deux polynômes soient entiers en x et ordonnés par rapport *aux puissances décroissantes* de x. Leur produit ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x, jouit des propriétés suivantes :

I. *Le premier terme du produit ordonné est le produit du premier terme du multiplicande par le premier terme du multiplicateur.*

En effet, le produit des premiers termes des deux polynômes est d'un degré en x plus élevé que tout autre produit partiel. Il en résulte que ce produit ne peut se réduire avec aucun autre terme et que c'est le premier terme du produit ordonné.

II. *Le dernier terme du produit ordonné est le produit du dernier terme du multiplicande par le dernier terme du multiplicateur.*

La démonstration est analogue à la précédente.

III. *Après réduction des termes semblables, le produit renferme encore au moins deux termes*, car nous venons de voir que le produit renferme deux termes irréductibles, le premier et le dernier.

IV. Si le multiplicande est du p^e degré en x et le multiplicateur du q^e degré en x, le produit sera du $(p+q)^e$ degré en x (I) et par suite, après avoir été ordonné, il renferme au maximum $(p+q+1)$ termes.

97. Produit de deux binômes du 1er degré en x. — Avec un peu d'habitude, on arrive à effectuer le produit de tels binômes sans écritures intermédiaires.

EXEMPLES. — I. *Soit à effectuer* $(x+7)(x+3)$.

Le produit est du second degré en x. Le coefficient du premier terme est 1; celui de x est $7+3=10$, c'est-à-dire la somme des termes indépendants; le dernier terme vaut $7.3=21$, c'est-à-dire le produit des termes indépendants. On a donc

$$(x+7)(x+3)=x^2+10x+21.$$

On trouve d'une façon analogue :

$$(x-4)(x+2)=x^2-2x-8;$$
$$(a-1)(a-3)=a^2-4a+3.$$

II. *Soit à effectuer* $(2x-3)(5x+1)$.

Le produit est du second degré en x. Le coefficient de x^2 est $2{,}5=10$; celui de x égale $-15+2=-13$; le dernier terme vaut $(-3).1$ ou -3. On a donc

$$(2x-3)(5x+1)=10x^2-13x-3.$$

PRODUITS REMARQUABLES.

98. Puissance d'un monôme. — Soit à élever au carré le monôme $3a^2b^3c$. Un monôme étant un produit de plusieurs facteurs, il suffit d'élever chaque facteur au carré (**63**).

$$(3a^2b^3c)^2 = 3^2 \times (a^2)^2 \times (b^3)^2 \times c^2.$$

Or (**60**), on a $(a^2)^2 = a^4$ et $(b^3)^2 = b^6$. Il vient donc

$$(3a^2b^3c)^2 = 9a^4b^6c^2.$$

Ainsi, **le carré d'un monôme** *s'obtient en formant le carré du coefficient et en doublant les exposants des facteurs littéraux.*

Les règles suivantes se démontrent d'une façon analogue.

Le cube *d'un monôme s'obtient en formant le cube du coefficient et en triplant les exposants des facteurs littéraux.*

La n^e puissance *d'un monôme s'obtient en formant la* n^e *puissance du coefficient et en multipliant par* n *les exposants des facteurs littéraux.*

EXEMPLES : $(-2ab^2x^3)^2 = 4a^2b^4x^6$; $(-a^3b^2x)^2 = a^6b^4x^2$.
$(4ab^2)^3 = 64a^3b^6$; $(-2ax^2)^3 = -8a^3x^6$;
$(2a^2bx^3)^5 = 32a^{10}b^5x^{15}$; $(-a^3b)^7 = -a^{21}b^7$.

99. Carré d'un binôme. — En effectuant, on trouve :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \qquad (1)$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2. \qquad (2)$$

Les égalités précédentes s'énoncent :

1° *Le carré d'une somme de deux nombres est égal à la somme des carrés des deux nombres, augmentée de leur double produit.*

2° *Le carré d'une différence de deux nombres est égal à la somme des carrés des deux nombres, diminuée de leur double produit.*

Il est utile de remarquer qu'on a

$$(-a-b)^2 = (a+b)^2 \quad \text{et} \quad (-a+b)^2 = (a-b)^2.$$

100. Identités remarquables. — Des identités (1) et (2), on déduit :

$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2a^2 + 2b^2$; $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$;
$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$; $(a-b)^2 + 4ab = (a+b)^2$.

101. Produit de la somme de deux nombres par leur différence. — En effectuant le produit $(a + b)(a - b)$, on trouve

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Donc *le produit de la somme de deux nombres par leur différence est égal à la différence des carrés de ces nombres.*

Cette règle est très importante. Voici quelques applications :

$$(a + 1)(a - 1) = a^2 - 1 \qquad (-a + 3)(-a - 3) = a^2 - 9$$
$$(3x - y)(3x + y) = 9x^2 - y^2 \qquad (-a - 2b)(-a + 2b) = a^2 - 4b^2$$
$$21 \times 19 = (20 + 1)(20 - 1) = 400 - 1 = 399$$
$$\begin{aligned}(a + b + c)(a + b - c) &= [(a + b) + c]\,[(a + b) - c] \\ &= (a + b)^2 - c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - c^2.\end{aligned}$$

102. Autres identités remarquables. — En effectuant, on trouve :

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;\\ (a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;\\ (a + b)(a^2 - ab + b^2) &= a^3 + b^3;\\ (a - b)(a^2 + ab + b^2) &= a^3 - b^3.\end{aligned}$$

103. Carré d'un polynôme. — ***Le carré d'un polynôme se compose de la somme des carrés de ses différents termes, augmentée du double produit des termes pris deux à deux.***

Considérons le polynôme $P = a + b + c + d$. On a

$$P^2 = (a + b + c + d)(a + b + c + d).$$

Pour effectuer ce produit, il suffit de multiplier chaque terme du premier facteur par chaque terme du second et de former la somme des produits partiels obtenus.

Prenons d'abord le même terme dans les deux facteurs. Nous obtenons ainsi les produits partiels a^2, b^2, c^2, d^2.

Nous obtenons ensuite deux fois et deux fois seulement le produit partiel ab, car nous pouvons prendre a dans le multiplicande et b dans le multiplicateur; ou encore, b dans le multiplicande et a dans le multiplicateur. Nous trouverons de même deux fois les produits partiels

$$ac, \quad ad, \quad bc, \quad bd, \quad cd.$$

Il vient donc finalement

$$P^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd.$$

Le raisonnement précédent s'applique à tout polynôme, quel que soit le nombre de ses termes.

Remarque. — Pour ne pas s'exposer à oublier des doubles produits, on forme le double produit de chaque terme par chacun de ceux *qui le suivent* (ou *qui le précèdent*). — On a, par exemple,

$$\begin{aligned}(x^2 - 3ax + 2a^2)^2 &= x^4 + 9a^2x^2 + 4a^4 - 6ax^3 + 4a^2x^2 - 12a^3x\\ &= x^4 - 6ax^3 + 13a^2x^2 - 12a^3x + 4a^4.\end{aligned}$$

EXERCICES

Effectuer les produits suivants :

106. (112)
1° $x^2y \times xy^2$
2° $x^3y^2 \times xy^3$
3° $x^3y^2z^4 \times x^2yz^2$
4° $(5axy^2)(-8a^2x^3y)$
5° $(3x^4y^3z^2t)(2xy^2z^2t^2)$
6° $(-x^2yz^3)(x^2y^3z)$
7° $(2x^3y^2z)(-3x^2y^4z^2)$
8° $(-x^4y^2z)(-x^3y^2z)$
9° $(4x^4x^2)(-3a^3y^2)(-16x^6y^9)$
10° $(-3x^2y^2z)(-4xy^3z^2)(-2x^3yz^3)$
11° $(-x^4y^2)(-4y^2z^2)(-5x^2y^3z)$
12° $(7x^2y^2z)(x^2z^2)(-y^2z^2)xy$.

107. (113)
1° $(3x^2y)(5xy^3)(-6xy^4)(-2x^2y^2)$
2° $(4a^4)(4ab^4)(-5b^2c)(2a^2)(-5a^3)(-3b^2)(-4a)(-5b)$
3° $(2xy^2c^3d^4)(-3x^2y^3c^4d^5)(-4x^3y^4c^5d^6)(-5x^4y^5c^6d^7)$
gang. 4° $(3a^3b^2c)(-4ab^2c^3)(5a^2b^3c)(-6b^3c^2)7a^2c$
5° $(2ab^3c^2d^5)(3a^3b^5c^4d)(-4a^3b^2c^3d)(-7a^4bc^3d^2)$.

108. (114)
1° $7a^2bc(3a+b-4c)$
2° $-2ab^2c^2(4a^3-3b^2+c)$
3° $3ay^2c^2(2a^3-3y^2+4c)$
4° $-5a^2b^3c^4(a-3b^2+2c^3)$
5° $-2ab^2c^3(2a^2-3b^3+4c^4)$
6° $-3x^2y(2x^2-4xy+2y^2)$
7° $-(4a^4-5a^2b^3+b^6)(-5a^3b^5)$
8° $-(9a^7b^5-11a^9b^8+a^{11}b^{13})24a^3b^2$.

Effectuer les expressions suivantes et réduire les résultats.

109. (115)
1° $91a^2b^2c^2 - 7a^2b(13bc^2 - 9b^2c) - 21b^3c(3a^2 - 2c^2)$
2° $9a^2bc(2ab^2c^2 - 5a^5b^6c^6) - 3a^3b^5c^7(a^8b^6c^4 - 13a^4b^2)$
3° $13a^2y^2(8a^5y^7 - 2a^4y^9) - 2a^4y^5(9a^3y^4 - 13a^2y^6)$
4° $(a + b - c)c + (a - b + c)b + (-a + b + c)a - 2[a(b - a) + b(c - b) + c(a - c)]$
5° $[x^2 + (n - 1)x + 1]x + [x^2 - (n - 1)x + 1]x$
6° $x[2x + y - (x + 2y)] + x[3x - 2y - (2x - 3y)] - x[x + 3y - (2x + 2y)]$.

110. (116)
1° $(2a+3c)(5a-3c)$
2° $(2ab+3cd)(4ab+3cd)$
3° $(5a^2b+9ab^2)(3a+4b)$
4° $(2x^2-3y^2)(5x^3-4y^3)$
5° $(3a^2+2b^2+3c^2)(4a^2+5b^2-6c^2)$
6° $(2a^3+4a^2+8a+16)(3a-6)$
7° $(4b^3+3b^2-2b+1)(b^2-5b+26)$
8° $(4a^2+2ab+b^2)(2a-b)$
9° $(4a^3+3a^2b+b^3)(2ab^2-a^2b)$
10° $(2ab^2-6a^2b-b^3-5a^3)(8ab^2-3b^3+3a^2b)$.

111. (117) Prévoir le *degré*, les *premier et dernier* termes, le *nombre maximum* de termes du produit réduit, puis effectuer :

1° $(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5)(a + b)$
2° $(a^5 - 5a^4x + 3a^3x^2 + 4a^2x^3 + 5ax^4 + x^5)(a - x)$

3° $(a^5 - 2a^4b + 3a^3b^2 - 3a^2b^3 + 2ab^4 - b^5)(a + b)$
4° $(x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5)(x - y)$
5° $(3a^3 - 4a^2b + 5ab^2 - 2b^3)(5a^2 + 4ab - 3b^2)$
6° $(x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3)(x^2 - 2ax + a^2)$
7° $(x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 1)(2x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 2x - 1)$
8° $(2x^3y - 3xy^3 + 3x^4 + 4x^2y^2 - 6y^4)(3x^3 - 5x^2y + xy^2 - 2y^3)$
9° $(4x^{m+1}y^{m-1} - x^{m-1}y^{m+1})(7x^{m-2}y^{m+2} + x^{m+2}y^{m-2})$.

112. (118) Effectuer les opérations suivantes et réduire :

1° $15x^2 + 24y^2 - (3x + 2y)(5x + 6y)$
2° $2xy + x(9x + 8y) - (8x - 9y)(5x + 7y) - (3x - 2y)(5x + 8y)$
3° $(3x - 6y)(4x - 3y) - [(2x - 5y)(6x - 11y) - (37y^2 - 6xy)]$
4° $(3x^3 - 2x^2 + x - 1)(5x^2 - 4x - 1) - (15x^4 - 12x^3 + 3x^2 - x - 1)(x - 1)$
5° $(x^2 - y^2)(2x^3 - 4x^2y - 5xy^2) - (y^2 - x^2)(4x^3 + 8x^2y + 5xy^2)$
6° $[(a - b)x^2 - (a - b)x + (a - b)][(a + b)x^2 + (a + b)x + (a + b)]$
7° $(a^2 - b^2)(2a - 3b + 5c) + (b - a)(3a^2 + 4bc - 5ac) + (b^2 - a^2)(4a - 3b + c)$
8° $(34a - 12b)(17a - 8b) - [(4a - 6b)(7a - 3b) - (5a - 8b)(7a - 6b)]$
9° $(x^2 - y^2)(2x^3 - 4x^2y - 5xy^2) - (y^2 - x^2)(4x^3 + 8x^2y + 5xy^2) + (x^2 - y^2)(9x^2y - 6x^3)$
10° $(2a^{2m} + b^n)(a^{2m} + 3b^n)(3a^{2m} + 2b^n)(2a^{2m} - 3b^n)$
11° $(3a^{2m+2} + 2a^{m+1})(2a^{2m} + 3a^{m-1})(2a^{2m+1} - a^m)$
12° $(2a^{3m+2} + 3b^{2n+1})(3a^{3m+3}b - ab^{2n+2})(4a^{3m+2}b^n - 3b^{3n+1})$.

113. (119) Écrire immédiatement les produits suivants :

1° $(x+3)(x+5)$	11° $(x^2+4)(x^2-1)$	21° $(2x-1)(x-3)$
2° $(x+5)(x-2)$	12° $(x^2-3)(x^2+5)$	22° $(3x-2)(2x-1)$
3° $(x-3)(x+2)$	13° $(x^2-8)(x^2-3)$	23° $(4x+3)(7x-2)$
4° $(x-4)(x-5)$	14° $(a^2-b)(a^2+2b)$	24° $(2x^2-3)(x^2-1)$
5° $(a+3)(a+2)$	15° $(x^2+a)(x^2+3a)$	25° $(2x^2+3)(x^2+2)$
6° $(a-4)(a+5)$	16° $(x^2-2a)(x^2-4a)$	26° $(x^2+x+2)(x+1)$
7° $(x+a)(x-b)$	17° $(a-2x)(a+x)$	27° $(x^2-x+3)(x-2)$
8° $(x-a)(x-b)$	18° $(a-3x)(a-x)$	28° $(x^3+x^2-x+2)(x+3)$
9° $(x-2a)(x+3a)$	19° $(2x+1)(x-5)$	29° $(x^2+3x+1)(x^2-1)$
10° $(x-3a)(x-5a)$	20° $(3x+2)(x+1)$	30° $(x^2+x-3)(x^2-x+1)$.

114. (120) Former le *carré*, le *cube* des monômes suivants :

1° $2a$	6° $-abx^2y$	11° $0{,}2x^2y^2z^2$
2° $-3a$	7° $2a^2y^3z^2$	12° $0{,}05x^2y^3z$
3° $7a^2b$	8° $-ab^2c^3$	13° $-2a^mb^{n+1}c^{n-1}$
4° $4ab^3c^2$	9° $-(-2a)$	14° $-4a^{2m-1}b^{n+2}c^{m+3}$
5° $-4a^3b^2c$	10° $-5x^2y^3z$	15° $5x^{m-1}b^{n-1}$.

115. (121) Former le *carré*, le *cube* des binômes suivants :

1° $x + y$	5° $1 - 4abc$	9° $a^m + b^n$
2° $x - a$	6° $x^2 - 3b^2$	10° $2a^{3m} - 3b^{2n}$
3° $2a + b$	7° $2ab^2c^3 - 5$	11° $- ab^{n+1} + a^{m+1}b$
4° $ax - by$	8° $- 0,3a^2 + 0,2b^2$	12° $ax^{m-1} - 2by^{n+1}$.

116. (122) Écrire immédiatement les produits suivants :

1° $(a + 3)(a - 3)$	8° $(a + b - c)(a + b + c)$
2° $(x - y)(x + y)$	9° $(a^2 + b^2 - ab)(a^2 + b^2 + ab)$
3° $(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$	10° $(2x - y - 3z)(2x + y + 3z)$
4° $(- ax + b)(ax + b)$	11° $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$
5° $(- 2a - 4b)(2a - 4b)$	12° $(a^2 - 4a + 4)(2 - a)$
6° $(2xy^2 + c^2)(2xy^2 - c^2)$	13° $(x^2 + 3)(x^4 + 9)(x^2 - 3)$
7° $(3a^2x^3 + 7b^2y^3)(3a^2x^3 - 7b^2y^3)$	14° $(a^2 + 4a + 4)(a + 2)$

15° $[7(a + b) + 6x][7(a + b) - 6x]$
16° $[3(a + b) + 5(c - d)][3(a + b) - 5(c - d)]$.

117. (123) Compléter les carrés dont font partie les binômes suivants :

1° $4x^2 + 4x$	5° $9a^6 - 30a^3b^4$	9° $16y^4b^2 - 16y^2b^2c$
2° $4a^2b^2 + 9$	6° $16a^2b^2 + 9a^4b^6$	10° $4(x - y)^2 + 81a^2$
3° $16a^4 - 8a^2y^2$	7° $a^{4m} + 4a^{2m}y^{3n}$	11° $16(2a + b)^2 - 40(2a + b)$
4° $9b^4 + 16y^6$	8° $4b^{4m} + 9y^{4n}$	12° $0,04a^2b^2 + 0,09a^4c^2$.

118. (124) Former les carrés des polynômes suivants :

1° $a + b + c$	5° $3x^2 + 4x + 3$	9° $x^3 - 5x^2 + 2x + 1$
2° $a - b + c$	6° $x^2 - 5x + 1$	10° $2 - x - x^2 + 3x^3$
3° $a - b - c$	7° $x^2 - 2x - 5$	11° $a - b + c - d$
4° $a - c + b + d$	8° $a^2 - b^2 + 1$	12° $2x^{m+1} - 3x^m + 4x^{m-1}$.

119. (125) Former le terme en x^3 de chacune des expressions suivantes :

1° $(x^2 - 3x + 2)(x^2 + x)$	4° $(x^2 - 3xy + 2y^2)(5x^2 + 2xy - 7y^2)$
2° $(2x^3 - 5x^2 + 2x - 4)^2$	5° $(x + y)^2(x - y)^2$
3° $(x^3 - 2x^2 + 4x - 8)(x + 2)$	6° $(x^2 - ax)^3 - (x^2 + ax)^3$.

120. (126) Effectuer les opérations suivantes :

1° $(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$
2° $(x^2 + 2x - 1)(x^2 - 2x + 1)$
3° $(a + 2b + c - d)(a - 2b + c + d)$
4° $(x^3 + x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + x - 1)$
5° $(a^2 + 2ab + b^2 - c^2)(2ab + b^2 + c^2 - a^2)$
$\qquad - (a^2 - 2ab + b^2 - c^2)(b^2 - a^2 + c^2 - 2ab)$

6° $(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)$
7° $(a + 2)(a^2 - 2a + 4) - (a - 2)(a^2 + 2a + 4)$
8° $(a + b)(a^2 + ab + b^2)(a - b)(a^2 - ab + b^2)$
9° $(x + y)^3 - (x - y)^3 - (x^3 - y^3) - (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
10° $(a + b + c)^2 - [(a - b - c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) + 4a(b + c)]$
11° $(a+b+c+d)^2+(a-b-c+d)^2+(a-b+c-d)^2+(a+b-c-d)^2$
12° $(a + b)^4 + (a^4 + b^4) - 2(a^2 + b^2 + ab)^2$
13° $a(b+c)(b^2+c^2-a^2)+b(c+a)(c^2+a^2-b^2)+c(a+b)(a^2+b^2-c^2)$
14° $[(x + 1)y - (x - 1)]^2 - [(y + 1)x - (y - 1)]^2$
15° $[(1 + x)^3 + (1 + x)^2y + (1 + x)y^2 + y^3]$
$\qquad - [3x(x + 1) + y(y + 1) + 2xy + 1]$
16° $(8a^3-x^6)(8a^3+x^6)-(4a^2-x^4)[2a(2a+x^2)+x^4][4a^2-x^2(2a-x^2)]$.

121. (127) Résoudre les équations suivantes :

1° $3(5x-8)=4(5x-7)-1$
2° $10(x+3)-4=5(3-x)-4$
3° $0{,}4(3x+1)=0{,}5(2{,}5x+0{,}5)$
4° $2(0{,}3x+11)=0{,}7(x+26)$
5° $0{,}4(5x-1)=0{,}6(2{,}5x+2)$
6° $(7-x)(4-x)=(1-x)(8-x)$
7° $(x-3)(x-4)=(x+4)(x-7)$
8° $(5-x)(x+4)=5-x^2$
9° $(x-1)(5x+2)=5(x^2+2)$
10° $(x+5)^2-(x-3)^2=32$
11° $x^2+30=(x+1)^2-59$
12° $(x+2)(x+3)=x^2+366$
13° $(x+5)^2-(x-5)^2=500$
14° $x^2-(50-x)^2=100$
15° $4[3x-4(x-2)]=x-3$
16° $4x(x-2)+1=(2x-1)^2$
17° $2(x+1)^2=[6-2(2-x)]x+6$
18° $12x-[4x-(x+108)]=36$
19° $3[x-2(x-3)]=2[x-2(x-2{,}5)]$
20° $2\{3x-2[x-5(x-1)+3]-5\}=x$
21° $5\{5[5(5x-4)-4]\}-4=21$
22° $3\{3[3(3x-2)-2]-2\}-2=1$.

PROBLÈMES A RÉSOUDRE.

122. (128) A, B et C doivent se partager 185 fr de manière que B ait 10 fr de plus que C et A 15 fr de plus que B. Chercher la part de chacun.

123. (129) Trois marchands ont gagné ensemble 425 fr; le 1er a eu 12 fr de plus que le 2e, et celui-ci 16 fr de plus que le 3e. Quel est le gain de chacun?

124. (130) Partager 1600 fr entre trois personnes de manière que la 1re ait 200 fr de plus que la 2e, et celle-ci 100 fr de plus que la 3e.

125. (131) Partager 3123 fr entre deux personnes de manière que la part de la 2e surpasse de 100 fr le triple de celle de la 1re.

126. (132) On a donné 60 noix à deux enfants; si le 1er en donnait 18 au 2e, celui-ci en aurait 5 fois autant que l'autre. Combien chaque enfant a-t-il reçu de noix?

127. (133) On a partagé 1650 fr entre 125 personnes; chaque homme a reçu 15 fr et chaque femme 10 fr. Combien y avait-il d'hommes et de femmes?

128. (134) Un entrepreneur donne 1520 fr à 25 ouvriers divisés en deux groupes; ceux du premier groupe reçoivent chacun 80 fr et ceux du 2e, 50 fr. Combien y a-t-il d'ouvriers dans chaque groupe?

129. (135) En vendant un objet 5,70 fr, on gagne 4 fois autant qu'on aurait perdu en le vendant 4,20 fr. Quel est le prix de cet objet?

130. (136) Il y avait dans une corbeille 3 fois autant de poires que de pommes; on ôte 8 fruits de chaque sorte et le nombre des poires est maintenant 5 fois celui des pommes. Combien y avait-il de pommes et de poires?

131. (137) Deux bergers ont ensemble 332 moutons. Le nombre de moutons du 1er surpasse de 8 le triple du nombre de moutons du second. Combien de moutons ont-ils chacun?

132. (138) Deux voyageurs A et B se mettent en route, le 1er avec 100 fr et l'autre avec 48 fr. A dépense 2 fois autant que B et possède alors 3 fois autant d'argent que B. Calculer la dépense de chaque voyageur.

133. (139) Le premier facteur d'un produit de deux nombres est 52. Si l'on augmente chaque facteur de 7, le nouveau produit surpasse de 581 le produit primitif. Trouver le second facteur.

134. (140) Partager 20 en deux parties telles que la somme du triple de l'une et du quintuple de l'autre soit 84.

135. (141) Un père a 25 ans de plus que son fils. Dans 20 ans l'âge du père sera le double de celui du fils. Quels sont les deux âges?

136. (142) Un père a 70 ans; son fils, 40. Combien y a-t-il d'années que l'âge du père était le triple de celui du fils?

137. (143) On a deux lingots d'or aux titres de 0,775 et 0,950. Combien de grammes doit-on prendre de chacun pour former 25 gr d'alliage au titre de 0,900?

138. (144) Trois nombres consécutifs sont tels que le double du plus petit, augmenté du triple du plus grand, dépasse de 11 le quadruple du moyen. Quels sont-ils?

139. (145) Un nombre est formé de deux chiffres dont la somme est 12. Si on ajoute 21 au double de ce nombre, on trouve le triple du nombre renversé. Quel est ce nombre?

140. (146) On a un capital de 1200 fr. On en place une partie à 5 % et le reste à 4 %. L'intérêt annuel est 52,50 fr. Trouver les deux parties.

§ III. — DIVISION.

104. Division d'un monôme par un monôme. — Le quotient de $-24a^6b^2c^3$ par $10a^4b^2$ est la fraction $\frac{-24a^6b^2c^3}{10a^4b^2}$. En simplifiant par 2, a^4 et b^2, il vient

$$\frac{-24a^6b^2c^3}{10a^4b^2} = \frac{-12a^2c^3}{5} = -\frac{12}{5}a^2c^3.$$

Cette simplification conduit à un monôme *entier*, parce que *le dividende contient tous les facteurs littéraux du diviseur avec des exposants au moins égaux à ceux qu'ils ont dans le diviseur.*

Quand le dividende satisfait à cette condition, on dit que le dividende est *divisible* par le diviseur et on écrit directement le quotient, en appliquant la règle suivante :

RÈGLE. — 1° *On divise le coefficient du dividende par celui du diviseur en tenant compte de la règle des signes.*

2° *Pour chaque facteur littéral, on applique la règle du quotient de deux puissances d'un même nombre* (**61**).

Une lettre *qui n'est que dans le dividende* se trouve dans le quotient avec le même exposant.

Une lettre *qui a le même exposant dans les deux termes* ne figure pas dans le quotient.

105. Théorème. — ***Pour diviser une somme algébrique par un nombre, il suffit de diviser chaque terme par ce nombre et de former la somme des résultats.***

En effet, on a

$$\frac{a - b + c}{p} = \frac{a}{p} - \frac{b}{p} + \frac{c}{p},$$

car

$$\left(\frac{a}{p} - \frac{b}{p} + \frac{c}{p}\right)p = a - b + c.$$

106. Division d'un polynôme entier par un monôme entier. — Soit à diviser $6a^4 - 8a^3 + 4a^2$ par $4a^2$. Le dividende est une somme algébrique. Nous appliquerons donc le théorème précédent et nous aurons

$$\frac{6a^4 - 8a^3 + 4a^2}{4a^2} = \frac{6a^4}{4a^2} - \frac{8a^3}{4a^2} + \frac{4a^2}{4a^2} = \frac{3}{2}a^2 - 2a + 1.$$

Le quotient est entier. On dit dans ce cas que *la division est possible.*

107. Mise en évidence d'un facteur commun. — Tous les termes du polynôme $a^2x^2 + abx^2 + b^2x^2$ renferment le facteur x^2. En divisant le polynôme par x^2, le quotient est $a^2 + ab + b^2$. On a donc

$$a^2x^2 + abx^2 + b^2x^2 = x^2(a^2 + ab + b^2).$$

RÈGLE. — *Lorsque tous les termes d'un polynôme ont un facteur commun, on peut mettre ce facteur en évidence : on écrit d'abord ce facteur et on le multiplie par le quotient du polynôme par le facteur mis en évidence.*

DIVISION DE DEUX POLYNOMES ENTIERS ORDONNÉS.

108. Cas particulier. — Considérons le polynôme

$$3x^3 + 4x^2 - 19x + 10 \qquad (1)$$

obtenu en multipliant le polynôme $3x - 2$ par un certain polynôme Q, qui était ordonné, comme les deux autres polynômes, d'après les puissances décroissantes de x.

Diviser le polynôme (1), *appelé dividende, par le polynôme* 3x — 2, *appelé diviseur, c'est chercher le polynôme* Q, *appelé quotient.*

Le dividende étant le produit du diviseur par le quotient, son premier terme est le produit du premier terme du diviseur par le permier terme du quotient (**96**). On obtiendra donc le premier terme du quotient en divisant le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur. Par suite, le premier terme du quotient est $3x^3 : 3x$ ou x^2.

Le produit du diviseur par x^2 est $3x^3 - 2x^2$. Retranchons ce produit du dividende. Le reste de la soustraction est $6x^2 - 19x + 10$, qui est appelé *premier reste partiel.* Ce premier reste partiel est d'un degré plus petit que le degré du dividende; de plus, il est le produit du diviseur par la somme des termes restants du quotient.

En opérant sur ce reste partiel et sur les restes partiels suivants comme on a opéré sur le dividende, on trouve successivement les divers termes du quotient et on aboutit finalement à un dernier reste partiel nul.

109. Règle. — Pour diviser un polynôme par un polynôme, on applique la règle suivante :

1° *On ordonne le dividende et le diviseur d'après les puissances décroissantes d'une même lettre.*

2° *On divise le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur; on obtient ainsi le premier terme du quotient.*

3° *On multiplie le diviseur par le terme trouvé et on retranche le produit du dividende.*

4° *On divise le premier terme du premier reste partiel par le premier terme du diviseur et on obtient le deuxième terme du quotient.*

5° *On multiplie le diviseur par le deuxième terme du quotient et on retranche le produit du premier reste partiel.*

6° *Les termes suivants du quotient s'obtiennent en opérant sur le deuxième reste partiel et sur les suivants comme on a opéré sur le dividende et le premier reste partiel.*

110. Disposition pratique.

$$
\begin{array}{lr|l}
\text{Dividende :} & 3x^3 + 4x^2 - 19x + 10 & 3x - 2 \\
\cline{3-3}
 & -3x^3 + 2x^2 & x^2 + 2x - 5 \\
\cline{2-2}
1^{er} \textit{ reste partiel :} & 6x^2 - 19x + 10 & \\
 & -6x^2 + 4x & \\
\cline{2-2}
2^{e} \textit{ reste partiel :} & -15x + 10 & \\
 & 15x - 10 & \\
\cline{2-2}
 & 0 & \\
\end{array}
$$

Le quotient cherché est $x^2 + 2x - 5$.

111. Cas général. — Soient A et B deux polynômes entiers en x et ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de cette lettre, A étant d'un degré au moins égal à celui de B. Appliquons à ces polynômes la règle précédente.

Le degré des restes partiels successifs va en diminuant. Nous aboutirons donc, ou à *un reste nul*, ou à *un reste* R *dont le degré est inférieur à celui de* B. Arrêtons alors l'opération.

Soit Q la somme des termes trouvés. A mesure que nous avons trouvé les divers termes de Q, nous avons retranché de A leurs produits par B. En tout, nous avons donc retranché le produit BQ du polynôme A. Cette remarque faite, examinons les deux cas qui peuvent se présenter.

1er Cas : *Le reste est nul.* — La différence A — BQ effectuée et ordonnée se réduit alors à zéro et le produit BQ, effectué et ordonné, reproduit *terme à terme* le polynôme A.

On dit que A est *divisible* par B et que Q est *le quotient.*

2e Cas : *Le reste* R *est un polynôme de degré inférieur à celui de* B. — La différence A — BQ effectuée et ordonnée se réduit alors à R et la somme BQ + R, effectuée et ordonnée, reproduit *terme à terme* le polynôme A.

Par extension Q est encore appelé *quotient* de la division de A par B; R est *le reste* de la division.

Remarque. — L'égalité A = BQ + R est une *identité* (**83**), car les deux membres représentent le même polynôme.

Exemple. — Soit à diviser

$$14x^5 - 27x^4 + 21x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \quad \text{par} \quad 2x^2 - 3x + 2.$$

En effectuant la division (Voir la disposition pratique au nº **110**), on trouve pour quotient $7x^3 - 3x^2 - x + 3$ et pour reste $13x - 5$.

112. Théorèmes. — *Si* A *est divisible par* B, A est le produit effectué et ordonné de B par le quotient Q. De là (**96**), on déduit les théorèmes suivants :

I. *Le degré du quotient par rapport à la lettre ordonnatrice est égal à l'excès du degré du dividende sur celui du diviseur.*

II. *Le premier terme du quotient est le quotient du premier terme du dividende par le premier terme du diviseur.*

III. *Le dernier terme du quotient est le quotient du dernier terme du dividende par le dernier terme du diviseur.*

Remarque. — *Si* A *n'est pas divisible par* B, *les deux premiers théorèmes restent applicables.* — En effet, A est la somme BQ + R effectuée et ordonnée. Or R est d'un degré moindre que B et que BQ. Le premier terme de A est donc le produit du premier terme de B par le premier terme de Q.

EXERCICES

141. (147) Effectuer les divisions suivantes :

1° $6xy : 3y$ — 6° $-8a^4b^4c^2 : 4a^3b^2c^2$ — 11° $x^4y^4z^4 : 2x^3y^2z^4$

2° $-12a^4b : 4a^2b$ — 7° $4a^5b^2 : 3a^3b^2$ — 12° $0,5ab^4 : (-0,4b^3)$

3° $6b^3x^3 : 3b^2x$	8° $-6x^3y^2z : 5xyz$	13° $0{,}25a^4b^5c : 0{,}05a^3b^3$
4° $\frac{3}{2}x^2y^4 : \left(-\frac{5}{6}xy\right)$	9° $0{,}4b^5c^3 : \frac{1}{25}b^2c^2$	14° $-\frac{5}{6}a^4b^5c^3 : (-0{,}25a^4b)$
5° $-\frac{1}{3}a^4b^5c : \frac{7}{12}bc$	10° $210b^7c^8 : \frac{70}{71}b^4c^5$	15° $0{,}35a^5b^4 : \left(-\frac{7}{8}a^4b\right)$.

142. 1° $(25b^7 - 20b^6c^3 + 5a^6b^4) : 5b^3$
(148) 2° $(-bcx^3 - 2b^2cx^2 - 3bc^2x) : (-bcx)$
3° $(6a^4b^3 + 12a^3b^4 - 6a^2b^5) : 3a^2b^3$
4° $(-4x^3y^2z^3 + 6x^2y^5z^3 - 8xy^2z^6) : (-2xy^2z^3)$
5° $(-12x^6y^4 + 12x^4y^5 - 18x^3y^6) : (-6x^3y^3)$
6° $(-8a^4b^3c^2 + 6a^5b^4c^3 - 8ab^2c^3) : (-2ab^2c)$
7° $(a^4bx^4y - 3a^3b^2x^3y^2 - 3a^2b^3x^2y^3 + ab^4xy^4) : abxy$
8° $\left(6a^5b^2 + \frac{2}{9}a^4b^3 - \frac{6}{7}a^3b^4\right) : \frac{2}{3}a^3b.$

143. 1° $\left(-\frac{4}{5}a^5 + \frac{7}{8}a^6 - \frac{3}{4}a^7 - \frac{1}{2}a^4\right) : \left(-\frac{1}{2}a^4\right)$
(149) 2° $[x^6(a^2 - b^2) - 2x^4(a^2 - b^2)^2 + 4x^2(a^2 - b^2)^4] : x^2(a^2 - b^2)$
3° $(15x^m - 5x^{2m} + 10x^{3m+1} - 20x^{4m-3}) : (-5x^{m-1})$
4° $(115x^{3m-1} - 46x^{3m} + 23x^{3m+1} - x^{3m+2}) : 23x^{3m-n}$
5° $(24a^mb^n - 12a^{2m}b^{2n} + 36a^{m+3}b^{n+4}) : 12a^mb^n$
6° $\left(\frac{1}{4}a^mb^n + 0{,}2a^{2m}b^{n+1} - \frac{3}{4}a^{3m}b^{n+2} + \frac{1}{2}a^{4m}b^{n+3}\right) : \left(-\frac{1}{2}a^mb^n\right).$

144. (150) Mettre en évidence les facteurs communs.

1° $ab + b$	11° $a(x^2 + y^2) - b(x^2 + y^2)$
2° $ma + ap$	12° $2bc^5 - 6b^2c^4 + 6b^3c^3 - 2b^4c^2$
3° $a^3x^2 - a^2x^3$	13° $3ab(bc)^3 - ab(bc)^2$
4° $4ac - 2ab$	14° $2a^3b^2 + 8a^3b^3 - 6a^4b$
5° $6a^2b + 4ab$	15° $3x^3y^2z - 9x^2y^3z^2 + 18x^4y^2z^2$
6° $24b^3c^5 - 36bc^2$	16° $a(b - c) - b(b - c) + c(b - c)$
7° $3a^3b^4 - 12a^2b^3$	17° $4x^ny^m + 2x^{n+2}y^{m+2}$
8° $15a^7b^2 - 10a^5b^3$	18° $5x^{n-1}y^{m+1} + 10x^ny^m + 25x^{n+1}y^{m-1}$
9° $3a^2bc^2 - abc^2$	19° $3x^{n+2}y^{m+2} + 6x^ny^m - 18x^{n-2}y^{m-2}$
10° $y(b - a) - x(b - a)$	20° $2a^{m+n}b^{m-n} + 4a^mb^m + 8a^{m-n}b^{m+n}$.

145. (151) Ordonner par rapport à x, les polynômes suivants :

1° $a^2x^3 - b^2x^3 + ab^2x^2 - a^2b^2x + a^3b^2 - a^2b^3$
2° $a^2x^2 - 2c^2dx + 2abx^2 + c^3x + b^2x^2 + cd^2x - a^2b^2$
3° $a^3x^3 - 3a^2bx^3 + 3ab^2x^3 - b^3x^3 + m^2x^2 + 2mnx^2 + n^2x^2$
4° $x^3 + a^2x^2 - 4ax^2 + 4x^2 - a^3$
5° $c^2x^2 - ac^2x + a^2cx + a^2c^2 - a^3c - 4a^4$
6° $ax^4 - bx^4 - ax^3 + ax^2 + 2bx^3 - ax - 3bx^2 + 4bx + a - 5b$

146. (152) Les divisions suivantes se font exactement. Dire quel est le *degré* du quotient par rapport à la lettre ordonnatrice, son *premier* et son *dernier* terme, le *nombre maximum* de ses termes : puis chercher le quotient.

1° $(35x^3 + 47x^2 + 13x + 1) : (5x + 1)$
2° $(6x^3 - 17x^2 + 14x - 3) : (2x - 3)$
3° $(a^7 - 3a^6 + a^5 - 4a^2 + 12a - 4) : (a^5 - 4)$
4° $(10a^3b^2 + a^5 - 5a^4b - 10a^2b^3 - b^5 + 5ab^4) : (a - b)$
5° $(3a^4 - 7a^3 - 18a^2 + 28a + 24) : (3a^2 + 8a + 4)$
6° $(14a^4 - 27a^3b - 3ab^3 + 21a^2b^2 - 2b^4) : (2a^2 - 3ab + 2b^2)$
7° $(-25a^3x - 2a^2x^2 + 12a^4 - 10x^4 + 7ax^3) : (4a^2 - 3ax + 2x^2)$
8° $(8a^5 - 17a^3b^2 - 22a^4b - 8b^5 + 48a^2b^3 + 26ab^4) : (2a^2 - 3ab - 4b^2)$
9° $(9x^8 - 130x^6 + 497x^4 - 520x^2 + 144) : (x^3 - 2x^2 - 9x + 18)$
10° $(3a^7 - 11a^6 + 7a^5 + 11a^4 - 2a^3 + a^2 - 28a + 15) : (3a^3 - 2a^2 - 5a + 3)$
11° $(a^5 - a^2b^3) : (a - b)$ 13° $(a^8 + a^4 + 1) : (a^2 - a + 1)$
12° $(a^5x^5 + y^5) : (ax + y)$ 14° $(x^6 - 1) : (x^3 + 2x^2 + 2x + 1)$.

147. (153) Les divisions suivantes ne se font pas exactement. Dire quel est le *degré maximum* du reste par rapport à la lettre ordonnatrice; puis effectuer la division.

1° $(6x^5 + 5x^4 - 25x^3 + 31x^2 - 12x + 5) : (2x^2 - 3x + 2)$
2° $(120x^4 + 154x^3 + 71x^2 + 14x + 8) : (6x^2 + 5x + 1)$
3° $(a^7 - 4a^6 + 2a^5 + a^4 - 3a^2 + 2a - 6) : (a^5 - 3)$
4° $(a^4 - a^3b - a^2b^2 - ab^3 - b^4) : (a - 2b)$
5° $(a^8 - 2a^5 + a^4 + 2a^3 + 1) : (a^6 + a^5 - a^3 + a + 1)$
6° $(3x^6 + 27x^5 - 9x^4 - 68x^3 + 36x^2 + 10x + 70) : (3x^5 - 8x^3 + 4x^2 + 8)$
7° $(24a^5 + 16a^4b - 12a^3b^2 + 4a^2b^3 + 10ab^4 + 4b^5) : (2a^2 - 2ab + b^2)$
8° $(16x^8 - 32ax^6 + 20a^2x^4 - 10a^3x^2 + 2a^4) : (8x^6 - 12ax^4 + 6a^2x^2 - a^3)$.

148. (154) Effectuer les divisions suivantes :

1° $[3x^2 - (3a + b - 3)x - 3a - b] : (x + 1)$
2° $[2x^2 + x(4a - b) + 2a^2 - ab] : (2x + 2a - b)$
3° $(6a^{4m} - a^{3m} - 82a^{2m} + 81a^m + 36) : (2a^m - 3)$
4° $(4a^{2m+4} + 6a^{2m+3} - a^{2m+2} + 5a^{2m+1} - 2a^{2m}) : (a^{m+1} + 2a^m)$.

149. (155) Effectuer les divisions suivantes et continuer l'opération jusqu'au sixième terme du quotient.

1° $1 : (1 + x)$ 3° $x : (1 - x^2)$
2° $x : (1 - x)$ 4° $(1 + 2x) : (1 - 3x)$.

§ IV. — PROPRIÉTÉS DES POLYNOMES ENTIERS EN X.

113. Remarques préliminaires. — I. On représente souvent les polynômes entiers en x par les symboles $P(x)$, $F(x)$, $f(x)$, ... qui se lisent P de x, grand F de x, petit f de x, ...

II. *Un polynôme entier en* x *représente un nombre déterminé, quelle que soit la valeur qu'on attribue à* x. Ainsi pour $x = 2$, le polynôme

$$P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - x - 5$$

est égal à -3.

La valeur numérique du polynôme $P(x)$ pour $x = 2$ est représentée par le symbole $P(2)$. On a donc ici $P(2) = -3$.

114. Théorème. — ***Le reste de la division d'un polynôme entier en x par le binôme $x - a$ est égal à la valeur numérique du polynôme pour $x = a$.***

Représentons par $P(x)$ le polynôme dividende, par $Q(x)$ le quotient et par R le reste de la division. Comme le diviseur $x - a$ est du 1er degré en x, le reste R sera de degré zéro par rapport à x; il ne renferme donc pas la lettre x.

Nous pouvons écrire l'identité

$$P(x) \equiv (x - a)Q(x) + R.$$

Les deux membres de cette identité prennent des valeurs numériques égales pour toute valeur de x. En remplaçant x par a, il vient

$$P(a) = (a - a)Q(a) + R.$$

Le terme R n'a pas changé, car il ne renferme pas x. Le terme $(a - a)Q(a)$ ou $0 \times Q(a)$ est nul. Il reste donc $R = P(a)$.

Remarques. — I. *Le reste de la division d'un polynôme entier en* x *par le binôme* x + a *est égal à la valeur numérique du polynôme pour* x = — a, car le diviseur $x + a$ peut s'écrire $x - (-a)$.

II. On obtient le reste de la division du polynôme $P(x)$ par un binôme d'une des formes $x \pm a$, en remplaçant x dans $P(x)$ *par le second terme du binôme changé de signe.*

115. Corollaire. — ***La condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme entier en x soit divisible par $x - a$ est que sa valeur numérique soit nulle pour $x = a$.***

Le corollaire précédent énonce d'abord *une propriété* (A) des polynômes entiers en x qu'on voudrait voir réalisée : *être divisible par* $x - a$. Il énonce ensuite une propriété (B) qui est *la condition* nécessaire et suffisante à cet effet : *la valeur numérique du polynôme pour* $x = a$ *est zéro.*

1° On dit *qu'une propriété* (B) *est une condition nécessaire d'une propriété* (A), *quand la propriété* (A) *entraîne la propriété* (B). Pour énoncer cette condition nécessaire, on prend la propriété comme hypothèse et la condition comme conclusion.

Condition nécessaire : *Si un polynôme entier en* x *est divisible par* $x - a$, *le polynôme s'annule pour* $x = a$.

En effet, si $P(x)$ est divisible par $x - a$, le reste R de la division est nul. Or on a $R = P(a)$. Donc $P(a)$ est nul et le polynôme s'annule pour $x = a$.

2° On dit qu'*une propriété* (B) *est une condition suffisante d'une propriété* (A), *quand la propriété* (B) *entraîne la propriété* (A). Pour énoncer cette condition suffisante, on prend la condition comme hypothèse et la propriété comme conclusion.

Condition suffisante : *Si un polynôme entier en* x *s'annule pour* $x = a$, *il est divisible par* $x - a$.

En effet, d'après l'hypothèse, on a $P(a) = 0$. Or $P(a)$ est égal au reste de la division. Donc le reste de la division est nul et $P(x)$ est divisible par $x - a$.

116. Exemples. — I. Le polynôme $F(x) = x^3 - 7x^2 + 8x + 3$ n'est pas divisible par $x - 1$, car on a $R = F(1) = 5$.

II. Le polynôme $F(a) = 2a^3 - 3a^2 + a + 6$ est divisible par $a + 1$, car on a

$$F(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 + (-1) + 6 = -2 - 3 - 1 + 6 = 0.$$

III. Le polynôme $x^3y^3 - 2x^2y^2 + 3xy - 2$ est divisible par $xy - 1$, car le dividende peut s'écrire $F(xy) = (xy)^3 - 2(xy)^2 + 3xy - 2$ et $F(1) = 0$.

117. Loi de formation du quotient. — Le quotient de la division du polynôme

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 \qquad (1)$$

par $x - a$ est du second degré en x (**112**); soit $b_0x^2 + b_1x + b_2$

ce quotient. Le reste de la division est indépendant de x; soit R ce reste. L'expression

$$(x - a)(b_0x^2 + b_1x + b_2) + R,$$

effectuée et ordonnée, doit reproduire terme à terme le dividende (1).

Or, en effectuant les calculs, on trouve

$$b_0x^3 + (b_1 - ab_0)x^2 + (b_2 - ab_1)x + R - ab_2.$$

On a donc

$$a_0 = b_0; \quad a_1 = b_1 - ab_0; \quad a_2 = b_2 - ab_1; \quad a_3 = R - ab_2;$$

ou bien :

$$b_0 = a_0; \quad b_1 = ab_0 + a_1; \quad b_2 = ab_1 + a_2; \quad R = ab_2 + a_3.$$

Si le dividende était du m^e degré en x, on aboutirait à des égalités analogues. On peut donc énoncer la règle suivante :

Le quotient de la division d'un polynôme entier en x, *de degré* m, *par le binôme* x — a *est un polynôme entier en* x, *de degré* m — 1. De plus :

1° *Le* COEFFICIENT DU PREMIER TERME *du quotient est le même que celui du premier terme du dividende.*

2° *Le* COEFFICIENT D'UN AUTRE TERME *du quotient s'obtient en multipliant le coefficient du terme précédent par* a *et en ajoutant au produit le coefficient du terme de même rang du dividende.*

3° *Le* RESTE *s'obtient en multipliant le dernier terme du quotient par* a *et en ajoutant au produit le dernier terme du dividende.*

REMARQUE. — La règle précédente est applicable quand le dividende est un polynôme *incomplet* : on commencera par rétablir les puissances manquantes en leur donnant zéro pour coefficient (**118**, II).

118. Applications. — I. *Diviser* $x^5 - 4x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 30$ *par* $x - 2$.

1° Le reste est : $F(2) = 2^5 - 4.2^4 + 2^3 - 2.2^2 + 2 + 30 = 0$.

2° Le quotient est du 4e degré. Pour trouver les coefficients, nous adoptons la disposition suivante :

Coeff. du dividende :	1	— 4	1	— 2	1	30	
Produits à ajouter :		2	— 4	— 6	— 16	— 30	
Coeff. du quotient :	1	— 2	— 3	— 8	— 15 ‖	0	= **Reste.**

Le quotient est $x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 8x - 15$.

Nous avons retrouvé une seconde fois le reste 0. C'est un indice que les calculs sont exacts.

II. *Diviser* $a^5 - 3a^3 + 2a^2 + 5a$ *par* $a + 2$.

1° Le reste est $F(-2) = (-2)^5 - 3(-2)^3 + 2(-2)^2 + 5(-2)$
$= -32 + 24 + 8 - 10 = -10$.

2° Le dividende est *un polynôme incomplet*. Complétons-le par des termes à coefficients nuls.

Coeff. du dividende :	1	0	−3	2	5	0	
Produits à ajouter :		−2	4	−2	0	−10	
Coeff. du quotient :	1	−2	1	0	5 ‖	−10	= **Reste.**

Le quotient est $a^4 - 2a^3 + a^2 + 5$.

III. Pour diviser le polynôme $8x^3 - 6x^2 - 3x - 9$ par $2x - 3$, on divise d'abord le dividende par 2, puis le résultat par $x - \frac{3}{2}$. On trouve comme quotient $4x^2 + 3x + 3$ et comme reste zéro.

119. Valeur numérique d'un polynôme entier en x. — On sait que la valeur numérique de $P(x)$ pour $x = a$ est égale au reste de la division de $P(x)$ par $x - a$. Or ce reste est le dernier nombre de la 3e ligne du tableau que l'on forme pour obtenir les coefficients du quotient de $P(x)$ par $x - a$. *On pourra donc calculer la valeur numérique de* $P(x)$ *pour* $x = a$, *en formant le tableau qui donne les coefficients du quotient de* $P(x)$ *par* $x - a$.

120. Quotients remarquables. — I. ***La différence des puissances semblables de deux termes est toujours divisible par la différence de ces deux termes.***

1° $F(x) = x^m - a^m$ est divisible par $x - a$, car $F(a) = a^m - a^m = 0$.

2° En appliquant la loi de formation du quotient, on trouve que ce quotient est

$$x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots + a^{m-2}x + a^{m-1}.$$

II. ***La somme des puissances semblables de deux termes n'est pas divisible par la différence de ces deux termes.***

1° $F(x) = x^m + a^m$ n'est pas divisible par $x - a$, car on a

$$F(a) = a^m + a^m = 2a^m.$$

2° On trouve le même quotient que dans le cas précédent. Par suite,

$$x^m + a^m = (x - a)(x^{m-1} + ax^{m-2} + \dots + a^{m-2}x + a^{m-1}) + 2a^m.$$

III. ***La différence des puissances semblables de deux termes n'est divisible par la somme de ces termes que si l'exposant commun est pair.***

1° Soit $F(x) = x^m - a^m$. On a

$$R = F(-a) = (-a)^m - a^m.$$

Si m est pair, on a $(-a)^m = a^m$ et $R = a^m - a^m = 0$.

Si m est impair, on a $(-a)^m = -a^m$ et $R = -2a^m$.

2° On trouve pour quotient

$$x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - a^3x^{m-4} + \dots \pm a^{m-1}.$$

Ce quotient a m termes. Si m est pair, le dernier terme est négatif; il est positif quand m est impair.

IV. ***La somme des puissances semblables de deux termes n'est divisible par la somme de ces termes que si l'exposant commun est impair.***

1° Soit $F(x) = x^m + a^m$. On a

$$R = F(-a) = (-a)^m + a^m.$$

Si m est impair, on a $(-a)^m = -a^m$ et le reste est nul.

Si m est pair, on a $(-a)^m = a^m$ et le reste est égal à $2a^m$.

2° On trouve le même quotient que dans le cas précédent.

REMARQUE. — Le quotient est toujours un polynôme homogène complet *du* $(m - 1)^e$ *degré en* x *et* a.

Tous ses termes sont positifs quand le diviseur est $x - a$; *ils sont alternativement positifs et négatifs quand le diviseur est* $x + a$.

121. Applications. — I. *Diviser* $x^8 - a^8$ *par* $x^2 - a^2$.

Le dividende peut s'écrire $(x^2)^4 - (a^2)^4$. Le reste est $(a^2)^4 - (a^2)^4$ ou 0. La division est possible et le quotient est

$$(x^2)^3 + a^2(x^2)^2 + (a^2)^2x^2 + (a^2)^3 \quad \text{ou} \quad x^6 + a^2x^4 + a^4x^2 + a^6.$$

II. *Diviser* $a^6x^{12} + 1$ *par* $a^2x^4 + 1$.

Le dividende peut s'écrire $(a^2x^4)^3 + 1^3$. Le reste est $(-1)^3 + 1^3 = 0$. La division est possible et le quotient est

$$(a^2x^4)^2 - 1.(a^2x^4) + 1^2 \quad \text{ou} \quad a^4x^8 - a^2x^4 + 1.$$

122. Exercices. — I. *Calculer la valeur de* a, *sachant que le polynôme* $F(x) = x^2 - 5x + a$ *est divisible par* $x - 3$.

On doit avoir $F(3) = -6 + a = 0$. Donc $a = 6$. Le quotient est $x - 2$.

II. *Déterminer* a *et* b *pour que le polynôme* $x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx - 9$ *soit divisible par le trinôme* $x^2 + x + 3$ *et trouver le quotient.*

Le quotient sera du second degré en x; son premier terme sera x^2 et le dernier -3 (**112**); il sera donc de la forme $x^2 + cx - 3$ et on aura

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx - 9 &= (x^2 + x + 3)(x^2 + cx - 3) \\ &= x^4 + (c + 1)x^3 + cx^2 + (3c - 3)x - 9. \end{aligned}$$

Le second membre doit reproduire terme à terme le 1er. On a donc :

$$c + 1 = 2, \; c = a, \; 3c - 3 = b; \text{ puis, } c = 1, \; a = 1, \; b = 0.$$

EXERCICES

Déterminer le reste et écrire le quotient des divisions suivantes :

150. 1° $(x^3 - 4x^2 + 4x - 1) : (x - 1)$
(156) 2° $(x^3 - 7x + 6) : (x - 1)$
3° $(2a^3 + 7a^2 - 6a - 5) : (a + 1)$
4° $(x^4 - 7x^2 - x + 6) : (x + 3)$
5° $(x^3 - 40x - 63) : (x - 7)$
6° $(a^4 + 6a^2x^2 - 4ax^3 - 4a^3x + x^4) : (a - x)$
7° $(2x^6 - 3x^5 - 9x^4 - 5x^3 + 12x^2 + 4x - 40) : (x + 2)$
8° $(x^5 - 10x^4y + 40x^3y^2 - 80x^2y^3 + 80xy^4 + 68y^5) : (x - 2y)$.

151. 1° $(6a^4 + a^2 - 15) : \left(a^2 - \dfrac{3}{2}\right)$
(157) 2° $(2x^6 + 7x^4 + 7x^2 + 2) : (x^2 + 1)$
3° $(a^8 + 8a^6 + 24a^4 + 32a^2 + 16) : (a^2 + 2)$
4° $(3x^5y^5 + 2x^4y^4 - 4x^3y^3 + 4x^2y^2 + 5xy) : (xy + 1)$
5° $(8a^3 + 16a^2 - 9) : (2a - 1)$
6° $(8x^3 - 8x - 3) : (2x + 1)$
7° $[x^3 + (a - 4)x^2 + 3x + 3a^2 - 3a] : (x + a - 1)$
8° $[x^3 + (1 - y)x^2 - 2x + y^2 - 2y] : (x - y + 2)$.

152. (159) Écrire immédiatement les quotients suivants :

1° $(x^6-1):(x-1)$
2° $(x^6-1):(x+1)$
3° $(x^6-1):(x^2-1)$
4° $(x^6+y^6):(x^2+y^2)$
5° $(64x^6-1):(2x+1)$
6° $(x^5+y^5):(x+y)$
7° $(x^7-y^7):(x-y)$
8° $(x^8-y^8):(x-y)$
9° $(x^8-y^8):(x^2+y^2)$
10° $(1-x^7y^7):(1-xy)$
11° $(x^8-y^8):(x^4-y^4)$
12° $(x^7y^7+1):(xy+1)$
13° $(x^7+2187):(x+3)$
14° $(32x^5+243):(2x+3)$
15° $(a^9+1):(a^3+1)$.

153. (160) Quelles divisions fournissent les quotients suivants :

1° $a+b$
2° $a-y$
3° x^2-xy+y^2
4° $1-x+x^2$
5° $a^3+a^2b+ab^2+b^3$
6° $a^3b^3+a^2b^2xy+abx^2y^2+x^3y^3$
7° $x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5$
8° $1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6$
9° $8-4x+2x^2-x^3$
10° $27+9y+3y^2+y^3$
11° $125x^3+25x^2y+5xy^2+y^3$
12° $1-ay+a^2y^2-a^3y^3+a^4y^4$
13° $x^4+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{x}{27}+\dfrac{1}{81}$
14° $a^{12}+a^8b^4+a^4b^8+b^{12}$
15° $x^7-x^6y+x^5y^2-x^4y^3+x^3y^4-x^2y^5+xy^6-y^7$
16° $a^8-a^7b+a^6b^2-a^5b^3+a^4b^4-a^3b^5+a^2b^6-ab^7+b^8$.

154. (161) Déterminer les coefficients littéraux de manière que les divisions suivantes s'effectuent sans reste; écrire ensuite le quotient.

1° $(x^2+ax+12):(x-3)$
2° $(x^2+ax+15):(x+3)$
3° $(x^3+ax^2+19x-12):(x-1)$
4° $(3x^4-ax^3+8x^2-2ax-20):(x-2)$
5° $(8x^4-3x+a):(2x-1)$
6° $(2x^3+ax^2+3x-1):(2x+1)$
7° $(x^3+ax^2+bx+6):(x-2)(x-3)$
8° $(4x^4+7x^3-ax^2+bx+24):(x-2)(x+4)$
9° $(x^4+ax^3+3x^2+2x+b):x(x+1)$
10° $(x^3-5x^2+ax+b):(x-1)^2$
11° $(x^3+ax^2-9x+b):(x+1)^2$
12° $(x^3+4x^2+ax+b):(x^2+x+1)$
13° $(4x^4+ax^3+7x^2+bx+3):(2x^2+x+1)$
14° $(2x^4-5x^3+ax^2-2x+4b):(2x^2-x-1)$.

155. (162) Quelle valeur faut-il donner à m pour que l'expression

$$x^3+y^3+z^3+mxyz$$

soit divisible par $x+y+z$? Trouver le quotient.

156. (164) Vérifier que les divisions suivantes sont possibles et trouver le quotient.

1° $[(a+b)^2-(c+d)^2+(a+c)^2-(b+d)^2]:(a-d)$
2° $[(a-b)(a+b-c)+(b-c)(b+c-a)]:(a-b+c)$.

§ V. — DÉCOMPOSITION EN FACTEURS.

123. La simplification des fractions et la résolution des équations demandent qu'on sache transformer un polynôme en un produit de facteurs. Cette décomposition n'est pas toujours possible et même quand elle est possible, elle peut présenter de grandes difficultés. Nous exposons ici quelques méthodes de décomposition, qui suffisent dans les cas élémentaires.

124. Mise en évidence des facteurs communs. — Lorsque tous les termes d'un polynôme renferment des facteurs communs, **on commence toujours** par les mettre en évidence (**107**).

EXEMPLES. — 1° $7a^2x^4 - 14a^2x^2 - 7a^3x = 7a^2x(x^3 - 2x - a)$;

2° $(x-1)(x^2-4) - (x-1)(x-2) + 5(x-1)$
$= (x-1)[x^2 - 4 - x + 2 + 5] = (x-1)(x^2 - x + 3)$.

125. Méthode des identités.

I. DÉCOMPOSITION D'UN BINÔME. — On applique les règles suivantes, dont les deux dernières sont déduites de l'étude des quotients remarquables.

1° *La différence des carrés de deux termes est égale au produit de la somme de ces termes par leur différence.*

EXEMPLES : $a^2 - 1 = (a+1)(a-1)$;
$4x^2y^2 - a^2 = (2xy + a)(2xy - a)$;
$a^4 - b^2 = (a^2 + b)(a^2 - b)$;
$x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$.

REMARQUE. — *La somme de deux carrés* $a^2 + b^2$ n'est pas décomposable en facteurs rationnels en a et b.

2° *La différence des puissances semblables de deux termes est toujours divisible par la différence de ces termes* (**120**).

EXEMPLES : $a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$;
$64x^6 - 27y^3 = (4x^2)^3 - (3y)^3 = (4x^2 - 3y)(16x^4 + 12x^2y + 9y^2)$.

3° *La somme des puissances semblables de deux termes,* **de degré impair,** *est toujours divisible par la somme de ces termes.*

EXEMPLES : $a^5 + 1 = (a+1)(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1)$;
$x^6 + y^6 = (x^2)^3 + (y^2)^3 = (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$;
$8x^3y^3 + 1 = (2xy)^3 + 1^3 = (2xy + 1)(4x^2y^2 - 2xy + 1)$.

II. Trinôme carré parfait. — On a

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2.$$

Un trinôme est carré parfait, quand il est formé des carrés de deux termes et du double produit de ces termes.

Il est le carré d'une *somme* si le double produit est *positif*; il est le carré d'une *différence* si le double produit est *négatif*.

Exemples : $x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2$;

$$- a^2 + 2ab - b^2 = -(a^2 - 2ab + b^2) = -(a - b)^2.$$

III. Quadrinôme cube parfait. — On se guide d'après les identités suivantes :

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3;$$
$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3.$$

Exemple : $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3 = (2x - 3y)^3.$

IV. Polynôme carré parfait. — Le carré d'un *trinôme* renferme les carrés des trois termes et en plus, les trois doubles produits de ces termes pris deux à deux. Le carré d'un *quadrinôme* renferme les carrés des quatre termes et en plus, les six doubles produits de ces termes pris deux à deux.

Exemples : $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2$;

$$x^2 + y^2 + 1 - 2xy + 2x - 2y = (x - y + 1)^2.$$

Avant d'essayer cette décomposition, il faut bien regarder les signes des termes. Ainsi, $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$ n'est pas le carré d'un trinôme.

126. Méthode des groupements. — I. *Avant d'appliquer les méthodes précédentes*, il peut être nécessaire de grouper *convenablement* les termes du polynôme. Voici des exemples.

1° $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy = (x^2 + y^2 + 2xy) - z^2 = (x + y)^2 - z^2$
$= (x + y + z)(x + y - z).$

2° $1 - a^2 + 2ab - b^2 = 1 - (a^2 - 2ab + b^2) = 1 - (a - b)^2$
$= (1 + a - b)(1 - a + b).$

3° $x^4 - 2x^3 + x - 2 = (x^4 - 2x^3) + (x - 2) = x^3(x - 2) + (x - 2)$
$= (x - 2)(x^3 + 1) = (x - 2)(x + 1)(x^2 - x + 1).$

II. Lorsque le polynôme provient d'un produit dont le développement a été réduit, il est nécessaire, avant d'opérer le groupement, de *décomposer certains termes*. Voici des exemples.

1° $x^3 + 4x + 5 = (x^3 + 1) + (4x + 4)$
$= (x + 1)(x^2 - x + 1) + 4(x + 1) = (x + 1)(x^2 - x + 5).$

2° $a^3 + 3a^2 - 4 = (a^3 - a^2) + (4a^2 - 4) = a^2(a - 1) + 4(a^2 - 1)$
$= (a - 1)[a^2 + 4(a + 1)] = (a - 1)(a^2 + 4a + 4) = (a - 1)(a + 2)^2.$

III. Il peut être nécessaire *d'ajouter et de retrancher une même quantité* pour rendre possible le groupement.

EXEMPLE : $a^4 + b^4 = (a^4 + b^4 + 2a^2b^2) - 2a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2 - (ab\sqrt{2})^2$
$= (a^2 + b^2 + ab\sqrt{2})(a^2 + b^2 - ab\sqrt{2})$.

127. Méthode des diviseurs binômes. — Soient les polynômes
$x - a$ et $P(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m$
dont les coefficients sont *des nombres entiers.*

1° *Si* P(x) *est divisible par* x — a, *le nombre* a *est un diviseur de* A_m, car si

$$P(a) = A_0a^m + A_1a^{m-1} + \ldots + A_{m-1}a + A_m = 0,$$

on a $$A_m = -a(A_0a^{m-1} + A_1a^{m-2} + \ldots + A_{m-1}).$$

2° Pour trouver les diviseurs de la forme $x - a$ de $P(x)$, on commencera donc par chercher les diviseurs (positifs et négatifs) de A_m; on examinera ensuite quels sont ceux qui annulent $P(x)$.

EXEMPLES. — 1° *Décomposer* $x^3 - 3x^2 + 3x - 2$.

Les diviseurs de 2 sont $\pm 1, \pm 2$. Des essais successifs montrent que le polynôme donné ne s'annule que pour $x = 2$; le seul facteur binôme est donc $x - 2$ et on a

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = (x - 2)(x^2 - x + 1).$$

2° *Décomposer* $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

Les diviseurs de 6 sont $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Des essais montrent que

$$f(1) = 0;\ f(-2) = 0;\ f(3) = 0.$$

Le polynôme donné est donc divisible par $x - 1$, $x + 2$, $x - 3$ et par suite par le produit $(x - 1)(x + 2)(x - 3)$. D'autre part, le quotient est 1, car les termes du 3e degré ont le même coefficient dans le polynôme donné et dans le diviseur (**112**). On a donc

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x + 2)(x - 3).$$

128. Décomposition d'un trinôme du second degré.

Nous avons vu comment on décompose un trinôme carré parfait. Quand nous aurons étudié la résolution de l'équation du second degré, nous pourrons décomposer le trinôme dans tous les cas où la chose est possible. Pour le moment, nous ne nous occuperons que de certains trinômes particuliers.

1er CAS : *Le coefficient de* x^2 *est l'unité.* — L'examen de l'identité

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

suggère le procédé suivant :

On essaie de décomposer le dernier terme du trinôme en un produit de deux facteurs a et b, tels que leur somme soit égale au coefficient de x. Si cette décomposition est possible, a et b seront les derniers termes des facteurs binômes cherchés.

Considérons, par exemple, le trinôme $x^2 + 5x - 14$. On a

$$-14 = (-2) \times 7 \quad \text{et} \quad -2 + 7 = 5;$$

et par suite, $$x^2 + 5x - 14 = (x - 2)(x + 7).$$

2e CAS : *Le coefficient de* x^2 *est différent de* 1. — Dans le trinôme

$$f(x) = aa'x^2 + (ab' + a'b)x + bb',$$

le produit $aa'bb'$ des coefficients extrêmes est décomposable en un produit de deux facteurs ab' et $a'b$, dont la somme est égale au coefficient de x. En appliquant la méthode des groupements, il vient

$$f(x) = (aa'x^2 + ab'x) + (a'bx + bb') = ax(a'x + b') + b(a'x + b')$$
$$= (ax + b)(a'x + b').$$

Un grand nombre de trinômes du second degré peuvent être décomposés d'une façon analogue. D'abord, on essaye de décomposer *le produit des coefficients extrêmes* en un produit de deux facteurs m et n dont la somme soit égale au coefficient de x. Si cette décomposition est possible, on remplace dans le trinôme le terme en x par la somme $mx + nx$; puis, on achève en appliquant la méthode des groupements.

En considérant le trinôme $f(x) = 4x^2 + 8x + 3$, on doit avoir

$$mn = 12 \quad \text{et} \quad m + n = 8.$$

D'où $m = 2$, $n = 6$ et par suite,

$$f(x) = 4x^2 + 2x + 6x + 3 = 2x(2x + 1) + 3(2x + 1) = (2x + 3)(2x + 1).$$

Montrer d'une façon analogue qu'on a aussi

$$15x^2 + 7x - 2 = (5x - 1)(3x + 2).$$

EXERCICES

157. (166) Mettre en évidence les facteurs communs :

1° $10ac^2 + 15a^2c$
2° $12x^2y^3 - 18xy^3 + 24x^3y$
3° $12a^2x^3 - 30a^3x^2 + 18ax^4$
4° $a(x + y) + b(x + y)$
5° $(a - b) + x(a - b)$
6° $-44ax^n + 286a^2x^{n+1} - 66a^3x^{n+2}$
7° $x^{m+n}y^m - x^{2n}y^{m+n} - x^ny^{2m}$
8° $7x^{m+3}y^{n-2} + 14x^my^{n+1} + 21x^{m-3}y^{n+4}$

158. (167) Décomposer en facteurs par **la méthode des identités.**

1° $a^2 - 9$
2° $b^2 - a^{2m}$
3° $x^3y - xy^3$
4° $a^2 - 16b^2$
5° $a^4 - 9b^2$
6° $a^2 - 25x^2$
7° $32a^2 - 2b^4$
8° $a^2x^2 - b^2x^2$
9° $4x^2 - 16a^2$
10° $a^2b^2c^2 - m^2$
11° $50x^4 - 2y^2$
12° $256x^2 - 64a^4$
13° $a^2x^2 - 81x^2$
14° $16x^2y^2 - 121y^4$
15° $x^4y^2 - x^2y^4$
16° $3a^3x - 3ax^3$
17° $150a^6b^2 - 24a^2b^2$
18° $37a^5x - 333a^3x$
19° $x^4 - 81$
20° $81x^4 - 625a^4$
21° $32x^4 - 2a^4$
22° $3ax^4 - 3ay^4$
23° $3x^5 - 48xy^8$
24° $x^{11}y^4 - x^5y^{10}$
25° $m^3 \pm n^3$
26° $6xy^3 \pm 6x$
27° $32x^5 \pm 243y^5$
28° $125x^3 \pm 1$
29° $192x^6y^6 - 2187z^6$
30° $a^7b - ab^7$
31° $x^{10}y - xy^{10}$
32° $a^{5m} - 9a^{3m}y^{2n}$
33° $32x^5 - 243$
34° $343x^3 - 512b^6$
35° $64x^6 - 1$
36° $729a^6 - 64$
37° $(a - b)^2 - c^2$
38° $(a + b)^2 - (x - y)^2$
39° $(5a + 2b)^2 - (2b - 5a)^2$
40° $(x + a)^2 - (3x - 2a)^2$
41° $(4x - a)^2 - (4a - x)^2$
42° $(a + b + c)^2 - (a - 2b - c)^2$
43° $(x + 1)^2 - (x - 1)^2$
44° $(a + b)^3 + (a - b)^3$.

159. (168)
1° $a^2 + 4ab + 4b^2$
2° $9a^2 - 12ab + 4b^2$
3° $4a^2 - 4a + 1$
4° $a^2 - a + \frac{1}{4}$
5° $x^4 + 2x^2 + 1$
6° $x^6 + 6x^3 + 9$
7° $ab^2 - 2abc + ac^2$
8° $\frac{x^2}{16} - \frac{3xy}{2} + 9y^2$
9° $4x^4 + x^2y + \frac{y^2}{16}$
10° $9a^4b^2 - 6a^2bc + c^2$
11° $24a^6bc^3 + 54a^4b^3c^3 - 72a^5b^2c^3$
12° $49x^2y^8 + 25a^6b^4 - 70a^3b^2xy^4$
13° $50a^6b^2c^2 + 72a^2b^8c^2 + 120a^4b^5c^2$
14° $\frac{4}{3}a^7x + 8a^4x^5 + 12ax^9$
15° $144x^5y + 324x^3y^3 + 432x^4y^2$
16° $270x^9y^3 + 750x^3y^7 - 900x^6y^5$
17° $48a^2x^4y + 9y^2 + 64a^4x^8$
18° $\frac{9a^4b}{4} - a^3b^2 + \frac{a^2b^3}{9}$
19° $9a^{2m+2} - \frac{3a^{m+2}y^n}{2} + \frac{a^2y^{2n}}{16}$
20° $175a^2x^{2m} + 280a^2x^my^n + 112a^2y^{2n}$

160. (169)
1° $a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3$
2° $x^3 \pm 9x^2 + 27x \pm 27$
3° $a^6x^3 + 3x - \frac{1}{a^3}(3a^6x^2 + 1)$
4° $150xy^2 - 60x^2y + 8x^3 - 125y^3$
5° $27a^6x^3 - 108a^4bx^2 + 144a^2b^2x - 64b^3$
6° $108x^3 \pm 432x^2 + 576x \pm 256$
7° $1000a^3 - 1200a^2b + 480ab^2 - 64b^3$
8° $250x^6y^9 + 150x^4y^7z^2 + 30x^2y^5z^4 + 2y^3z^6$.

161. (170)
1° $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$
2° $x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y + 1$
3° $x^8 - 2x^6 - 2x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2$
4° $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

162. (171) Décomposer en facteurs par **la méthode des groupements.**

1° $a^2 - 2ab + b^2 - 1$
2° $a^2 - y^2 - 2xy - x^2$
3° $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$
4° $x^2 - 2x - y^2 + 1$
5° $x^2 - 4y^2 + 4y - 1$
6° $cy + y + c + 1$
7° $4x^2 + 2x - 9y^2 - 3y$
8° $c^2 + d - d^2 - c$
9° $b^2y - b^2 + a^2y - a^2$
10° $5a^3 + a^2 - 20a - 4$
11° $a^4 - 2a^3 + a - 2$
12° $b^2y - b^2 - a^2y + a^2$
13° $ax^2 - x^2 - 4a + 4$
14° $8y^4 - 8y^3 + y - 1$
15° $x^3 + 4x - 5$
16° $x^3 + 6x + 7$
17° $a^4 + 5a^2 + 4$
18° $a^5 - 2a^2 + 1$
19° $a^4 + b^4 + a^2b^2$
20° $4x^4 + y^4 + 3x^2y^2$
21° $a^2 - b^2 + x^2 - y^2 - 2(ax - by)$
22° $a^2 - b^2 - c^2 + d^2 - 2(ad - bc)$
23° $2a^3 - 2a^2b - a^2 + ab + 2ab^2 - b^2$
24° $x^8 - 4x^6 - 2x^5 + 8x^3 + x^2 - 4$.

163. (172) Décomposer les trinômes suivants :

1° $x^2 - 8x + 12$
2° $x^2 - 14x + 13$
3° $x^2 - 22x + 85$
4° $x^2 - 4x - 5$
5° $x^2 + 10x + 16$
6° $x^2 - 115x + 1500$
7° $x^2 - 4x - 32$
8° $x^2 + 5x - 14$
9° $x^2 + 20x + 19$
10° $x^2 - 4x - 12$
11° $2x^2 + 9x + 7$
12° $2x^2 - 2x - 24$
13° $6x^2 + 15x + 6$
14° $27x^2 - 75x + 48$
15° $4x^2 + x - 5$
16° $11x^2 + 28x - 15$
17° $6x^4 + 5x^2 + 1$
18° $21x^4 - 8x^2 - 5$
19° $45x^2 - 39xy - 6y^2$
20° $12x^2 + 34xy + 10y^2$
21° $2x^4 + x^2y^2 - 3y^4$.

164. (173) Décomposer en facteurs les polynômes suivants :

1° $x^3 + 9x^2 + 11x - 21$
2° $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$
3° $x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15$
4° $x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$
5° $x^5 + 3x^4 - 16x - 48$
6° $6x^4 + 13x^3 - 13x - 6$
7° $6x^4 - 5x^3 - 23x^2 + 20x - 4$
8° $6x^4 + 4x^3 - 26x^2 - 16x + 8$
9° $x^4 + ax^3 - 7a^2x^2 - a^3x + 6a^4$
10° $2a^4 + 2a^3b - 2a^2c^2 - 2abc^2$.

165. (174) Décomposer en facteurs les expressions suivantes :

1° $ax^6 - a^7$
2° $8a^2 + 125a^5$
3° $(x^2 + 2)^2 - 9x^2$
4° $(x^2 - 3)^2 - 4x^2$
5° $b^3 - b^2c - bc^2 + c^3$
6° $4a^4 - 8a^3 + 4a - 8$
7° $x^7 - x^4y^3 - x^3y^4 + y^7$
8° $x^3 - 3x + 2$
9° $5a^2x^2 - 27ax + 10$
10° $24x^2y^2 - 1 - 2xy$
11° $2abxy + 1 - a^2x^2 - b^2y^2$
12° $25x^4 - 104x^2y^4 + 16y^8$
13° $x(x^2 + y) - y(y^2 + x)$
14° $a^{18} - y^{12}$
15° $a^8 - b^4$
16° $(10x^4 - 41)^2 - (6x^4 - 40)^2$
17° $(8{,}5x^4 - 41)^2 - (7{,}5x^4 - 40)^2$
18° $a^4x^4 - 2a^3bx^3y + a^2b^2x^2y^2$
19° $x^6 + 7x^3 - 8$
20° $8x^6 - 63x^3 - 8$.

166. (175)
1° $x^2(x^2 - 4) - x^2 + 4$
2° $(x^2 - 2x)^2 - 1$
3° $(x - y)^3 - x^3 + y^3$
4° $x^{12} - y^6$
5° $a^9b - ab^9$
6° $(x+y)^2 + z(2x+2y+z)$
7° $(x-1)^2 + y(2x+y-2)$
8° $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 - 7b^3$
9° $x^3 + 3x^2 + 3x - 26$
10° $x^9 - 8x^6 - x^3 + 8$
11° $3x^4 - 10x^3 + 10x - 3$
12° $x^9 - 3x^6 - 13x^3 + 15$
13° $a^4 - a^3 - a + 1$
14° $x^4 - 2x^2 + 1 - (x - 1)^2$
15° $(a - b)^5 - a^5 + b^5$
16° $a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$
17° $x^4 - 15x^2y^2 + 9y^4$
18° $4a^3 - a^2x - 100ax^2 + 25x^3$
19° $3a^{2m+2} + 6a^{m+2}y^n + 3a^2y^{2n}$
20° $a^4 - 2a^3b + 2ab^3 - b^4$.

167. (176)
1° $a^4 + 2a^3b - 2ab^3 - b^4$
2° $(5a^2 + 2b^2)^2 - (4a^2 - 6b^2)^2$
3° $(18a^3 + 4b^3)^2 - (9a^3 - 5b^3)^2$
4° $5a^2 - 5b^2 - 5a^2c^2 + 5b^2c^2$
5° $ab(2ab - 5c^2) - c(5a^3 - 2b^3)$
6° $x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 - x - y$
7° $x^3 - (a + b + 1)x^2 + (a + b + ab)x - ab$
8° $(a + 3b)a^2 - a^3 + (3a + b)b^2 - b^3$
9° $(ab + ac)(a + d) - (ab - ad)(a - c)$
10° $y^3 - b^2y + by^2 - b^3 + y^2 - b^2$
11° $x^3 - xy^2 - x^2y + y^3 + 2x^2 - 2y^2$
12° $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$
13° $(a - b + c)^3 - a^3 + b^3 - c^3$
14° $x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc$
15° $4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$
16° $x^3 - (a + b - c)x^2 + (ab - ac - bc)x + abc$
17° $a(a - 1)x^2 + (2a^2 - 1)x + a(a + 1)$
18° $a(a - 1)x^2 - (a - b - 1)xy - b(b + 1)y^2$
19° $a^3 - a^2b + a^2c - 2abc - ab^2 + b^2c + b^3$
20° $ab^3 - a^3b + bc^3 - b^3c + a^3c - ac^3$.

§ VI. — PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR ET PLUS PETIT COMMUN MULTIPLE.

129. Nous ne considérerons que *des monômes et des polynômes entiers* et nous les désignerons par le terme *expression*.

Une expression est première lorsqu'elle ne peut être décomposée en facteurs *littéraux entiers*.

Ainsi, $x + 3$, $a - b$, $a^2 + b^2$, $x^2 + x + 1$ sont premiers.

L'expression $6x - 12$ est également un binôme premier, bien qu'on ait

$$6x - 12 = 6(x - 2).$$

130. Plus grand commun diviseur.—Le p. g. c. d. de plusieurs expressions est par définition, l'expression qu'on obtient en appliquant la règle suivante :

1° On décompose les expressions en facteurs premiers.

2° On forme le produit des facteurs premiers *communs*, tant numériques que littéraux, chacun de ces facteurs étant pris avec son plus *petit* exposant.

Exemples. — 1° Le p. g. c. d. des monômes $16a^2b^3c$, $-24ab^4c^3$, $36a^2b^2c^2$ est $4ab^2c$.

2° On donne les polynômes suivants, déjà décomposés en facteurs :

$$8x^2y^3(x-y)^2(x+y)^3, \quad 2xy^4(x-y)(x+y)^4, \quad -6x^4y(x-y)^3(x+y)^2.$$

Leur p. g. c. d. est $2xy(x-y)(x+y)^2$.

131. Plus petit commun multiple.— Le p. p. c. m. de plusieurs expressions est par définition, l'expression qu'on obtient en appliquant la règle suivante :

1° On décompose les expressions en facteurs premiers.

2° On forme le produit des facteurs premiers *différents*, tant numériques que littéraux, chacun de ces facteurs étant pris avec son plus *grand* exposant.

Exemple. — On donne les expressions :

$$6(x-y)(x^2+y^2)^2, \quad 8x^2y(x-y)^3, \quad x^4-y^4.$$

La troisième peut s'écrire $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)$.

Le p. p. c. m. des expressions données est donc

$$24x^2y(x-y)^3(x+y)(x^2+y^2)^2.$$

EXERCICES

168. (177) Chercher le p. g. c. d. et le p. p. c. m. des expressions suivantes :

1° $4abc$; $5a^2b$; $20ab^2c$; $12ax$.
2° $6a^2x$; $15a^2b$; $30abx$; $24a^2b^2x^2$.
3° $4a^4b^7c^5$; $28a^2b^4c^7$; $32a^5b^4c$; $42a^2b^6c$.
4° $9(2x-a)^2$; $4x^2-a^2$.
5° $4a-4a^2-1$; $4a^3+a-1$.
6° $18a^2b(a^3+b^3)(a-b)$; $6ab^2(a^2-b^2)(a+b)^2$.
7° $x^2-11x+28$; $2x^2-2x-84$; x^2+x-56.
8° $3x^2+9xy$; $2x^3-18xy^2$; $x^3+6x^2y+9xy^2$.

9° $x^2 - y^2$; $x^3 - y^3$; $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$.
10° $ax^2 + 2a^2x + a^3$; $2ax^2 - 4a^2x - 6a^3$; $3a^2x^2 + 6a^3x + 3a^4$.
11° $x^2 - 3x + 2$; $x^3 - x^2 - 4x + 4$; $x^3 - ax^2 - 4x + 4a$.
12° $2a^3 + 3a^2 - 2ax^2 - 3x^2$; $3a^3 - 3ax^2 + a^2 - x^2$;
$x^3 + ax^2 - a^2x - a^3$.

CHAPITRE V

Fractions algébriques.

§ I. — DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS.

132. Une fraction algébrique *est le quotient indiqué de deux nombres relatifs, qui sont appelés termes de la fraction.*

Une fraction n'a une valeur définie que si son dénominateur est différent de zéro. Quand le dénominateur seul est nul, la fraction ne représente aucun nombre. Quand les deux termes sont nuls, la fraction représente n'importe quel nombre et on dit qu'elle est *indéterminée.*

Dans ce qui suit, nous supposerons que les dénominateurs des fractions considérées ne sont pas nuls.

133. Propriétés des fractions algébriques. — Ce sont les mêmes que celles des fractions arithmétiques. Nous les avons déjà appliquées au chapitre II. Nous allons les rappeler en les précisant et en les démontrant au besoin; puis nous parlerons du calcul des fractions ayant pour termes des expressions algébriques.

134. Théorème I. — ***On ne change pas la valeur d'une fraction en multipliant ou en divisant ses deux termes par un même nombre différent de zéro.***

Soit q le quotient de la division de a par b. On aura

$$\frac{a}{b} = q \quad \text{ou} \quad a = bq.$$

Multiplions les deux membres par le nombre non nul m. Il vient

$$am = bq \times m \quad \text{ou} \quad am = bm \times q.$$

Cette égalité montre que q est aussi le quotient de la division de am par bm. On a donc

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}.$$

En lisant cette égalité de droite à gauche, on voit qu'*on peut également diviser les deux termes par un même nombre.*

Remarque. — *On ne peut pas multiplier ou diviser par zéro.* — Si on multiplie les deux termes d'une fraction par zéro, elle devient indéterminée. Si on les divise par zéro, on obtient une expression qui n'a plus de sens.

135. Remarques. — Dans une expression telle que $-\frac{-5}{3}$, on peut considérer trois signes : *les signes des deux termes et le signe placé devant la fraction.*

1° ***Si on change l'un des trois signes, le nombre représenté par l'expression change de signe,*** car cela revient à multiplier l'expression par -1.

Ainsi l'expression $-\frac{-5}{3}$ représente le nombre $+\frac{5}{3}$, tandis que les expressions $+\frac{-5}{+3}$, $-\frac{+5}{+3}$, $-\frac{-5}{-3}$ représentent le nombre $-\frac{5}{3}$.

2° ***Si on change deux signes, l'expression garde sa valeur,*** car on l'a multipliée deux fois par -1.

Ainsi $\frac{18}{-5} = \frac{-18}{5} = -\frac{-18}{-5}$; $-\frac{-7}{3} = +\frac{-7}{-3} = +\frac{7}{3} = -\frac{7}{-3}$.

136. Théorème II. — ***Pour faire la somme de plusieurs fractions ayant le même dénominateur, on forme la somme des numérateurs et on donne au résultat pour dénominateur le dénominateur commun.***

En effet, on a (**105**)

$$\frac{a + a' + a''}{b} = \frac{a}{b} + \frac{a'}{b} + \frac{a''}{b};$$

ou, en lisant cette égalité de droite à gauche,

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b} + \frac{a''}{b} = \frac{a + a' + a''}{b}.$$

On démontre de même les théorèmes exprimés algébriquement par les égalités suivantes :

$$\frac{a}{b}-\frac{a'}{b}=\frac{a-a'}{b}; \quad \frac{a}{b}-\frac{a'}{b}+\frac{a''}{b}=\frac{a-a'+a''}{b}.$$

137. Théorème III. — ***Le produit de plusieurs fractions est égal au quotient du produit des numérateurs par celui des dénominateurs.***

Soient q, q', q'' les valeurs des fractions $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}$. On a

$$\frac{a}{b}=q, \quad \frac{a'}{b'}=q', \quad \frac{a''}{b''}=q'';$$

ou $$a=bq, \quad a'=b'q', \quad a''=b''q''.$$

Multiplions membre à membre et transformons le 2e membre.

$$aa'a''=bq \times b'q' \times b''q''=bb'b'' \times qq'q''.$$

Cette égalité montre que $qq'q''$ est le quotient de $aa'a''$ par $bb'b''$. On a donc

$$qq'q''=\frac{aa'a''}{bb'b''} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b}\times\frac{a'}{b'}\times\frac{a''}{b''}=\frac{aa'a''}{bb'b''}.$$

138. Théorème IV. — ***Le quotient de deux fractions est égal au produit de la fraction dividende par l'inverse de la fraction diviseur.***

Ainsi, on a $$\frac{a}{b}:\frac{a'}{b'}=\frac{a}{b}\times\frac{b'}{a'}=\frac{ab'}{ba'},$$

car en multipliant $\frac{ab'}{ba'}$ par le diviseur $\frac{a'}{b'}$ on retrouve le dividende $\frac{a}{b}$.

139. Théorème V. — ***Dans une suite de fractions égales, chacune d'elles est égale au quotient de la somme des numérateurs par celle des dénominateurs.***

Soit q la valeur des fractions égales $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}$. On a

$$a=bq, \quad a'=b'q, \quad a''=b''q.$$

Additionnons ces égalités membre à membre, et mettons q en évidence. Il vient $a+a'+a''=(b+b'+b'')q$, et par suite, $$\frac{a + a' + a''}{b + b' + b''} = q \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b}.$$

REMARQUES. — I. La démonstration de ce théorème exige que *la somme des dénominateurs soit différente de zéro.*

II. Avant de faire la somme des numérateurs et des dénominateurs des fractions, *on peut multiplier les deux termes d'une quelconque des fractions par un nombre différent de zéro.*

Ainsi, de $$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''}$$

on déduit $$\frac{am}{bm} = \frac{a'n}{b'n} = \frac{a''p}{b''p};$$

puis, $$\frac{am + a'n + a''p}{bm + b'n + b''p} = \frac{am}{bm} = \frac{a}{b}.$$

III. Tous les théorèmes sur les *proportions* sont applicables aux proportions dont les termes sont des nombres relatifs.

§ II. — FRACTIONS RATIONNELLES.

140. Une fraction rationnelle *est une fraction dont les termes sont des polynômes entiers*; cette fraction est **une fraction proprement dite** quand le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur.

Considérons les expressions

$$\frac{4ab^2}{c}; \quad \frac{x^2 - 5x + 7}{x^2 - 3x + 2}; \quad x + 1 + \frac{x - 1}{x}.$$

La 1re et la 2e sont des fractions rationnelles; la 3e est *une expression fractionnaire rationnelle.*

141. Simplification des fractions. — *On décompose les deux termes en leurs facteurs, puis on supprime les facteurs communs; ce qui revient à diviser les deux termes par leur p. g. c. d.*

1° Soit à simplifier la fraction $\dfrac{25a^5b^2c^3}{15a^4bc^5}$.

En divisant les deux termes par $5a^4bc^3$, il vient

$$\frac{25a^5b^2c^3}{15a^4bc^5} = \frac{5ab}{3c^2}.$$

2° Soit à simplifier la fraction $\frac{2x^3 - 4x^2 + 2x}{6x^2 - 6}$. — On a

$$\frac{2x^3 - 4x^2 + 2x}{6x^2 - 6} = \frac{2x(x^2 - 2x + 1)}{6(x^2 - 1)} = \frac{2x(x - 1)^2}{6(x + 1)(x - 1)} = \frac{x(x - 1)}{3(x + 1)}.$$

3° Soit à simplifier la fraction $\frac{x^2 - a^2}{a - x}$.

En faisant deux changements de signe (**135**), nous aurons

$$\frac{x^2 - a^2}{a - x} = \frac{-(x^2 - a^2)}{x - a} = \frac{-(x + a)(x - a)}{x - a} = -(x + a).$$

142. Réduction au même dénominateur. — *Après avoir décomposé les dénominateurs en leurs facteurs, on cherche leur p. p. c. m.; puis on multiplie les deux termes de chaque fraction par le quotient obtenu en divisant ce p. p. c. m. par le dénominateur de la fraction considérée.*

1° Soient les fractions $\frac{1}{2a}, \frac{3a^2}{b}, \frac{ac}{2b^2}$.

Le p. p. c. m. des dénominateurs est $2ab^2$. Multiplions respectivement par b^2, $2ab$, a, et nous obtenons les fractions

$$\frac{b^2}{2ab^2}, \quad \frac{6a^3b}{2ab^2}, \quad \frac{a^2c}{2ab^2}.$$

2° Soient les fractions $\frac{b}{2(a + b)}, \frac{a}{5(a - b)}, \frac{c^2}{a^2 - b^2}$.

Le p. p. c. m. des dénominateurs est $10(a^2 - b^2)$. Multiplions respectivement par $5(a - b)$, $2(a + b)$, 10, et nous trouverons les fractions

$$\frac{5b(a - b)}{10(a^2 - b^2)}, \quad \frac{2a(a + b)}{10(a^2 - b^2)}, \quad \frac{10c^2}{10(a^2 - b^2)}.$$

3° Il est nécessaire parfois de faire *des changements de signe* avant de commencer la réduction. Soient les fractions

$$\frac{a}{(a - b)(a - c)}, \quad \frac{b}{(b - c)(b - a)}, \quad \frac{c}{(c - a)(c - b)}.$$

On peut les écrire

$$\frac{a}{(a - b)(a - c)}, \quad \frac{-b}{(b - c)(a - b)}, \quad \frac{c}{(a - c)(b - c)}.$$

Le p. p. c. m. des dénominateurs est alors $(a - b)(a - c)(b - c)$. En multipliant respectivement par $b - c$, $a - c$, $a - b$, on trouve

$$\frac{a(b - c)}{(a - b)(a - c)(b - c)}, \quad \frac{-b(a - c)}{(a - b)(a - c)(b - c)}, \quad \frac{c(a - b)}{(a - b)(a - c)(b - c)}.$$

143. Addition et Soustraction. — *On réduit les fractions au même dénominateur, puis on forme la somme (ou la différence) des numérateurs en conservant le dénominateur commun.*

1° Soit à calculer la différence $D = \frac{3x+5}{4} - \frac{x-1}{4}$. — On a

$$D = \frac{(3x+5)-(x-1)}{4} = \frac{3x+5-x+1}{4} = \frac{2x+6}{4} = \frac{x+3}{2}.$$

Il importe de remarquer qu'il faut former la différence

$$(3x+5)-(x-1)$$

des numérateurs. Les débutants sont tentés d'écrire

$$\frac{3x+5}{4} - \frac{x-1}{4} = \frac{3x+5-x-1}{4},$$

ce qui constitue une grossière erreur.

2° Soit à calculer $\quad S = \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{1+x}$.

Le p. p. c. m. des dénominateurs est $1 - x^2$. On trouve

$$S = \frac{(1+x)^2}{1-x^2} - \frac{1-x}{1-x^2} = \frac{(1+2x+x^2)-(1-x)}{1-x^2} = \frac{3x+x^2}{1-x^2}.$$

3° Soit à transformer l'expression

$$S = \frac{x^2+1}{x^2-1} - \frac{x-1}{2x+2} - \frac{x+1}{2-2x} - \frac{4x}{x^2-1}.$$

Décomposons les dénominateurs en facteurs et *multiplions le troisième terme deux fois par* -1.

$$S = \frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)} - \frac{x-1}{2(x+1)} + \frac{x+1}{2(x-1)} - \frac{4x}{(x+1)(x-1)}.$$

Le p. p. c. m. des dénominateurs est $2(x+1)(x-1)$. On trouve

$$S = \frac{2(x^2+1)-(x-1)(x-1)+(x+1)(x+1)-8x}{2(x^2-1)}$$

$$= \frac{2x^2-4x+2}{2(x^2-1)} = \frac{2(x-1)^2}{2(x+1)(x-1)} = \frac{x-1}{x+1}.$$

144. Multiplication. — *On applique la règle du n°* **137**, *puis on simplifie le résultat s'il y a lieu.*

1° $\frac{ax+x^2}{(2b-cx)^2} \times \frac{2bx-cx^2}{(a+x)^2} = \frac{x(a+x)x(2b-cx)}{(2b-cx)^2(a+x)^2} = \frac{x^2}{(2b-cx)(a+x)}.$

2° Calculer $\quad \left(1 + x + \frac{3+x^2}{1-x}\right) \times (1-x^2).$

Le premier facteur n'est pas une fraction rationnelle, mais *une expression fractionnaire rationnelle.* Nous devons commencer par transformer ce facteur en une fraction rationnelle; il est égal à

$$\frac{(1+x)(1-x)+3+x^2}{1-x}=\frac{4}{1-x}.$$

En multipliant ce résultat par $1-x^2$, on trouve $4(1+x)$.

145. Division. — *On applique la règle du n° **138**, puis on simplifie le résultat s'il y a lieu.*

1° Soit à effectuer la division $\dfrac{x^2+a^2}{(x-a)^2}:\dfrac{x^2+ax}{x-a}$.

Appliquons la règle de la division de deux fractions, puis simplifions.

$$\frac{x^2+a^2}{(x-a)^2}:\frac{x^2+ax}{x-a}=\frac{(x^2+a^2)(x-a)}{(x-a)^2(x^2+ax)}=\frac{x^2+a^2}{x(x^2-a^2)}.$$

2° *Si le dividende et le diviseur sont des expressions fractionnaires rationnelles,* il faut commencer par les réduire chacun en une fraction rationnelle. Soit à transformer l'expression

$$E=\frac{\dfrac{2x+1}{x-1}+1}{\dfrac{2x-1}{x+1}-1}.$$

Le numérateur s'écrit $\dfrac{2x+1+x-1}{x-1}=\dfrac{3x}{x-1}$.

Le dénominateur s'écrit $\dfrac{2x-1-x-1}{x+1}=\dfrac{x-2}{x+1}$.

Par suite, $$E=\frac{3x(x+1)}{(x-1)(x-2)}.$$

Autre procédé. — Multiplions le numérateur et le dénominateur de E par le p. p. c. m. x^2-1 de leurs dénominateurs. Il vient

$$E=\frac{(2x+1)(x+1)+x^2-1}{(2x-1)(x-1)-x^2+1}=\frac{3x^2+3x}{x^2-3x+2}=\frac{3x(x+1)}{(x-1)(x-2)}.$$

EXERCICES

Simplifier les fractions suivantes :

169. (178) 1° $\dfrac{14b^4x\times5ay}{15a^2x\times7b^3y}$ 8° $\dfrac{8a^3+1}{64a^6-1}$ 15° $\dfrac{8x^2+22x-6}{4x^2+27x-7}$

2° $\dfrac{axy - bxy}{ab - b^2}$ 9° $\dfrac{4a^2 + 12a + 9}{4a^2 - 9}$ 16° $\dfrac{2x^2 - 9x + 7}{12x^2 - 21x + 9}$

3° $\dfrac{a - 3}{2a^2 - 18}$ 10° $\dfrac{25x^2 + 20ax + 4a^2}{2(25ax^3 - 4a^3x)}$ 17° $\dfrac{8x^6 + 27y^6}{8x^4 - 18y^4}$

4° $\dfrac{9a^5 - 16a}{6a^2b^2 - 8b^2}$ 11° $\dfrac{12ax^2 + 3ax}{8x^2 + 22x + 5}$ 18° $\dfrac{40x^3 - 5}{12x^2 + 6x + 3}$

5° $\dfrac{a^3 + b^3}{(a - b)^2 + ab}$ 12° $\dfrac{3x^2 - x - 14}{3abx + 6ab}$ 19° $\dfrac{16x^3 - 54}{8x^2 - 24x + 18}$

6° $\dfrac{4(x + y)^2}{3(x^2 - y^2)}$ 13° $\dfrac{x^2 - 7x - 8}{x^3 + 3x^2 + 2x}$ 20° $\dfrac{(a + b)^2(a^3 - b^3)}{(a^2 - b^2)^2}$.

7° $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$ 14° $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{9 - x^2}$ 21° $\dfrac{a^6 - b^6}{(a + b)^2(a^3 - b^3)}$

170. 1° $\dfrac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^2 - 3x + 2}$ 11° $\dfrac{x^2 - a^2 + 2ab - b^2}{x^2 - 2(a - b)x + (a - b)^2}$
(179)

2° $\dfrac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$ 12° $\dfrac{a^2 + 2ab + b^2 - x^2}{x^2 - 2(a + b)x + (a + b)^2}$

3° $\dfrac{x^3 - 9x^2 + 11x + 21}{x^4 - x^3 - 4x^2 - 5x - 3}$ 13° $\dfrac{1 - a^2}{(1 + ax)^2 - (a + x)^2}$

4° $\dfrac{(a + b)^2 - (c - b)^2}{(a - b)^2 - (c + b)^2}$ 14° $\dfrac{a^2x^2 + a^2x + abx + ab}{a^2x^2 - a^2x + abx - ab}$

5° $\dfrac{(a^2 + b^2 - c^2)^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2}{4ab^2 + 4abc}$ 15° $\dfrac{x^4 - y^4}{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3}$

6° $\dfrac{x^4 - 2x^2 + 1}{3x^5 - 10x^3 + 15x - 8}$ 16° $\dfrac{1 - x^2 + x^3 - x^5}{x + x^2 - x^3 - x^4}$

7° $\dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}$ 17° $\dfrac{(a^8 + 2a^4x^2 + x^4)(a^4 - x^2)}{(a^2 + x)(a^6 - a^4x + a^2x^2 - x^3)}$

8° $\dfrac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^3 - 3x + 2}$ 18° $\dfrac{a^3 + a(1 + a)x + x^2}{a^4 - x^2}$

9° $\dfrac{1 + x^3}{1 + 2x + 2x^2 + x^3}$ 19° $\dfrac{7a^2 + 19ab - 6b^2}{7a^3 - 2a^2b - 63ab^2 + 18b^3}$

10° $\dfrac{2x^3 - 7x^2 + 2x + 3}{2x^3 - 9x^2 + 10x - 3}$ 20° $\dfrac{a^5 + a^2b^3 - a^4b - ab^4}{a^4 - a^2b^2 + a^3b - ab^3}$.

Effectuer les opérations suivantes et simplifier :

171. 1° $\dfrac{x + 3}{3} + \dfrac{x - 2}{2}$ 8° $\dfrac{3}{x - 6} - \dfrac{1}{x - 2}$ 15° $\dfrac{a}{x - a} - \dfrac{a^2}{x^2 - a^2}$
(180)

2° $\dfrac{x+3}{3}-\dfrac{x-2}{2}$

3° $\dfrac{a-b}{4}-\dfrac{b-a}{6}$

4° $\dfrac{x+a}{2}-\dfrac{2x+a}{4}$

5° $\dfrac{a+b}{a}+\dfrac{a+b}{b}$

6° $\dfrac{a+b}{a}-\dfrac{b-a}{b}$

7° $\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{a+4}$

9° $\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}$

10° $\dfrac{a}{x-a}-\dfrac{b}{x-b}$

11° $\dfrac{a+3}{a+4}-\dfrac{a+1}{a+2}$

12° $\dfrac{x-3}{x-5}-\dfrac{x-4}{x-6}$

13° $\dfrac{x-3}{x+3}-\dfrac{x+3}{x-3}$

14° $\dfrac{x+a}{a-x}-\dfrac{x-a}{a+x}$

16° $\dfrac{3}{x-3}+\dfrac{2x}{x^2-9}$

17° $\dfrac{2x-3a}{x-2a}-\dfrac{2x-a}{x-a}$

18° $\dfrac{x+a}{x-2a}-\dfrac{x^2+2a^2}{x^2-4a^2}$

19° $\dfrac{2x^2}{x^2-y^2}-\dfrac{2x^2}{x^2+xy}$

20° $\dfrac{x^2}{x-x^3}-\dfrac{x}{1+x^2}$

21° $\dfrac{a+1}{x^2-a^2}+\dfrac{a-1}{(x-a)^2}$

172. (181) 1° $\dfrac{2}{2-x}-\dfrac{x}{x-2}$

2° $\dfrac{5}{a^2-1}+\dfrac{5}{1-a}$

3° $\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{b}{b-a}$

4° $\dfrac{3}{1-x^2}-\dfrac{2}{x-1}$

5° $\dfrac{2a}{a+1}+\dfrac{3a^2+1}{1-a^2}$

6° $\dfrac{y^2}{x^3-y^3}+\dfrac{x^3y^2}{y^6-x^6}$

173. (182) Réduire en une seule fraction et simplifier :

1° $a^2-\dfrac{x^3}{a}$

2° $a-\dfrac{3b-a}{6}$

3° $1-\dfrac{a-b}{a+b}$

4° $1+\dfrac{a+b}{a-b}$

5° $x-\dfrac{x^2}{a+x}$

6° $a+b-\dfrac{a^2-b^2}{a+2b}$

7° $2x-\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$

8° $x+y+\dfrac{x^2-y^2}{x-y}$

9° $x+2-\dfrac{x^2-2x+4}{x+2}$

10° $1+x+x^2+\dfrac{x^3}{1-x}$

11° $1-x+x^2-\dfrac{x^3}{1+x}$

12° $1-2x+x^2+\dfrac{1-x^4}{1+2x+x^2}$

Effectuer les opérations suivantes et simplifier :

174. (183) 1° $\dfrac{5x-1}{8}-\dfrac{3x-2}{7}+\dfrac{x-5}{4}$

2° $\dfrac{x-2y}{xy}+\dfrac{3y-a}{ay}-\dfrac{3x-2a}{ax}$

8° $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}+\dfrac{b}{a-b}-\dfrac{a}{a+b}$

9° $\dfrac{a+8}{a-1}+\dfrac{a+4}{a+1}-\dfrac{2(4a+1)}{a^2-1}$

3° $\dfrac{a-x}{x}+\dfrac{a+x}{a}-\dfrac{a^2-x^2}{2ax}$

4° $\dfrac{2}{xy}-\dfrac{3y^2-x^2}{xy^3}+\dfrac{xy+y^2}{x^2y^2}$

5° $\dfrac{1}{x+y}-\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{2x}{x^2-y^2}$

$(x+y)(x-y)$

6° $\dfrac{12}{9-a^2}-\dfrac{2}{3+a}-\dfrac{1}{3-a}$

7° $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a-b}-\dfrac{2ab}{a^2-b^2}$

10° $\dfrac{a}{2(a+b)}+\dfrac{2a^2}{3a^2-3b^2}-\dfrac{3b}{4a-4b}$

11° $\dfrac{a+5}{a-1}-\dfrac{6}{a^2+a+1}-\dfrac{6(a^2+2)}{a^3-1}$

12° $\dfrac{a^3-b^3}{a^2-b^2}-\dfrac{a^2b+ab^2}{a^2+ab}$

13° $\dfrac{a^2+ab}{a^2-ab}-\dfrac{a^3+2a^2b+ab^2}{a^2b-b^3}$

14° $am(a+m)-\dfrac{a^4m+am^4}{a^2+2am+m^2}$

15° $\dfrac{a^3+2a^2b+ab^2}{a^2-b^2}+\dfrac{a^3+b^3}{(a-b)^2+2b(a-b)}$

16° $2+\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{1}{2+x}+\dfrac{4}{x^2-4}$

17° $\dfrac{3}{1+a}-\dfrac{2}{1-a}-\dfrac{5a}{a^2-1}$

18° $\dfrac{x-a}{x+a}+\dfrac{a^2+3ax}{a^2-x^2}+\dfrac{x+a}{x-a}$

19° $\dfrac{3-2x}{2x+3}-\dfrac{2x+3}{3-2x}+\dfrac{36}{4x^2-9}$

20° $\dfrac{ax^2+b}{2x-1}+\dfrac{2(bx+ax^2)}{1-4x^2}-\dfrac{ax^2-b}{2x+1}$.

175. (184) 1° $\dfrac{x}{x^2+5x+6}+\dfrac{15}{x^2+9x+14}-\dfrac{12}{x^2+10x+21}$

2° $\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-x-2}+\dfrac{2}{x^2-1}$

3° $\dfrac{1}{x^2-4x+3}+\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}$

4° $\dfrac{a^2+ac}{a^2c-c^3}-\dfrac{a^2-c^2}{a^2c+2ac^2+c^3}+\dfrac{2c}{c^2-a^2}-\dfrac{3}{a+c}$

5° $\dfrac{b}{a(a^2-b^2)}+\dfrac{a}{b(a^2+b^2)}+\dfrac{a^4+b^4}{ab(b^4-a^4)}-\dfrac{a^6}{b^8-a^8}$

6° $\dfrac{a^2-2ax+x^2}{2(a^2-x^2)}-\dfrac{2ax(a+x)}{(a-x)(a^2+2ax+x^2)}-\dfrac{x^2-a^2}{2(x-a)^2}$

7° $\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$

8° $\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}-\frac{c-a}{(b-a)(b-c)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}$

9° $\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}$

10° $\frac{a^2bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2ca}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2ab}{(c-a)(c-b)}$.

Effectuer les multiplications suivantes et simplifier :

176. (185) 1° $\frac{a}{6b}\times\frac{3b}{4}\times\frac{2b}{5}$

2° $\left(-\frac{7a}{10}\right)\times\frac{5a}{6}\times\frac{4x^2}{21a}$

3° $\left(-\frac{a}{2x}\right)\times\frac{8x}{9}\times\left(-\frac{6a}{7x}\right)$

4° $(-3a^2)\left(-\frac{11a}{15x}\right)\left(-\frac{x}{22}\right)$

5° $\frac{4x^2-6xy}{5x}\times\frac{10x}{6x-9y}$

6° $\frac{8x-2y}{x+y}\times\frac{2x-8y}{4x-y}$

7° $\frac{4+2a}{6-3a}\times\frac{3(a-2)^2}{2(a+2)^2}$

8° $\frac{6a+a^2}{6-a}\times\frac{a^2-36}{a}$

9° $\frac{x^4+x^2-2}{x^2+3x+2}\times\frac{x+1}{x^2-1}$

10° $\frac{2x^2-3x-9}{x^2+5x+4}\times\frac{x+4}{2x+3}$

11° $\frac{a^2x^2}{y^2}\times\frac{xy}{a(x+y)}\times\frac{x^2-y^2}{axy}$

12° $\frac{a+x}{(m+n)^3}\times\frac{x^2-y^2}{12}\times\frac{(m+n)^2}{m-n}\times\frac{6(m^2-n^2)}{x+y}$

13° $\frac{ab-3a}{4b-5}\times\frac{20b-25}{ac+2a}\times\frac{2b+bc}{a-5}\times\frac{2(5a-a^2)}{4c}$

14° $\frac{x^3+y^3}{x^4-y^4}\times\frac{x^2y+y^3}{x^4+x^2y^2+y^4}\times\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}$

15° $\frac{6x^2+5xy-6y^2}{3x^2-8xy-3y^2}\times\frac{3x^2-11xy+6y^2}{6x^2+11xy+3y^2}\times\frac{9x^2+9xy+2y^2}{9x^2-12xy+4y^2}$.

177. (186) 1° $\left(1-x+\frac{4+x^2}{1+x}\right)(1-x^2)$

2° $\left(1-x-\frac{2-x^2}{1+x}\right)(1-x^2)$

3° $\left(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right)\left(\frac{3}{4x}+\frac{x}{4}-x\right)$

4° $\left(\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}\right)\times\frac{x^2-y^2}{2y}$

5° $\left(x^2 - xy + y^2 - \dfrac{2y^3}{x+y}\right) \times \dfrac{x+y}{x-y}$

6° $\left(x + 2a - \dfrac{a^2}{2x+3a}\right)\left(2x - a - \dfrac{2a^2}{x+a}\right)$

7° $(x+2)\left(1+\dfrac{6x+12}{x^2-x-6}\right)\left(1-\dfrac{5x+5}{x^2+3x+2}\right)$

8° $\left(b+\dfrac{ab}{b-a}\right)\left(b-\dfrac{ab}{a+b}\right)\times\dfrac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$.

178. (187) Effectuer les divisions suivantes et simplifier :

1° $(x+y) : \dfrac{x+y}{x-y}$

2° $(a^2-b^2) : \dfrac{a+b}{a-b}$

3° $\dfrac{a^2-4}{b+3} : \dfrac{a+2}{b^2-9}$

4° $\dfrac{4x^2-9a^4}{ab-a^2} : \dfrac{2x-3a^2}{a^3b-a^4}$

5° $\dfrac{(a+b)^2}{x-y} : \dfrac{a^2-b^2}{x^2-y^2}$

6° $\dfrac{20x-25}{3b-4} : \dfrac{4a^2x-5a^2}{9b^2-16}$

7° $\left(\dfrac{a^2}{x^2}-\dfrac{x^2}{a^2}\right) : \left(\dfrac{a}{x}+\dfrac{x}{a}\right)$

8° $\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{x^2}\right) : \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}\right)$

9° $\left(a^4-\dfrac{1}{a^2}\right) : \left(a^2+\dfrac{1}{a}\right)$

10° $\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right) : \left(\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{a}{x}\right)$

11° $\left(1+\dfrac{a^3}{x^3}\right) : \left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{a}{x^3}\right)$

12° $\left(1+\dfrac{x-a}{x+a}\right) : \left(\dfrac{x+a}{x-a}-1\right)$

13° $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}\right) : \left(\dfrac{1}{x^2}-1\right)$

14° $(2x^2-x-6) : \left(\dfrac{4}{x^2}-1\right)$

15° $\dfrac{2}{1-x^2} : \left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}\right)$

16° $\left(\dfrac{a^3-b^3}{a-b}-\dfrac{a^3+b^3}{a+b}\right) : \dfrac{4ab}{a^2-b^2}$.

179. (188) Transformer les expressions suivantes :

1° $$\frac{\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{x}{1-x}}{\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{x}{1+x}}$$

2° $$\frac{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}{1-\dfrac{a^2+b^2}{(a+b)^2}}$$

6° $$\frac{a-x}{a^2-ax-\dfrac{(a-x)^2}{1-\dfrac{a}{x}}}$$

7° $$\frac{\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{a}{a-1}}{2-\dfrac{a-7}{1-a}}\times\frac{1-\dfrac{4}{a+1}}{a+\dfrac{a(a-1)}{a+1}}$$

3° $\dfrac{\dfrac{x-y}{y-a}-\dfrac{y-a}{x-y}}{\dfrac{x-y-1}{x-y}-\dfrac{y-a-1}{y-a}}$ 8° $\dfrac{a+\dfrac{b-a}{1+ab}}{1-\dfrac{a(b-a)}{1+ab}} \times \dfrac{\dfrac{x+y}{1-xy}-y}{1+\dfrac{y(x+y)}{1-xy}}$

4° $\dfrac{\dfrac{a-b}{1+ab}+\dfrac{b-c}{1+bc}}{1-\dfrac{(a-b)(b-c)}{(1+ab)(1+bc)}}$ 9° $\dfrac{\dfrac{x-1}{3}+\dfrac{x-1}{x-2}}{\dfrac{x+2}{4}+\dfrac{x+2}{x-3}} : \dfrac{\dfrac{x+3}{3}-\dfrac{x+3}{x-2}}{\dfrac{x-5}{12}+\dfrac{x-5}{4(x-1)}}$

5° $\dfrac{1}{a-\dfrac{a^2-1}{a+\dfrac{1}{a-1}}}$ 10° $\dfrac{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-1}{\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{x}{y}+1} \times \dfrac{1+\dfrac{y}{x}}{x-y} \quad \dfrac{1+\dfrac{y^3}{x^3}}{\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{y^2}{x}}$

CHAPITRE VI

Équations.

§ I. — DÉFINITIONS ET PRINCIPES D'ÉQUIVALENCE.

146. Une équation *est une égalité dont les deux membres ne sont équivalents que pour des valeurs particulières attribuées à certaines lettres, appelées* **inconnues.**

On représente d'ordinaire les inconnues par les dernières lettres de l'alphabet.

Une **solution** *d'une équation est un ensemble de valeurs, une pour chaque inconnue, qui font prendre aux deux membres la même valeur.*

On dit que cette solution *vérifie* l'équation ou qu'elle *satisfait* à l'équation. Toute solution d'une équation à une inconnue est encore appelée **racine** de cette équation.

147. Classification des équations. — I. *Une équation est* **numérique** *quand les quantités connues sont représentées par des nombres.*

Elle est **littérale** *quand des quantités connues sont représentées par des lettres.*

II. Une équation peut renfermer **une ou plusieurs inconnues.**

$ax + by = c$ est une équation *littérale* à deux inconnues.

$3x^2 - 5x + 2 = 0$ est une équation *numérique* à une inconnue.

III. Une équation est *rationnelle* quand ses deux membres sont rationnels *par rapport aux inconnues*; elle est *irrationnelle* dans le cas contraire.

Une équation est *entière* quand ses deux membres sont entiers par rapport aux inconnues; elle est *fractionnaire* dans le cas contraire.

148. Équations équivalentes.—*Deux équations sont équivalentes quand elles admettent les mêmes solutions*, c'est-à-dire, *quand toute solution de l'une est une solution de l'autre et réciproquement.*

Exemple. — Les équations

$$x = 3, \quad x + 1 = 4, \quad 2x = 6$$

sont équivalentes; leur solution commune est 3.

149. Résoudre une équation, *c'est chercher ses solutions.*

Il y a des équations dont les solutions sont *évidentes.* Ainsi, l'équation $x = 3$ n'admet évidemment que la seule solution 3.

La méthode générale de résolution d'une équation consiste à lui faire subir des transformations qui ne changent pas ses solutions jusqu'à ce qu'on obtienne une équation dont les solutions sont évidentes. Les solutions de cette dernière équation sont aussi celles de l'équation proposée.

Pour opérer ces transformations, on se base *sur les principes d'équivalence.*

Remarque. — Dans ce qui suit (**150** à **152**), nous désignons par A, B, ... des expressions contenant les inconnues.

150. Premier principe d'équivalence. — ***Si on ajoute ou si on retranche*** *une même expression algébrique* ***aux deux membres d'une équation, on obtient une équation équivalente.***

Soit $A = B$ (1) une équation et C une expression *contenant ou non les inconnues.* Montrons que cette équation (1) est équivalente à l'équation

$$A + C = B + C. \tag{2}$$

1° *Toute solution de* (1) *est une solution de* (2). — En effet, considérons une solution de l'équation (1). Les valeurs a et b qu'elle donne à A et B sont égales. Par suite, si c est la valeur qu'elle donne à C, on a $a + c = b + c$. Donc la solution considérée de (1) rend $A + C$ égal à $B + C$ et elle est une solution de (2).

2° *Toute solution de* (2) *est une solution de* (1). — En effet, si a', b', c' sont les valeurs qu'une solution de (2) donne à A, B, C, on a l'égalité $a' + c' = b' + c'$. Donc on a aussi $a' = b'$. Ainsi, la solution considérée de (2) rend A égal à B et elle est une solution de (1).

II. *On peut également retrancher une même expression* C *des deux membres d'une équation*, car retrancher C revient à ajouter $-$ C.

Restriction. — La démonstration précédente serait en défaut si les valeurs c et c' de l'expression C n'existaient pas. Ainsi, l'équation $x = 3$ n'est pas équivalente à l'équation

$$x + \frac{1}{x-3} = 3 + \frac{1}{x-3}.$$

Application. — Le principe précédent permet de faire passer un terme d'un membre dans l'autre, *à condition de changer son signe* (**5**).

151. Degré d'une équation entière. — Pour trouver le degré d'une équation entière, on fait passer tous les termes dans le premier membre, puis on réduit les termes semblables. L'équation est alors de la forme $A = 0$, A étant un polynôme entier par rapport aux inconnues.

Le degré de l'équation est le degré du polynôme réduit A *par rapport aux inconnues.*

Exemples. — L'équation $2x - 3y + 5 = 0$ est du 1er degré.
L'équation $xy - x + 3 = 0$ est du second degré.
L'équation $(x-1)^2 + 3x = (x-2)^2$ est du 1er degré, car elle peut s'écrire $5x - 3 = 0$.

152. Deuxième principe d'équivalence. — ***Si on multiplie ou si on divise les deux membres d'une équation par*** un *nombre différent de zéro*, ***on obtient une équation équivalente.***

I. Si m est différent de zéro, les équations

$$A = B \ (1) \quad \text{et} \quad mA = mB \ (2)$$

sont équivalentes. En effet :

1° *Toute solution de* (1) *est une solution de* (2), car, rendant A égal à B, elle rend aussi mA égal à mB.

2° *Toute solution de* (2) *est une solution de* (1). — En effet, toute solution de (2) rend mA égal à mB et par suite, elle annule $m\text{A} - m\text{B}$ ou $m(\text{A} - \text{B})$. Mais m est différent de zéro. Donc elle annule $\text{A} - \text{B}$ et elle rend A égal à B.

II. *On peut diviser les deux membres par un nombre* m, *différent de zéro*, car diviser par m revient à multiplier par l'inverse de m.

Remarques. — I. *On ne peut pas multiplier les deux membres d'une équation par zéro;* une équation du premier degré en x, par exemple, se réduirait à l'identité $0.x = 0$, qui est vérifiée par n'importe quelle valeur de x. Il ne peut être question *de diviser* les deux membres d'une équation par zéro (**50**).

II. *On peut changer les signes des termes d'une équation*, car cela revient à multiplier les deux membres par -1.

III. *On peut multiplier ou diviser par une expression* littérale, *pourvu que cette expression représente un nombre différent de zéro.* Nous parlerons au n° **161** des expressions *renfermant des inconnues.*

153. Troisième principe. — ***Si*** A, B, C ***sont des expressions contenant les inconnues, l'équation*** $\text{ABC} = 0$ ***est*** *ordinairement* ***équivalente à l'ensemble des équations*** $\text{A} = 0$, $\text{B} = 0$, $\text{C} = 0$.

1° *Toute solution de l'équation* $\text{ABC} = 0$ *est une solution d'une des équations* $\text{A} = 0$, $\text{B} = 0$, $\text{C} = 0$, car comme elle annule le produit ABC, elle annule aussi l'un des facteurs A, B, C.

2° *Toute solution d'une des équations* $\text{A} = 0$, $\text{B} = 0$, $\text{C} = 0$ *est ordinairement une solution de l'équation* $\text{ABC} = 0$, car comme elle annule l'une des expressions A, B, C ,elle annule aussi le produit ABC, sauf dans le cas exceptionnel où elle ne donne pas une valeur numérique aux deux autres expressions.

Les racines des équations $x - 1 = 0$ et $\dfrac{x-5}{x-1} = 0$ sont respectivement 1 et 5.

Mais la racine 1 ne vérifie pas l'équation

$$(x - 1) \times \frac{x-5}{x-1} = 0,$$

parce que le second facteur du premier membre n'a pas de valeur numérique pour $x = 1$.

Remarque. — Si A, B, C sont *entiers* par rapport aux inconnues, l'équation $ABC = 0$ est *toujours* équivalente à l'ensemble des équations $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$.

154. Application. — Le 3e principe est très important parce qu'il permet souvent de ramener la résolution d'une équation de degré donné à celle de deux ou de plusieurs équations de degré moindre.

Exemple. — *Résoudre l'équation* $2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$.

Décomposons le premier membre en facteurs (**127**). L'équation devient

$$(x - 1)(x + 1)(2x - 1) = 0.$$

Elle est donc équivalente à l'ensemble des équations

$$x - 1 = 0;\ x + 1 = 0;\ 2x - 1 = 0.$$

Ses solutions sont 1, — 1 et 0,5.

155. Multiplication ou division par un facteur contenant les inconnues. — ***Suivant qu'on*** *multiplie* ***ou qu'on*** *divise* ***les deux membres d'une équation par un facteur*** C ***contenant les inconnues, on s'expose à*** *introduire* ***ou à*** *supprimer* ***les racines de l'équation*** $C = 0$.

En effet, comparons les équations $A = B$ et $AC = BC$. L'équation $AC = BC$ peut s'écrire $(A - B)C = 0$. Donc elle est ordinairement équivalente à l'ensemble des équations $A - B = 0$ et $C = 0$.

Par suite, quand on remplace l'équation $A = B$ par l'équation $AC = BC$, on s'expose à introduire les solutions de l'équation $C = 0$; et quand on remplace l'équation $AC = BC$ par l'équation $A = B$, on s'expose à supprimer les solutions de l'équation $C = 0$.

Exemple. — Comparer les équations

$$x - 3 = 1 \quad \text{et} \quad (x - 3)(x - 1) = x - 1$$

dont la seconde peut s'écrire $(x - 4)(x - 1) = 0$.

156. Application des principes à la résolution des équations. — L'application des principes d'équivalence à la résolution des *équations entières et numériques* ne donne lieu à aucune difficulté.

Il en est tout autrement lorsqu'il s'agit de résoudre *des équations littérales* ou *des équations fractionnaires.*

Voilà pourquoi nous tenons à attirer l'attention sur **les remarques importantes** qui suivent.

I. — ***Chaque fois qu'on est amené à multiplier ou à diviser par un facteur*** *littéral*, ***on doit distinguer deux cas, suivant que le facteur est différent de zéro ou égal à zéro.***

II. ***On ne divise jamais les deux membres d'une équation par un facteur commun aux deux membres et renfermant les inconnues;*** mais on ramène l'équation à la forme $AB = 0$ et on résout séparément les équations $A = 0$ et $B = 0$.

III. ***Pour résoudre une équation fractionnaire,*** on fait disparaître les dénominateurs et on résout l'équation entière ainsi obtenue. Seulement, s'il y a lieu, *on doit exclure ensuite les solutions qui annulent un dénominateur de l'équation fractionnaire.*

En effet, considérons l'équation fractionnaire $\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$ et l'équation $AB' = A'B$ obtenue en multipliant par BB'. L'équation $AB' = A'B$ peut admettre en dehors des solutions de l'équation proposée encore les solutions des équations $B = 0$, $B' = 0$ (**155**). Après avoir résolu l'équation $AB' = A'B$, il est donc nécessaire d'examiner les solutions trouvées en vue d'écarter celles qui annuleraient B ou B'.

157. Résolution d'équations fractionnaires.

I. *Résoudre l'équation* $\frac{x-1}{x+3} = \frac{1-x}{x-3} + 2.$ (1)

Multiplions les deux membres par le p. p. c. m. des dénominateurs, qui est $x^2 - 9$. L'équation devient

$$(x - 1)(x - 3) = (1 - x)(x + 3) + 2(x^2 - 9).$$

Effectuons et reduisons les termes semblables. Il vient

$$-2x = -18; \text{ d'où } x = 9.$$

On peut prévoir que 9 vérifie l'équation (1), car $x = 9$ n'annule aucun dénominateur. En substituant dans (1), on trouve d'ailleurs

$$\frac{8}{12} = \frac{-8}{6} + 2 \quad \text{ou} \quad 8 = -16 + 24.$$

II. *Résoudre l'équation* $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} = 0.$ (1)

En multipliant par $x^2 - 1$, on trouve $x^2 + 2x - 3 = 0.$ (2)

Décomposons le premier membre en facteurs. Il vient

$$(x - 1)(x + 3) = 0.$$

Les solutions de (2) sont donc 1 et -3. La solution $x = 1$ doit être écartée, car elle annule le dénominateur $x^2 - 1$ de l'équation (1).

III. *Résoudre l'équation* $\frac{1+x}{1-x} = \frac{3+x^2}{1-x^2}$. (1)

Multiplions les deux membres par $1 - x^2$. L'équation devient

$$(1+x)^2 = 3 + x^2 \quad \text{ou} \quad 2x = 2. \tag{2}$$

La solution 1 de l'équation (2) ne convient pas à l'équation (1), car elle annule les deux dénominateurs. L'équation (1) est impossible.

IV. On résout parfois des équations analogues à la précédente en appliquant **les propriétés des proportions.** — Soit à résoudre l'équation

$$\frac{3+x}{5+2x} = \frac{5-x}{7-2x}. \tag{1}$$

La somme des antécédents étant à leur différence comme la somme des conséquents est à leur différence, on trouve

$$\frac{8}{2x-2} = \frac{12}{4x-2} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{x-1} = \frac{3}{2x-1}.$$

Égalons le produit des extrêmes et le produit des moyens, puis réduisons. Il vient $x = -1$. La solution de cette équation est -1. Elle convient à l'équation (1), car elle n'annule aucun dénominateur.

§ II. — RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE.

158. Règle. — Les principes d'équivalence conduisent à la règle suivante. Pour résoudre une équation du premier degré :

1° *On fait disparaître les dénominateurs et les parenthèses, puis on effectue les calculs indiqués.*

2° *On transpose dans le premier membre les termes qui renferment l'inconnue et dans l'autre les termes connus.*

3° *On réduit les termes semblables et on met l'inconnue en facteur.*

4° *On divise les deux membres par le coefficient de l'inconnue; on trouve ainsi la solution cherchée.*

159. Équations singulières. — I. *Résoudre l'équation*

$$3(2x-3) - 2(3x-1) = 6.$$

Effectuons et réduisons; nous obtenons ainsi l'équation équivalente

$$0.x - 7 = 6 \quad \text{ou} \quad 0.x = 13.$$

Aucune valeur de x ne vérifie cette équation, car le produit d'un nombre par zéro est égal à zéro. Donc *l'équation proposée n'admet aucune solution.* On dit qu'elle est **impossible.**

II. *Résoudre l'équation* $3(2x - 3) - 2(3x - 1) + 7 = 0.$

En transformant cette équation, on trouve l'équation équivalente

$$0.x = 0.$$

On voit qu'elle est vérifiée par n'importe quelle valeur de x. *Elle admet une infinité de solutions.* On dit qu'elle est **indéterminée.**

EXERCICES

Voir les exercices 1, 2, 3, 105, 121.

Résoudre les équations suivantes :

180. (189)
1° $6(x + 5) - 5x = 25$
2° $4(4 + 2x) = 60 - 3x$
3° $60x + 1 = 3(3 + 4x)$
4° $(5 - x)(x + 4) = 8 - x^2$
5° $(x - 3)^2 - 5(10 + x) = x^2 - 8$
6° $(x + 5)^2 - (x - 5)^2 = 500$
7° $(x - 4)^2 - 5(16 - x) = x(x - 1)$
8° $(x + 2)(x + 3) = x^2 + 366.$

181. (190)
1° $3x + 100 = \frac{x}{3} + \frac{x}{2} - 4$
2° $3x - \frac{1}{2}(4 - x) = x - \frac{1}{3}$
3° $3x - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{5} + 6\right) = 25 + \frac{3x}{2}$
4° $\frac{2x}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{5x}{4} - 4\right) = x + \frac{27}{5}$
5° $\frac{5x - 11}{4} - \frac{x - 1}{10} = \frac{11x - 1}{12}$
6° $\frac{x - 2}{3} - \frac{12 - x}{2} = \frac{5x - 36}{4} - 1$
7° $\frac{x + 1}{2} - \frac{6x + 7}{8} = \frac{4 - 3x}{5} - \frac{1}{8}$
8° $\frac{5x - 1}{7} - \frac{9x - 7}{5} + \frac{9x - 5}{11} = 0.$

182. (191)
1° $x - 7\left(\frac{x}{5} - \frac{x - 5}{4}\right) = 25$
2° $x - \left(\frac{x}{33} + \frac{x - 15}{4\frac{1}{2}}\right) = \frac{12}{11}$
3° $\frac{30}{x + 5} - \frac{15}{3} + \frac{5 + 4x}{x + 5} = 0$
4° $\frac{4}{x + 2} + \frac{7}{x + 3} = \frac{37}{x^2 + 5x + 6}$
5° $\frac{x + 8}{x - 1} - \frac{4 + x}{x + 1} = \frac{12x}{x^2 - 1}$
6° $\frac{3}{3 - 5x - 2x^2} - \frac{3 - 2x}{x + 3} = 2.$

183. (192)
1° $3(x - 1)(x - 2) - (x - 3)(x - 4) = (2x + 7)(x + 4)$
2° $(2x - 3)(3x - 2) - (4x - 5)(5x - 4) = (3 + 2x)(12 - 7x)$
3° $\frac{3 + 2x}{1 + 2x} - \frac{5 + 2x}{7 + 2x} = 1 - \frac{4x^2 - 1}{7 + 16x + 4x^2}$

4° $\dfrac{2x}{x+10} - \dfrac{2(x-5)}{x+20} = \dfrac{160}{x+10} - \dfrac{150}{x+20}$

5° $\dfrac{4x+5}{2x^2-9x+7} - \dfrac{3x}{x-1} = \dfrac{5}{2x-7} - \dfrac{3(x-2)}{x-1}$

6° $5\left(\dfrac{9}{x-5} - \dfrac{5}{x+5}\right) - \dfrac{3(6x+5)}{x^2-25} = \dfrac{25}{x+5}$.

184. (193) Résoudre les équations suivantes en les décomposant d'abord en d'autres équations de degré moindre.

1° $x^2-9=0$
2° $4x^2-1=0$
3° $x^2-3x=0$
4° $x^2-x-6=0$
5° $x^2+10x+21=0$
6° $2x^2+x-15=0$
7° $6x^2-13x+6=0$
8° $x^3-2x^2-3x=0$
9° $x^4-5x^2+4=0$
10° $x^3-7x-6=0$
11° $(x-9)^2-1=0$
12° $(x-4)^2-16=0$
13° $(x-2)^2-9(x-2)=0$
14° $x^3+2x^2-5x-6=0$
15° $3x^3+2x^2-3x-2=0$
16° $x^3+x^2=4x+4$
17° $x^5-2x^4=x-2$
18° $b^2+2ax=x^2+a^2$.

185. (194) Montrer que les équations suivantes sont impossibles ou indéterminées :

1° $2x-\dfrac{2x}{9}=\dfrac{1}{9}\left(16x-\dfrac{3}{2}\right)$

2° $\dfrac{5x}{18}-\dfrac{4x-3}{8}=\dfrac{9-2x}{9}$

3° $\dfrac{3x}{2}-\dfrac{2x}{3}=5\left(\dfrac{x}{6}+1\right)-5$

4° $\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{5}{x-1}=\dfrac{10}{x^2-1}$

5° $\dfrac{2x-3}{5}+\dfrac{x}{2}=\dfrac{3(3x-2)}{10}$

6° $\dfrac{4}{x}+\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{x^2}{x^2+x}$

7° $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{x^2+2}{2(x+2)}+\dfrac{x-1}{x+2}-\dfrac{1}{2}$

8° $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{4}{x+1}\left(\dfrac{1}{x-1}+1\right)$.

186. (195) Résoudre les équations suivantes *(sans discussion)*.

1° $2abx + a^2 = a^2x + b^2x$
2° $2a(x-2a) = x-1$
3° $a^2(x-a) = b^2(x-b)$
4° $a^3(bx-a) = b^3(ax-b)$
5° $(a+x)(b+x) = x(x-c)$
6° $(a-b)(x+a) = (a+b)(x-b)$.

187. (196)

1° $b+\dfrac{ax}{b}=\dfrac{bx}{a}+a$

2° $\dfrac{a(d^2+x^2)}{dx}=\dfrac{ax}{d}+ac$

3° $\dfrac{2(x-a)}{3x-b}=\dfrac{2x+a}{3(x-b)}$

4° $\dfrac{x-a}{2}=\dfrac{(x-b)^2}{2x-a}$

5° $\dfrac{x+a}{b}-\dfrac{x-b}{a}=2$

6° $\dfrac{x}{ab}-\dfrac{a-x}{a(a+b)}=\dfrac{b-x}{b(a+b)}$

7° $\dfrac{a+b}{x}-\dfrac{2b}{a-b}=2-\dfrac{a-b}{x}$

8° $\dfrac{x+a}{a+1}-\dfrac{x-a}{a-1}=\dfrac{4(x-a^2)}{1-a^2}$

9° $\dfrac{2a+x}{2b-x}-\dfrac{2a-x}{2b+x}=\dfrac{4ab}{4b^2-x^2}$

10° $\dfrac{2x+a}{x+3a}+\dfrac{3x^2-22a^2}{x^2-9a^2}=5$.

188. (197) 1° $(b+c)^2 = \dfrac{b^3 - c^3}{b - c} + \dfrac{bc(b+c)}{x}$

2° $(b-c)^2 = \dfrac{b^3 + c^3}{b + c} - \dfrac{bc(b-c)}{x}$

3° $[(a^2 - b^2)x - 1]^2 + (2abx - 1)^2 = [(a^2 + b^2)x + 1]^2$

4° $\dfrac{x + a^2}{(a+b-c)(a-b+c)} + \dfrac{x - b^2 - c^2}{(c-a-b)(b-a-c)} = 1$

5° $\dfrac{(m+n)(mnx + nx^2 + x^3)}{x^3 + nx^2 - m^2x - m^2n} = \dfrac{nx^2}{x^2 - m^2} + \dfrac{mx}{x+n} + \dfrac{mn}{x-m}$

6° $\dfrac{a(a^2x - b^2x)}{b} + \dfrac{b(a^2x - b^2x)}{a} + \dfrac{2ab}{a+b} = \dfrac{(a+b)^2(a^2x - b^2x)}{ab}$

7° $\dfrac{3abc}{a+b} + \dfrac{a^2b^2}{(a+b)^3} - \dfrac{3acx + bx}{a} = -\dfrac{2b^2x}{(a+b)^2} - \dfrac{b^3x}{a(a+b)^2}$

8° $\dfrac{x-(a-1)}{x-a} - \dfrac{x-a}{x-(a+1)} = \dfrac{x-(b-1)}{x-b} - \dfrac{x-b}{x-(b+1)}.$

189. (198) Résoudre les équations suivantes en appliquant les propriétés des proportions.

1° $\dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{a+1}{a-1}$

2° $\dfrac{5+x}{7+x} = \dfrac{4-x}{5-x}$

3° $\dfrac{x+7}{x+4} = \dfrac{x-1}{x-2}$

4° $\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{a+b+1}{a+b-1}$

5° $\dfrac{ax+a}{ax-a} = b$

6° $\dfrac{x+1}{x+a+b} = \dfrac{x-1}{x+a-b}.$

CHAPITRE VII

Équations simultanées.

§ I. — DÉFINITIONS ET PRINCIPES D'ÉQUIVALENCE.

160. On appelle **équations simultanées** des équations qui doivent être vérifiées par les mêmes valeurs des inconnues. On dit encore que ces équations forment un **système**.

Une **solution d'un système** d'équations est un ensemble de valeurs, une pour chaque inconnue, qui, mises à la place des inconnues, vérifient toutes les équations.

Exemple. — La solution du système $2x - y = 3$, $x + y = 9$ est

$$x = 4, \quad y = 5.$$

Deux systèmes sont **équivalents** *lorsqu'ils admettent* **les mêmes solutions**, *c'est-à-dire quand toute solution du premier est une solution du second et réciproquement.*

Résoudre un système, *c'est chercher ses solutions.* La résolution d'un système est basée sur le fait que dans un système, on peut évidemment remplacer une équation par une autre équivalente et sur les deux principes d'équivalence suivants.

161. Premier principe. — ***Si dans un système d'équations, on remplace une équation par l'équation obtenue en additionnant membre à membre*** *cette équation* ***et une ou plusieurs autres, on obtient un système équivalent au système donné.***

On donne le système $A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0.$ (1)

Je dis qu'il est équivalent au système

$$A = 0, \quad B = 0, \quad A + C = 0. \tag{2}$$

En effet, toute solution du système (1), annulant A et C, annule aussi $A + C$. *Réciproquement*, toute solution du système (2) annule A et $A + C$; donc aussi C.

Extension. — On démontre d'une façon analogue qu'on peut remplacer une équation par celle que l'on obtient en multipliant les deux membres de chaque équation par un même nombre et en ajoutant membre à membre les équations ainsi transformées, *pourvu que le facteur qui correspond à l'équation que l'on remplace, soit différent de zéro.*

Ainsi, si m est différent de zéro, le système (1) est équivalent au système

$$mA + nB + pC = 0, \quad B = 0, \quad C = 0.$$

162. Deuxième principe. — ***Si on résout une équation d'un système par rapport à une inconnue et si on remplace dans les autres équations cette inconnue par le résultat trouvé, on obtient un nouveau système équivalent au système donné.***

Considérons, par exemple, le système

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} ax + by + cz = d & (1) \\ a'x + b'y + c'z = d' & (2) \\ a''x + b''y + c''z = d''. & (3) \end{cases}$$

Si a est différent de zéro, l'équation (1) peut être résolue par rapport à x. Remplaçons alors x par la valeur trouvée dans les équations (2) et (3). Le système devient :

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{a}(d - by - cz) & (4) \\ \dfrac{a'}{a}(d - by - cz) + b'y + c'z = d' & (5) \\ \dfrac{a''}{a}(d - by - cz) + b''y + c''z = d''. & (6) \end{cases}$$

Les systèmes (I) *et* (II) *sont équivalents.* En effet :

1° *Toute solution de* (I) *est une solution de* (II).

Toute solution du système (I) vérifie l'équation (1); donc aussi l'équation équivalente (4). Il en résulte qu'elle donne des valeurs égales à x et à l'expression $\frac{1}{a}(d - by - cz)$. Par suite, elle vérifie les équations (5) et (6), qui ne diffèrent des équations (2) et (3) que par la substitution de $\frac{1}{a}(d - by - cz)$ à x.

2° *Toute solution de* (II) *est une solution de* (I).

Toute solution du système (II) vérifie l'équation (4); donc aussi l'équation équivalente (1). De plus, elle vérifie les équations (5) et (6), et elle donne des valeurs égales à x et à l'expression $\frac{1}{a}(d - by - cz)$; donc elle vérifie également les équations (2) et (3).

§ II. — SYSTÈMES DE DEUX ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A DEUX INCONNUES.

163. Cas particulier. — *L'une des équations ne renferme qu'une inconnue.* — Soit le système

$$2x = 6; \quad x + 4y = 7.$$

La première équation donne $x = 3$. Si on remplace x par sa valeur dans la seconde équation, on trouve $4y = 4$; d'où $y = 1$. La solution est $x = 3$, $y = 1$.

164. Règle générale. — Pour résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues :

1° *On transforme le système en un système équivalent dans lequel une équation ne renferme plus l'une des inconnues*; c'est ce qu'on appelle **éliminer cette inconnue** entre les deux équations.

2° *On résout le système ainsi obtenu* (**163**).

Il y a trois méthodes d'élimination dont la deuxième n'est guère employée.

165. Méthode par substitution. — *Pour éliminer une inconnue, on tire sa valeur d'une équation et on substitue cette valeur dans l'autre équation.*

Soit le système

$$3x + 2y = 19; \quad 2x - 3y = 4.$$

Éliminons y entre les deux équations. La première équation donne

$$y = \frac{19 - 3x}{2}.$$

Remplaçant dans la seconde équation, il vient

$$2x - \frac{3(19 - 3x)}{2} = 4 \quad \text{ou} \quad 13x = 65.$$

En vertu du deuxième principe d'équivalence, le système proposé est équivalent au système

$$y = \frac{19 - 3x}{2}; \quad 13x = 65.$$

La solution est $x = 5$; $y = 2$.

166. Méthode par comparaison. — *Pour éliminer une inconnue, on tire sa valeur des deux équations et on égale les résultats trouvés.* — Soit le système

$$3x + 2y = 19; \quad 2x - 3y = 4.$$

En vue d'éliminer x, résolvons les deux équations par rapport à x.

$$x = \frac{19 - 2y}{3}; \quad x = \frac{4 + 3y}{2}.$$

s de x, ce qui revient à remplacer x dans la deuxième
rée de la première. Il vient

$$-2y \quad \frac{4+3y}{2} \quad \text{ou} \quad 13y = 26.$$
$$3$$

rincipe, le système proposé est équivalent au système

$$x = \frac{4+3y}{2}; \quad 13y = 26.$$

$$x = 5.$$

réduction au même coefficient. — *Pour*
on multiplie les deux équations par des facteurs appropriés pour donner à une inconnue des coefficients opposés (ou égaux) *dans les deux équations; puis on les additionne* (ou on les soustrait) *membre à membre.*

Soit le système

$$\begin{cases} 8x + 15y = 31 \\ 7x - 10y = 4. \end{cases}$$

En vue d'éliminer y, multiplions les deux membres de la première équation par 2 et ceux de la seconde par 3; ainsi les coefficients de y deviendront égaux en valeur absolue à 30, qui est le p. p. c. m. de 15 et 10. Le système devient

$$\begin{cases} 16x + 30y = 62 \\ 21x - 30y = 12. \end{cases}$$

En additionnant ces deux équations membre à membre, on obtient l'équation $37x = 74$ et en vertu du premier principe, le système proposé est équivalent au système

$$37x = 74; \quad 8x + 15y = 31.$$

D'où $x = 2$; puis, $y = 1$.

Remarque. — Reprendre l'exercice précédent, en éliminant x. Les calculs sont un peu plus compliqués, parce que le p. p. c. m. de 8 et 7 est supérieur à celui de 15 et 10.

168. Règle pratique. — On emploie d'ordinaire la méthode par réduction, mais en procédant comme suit :

On choisit les multiplicateurs de telle sorte que les coefficients de l'inconnue à éliminer deviennent **des nombres opposés**; *on place chaque multiplicateur en regard de l'équation correspondante; on effectue ensuite mentalement les multiplications et les additions.*

Soit à résoudre le système

$$\begin{array}{ll} 3x + 4y = 5 \ (1) & \left| \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array} \right| \begin{array}{r} 2 \\ -3 \end{array} \right| \\ 2x - 3y = 9 \ (2) & \end{array}$$

Éliminons y en ajoutant à l'équation (1), multipliée par 3, l'équation (2) multipliée par 4; il vient

$$17x = 51; \quad \text{d'où} \quad x = 3.$$

En substituant cette valeur de x dans l'équation (1), par exemple, on trouve $y = -1$. On aurait pu trouver y également, en éliminant x à l'aide des multiplicateurs 2 et -3.

169. Règles de Cramer. — Considérons le système

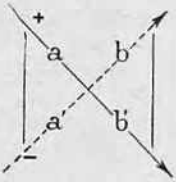
$$\begin{array}{ll} ax + by = c & \left| \begin{array}{c} b' \\ -b \end{array} \right| \begin{array}{c} -a' \\ a \end{array} \right| \\ a'x + b'y = c' & \end{array}$$

Pour le résoudre, on peut employer successivement les deux paires de multiplicateurs marqués. On obtient ainsi la solution

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}; \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

De ce résultat on déduit les règles suivantes :

I. Pour obtenir *le dénominateur commun* des inconnues, on range les quatre coefficients des inconnues en tableau carré; on forme ensuite le produit des nombres placés sur la diagonale descendante (de gauche à droite) et on y ajoute le produit, *pris en signe contraire*, des nombres placés sur l'autre diagonale.



Le tableau carré qu'on vient de former, s'appelle **déterminant du deuxième ordre.**

II. *Le numérateur* d'une inconnue s'obtient d'une façon analogue après avoir remplacé, dans le déterminant précédent, les coefficients de l'inconnue cherchée par les termes connus, *pris dans les seconds membres.*

EXEMPLE. — Soit à résoudre le système

$$3x - 2y = -14$$
$$x + 4y = 0.$$

Désignons le dénominateur commun par D, le numérateur de x par N_x, le numérateur de y par N_y; il vient :

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 2 = 14;$$

$$N_x = \begin{vmatrix} -14 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -56; \quad N_y = \begin{vmatrix} 3 & -14 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 14;$$

puis,

$$x = \frac{-56}{14} = -4; \quad y = \frac{14}{14} = 1.$$

§ III. — SYSTÈME DE n ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A n INCONNUES.

170. Élimination d'une inconnue. — *Éliminer une inconnue entre les* n *équations d'un système, c'est remplacer le système par un système équivalent de* n *équations dans lequel* n — 1 *équations ne renferment plus cette inconnue.*

La résolution d'un système du premier degré se fait ordinairement à l'aide de plusieurs éliminations successives en appliquant l'une ou l'autre des trois méthodes étudiées précédemment.

171. Exemple I. — Soit à résoudre le système

$$(\mathrm{I}) \left\{ \begin{array}{ll} 2x - y + 3z = 7 & (1) \\ x - 2y + 4z = 3 & (2) \\ 3x - 7y + 8z = 3 & (3) \end{array} \right. \left| \begin{array}{r} 1 \\ -2 \\ \end{array} \right| \begin{array}{r} \\ 3 \\ -1 \end{array} \Bigg|$$

Éliminons x entre les trois équations. A cet effet, multiplions l'équation (1) par 1 et l'équation (2) par -2; puis additionnons membre à membre. Multiplions ensuite l'équation (2) par 3 et l'équation (3) par -1; puis additionnons membre à membre. Les équations ainsi obtenues $3y - 5z = 1$, $y + 4z = 6$ peuvent remplacer les équations (1) et (3) en vertu du premier principe d'équivalence. Le système (I) est donc équivalent au système

$$(\mathrm{II}) \left\{ \begin{array}{ll} x - 2y + 4z = 3 & (2) \\ 3y - 5z = 1 & (4) \\ y + 4z = 6 & (5) \end{array} \right. \left| \begin{array}{r} \\ -1 \\ 3 \end{array} \right.$$

En éliminant y entre les équations (4) et (5) à l'aide des multiplicateurs marqués, on obtient l'équation $17z = 17$ qui peut remplacer l'équation (4) en vertu du premier principe d'équivalence. Le système (I) est donc équivalent au système

$$(\mathrm{III}) \left\{ \begin{array}{ll} x - 2y + 4z = 3 & (2) \\ y + 4z = 6 & (5) \\ 17z = 17 & (6) \end{array} \right.$$

L'équation (6) donne $z = 1$. L'équation (5) peut alors s'écrire $y + 4 = 6$; d'où $y = 2$. Ainsi, l'équation (2) devient $x - 4 + 4 = 3$; d'où $x = 3$.

La solution du système proposé est $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$.

Remarque. — Dans chacune des deux éliminations, nous avons éliminé l'inconnue ayant les coefficients les plus simples.

172. Méthode de résolution. — Pour résoudre un système de n équations à n inconnues, on procède comme pour l'exemple précédent.

1° *Par des éliminations successives, on transforme le système proposé en un système équivalent de* n *équations qui renferment respectivement*

$$n \text{ inc.};\quad n-1 \text{ inc.};\quad \ldots;\quad 2 \text{ inc.};\quad 1 \text{ inc.}$$

2° *On résout ensuite ces équations en commençant par la dernière pour remonter jusqu'à la première.*

173. Exemple II. — Soit à résoudre le système

$$\begin{array}{rl|c|c|c|}
x + 2y + z - 2u = 2 & (1) & 3 & 2 & 4 \\
3x - 3y - 2z + 2u = 1 & (2) & -1 & & \\
2x + y + 3z - u = 10 & (3) & & -1 & \\
4x - y - z + 3u = 0 & (4) & & & -1
\end{array}$$

Éliminons x à l'aide des multiplicateurs marqués. Nous obtenons les équations

$$\begin{array}{rl|c|c|}
9y + 5z - 8u = 5 & (5) & 1 & \\
3y - z - 3u = -6 & (6) & -3 & -3 \\
9y + 5z - 11u = 8 & (7) & & 1
\end{array}$$

qui peuvent remplacer les équations (2), (3), (4). Éliminons ensuite y à l'aide des multiplicateurs marqués. Nous obtenons les équations

$$8z + u = 23 \tag{8}$$
$$8z - 2u = 26 \quad \text{ou} \quad 4z - u = 13, \tag{9}$$

qui peuvent remplacer les équations (5) et (7).

Il reste à résoudre le système formé par les équations (1), (6), (8) et (9). Les deux dernières donnent $z = 3$, $u = -1$. Les équations (6) et (1) donnent alors $y = -2$, $x = 1$.

La solution du système est $x = 1$, $y = -2$, $z = 3$, $u = -1$.

174. Cas particulier. — *Si toutes les inconnues n'entrent pas dans chaque équation*, on peut souvent abréger les calculs. Voici deux exemples.

I. L'inconnue z ne se trouve que dans deux équations du système

$$3x - y + 2z = 1;\quad 3y - 4x = 1;\quad 2x + y + 3z = 4.$$

On commencera par éliminer z entre ces deux équations. En calculant ensuite x et y, on trouve $x = 2$, $y = 3$. La première équation donne alors $z = -1$.

II. Les deux dernières équations du système

$$2x - 4y + z + 3u = 23, \quad 5x + 3y - z + u = 8,$$
$$2y - 3z = -11, \quad y + 2z = 5$$

ne renferment que y et z. Ces deux équations donnent $y = -1$ et $z = 3$. En remplaçant y et z par ces valeurs dans les deux premières équations, on obtient le système

$$2x + 3u = 16; \quad 5x + u = 14.$$

D'où $x = 2$ et $u = 4$.

175. Artifices de calcul. — I. *Résoudre le système*

$$\mathrm{x + y = a; \quad y + z = b; \quad z + x = c.}$$

En additionnant ces équations membre à membre, on trouve

$$x + y + z = \frac{a + b + c}{2}. \tag{1}$$

Retranchons de l'équation (1) successivement chacune des équations données. On obtient ainsi la solution du système.

$$z = \frac{-a + b + c}{2}; \quad x = \frac{a - b + c}{2}; \quad y = \frac{a + b - c}{2}.$$

II. *Résoudre le système*

$$\frac{\mathrm{xy}}{\mathrm{x + y}} = \frac{10}{3}; \quad \frac{\mathrm{yz}}{\mathrm{y + z}} = \frac{5}{4}; \quad \frac{\mathrm{xz}}{\mathrm{x + z}} = \frac{2}{3}.$$

En renversant les rapports, on obtient le système

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{10}; \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5}; \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{3}{2}.$$

C'est un système de trois équations du 1er degré en $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$, qu'on peut considérer comme **inconnues auxiliaires**. En le résolvant par rapport à ces inconnues, on trouve

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}; \ \frac{1}{y} = -\frac{1}{5}; \ \frac{1}{z} = 1; \quad \text{puis,} \quad x = 2; \ y = -5; \ z = 1.$$

Remarque. — Pour résoudre le système

$$2(2x - y + 1) - (x - 2y + 1) = 4$$
$$3(2x - y + 1) + 5(x - 2y + 1) = 45,$$

on peut de même le considérer comme un système de deux équations du 1er degré en $2x - y + 1$ et $x - 2y + 1$. On trouve ainsi

$$2x - y + 1 = 5; \ x - 2y + 1 = 6; \quad \text{puis,} \quad x = 1, \ y = -2.$$

III. Le système suivant est particulièrement remarquable.

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}; \quad mx - ny + pz = d.$$

Les rapports égaux peuvent s'écrire

$$\frac{mx}{ma} = \frac{ny}{nb} = \frac{pz}{pc}.$$

On applique ensuite les propriétés des fractions égales, *de façon à faire paraître* $mx - ny + pz$ ou d. Il vient ainsi

$$\frac{mx - ny + pz \text{ ou } d}{ma - nb + pc} = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

De là, on tire x, y et z.

§ IV. — SYSTÈMES IMPOSSIBLES OU INDÉTERMINÉS.

176. Systèmes de deux équations du 1er degré à deux inconnues. — Exemples.

I. *Résoudre le système* $\begin{cases} 2x + 3y = 7 & (1) \\ 4x + 6y = 10. & (2) \end{cases}$

L'élimination de x, par substitution, donne le système équivalent

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 & (3) \\ 0.y = -4. & (4) \end{cases}$$

L'équation (4) est impossible. Par suite, le système lui-même n'admet *aucune solution*. On dit que le système est **impossible**, ou encore, que les équations sont **incompatibles**.

Remarque. — L'examen du système fait prévoir l'impossibilité. Comme le 1er membre de (2) est le double du 1er membre de (1), il faudrait que le 2e membre de (2) fût aussi le double du 2e membre de (1).

Nous verrons dans la suite que *deux équations du 1er degré à deux inconnues sont toujours incompatibles quand les coefficients des inconnues sont proportionnels sans que les termes indépendants soient dans le même rapport* (**210**).

II. *Résoudre le système* $\begin{cases} 2x + 3y = 7 & (1) \\ 4x + 6y = 14. & (2) \end{cases}$

L'élimination de x, par substitution, donne le système équivalent

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 & (3) \\ 0.y = 0. & (4) \end{cases}$$

Tout nombre est solution de l'équation (4). Elle permet d'attribuer à y une valeur arbitraire. A chaque valeur de y, l'équation (3) fait correspondre une valeur de x. *Le système admet donc une infinité de solutions*, qu'on ne peut cependant prendre arbitrairement. Ainsi pour $y = 1$, l'équation (3) donne $2x = 4$ ou $x = 2$.

On dit que le système est **partiellement indéterminé** ou que les équations **ne sont pas distinctes.**

REMARQUES. — I. Cette dernière dénomination provient de ce que les deux équations sont *équivalentes*, la seconde ayant été obtenue en multipliant les deux membres de la première par 2. En général, *deux équations ne sont pas distinctes, quand les coefficients des inconnues et les termes connus sont proportionnels* (**152**).

II. Les deux systèmes que nous venons de résoudre sont *des systèmes singuliers*. Ordinairement, un système de deux équations du 1er degré à deux inconnues admet une solution unique et déterminée. Un système de n équations du 1er degré à n inconnues peut également être impossible ou indéterminé; mais en général, il admet une solution unique.

177. Systèmes renfermant plus d'inconnues que d'équations. — EXEMPLES.

I. *Résoudre l'équation* $2x - 3y = 6$.

En résolvant l'équation par rapport à x, on obtient l'équation équivalente $$x = \frac{3y + 6}{2}.$$

Pour $y = 2$, on a $x = 6$; pour $y = 4$, on a $x = 9$; etc.

L'équation proposée est *partiellement indéterminée.* On peut attribuer des valeurs arbitraires à l'une des inconnues et à chacune de ces valeurs correspond une valeur de l'autre inconnue.

II. *Résoudre le système* $\left\{\begin{array}{l} x + 2y - 3z = 5 \\ 2x - y + 4z = 1. \end{array}\right.$

En résolvant le système par rapport à x et y, on trouve le système équivalent

$$x = \frac{7 - 5z}{5}; \quad y = \frac{9 + 10z}{5}.$$

Le système est *partiellement indéterminé.* On peut attribuer des valeurs arbitraires à z. Voici deux solutions.

$$z = 1,\ x = \frac{2}{5},\ y = \frac{19}{5}; \quad z = 2,\ x = -\frac{3}{5},\ y = \frac{29}{5}.$$

178. Généralisation. — ***Un système de** n **équations du premier degré à** $n + k$ **inconnues est** ordinairement **indéterminé.***

En effet, considérons n inconnues comme étant *les inconnues principales*. On peut d'ordinaire résoudre le système par rapport à ces n inconnues. Aux k inconnues qui se trouvent dans les valeurs trouvées, on pourra attribuer des valeurs arbitraires. On aura donc une infinité de solutions.

Voici un système de 2 équations à 3 inconnues qui n'est pas indéterminé.

$$x + 2y - 3z = 5, \qquad (1)$$
$$2x + 4y - 6z = 9. \qquad (2)$$

En effet, si on divise les deux membres de (2) par 2, on a deux équations dont les premiers membres sont identiques sans que les seconds le soient; le système est donc impossible.

179. Systèmes renfermant plus d'équations que d'inconnues. — EXEMPLES.

I. *Résoudre le système* $\begin{cases} 3x = 6. & (1) \\ 2x = 7. & (2) \end{cases}$

L'équation (1) donne $x = 2$. L'équation (2) n'est pas vérifiée pour $x = 2$. Donc le système est *impossible.*

II. *Résoudre le système* $\begin{cases} 5x - y = 3 & (1) \\ 2x + y = 4 & (2) \\ x + 3y = 1. & (3) \end{cases}$

Les équations (1) et (2) donnent $x = 1$, $y = 2$; et cette solution ne vérifie pas l'équation (3). Le système est *impossible.*

180. Généralisation. — ***Un système de** $n + k$ **équations du premier degré à** n **inconnues est** ordinairement **impossible.***

En effet, le système formé par n de ces équations, admet d'ordinaire une solution. Or il est exceptionnel que cette solution vérifie les k équations restantes.

Voici deux systèmes renfermant plus d'équations que d'inconnues, qui ne sont pas impossibles.

I. Le système $5x - y = 3$, $10x - 2y = 6$, $x - 3y = -5$ donne une solution unique $x = 1$, $y = 2$; les deux premières équations ne sont pas distinctes.

II. Le système $5x - y = 3$, $10x - 2y = 6$, $15x - 3y = 9$ est indéterminé, car les trois équations sont équivalentes.

EXERCICES

SYSTÈMES DE 2 ÉQUATIONS A 2 INCONNUES.

Résoudre les systèmes suivants :

190. (199) 1° $3x + 4y = 24$, $5y = 15$

2° $x + y = 19$, $2x - y = 2$

3° $12x - 5y = 29$, $4x - 3y = 11$

4° $x + y = 28$, $3x - 11y = 8y - 48$

5° $5x = y$, $12x - 2y = 10$

6° $2x + 3y = 4$, $3y + 10x = 44$

7° $2x - 3y + 25 = 0$, $4x - y - 25 = 0$

8° $x + 3y = 11$, $5y - 3(x - 1) = 68$

9° $12x + 11y = 6$, $3y - 2x = 28$

10° $2x + 5y = 69$, $y - 4(x - 7) = 67 - 3x$

11° $72x + 14y = 330$, $63x + 7y = 273$

12° $21x + 8y + 66 = 0$, $28x - 23y - 13 = 0$.

191. (200) 1° $x + \dfrac{3y}{7} = 17$, $y - \dfrac{5x}{8} = 16$

2° $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} = 9$, $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{5} = 7$

3° $\dfrac{4x - 5}{2y - 3} = 3$, $\dfrac{3x + 5}{y + 1} = 4$

4° $\dfrac{x - 1}{8} + \dfrac{y - 2}{5} = 2$, $2x + \dfrac{2y - 5}{3} = 21$

5° $\dfrac{x - 4}{3} - \dfrac{3y + 4}{10} = x - y$, $\dfrac{2x - 5}{5} - \dfrac{2y - 4}{4} = x - 12$

6° $\dfrac{4x + 15}{3} - \dfrac{3y - 5}{5} = x$, $\dfrac{2y + 3x}{4} + \dfrac{y + 15}{5} = y$

7° $\dfrac{x - y}{3} - \dfrac{1}{4}\left(x - \dfrac{10 - 2y}{3}\right) = 3$, $\dfrac{x - 5y}{5} + \dfrac{x + 2}{2} = x - 4$

8° $\dfrac{3x}{5} + \dfrac{4y}{10} = \dfrac{x - y}{5}$, $\dfrac{10(2x + 3)}{11} - 2\left(y - \dfrac{3x - 5}{8}\right) = 60$

9° $\dfrac{13}{3 + x + 2y} + \dfrac{3}{6 + 4x - 5y} = 0$, $\dfrac{6x - 5y + 4}{3} = \dfrac{3x + 2y + 1}{19}$

10° $\dfrac{x + 5}{x + 1} = \dfrac{y - 9}{y + 7} + \dfrac{112}{(x + 1)(y + 7)}$, $2x + 10 = 3y + 1$.

192. (201) Résoudre les systèmes littéraux suivants (*sans discussion*).

1° $x + y = 2a$
$x - y = 2b$

2° $ax + by = 2ab$
$bx + ay = a^2 + b^2$

3° $x + y = a - 2b$
$bx + ay + b^2 = 0$

4° $x + y = c$
$ax - by = c(a - b)$

5° $ax + by = 2a$
$a^2x - b^2y = a^2 + b^2$

6° $ax + by = a^3 + 2a^2b + b^3$
$bx + ay = a^3 + 2ab^2 + b^3$

7° $(a + b)x - (a - b)y = 4ab$
$(a - b)x + (a + b)y = 2a^2 - 2b^2$

8° $(a + b)x + (a - b)y = 2ab$
$(a + c)x + (a - c)y = 2ac.$

193. (202)

1° $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 2$
$bx - ay = 0$

2° $\dfrac{x}{a+b} + \dfrac{y}{a-b} = 2a$
$\dfrac{x-y}{2ab} = \dfrac{x+y}{a^2+b^2}$

3° $\dfrac{x}{a+b} + \dfrac{y}{a-b} = \dfrac{1}{a-b}$
$\dfrac{x}{a+b} - \dfrac{y}{a-b} = \dfrac{1}{a+b}$

4° $\dfrac{1}{a-x} + \dfrac{1}{a+y} = \dfrac{3a}{(a-x)(a+y)}$
$\dfrac{a+x}{a} = \dfrac{a-y}{b}$

5° $(a - b)x + y = \dfrac{a+b+1}{a+b}$
$x + (a + b)y = \dfrac{a-b+1}{a-b}$

6° $\dfrac{x-a}{y-a} = \dfrac{a-b}{a+b}$
$\dfrac{x}{y} = \dfrac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$

SYSTÈMES A PLUS DE DEUX INCONNUES.

194. (203) Résoudre les systèmes suivants :

1° $4x + 3y + 6z = 41$
$8x + 5y = 31$
$7x = 21$

2° $2x - 3y + 2z = 41$
$5x + 3y = 10 - z$
$9x = 27$

3° $7x - 4y - 5z = 56$
$3y - 2z = 13$
$5x - 3y = 22$

4° $6x - y + 3z = 38$
$5x - 2y + z = 24$
$3x + 5z = 28$

5° $x + y + z = 25$
$x - y + z = 5$
$x + 2z = 2y - 10$

6° $x - y - z = 6$
$x - 2y - 3z = 10$
$5x + 6y + z = 2$

7° $3z - 2y - x = 18$
$2y + 3z - 2x = 36$
$5x + 2y - z = 10$

8° $x + 4y - z = 1$
$2x - 3y + 2z = 21$
$2y - x + z = 17$

9° $3x - y + z = 29$
$x + 3y + 30z = 6$
$x - y + z = 17$

10° $2x + 3y + 4z = 53$
$3x + 5y - 4z = 2$
$4x + 7y - 2z = 31$

11° $\begin{aligned} &x + y + z = 0 \\ &(b+c)x+(a+c)y+(a+b)z=0 \\ &bcx + acy + abz = 1 \end{aligned}$

12° $\begin{aligned} &x + ay + a^2z = a^3 \\ &x + by + b^2z = b^3 \\ &x + cy + c^2z = c^3. \end{aligned}$

195. (204) 1° $\begin{aligned} &x - \frac{4y-3}{3} + \frac{z-2}{2} = 2 \\ &\frac{x}{5} - \frac{3y}{2} + 3z = 22 \\ &\frac{x-1}{4} - \frac{y-1}{5} = \frac{z-10}{10} \end{aligned}$

2° $\begin{aligned} &\frac{4x-7}{3} - \frac{2(y-2)}{3} = z \\ &\frac{3x}{7} + \frac{2y-1}{7} - 5z = 1 \\ &\frac{2x+y}{5} + \frac{z}{4} = 5\frac{1}{4} \end{aligned}$

3° $\begin{aligned} &\frac{x+2y-3z}{13} - 4z = 3(x+2) \\ &\frac{5x-1}{7} + 2y - z = 33 \\ &x + \frac{2y+7}{5} - z = 3x - 7 \end{aligned}$

4° $\begin{aligned} &x + y + z = a + b \\ &\frac{1}{x-y} = \frac{1}{2b} \\ &\frac{x}{y-z} - \frac{1}{2} = \frac{b}{a-b}. \end{aligned}$

196. (205) 1° $\begin{aligned} &x + y + z + v = 10 \\ &2x - y + z = 3 \\ &4y + 3z = 17 \\ &7y - 3z = 5 \end{aligned}$

2° $\begin{aligned} &2x - y + 2z - v = 20 \\ &5x - 2y + v = 11 \\ &4x + y - 3v = 20 \\ &2x - 3y + 2v = 3 \end{aligned}$

3° $\begin{aligned} &5x + y + 2z + 3v = 51 \\ &3x - 4y + 2z + v = 12 \\ &x + 4y - v = 10 \\ &x - 2y + 4v = 27 \end{aligned}$

4° $\begin{aligned} &2x + y + 2z + 3v = 52 \\ &x - y + z - 2v = 0 \\ &2x - 3y + 2z - v = 4 \\ &3x + 5z - 4v = 44 \end{aligned}$

5° $\begin{aligned} &4y - 5x - v - 3z = -6 \\ &3z - 2x + v + y = 12 \\ &2z + y - 5x - v = 7 \\ &2x - 3y + 3z + 4v = -5 \end{aligned}$

6° $\begin{aligned} &x - y - z - v = 8 \\ &2x + y + z - u = 8 \\ &y + z - u - v = 0 \\ &z + 2x - u - y = 16 \\ &x - 3v + 2u - 3z = 4. \end{aligned}$

ARTIFICES DE CALCUL.

197. (206) Résoudre les systèmes suivants :

1° $\begin{aligned} &x + y = 10 \\ &x + z = 19 \\ &y + z = 23 \end{aligned}$

2° $\begin{aligned} &x + y - z = 17 \\ &x - y + z = 13 \\ &y + z - x = 7 \end{aligned}$

3° $\begin{aligned} &x + y + z = 3 \\ &y + z + u = -2 \\ &z + u + x = 6 \\ &u + x + y = 2 \end{aligned}$

4° $\begin{aligned} &x + y = 18 \\ &y + z = 14 \\ &z + v = 10 \\ &v + u = 6 \\ &u + x = 12 \end{aligned}$

5° $\begin{aligned} &\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{9}{20} \\ &\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{13}{15} \\ &\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{11}{12} \end{aligned}$

6° $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{13}{12}$

$\frac{2}{x}-\frac{1}{y}+\frac{2}{z}=\frac{7}{6}$

$\frac{3}{x}-\frac{1}{y}+\frac{5}{z}=\frac{29}{12}$

7° $\frac{xy}{x+y}=\frac{8}{3}$

$\frac{yz}{y+z}=\frac{8}{5}$

$\frac{xz}{x+z}=\frac{4}{3}$

198. (207) 1° $\frac{xy}{3x-4y}=\frac{2}{11}$

$\frac{yz}{2y+3z}=\frac{6}{5}$

$\frac{xz}{x-z}=\frac{3}{2}$

2° $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}-\frac{c}{z}=a$

$\frac{a}{x}-\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=b$

$\frac{b}{y}-\frac{a}{x}+\frac{c}{z}=c$

3° $\frac{xy}{ay+bx}=\frac{1}{c}$

$\frac{xz}{az+cx}=\frac{1}{b}$

$\frac{yz}{bz+cy}=\frac{1}{a}$

4° $yz+xz-6xy=9xyz$

$yz-xz+4xy=5xyz$

$3xz-2yz-xy=4xyz$

5° $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{y+1}=2$

$\frac{3}{x-1}-\frac{4}{y+1}=11$

6° $\frac{1}{3x-2y}+\frac{1}{2x-3y}=\frac{5}{8}$

$\frac{1}{2x-3y}-\frac{1}{3x-2y}=\frac{3}{8}$

7° $\frac{x}{4}=\frac{y}{3}=\frac{z}{2}$

$2x-y-z=6$

8° $\frac{x+1}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{x+y}{5}.$

199. (208) 1° $\frac{x-1}{5}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{3}$

$2x+3y+4z=37$

2° $\frac{21}{3x+4y-17}+\frac{105}{8x-7y+22}=4$

$\frac{3x+4y-17}{3}=\frac{8x-7y+22}{5}$

3° $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{5}=\frac{3x-y+9}{3}$

4° $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{u}{d}$

$x+y-z+u=k$

5° $mx=ny=pz$

$ax+by+cz=d.$

SYSTÈMES IMPOSSIBLES OU INDÉTERMINÉS.

200. (209) Pour chacune des équations suivantes, trouver une autre équation formant avec elle, soit un système *impossible*, soit un système *indéterminé*. Vérifier chaque fois.

1° $3x - 5y = 7$

2° $x - y = 4$

3° $-2x + 3y = 17$

4° $\frac{x}{3} - \frac{2y}{5} = 1$

5° $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{2}{5}$.

201. (210) Examiner les systèmes suivants pour voir quels sont ceux qui sont *impossibles* ou *indéterminés*.

1° $x - 2y = 3$
$3x - 6y = 9$

2° $7x - 5 = 6y + 3$
$y + 7x = 7y + 12$

3° $2(x + y) = 5$
$\frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1$

4° $3x + 2y = 4$
$\frac{x+3}{x-2} = \frac{y+2}{y+1}$

5° $y - x = 0$
$3x = 3y + 7$

6° $\frac{x-3}{y+2} = \frac{2}{3}$
$\frac{x+3}{y-2} = -\frac{3}{2}$

7° $x + y - z = 5$
$3x - 2y + z = 4$

8° $5x - 2y = 7$
$10x + 3y = 7$
$x - 5y = 7$

9° $3x - 2y = 5$
$x - 3y = 4$
$7x + 5y = 2$

10° $4x - 3y = 11$
$4x + 7y = 1$
$4x + 2y = 6$

11° $x + y + z = 9$
$x + 2y + 3z = 14$
$3x + 2y + z = 22$

12° $2x - y + z = 16$
$3x + 2y - z = 5$
$9x - y + 2z = 40$.

CHAPITRE VIII

Inégalités et Inéquations.

§ I. — INÉGALITÉS.

181. Définitions. — On dit que a est **plus grand** que b, quand la différence $a - b$ est positive; et que a est **plus petit** que b, quand la différence $a - b$ est négative.

Ainsi, on a :

$$5 > -3, \quad \text{car} \quad 5 - (-3) = +8.$$
$$-5 > -9, \quad \text{car} \quad -5 - (-9) = +4.$$
$$-5 < 2, \quad \text{car} \quad -5 - (+2) = -7.$$

182. Conséquences. — I. *Tout nombre positif est plus grand que zéro et tout nombre négatif est plus petit que zéro.* — Ainsi, on a

$$+3 > 0, \quad \text{car} \quad +3 - 0 = +3;$$
$$-5 < 0, \quad \text{car} \quad -5 - 0 = -5.$$

II. *Tout nombre positif est plus grand que tout nombre négatif.* — On a, par exemple,

$$7 > -20, \quad \text{car} \quad 7 - (-20) = +27.$$

III. *De deux nombres négatifs, le plus grand est celui qui a la plus petite valeur absolue.* — On a, par exemple,

$$-4 > -7, \quad \text{car} \quad -4 - (-7) = +3.$$

Remarque. — Ces conséquences peuvent être résumées en considérant l'échelle des nombres relatifs (**20**) et en disant qu'un nombre est plus grand que tout nombre écrit à sa gauche et plus petit que tout nombre placé à sa droite.

183. Théorème I. — ***On peut ajouter ou retrancher un même nombre aux deux membres d'une inégalité.***

En effet, si $a > b$, la différence $a - b$ est positive. Or, quel que soit le nombre c, on a

$$a - b = a - b + c - c = (a + c) - (b + c).$$

Donc la différence $(a + c) - (b + c)$ est également positive et on a

$$a + c > b + c.$$

On peut également *retrancher* c *des deux membres,* car retrancher c revient à ajouter $(-c)$.

Conséquence. — *On peut faire passer un terme d'un membre dans l'autre à condition de changer son signe.*

184. Théorème II. — ***Si on multiplie ou si on divise les deux membres d'une inégalité par un nombre*** *positif,* ***on obtient une inégalité*** *de même sens.*

On obtient une inégalité *de sens inverse,* ***si on multiplie ou si on divise par un nombre*** *négatif.*

En effet, considérons l'inégalité $a > b$. La différence $a - b$ est positive et le produit $(a - b)c$ a le signe de c.

Si c est positif, on a successivement :

$$(a - b)c > 0; \quad ac - bc > 0; \quad ac > bc.$$

Si c est négatif, on a successivement :

$$(a - b)c < 0; \quad ac - bc < 0; \quad ac < bc.$$

REMARQUES. — I. Le nombre par lequel on multiplie ou par lequel on divise doit être *différent de zéro*.

II. *Si on change les signes des termes d'une inégalité, il faut aussi changer le sens de l'inégalité*, car cela revient à multiplier les deux membres par (-1).

185. Théorème III. — ***On peut ajouter, membre à membre, plusieurs inégalités** de même sens.*

En effet, considérons les inégalités $a < b$ et $c < d$. Les différences $a - b$ et $c - d$ seront négatives. Or la somme de deux nombres négatifs est négative. Donc on a

$$(a - b) + (c - d) < 0 \quad \text{ou} \quad (a + c) - (b + d) < 0.$$

Par suite, $a + c < b + d$.

186. Théorème IV. — ***Si on retranche, membre à membre, deux inégalités** de sens contraires, **l'inégalité obtenue est de même sens que la première.***

En effet, considérons les inégalités $a < b$ et $c > d$. Le nombre $a - b$ sera négatif et le nombre $c - d$ positif. Leur différence est donc négative et on a

$$(a - b) - (c - d) < 0 \quad \text{ou} \quad (a - c) - (b - d) < 0.$$

Par suite, $a - c < b - d$.

187. Théorème V. — ***Si on multiplie membre à membre deux ou plusieurs inégalités** de même sens, **dont les membres sont positifs, on obtient une inégalité de même sens.***

En effet, supposons $a > b$ et $c > d$, les nombres a, b, c, d étant positifs. En multipliant les deux membres de la première inégalité par c et ceux de la seconde par b, il vient

$$ac > bc, \quad bc > bd;$$

et par suite, $ac > bd$.

188. Théorème VI. — ***Si on divise membre à membre deux inégalités*** *de sens contraires,* ***dont les membres sont positifs, on obtient une inégalité de même sens que l'inégalité dividende.***

Supposons $a > b$ et $c < d$, les nombres a, b, c, d étant positifs. En multipliant membre à membre les inégalités $a > b$ et $d > c$ (et non pas $c < d$), il vient (**187**)

$$ad > bc.$$

De là, on déduit, en divisant par le nombre positif cd,

$$\frac{ad}{cd} > \frac{bc}{cd} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{d}.$$

189. Application. — *Étant donnée une suite de fractions inégales, à dénominateurs positifs, la fraction qui a pour numérateur la somme des numérateurs, et pour dénominateur la somme des dénominateurs, est comprise entre la plus petite et la plus grande fraction donnée.*

Soient $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \frac{a'''}{b'''}$ des fractions rangées par ordre croissant et ayant des dénominateurs positifs. Si on désigne $\frac{a}{b}$ par p et $\frac{a'''}{b'''}$ par q, on a :

$$p = \frac{a}{b} < q; \quad p < \frac{a'}{b'} < q; \quad p < \frac{a''}{b''} < q; \quad p < \frac{a'''}{b'''} = q.$$

Comme b, b', b'' et b''' sont positifs, on en déduit :

$$bp = a < bq; \quad b'p < a' < b'q; \quad b''p < a'' < b''q; \quad b'''p < a''' = b'''q.$$

Additionnons membre à membre, et divisons par $b + b' + b'' + b'''$ qui est positif. Il vient

$$p < \frac{a + a' + a'' + a'''}{b + b' + b'' + b'''} < q.$$

Remarque. — Le théorème subsiste quand quelques fractions sont égales, pourvu qu'il y en ait au moins deux qui soient inégales.

§ II. — INÉQUATIONS.

190. Définitions. — On appelle **inégalité conditionnelle** ou **inéquation,** une inégalité qui n'est vérifiée que pour certaines valeurs des lettres qu'elle renferme.

$-7 < 2$ est une inégalité; $3x - 7 < 0$ est une inéquation.

Résoudre une inéquation, c'est chercher entre quelles limites les inconnues doivent être comprises pour que l'inéquation soit vérifiée.

Deux inéquations sont **équivalentes** *quand elles sont vérifiées pour les mêmes valeurs des inconnues.*

La résolution des inéquations est basée sur des **principes d'équivalence**, dont la démonstration est analogue à celle des deux premiers principes d'équivalence des équations.

191. 1er Principe. — ***Si on ajoute ou si on retranche*** *une même expression algébrique* ***aux deux membres d'une inéquation, on obtient une inéquation équivalente.***

CONSÉQUENCES. — I. *On peut faire passer un terme d'un membre dans l'autre, à condition de changer son signe.*

II. Une inéquation entière peut être ramenée à la forme $A \gtrless 0$, A étant un polynôme entier et réduit par rapport aux inconnues. *Le degré de l'inéquation* est le degré de A par rapport aux inconnues.

192. 2e Principe. — ***Si on multiplie ou si on divise les deux membres d'une inéquation par*** *un nombre positif*, ***on obtient une inéquation équivalente.***

Si on multiplie ou si on divise par *un nombre négatif*, ***on obtient une inéquation équivalente à condition*** *de changer le sens* ***de l'inéquation donnée.***

REMARQUES. — I. On ne peut jamais multiplier ou diviser par zéro.

II. Si on multiplie ou si on divise par *une expression littérale*, il faut d'abord écarter le cas où cette expression ne représente pas un nombre déterminé. Ensuite, *il faut distinguer trois cas*, suivant que l'expression est positive, négative ou nulle.

III. On ne peut jamais multiplier ou diviser par *une expression renfermant les inconnues*, excepté dans le cas où cette expression a un signe connu et invariable. Ainsi, on pourra multiplier par $x^2 + 2$ qui est toujours positif.

§ III. — INÉQUATIONS DU 1er DEGRÉ A UNE INCONNUE.

193. Exemple. — *Résoudre l'inéquation*

$$\frac{5x-3}{7} < x + 5.$$

Chassons le dénominateur : $5x - 3 < 7x + 35$.

Transposons les termes et réduisons : $-2x < 38$.

De là on tire $x > -19$.

Les valeurs de x qui vérifient l'inéquation sont les nombres supérieurs à -19. Ce nombre est *la limite inférieure* des valeurs acceptables de x.

194. Inéquations simultanées du 1er degré à une inconnue. — *Résoudre un système d'inéquations, c'est chercher les solutions qui sont communes à toutes les inéquations.*

Pour cela, on les résout séparément; puis on se sert avec avantage d'une représentation graphique des solutions.

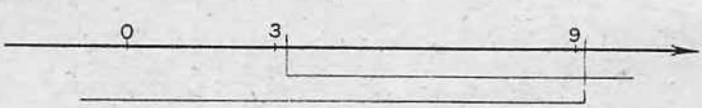
Exemple. — *Soit à résoudre le système*

$$\begin{cases} 9x - 5 \leqslant 7x + 13 & (1) \\ 3x - 5 < 8x - 20. & (2) \end{cases}$$

L'inéquation (1) donne $2x \leqslant 18$ ou $x \leqslant 9$.

L'inéquation (2) donne $-5x < -15$ ou $x > 3$.

Traçons une droite orientée; marquons-y les points dont les distances à l'origine sont $+9$ et $+3$, puis soulignons les solutions de chaque inéquation.



On voit qu'on doit avoir $3 < x \leqslant 9$.

195. Cas particulier. — *Un système est formé d'une équation et d'une inéquation.*

On résout d'abord l'équation; puis on vérifie si la solution trouvée convient à l'inéquation.

EXEMPLE. — *Résoudre le système* $3x = 6$; $5x - 3 > 0$.

L'équation donne $x = 2$. Cette valeur de x vérifie l'inéquation, car en y remplaçant x par 2, le premier membre se réduit à 7. Donc la solution du système est $x = 2$.

EXERCICES

202. (211) Résoudre les inéquations suivantes :

1° $7x - 6 > 5 + 6x$

2° $12 - 5x > x - 60$

3° $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} > \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$

4° $\frac{x}{2} + 4 > \frac{2x}{3} - \frac{x}{8}$

5° $4(5 + x) > 5(x + 3)$

6° $3 - 4(5 - x) \leqslant 2x + 5$

7° $\frac{3x - 1}{5} - \frac{13}{2} \geqslant \frac{7x}{3} - \frac{11(x + 3)}{6}$

8° $\frac{2x}{5} - \frac{2x - 17}{3} < 10 - \frac{2x - 6}{2}$.

203. (212) Chercher les valeurs entières de x qui vérifient les systèmes suivants :

1° $2(4x + 1) \geqslant 5x + 8$
$2(3x + 2) > 5(3x - 10)$

2° $8x + \frac{14x}{5} \geqslant 66 - \frac{12x}{5}$
$\frac{1}{6}\left(\frac{7x}{4} + x\right) > x - \frac{13}{2}$

3° $5(20 - x) > 3x + 68$
$3(x - 7) < 4(5x - 1)$

4° $\frac{2x - 7}{4} - \frac{x + 1}{8} > \frac{x - 5}{2}$
$\frac{3x - 14}{12} + \frac{3x - 2}{4} > \frac{2x - 1}{3}$.

204. (214) Si a, b, c sont des nombres différents deux à deux, vérifier que l'on a :

1° $a^2 + b^2 > 2ab$;

2° $a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$.

205. (216) Si a, b, c sont les côtés d'un triangle, on a toujours

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca).$$

CHAPITRE IX

Problèmes du premier degré.

196. L'énoncé d'un problème renferme des grandeurs *connues ou données* et des grandeurs *inconnues*. De plus, il exprime *les relations* qui existent entre les données et les inconnues.

La résolution d'un problème exige :

1° La mise en équations;

2° La résolution de l'équation ou du système obtenu.

3° La discussion de la solution.

La discussion des solutions sera étudiée plus loin (Chap. XI). Pour le moment nous ne considérons que des problèmes qui ne donnent pas lieu à discussion.

197. Pour mettre un problème en équations, *on commence par représenter les inconnues par les dernières lettres de l'alphabet; puis, on traduit par des notations algébriques les relations entre les données et les inconnues, fournies par l'énoncé du problème.*

Dans cette traduction algébrique des conditions de l'énoncé, on calcule sur les lettres désignant des inconnues, comme s'il s'agissait simplement de *vérifier* l'exactitude de la réponse.

Ce n'est que par des exercices nombreux qu'on arrivera à mettre avec facilité des problèmes en équations.

198. Problème I. — *Partager* 100 *fr entre* 3 *personnes de manière que la deuxième ait* 10 *fr de plus que la première, et la troisième* 20 *fr de plus que la deuxième.*

Si la part de la première personne était connue, on trouverait facilement les parts des deux autres. Représentons-la par x; $x + 10$ sera celle de la deuxième; $x + 30$, celle de la troisième.

La somme des trois parts est 100. On a donc l'équation

$$x + (x + 10) + (x + 30) = 100.$$

D'où $x = 20$. Les parts sont : 20 fr; 30 fr et 50 fr.

199. Problème II. — *On a deux lingots d'argent de même poids, mais de titres différents. Si l'on fond le premier avec le tiers du second, on obtient un alliage au titre de* 0,912. *Si l'on fond le second avec le tiers du premier, on obtient un alliage au titre de* 0,864. *Déterminer le titre de chaque lingot.*

Soient A le poids en grammes de chacun des deux lingots, x le titre du premier et y celui du second.

On sait que le poids en grammes du fin contenu dans un lingot s'obtient en multipliant le titre par le poids exprimé en grammes.

Écrivons que dans chacun des deux cas indiqués par l'énoncé, la somme des poids des fins des composants égale le poids du fin de l'alliage obtenu. On trouve le système

$$Ax + \frac{Ay}{3} = 0{,}912 \times \frac{4A}{3}; \quad Ay + \frac{Ax}{3} = 0{,}864 \times \frac{4A}{3};$$

ou

$$3x + y = 3{,}648; \quad x + 3y = 3{,}456.$$

Ce système donne $x = 0{,}936$, $y = 0{,}840$.

200. Problème III. — *Deux courriers ont quitté les villes A et B, distantes de* 65 *km et se dirigent l'un vers l'autre. Le* 1er *s'est mis en route à* 6 *h.* 30 *m. et fait* 14 *km en* 2 *h.* 30 *m.; le second a quitté B à* 7 *h.* 45 *m. et fait* 10 *km en* 1 *h.* 40 *m. A quelle heure et en quel point se fera la rencontre?*

1re Solution. — Le premier courrier fait $\frac{28}{5}$ km à l'heure et le second 6 km. Le premier courrier est parti cinq quarts d'heure avant le second.

Supposons que la rencontre ait lieu à x km de A. Le premier courrier parcourt ces x km en $\frac{5x}{28}$ heures.

Le second courrier doit parcourir $(65 - x)$ km. Pour cela il doit marcher pendant $\frac{65 - x}{6}$ heures.

Écrivons que la différence entre ces deux temps est cinq quarts d'heure. On a l'équation

$$\frac{5x}{28} - \frac{65 - x}{6} = \frac{5}{4}.$$

Cette équation donne $x = 35$.

Ainsi, la rencontre a lieu à 35 km de A et à 30 km de B. Le second courrier a voyagé alors pendant 30 : 6 ou 5 heures; la rencontre a lieu 5 h. après 7 h. 45 m., donc à 12 h. 45 m.

2e Solution. — Supposons que la rencontre ait lieu x heures après 7 h. 45 m., c'est-à-dire $\left(x + \frac{5}{4}\right)$ heures après 6 h. 30 m.

Écrivons que la somme des distances parcourues par les deux courriers est 65 km. On a

$$\left(x + \frac{5}{4}\right) \times \frac{28}{5} + 6x = 65.$$

Cette équation donne $x = 5$. La rencontre a lieu à 12 h. 45 m. et à 6×5 ou 30 km de B.

Remarque. — Dans la première solution, x représente une distance; on a obtenu l'équation en comparant deux temps. Dans la seconde solution, x représente un temps; on a obtenu l'équation en égalant deux distances.

201. Problème IV. — *Trois joueurs conviennent que le perdant doublera l'argent des deux autres; ils jouent trois parties, en perdent chacun une, et se retirent chacun avec 16 francs. Combien chaque joueur avait-il en se mettant au jeu?*

Soient x, y, z les nombres de francs que possèdent respectivement les joueurs en se mettant au jeu.

Après la 1re partie que le premier a perdue, les joueurs ont,

$$\text{le 1}^{\text{er}} : x - y - z; \quad \text{le 2}^{\text{e}} : 2y; \quad \text{le 3}^{\text{e}} : 2z.$$

Après la deuxième partie où le deuxième a donné aux autres

$$(x - y - z) + 2z \quad \text{ou} \quad x - y + z,$$

les trois joueurs ont,

$$\text{le 1}^{\text{er}} : 2x - 2y - 2z; \quad \text{le 2}^{\text{e}} : 3y - x - z; \quad \text{le 3}^{\text{e}} : 4z.$$

Après la troisième partie, ils ont,

$$\text{le 1}^{\text{er}} : 4x - 4y - 4z; \quad \text{le 2}^{\text{e}} : 6y - 2x - 2z; \quad \text{le 3}^{\text{e}} : 7z - x - y.$$

Or chaque joueur a 16 fr après la 3e partie; on a donc les équations

$$4x - 4y - 4z = 16; \quad 6y - 2x - 2z = 16; \quad 7z - x - y = 16.$$

En résolvant ce système, on trouve $x = 26$, $y = 14$, $z = 8$.

EXERCICES

PROBLÈMES A UNE INCONNUE

Voir les exercices 4 *à* 24 *et* 122 *à* 140.

I. Problèmes divers· — 206. (217) J'ai dépensé le tiers, puis le cinquième de mon argent, et il me reste encore 14 fr. Combien avais-je d'argent?

207. (218) Partager le nombre 200 en deux parties telles qu'en divisant la 1re par 16 et la 2e par 10, la différence des quotients soit 6.

208. (219) Un nombre vaut le quart d'un autre; si l'on retranche le plus petit de 25 et le plus grand de 70, les restes sont égaux. Quels sont ces nombres?

209. (220) On multiplie un nombre par 5, on retranche 24 du produit, on divise le reste par 6, on ajoute 13 au quotient et on retrouve le nombre. Quel est-il?

210. (221) Un nombre est divisé ainsi : la 2e partie égale les 2/3 de la 1re et la 3e, les 3/4 de la 2e. La différence entre la 2e partie et la 3e est 400. Trouver le nombre et chaque partie.

211. (222) Deux nombres sont entre eux comme 9 est à 11. Les 2/5 du plus petit augmentés des 7/10 du plus grand font 113. Quels sont ces nombres?

212. (223) Trois personnes se sont partagé un terrain de 864 ares; la part de la 1re est à celle de la 2e comme 5 est à 7 et celle de la 3e égale la somme des deux autres. Quelle est la part de chacune?

213. (224) Quatre créanciers, A, B, C, D, doivent se partager 31 500 fr dans les rapports suivants : les créances de A et B sont entre elles comme 2 est à 3, celles de B et C comme 4 est à 5 et celles de C et D comme 6 est à 7. Trouver la part de chacun.

214. (225) Une personne échange des pièces de 2 fr contre des pièces de 5 fr. Elle trouve qu'elle a alors 102 pièces en moins. Quelle somme possède-t-elle?

215. (226) Si l'on compte par 9 les arbres d'un jardin, il en reste 3; si on les compte par 11, il en reste 2. Sachant que le nombre des groupes de 9 surpasse de 3 celui des groupes de 11, on demande de calculer combien d'arbres renferme ce jardin.

216. (227) Si l'on compte les élèves d'une école par douzaines, il en reste 4; si on les compte par dizaines, il en reste 8; mais il y a trois dizaines de plus que de douzaines. Combien d'élèves compte cette école?

217. (228) Le numérateur d'une fraction surpasse de 50 le dénominateur; lorsqu'on ajoute 7 aux deux termes, elle vaut 3 unités. Trouver cette fraction.

218. (229) Trouver deux nombres, sachant qu'ils diffèrent de 495, que leur quotient est 4 et le reste de leur division, 60.

219. (230) Deux personnes sont âgées respectivement de 30 ans et de 20 ans. Dans combien de temps leurs âges seront-ils dans le rapport de 5 à 4?

II. Problèmes sur les nombres. — 220. (231) Le chiffre des dizaines d'un nombre de deux chiffres est égal aux 2/3 du chiffre des unités. Le nombre lu à rebours surpasse de 18 le nombre primitif. Trouver ce nombre.

221. (232) Un nombre est formé de deux chiffres dont la somme est 12; si on ajoute 4 au 1/6 du nombre, on trouve le 1/7 du nombre renversé. Trouver ce nombre.

222. (233) Un nombre de deux chiffres a le chiffre des unités double de celui des dizaines; quand on ajoute 36 au nombre, on obtient le nombre renversé. Quel est ce nombre?

223. (234) Un nombre compris entre 1000 et 2000 est tel que la somme de ses chiffres est 19; le chiffre des dizaines vaut 3 fois celui des unités; celui des centaines égale les 3/5 de la somme des chiffres des dizaines et des mille. Trouver ce nombre.

III. Problèmes sur les âges. — 224. (235) Un père a 43 ans et son fils en a 13; quand l'âge du père était-il le quadruple de celui du fils?

225. (236) Un père a 38 ans; ses enfants sont âgés de 12 ans et de 8 ans. Dans combien d'années l'âge du père égalera-t-il la somme des âges de ses enfants?

226. (237) Un père dit à son fils : « La somme de nos âges est 65 et leur différence est à la somme des années que nous aurons dans 5 ans, comme 7 est à 15 ». Trouver l'âge du père et celui du fils.

227. (238) L'âge d'une personne est double de celui d'une autre. Il y a 7 ans, la somme des âges des deux personnes était égale à l'âge actuel de la première. Quels sont actuellement les âges des deux personnes?

IV. Intérêt. — **228.** (239) On place les 4/5 d'un capital à 4 % et le reste à 5%. La somme des intérêts annuels est 4221 fr. Quelles sont les deux parties?

229. (240) Un capital a été placé à 4% pendant 3 ans et 6 mois. L'ayant retiré avec les intérêts, on place le tout dans un commerce qui procure 8%. Le revenu annuel étant de 2736 fr, quel est le capital primitif?

230. (241) Quelqu'un met son capital dans une entreprise; la 1re année il perd 10%; la 2e année il perd 8% du reste; la 3e année il gagne 10% du nouveau reste. La perte totale est de 1784 fr. Calculer le montant du capital.

231. (242) Sur les 3/4 d'une somme placée dans un commerce, un négociant a perdu 4% moins 50 fr. Sur le reste il gagne 2%. Il retire le tout et le place à 5%. Il se fait ainsi un revenu annuel de 490 francs. Trouver le capital primitif.

232. (243) L'intérêt d'un capital placé à 5% pendant 73 jours ayant été calculé sur 365 jours au lieu de 360, l'erreur commise est de 6,25 fr. Trouver le capital.

233. (244) Une somme de 10 000 fr placée à intérêts simples est devenue 16 200 fr. On demande le temps pendant lequel elle est restée placée à intérêts, sachant qu'elle a rapporté 5% pendant les deux premiers tiers de ce temps et 5,5% pendant le dernier tiers.

234. (245) Deux neveux sont appelés par le testament de leur oncle à partager une somme de 16 200 fr, de telle manière qu'en plaçant leurs parts à intérêt simple à 4%, ils aient la même somme à l'âge de 21 ans. Comment effectuer ce partage, sachant que l'un a 16 ans et que l'autre en a 8 1/2?

235. (246) Pour solder une propriété qu'il vient d'acquérir au prix de 9300 fr, un particulier doit emprunter 3000 fr à 3%. Quand pourra-t-il payer le capital emprunté, augmenté de ses intérêts simples, au moyen du revenu accumulé de sa propriété, si celle-ci lui rapporte 5%?

V. Escompte. — **236.** (247) Un billet payable dans trois mois est escompté à 4%. Sa valeur actuelle étant 990 fr, calculer sa valeur nominale.

237. (248) Une somme de 1800 fr est payable dans 20 mois, une autre de 1600 fr dans 22 mois. Quel est le taux de l'escompte sachant que la 1re somme donne 2 fr d'escompte de plus que la 2e?

238. (249) 3000 fr payables dans 25 mois et 2900 fr payables dans 14 mois ont la même valeur actuelle. Quel est le taux de l'escompte?

239. (250) Pour acquitter une dette de 8200 fr 10 mois avant son échéance, il faut 600 fr de moins que pour acquitter une dette de 9000 fr 18 mois avant son échéance. Quel est le taux de l'escompte?

240. (251) Pour se libérer d'une dette de 3600 fr, un débiteur donne un acompte de 1000 fr et souscrit un billet de 2634,70 fr payable dans 4 mois. Calculer l'échéance de la première dette, le taux de l'escompte étant 6%.

241. (252) Une somme de 3000 fr doit être payée aujourd'hui; le débiteur demande à s'en acquitter en quatre payements égaux : le 1er dans 3 mois, le second dans 6 mois, le 3e dans 10 mois et le 4e dans 16 mois. Quel est le montant de chaque payement, le taux étant 5%?

VI. Mélanges et Alliages. — **242.** (253) On a mélangé 200 litres de vin à 3 fr le litre avec 300 litres d'une autre qualité. Le mélange revient à 3,90 fr le litre. Que coûte le litre de la 2e qualité?

243. (254) J'ai deux pièces d'eau-de-vie contenant l'une 228 litres, l'autre 450 litres. Elles reviennent respectivement à 4560 fr et 11 700 fr. Je veux former un mélange de 450 litres à 24 fr le litre. Combien faut-il en prendre de chaque qualité?

244. (255) Une barrique de vin de 250 litres pèse 250 kg. On remplace une certaine quantité de vin par de l'eau et le poids est 257,20 kg. Combien de litres d'eau a-t-on ajoutés, la barrique vide pesant 24 kg?

245. (256) On achète 100 litres de lait. Pour le vérifier, on le pèse et on trouve 102,7 kg. Trouver combien d'eau avait été ajoutée en supposant qu'un litre de lait pur pèse 1030 grammes.

246. (257) Un orfèvre a deux lingots d'or de 95 dag chacun, l'un au titre de 0,920 et l'autre à 0,740. Combien de gr du second lingot doit-il ajouter au premier pour abaisser le titre à 0,840?

247. (258) On a fondu 144 gr d'or au titre de 0,950 avec un certain nombre de grammes au titre de 0,700. L'alliage résultant est au titre de 0,780. Déterminer la quantité qu'on a prise au second lingot.

(0,900)

248. (259) Combien faut-il ajouter de cuivre à un lingot d'argent de 167 dag au titre de 0,920 pour obtenir un alliage au titre de 0,835?

249. (260) Un orfèvre doit fabriquer un objet en or de 278 gr au titre de 0,780. Il a deux lingots au titre de 0,750 et 0,840. Quel poids de chaque lingot doit-il jeter dans le creuset?

250. (261) Un lingot d'argent de 1250 gr est au titre de 0,850. Combien d'argent pur faut-il ajouter pour porter le titre à 0,900?

251. (262) Un alliage de plomb et d'étain pèse 65 kg. Quand on le pèse dans l'eau, son poids n'est plus que de 57,5 kg. On demande les poids respectifs des deux métaux sachant que la densité du plomb est 11,40 et celle de l'étain 7,30.

252. (263) Un bloc de glace flottant sur la mer émerge de 5,5 m³. Déterminer le volume immergé sachant que la densité de la glace est 0,92 et celle de l'eau de mer 1,03.

VII. Fontaines et Ouvriers. — **253.** (264) Une fontaine remplit un bassin en 6 heures, une autre en 8 heures et une 3ᵉ en 10 heures. Elles coulent ensemble pendant 2 heures et il manque 26 hl. pour que le bassin soit rempli. Quelle est sa capacité?

254. (265) Une fontaine peut remplir un bassin en 4 h. 30 m. et un robinet le vide en 5 heures. En combien de temps ce bassin sera-t-il rempli si l'on ouvre les deux conduits en même temps?

255. (266) Une cuve est munie de trois robinets : le 1ᵉʳ la remplit en 8 heures, le 2ᵉ en 12 heures et le 3ᵉ la viderait en 3 heures. La cuve étant remplie, on demande quand elle sera vide si l'on ouvre les trois robinets.

256. (267) Trois fontaines remplissent ensemble un bassin en 8 heures. Si chacune coule séparément, le temps que met la première est à celui mis par la seconde comme 1 est à 2/3 et le temps mis par la 2ᵉ est à celui mis par la 3ᵉ comme 1 est à 3/4. Quel temps faut-il à chacune des fontaines pour remplir le bassin?

257. (268) Deux robinets rempliraient un bassin en 8 heures; un 3ᵉ le viderait en 20 heures. On ouvre les trois robinets, mais le premier se ferme accidentellement pendant 3 heures; il faut alors aux 3 conduits 1 h. 30 m. de plus pour remplir la bassin. En combien de temps chacun des deux premiers pourrait-il le remplir?

258. (269) Un groupe d'ouvriers peut faire un travail en 18 jours. S'il comptait 4 ouvriers de plus, le travail serait terminé en 15 jours. De combien d'ouvriers est composé le groupe?

VIII. Courriers. — **259.** (270) Deux trains partent en même temps, l'un de *A* et l'autre de *B*, pour aller à la rencontre l'un de l'autre. Le 1ᵉʳ parcourt 54 km à l'heure et l'autre 36 km. La distance *AB* étant de 144 km, calculer à quelle distance de *A* se fera la rencontre des deux trains.

260. (271) Deux voyageurs sont éloignés de 45 km; le 1ᵉʳ fait 5 km à l'heure et le second 6 km. Le 1ᵉʳ part à 5 heures; le 2ᵉ part à 5 h. 45 pour aller à la rencontre du 1ᵉʳ. Quand et où se rencontreront-ils?

261. (272) Un train de voyageurs qui fait 9 lieues à l'heure est parti 3 h. 30 min. après un train de marchandises qui fait 4 lieues à l'heure. Après quel temps et à quelle distance du point de départ le premier atteindra-t-il l'autre?

262. (273) On a expédié un courrier qui fait 7 mam. en 5 heures; 8 heures après son départ on en envoie un autre à sa poursuite. Sachant que celui-ci fait 5 mam. en 3 heures, on demande dans combien de temps il aura rejoint le premier.

263. (274) D'une certaine ville part un courrier qui fait 8 km à l'heure; d'une autre ville située à 10 km en arrière de la première, part 2 heures après, dans la même direction, un second courrier qui fait 10 km à l'heure; quand et où le premier courrier sera-t-il atteint par le second?

264. (275) Deux villes A et B sont distantes de 64 km. Un courrier quitte A à 6 h. du matin et atteint B à deux heures de l'après-midi. Le lendemain il part de B pour A à 7 h. du matin. En quel point de la route pourra-t-il dire : hier, à la même heure, j'étais ici?

265. (276) Un facteur rural part du bureau de poste à 6 heures du matin pour se rendre à une localité distante de 15 km où il doit arriver à 9 heures. Après avoir parcouru 3 km il s'aperçoit qu'il a oublié une lettre, retourne au bureau et arrive à destination à l'heure fixée. Quelle a été sa vitesse, supposée uniforme, depuis le moment où il s'est aperçu de son oubli?

266. (277) Une voiture et un piéton partent en même temps, l'un de A et l'autre de B pour aller à la rencontre l'un de l'autre. La voiture parcourt 9 km à l'heure et le piéton 5 km. Au moment de la rencontre le piéton monte dans la voiture. Il met ainsi deux heures de moins pour retourner que pour venir. Quelle est la distance entre A et B?

267. (278) Un lévrier poursuit un chevreuil qui a 45 m d'avance et qui fait 1,25 m par saut. Quand le lévrier fait 8 sauts, le chevreuil en fait 5, et 4 sauts du lévrier en valent trois du chevreuil. Combien de sauts fera chacun avant que le chevreuil ne soit atteint et quelle distance auront-ils parcourue?

268. (279) Deux points mobiles A et B partent en même temps des deux extrémités d'un diamètre d'un cercle et vont dans le même sens en suivant la circonférence et en parcourant respectivement 100 m et 80 m par minute. Calculer : 1° au bout de quel temps et à quelle distance du point de départ de A, celui-ci aura atteint B, si le diamètre mesure 1400 m; 2° le nombre de tours faits par chacun ($\pi = 22/7$).

269. (280) Une horloge marque midi. A quel moment, pour la première fois, les aiguilles des heures et des minutes; *a*) coïncident-elles; *b*) se trouvent-elles sur le prolongement l'une de l'autre; *c*) sont-elles distantes de 25 divisions; *d*) font-elles un angle de 45°?

270. (281) Il est 9 heures. A quel moment l'aiguille des minutes aura-t-elle une avance ou un retard de 5 divisions sur l'aiguille des heures?

271. (282) Une horloge a trois aiguilles. A quel moment pour la première fois après deux heures, l'aiguille des secondes : *a*) coïncidera-t-elle avec celle des minutes; *b*) formera-t-elle avec l'aiguille des heures un angle de 45°; *c*) formera-t-elle avec celle des minutes un angle de 45°; *d*) sera-t-elle la bissectrice de l'angle formé par les deux autres aiguilles?

IX. Divers. — 272. (283) La fortune d'un négociant a augmenté la 1^{re} année du 8^e de sa valeur; la seconde année, des 4 /9 de sa nouvelle valeur; la 3^e année, des 5 /13 de la valeur précédente. Elle se monte alors à 27 000 fr. Qu'était-elle au commencement?

273. (284) Un négociant augmente chaque année sa fortune du tiers de la valeur précédente et prélève ensuite 1000 fr pour ses dépenses. Or, à la fin de la 3^e année, les 1000 fr étant prélevés, la fortune primitive est doublée. A combien se montait-elle?

274. (285) Quatre enfants se sont partagé un certain nombre d'oranges de la manière suivante : le 1^{er} en a reçu la moitié moins 6; le 2^e, le tiers du reste moins 2; le 3^e, le quart du nouveau reste moins une; le 4^e a eu les 13 oranges qui restaient. Combien d'oranges y avait-il?

275. (286) Une marchande a un panier de poires qu'elle vend à 3 personnes *A*, *B*, *C*. *A* en prend la moitié plus une, *B* la moitié du reste plus une, *C* la moitié du nouveau reste plus 1 1 /2. Il en reste 4 dans le panier. Combien de poires contenait-il?

276. (287) Un père a un certain nombre de pommes qu'il veut partager entre ses sept enfants : le 1^{er} en reçoit la moitié plus une demi-pomme; le 2^e, la moitié du reste plus une demi-pomme et ainsi de suite jusqu'au dernier. Toutes les pommes sont alors distribuées. Combien en avait-il?

277. (288) Un père partage une certaine somme entre ses enfants : l'aîné reçoit 100 fr plus le dixième du reste; le 2^e, 200 fr plus le dixième de ce qui reste alors et ainsi de suite. Or, chaque enfant reçoit la même somme. Quelle est la somme partagée et combien y a-t-il d'enfants?

278. (289) Quatre enfants doivent se partager une succession de 86 000 fr d'après les conditions suivantes : la part de l'aîné doit être le double de celle du second, moins 1000 fr; le second doit avoir trois fois autant que le 3^e, moins 2000 fr; le 3^e, 4 fois autant que le 4^e, moins 3000 fr. Déterminer la part de chaque enfant.

X. Problèmes de Géométrie. — 279. (290) Dans un triangle on mène à un côté une parallèle qui divise un autre côté en deux segments mesurant 27 et 17 m. Déterminer la longueur des segments que cette parallèle détermine sur le 3e côté qui mesure 66 mètres.

280. (291) Les bases d'un trapèze mesurent 23 et 13 m, et la hauteur 4 m. Trouver la hauteur du triangle que l'on obtient en prolongeant les côtés non parallèles.

281. (292) Les deux dimensions d'un rectangle sont 54 m et 36 m. Mener une parallèle au petit côté de manière à former un rectangle semblable au premier.

282. (293) Dans un triangle de 63 m de base et de 54 m de hauteur, on inscrit un rectangle dont le périmètre mesure 116 m. Trouver les dimensions de ce rectangle.

283. (294) Deux côtés d'un triangle mesurent 20 m et 36 m. La bissectrice de l'angle qu'ils comprennent, détermine sur le 3e côté deux segments dont la différence est 12 m. Trouver ce 3e côté.

PROBLÈMES A PLUSIEURS INCONNUES.

284. (295) Comment peut-on payer la somme de 270 fr avec 30 pièces, les unes de 5 fr et les autres de 20 fr?

285. (296) Deux ouvriers ont fait ensemble 151 mètres d'ouvrage, en travaillant respectivement 7 1/2 jours et 5 3/7 jours. S'ils avaient travaillé 8 1/5 jours et 7 1/2 jours, ils auraient fait 187 mètres. Combien de mètres chaque ouvrier fait-il par jour?

286. (297) En ajoutant 36 à un nombre de deux chiffres, on obtient le nombre renversé; le chiffre des dizaines augmenté de 2, vaut les 3/4 du chiffre des unités. Quel est ce nombre?

287. (298) Un nombre de deux chiffres est tel qu'en y ajoutant 9, on obtient le nombre renversé, et qu'en le diminuant de 9, le reste égale 4 fois la somme des chiffres. Quel est ce nombre?

288. (299) *A* et *B* travaillent à un ouvrage qu'ils peuvent terminer en 30 jours, et qui leur sera payé 1152 fr. Quand ils sont à moitié, *A* interrompt pendant 8 jours et *B*, pendant 4 jours. A cause de cela, il leur faut 5 1/2 jours de plus. Combien chacun recevra-t-il?

289. (300) Il y a 4 ans, l'âge d'un père était le quadruple de celui de son fils; dans 10 ans, il n'en sera plus que le double. Quels sont les âges actuels?

290. (301) Pierre dit à Simon : J'ai deux fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez, et quand vous aurez l'âge que j'ai, la somme de nos deux âges égalera 63 ans; quels sont leurs âges?

291. (302) Il y a 7 ans, la moitié de l'âge de mon oncle surpassait le mien de 2 ans. Aujourd'hui mon âge surpasse de 5 ans les 2/5 de celui de mon oncle. Quels sont nos âges?

292. (303) Deux sommes placées l'une à 4% et l'autre à 5% produisent ensemble un revenu annuel de 400 fr. Si l'une était placée au taux de l'autre, elles donneraient 410 fr. Quelles sont ces deux sommes?

293. (304) Deux sommes placées à 5% donnent 550 fr d'intérêt par an; en diminuant le taux de la première et en augmentant celui de la seconde, chacun de 0,25 fr, l'intérêt serait augmenté de 2,50 fr. Quelles sont les deux sommes?

294. (305) Deux sommes, l'une de 5000 fr et l'autre de 6000 fr, rapportent ensemble 525 fr par an. En les plaçant l'une au taux de l'autre, l'intérêt ne serait que de 520 fr. Quels sont les deux taux?

295. (306) Deux capitaux A et B ont été placés comme il suit : le quart de A et les 3/5 de B à 4%; les restes à 5%. Le premier placement donne 2160 fr d'intérêts simples en 3 ans et l'autre 5200 fr en 4 ans. Trouver les deux capitaux.

296. (307) Jean a placé 12 600 fr de plus que Louis et à 1% de plus; aussi retire-t-il 730 fr d'intérêts de plus par an. Alphonse place 3000 fr de plus que Louis et à 2% de plus; son revenu annuel surpasse de 380 fr celui de Louis. Déterminer les capitaux placés et les taux.

297. (308) Deux capitaux ont comme somme 6000 fr. Le 1er est placé à 1% de plus que le 2e et ils produisent ensemble 264 fr d'intérêts par an. Si le premier était placé au taux du second, et réciproquement, ils produiraient 276 fr d'intérêts. Quelles sont les deux sommes et à quels taux sont-elles placées?

298. (309) Quelqu'un a acheté 540 fr de rente 2,5% et 270 fr de 3%. Quelques jours après, alors que le 2,5% a baissé de 30 centimes et de 3% de 39 centimes, il achète 540 fr de rente 3% et 270 fr de 2,5%. A quel cours a-t-il acheté chaque fois, sachant que son premier achat lui a coûté 15 498 fr et le second 15 341,40 fr?

299. (310) Un négociant reçoit 2 billets : l'un est payable dans 3 mois, et l'autre, supérieur au premier de 600 fr, est payable dans 9 mois. Un banquier les escompte à 5% et retient 84,50 fr. Trouver le montant de chaque billet.

300. (311) Un billet de 9500 fr payable dans 24 mois, et un autre de 9200 fr payable dans 15 mois, escomptés au même taux, ont la même valeur actuelle. Calculer la valeur actuelle et le taux.

301. (312) Un billet escompté en dehors à 6% donne un escompte de 48,60 fr; en dedans, à 5%, il donnerait 40 fr. Trouver le montant du billet et le nombre de jours pour lesquels il a été escompté.

302. (313) Un marchand a du vin de 2 qualités : en mêlant 3 hl du meilleur avec 5 hl du moins bon, l'hl vaut 246 fr. En mêlant $3\frac{3}{4}$ hl du meilleur avec $7\frac{1}{2}$ hl de l'autre, l'hl revient à 240 fr. Quel est le prix de l'hl de chaque espèce?

303. (314) On a un certain nombre de litres de vin. Si l'on y ajoute 6 litres d'eau, le prix du litre diminue de 36 centimes; si l'on ajoute 10 litres d'eau, le prix du litre diminue de 56 centimes. Déterminer le nombre de litres de vin et le prix du litre.

304. (315) 21 kg d'argent ne pèsent dans l'eau que 19 kg, et 9 kg de cuivre n'y pèsent que 8 kg. Un alliage d'argent et de cuivre de 148 kg perd $14\frac{2}{3}$ kg dans l'eau. Déterminer les quantités d'argent et de cuivre qu'il contient.

305. (316) On a deux lingots de même poids et de titres différents. Si on fond le premier avec le quart du second, on obtient un alliage au titre de 0,936. Si l'on fond le premier avec la moitié du second, on obtient un alliage au titre de 0,920. Déterminer le titre de chaque lingot.

306. (317) A et B jouent deux parties; à la première, A gagne autant d'argent qu'il en avait, moins 8 fr; il en a alors deux fois autant que B. A la seconde partie, B gagne autant qu'il lui restait, moins 4 fr. Ils ont alors la même somme. Combien d'argent avait chacun?

307. (318) Une somme d'argent a été partagée également entre un certain nombre de personnes. S'il y avait eu 6 personnes de plus, chacune eût reçu 2 fr de moins. Au contraire, s'il y avait eu 3 personnes de moins, chacune aurait reçu 2 fr de plus. Déterminer le nombre de personnes, la part de chacune et la somme partagée.

308. (319) On demandait à quelqu'un son âge, ainsi que celui de son père et de son grand-père. Il répondit : mon âge et celui de mon père font ensemble 56 ans; mon père et mon grand-père ont ensemble 100 ans; enfin mon âge et celui de mon grand-père font ensemble 80 ans. Déterminer l'âge de chacun.

309. (320) Trois fontaines A, B, C coulent dans un bassin; A et B le rempliraient en 1 h. 10 m.; A et C en 84 m.; B et C en 2 h. 20 m. Quel temps faut-il : 1° à chaque fontaine; 2° aux trois fontaines à la fois, pour remplir le bassin?

310. (321) Une somme d'argent placée à intérêt simple a rapporté 860 fr. Elle est divisée en trois parts : la première a été placée à 4%

pendant 7 mois; la deuxième à 4,5 % pendant 4 mois; la troisième à 5 % pendant 16 mois. Quelles sont les trois parts, sachant que les deux premières sont entre elles comme 5 est à 3, et les deux dernières comme 8 est à 5?

311. (322) Trois artilleurs, *A*, *B*, *C* ont tiré des coups de canon; *A* et *B* ont tiré ensemble 20 coups de plus que *C*; *B* et *C*, 32 coups de plus que *A*; *A* et *C*, 28 coups de plus que *B*. Calculer le nombre de coups tirés par chaque artilleur.

312. (323) Un nombre de trois chiffres a 16 pour somme de ses chiffres; en y ajoutant le nombre renversé, on obtient 1211; en le retranchant du nombre renversé, on obtient 297. Quel est ce nombre?

313. (324) Une fraction vaut 4/5. Si l'on retranche de ses termes les 2 termes correspondants d'une autre fraction valant 6/7, on obtient une fraction équivalente à 2/3 et dont la somme des termes est 20. Déterminer ces trois fractions.

314. (325) Trois employés ont respectivement 18, 12 et 9 années de service. Leurs appointements respectifs sont : 21 600, 14 400 et 9600 fr. Ils doivent se partager une gratification de 1440 fr en raison directe de leurs années de service et en raison inverse de leurs appointements. Trouver les trois parts.

CHAPITRE X

Discussion d'équations et d'inéquations du premier degré.

§ I. — DISCUSSION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU 1er DEGRÉ A UNE INCONNUE.

202. Toute équation du premier degré à une inconnue peut être ramenée à la forme $ax + b = 0$, a et b étant des nombres relatifs ou des expressions algébriques ne contenant pas l'inconnue. Voilà pourquoi, on dit que $ax + b = 0$ est **l'équation générale** ou **l'équation canonique** du premier degré à une inconnue.

203. Discussion de l'équation $ax + b = 0$. — Faisons passer b dans le second membre et nous aurons l'équation équivalente

$$ax = -b.$$

Pour continuer, nous devons diviser par a les deux membres. Mais nous savons que cela n'est admis que si a est *différent de zéro* (**152**). Nous sommes donc amenés à distinguer deux cas.

1er CAS : $a \neq 0$. — Dans ce cas, nous pouvons diviser par a. Nous obtenons l'équation équivalente

$$x = \frac{-b}{a}.$$

L'équation proposée admet *une solution et une seule* qui est $-\frac{b}{a}$.

2e CAS : $a = 0$. — Dans ce cas, nous ne pouvons pas diviser par a. Remplaçons alors a par sa valeur dans l'équation proposée. Nous obtenons l'équation $0.x = -b$, dont le premier membre est nul.

a) Si $b = 0$, le 1er membre ne pourra jamais égaler le second. L'équation est *impossible*.

b) Si $b = 0$, l'équation devient $0.x = 0$. Cette équation est vérifiée par n'importe quelle valeur de x. Elle est *indéterminée*.

En résumé, 1° si $a \neq 0$, l'équation a une solution unique;
2° si $a = 0$ et $b \neq 0$, l'équation est impossible;
3° si $a = b = 0$, l'équation est indéterminée.

204. Discussion d'une équation entière. — Chaque fois qu'on doit multiplier ou diviser par *un facteur littéral*, on distingue deux cas :

1° *Si le facteur est différent de zéro*, la multiplication ou la division est permise.

2° *Si le facteur est nul*, on transforme l'équation en tenant compte de ce que le facteur littéral est nul; puis, on examine l'équation ainsi transformée.

EXEMPLES. — I. *Résoudre et discuter l'équation* $\mathrm{x + 2m = 4 - mx}$.

On a $$x(m + 1) = 4 - 2m. \tag{1}$$

Si $m \neq -1$, on trouve $x = \frac{4 - 2m}{m + 1}$.

Si $m = -1$, l'équation (1) devient $0.x = 6$; c'est une équation impossible.

II. *Résoudre et discuter l'équation* $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{mx}{m-3}$. (1)

Nous devons supposer $m \neq 3$ pour que l'équation ait un sens. Multiplions ensuite par $2(m-3)$, effectuons et réduisons. Il vient

$$(m+3)x = 6 - 2m. \quad (2)$$

1° Si $m \neq \pm 3$, la solution est $x = \dfrac{6-2m}{m+3}$.

2° Si $m = -3$, l'équation (2) devient $0.x = 12$; c'est une équation impossible.

III. *Résoudre et discuter* $\dfrac{x+a}{a-b} + \dfrac{x-a}{a+b} = \dfrac{x+b}{a+b} + \dfrac{2(x-b)}{a-b}$.

Nous devons supposer $a \neq \pm b$ pour que l'équation ait un sens. Nous pouvons alors multiplier par $(a+b)(a-b)$, puisque ce produit sera différent de zéro. Il vient après réduction

$$x(a+b) = 3ab + 3b^2.$$

Comme $a + b$ est $\neq 0$, on peut tirer x de cette équation. On trouve

$$x = 3b.$$

205. Discussion d'une équation fractionnaire. — On transforme l'équation proposée en une équation entière qu'on étudie comme on vient de le dire (**204**). Il faut examiner ensuite si les solutions de l'équation entière vérifient l'équation fractionnaire : *Une solution de l'équation entière n'est acceptable que si elle n'annule aucun dénominateur de l'équation fractionnaire.*

Exemple. — *Résoudre et discuter* $\dfrac{a}{a-x} = \dfrac{b}{x-b}$. (1)

Multiplions les deux membres par $(a-x)(x-b)$. L'équation devient après réduction

$$(a+b)x = 2ab. \quad (2)$$

1° Si $a + b \neq 0$, l'équation (2) donne $x = \dfrac{2ab}{a+b}$.

Cette solution ne convient que si elle n'annule aucun dénominateur de l'équation fractionnaire (1). On doit donc avoir :

$$\frac{2ab}{a+b} \neq a \quad \text{ou} \quad a(a-b) \neq 0;$$

et

$$\frac{2ab}{a+b} \neq b \quad \text{ou} \quad b(a-b) \neq 0.$$

Ces deux relations exigent $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $a \neq b$.

2° Si $a + b = 0$, l'équation (2) devient $0.x = 2ab$.

a) Quand $ab \neq 0$, l'équation (2) est impossible, ainsi que l'équation (1).

b) Si on suppose $ab = 0$, on a aussi $a = b = 0$, à cause de l'hypothèse $a + b = 0$. L'équation (1) devient donc

$$\frac{0}{-x} = \frac{0}{x}.$$

Elle est vérifiée par n'importe quelle valeur de x; toutefois, il convient d'écarter $x = 0$, car, pour cette valeur de x, les deux membres de l'équation ne sont pas définis.

§ II. — DISCUSSION DE L'INÉQUATION GÉNÉRALE DU 1er DEGRÉ A UNE INCONNUE.

206. La forme canonique des inéquations du 1er degré à une inconnue est $ax + b \gtrless 0$.

207. Discussion. — L'inéquation $ax + b > 0$ peut s'écrire

$$ax > -b.$$

Pour continuer, nous devons diviser par a. Nous devrons donc distinguer trois cas (**192**).

1° Si $a > 0$, on a $x > -\frac{b}{a}$; la fraction $-\frac{b}{a}$ est *la limite inférieure* des valeurs de x.

2° Si $a < 0$, on a $x < -\frac{b}{a}$; la fraction $-\frac{b}{a}$ est *la limite supérieure* des valeurs de x.

3° Si $a = 0$, l'inéquation devient $0.x + b > 0$. Elle est *toujours* vérifiée quand $b > 0$. Elle ne l'est *jamais* quand $b \leqslant 0$.

208. Application. — *Résoudre l'inéquation*

$$(a + y)^2 + 3y^2 < (2y - 1)^2 + 7.$$

Effectuons : $\quad a^2 + 2ay + y^2 + 3y^2 < 4y^2 - 4y + 1 + 7.$

Transposons et réduisons : $\quad y(2a + 4) < 8 - a^2. \qquad (1)$

1° En supposant $2a + 4 > 0$ ou $a > -2$, on a $y < \frac{8 - a^2}{2a + 4}$.

2° En supposant $2a + 4 < 0$ ou $a < -2$, on a $y > \frac{8 - a^2}{2a + 4}$.

3° En supposant $2a + 4 = 0$ ou $a = -2$, l'inéquation (1) devient $0.y < 4$. Cette inéquation est vérifiée, quelle que soit la valeur attribuée à y.

§ III. — RÉSOLUTION AVEC DISCUSSION DU SYSTÈME GÉNÉRAL DE DEUX ÉQUATIONS DU 1er DEGRÉ A DEUX INCONNUES.

209. Soit le système (I)
$$\begin{cases} ax + by = c, & (1) \\ a'x + b'y = c'. & (2) \end{cases}$$

Nous le résoudrons par la *méthode de substitution*. Pour pouvoir tirer une inconnue d'une des équations, il faut qu'au moins l'un des quatre coefficients des inconnues soit différent de zéro. Nous sommes ainsi amenés à diviser la discussion en deux parties.

1re partie : *Les quatre coefficients des inconnues ne sont pas tous nuls.* — Supposons $a \neq 0$. Nous pouvons alors tirer x de l'équation (1) et remplacer x par sa valeur dans l'équation (2). Nous trouvons ainsi

$$\text{(II)} \begin{cases} x = \dfrac{c - by}{a}. & (3) \\ y(ab' - ba') = ac' - ca'. & (4) \end{cases}$$

Le système (II) est équivalent au système (I) (**162**). L'équation (4) qui doit nous donner la valeur de y, est une équation littérale du 1er degré en y. Nous devons donc distinguer trois cas (**203**) :

1er Cas : $ab' - ba' \neq 0$. — L'équation (4) nous donne une seule valeur pour y, et en substituant dans l'équation (3), nous trouverons la valeur correspondante de x. *Le système admet une solution unique*, qui est

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}; \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}. \qquad (5)$$

Ces valeurs de x et de y peuvent être calculées par *les règles de Cramer* (**169**). Les égalités (5) s'appellent aussi *formules de Cramer*. Le dénominateur commun est appelé *déterminant du système*. Posons

$$D = ab' - ba'; \quad N_x = cb' - bc'; \quad N_y = ac' - ca'.$$

2e Cas : $D = 0$; $N_y \neq 0$. — Le système (II) devient

$$x = \frac{c - by}{a}; \quad 0.y = ac' - ca'.$$

Aucune valeur de y ne satisfait à la 2e équation. Par suite, il n'existe aucun système de valeurs pour x et y qui vérifie à la fois les deux équations. *Le système est impossible.*

3e Cas : $D = 0$; $N_y = 0$. — Le système (II) devient

$$x = \frac{c - by}{a}; \quad 0.y = 0.$$

La 2e équation est vérifiée, quelle que soit la valeur attribuée à y. A chaque valeur de y, la première équation fait correspondre une valeur de x.

Soit α un nombre arbitraire. Les solutions du système sont

$$y = \alpha; \quad x = \frac{c - b\alpha}{a}.$$

On dit qu'il y a *indétermination simple.*

Dans le cas particulier où $b = 0$, la valeur de x est $\frac{c}{a}$, quelle que soit la valeur attribuée à y. Dans ce cas, on dit que l'indétermination est *partielle.*

Remarques. — I. La discussion que nous venons de faire, suppose $a \neq 0$. Si nous partons de la supposition $a' \neq 0$, nous aboutirons aux mêmes hypothèses et aux mêmes conclusions. Ces conclusions sont donc valables *dès que* x *figure effectivement dans l'une au moins* des équations.

II. En supposant $b \neq 0$, on trouve en partant du système général :

1er *cas* : $D = ab' - ba' \neq 0$; une solution unique.

2e *cas* : $D = ab' - ba' = 0$; $N_x = cb' - bc' \neq 0$: système impossible.

3e *cas* : $D = ab' - ba' = 0$; $N_x = cb' - bc' = 0$: indétermination simple.

On aboutirait aux mêmes résultats en supposant $b' \neq 0$. Cette discussion est donc applicable dès que y figure effectivement dans l'une au moins des équations.

2e partie : *Les quatre coefficients des inconnues sont nuls.* — Le système (I) devient

$$0.x + 0.y = c; \quad 0.x + 0.y = c';$$

et son déterminant D est nul.

1er Cas : Si l'un des termes indépendants est différent de zéro, le système est impossible.

2e Cas : Si $c = c' = 0$, le système est vérifié, quelles que soient les valeurs qu'on donne à x et y. Il y a *indétermination double.*

210. Conclusions. — I. *Le système proposé admet une solution unique quand son déterminant* D *est différent de zéro et dans ce cas seulement.* Cette solution peut être calculée par les formules de Cramer.

Si le déterminant D *est nul, le système est impossible ou indéterminé.*

II. Si a et a' ne sont pas nuls tous deux, *les conditions d'impossibilité* sont

$$\mathrm{D} = ab' - ba' = 0; \quad \mathrm{N}_y = ac' - ca' \neq 0; \tag{1}$$

et *les conditions d'indétermination* sont

$$\mathrm{D} = ab' - ba' = 0; \quad \mathrm{N}_y = ac' - ca' = 0. \tag{2}$$

III. Si les six coefficients ne sont pas nuls, les conditions d'impossibilité (1) peuvent s'écrire

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'};$$

et les conditions d'indétermination (2) peuvent s'écrire

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Il y a donc** impossibilité **quand les coefficients des inconnues sont proportionnels entre eux, sans être proportionnels aux termes indépendants.

Il y a** indétermination simple **quand les coefficients des inconnues et les termes indépendants sont proportionnels.

Ces règles sont encore applicables lorsque l'un ou l'autre coefficient est nul. Seulement le coefficient correspondant dans l'autre équation doit être également nul.

211. Applications. — I. *Valeurs de* m *et* n *pour que le système*

$$\begin{cases} \mathrm{m}x + \mathrm{n}y = 2, \\ (\mathrm{m} + 1)x + (\mathrm{n} - 1)y = 5, \end{cases}$$

soit impossible ou indéterminé.

Comme les deux coefficients de x ne peuvent être nuls en même temps, *les conditions d'impossibilité sont :*

$$D = m(n-1) - n(m+1) = 0 \quad \text{ou} \quad m + n = 0.$$
$$N_y = 5m - 2(m+1) \neq 0 \quad \text{ou} \quad 3m - 2 \neq 0.$$

L'égalité $m + n = 0$ donne $m = -n$. La relation $3m - 2 \neq 0$ donne $m \neq \frac{2}{3}$. En résumé, on doit donc avoir $m = -n \neq \frac{2}{3}$.

Les conditions d'indétermination sont :

$$D = -(m+n) = 0 \quad \text{ou} \quad m + n = 0.$$
$$N_y = 3m - 2 = 0.$$

Ce système donne $m = \frac{2}{3}$, $n = -\frac{2}{3}$.

II. *Résoudre et discuter le système :*

$$ax + by = 2a, \quad x + y = \frac{a^2 + b^2}{ab}.$$

Nous devons supposer a et b différents de zéro pour que la seconde équation ait un sens. Le déterminant du système est $a - b$.

1° Si $a \neq b$, on trouve la solution unique : $x = \frac{a+b}{a}$; $y = \frac{a-b}{b}$.

2° Si $a = b \neq 0$, le système devient

$$ax + ay = 2a; \quad x + y = \frac{2a^2}{a^2}.$$

Il se réduit à l'équation $x + y = 2$. Il y a indétermination simple.

§ IV. — SYSTÈMES DU 1er DEGRÉ RENFERMANT PLUS D'ÉQUATIONS QUE D'INCONNUES.

212. Un système de $n + k$ équations à n inconnues est ordinairement impossible (**180**). Mais il peut arriver que les équations renferment en dehors des inconnues, encore d'autres lettres indéterminées (ces lettres sont appelées **paramètres**). Dans ce cas, on peut se proposer soit de *déterminer ces paramètres*, soit de *rechercher les relations* qui doivent exister entre ces paramètres, pour que les équations soient *compatibles*.

213. Problème I. — *Déterminer* a *et* b, *de manière que les équations*

$$ax + 3y = -2\ (1);\quad x - 3y = 2\ (2);\quad 2x - 3y = 10\ (3);$$
$$2ax + by = -2\ (4)$$

soient compatibles.

Les équations (2) et (3) donnent $x = 8$; $y = 2$. En substituant dans les équations (1) et (4), on voit qu'on doit avoir :

$$8a + 6 = -2;\quad 16a + 2b = -2.$$

De ces équations, on tire $a = -1$ et $b = 7$.

214. Problème II. — *Quelle relation doit exister entre les coefficients des équations*

$$ax + b = 0\ (1),\quad a'x + b' = 0\ (2)$$

pour que ces deux équations soient compatibles?

Nous ne considérons que le cas où on peut résoudre une équation. Supposons que ce soit la première, ce qui exige $a \neq 0$.

L'équation (1) donne alors $x = -\dfrac{b}{a}\cdot$

Pour que cette valeur de x vérifie l'équation (2), il faut et il suffit qu'on ait

$$a'\left(-\frac{b}{a}\right) + b' = 0.$$

Cette égalité peut s'écrire

$$ab' - ba' = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0.$$

Si $a' \neq 0$, on aboutit à la même condition.

215. Problème III. — *Quelle est la relation qui doit exister entre les coefficients des équations*

$$ax+by+c = 0,\ (1)\quad a'x+b'y+c' = 0,\ (2)\quad a''x+b''y+c'' = 0\ (3)$$

pour qu'elles soient compatibles?

Nous ne considérons que le cas où deux équations forment un système admettant une solution unique. Supposons que ce soient les deux premières, ce qui exige $ab' - ba' \neq 0$. Alors le système (1), (2) donne :

$$x = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}; \quad y = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}.$$

Pour que cette solution vérifie l'équation (3), il faut et il suffit qu'on ait

$$a''(bc' - cb') + b''(ca' - ac') + c''(ab' - ba') = 0$$

ou $$ab'c'' + bc'a'' + ca'b'' - cb'a'' - ba'c'' - ac'b'' = 0.$$

EXERCICES

Chercher les valeurs qu'il faut attribuer aux lettres a et b pour que les équations suivantes soient impossibles ou indéterminées.

315. (326)
1° $(a + 2)x = 7$
2° $(a + 1)x = a^3 + 1$
3° $(a - 1)x = a^2 - 1$
4° $(a^2 - 1)x = a - 1$
5° $(a^2 + 2a - 3)x = a + 3$
6° $a(x - 4) + 7x + 14 = 0$
7° $a^2(x - a + 3) = 9x$
8° $a^2(x - 1) - 4(x + a) = 4$
9° $(a + b)x = b - 1$
10° $bx + 7b = ax + 2b$.

316. (327)
1° $x + 1 = \dfrac{1}{a - 1}$
2° $ax - 2 = \dfrac{3}{a - 2}$
3° $ax - x = \dfrac{a - 1}{a}$
4° $\dfrac{x + a}{2} = \dfrac{x + 3}{a - 1}$.

Résoudre et discuter les équations suivantes :

317. (328)
1° $(a - 1)x = 3a + 2$
2° $(m - 3)x = 9 - m^2$
3° $a(x - m) = m(x - 2m)$
4° $2ax + 1 = 4x + b$.

318. (329)
1° $\dfrac{x}{a - 1} - 1 = \dfrac{x}{a + 1} + 1$
2° $\dfrac{x}{a - b} + \dfrac{x}{a + b} = 2$
3° $\dfrac{x - a}{a - b} - \dfrac{x + a}{a + b} = \dfrac{2ax}{a^2 - b^2}$
4° $\dfrac{x - 2}{a - 2} + \dfrac{x + 2}{a + 2} + \dfrac{ax - 4}{a^2 - 4} = 0$.

319. (330)
1° $\dfrac{a}{b - x} = \dfrac{b}{a - x}$
2° $\dfrac{x - a}{2} = \dfrac{(x - b)^2}{2x - a}$
3° $\dfrac{a}{ax+1} + \dfrac{1}{ax-1} + \dfrac{1}{a^2x^2-1} = 0$
4° $\dfrac{1}{x} + \dfrac{a}{b-a} = \dfrac{a}{b + a} + \dfrac{2ab}{b^2-a^2}$

Dans ces quatre dernières équations, nous supposons a et b différents de zéro.

320. (331) Résoudre les inéquations suivantes :

1° $ax - 3 < x + 2$

2° $2ax > (a-1)x + 7$

3° $\frac{x}{a} - 5 < \frac{x}{3}$

4° $(x+a)^2 > (x-a)^2 + a + 1$

5° $a^2x - a < 1 - x$

6° $\frac{2x}{a-2} + x < \frac{a-2}{2}$

321. (332) Déterminer m pour que les sytèmes suivants soient impossibles ou indéterminés.

1° $mx + y = 5$
$x - y = 3$

2° $mx - y = 1$
$10x - 2y = m - 3$

3° $(m-1)x - 3y = 1$
$mx + y = 0$

4° $2x + (m-5)y = 5$
$4x - 3my = 5m$

5° $x + (5m-4)y = m$
$(2m+1)x + (m-4)y = 2m$

6° $mx + 4y = 3m$
$(m^2-1)x + 3my = 4$

7° $mx - 3y = 5m - 3$
$2x + (m-7)y = 29 - 7m$

8° $mx + 2y = 1$
$2x + 2(m-1)y = 1$

9° $x - my = \frac{5}{m^2-1}$
$x + (m-4)y = \frac{3}{m^2-1}$

10° $x - my = \frac{3}{(m-1)(m-3)}$
$4(m-3)x - 8my = 3.$

322. (333) Déterminer p et q pour que les systèmes suivants soient indéterminés.

1° $x - y = 5$
$px + qy = 1$

2° $(p-1)x - 3y = q$
$(q-5)x + y = p$

3° $2x + py = px + 8y = q + 1.$

Résoudre et discuter les systèmes suivants :

323. (334)

1° $mx - y = m$
$x + y = 5$

2° $(m-4)x + y = 6m - 1$
$(3m-9)x + 2y = 10$

3° $x + ay = b$
$y - ax = 0$

4° $x - 2y = 7$
$ax - 4y = b$

5° $(m+2)x + my = 1$
$-3x + (m-2)y = -1$

6° $(m-1)x - (m-2)y = m + 1$
$(m+2)x - my = m + 6$

7° $(m^2+1)x + (m+1)y = m - 1$
$(m^2-1)x + (m-1)y = m + 1$

8° $(a^2-b^2)x + (a^2+b^2)y = a^2$
$(a^3-b^3)x + (a^3+b^3)y = a^3.$

324. (335)

1° $x + ay = \frac{a^2+1}{a^2-1}$
$ax + y = \frac{2a}{a^2-1}$

2° $ax + (a-b)y = \frac{1}{a-b}$
$bx + (a+b)y = \frac{1}{a+b}.$

Quelles valeurs doit prendre m pour que les systèmes suivants admettent une solution unique? Quelle est cette solution?

325. (337)

1° $x + 12 = 0$, $mx + 6 = 0$

2° $mx + 2 = 0$, $(m - 1)x + 4 = 0$

3° $(m - 5)x = 3$, $(2m - 5)x = 1$

4° $(m + 2)x = -3$, $mx = m - 2$.

326. (338)

1° $x + 2y = 1$, $mx - y = 4$, $x - 3y = 6$

2° $x - 3y = 8$, $2x + y = 2$, $x - my = 2$

3° $x + (m + 1)y = 10$, $2x - (4m + 1)y = 5$, $x - y = 6$.

4° $5x + (m - 1)y = -4$, $x + my = 7$, $2x + my = 5$.

327. (339) Quelles valeurs faut-il donner à a et b pour que les systèmes suivants admettent une solution unique? Quelle est cette solution?

1° $2x = 6$, $ax = bx + 8$, $bx = a$

2° $ax = b - 1$, $bx = 2a + 1$, $x + 1 = 0$

3° $4x + y = 21$, $ax + by = 13$, $-x + 2y = -3$, $3ax - 2by = 24$

4° $ax + 2y = 2a - 2$, $ax - y = a + 1$, $3ax + 3by = ab - 1$, $6bx - 6ay = 11 - 2a^2$.

328. (340) Quelle relation doit exister entre a, b, c pour que les trois équations suivantes soient compatibles?

$$x - ay - b = 0; \quad y + ax - c = 0; \quad bx + cy = 1.$$

329. (341) Si a, b, c sont des nombres distincts, montrer que $a + b + c = 0$ est la condition de compatibilité des trois équations :

$$x + ay + a^3 = 0; \quad x + by + b^3 = 0; \quad x + cy + c^3 = 0.$$

330. (343) On donne le système

$$mx - 6y = 2m + 4; \quad 6x - (m - 1)y = 4.$$

Déterminer m pour que ce système admette une solution unique et que la valeur de y soit le double de celle de x.

331. (345) Quelle relation doit exister entre a et b pour que les équations

$$x - y = 5; \quad x + y = a; \quad (a + 5)x + (a - 5)y = b$$

soient compatibles?

CHAPITRE XI

Discussion de problèmes.

§ I. — PROBLÈMES IMPOSSIBLES.

216. *Un problème est* **impossible** *lorsqu'il n'admet aucune solution.*

Un problème peut être impossible parce qu'il conduit à des *équations impossibles* ou à des équations dont toutes les *solutions* sont *inacceptables.*

217. Les deux problèmes suivants sont impossibles parce que en les mettant en équations, on obtient des équations qui n'admettent pas de solution. Il en serait de même si on obtenait un système renfermant plus d'équations que d'inconnues, du moins en général (**180**).

218. Problème I. — *Deux bassins contiennent l'un* 160 *litres d'eau et l'autre* 75 *litres. Le premier reçoit* 7 *litres d'eau par minute, et le second* 3,5 *litres. Quand le premier contiendra-t-il le double du second?*

Supposons que ce soit après x minutes. L'équation du problème est

$$160 + 7x = 2(75 + 3{,}5x) \quad \text{ou} \quad 0.x = 10.$$

Cette équation est impossible; il en sera de même du problème.

219. Problème II. — *L'aire d'un rectangle augmente de* 40 m^2 *quand on augmente chacune de ses deux dimensions de* 5 *m. L'aire diminue de* 50 m^2 *quand on diminue les dimensions de* 9 *m. Calculer ces dimensions.*

Si la longueur mesure x m et la largeur y m, on a le système :

$$\begin{cases} (x+5)(y+5) = xy + 40 \\ (x-9)(y-9) = xy - 50, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x + y = 3 \\ 9x + 9y = 131. \end{cases}$$

Ce système est impossible, car si $x + y$ est égal à 3, on ne peut avoir $9x + 9y = 131$. Le problème l'est également.

220. Solutions inacceptables. — Il peut arriver qu'une solution de l'équation (ou des équations) d'un problème ne vérifie pas le problème; on dit alors que *cette solution est inacceptable.* Ce cas se présente quand une solution de l'équation (ou des équations) du problème ne satisfait pas à certaines conditions restrictives qui proviennent de la nature des quantités que l'on recherche.

Un nombre de sacs doit être positif (**221**); un chiffre d'un nombre doit être entier, positif et inférieur à 10 (**222**); un nombre d'hommes doit être entier et positif (**223**).

Discuter une solution de l'équation (ou des équations) d'un problème, c'est examiner si elle est acceptable.

La discussion des solutions négatives sera faite plus loin (§ III).

221. Problème III. — *Un fermier a du blé à* 150 *et à* 180 *fr l'hl. Il en vend* 150 *hl pour* 27 600 *fr. Combien en a-t-il mis de chaque sorte?*

Supposons qu'il y ait x hl à 150 fr et $(150 - x)$ hl à 180 fr.

On a l'équation $150x + 180(150 - x) = 27\,600$.

D'où $x = -20$. Le nombre d'hl de blé de la 1re sorte doit évidemment être positif. La solution de l'équation ne convient donc pas au problème.

222. Problème IV. — *Trouver un nombre de deux chiffres, sachant que le chiffre des unités est* 6 *et que, si on retranche* 45 *de ce nombre, on trouve le nombre renversé.*

Soit x le chiffre des dizaines. On a l'équation

$$(10x + 6) - 45 = 60 + x.$$

D'où $x = 11$. Cette réponse convient à l'équation, mais pas au problème, parce qu'un nombre d'un chiffre est toujours inférieur à 10.

223. Problème V. — *On a partagé* 172 *francs entre douze personnes. Chaque homme a reçu* 15 *fr et chaque femme* 10 *fr. Combien y avait-il d'hommes et combien de femmes?*

Soient x le nombre d'hommes et y le nombre de femmes. On a le système

$$x + y = 12; \quad 15x + 10y = 172.$$

En résolvant ce système, on trouve $x = 10\frac{2}{5}$; $y = 1\frac{3}{5}$.

Cette réponse ne convient évidemment pas au problème.

§ II. — PROBLÈMES INDÉTERMINÉS.

224. Un problème peut être **indéterminé** pour deux raisons :

1° Parce qu'il conduit à une équation indéterminée ou à un système indéterminé de n équations à n inconnues.

2° Parce qu'il conduit à un système renfermant moins d'équations que d'inconnues (**178**).

225. Problème VI. — *Le triple d'un nombre, augmenté de 5 et diminué de la moitié du nombre donne un résultat égal au quart de la somme du décuple du nombre et de 20. Quel est ce nombre?*

Si nous représentons le nombre par x, nous aurons l'équation

$$3x + 5 - \frac{x}{2} = \frac{1}{4}(10x + 20).$$

Elle se réduit à $0.x = 0$. Par suite, tout nombre satisfait aux conditions du problème. Il y a indétermination absolue.

226. Problème VII. — *Former la somme de 27 fr avec des pièces de 5 fr et de 2 fr.*

Soient x le nombre des pièces de 5 fr et y celui des pièces de 2 fr. L'équation du problème est $5x + 2y = 27$.

Cette équation admet une infinité de solutions. Mais le problème n'admet que des valeurs positives et entières pour les inconnues. Montrons de plus que ces valeurs sont en nombre limité. En effet :

x est le plus grand possible quand y est nul. Si on suppose $y = 0$, on trouve $x = 5{,}4$. Donc x est inférieur à 6.

y est le plus grand possible quand x est nul. Si on suppose $x = 0$, on trouve $y = 13{,}5$. Donc y est inférieur à 14.

En attribuant à x successivement les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, et en calculant les valeurs correspondantes de y, on voit que les solutions du problème sont :

$$x = 1, \quad y = 11; \quad x = 3, \quad y = 6; \quad x = 5, \quad y = 1.$$

§ III. — SOLUTIONS NÉGATIVES.

227. En résolvant un problème, on peut aboutir à **une solution négative.** Il importe, dans ce cas, de commencer par examiner **la nature de la grandeur** dont l'inconnue est la mesure.

1° *Si la grandeur a toujours pour mesure un nombre arithmétique*, une solution négative est évidemment inacceptable (**221**).

2° *Si la grandeur est susceptible d'être mesurée dans deux sens opposés*, une solution négative est acceptable et elle a une signification bien déterminée, sauf dans les deux cas suivants :

a) La mise en équations a été fautive (Problème IX).

b) L'énoncé du problème exige que la grandeur ait un sens déterminé (Problème X).

Remarque. — Dans le cas particulier où *l'inconnue n'est pas la mesure d'une grandeur*, une solution négative est acceptable, à moins qu'il n'y ait d'autres conditions restrictives (Problème VIII).

228. Problème VIII. — *Quel est le nombre qu'il faut ajouter aux deux termes de la fraction* $\frac{5}{7}$ *pour qu'elle devienne égale à* 3?

Si x est ce nombre, on a l'équation

$$\frac{5+x}{7+x} = 3.$$

En résolvant, on trouve $x = -8$. Cette solution convient au problème car on a

$$\frac{5-8}{7-8} = \frac{-3}{-1} = 3.$$

229. Problème IX. — *Deux courriers* M *et* M', *se déplaçant dans le sens* X'X, *se trouvent à un moment donné, le premier en* A, *le second en* B. *Le point* B *est à* 20 *km de* A *du côté de* X. M *parcourt* 8 *km à l'heure et* M', 10 *km. Déterminer leur point de rencontre.*

Fig. 4.

Supposons que la rencontre ait lieu en un point C situé à x km à droite de A. M arrivera en C après $\frac{x}{8}$ heures et M' après $\frac{x-20}{10}$ heures. On a

$$\frac{x}{8} = \frac{x-20}{10}; \quad \text{d'où} \quad x = -80.$$

La grandeur inconnue est susceptible d'être comptée en deux sens opposés. Une réponse négative a donc une signification précise, si on a orienté la grandeur, c'est-à-dire, si on en a fixé le sens positif et le sens négatif. C'est ce que nous avons négligé de faire. De plus, notre mise en équation s'est faite en supposant que le point de rencontre se trouvait à droite de A; par suite, il n'est pas certain que l'équation obtenue convienne pour une autre position de C.

Pour voir si la solution trouvée est acceptable, nous devrons recommencer la résolution.

1° *Dès le début, nous aurons soin d'orienter la droite* X'X.

2° *Nous mettrons le problème en équation sans préciser au préalable la position du point* C.

3° *De plus, nous veillerons à n'écrire que des égalités à la fois vraies en grandeur et en signe.*

230. Solution générale du problème précédent. — Orientons X'X positivement vers la droite; prenons comme unité de longueur le km et comme unité de temps, l'heure.

La vitesse de M sera $+ 8$ et celle de M' sera $+ 10$, puisque les deux courriers se déplacent dans le sens positif.

Fig. 5.

Soit x la distance algébrique AC; la distance algébrique AB est $+ 20$. Pour obtenir la distance algébrique BC, appliquons la relation de Chasles (**28, 237**). Elle donne, quelle que soit la position de C,

$$AC = AB + BC \quad \text{ou} \quad x = 20 + BC;$$

et par suite, $$BC = x - 20.$$

M met $\frac{x}{8}$ heures pour parcourir AC; M' met $\frac{x - 20}{10}$ heures pour parcourir BC. De là, on tire l'équation

$$\frac{x}{8} = \frac{x - 20}{10}.$$

Nous retrouvons la même équation et par suite aussi la même solution $x = - 80$.

A présent, cette solution a une signification. Le signe $-$ indique que le point C se trouve à 80 km de A du côté de X'.

231. Problème X. — *Deux personnes* A *et* B *ont respectivement* 50 *et* 20 *ans. Après combien d'années l'âge de* A *sera-t-il le triple de l'âge de* B?

Ce problème n'est pas du même genre que le précédent. Le temps est bien une grandeur susceptible d'être comptée dans deux sens opposés, vers le passé et vers l'avenir; seulement l'énoncé du problème nous oblige à compter le temps vers l'avenir, donc dans un sens déterminé. Par suite, une solution négative sera inacceptable.

Soit x le nombre d'années cherché. On a l'équation

$$50 + x = 3(20 + x)$$

qui donne $x = -5$. Cette solution négative est inacceptable et le problème est impossible.

REMARQUE. — On peut évidemment essayer de modifier l'énoncé du problème précédent en vue d'en faire un problème possible. Pour cela, remplaçons la question finale par la suivante : *Quand l'âge de* A **était-il** *le triple de l'âge de* B?

Soit x le nombre d'années cherché. On a l'équation

$$50 - x = 3(20 - x).$$

D'où $x = 5$.

Il y a 5 années, A avait 45 ans et B, 15 ans. La solution convient donc au nouveau problème. *Seulement il faut bien remarquer que ce dernier problème est un problème différent du problème proposé, qui est et reste impossible.*

§ IV. — DISCUSSION DE PROBLÈMES LITTÉRAUX.

232. Deux cas bien distincts peuvent se présenter :

1er cas : *L'inconnue doit satisfaire à certaines conditions de signe ou de grandeur.* — Discuter le problème, c'est déduire des conditions imposées aux inconnues les conditions auxquelles doivent satisfaire les données pour que le problème soit possible (voir le nº **233**).

2e cas : *L'inconnue est un nombre ou une grandeur susceptible d'être mesurée dans deux sens opposés.* — Discuter le problème, c'est rechercher, en considérant les diverses hypothèses qu'on peut faire sur les données, quand le problème est possible et quel est alors le signe du résultat.

L'examen de l'équation (ou des équations) du problème indique quelles sont les hypothèses qu'on doit faire sur les données (voir les nºs **234** et **273**).

D'ordinaire, *on interprète les résultats* : Pour chaque cas, on examine la signification pratique des hypothèses; on montre ensuite que le résultat trouvé pouvait être prévu, ou qu'il est d'accord avec les théorèmes étudiés en arithmétique et en géométrie.

233. Problème I. — *Un négociant a du vin à* a *et à* b *fr l'hl. Combien d'hl de la* 1re *sorte doit-il ajouter à* m *hl de la seconde pour qu'un hl du mélange revienne à* c *fr?*

Soit x le nombre d'hl de la 1re sorte. On obtient l'équation

$$ax + bm = c(x + m) \quad \text{ou} \quad x(a - c) = m(c - b).$$

La racine de cette équation n'est acceptable pour le problème que si elle est *positive* ou *nulle.*

1re partie : $a - c \neq 0$. — L'équation donne, dans ce cas,

$$x = \frac{m(c - b)}{a - c}.$$

On doit avoir $$\frac{m(c - b)}{a - c} \geqslant 0.$$

Or, m est positif. Par suite, x est *positif* dans deux cas, et *nul* dans un seul cas.

1er Cas : $c - b > 0$ et $a - c > 0$. — On a alors

$$c > b \quad \text{et} \quad a > c, \quad \text{ou} \quad b < c < a.$$

2e Cas : $c - b < 0$ et $a - c < 0$. — Dans ce cas, on a

$$c < b \quad \text{et} \quad a < c, \quad \text{ou} \quad a < c < b.$$

On voit que dans chacun des deux cas, le prix moyen c doit être compris entre les prix des deux sortes de vin qu'on mélange. Cette condition de possibilité s'impose d'ailleurs à priori.

3e Cas : x est nul, quand $c - b = 0$ ou $b = c$.

Il est naturel que dans le cas $b = c \neq a$, on devra prendre uniquement du vin à b fr l'hl.

2e partie : $a - c = 0$. — L'équation devient

$$0.x = m(c - b).$$

1° L'équation est impossible quand $b \neq c$. Le problème l'est également, car on a $a = c \neq b$ et en ajoutant à du vin à b fr l'hl du vin à a ou c fr l'hl, on n'aura jamais du vin à c fr l'hl.

2° L'équation est indéterminée quand $b = c$. Le problème l'est aussi, car $a = b = c$.

234. Problème II. — *Trouver le nombre qu'il faut ajouter aux termes de la fraction* $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ *pour qu'elle devienne égale à* $\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}$ (a, b, c, d *sont positifs*).

Soit x le nombre cherché. On a l'équation

$$\frac{a + x}{b + x} = \frac{c}{d} \quad (1) \quad \text{ou} \quad x(c - d) = ad - bc. \qquad (2)$$

1re partie. — Quand $c - d \neq 0$, l'équation (2) donne

$$x = \frac{ad - bc}{c - d}.$$

1er Cas : $c - d > 0$; $ad - bc > 0$. — La valeur de x est positive; elle vérifie l'équation (1), car elle n'annule pas le dénominateur $b + x$.

Ce résultat est d'accord avec ce qu'on a vu en arithmétique. En effet, les hypothèses donnent

$$c > d \quad \text{et} \quad ad > bc; \quad \text{d'où} \quad \frac{a}{b} > \frac{c}{d} > 1.$$

Ainsi, les deux fractions sont supérieures à l'unité et la première est supérieure à la seconde. Or d'après un théorème vu en arithmétique, une fraction supérieure à l'unité diminue effectivement quand on ajoute un même nombre positif à ses deux termes.

2e Cas : $c - d > 0$; $ad - bc < 0$. — La valeur de x est négative. Seulement l'équation (1) exige qu'elle soit différente de $- b$. Elle ne convient donc au problème que si l'on a

$$\frac{ad - bc}{c - d} \neq - b \quad \text{ou} \quad a \neq b.$$

Essayons d'expliquer ce résultat. Les hypothèses donnent

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \text{et} \quad \frac{c}{d} > 1.$$

La seconde fraction est supérieure à l'unité; la première est inférieure à la seconde, mais elle peut être supérieure, égale ou inférieure à l'unité.

Si la première fraction est supérieure à l'unité, elle augmente effectivement quand on ajoute un même nombre négatif à ses deux termes. Si elle est égale à l'unité, c'est-à-dire si $a = b$, elle reste égale à 1 quand on ajoute un même nombre à ses deux termes; donc elle ne peut devenir égale à la seconde fraction et le problème est impossible. Si elle est inférieure à l'unité, il semble à première vue qu'en ajoutant un même nombre négatif à ses deux termes, on ne puisse obtenir une fraction supérieure à l'unité; un exemple montrera qu'il n'en est pas ainsi : si on ajoute $- 7$ aux termes de la fraction $2/3$, on trouve

$$\frac{2 - 7}{3 - 7} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4} > 1.$$

3e Cas : $c - d > 0$; $ad - bc = 0$. — On a $x = 0$.

Ce résultat s'explique aisément. Les hypothèses donnent

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} > 1,$$

et le nombre qu'il faut ajouter aux deux termes d'une fraction différente de l'unité pour qu'elle reste égale à elle-même est évidemment zéro.

On discute d'une façon analogue les trois cas suivants :

4e Cas : $c - d < 0$; $ad - bc > 0$. — On a $x < 0$; le problème n'est possible que si a est différent de b.

5e Cas : $c - d < 0$; $ad - bc < 0$. — On a $x > 0$.

6e Cas : $c - d < 0$; $ad - bc = 0$. — On a $x = 0$.

2e partie. — Quand $c - d = 0$, l'équation (2) devient

$$0.x = c(a - b). \qquad (3)$$

1er Cas : $a - b \neq 0$. — L'équation (3) et le problème sont impossibles.

Les hypothèses donnent en effet, $\frac{a}{b} \neq 1$, $\frac{c}{d} = 1$. Or on sait qu'en ajoutant un même nombre aux deux termes d'une fraction différente de l'unité, on n'aura jamais une fraction égale à 1.

2e Cas : $a - b = 0$. — L'équation (3) et le problème sont indéterminés. Toutefois l'équation (1) exige que x soit différent de $- b$.

Les hypothèses donnent en effet, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = 1$, et il est évident qu'en ajoutant un même nombre, différent de $- b$, aux deux termes de la première fraction, on aura toujours une fraction égale à 1.

EXERCICES

PROBLÈMES IMPOSSIBLES OU INDÉTERMINÉS.

Résoudre les problèmes numériques qui suivent et dire pourquoi ils sont impossibles ou indéterminés.

332. (349) Un joueur donne 2 fr pour chaque partie qu'il perd et reçoit 1 fr pour chaque partie qu'il gagne; après douze parties, son gain excède sa perte de 18 fr. Combien de parties a-t-il gagnées?

333. (350) On demande à un berger combien il a de moutons. Si j'en avais 10 de plus, dit-il, j'en aurais les 2/3 des 3/4 du double de ce que j'ai. Combien de moutons a-t-il ?

334. (351) Un enfant va cueillir des pêches; il devra donner la moitié de ses pêches à un ami, et le quart du reste à son frère. Combien doit-il en cueillir s'il veut en conserver 7 pour lui?

335. (352) Un joueur perd d'abord les 4/9 de son argent, puis il gagne 15 fr. Ensuite il perd les 2/5 de ce qu'il possède et il lui reste le tiers de ce qu'il avait d'abord, plus 9 fr. Quelle somme avait-il avant le jeu?

336. (353) Trouver un nombre qui, divisé respectivement par 2, 3, 4, donne pour restes 1, 2, 3; la somme des quotients vaut le nombre plus un douzième de ce même nombre.

337. (354) Deux pièces d'une même étoffe mesurent respectivement 200 mètres et 180 mètres. Si le prix du mètre augmentait de 2 fr, les deux pièces coûteraient ensemble 760 fr. Quel est le prix du mètre?

338. (355) Deux lingots d'or sont aux titres de 0,900 et 0,820, et pèsent respectivement 2,7 kg et 3,5 kg. Après les avoir fondus ensemble, on veut ramener le lingot résultant au titre de 0,850. Quelle quantité d'or pur ou de cuivre faudra-t-il ajouter?

339. (356) Chercher les dimensions d'un rectangle sachant que la superficie augmente de 60 m² si l'on augmente la base de 4 m et la hauteur de 12 m; tandis qu'elle diminue de 8 m² si l'on diminue la base de 1 m et la hauteur de 3 m.

340. (357) Si l'on augmente la base d'un rectangle de 2 m et la hauteur de 6 m, l'aire augmente de 96 m²; si l'on diminue la base de 5 m et la hauteur de 15 m, l'aire diminue de 135 m². Déterminer les dimensions de ce rectangle.

Résoudre les problèmes numériques suivants. Examiner s'ils sont possibles ou non. Le cas échéant, modifier les énoncés en vue de les rendre possibles.

341. (358) Deux nombres sont tels que leur produit plus 30 égale le produit de ces mêmes nombres augmentés chacun de 5; trouver ces nombres sachant qu'ils diffèrent de 5 unités.

342. (359) Deux courriers, faisant le premier 9 km et le second 8 km à l'heure, se dirigent vers le même but. Ils se rejoignent à 144 km de leur point de départ commun. Combien d'heures le second était-il parti après le premier?

343. (360) Le poids d'une pendule descend de 11 cm en 3 minutes. Un insecte grimpe le long de la corde et parcourt 17 cm en 5 minutes. On demande après combien de temps l'insecte sera en un point situé 12 cm plus haut que son point de départ?

344. (361) Un bassin pouvant contenir 60 m³ et muni de deux robinets, a été rempli en 20 heures. Le premier tuyau y versait 4 m³ par heure. Combien le second en faisait-il entrer dans le même temps?

est celle du segment AB, mais ils ont des sens opposés. Voilà pourquoi, on les différencie en disant que dans le premier cas le mobile a parcouru le vecteur AB et dans le second, le vecteur BA.

On appelle **vecteur** AB *la portion* AB *d'un axe qu'on suppose parcourue par un mobile allant du point* A *au point* B.

Le point A est *l'origine* du vecteur AB; le point B est *son extrémité.* Pour nommer un vecteur, on indique d'abord son origine, puis son extrémité. On appelle *longueur* du vecteur AB la mesure de la longueur du segment AB.

La mesure *du vecteur* AB *est le nombre relatif qui a pour valeur absolue la longueur du vecteur et pour signe* + *ou* —, *suivant que le vecteur est décrit dans le sens positif ou dans le sens négatif de l'axe.*

On désigne cette mesure par la notation $\overline{AB}$.

Le cm étant l'unité de longueur, on a (Fig. 6) :

$$\overline{AB} = -2;\ \overline{BA} = +2;\ \overline{AC} = +4;\ \overline{CB} = -6;\ \text{etc.}$$

Remarque. — Les mesures des vecteurs AB et BA sont des nombres opposés. On a

$$\overline{AB} = -\overline{BA} \quad \text{et} \quad \overline{AB} + \overline{BA} = 0.$$

236. Autres définitions. — *Deux vecteurs sont* **consécutifs,** *quand l'extrémité du premier est l'origine du second.*

La **résultante** *de deux ou plusieurs vecteurs consécutifs est le vecteur qui a pour origine, l'origine du premier et pour extrémité, l'extrémité du dernier.*

Les vecteurs AB et BC (Fig. 6) sont consécutifs; leur résultante est le vecteur AC.

237. Théorème de Chasles (ou de Möbius). — ***La mesure de la résultante de plusieurs vecteurs consécutifs d'un même axe est égale à la somme des mesures des vecteurs.***

I. Deux vecteurs. — Considérons les vecteurs consécutifs AB, BC et supposons qu'en parcourant l'axe $x'x$ dans le sens positif, on rencontre les points A, B, C dans l'ordre B, A, C.

Fig. 6.

Les mesures des vecteurs BA, AC, BC sont alors des nombres positifs et on a évidemment

$$\overline{BA} + \overline{AC} = \overline{BC}.$$

Or, $\overline{BA} = -\overline{AB}$. L'égalité précédente peut donc s'écrire

$$-\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{BC} \quad \text{ou} \quad \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}.$$

La démonstration serait analogue si les points A, B, C étaient placés dans un autre ordre.

II. Plusieurs vecteurs. — 1° Démontrons d'abord que *si la proposition s'applique à* n — 1 *vecteurs, elle s'applique aussi à* n *vecteurs* (méthode de récurrence).

Considérons les n vecteurs consécutifs AB, BC, ..., JK, KL portés par l'axe $x'x$ et supposons que pour les $n - 1$ premiers vecteurs on ait la relation

$$\overline{AK} = \overline{AB} + \overline{BC} + \ldots + \overline{JK}.$$

En considérant les deux vecteurs consécutifs AK et KL, on a aussi

$$\overline{AL} = \overline{AK} + \overline{KL}.$$

Dans cette égalité, remplaçons $\overline{AK}$ par sa valeur et il vient

$$\overline{AL} = \overline{AB} + \overline{BC} + \ldots + \overline{JK} + \overline{KL}.$$

2° Remarquons ensuite que le théorème est vrai pour deux vecteurs; il sera donc vrai pour 3, 4, 5, ..., n vecteurs.

238. Abscisse d'un point. — Sur un axe $x'x$, considérons un point fixe O; ce sera *l'origine de l'axe*. Prenons aussi OU pour unité de longueur.

Fig. 7.

L'abscisse du point M *est la mesure du vecteur* OM, *qui va de l'origine au point* M.

Si nous désignons cette abscisse par x, nous aurons $x = \overline{OM}$.

L'unité de longueur étant donnée, on peut déterminer l'abscisse d'un point quelconque de l'axe $x'x$.

Réciproquement, si on connaît l'abscisse d'un point de l'axe $x'x$, on peut marquer ce point sur l'axe : *la valeur absolue* de l'abscisse indique à *quelle distance* de l'origine le point M est situé; le *signe* de l'abscisse marque *de quel côté* de l'origine le point M se trouve.

239. Variation de l'abscisse. — 1° Si le point M se déplace sur l'axe $x'x$ à partir de O dans le sens positif, son abscisse x prend successivement les valeurs 1, 2, 10, 100, ..., ainsi que toutes les valeurs intermédiaires. Donc x devient et reste supérieur à tout nombre positif donné, si grand qu'il soit. *On dit que* x *croît indéfiniment*, ou encore, *que* x *tend vers* $+\infty$ **(plus l'infini)**.

2° Si le point M se déplace vers la gauche, x prend successivement les valeurs -1, -2, ..., ainsi que toutes les valeurs intermédiaires. Donc x devient et reste inférieur à tout nombre négatif donné, si grand qu'il soit en valeur absolue. *On dit que* x *décroît indéfiniment*, ou encore, *que* x *tend vers* $-\infty$ **(moins l'infini)**.

3° Nous dirons en résumé que l'*abscisse* x *peut prendre toutes les valeurs depuis* $-\infty$ *jusque* $+\infty$.

REMARQUE. — Les symboles $-\infty$ et $+\infty$ ne représentent aucun nombre. Ils sont employés pour simplifier le langage et l'écriture.

240. Théorème. — ***La mesure d'un vecteur est égale à l'abscisse de son extrémité, diminuée de l'abscisse de son origine.***

En effet, si on considère le vecteur AB, la relation de Chasles $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB}$ donne, en y remplaçant $\overline{AO}$ par $-\overline{OA}$,

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}.$$

241. Mesure du temps. — Le temps est une grandeur qui peut être mesurée en deux sens opposés à partir d'un moment choisi comme *origine* quand on a adopté *une unité de temps.*

L'époque ou la date d'un événement est le nombre qui mesure l'intervalle de temps limité par l'origine et l'événement; ce nombre est positif ou négatif suivant que l'événement suit ou précède l'origine.

Après être convenu de représenter l'unité de temps par une certaine longueur, on peut représenter sur un axe les époques des événements par des abscisses positives et négatives. Il en résulte que *l'intervalle de temps qui sépare un événement* A *d'un événement* B *est égal à la différence entre l'époque du second* B *et l'époque du premier* A.

Par exemple, l'intervalle de temps entre la fondation de Rome (— 753) et la 1re guerre mondiale (1914) est 1914 — (— 753) ou 2667 ans.

§ II. — DÉTERMINATION D'UN POINT D'UN PLAN.

242. Notions. — Traçons dans un plan deux droites rectangulaires $x'x$ et $y'y$. Elles se coupent en O. Prenons sur chaque droite *un sens positif :* $x'x$ est positif de O vers x et $y'y$ de O vers y. Considérons O comme *origine commune* et adoptons OU comme unité de longueur.

Soit alors M un point quelconque du plan. Par le point M, traçons une parallèle à $y'y$ qui rencontre $x'x$ en P, et une parallèle à $x'x$ qui rencontre $y'y$ en Q.

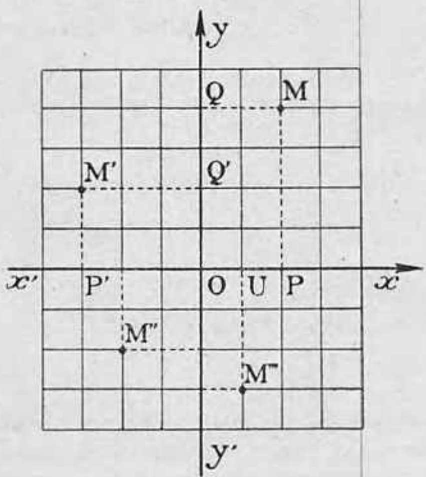


Fig. 8.

L'abscisse *du point* M *est la mesure algébrique du vecteur* OP; **son ordonnée** *est la mesure algébrique du vecteur* OQ.

On désigne d'ordinaire l'abscisse par la lettre x et l'ordonnée par la lettre y. On a donc, pour le point M :

$$x = \overline{OP} = \overline{QM} = +2;$$

$$y = \overline{OQ} = \overline{PM} = +4.$$

L'écriture (x, y) désigne le point dont l'abscisse est x et l'ordonnée, y.

L'abscisse et l'ordonnée d'un point sont appelées **coordonnées** de ce point. $x'x$ et $y'y$ sont les **axes de coordonnées**; $x'x$ est l'axe des x ou des abscisses; $y'y$ est l'axe des y ou des ordonnées.

243. Application. — Soit à construire le point (— 3, 2).

Portons sur $x'x$ une abscisse $\overline{OP'} = -3$ et sur $y'y$ une ordonnée $\overline{OQ'} = +2$. Menons par P' la parallèle à $y'y$ et par Q' la parallèle à $x'x$. Ces deux droites se coupent en un point unique M′ (Fig. 8) et ce point a pour coordonnées $x = -3$, $y = 2$.

Représenter aussi les points $(-2, -2)$, $(1, -3)$, $(2, 0)$, $(0, -2)$ et $(0, 0)$.

244. Remarques. — I. Les axes déterminent quatre angles : xOy est le premier angle; yOx' est le deuxième, $x'Oy'$ le troisième et $y'Ox$ le quatrième.

Dans le premier angle, les deux coordonnées sont positives; dans le second angle, l'ordonnée seule est positive; dans le 3e angle, les deux coordonnées sont négatives et dans le 4e angle, l'abscisse seule est positive (Voir les points M, M′, M″ et M‴).

II. Tout point de l'axe des x a une ordonnée nulle; tout point de l'axe des y a une abscisse nulle. L'origine O des coordonnées a ses deux coordonnées nulles.

III. Tous les points d'une parallèle à l'axe $x'x$ ont la même ordonnée; tous les points d'une parallèle à $y'y$ ont la même abscisse.

Ainsi les points de la droite M′Q′ (Fig. 8) ont pour ordonnée $+2$ et les points de la droite P′M′ ont pour abscisse -3.

EXERCICES

363. (383) Marquer sur une droite orientée $x'x$ les points dont les abscisses sont données par les équations suivantes :

$x^2 - 5x = 0$; $x^2 + 2x - 3 = 0$; $x^2 - 3x + 2 = 0$; $x^2 + 4x - 12 = 0$.

364. (384) Les racines de chacune des équations précédentes permettent de marquer deux points A et B sur $x'x$. Calculer les valeurs de $\overline{AB}$ et de $\overline{BA}$, puis vérifier sur $x'x$.

365. (385) Marquer sur la droite orientée $x'x$ les points A, B, C, ayant respectivement pour abscisses 3, -5, 1; puis vérifier les relations suivantes :

$$\overline{CA} = \overline{CB} + \overline{BA};\quad \overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB};\quad \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC};\ \text{etc.}$$

366. (386) Marquer de même les quatre points A, B, C, D, ayant respectivement pour abscisses 5, -2, 2, 3; puis vérifier les relations :

$$\overline{BD} = \overline{BA} + \overline{AC} + \overline{CD};\quad \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BD} + \overline{DC};\ \text{etc.}$$

367. (390) Trouver l'abscisse d'un point X, connaissant celles des points A, B, C, D et sachant que

$$\frac{\overline{XA}}{\overline{XC}} \times \frac{\overline{XB}}{\overline{XD}} = 1.$$

368. (391) Démontrer les relations suivantes :

1° $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} + \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = 1.$

2° $\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AC}.\overline{DB} + \overline{AD}.\overline{BC} = 0.$ (Relation de Pappus).

3° $\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = 2\overline{AB}.\overline{OM},$ O étant le milieu de AB.

COORDONNÉES

369. (396) Sur du papier quadrillé, prendre deux axes de coordonnées et marquer les points suivants :
A(1, 3); B(7, 2); C(– 5, – 2); D(– 4, 3); E(0, – 5); F(2, 0); G(1, – 3).

370. (397) Marquer les points (2, 2), (– 2, 2), (– 2, – 2), (2, – 2); montrer que la figure obtenue en joignant ces quatre points doit être un carré et chercher sa superficie.

371. (398) Montrer que les points (– 1, 2), (3, 2), (0, 2), (– 5, 2) sont sur une même droite.

372. (399) Même question pour les points (– 2, 0), (– 2, 3), (– 2, – 5), (– 2, 1).

373. (400) Marquer les points (2, 2), (5, 5), (– 1, – 1), (– 3, – 3) et démontrer qu'ils sont sur une même droite passant par l'origine.

374. (401) Même question pour les points (2, – 2), (– 2, 2), (– 1, 1), (5. – 5).

375. (402) Montrer que les points (– 5, 2) et (5, – 2) sont symétriques par rapport à l'origine.

CHAPITRE XIII

Des fonctions.

§ I. — GÉNÉRALITÉS.

245. Notions. — La longueur d'une *certaine* allée, l'aire d'un *certain* champ sont *des grandeurs constantes*. Au contraire, la température d'une place, le nombre des habitants d'une ville sont *des grandeurs variables*.

Il arrive souvent qu'une grandeur est variable parce que sa valeur dépend des valeurs qu'on peut donner arbitrairement à une autre variable. On dit alors que la première est *une fonction* de la seconde, qui, elle, est appelée *variable indépendante*.

Ainsi l'aire d'un carré à construire dépend de la longueur du côté que nous choisissons. La longueur du côté est la variable indépendante; l'aire du carré est une fonction de la longueur du côté.

Si l'on représente la mesure d'une grandeur par une lettre, celle-ci porte le nom de *constante* ou de *variable*, suivant que la grandeur représentée est constante ou variable.

246. Étude des fonctions. — Un des buts de l'algèbre, sinon le principal, est d'amener les esprits à la notion de fonction et de les habituer à préciser la dépendance numérique qui existe entre les diverses fonctions et les variables dont elles dépendent.

On y arrive par l'étude des *graphiques* et des *expressions algébriques* des fonctions.

247. Graphique de la température. — Pendant une journée d'hiver, on a observé les températures suivantes :

Heures	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Degrés	$-2°$	$-2°,8$	$-3°,2$	$-2°,5$	$-1°,5$	$1°$	$2°,5$	$3°,8$	$4°,8$	$5°,2$	$5°$	$4°,3$	$2°,5$

La température varie avec l'heure de l'observation : *elle est une fonction du temps.* La table précédente donne déjà une idée de ses variations. On s'en rendra encore mieux compte au moyen du graphique suivant :

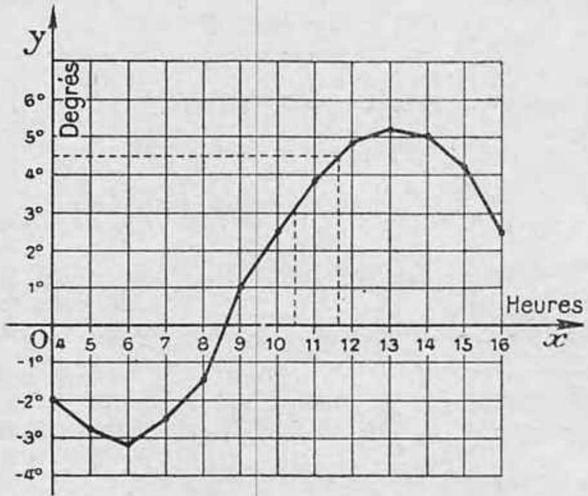


Fig. 9.

Sur une feuille de papier quadrillé, on a renforcé une droite horizontale Ox et une droite verticale Oy. Sur Ox, on a marqué les heures à partir de 4 h., et sur Oy les degrés.

Par chacun des points qui indiquent les heures sur Ox, on mène une verticale et on lui donne la longueur déterminée par la température constatée; ou, ce qui revient au même, on cherche les points d'intersection de *la verticale de chaque heure* avec *l'horizontale de la température correspondante.*

En joignant les points ainsi obtenus par des segments de droite, on obtient le graphique de la température.

248. Avantages des graphiques. — 1° La simple inspection du graphique montre comment la fonction varie.

2° A l'aide du graphique, on peut trouver une valeur approchée de la température à n'importe quelle heure. — Ainsi à 10 h. 30 m., la température était environ 3°,2.

3° On peut trouver de même à quelle heure la température avait une valeur déterminée. — Ainsi le thermomètre marquait 4°,5 à environ 11 h. 40 m.

REMARQUE. — On construit des *thermomètres enregistreurs* qui inscrivent automatiquement et d'une manière continue les variations de la température sur une feuille de papier quadrillé.

249. Densité de l'eau. — *La densité de l'eau est une fonction de sa température.* Le tableau suivant donne le résultat de mesures effectuées.

t°	Densité	t°	Densité	t°	Densité
0°	0,999 88	4°	1	8°	0,999 88
1°	0,999 93	5°	0,999 99	9°	0,999 82
2°	0,999 97	6°	0,999 97	10°	0,999 74
3°	0,999 99	7°	0,999 93		

Dans le graphique (Fig. 10), chaque degré est représenté par une division de Ox; sur Oy, deux divisions représentent une variation de la densité de 10 cent-millièmes. A remarquer encore :

1° que nous n'avons représenté que les excès de la densité sur 0,999 50;

2° que nous avons réuni les points marqués par une courbe continue, parce que nous admettons que la densité varie d'une façon continue.

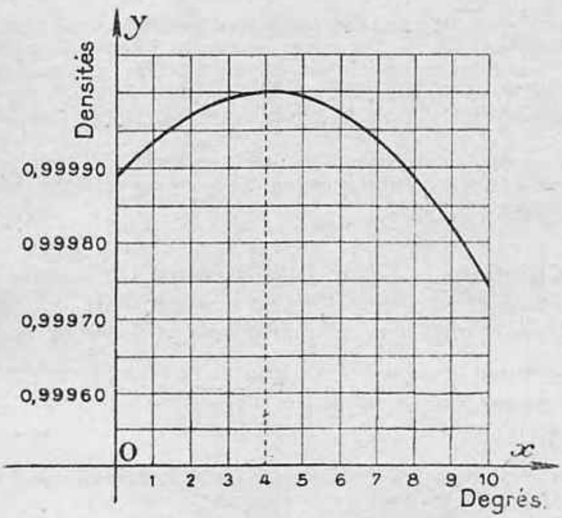


Fig. 10.

250. Expressions algébriques. — Après avoir constaté qu'une grandeur est fonction d'une autre, on peut se proposer de rechercher *une expression algébrique* indiquant les calculs à effectuer sur la variable indépendante et des constantes pour obtenir la valeur de la fonction. Voici quelques exemples :

I. Salaire d'un ouvrier. — Un ouvrier est payé 8 francs l'heure. Le salaire S de sa quinzaine dépend du nombre d'heures qu'il a travaillé; S est une fonction de ce nombre d'heures.

Une multiplication nous donnera S : le salaire égale huit fois le nombre d'heures. Si nous désignons ce nombre d'heures par x, le salaire sera toujours donné par l'expression $8x$ et nous aurons $S = 8x$.

II. Coupons d'un tram vicinal. — Le prix des coupons d'un tram vicinal est calculé comme suit : à une taxe fixe de b centimes, on ajoute autant de fois a centimes que le voyageur parcourt de sections. Si donc le voyageur parcourt x sections, le prix du coupon sera de $ax + b$ centimes et si nous désignons ce prix total par y, nous aurons $y = ax + b$.

L'expression algébrique d'une fonction une fois trouvée, on peut *calculer exactement* les valeurs de la fonction qui correspondent aux diverses valeurs de la variable indépendante, alors que le graphique de la fonction ne nous en donnait que *des valeurs approchées*. D'ailleurs, nous verrons que l'expression algébrique d'une fonction nous permet aussi de *construire son graphique*.

Remarques. — I. Une fonction qu'on n'est pas encore parvenu à exprimer au moyen de symboles mathématiques s'appelle ***fonction empirique***. Ainsi *la pression maxima de la vapeur d'eau* est une fonction empirique de la température. Comme on ne dispose d'aucune formule pour calculer la pression quand on connaît la température, on a dû dresser *des tables* à l'usage des intéressés.

II. Nous venons de donner une idée de la façon dont on étudie une fonction. Dans ce qui suit, nous raisonnerons sur des nombres abstraits en utilisant les définitions suivantes.

251. Définitions. — *Une lettre est* **une constante** *lorsqu'elle désigne un nombre fixe donné; elle est* **une variable** *lorsque sa valeur n'est pas fixée et que, par conséquent, elle peut varier.*

D'ordinaire, on désigne les constantes par les premières lettres de l'alphabet et les variables par les dernières.

Considérons l'égalité $y = 5x + 7$.

Si à la lettre x, nous attribuons successivement différentes valeurs, la lettre x sera une variable. A chacune de ces valeurs de x correspond une valeur particulière de la lettre y qui sera donc, elle aussi, une variable. Seulement les valeurs de y dépendront des valeurs attribuées à x. Nous dirons que y est une fonction de la variable indépendante x.

Une variable indépendante *est une variable à laquelle nous pouvons attribuer des valeurs arbitraires.*

Une fonction *est une variable dont la valeur dépend des valeurs attribuées à une ou plusieurs variables indépendantes.* Nous ne considérerons que des fonctions d'une seule variable x.

Soit la fonction $y = x + 1$. On voit aisément que si x croît, y croît; et que si x décroît, y décroît. On dit que $y = x + 1$ est *une fonction croissante.*

Considérons la fonction $y = 2 - x$. Si x croît, y décroît; et si x décroît, y croît. On dit que $y = 2 - x$ est *une fonction décroissante.*

Une fonction est **croissante**, *si elle varie dans le même sens que la variable indépendante; elle est* **décroissante**, *quand elle varie en sens inverse de la variable indépendante.*

Considérons deux valeurs *quelconques* x' et x'' de x et les valeurs correspondantes y' et y'' d'une fonction y de x. Dans ces conditions :

1° La fonction est *croissante* si à la plus grande valeur de x correspond la plus grande valeur de y, c'est-à-dire

$$\text{si} \quad x'' > x' \quad \text{entraîne} \quad y'' > y'.$$

2° Elle est *décroissante* si à la plus grande valeur de x correspond la plus petite valeur de y, c'est-à-dire

$$\text{si} \quad x'' > x' \quad \text{entraîne} \quad y'' < y'.$$

§ II. — ÉTUDE DE LA FONCTION y = ax + b.

252. Notions. — *L'expression* ax + b *est appelée* **binôme du premier degré**; a et b sont des constantes; x est une variable indépendante.

Si a est différent de zéro, le binôme du premier degré est une fonction de x, car sa valeur dépend de la valeur attribuée à x.

La racine *du binôme est la valeur de* x *qui l'annule.* On obtient donc la racine du binôme en résolvant l'équation $ax + b = 0$. En la désignant par x', on aura $x' = -\dfrac{b}{a}\cdot$

253. Exemples. — Calculons les valeurs des fonctions $y = 2x - 6$ et $y = -x + 1$ qui correspondent à une suite de valeurs de x.

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
$2x - 6$	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6
$-x + 1$	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5

Les deux fonctions ont le signe contraire du coefficient de x, quand x est inférieur à la racine; elles ont le signe du coefficient de x quand x est supérieur à la racine.

Le coefficient de x est positif dans $y = 2x - 6$ et cette fonction est croissante; il est négatif dans $y = -x + 1$ et cette fonction est décroissante.

254. Théorème I. — ***Le binôme $ax + b$ prend le signe de a pour toutes les valeurs de x supérieures à sa racine; il prend le signe contraire pour les valeurs de x inférieures à sa racine.***

En effet, on a $y = ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right)$ ou $y = a(x - x')$.

Dès lors, si $x > x'$, $x - x'$ est positif et y a le signe de a; et si $x < x'$, $x - x'$ est négatif et y a le signe contraire de a.

APPLICATION. — *Résoudre l'inéquation* $-3x + 12 > 0$.

Le binôme $-3x + 12$ doit avoir le signe contraire du coefficient du 1er terme. Par suite, x doit être inférieur à la racine du binôme, qui est 4.

255. Théorème II. — ***La fonction $y = ax + b$ est croissante ou décroissante suivant que a est positif ou négatif.***

Supposons $a > 0$ et donnons à x deux valeurs x' et x'', telles qu'on ait $x'' > x'$. En multipliant les deux membres de cette inégalité par le nombre positif a, il vient

$$ax'' > ax' \quad \text{et par suite,} \quad ax'' + b > ax' + b.$$

Ainsi, à la plus grande valeur de x correspond la plus grande valeur de la fonction; donc celle-ci est croissante (**251**).

On démontrerait d'une façon analogue que la fonction est décroissante, quand a est négatif.

256. Limites du binôme quand x tend vers l'infini. — 1° Quand a est positif, le binôme tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$, suivant que x décroît ou croît indéfiniment.

2° Quand a est négatif, le binôme tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, suivant que x décroît ou croît indéfiniment.

Il suffit, pour s'en assurer, de considérer les graphiques du binôme que nous construisons plus loin (**258**).

257. En résumé : 1° Quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$, *si* a *est positif, le binôme croît de $-\infty$ à $+\infty$; si* a *est négatif, il décroît de $+\infty$ à $-\infty$.*

2° Le binôme s'annule et change de signe quand x passe par la racine du binôme.

§ III. — REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DE LA FONCTION y = ax + b.

258. Exemples. — I. Considérons la fonction $y = 2x$ et calculons les valeurs de y qui correspondent à une suite de valeurs de x.

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-2	0	2	4

Marquons les divers points qui ont chaque fois comme coordonnées deux nombres correspondants du tableau précédent et joignons-les par une ligne continue.

On voit que *le graphique de la fonction* y = 2x *est une droite passant par l'origine.*

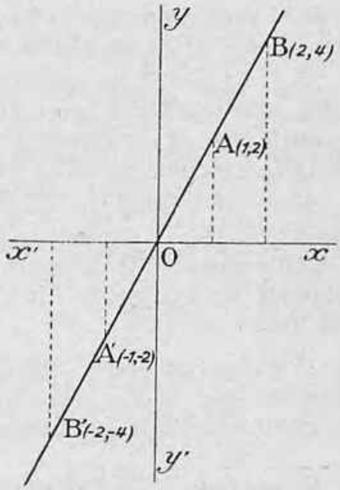


Fig. 11.

II. *Construire de même les graphiques des fonctions*

$$y = 0{,}5x;\quad y = -x;\quad y = -2x.$$

Le graphique de chacune de ces fonctions est une droite passant par l'origine. Quand a est *positif*, la droite *monte* du 3e angle dans le premier; quand a est *négatif*, elle *descend* du 2e angle dans le 4e.

259. Théorème. — ***Le graphique de la fonction $y = ax$ est une droite passant par l'origine des coordonnées.***

Supposons $a > 0$.

1° Les points O(0, 0) et A (1, a) font partie du graphique, car leurs coordonnées vérifient l'équation $y = ax$.

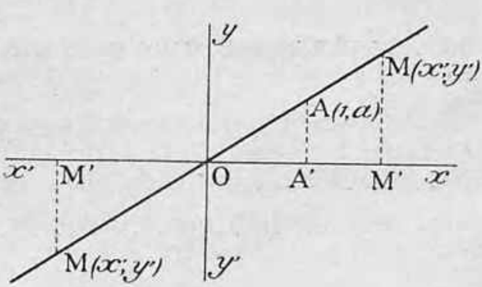


Fig. 12.

2° Considérons une valeur quelconque x' de x et soit y' la valeur correspondante de y; on aura $y' = ax'$. Construisons le point M(x', y') et *montrons qu'il est sur la droite* OA.

En effet, l'égalité $y' = ax'$ donne

$$\frac{y'}{a} = \frac{x'}{1} \quad \text{ou, en valeur absolue,} \quad \frac{\text{M}'\text{M}}{\text{A}'\text{A}} = \frac{\text{OM}'}{\text{OA}'}.$$

Ainsi, les côtés de l'angle droit des triangles rectangles OA'A et OM'M sont proportionnels et ces triangles sont semblables. Donc les angles A'OA et M'OM sont égaux.

Si x' est positif, les côtés OA' et OM' de ces angles coïncident. De plus, y' est positif à cause de l'égalité $y' = ax'$ dans laquelle a est positif; donc M est dans le 1er angle et l'égalité des angles A'OA et M'OM exige que les côtés OA et OM coïncident aussi.

Si x' est négatif, les côtés OA' et OM' sont des demi-droites opposées. De plus, y' est négatif; donc M est dans le 3e angle et l'égalité des angles A'OA et M'OM exige que ces angles soient opposés par le sommet. Ainsi, dans ce cas, OM est le prolongement de OA.

3° Mais x' est une valeur quelconque de x. Il en résulte que si x croît de $-\infty$ à $+\infty$, le point M(x', y') décrit la droite OA qui sera le graphique de la fonction $y = ax$.

Remarque. — La droite OA est le lieu des points dont les coordonnées vérifient l'égalité $y = ax$. On dit que l'égalité $y = ax$ est *l'équation de la droite* OA; on dit aussi que la droite OA est la droite $y = ax$.

Pourtant l'égalité $y = ax$ n'est pas une équation dans le sens ordinaire du mot, car x et y ne sont pas des inconnues; ces lettres représentent les coordonnées d'un point quelconque de la droite OA.

260. Coefficient angulaire de la droite $y = ax$. — *Le coefficient* a *fixe la valeur de l'angle que la demi-droite* OA *forme avec* Ox.

En effet, pour obtenir cet angle, il suffit de mener par le point fixe A'(1, 0) une parallèle à $y'y$, de porter sur cette parallèle un vecteur A'A dont la mesure est a, et de joindre les points O et A (Fig. 12).

C'est pour ce motif que le coefficient a est appelé *coefficient angulaire* ou *pente* de la droite $y = ax$.

261. Remarques. — I. On a $a = \overline{\text{A}'\text{A}}$ (Fig. 12) : *le coefficient angulaire de la droite* y = ax *est l'ordonnée du point de la droite qui a pour abscisse* 1.

II. A cause de cette propriété du coefficient angulaire, on convient de dire que le coefficient angulaire de l'axe $x'x$ est zéro. On dit aussi que le coefficient angulaire de l'axe $y'y$ est infini, parce que quand la droite OM (Fig. 12) tourne autour de O, à partir de Ox vers Oy, son coefficient angulaire A'A devient et reste supérieur à tout nombre positif donné, si grand qu'il soit.

III. Si le coefficient angulaire a est *positif*, la droite OA *monte* de gauche à droite; s'il est *négatif*, elle *descend* de gauche à droite.

262. Construction de la droite $y = ax$. — Comme une droite est déterminée par deux de ses points, il suffira de marquer deux des points dont les coordonnées vérifient l'équation $y = ax$ et de les joindre. On prend d'ordinaire les points O(0, 0) et A(1, a).

Ainsi, pour construire la droite $y = 3x$, on marque le point (1,3) et on le joint à l'origine O.

263. Représentation graphique de la fonction $y = ax + b$.

Construisons d'abord la droite $y = ax$ qui passe par O. Considérons ensuite une valeur quelconque de x, soit x'.

Le point M' de la droite $y = ax$ a pour abscisse x' et pour ordonnée ax'. Le point M, de même abscisse du graphique de $y = ax + b$, a pour ordonnée $ax' + b$.

Les points M et M', situés sur une parallèle à $y'y$, ont donc des ordonnées qui diffèrent de b.

On voit que pour obtenir le lieu de M, il faudra faire subir à tous les points de la droite OM' une translation égale à b et parallèle à $y'y$. Donc *le lieu du point* M *est la droite parallèle à* OM' *menée par le point* B (0, b).

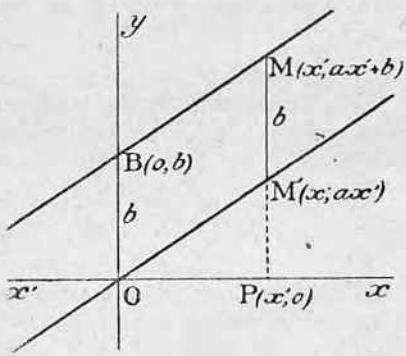


Fig. 13.

Remarque. — L'égalité $y = ax + b$ est appelée *équation de la droite* BM; on dit aussi que la droite BM est la droite $y = ax + b$.

264. Coordonnées à l'origine de la droite $y = ax + b$.

1° **L'ordonnée à l'origine** *d'une droite est l'ordonnée du point où la droite rencontre l'axe* y'y.

L'ordonnée à l'origine de la droite $y = ax + b$ est b, car pour $x = 0$, on trouve $y = b$; celle de la droite $y = ax$ est 0.

2° **L'abscisse à l'origine** *d'une droite est l'abscisse du point où la droite rencontre l'axe des* x.

L'abscisse à l'origine de la droite $y = ax + b$ est $-\frac{b}{a}$, car y est nul pour cette valeur de x, qui est la racine de la fonction $ax + b$.

265. Coefficient angulaire de la droite $y = ax + b$. — Le coefficient a fixe la direction de la droite $y = ax + b$, car (**263**) cette droite est une parallèle à la droite $y = ax$. Voilà pourquoi on dit que a est le coefficient angulaire de la droite $y = ax + b$.

Remarques. — I. *Deux droites qui ont le même coefficient angulaire* a, *sont parallèles*, car elles sont parallèles à la droite $y = ax$.

II. On obtient la représentation graphique du coefficient angulaire d'une droite en menant par l'origine O une parallèle à cette droite et en construisant l'ordonnée du point de cette parallèle qui a comme abscisse 1.

266. Construction de la droite $y = ax + b$. — On cherche deux points de la droite et on les réunit. On prend de préférence les points où la droite rencontre les axes.

Soit à construire la droite $y = 3x + 6$. Pour $x = 0$, on a $y = 6$; pour $y = 0$, on a $x = -2$. Les points cherchés sont donc $(0, 6)$ et $(-2, 0)$.

267. Équation d'une droite. — I. On montre aisément que *le lieu géométrique des points du plan dont les coordonnées vérifient l'équation* $Ax + By + C = 0$ *est toujours une droite*; l'équation $Ax + By + C = 0$ est appelée *équation de cette droite.*

En particulier, $x = a$ est l'équation de la parallèle à $y'y$ menée par le point $(a, 0)$, car cette droite est évidemment le lieu des points dont l'abscisse est a; de même, $y = b$ est l'équation de la parallèle à $x'x$ menée par le point $(0, b)$. Il en résulte que $x = 0$ est l'équation de l'axe $y'y$ et que $y = 0$ est l'équation de l'axe $x'x$.

II. Réciproquement, on peut montrer que *toute droite a une équation de la forme* $Ax + By + C = 0$ et que cette équation peut être ramenée à la forme $y = ax + b$ quand la droite n'est pas parallèle à l'axe $y'y$.

III. *Proposons-nous de chercher l'équation de la droite qui passe par les points* $A(x', y')$ *et* $B(x'', y'')$, mais en supposant $x' \neq x''$ en sorte que AB n'est pas parallèle à $y'y$.

L'équation cherchée est de la forme

$$y = ax + b. \tag{1}$$

Les coordonnées de A vérifient cette équation; d'où

$$y' = ax' + b. \tag{2}$$

En soustrayant (2) de (1), membre à membre, on trouve

$$y - y' = a(x - x'). \tag{3}$$

Les coordonnées de B vérifient cette équation. On a donc

$$y'' - y' = a(x'' - x'). \tag{4}$$

En remplaçant a dans (3) par sa valeur tirée de (4), on obtient l'équation cherchée

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x'). \tag{5}$$

Remarques. — I. L'équation (3) est l'équation générale des droites passant par le point (x', y'); a est leur coefficient angulaire.

II. L'équation (5) montre que *le coefficient angulaire d'une droite est égal au quotient de la différence des ordonnées de deux de ses points par la différence des abscisses des mêmes points, les deux différences étant prises dans le même ordre.*

§ IV. — MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME.

268. Définitions. — *Un point mobile sur un axe est animé* **d'un mouvement uniforme** *s'il se déplace toujours dans le même sens et si les distances parcourues en des temps égaux sont égales, quels que soient ces temps égaux.*

La vitesse *d'un mouvement uniforme est la mesure du vecteur parcouru pendant l'unité de temps.*

La vitesse est donc un nombre relatif; sa valeur absolue dépend des unités choisies pour mesurer les longueurs et le temps; elle est positive si le point mobile se déplace dans le sens positif de l'axe et négative dans le cas contraire.

Sur une route rectiligne, une auto se déplace de A vers B d'un mouvement uniforme et parcourt 60 km à l'heure.

Orientons la droite AB de A vers B et prenons le km et l'heure comme unités; la vitesse de l'auto est $+ 60$. Elle serait $- 1$, si l'on orientait la droite de B vers A et si l'on prenait pour unités le km et la minute.

269. Problème. — *Un point* M *parcourt un axe* X'X *d'un mouvement uniforme de vitesse* v. *A l'instant initial, il est en* O *qui est l'origine. A l'époque* t *il est en* A. *Calculer l'abscisse* e *du point* A.

Dans cet énoncé, t représente le nombre d'unités de temps que dure le mouvement de M; t est positif quand l'époque t suit l'instant initial, et négatif dans le cas contraire.

Montrons qu'on a dans tous les cas $e = vt$.

1° Désignons par V la valeur absolue de la vitesse v et par T la valeur absolue du temps t. La longueur du segment OA sera VT et

$$|e| = |v| \times |t|.$$

2° Il reste à montrer que les deux nombres e et vt ont *le même signe*. Supposons, par exemple, que l'on ait $v < 0$; $t > 0$.

Fig. 14.

Ces hypothèses signifient que M se déplace de O vers X' et que l'époque t suit l'instant initial. Il en résulte que le point A se trouve du côté de X' par rapport à O et que e est négatif comme le produit vt.

On raisonne d'une façon analogue pour les trois autres cas qui peuvent être considérés.

270. Équation du mouvement uniforme. — *Un point mobile* M *parcourt un axe* X'X *d'un mouvement uniforme de vitesse* v. *A l'époque* t_0, *il est en* M_0, *d'abscisse* x_0. *Quelle est l'abscisse* x *du point* M *à l'époque* t.

Fig. 15.

L'intervalle de temps qui sépare les deux positions du point mobile, est $t - t_0$ (**241**). On a donc

$$\overline{M_0M} = v(t - t_0).$$

Mais, on a aussi, $\overline{OM} = \overline{OM_0} + \overline{M_0M}$.

En remplaçant $\overline{OM}$, $\overline{OM_0}$ et $\overline{M_0M}$, cette égalité devient

$$x = x_0 + v(t - t_0).$$

Remarque. — L'égalité précédente est appelée **équation du mouvement uniforme**. Si on compte les temps à partir du moment où le point mobile est en M_0, on a $t_0 = 0$ et l'équation devient

$$x = x_0 + vt.$$

271. Exemple. — *Deux trains partent, l'un à 12 heures d'une ville A, l'autre à 12 h. 10 m. d'une ville B à la rencontre l'un de l'autre. Le premier train fait 30 km à l'heure et le second 60 km à l'heure. Trouver l'équation du mouvement de chaque train, sachant que les deux villes sont distantes de 35 km.*

Orientons AB positivement de A vers B et prenons A pour origine. Prenons comme origine des temps midi et pour unité de temps la minute. La vitesse du premier train sera $+ 0{,}5$ et celle du second $- 1$.

Au moment origine le premier train est au point A, d'abscisse 0. L'équation de son mouvement est donc $x = 0{,}5t$.

A l'époque $+ 10$, le second train est au point B, d'abscisse $+ 35$. L'équation de son mouvement est donc

$$x = 35 + (-1)(t - 10) \quad \text{ou} \quad x = -t + 45.$$

272. Graphique d'un mouvement uniforme. — L'équation

$$x = x_0 + v(t - t_0)$$

montre que l'abscisse x du point mobile est une fonction linéaire du temps t. Par suite, si on porte le temps en abscisses et les valeurs de x en ordonnées, les variations de x sont représentées par une droite.

Le coefficient angulaire de cette droite est la vitesse v. La droite monte ou descend de gauche à droite, suivant que v est positif ou négatif. Elle est parallèle à Ot si v est nul.

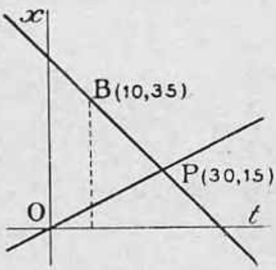


Fig. 16.

Les droites OP et BP sont les graphiques du mouvement des deux trains de l'exemple précédent (**271**).

La rencontre des deux trains a lieu pour les valeurs de x et de t qui forment la solution du système

$$x = 0{,}5t;$$
$$x = -t + 45.$$

Ces valeurs sont $x = 15$, $t = 30$. Aussi les deux droites se coupent-elles au point (30, 15).

273. Problème. — *Deux points mobiles* M *et* M′ *se déplacent avec des vitesses constantes* v *et* v′, *dans le sens* X′X, *sur l'axe* X′X. *Ils passent au même instant, le premier en* A, *le second en* B. *On demande de chercher leur point de rencontre. La mesure de* AB *est* d. *On suppose* v *et* v′ *différents de zéro.*

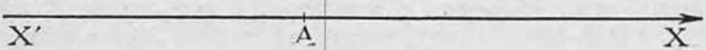


Fig. 17.

Orientons le droite X′X dans le sens indiqué et prenons le point A pour origine des abscisses. Soit R le point de rencontre; posons $\overline{AR} = x$. Prenons comme origine des temps l'instant où M est en A et M′ en B. Suivant que l'on considère le point mobile M où le point mobile M′, on pourra écrire (**270**)

$$x = vt \quad \text{ou} \quad x = d + v't.$$

De ces deux égalités, on tire l'équation du problème

$$\frac{x}{v} = \frac{x-d}{v'} \tag{1}$$

ou

$$(v - v')x = dv. \tag{2}$$

Remarque. — On peut obtenir cette équation plus simplement. Les mesures des vecteurs AR et BR parcourus par M et M′ sont respectivement

$$\overline{AR} = x \quad \text{et} \quad \overline{BR} = \overline{BA} + \overline{AR} = -d + x.$$

M arrivera donc en R après $\frac{x}{v}$ secondes et M′ après $\frac{x-d}{v'}$ secondes. En écrivant que ces deux intervalles de temps sont égaux, on retrouve la même équation (1).

1re Partie : $v - v' \neq 0$. — L'équation (2) donne alors $x = \dfrac{dv}{v - v'}$.

1er CAS : $d > 0$; $v - v' > 0$. — Dans ce cas x est positif; donc la rencontre a lieu à droite de A. Ce résultat s'explique facilement :

B est à droite de A, car $d > 0$; mais M se meut plus vite que M′, car $v > v'$. M rejoindra M′ au-delà de B, donc à droite de A.

Les cas suivants s'expliquent d'une façon analogue.

2e CAS : $d < 0$; $v - v' < 0$; x est positif. Rencontre à droite de A.

3e CAS : $d > 0$; $v - v' < 0$; x est négatif. Rencontre à gauche de A.

4e CAS : $d < 0$; $v - v' > 0$; x est négatif. Rencontre à gauche de A.

5e CAS : $d = 0$; $v - v' \neq 0$; x est nul. Rencontre en A.

2e Partie : $v - v' = 0$. — L'équation devient $0.x = dv$.

1er CAS : Si $d \neq 0$, l'équation est impossible. Le problème l'est également.

Quand M est en A, M′ est en un point B distinct de A et comme ils ont la même vitesse, ils ne se rencontreront jamais.

2e CAS : Si $d = 0$, l'équation et le problème sont indéterminés.

Les deux mobiles sont en même temps en A et comme leurs vitesses sont égales, ils seront toujours ensemble.

274. Graphiques des chemins de fer. — La marche d'un train sur une ligne de chemin de fer peut être représentée par un graphique, quand on suppose que le mouvement est uniforme entre deux stations consécutives.

On portera le temps en abscisses sur l'axe horizontal Ot gradué en heures, et les distances parcourues en ordonnées sur l'autre axe Ox gradué en km. *La marche d'un train* sera représentée par une droite de pente v, tant que sa vitesse est v. *Un arrêt dans une gare* sera représenté par un segment parallèle à Ot.

275. Exemple. — Dans l'indicateur des chemins de fer (1931), on lit :

36. BRUXELLES-LIÉGE

km			580	171	584	204	592
			ORDIN.	INTERN.	DIRECT	BLOC	DIRECT
0	Bruxelles.........	D	6.1	6.41	6.49	7.45	8.6
30	Louvain	A	7.0	↓	7.23	↓	8.39
		D	7.34	↓	7.26	↓	8.45
48	Tirlemont........	A	8.10	↓	7.46	↓	9.6
		D	8.30	↓	7.48	↓	9.9
61	Landen...........	A	8.52	↓	8.3	↓	9.25
		D	8.54	↓	8.5	↓	9.28
75	Waremme	A	9.20	↓	8.22	↓	9.45
		D	9.21	↓	8.23	↓	9.47
100	Liége.............	A	10.13	8.6	8.56	9.10	10.22

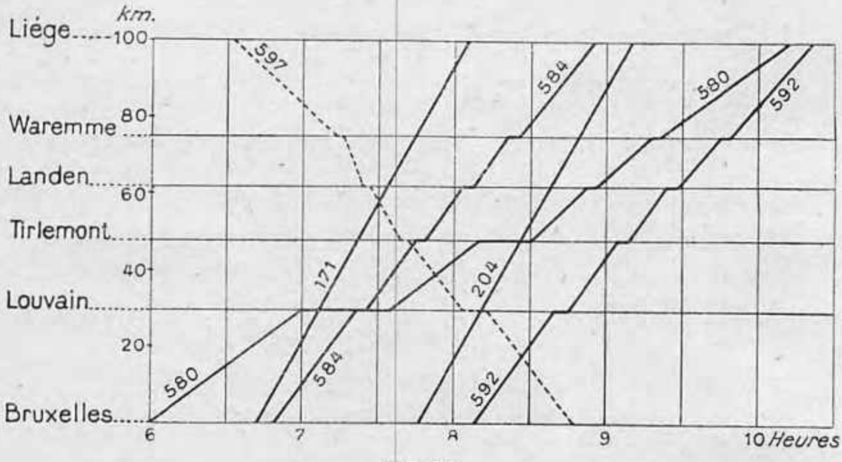


Fig. 18.

Exercices. — I. *Comparer* les vitesses des divers trains; les vitesses d'un même train à des moments différents.

II. *Rechercher les points de croisement.* — Les trains allant de Bruxelles à Liége suivent tous la même voie; ils ne peuvent se croiser que dans les gares.

III. *Déterminer approximativement l'heure du passage* des divers trains à Remicourt qui est à 80 km de Bruxelles.

IV. *Tracer le graphique d'un train supplémentaire.* — Départ de Bruxelles entre 7 et 8 heures. La durée du trajet est 2 heures, avec arrêt à Tirlemont.

Remarque. — Sur le même dessin, on peut figurer la marche des trains allant *de Liége à Bruxelles.* Leurs vitesses doivent être considérées comme *négatives;* leurs graphiques descendront donc de gauche à droite. Nous avons figuré à titre d'exemple et en pointillé le direct 597 qui quitte Liége à 6 h. 33 m. La ligne Bruxelles-Liége est à double voie. Un graphique montant et un graphique descendant peuvent donc se couper en n'importe quel point.

EXERCICES

GRAPHIQUES.

Les trois premiers graphiques sont formés de segments de droites; les suivants sont à arrondir en courbes.

376. (403) On a pris deux fois par jour, le matin et le soir à 6 h., la température d'un malade. Les températures observées sont 37°,5; 38°,5; 38°,1; 39°,4; 38°,5; 40°,1; 38°,2; 39°,5; 37°,5; 38°,4; 36°,8; 37°,2. Construire le graphique des variations de la température.

377. (404) Représenter graphiquement les variations des hauteurs moyennes de la pluie tombée à Bruxelles, d'après les données suivantes :

Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin
54 mm	47	48	46	56	65

Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre
73 mm	74	65	71	61	60

378. (405) Représenter graphiquement les températures moyennes observées à Bruxelles.

Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin
1°,4	2°,8	5°,2	9°	12°,6	16°,1

Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre
17°,6	17°,3	14°,6	10°,3	5°,3	2°,4

379. (406) Les tables suivantes donnent la tension maxima de la vapeur d'eau pour différentes températures.

Températures	100°	121°	135°	145°	153°	181°	215°	236°
Tension en atmosphères	1	2	3	4	5	10	20	30

Tracer le graphique. Quelle est approximativement la tension à 110°, à 170°, à 200°? A quelle température la tension est-elle de 2,5; 6; 17 atmosphères?

380. (407) La pression atmosphérique varie avec l'altitude du lieu d'observation. Dans les tables suivantes, la pression est donnée en mm de mercure et l'altitude en mètres.

Altitude	0	200	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000
Pression	760	742	724	707	690	674	658	642	627	612	598

Tracer le graphique.

FONCTION $y = ax$.

381. (408) Représenter graphiquement les fonctions définies par les relations suivantes, puis répondre pour chacune aux questions formulées aux nos **382** et **383**.

1° $y = -3x$ 4° $2y = 3x$ 7° $x - y = 0$

2° $3x = 4y$ 5° $x + y = 0$ 8° $y = x\sqrt{3}$

3° $y = \frac{1}{3}x$ 6° $y = -\frac{1}{3}x$ 9° $y\sqrt{3} - x = 0.$

382. (409) Quels sont les coefficients angulaires des droites obtenues?

Pour chacune de ces droites, construire le vecteur dont la mesure est le coefficient angulaire de la droite.

383. (410) Calculer pour chaque droite l'ordonnée du point dont l'abscisse est 4; et l'abscisse du point dont l'ordonnée est -2. Vérifier sur la figure.

384. (411) Montrer sans faire de figure, que les points $(1, 3)$, $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$, $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right)$, $(-2, -6)$ sont sur la droite $y = 3x$.

385. (413) Un thermomètre gradué en degrés centigrades et Réaumur marque au même moment y°C et x°R. Exprimer y en fonction de x. Tracer le graphique de la fonction obtenue. — Ce graphique permet de convertir à vue les degrés centigrades en degrés Réaumur. Donner quelques exemples.

386. (414) Le belga vaut approximativement 0,52 francs-or (en 1935). Chercher le nombre y de francs-or que valent x belgas. — Tracer le graphique qui permettra, d'une façon approchée, la conversion des francs-or en belgas et réciproquement.

FONCTION $y = ax + b$.

387. (415) Représenter graphiquement les fonctions définies par les équations suivantes, puis répondre aux questions formulées aux nos **388** et **389**.

1° $y = x + 3$	5° $y = 2x + 2$	9° $2x - 3y = 6$
2° $y = x - 2$	6° $y = 0{,}6x - 1$	10° $x + 2y = 4$
3° $y = 2x - 4$	7° $y = -x + 3$	11° $5x + 4y + 10 = 0$
4° $y = \frac{2}{3}x - 1$	8° $y = \frac{x}{3} + 3$	12° $2y - 7x + 14 = 0.$

388. (416) Quels sont les coefficients angulaires et les coordonnées à l'origine des droites précédentes?

389. (417) Par l'origine et par le point B(0, 5), on mène des parallèles aux droites précédentes. Quelles sont les équations de ces parallèles?

390. (418) Étudier la variation de signe du binôme $2x + 5$ et vérifier après avoir construit la droite $y = 2x + 5$.

391. (419) Même question pour les binômes suivants :

1° $-x+7$ 3° $3x-8$ 5° $4-2x$

2° $-\frac{x}{2}-4$ 4° $\frac{x}{6}+\frac{1}{3}$ 6° $\frac{1}{2}+2x$.

392. (420) Chercher les coordonnées à l'origine de la droite

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

393. (421) De l'exercice précédent, déduire les équations des droites qui ont respectivement pour abscisses et ordonnées à l'origine 2 et 6; 3 et -2; -1 et 2.

394. (422) Trouver les coordonnées à l'origine des droites suivantes; puis tracer ces droites.

1° $x-y=5$ 4° $-x+3y-6=0$

2° $3x+2y=6$ 5° $2x+2y=3$

3° $3x+y+6=0$ 6° $x+2y+5=0$.

395. (423) Un thermomètre gradué en degrés centigrades et en degrés Fahrenheit marque, à un instant donné, y°C et x°F. Exprimer y en fonction de x et tracer le graphique de la fonction obtenue.

MOUVEMENT UNIFORME.

396. (430) Reprendre les problèmes des nos **259** à **263**. Après avoir choisi un sens positif et une origine pour les déplacements, puis une origine des temps, donner l'équation du mouvement de chaque mobile. Chercher ensuite le point et l'heure de la rencontre, puis faire la vérification graphique.

397. (431) Deux points mobiles M et M′ se déplacent d'un mouvement uniforme et dans le sens X′X sur l'axe X′X. Ils passent au même moment le premier en A, le second en B. La vitesse de M′ est triple de celle de M. La mesure de AB est d. Déterminer le point de rencontre des deux mobiles.

398. (434) Deux courriers M et M′ se déplacent d'un mouvement uniforme et dans le sens X′X sur l'axe X′X. M passe en A, h heures avant que M′ passe en B. On demande de déterminer leur point de rencontre R, sachant que la mesure de AB est d et que leurs vitesses respectives sont v et v'.

CHAPITRE XIV

Puissances et Racines.

§ I. — PUISSANCES.

276. La théorie des puissances, ayant des exposants *entiers et positifs*, a été exposée (**56** à **64**). Nous ajouterons cependant une nouvelle propriété.

On sait que pour élever une puissance d'un nombre à une autre puissance, il suffit d'affecter ce nombre d'un exposant égal au produit des exposants. On a donc

$$(a^m)^p = a^{mp}.$$

En lisant cette égalité de droite à gauche, on voit que *pour élever un nombre à la* mp^e *puissance, on peut l'élever d'abord à la* m^e *puissance, puis le résultat à la* p^e *puissance.*

§ II. — RACINES DES NOMBRES RELATIFS.

277. Nombres rationnels. — Les nombres entiers et les nombres fractionnaires, positifs ou négatifs, auxquels on adjoint le nombre zéro, sont appelés nombres rationnels.

278. Racine carrée. — *On dit que le nombre* a *est une racine carrée du nombre* A, *lorsque le carré de* a *est égal à* A.

Ainsi, 5 est une racine carrée de 25, car on a $5^2 = 25$.

De même, $-\frac{3}{2}$ est une racine carrée de $\frac{9}{4}$, car on a $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

279. Nombres irrationnels. — On a vu en arithmétique que les nombres rationnels positifs n'admettent pas tous une racine carrée rationnelle.

Les seuls nombres qui admettent *une racine carrée entière*, sont les nombres entiers qui ont pour exposants de leurs facteurs premiers des nombres pairs; ces nombres sont appelés nombres entiers carrés parfaits. — Les seuls nombres qui admettent *une racine carrée fractionnaire* sont les fractions égales à une fraction irréductible dont les deux termes sont des nombres entiers carrés parfaits.

La division et la soustraction ont été rendues possibles dans tous les cas, par l'introduction *des nombres fractionnaires et des nombres relatifs*. De même, on est arrivé à donner une racine carrée à tous les nombres positifs, en créant *les nombres irrationnels*.

Ainsi, la racine carrée du nombre 2, lequel n'est pas carré parfait, est un nombre irrationnel qu'on représente par le symbole $\sqrt{2}$. Les valeurs approchées de $\sqrt{2}$ à moins de 0,1; 0,01; 0,001; ... par défaut sont 1,4; 1,41; 1,414; ... On les obtient en cherchant les racines carrées par défaut de 2, à moins de 0,1; 0,01; 0,001; ...

280. Théorèmes. — I. *Un nombre négatif n'admet pas de racine carrée*, car le carré d'un nombre relatif quelconque est positif.

II. *Tout nombre positif admet deux racines carrées opposées.*

D'abord le nombre positif A admet une racine carrée positive, rationnelle ou irrationnelle (**279**). En la désignant par a, on a $a^2 = A$.

Mais on a aussi

$$(-a)^2 = a^2 \quad \text{et par suite,} \quad (-a)^2 = A.$$

Donc $-a$ est une seconde racine carrée de A, égale à la première en valeur absolue, mais de signe contraire.

281. Remarque. — La racine carrée positive du nombre positif A s'appelle aussi *racine carrée arithmétique* de A.

D'après cela, pour prouver que a est la racine carrée *arithmétique* du nombre positif A, il ne suffit pas de prouver que $a^2 = A$; *on doit encore montrer que* a *est positif.*

282. Convention. — ***On convient de représenter la racine carrée positive du nombre positif*** A ***par*** $+\sqrt{A}$ ***ou*** $\sqrt{A}$***; et la racine carrée négative par*** $-\sqrt{A}$.

Le symbole $\sqrt{A}$, où A est un nombre positif, représente donc un nombre essentiellement positif. Voici quelques conséquences de cette convention.

I. Il faut se garder d'écrire $\sqrt{4} = \pm 2$. L'expression $\sqrt{4}$ représente un nombre positif et elle est égale à $+2$.

II. L'égalité $\sqrt{a^2} = a$ n'est exacte que si a est positif ou nul. Si a est négatif, on doit écrire $\sqrt{a^2} = -a$, afin que le second membre soit positif comme le premier. De même, on a :

$$\sqrt{(a-b)^2} = a - b \quad \text{si} \quad a \geqslant b;$$
$$\sqrt{(a-b)^2} = b - a \quad \text{si} \quad a < b.$$

283. Racine n^e. — *On dit que le nombre* a *est une racine* n^e *du nombre* A, *lorsque la* n^e *puissance de* a *est égale à* A (n est un nombre entier supérieur à 1).

Ainsi, 4 est une racine cubique de 64, car on a $4^3 = 64$.

De même, $-\dfrac{1}{3}$ est une racine 4^e de $\dfrac{1}{81}$, car on a $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^4 = \dfrac{1}{81}$.

Un nombre positif qui est *une puissance* n^e *exacte*, admet une racine n^e positive *rationnelle*.

Un nombre positif qui n'est pas une puissance n^e exacte admet une racine n^e positive *irrationnelle*. Ainsi, le nombre 2 a une racine 4^e positive irrationnelle; ses valeurs approchées par défaut à moins de 0,1; 0,01; ... sont 1,1; 1,18; ...

On représente la racine n^e positive du nombre positif A par $\sqrt[n]{A}$. Le signe $\sqrt[n]{}$ s'appelle *radical du* n^e *degré*, ainsi que $\sqrt[n]{A}$ lui-même. Le nombre A placé sous le radical est *le radicand*. Le nombre n est *l'indice*; l'indice 2 ne s'écrit pas.

284. Théorèmes. — I. *Tout nombre positif admet deux racines d'indice pair* 2n. *Ces racines sont des nombres opposés.*

En effet, si a est la racine $2n^e$ positive du nombre positif A, on a

$$a^{2n} = (-a)^{2n} = A.$$

Le nombre $-a$, qui est l'opposé de a, est donc une seconde racine $2n^e$ de A; cette racine vaut $-\sqrt[2n]{A}$.

II. *Un nombre négatif n'admet pas de racine d'indice pair*, car une puissance paire d'un nombre relatif est un nombre positif.

III. *Un nombre négatif* ($-$ A) *admet une racine* $(2n+1)^e$ *négative*, car si a est la racine $(2n+1)^e$ positive du nombre A, on a

$$a^{2n+1} = A \quad \text{et} \quad (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1} = -A.$$

On représente cette racine par $\sqrt[2n+1]{-A}$; elle vaut $-\sqrt[2n+1]{A}$.

285. Radicaux arithmétiques. — *Le radical* $\sqrt[n]{A}$ *s'appelle radical arithmétique quand le radicand* A *est positif ou nul.*

Les remarques suivantes sont importantes.

I. *Pour que le nombre* a *soit la racine* n^e *arithmétique du nombre positif* b, *il faut et il suffit que* a *soit positif et que sa* n^e *puissance soit égale* à b.

II. Le radical $\sqrt[n]{a^n}$, dans lequel n est *pair*, est un radical arithmétique. Mais il convient de remarquer que l'égalité $\sqrt[n]{a^n} = a$ n'est exacte que si a est positif ou nul. Si a est négatif, on a $\sqrt[n]{a^n} = -a$.

§ III. — THÉORÈMES SUR LES RADICAUX DU SECOND DEGRÉ.

286. Remarque préliminaire. — Nous ne considérons que des radicaux arithmétiques dans les énoncés et dans les démonstrations qui suivent. Les radicands représentent donc des nombres positifs.

287. Théorème I. — ***La racine carrée d'un produit de plusieurs facteurs positifs est égale au produit des racines carrées des facteurs.***

Montrons qu'on a

$$\sqrt{abc} = \sqrt{a}\,.\sqrt{b}\,.\sqrt{c}. \tag{1}$$

Le produit $\sqrt{a}\,.\sqrt{b}\,.\sqrt{c}$ est positif. Pour prouver qu'il est la racine carrée arithmétique de abc, il suffit donc de montrer que son carré est égal à abc. Effectivement, on a

$$(\sqrt{a}\,.\sqrt{b}\,.\sqrt{c})^2 = (\sqrt{a})^2\,.\,(\sqrt{b})^2\,.\,(\sqrt{c})^2 = abc.$$

288. Théorème II. — ***La racine carrée d'une fraction dont les termes sont positifs, est égale au quotient des racines carrées des deux termes.***

Ainsi
$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \tag{2}$$

car le second membre est positif et son carré vaut $\frac{a}{b}$.

En lisant les égalités (1) et (2) de droite à gauche, on a les théorèmes suivants :

289. Théorème III. — ***Le produit des racines carrées de plusieurs nombres est égal à la racine carrée du produit de ces nombres.***

290. Théorème IV. — ***Le quotient des racines carrées de deux nombres est égal à la racine carrée du quotient de ces nombres.***

291. Théorème V. — ***Pour élever un radical à une puissance, il suffit d'élever le radicand à cette puissance.***

En effet, on a (289)
$$(\sqrt{a})^3=\sqrt{a}.\sqrt{a}.\sqrt{a}=\sqrt{a^3}.$$

292. Théorème VI. — ***On peut faire passer un facteur positif sous un radical du second degré, pourvu qu'on l'élève au carré.***

En effet, si a est positif, on a
$$a\sqrt{b}=\sqrt{a^2}.\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}.$$

Remarque. — On peut écrire aussi $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$, quand a est positif. On dit alors qu'*on a fait sortir le facteur* a^2 *du radical.*

293. Application. — Si le signe du facteur qu'on fait passer sous un radical du second degré (ou sortir) n'est pas déterminé, il faut distinguer deux cas.

Soit à transformer l'expression $(a-1)\sqrt{b}$.

Si $a>1$, on a : $a-1>0$ et $a-1=\sqrt{(a-1)^2}$. Par suite,
$$(a-1)\sqrt{b}=\sqrt{(a-1)^2b}.$$

Si $a < 1$, on a : $a - 1 < 0$ et $a - 1 = -\sqrt{(a-1)^2}$. Par suite,

$$(a-1)\sqrt{b} = -\sqrt{(a-1)^2 b}.$$

Inversement, $\sqrt{(a-1)^2 b}$ est égal à $(a-1)\sqrt{b}$, quand $a-1$ est positif et à $-(a-1)\sqrt{b}$, quand $a-1$ est négatif.

294. Théorème VII. — ***La racine carrée arithmétique d'une puissance paire d'un nombre positif s'obtient en divisant l'exposant par 2.***

Ainsi, si a est positif, on a $\sqrt{a^{2m}} = a^m$, car a^m est positif et son carré est a^{2m}.

295. Racine carrée d'un monôme. — I. Soit le monôme $9a^2b^4$ dans lequel a et b représentent des nombres positifs. On a (**287**)

$$\sqrt{9a^2b^4} = \sqrt{9} \times \sqrt{a^2} \times \sqrt{b^4} = 3ab^2.$$

II. Si le signe de a était indéterminé, $3ab^2$ serait encore *une* racine carrée du monôme $9a^2b^4$ en vertu de l'égalité $(3ab^2)^2 = 9a^2b^4$. Mais on devrait écrire

$$\sqrt{9a^2b^4} = +3ab^2 \quad \text{ou} \quad -3ab^2,$$

suivant que a est positif ou négatif.

III. L'extraction de la racine carrée de $9a^2b^4$ est possible et elle conduit à un monôme entier *parce que le coefficient est positif et que les exposants des facteurs littéraux sont pairs.*

Quand un monôme satisfait à ces deux conditions, on dit qu'il est *carré parfait; on obtient ses deux racines carrées en prenant les racines carrées de son coefficient* (la positive et la négative) *et en divisant par 2 les exposants des facteurs littéraux.*

Pour déterminer la racine carrée *arithmétique*, on doit examiner les signes des facteurs littéraux.

Ainsi, les racines carrées de $16a^2b^4x^2$ sont $\pm 4ab^2x$. On a

$$\sqrt{16a^2b^4x^2} = +4ab^2x \quad \text{ou} \quad -4ab^2x,$$

suivant que a et x sont de mêmes signes ou de signes contraires.

§ IV. — CALCUL ALGÉBRIQUE DES RADICAUX DU SECOND DEGRÉ.

296. Définition. — *Une expression algébrique littérale n'est appelée* **expression irrationnelle** *que lorsqu'elle renferme des radicaux portant sur des lettres.*

Ainsi, $a^2\sqrt{b}$; $a\sqrt{b} + 2\sqrt{ab} - 5b\sqrt{a}$; $\dfrac{a\sqrt{b}}{b+\sqrt{a}}$

représentent respectivement *un monôme*, *un polynôme* et *une fraction* irrationnels.

On appelle *binômes irrationnels conjugués* des expressions irrationnelles de la forme

$$a+\sqrt{b} \quad \text{et} \quad a-\sqrt{b}; \quad \text{ou encore,} \quad \sqrt{a}+\sqrt{b} \quad \text{et} \quad \sqrt{a}-\sqrt{b}.$$

297. Simplification. — *Si on peut décomposer le radicand en un produit de deux facteurs dont l'un est carré parfait, on fait sortir ce facteur du radical.*

Exemples : $\sqrt{40} = \sqrt{2^3.5} = \sqrt{2^2.10} = 2\sqrt{10}$;

$$\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \sqrt{6 \times \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{6}; \quad \sqrt{9a^5} = \sqrt{3^2.a^4a} = 3a^2\sqrt{a};$$

$$\sqrt{8a^2b^4} = \sqrt{4a^2b^4.2} = 2ab^2\sqrt{2}, \quad \text{si } a \text{ est positif.}$$

298. Radicaux semblables. — *Des radicaux du second degré sont semblables, quand les radicands sont les mêmes.*

Des radicaux qui ne sont pas semblables peuvent parfois le devenir par *simplification.*

Exemple : $3\sqrt{50} = 15\sqrt{2}$; $\sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{2}$; $\sqrt{\frac{1}{18}} = \sqrt{\frac{2}{36}} = \frac{1}{6}\sqrt{2}$.

299. Addition et soustraction. — *On applique les règles données pour l'addition et la soustraction des monômes et des polynômes entiers, puis on réduit les termes semblables s'il y a lieu.*

Exemple : $(7\sqrt{5} - \sqrt{8}) - (\sqrt{2} - \sqrt{20}) = 7\sqrt{5} - \sqrt{8} - \sqrt{2} + \sqrt{20}$
$= 7\sqrt{5} - 2\sqrt{2} - \sqrt{2} + 2\sqrt{5} = 9\sqrt{5} - 3\sqrt{2}.$

300. Multiplication. — *On applique les règles données pour la multiplication des monômes et des polynômes entiers, mais en tenant compte des théorèmes sur les radicaux.*

EXEMPLES : 1° $(-3\sqrt{6ab}).\sqrt{2a^3} = -3\sqrt{12a^4b} = -6a^2\sqrt{3b}.$

2° $(2+\sqrt{3})(1-2\sqrt{3}) = 2+\sqrt{3}-4\sqrt{3}-6 = -4-3\sqrt{3}.$

301. Cas particulier remarquable. — *Le produit de deux binômes conjugués est rationnel.*

Ainsi : 1° $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = a-b$ (**101**)

2° $(2\sqrt{2}+3)(2\sqrt{2}-3) = 8-9 = -1.$

302. Division. — *On met d'ordinaire le quotient sous forme de fraction, on rend le dénominateur rationnel par l'un des procédés que nous allons indiquer, puis on simplifie s'il y a lieu.*

303. Fractions irrationnelles. — *Lorsque le dénominateur est lui-même irrationnel, on le rend rationnel en multipliant les deux termes de la fraction par des facteurs appropriés.*

I. *Le dénominateur est un monôme irrationnel.* — Après avoir simplifié, s'il y a lieu, le radical du dénominateur, on multiplie les deux termes de la fraction par ce radical simplifié.

Soit la fraction $$E = \frac{2\sqrt{32}+3\sqrt{2}+4}{4\sqrt{8}}.$$

On a successivement
$$E = \frac{8\sqrt{2}+3\sqrt{2}+4}{4\sqrt{8}} = \frac{11\sqrt{2}+4}{8\sqrt{2}} = \frac{22+4\sqrt{2}}{16} = \frac{11+2\sqrt{2}}{8}.$$

II. *Le dénominateur est un binôme irrationnel.* — On multiplie les deux termes de la fraction par le binôme conjugué.

On a, par exemple,
$$\frac{3-2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{(3-2\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}-1}{1-2} = 1-\sqrt{2}.$$

III. *Le dénominateur est un trinôme irrationnel.* — Soit
$$E = \frac{m}{\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}}.$$

Considérons $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ comme *un seul terme* et multiplions les deux termes de la fraction par $(\sqrt{a} - \sqrt{b}) - \sqrt{c}$. Il vient

$$E = \frac{m(\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c})}{a + b - c - 2\sqrt{ab}} \quad \text{ou} \quad E = \frac{m(\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c})}{p - 2\sqrt{ab}}$$

en posant $a + b - c = p$. On multiplie ensuite haut et bas par $p + 2\sqrt{ab}$.

§ V. — THÉORÈMES SUR LES RADICAUX DU n^e DEGRÉ.

304. Remarque préliminaire. — Dans les paragraphes V à VIII, nous ne considérons que des radicaux arithmétiques. Les lettres a, b, c,... qui interviennent dans les démonstrations représentent *des nombres positifs*. De plus, les lettres m, n, p,... qui entrent dans les exposants et les indices littéraux, sont *des entiers positifs*.

305. Théorèmes. — Les démonstrations des théorèmes suivants sont analogues à celles des théorèmes correspondants sur les radicaux du second degré.

I. *La racine* n^e *d'un produit de plusieurs facteurs positifs est égale au produit des racines* n^{es} *des facteurs.*

II. *La racine* n^e *d'une fraction dont les termes sont positifs, est égale au quotient des racines* n^{es} *des deux termes.*

III. *Le produit de plusieurs radicaux de même indice est égal à la racine de même indice du produit des radicands.*

IV. *Le quotient de deux radicaux de même indice est égal à la racine de même indice du quotient des radicands.*

V. *Pour élever un radical à une puissance, il suffit d'élever le radicand à cette puissance.*

VI. *On peut faire passer un facteur positif sous un radical, à condition de multiplier son exposant par l'indice du radical.*

Si a est *positif*, on a donc $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$. On peut écrire aussi $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$. On dit alors qu'*on a fait sortir le facteur* a^n *du radical.*

306. Théorème VII. — ***Pour extraire la racine*** n^e ***d'un radical, il suffit de multiplier par*** n ***l'indice du radical.***

Montrons que $$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}. \qquad (1)$$

En effet, le 1er membre est positif; pour qu'il soit la racine np^e de a, il suffit donc que sa np^e puissance soit égale à a. Effectivement, on a (**276**)

$$\left[\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}\right]^{np} = \left[\left(\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}\right)^n\right]^p = \left(\sqrt[p]{a}\right)^p = a.$$

Remarque. — L'égalité (1) lue de droite à gauche, montre qu'*on obtient la racine* np^e *d'un nombre en extrayant d'abord la racine* p^e *du nombre, puis la racine* n^e *du résultat.*

307. Théorème VIII. — ***On ne change pas la valeur d'un radical en multipliant l'indice par un entier*** p ***et en élevant le radicand à la puissance*** p.

Montrons que $$\sqrt[n]{a^q} = \sqrt[np]{a^{pq}}. \qquad (2)$$

Le premier membre est positif. Pour montrer qu'il est égal à la racine np^e de a^{pq}, il suffit donc de prouver que sa np^e puissance est égale à a^{pq}. Effectivement, on a (**276**)

$$\left(\sqrt[n]{a^q}\right)^{np} = \left[\left(\sqrt[n]{a^q}\right)^n\right]^p = (a^q)^p = a^{pq}.$$

Remarque. — L'égalité (2) lue de droite à gauche, montre qu'*on peut diviser par un facteur commun l'indice du radical et l'exposant du radicand, quand ce dernier est une puissance.*

§ VI. — OPÉRATIONS SUR LES RADICAUX DU n^e DEGRÉ.

308. Simplification d'un radical. — 1° *On fait disparaître les radicaux superposés, s'il y a lieu* (**306**).

2° *Si le radicand est une puissance, on supprime tout facteur commun à son exposant et à l'indice du radical* (**307**, Rem.).

3° *On fait sortir du radical tout facteur du radicand dont l'exposant est un multiple de l'indice* (**305**, VI).

EXEMPLES : $\sqrt[9]{8a^6b^{12}} = \sqrt[3]{2a^2b^4} = \sqrt[3]{2a^2bb^3} = b\sqrt[3]{2a^2b}$;

$$\sqrt[3]{\sqrt{4a^2b^{10}}} = \sqrt[6]{4a^2b^{10}} = \sqrt[3]{2ab^5} = b\sqrt[3]{2ab^2}.$$

REMARQUE. — *Lorsque la quantité placée sous un radical d'indice* n *est une fraction*, on multiplie d'ordinaire ses deux termes par un facteur convenable, en vue de faire de son dénominateur une puissance n^e; puis, on fait sortir un facteur égal à l'inverse de ce dénominateur.

EXEMPLE : $$\sqrt[5]{\frac{a^4}{b}} = \sqrt[5]{\frac{a^4b^4}{b^5}} = \frac{1}{b}\sqrt[5]{a^4b^4}.$$

309. Réduction au même indice. — *On simplifie les radicaux, s'il y a lieu; puis on les transforme* (307) *en prenant pour indice commun le p. p. c. m. des indices.*

EXEMPLE. — Les radicaux $\sqrt[6]{a^2}$, $\sqrt[8]{b^2}$, $\sqrt[3]{c^2}$ deviennent après simplification

$$\sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{b}, \sqrt[3]{c^2}.$$

Le p. p. c. m. des indices est 12. Les radicaux cherchés sont

$$\sqrt[12]{a^4}, \sqrt[12]{b^3}, \sqrt[12]{c^8}.$$

310. *On appelle* **radicaux semblables** *des radicaux qui ont les mêmes indices et les mêmes radicands.*

Des radicaux qui ne sont pas semblables peuvent parfois le devenir par simplification.

Ainsi, les radicaux $\sqrt[3]{8a^2b}$, $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, $\sqrt[6]{a^4b^8}$, peuvent s'écrire

$$2\sqrt[3]{a^2b}, \quad \frac{1}{a}\sqrt[3]{a^2b}, \quad b\sqrt[3]{a^2b}.$$

311. Addition et soustraction. — On opère comme pour les radicaux du second degré.

EXEMPLE : $(\sqrt[3]{a(b+1)^3} - 2a\sqrt[4]{b}) - (\sqrt[3]{a} - \sqrt[4]{a^4b} + \sqrt[5]{ab})$

$$= (b+1)\sqrt[3]{a} - 2a\sqrt[4]{b} - \sqrt[3]{a} + a\sqrt[4]{b} - \sqrt[5]{ab} = b\sqrt[3]{a} - a\sqrt[4]{b} - \sqrt[5]{ab}.$$

312. Multiplication. — On opère comme pour les radicaux du second degré en réduisant d'abord les radicaux au même indice, si c'est nécessaire. Voici deux exemples :

$$1^\circ\ \sqrt{3} \times \sqrt[4]{135} = \sqrt[4]{9} \times \sqrt[4]{135} = \sqrt[4]{9.135} = \sqrt[4]{3^5.5} = 3\sqrt[4]{15}.$$

$$2^\circ\ (\sqrt[3]{a} + \sqrt[4]{b})\sqrt{c} = \sqrt[3]{a}\sqrt{c} + \sqrt[4]{b}\sqrt{c}$$

$$= \sqrt[6]{a^2}\sqrt[6]{c^3} + \sqrt[4]{b}\sqrt[4]{c^2} = \sqrt[6]{a^2c^3} + \sqrt[4]{bc^2}.$$

Remarque. — L'application des identités donne immédiatement :

$$1^\circ\ (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})\,(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) = a + b;$$

$$2^\circ\ (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})\,(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}) = a - b.$$

313. Division. — On met d'ordinaire le quotient sous forme de fraction, on rend le dénominateur rationnel par l'un des procédés que nous allons indiquer, puis on simplifie s'il y a lieu.

314. Fractions irrationnelles. — *Lorsque le dénominateur est lui-même irrationnel, on le rend rationnel en multipliant les deux termes de la fraction par des facteurs appropriés.* — Voici deux exemples :

1° *Transformer l'expression* $E = \dfrac{\sqrt[3]{24}}{2\sqrt[4]{3}}$. — On a

$$E = \frac{2\sqrt[3]{3} \times \sqrt[4]{3^3}}{2 \times 3} = \frac{\sqrt[12]{3^4} \times \sqrt[12]{3^9}}{3} = \frac{\sqrt[12]{3^{13}}}{3} = \sqrt[12]{3}.$$

2° *Transformer l'expression* $E = \dfrac{m}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$.

En multipliant les deux termes de E par $\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$, on a

$$E = \frac{m\,(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})}{a + b}.$$

§ VII. — EXPOSANTS FRACTIONNAIRES.

315. I. **La racine n^e arithmétique** *d'une puissance d'un nombre positif, dont l'exposant est un multiple de* n, *s'obtient en divisant cet exposant par* n. — En effet, si $m = np$, on a

$$\sqrt[n]{a^m} = a^p,$$

car a^p est positif et sa n^e puissance est a^{np} ou a^m.

II. Lorsque l'exposant m du nombre a n'est pas divisible par n, l'expression $a^{\frac{m}{n}}$ ne représente plus aucun nombre; mais *on est convenu de représenter encore dans ce cas par* $a^{\frac{m}{n}}$ *la valeur du radical* $\sqrt[n]{a^m}$. On peut donc écrire

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Remarque. — *La convention précédente est légitime*, car on peut remplacer un exposant fractionnaire par une fraction égale.

Ainsi, si $\dfrac{m}{n} = \dfrac{m'}{n'}$, on a $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m'}{n'}}$.

En effet, on peut écrire

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nn']{a^{mn'}}; \qquad a^{\frac{m'}{n'}} = \sqrt[n']{a^{m'}} = \sqrt[nn']{a^{m'n}};$$

et $\sqrt[nn']{a^{mn'}} = \sqrt[nn']{a^{m'n}}$, car de l'hypothèse $\dfrac{m}{n} = \dfrac{m'}{n'}$, on déduit $mn' = m'n$.

316. Les règles de calcul établies pour les puissances *à exposants entiers positifs*, sont applicables aux puissances *à exposants fractionnaires.*

Ainsi, on a
$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{m'}{n'}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{m'}{n'}}.$$

En effet, on peut écrire

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{m'}{n'}} = \sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[n']{a^{m'}} = \sqrt[nn']{a^{mn'}} \times \sqrt[nn']{a^{m'n}}$$
$$= \sqrt[nn']{a^{mn'+m'n}} = a^{\frac{mn'+m'n}{nn'}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{m'}{n'}}.$$

On démontrerait d'une façon analogue que les autres théorèmes sont encore applicables.

§ VIII. — EXPOSANTS NÉGATIFS.

317. Convention. — Désignons par a un nombre positif, par m et n des nombres positifs, entiers ou fractionnaires.

Si m est supérieur à n, on a $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Si m est plus petit que n, l'expression a^{m-n} ne représente plus aucun nombre; mais *on est convenu de représenter encore dans ce cas par* a^{m-n} *la valeur du quotient* $a^m : a^n$.

Cette convention posée, on aura dans les deux cas ($m > n$ ou $m < n$)

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

318. Conséquence. — Supposons qu'on ait $n = m + p$, p étant positif. En vertu de la convention, on a

$$a^m : a^n = a^{m-(m+p)} = a^{-p}.$$

Mais on a aussi

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^{m+p}} = \frac{1}{a^p}.$$

Par suite, on a l'égalité

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}.$$

La convention nous conduit donc à des puissances ayant *des exposants négatifs*. D'après l'égalité précédente, *l'exposant négatif* $-$ p *indique qu'il faut élever l'inverse de* a *à la puissance* p^e.

319. Les règles de calcul établies pour les puissances *à exposants positifs*, sont applicables aux puissances *à exposants négatifs*.

Ainsi, on a $a^{-m} \times a^{-n} = a^{-m-n}$, car

$$a^{-m} \times a^{-n} = \frac{1}{a^m} \times \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n}.$$

On démontrerait d'une façon analogue que les autres théorèmes sont encore applicables.

320. Exposant zéro. — Si $m = n$, l'égalité $a^m : a^n = a^{m-n}$ devient

$$a^m : a^m = a^{m-m} = a^0.$$

Mais le quotient de a^m par a^m est évidemment 1. On est donc amené à poser $a^0 = 1$.

On vérifierait facilement que les règles de calcul établies pour les exposants rationnels, positifs ou négatifs, sont encore applicables quand un ou plusieurs exposants sont nuls.

EXERCICES

RADICAUX DU SECOND DEGRÉ.

399. (435) Trouver les racines carrées arithmétiques des expressions suivantes en faisant toutes les hypothèses voulues.

1° a^6; b^4; b^{10}; x^2. 3° $(x - 2)^2$; $(a - b)^4$.

2° b^8; x^6; x^{4n}; x^{2n}. 4° a^2b^4; $a^4b^2x^6$.

400. (436) Quelles valeurs doit prendre x pour que les valeurs numériques des expressions suivantes admettent des racines carrées.

1° $3x - 2$; 2° $6 - 12x$; 3° $-2(x - 5)$; 4° $-7(1 - x)$.

401. (437) Après avoir posé $a = 4$, on écrit l'égalité exacte

$$\sqrt{(3 - a)^2} = \sqrt{(5 - a)^2}.$$

Quelqu'un en déduit $3 - a = 5 - a$ ou $3 = 5$. Où se trouve l'erreur?

N. B. — *Les lettres qui interviennent dans les exercices suivants représentent des nombres positifs.*

402. (438) Simplifier les radicaux arithmétiques suivants :

1° $\sqrt{12}$; $\sqrt{18}$; $\sqrt{32}$; $\sqrt{160}$; $\sqrt{300}$; $\sqrt{2000}$.

2° $\sqrt{\frac{1}{9}}$; $\sqrt{\frac{5}{3}}$; $\sqrt{\frac{9}{8}}$; $\sqrt{\frac{7}{27}}$; $\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{\frac{5}{7}}$.

3° $\sqrt{a^5}$; $\sqrt{a^4x^5}$; $\sqrt{8x^4}$; $\sqrt{72x^{4m}}$; $\sqrt{12ab^5}$; $\sqrt{18x^{4n}y^{4n+1}}$.

4° $\sqrt{\frac{ax^5}{20}}$; $\sqrt{\frac{320a^5}{x^3}}$; $\sqrt{\frac{12a^9}{5b^8}}$; $\sqrt{\frac{1}{3}a^2x}$; $\sqrt{\frac{2a^3}{b^4}}$; $\sqrt{\frac{a^4x^{2n}}{2}}$.

5° $\sqrt{162a^2}$; $\sqrt{90x^2}$; $\sqrt{x^4y^3}$; $\sqrt{2a^3x^2}$; $\sqrt{20a^5x^{2n}}$; $\sqrt{504x^{2n-1}}$.

403. (439) 1° $\sqrt{x^2-4x+4}$; $\sqrt{(x^3-1)(x-1)}$; $\sqrt{2a^2+4a+2}$; $\sqrt{a^3-2a^2b+ab^2}$.

2° $\sqrt{\left(x^2-\frac{x}{2}\right)(2x-1)}$; $\sqrt{(x^2-a^2)(ax-a^2)}$;

$\sqrt{\left(x^4+\frac{x^2}{2}\right)\left(a^4x^2+\frac{a^4}{2}\right)}$.

3° $\sqrt{\frac{x^3+x-2x^2}{4}}$; $\sqrt{\frac{x}{a^3-ab^2-a^2b+b^3}}$; $\sqrt{\frac{1}{xy^2z}-\frac{1}{x^2yz}+\frac{1}{xyz^2}}$.

404. (440) Effectuer les additions et les soustractions suivantes :

1° $5\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{2}{3}\sqrt{2}-2\sqrt{2}$

2° $\sqrt{50}-2\sqrt{8}+3\sqrt{18}-7\sqrt{2}$

3° $2\sqrt{54}-2\sqrt{24}-\sqrt{150}+\sqrt{6}$

4° $2\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{18}+\sqrt{\frac{2}{9}}-\sqrt{\frac{9}{8}}$

5° $\sqrt{48}-\sqrt{\frac{12}{25}}+\sqrt{\frac{1}{3}}+3\sqrt{75}$

6° $2\sqrt{28}-6\sqrt{\frac{7}{4}}+14\sqrt{\frac{1}{7}}$

7° $\sqrt{72}+3-\sqrt{50}-\sqrt{25}$

8° $5\sqrt{12}-2\sqrt{\frac{3}{4}}+2\sqrt{27}-8\sqrt{\frac{3}{16}}$

9° $-\sqrt{\frac{3}{5}}+2\sqrt{\frac{5}{3}}-\sqrt{60}+\sqrt{\frac{1}{15}}$

10° $2\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}+\frac{1}{20}\sqrt{45}$.

405. (441) 1° $\sqrt{2a^3b}-\sqrt{32ab^3}+\sqrt{18ab^3}$

2° $\sqrt{72a^5b^5}+\sqrt{18a^3b^7}+\sqrt{18a^7b^3}$

3° $\sqrt{a^5-2a^4}+\sqrt{ab^4-2b^4}-\sqrt{4a^3b^2-8a^2b^2}$

4° $\sqrt{\frac{a^2b}{c}}-\sqrt{\frac{9b^3}{c}}-\sqrt{bc}+\sqrt{\frac{4b^3}{c}}$

5° $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}-\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$

6° $a\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}+b\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$

7° $\sqrt{\frac{b+x}{x^2}}-\sqrt{\frac{b}{x^2}+\frac{1}{x}}$

8° $\sqrt{\frac{a^3-a^2b}{b^2}}-\sqrt{\frac{ab^2-b^3}{a^2}}$.

406. (442) Effectuer les multiplications suivantes :

1° $\sqrt{28}\times\sqrt{7}$

2° $\sqrt{10}\times\sqrt{15}$

3° $-\sqrt{7}\times\sqrt{42}$

4° $\sqrt{7}\times\sqrt{\frac{1}{7}}$

5° $2\sqrt{18}\times\sqrt{8}$

6° $(4-\sqrt{3})\sqrt{3}$

7° $(\sqrt{5}-\sqrt{3})\sqrt{15}$

8° $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(-\sqrt{6})$

9° $(3+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})$

10° $(7+2\sqrt{6})(9-5\sqrt{6})$

11° $(9\sqrt{12}+3)(\sqrt{3}+8)$

12° $(6+12\sqrt{7})(3-5\sqrt{7})$.

calcula

407. (443) 1° $(9+2\sqrt{10})(9-2\sqrt{10})$

2° $(-5-\sqrt{3})(-5+\sqrt{3})$

3° $(5-2\sqrt{3})(5+2\sqrt{3})$

4° $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x^2}-\sqrt{xy})$

5° $(a+b+\sqrt{x})(a+b-\sqrt{x})$

6° $(x-y+\sqrt{xy})(x+y-\sqrt{xy})$

7° $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})$

8° $(\sqrt{a}-\sqrt{b}+1)(\sqrt{a}+\sqrt{b}-1)$.

408. (444) 1° $(2\sqrt{8}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2})(\sqrt{72}-5\sqrt{20}-2\sqrt{2})$

2° $(\sqrt{35}+3\sqrt{2}+\sqrt{7})(\sqrt{35}-3\sqrt{2}-\sqrt{7})$

3° $\sqrt{5+\sqrt{24}}\times\sqrt{5-\sqrt{24}}$

4° $\sqrt{3-2\sqrt{2}}\times\sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

409. (445) Élever au carré les expressions suivantes :

1° $3\sqrt{2}$

2° $2\sqrt{7}$

3° $3a\sqrt{b}$

4° $2a\sqrt{5b}$

5° $\sqrt{2}-\sqrt{6}$

6° $2\sqrt{6}+\sqrt{24}$

7° $2-\sqrt{5}$

8° $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}$

9° $\dfrac{3\sqrt{5}-5\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-5\sqrt{5}}$

10° $\dfrac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}$.

410. (446) Rendre rationnel le dénominateur de chacune des fractions suivantes :

1° $\dfrac{9\sqrt{2}-8\sqrt{3}+3\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$

2° $\dfrac{3\sqrt{20}-5\sqrt{15}+\sqrt{30}}{\sqrt{5}}$

3° $\dfrac{\sqrt{32}-5\sqrt{2}+2\sqrt{8}}{2\sqrt{8}}$

4° $\dfrac{2\sqrt{15}-3\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{5\sqrt{15}}$

5° $\dfrac{-\sqrt{12}+\sqrt{24}-\sqrt{48}}{-\sqrt{6}}$

6° $\dfrac{3-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

7° $\dfrac{18}{4-\sqrt{7}}$

8° $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

9° $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

10° $\dfrac{2}{-2\pm\sqrt{6}}$

11° $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

12° $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

13° $\dfrac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

14° $\dfrac{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

15° $\dfrac{\sqrt{2(10-5\sqrt{2})}}{\sqrt{10+5\sqrt{2}}}$

411. (447) 1° $\dfrac{ax-by}{\sqrt{ax}+\sqrt{by}}$

2° $\dfrac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

3° $\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}$

4° $\dfrac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b}-\sqrt{a+b}}$

5° $\dfrac{(\sqrt{5}+2)\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

6° $\dfrac{\sqrt{a}\sqrt{3a-a\sqrt{3}}}{\sqrt{3a+a\sqrt{3}}}$

7° $\dfrac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}$

8° $\dfrac{6}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

9° $\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

10° $\dfrac{10+4\sqrt{35}+30\sqrt{2}}{\sqrt{5}+2\sqrt{7}+3\sqrt{10}}$

11° $\dfrac{-1+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}$

12° $\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}$.

412. (448) Simplifier les expressions suivantes :

1° $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$

2° $\dfrac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}+\dfrac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}$

3° $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}$

4° $\dfrac{x+\sqrt{x-1}}{x-\sqrt{x-1}}-\dfrac{x-\sqrt{x-1}}{x+\sqrt{x-1}}$

5° $\left(\dfrac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}-\dfrac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}}\right)^2$

6° $\dfrac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

PUISSANCES ET RADICAUX DE DEGRÉ QUELCONQUE.

Simplifier le expressions suivantes :

413. (13) 1° $(-a^2)^5$ 2° $(-a^{2n-1})^4$ 3° $(-a^2)^{2n}$ 4° $(-a^n)^{2n-1}$ 5° $[(-a^2)^4]^3$ 6° $[-(-a^3)^4]^3$ 7° $[-(-a^4)^3]^4$ 8° $(a+b)^m(a-b)^m$ 9° $[(a+b)^m]^{2n}[(b-a)^n]^{2m}$

10° $\dfrac{(49x^2-36y^2)^m}{(7x-6y)^m}$ 12° $\dfrac{8^n\times(2^{n-1})^n}{2^{n+1}\times 2^{n-1}}$ 14° $\dfrac{2^{n+1}}{(2^n)^{n-1}}:\dfrac{4^{n+1}}{(2^{n-1})^{n+1}}$

11° $a^{2m}\left(\dfrac{b^2-ab}{a^2-ab}\right)^{2n}$ 13° $\dfrac{3.2^n-4.2^{n-2}}{2^n-2^{n-1}}$ 15° $\dfrac{3^{n+4}-6.3^{n+1}}{3^{n+2}\times 7}$

16° $\left(\dfrac{a+b}{c-d}\right)^3\times\left(\dfrac{1}{a+b}\right)^2\times\dfrac{c-d}{a+b}$ 17° $\left(\dfrac{a+b}{c-x}\right)^m\times\left(\dfrac{c+x}{a+b}\right)^m\times\left(\dfrac{x-c}{a-b}\right)^m$.

414. (14)
1° $\sqrt[6]{a^4b^2}$ 5° $\sqrt{\sqrt[3]{4a^2}}$ 9° $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{20}}}$ 13° $\left(\sqrt[12]{ab^3c^7}\right)^4$

2° $\sqrt[4]{64a^8b^6}$ 6° $\sqrt[5]{\sqrt[3]{-a^5}}$ 10° $\sqrt[3]{2a\sqrt{2a}}$ 14° $\left(\sqrt[7]{-a\sqrt{3a}}\right)^{14}$

3° $5\sqrt[3]{\dfrac{8}{75}}$ 7° $\dfrac{a^2}{b}\sqrt[4]{b^5x}$ 11° $\left(\sqrt{a\sqrt[5]{a^8}}\right)^4$ 15° $\left(\sqrt[3]{\sqrt[7]{-8a^3}}\right)^7$

4° $4\sqrt[3]{\dfrac{3}{80}}$ 8° $\sqrt[3]{\dfrac{1}{64}\sqrt{2}}$ 12° $\sqrt[3]{\dfrac{3}{\sqrt[4]{3}}}$ 16° $\sqrt[n-1]{\dfrac{a}{\sqrt[n]{a}}}$.

Effectuer les opérations suivantes :

415. (15)
1° $\sqrt[3]{56}+\sqrt[3]{189}+\sqrt[3]{448}$ 4° $\sqrt[6]{16}-\sqrt[4]{4}+\sqrt[3]{-4}$

2° $\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{16}+\sqrt{12}-\sqrt{3}$ 5° $\sqrt{50}-\sqrt[4]{324}-\sqrt[6]{2916}+\sqrt[8]{256}$

3° $4\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{-3}+\sqrt[3]{-81}$ 6° $9\sqrt[3]{2a^6x}+3\sqrt[3]{-16a^3x}+\sqrt[3]{2x}$.

416. (16)
1° $5\sqrt[3]{18}\times\sqrt[3]{6}$ 4° $\sqrt[3]{12}:2\sqrt{2}$ 7° $\sqrt{a}\times\sqrt[3]{-a}\times\sqrt[4]{a}$

2° $\sqrt[4]{20}\times\sqrt{2}$ 5° $5\sqrt[4]{18}:\sqrt[4]{8}$ 8° $\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}\times\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$

3° $3\sqrt[4]{a}\times7\sqrt[6]{a^5b}$ 6° $4\sqrt[3]{-12}:2\sqrt{2}$ 9° $(a\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a^2}+1)(\sqrt[3]{a^2}+1)$.

417. (17) Rendre rationnel le dénominateur des fractions suivantes :

1° $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}}$ 5° $\dfrac{2}{\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{2}}$ 9° $\dfrac{2}{\sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{3}}}$

2° $\dfrac{\sqrt[5]{27}}{\sqrt[4]{9}}$ 6° $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}+1}$ 10° $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$

3° $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{-3}}$ 7° $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}}$ 11° $\dfrac{a+1}{\sqrt[5]{a^2}+\sqrt[5]{a}}$

4° $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}}$ 8° $\dfrac{6}{\sqrt[6]{9}-\sqrt[3]{-3}}$ 12° $\dfrac{\sqrt[3]{a^4}-8b\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{ab}+4\sqrt[3]{b^2}}$.

Dear Maria-Paula
I have taken your Geograph
will Kusien [illegible] ?

418. (22) Simplifier les expressions suivantes en ne laissant que des exposants positifs.

1° $a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{4}{6}}$

2° $(\sqrt{a^2b^3})^6$

3° $\sqrt{x\sqrt[3]{x^{-1}}}$

4° $\left(\dfrac{27x^3}{8a^{-3}}\right)^{-\frac{2}{3}}$

5° $\left(\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}}{4b^2}\right)^{-2}$

6° $a^{-\frac{1}{2}} \times a^{\frac{7}{4}} \times a^{-\frac{6}{5}}$

7° $(4a^{-2} : 9x^2)^{-\frac{1}{2}}$

8° $(\sqrt{a^{-2}b} \times \sqrt{ab^{-3}})^6$

9° $\left(\dfrac{a^{-2}b}{a^3b^{-4}}\right)^{-3} : \left(\dfrac{ab^{-1}}{a^{-3}b^2}\right)^5$

10° $\left(\dfrac{a^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{2}}}{ax^{-1}}\right)^2 : \sqrt[3]{\dfrac{a^{-1}}{x^{-3}}}$

11° $\sqrt[3]{x^{-1}\sqrt{y^3}} : \sqrt{y\sqrt[3]{x}}$

12° $\left(a^{-\frac{1}{2}}\sqrt[3]{x}\right)^{-3} \times \sqrt{x^2\sqrt{a^{-6}}}$

13° $\sqrt[4]{(a+b)^6} \times (a^2-b^2)^{-\frac{1}{2}}$

14° $\left(x^{-\frac{1}{4}}\sqrt{x^{-\frac{1}{2}}\sqrt{x^3}.\sqrt[3]{x^{-4}}}\right)^{-2}$

15° $\left(\dfrac{x^{-2}y^3}{x^3y^{-2}}\right)^{-\frac{1}{5}} \times \left(\dfrac{y^3x^{-3}}{x^3y^{-3}}\right)^{-1}$.

419. (23) Effectuer les opérations suivantes :

1° $\left(3x^{-\frac{1}{3}}+x+2x^{\frac{2}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}}-2\right)$

2° $\left(a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{3}{4}}\right)\left(a^{-\frac{2}{3}}+b^{-\frac{3}{4}}\right)$

3° $(2x^{-2}-x^{-1}+3)\,(2x^{-2}+x^{-1}-3)$

4° $\left(a^{-\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}\right)\left(a^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}}\right)$

5° $\left(a^2-a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}-2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}+2x^{\frac{3}{4}}\right) : \left(a^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)$

6° $(16a^{-3}-6a^{-2}+5a^{-1}+6):(1+2a^{-1})$

7° $\left(a^3-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}}-a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{1}{3}}+2b^{\frac{13}{12}}\right) : \left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{3}}\right)$

8° $(5a^2-41ab+42b^2) : \left(a^{\frac{1}{4}}-7a^{-\frac{3}{4}}b\right)$.

420. (25) Simplifier l'expression

$$\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}}{x^2-x+1}-\frac{x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}{x^2+x+1}\right]\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{1}{2}}}{x^3-1}-\frac{x^{\frac{1}{2}}-2x^{-\frac{1}{2}}}{x^3+1}\right].$$

CHAPITRE XV

Équations du second degré.

§ I. — GÉNÉRALITÉS.

321. Définition. — *Une équation entière à une inconnue est du second degré lorsque, toutes réductions faites, le plus fort exposant de l'inconnue est* 2.

Ainsi l'équation $$3x^2 + 3x = 2x^2 - 9x - 7$$
est une équation du second degré; tandis que l'équation
$$(x + 3)^2 = (x + 1)^2 - 4$$
est une équation du 1er degré, car elle se réduit à l'équation $4x = -12$.

322. L'équation canonique du second degré à une inconnue est
$$ax^2 + bx + c = 0,$$
car toute équation du second degré à une inconnue peut être ramenée à cette forme.

Les coefficients a, b, c, représentent des nombres quelconques, mais connus. Cependant le coefficient de x^2 ne peut être nul, car alors l'équation serait au plus du premier degré.

323. Équations incomplètes. — L'équation générale du second degré est incomplète si l'un des coefficients b et c est nul. Elle prend alors l'une des formes $ax^2 + c = 0$ ou $ax^2 + bx = 0$.

§ II. — RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

324. Remarques préliminaires. — I. Pour résoudre l'équation complète, on commence par la ramener à la forme $(x + A)^2 = B$, parce que la résolution des équations de cette forme se fait aisément.

Ainsi, soit à résoudre l'équation

$$(x+3)^2 = 16.$$

Cette équation exprime que $x + 3$ est une racine carrée de 16. Or le nombre positif 16 admet deux racines carrées, $+ 4$ et $- 4$. On a donc

$$x + 3 = 4 \quad \text{ou} \quad x + 3 = -4.$$

Les solutions cherchées sont $x = 1$ et $x = -7$.

II. Le terme qu'il faut ajouter à $x^2 + 2px$ pour obtenir le carré d'un binôme est p^2, c'est-à-dire *le carré de la moitié du coefficient de* x. En effet, on a

$$x^2 + 2px + p^2 = (x + p)^2.$$

325. Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. — Puisque a est différent de zéro, l'équation donnée peut s'écrire

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Aux deux membres, ajoutons $\frac{b^2}{4a^2}$, c'est-à-dire le carré de la moitié du coefficient de x. Il vient ainsi

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \quad \text{ou} \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Cette équation exprime que $x + \frac{b}{2a}$ est une racine carrée du second membre. Or, ce second membre est une fraction dont le dénominateur est positif. Par suite, son signe dépend de celui du numérateur $b^2 - 4ac$.

1^er^ Cas : $b^2 - 4ac$ *est positif*. — Dans ce cas, le second membre est positif et il admet deux racines carrées; on a

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

De là, on déduit les valeurs de x :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

L'équation a donc *deux racines inégales* (ou *distinctes*) :

$$\boldsymbol{x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\ ; \qquad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.}$$

2e Cas : $b^2 - 4ac$ *est nul.* — On a dans ce cas

$$x + \frac{b}{2a} = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{b}{2a}.$$

L'équation n'a qu'une racine.

Remarque. — Les formules trouvées dans le premier cas sont encore applicables quand $b^2 - 4ac = 0$. En effet, en appliquant ces formules, on trouve :

$$x' = \frac{-b+0}{2a} = -\frac{b}{2a}; \quad x'' = \frac{-b-0}{2a} = -\frac{b}{2a}.$$

On voit que les deux racines se réduisent à une seule, en devenant égales.

Quand $b^2 - 4ac = 0$, on dit que l'équation admet *deux racines égales*, ou encore, qu'elle admet *une racine double.*

3e Cas : $b^2 - 4ac$ *est négatif.* — Dans ce cas, $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ est négatif et n'admet pas de racine carrée. *L'équation est donc impossible.*

Résumé. — Le nombre des racines de l'équation du second degré dépend de l'expression $b^2 - 4ac$, appelée **réalisant** de l'équation. Ce réalisant se désigne souvent par ρ (prononcez rô).

1° *Si* $b^2 - 4ac > 0$, *l'équation a deux racines inégales.*

2° *Si* $b^2 - 4ac = 0$, *l'équation a deux racines égales à* $-\frac{b}{2a}$.

3° *Si* $b^2 - 4ac < 0$, *l'équation n'a pas de racine.*

326. Remarque. — ***Quand a et c sont de signes contraires, l'équation générale du second degré a deux racines inégales.***

En effet, le produit $4ac$ étant négatif, $-4ac$ est positif et le réalisant $b^2 - 4ac$ l'est aussi.

327. Résolution d'une équation du second degré. — On applique la règle suivante.

1° *On ramène l'équation à la forme canonique.*

2° *On calcule le réalisant* ρ.

3° *Si* ρ *est positif, on applique les formules générales.*

Si ρ *est nul, la racine double vaut* $-\frac{b}{2a}$.

Si ρ *est négatif, il n'y a pas de racine.*

EXEMPLES. — I. *Résoudre l'équation* $x^2 - 9x + 19 = 0$. — On a

$$\rho = (-9)^2 - 4.19 = 5.$$

Les racines sont $x' = \dfrac{9 + \sqrt{5}}{2}$ et $x'' = \dfrac{9 - \sqrt{5}}{2}$.

II. *Résoudre l'équation* $16x^2 - 8x + 1 = 0$. — On a

$$\rho = 64 - 64 = 0.$$

Il y a une racine double. Elle est $\dfrac{8}{32}$ ou $\dfrac{1}{4}$.

III. *Résoudre l'équation* $x^2 - \dfrac{x}{3} + \dfrac{2}{7} = 0$.

Faisons disparaître les dénominateurs. Il vient

$$21x^2 - 7x + 6 = 0 \quad \text{et} \quad \rho = (-7)^2 - 21.24 = -455.$$

L'équation n'a pas de racine.

IV. Soit à résoudre *l'équation fractionnaire*

$$\frac{2x-3}{x+2} - \frac{5x+1}{2x+3} + 1 = 0. \qquad (1)$$

Chassons les dénominateurs et réduisons. L'équation devient

$$x^2 - 4x - 5 = 0. \qquad (2)$$

Les racines de l'équation (2) sont $x' = 5$ et $x'' = -1$. — Elles vérifient l'équation (1), car *elles n'annulent aucun des dénominateurs* de cette équation (**156**, III).

328. Simplification de la formule. — Si nous posons $b = 2b'$, la formule générale devient

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm \sqrt{4(b'^2 - ac)}}{2a}.$$

Faisons sortir le facteur 4 du radical et simplifions par 2. Il vient

$$x = \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}.$$

C'est cette formule simplifiée qui doit être employée lorsque b contient le facteur 2.

329. Racines de l'équation $x^2 + px + q = 0$. — On a ici :

$$a = 1; \quad b = p; \quad c = q.$$

Le réalisant est donc $p^2 - 4q$. S'il est *positif* ou *nul*, les racines de l'équation sont

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

330. Résolution des équations incomplètes. — Pour résoudre ces équations, on peut appliquer les formules générales. Mais il est préférable d'employer les procédés que nous allons indiquer.

I. **Équation incomplète** $ax^2 + bx = 0$. — Elle peut s'écrire

$$x(ax + b) = 0,$$

et par suite (**153**), elle est équivalente à l'ensemble des équations

$$x = 0; \quad ax + b = 0.$$

Ses racines sont donc 0 et $-\dfrac{b}{a}\cdot$

II. **Équation incomplète** $ax^2 + c = 0$.

1° *Si* a *et* c *sont positifs*, le premier membre représente un nombre positif, quelle que soit la valeur de x. Donc le premier membre n'est jamais nul et l'équation n'admet aucune solution.

2° *Si* a *et* c *sont négatifs*, le premier membre est toujours négatif et l'équation est impossible.

3° *Si* a *et* c *sont de signes contraires*, l'équation donne

$$x^2 = \frac{-c}{a} \quad \text{ou} \quad x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}},$$

car, dans ce cas, le nombre $\dfrac{-c}{a}$ est positif.

Exemples. — I. *Résoudre l'équation* $x^2 - 5x = 0$.
On voit de suite que les racines sont 0 et 5.

II. *Résoudre l'équation* $3x^2 + 7 = 0$.
C'est une équation impossible, car le 1er membre est toujours positif.

III. *Résoudre l'équation* $4x^2 - 9 = 0$. — Les racines sont

$$x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2}\cdot$$

331. Remarque pratique. — Certaines équations du second degré peuvent être résolues sans appliquer la formule générale. Telles sont :

1° Les équations incomplètes (**330**).

2° Les équations dont le réalisant est nul (**327**).

3° Les équations de la forme $AB = 0$ (**153**) où A et B sont du premier degré en x.

4° Les équations de la forme $x^2 + px + q = 0$, quand on peut décomposer q en un produit de deux facteurs dont la somme est égale à $-p$. (Voir les propriétés des racines au n° **335**).

Ainsi, les racines de l'équation $(x - 2)(x + 5) = 0$ sont 2 et -5.
Celles de l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$ sont 1 et 2, car

$$1 \times 2 = 2 \quad \text{et} \quad 1 + 2 = 3.$$

§ III. — PROPRIÉTÉS ET SIGNES DES RACINES.

332. Dans les numéros suivants (**333** à **336**), nous supposons que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet des racines ou que $b^2 - 4ac \geqslant 0$.

333. Théorème I. — ***La somme des racines est égale au quotient, pris en signe contraire, du coefficient de x par celui de x^2.***

En effet, les deux racines sont

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

En formant leur somme, on trouve après réduction

$$x' + x'' = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}.$$

334. Théorème II. — ***Le produit des racines est égal au quotient du terme connu par le coefficient de x^2.***

En effet, on a (**301**)

$$x'x'' = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2}$$

$$= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

335. Cas particulier : $a = 1$. — On voit facilement que les propriétés précédentes deviennent dans ce cas :

La somme des racines est égale au coefficient de x, pris en signe contraire; leur produit est égal au terme connu.

336. Différence des racines. — On a :

$$x' - x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - (-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a}$$

$$= \frac{2\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}.$$

337. Discussion de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. — Discuter l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, c'est déterminer, sans résoudre l'équation, *le nombre* et *les signes* de ses racines.

Posons $\rho = b^2 - 4ac$; $P = \frac{c}{a}$; $S = -\frac{b}{a}$.

1er Cas : $P < 0$. — L'équation a deux racines distinctes **(326)**; ces racines sont de signes contraires, car leur produit est négatif.

Si S est différent de zéro, la racine la plus grande en valeur absolue a le signe de S; si S est nul, les racines sont des nombres opposés.

2e Cas : $P = 0$. — L'équation a une racine nulle. L'autre racine est donc égale à S; elle est positive, négative ou nulle en même temps que S.

3e Cas : $P > 0$. — Dans ce cas, pour déterminer le nombre de racines, il faut examiner le réalisant ρ.

1° Si $\rho > 0$, l'équation a deux racines distinctes. Ces racines sont de mêmes signes, car leur produit est positif; et le signe commun est évidemment celui de leur somme S.

On ne peut pas supposer $S = 0$, car la somme de deux nombres de mêmes signes n'est jamais nulle.

2° Si $\rho = 0$, l'équation a deux racines égales à $\frac{S}{2}$ ou $-\frac{b}{2a}$. Ces racines sont différentes de zéro, car leur produit est positif. Leur signe commun est celui de leur somme.

3° Si $\rho < 0$, l'équation n'a pas de racine.

338. Résumé de la discussion.

1° $P < 0$; deux racines *de signes contraires.*	$S > 0$; la plus grande en valeur absolue est *positive.* $S < 0$; la plus grande en valeur absolue est *négative.* $S = 0$; deux racines *opposées.*
2° $P = 0$; une racine *nulle*; l'autre est $S = -\frac{b}{a}$.	$S > 0$; l'autre racine est *positive.* $S < 0$; l'autre racine est *négative.* $S = 0$; deux racines *nulles.*

$$3^\circ\ P > 0 \begin{cases} \rho > 0;\ \text{deux rac. } \textit{de mêmes signes.} & \begin{cases} S > 0;\ \text{deux racines } \textit{positives.} \\ S < 0;\ \text{deux racines } \textit{négatives.} \end{cases} \\ \rho = 0;\ x = -\dfrac{b}{2a} & \begin{cases} S > 0;\ \text{une rac. double } \textit{positive.} \\ S < 0;\ \text{une rac. double } \textit{négative.} \end{cases} \\ \rho < 0;\ \text{il n'y a pas de racine.} \end{cases}$$

Remarque. — Le tableau suivant résume les résultats les plus importants de la discussion.

Pour qu'une équation du second degré admette :	il faut et il suffit qu'on ait :
Deux rac. positives (dist. ou ég.)	$\rho \geqslant 0$; $P > 0$; $S > 0$.
Deux rac. négatives (dist. ou ég.)	$\rho \geqslant 0$; $P > 0$; $S < 0$.
Deux racines de signes contraires	$P < 0$.
Deux racines opposées	$P < 0$, $S = 0$ (ou $\rho > 0$, $S = 0$)

339. Applications. — I. *Déterminer le nombre et les signes des racines de l'équation* $5x^2 + 35x + 2 = 0$.

On a : $\rho = 35^2 - 40 = 1185$; l'équation admet deux racines inégales.

$$P = \frac{2}{5};\ \text{les deux racines sont de mêmes signes.}$$
$$S = -7;\ \text{les deux racines sont négatives.}$$

II. *Même question pour l'équation* $-200x^2 + 2x + 114 = 0$.

Comme a et c sont de signes contraires, il y a deux racines inégales, et elles sont de signes contraires. La somme égale 0,01; donc la racine positive est la plus grande en valeur absolue. De fait, on trouve

$$x' = \frac{-1 + 151}{-200} = -\frac{75}{100};\quad x'' = \frac{-1 - 151}{-200} = \frac{76}{100}.$$

III. *Quelles valeurs doit prendre* a *pour que l'équation*

$$(1 - a)x^2 - 6x + 3 = 0$$

ait des racines positives?

1° L'équation admet des racines si on a

$$\rho = 9 - 3(1 - a) \geqslant 0,\ \text{ou}\ 3a \geqslant -6,\ \text{ou}\ a \geqslant -2.$$

2° Elles sont de mêmes signes si on a

$$P = \frac{3}{1 - a} > 0\quad \text{ou}\quad 1 - a > 0,\quad \text{ou}\quad a < 1.$$

3° Elles sont positives si on a

$$S = \frac{6}{1-a} > 0 \quad \text{ou} \quad a < 1.$$

En résumé, on doit avoir $-2 \leqslant a < 1$.

IV. *Déterminer le nombre et les signes des racines de l'équation*

$$2x^2 - 5x + a + 3 = 0$$

quand a *croît de* $-\infty$ *à* $+\infty$.

Calculons les expressions ρ, P, S, dont dépendent le nombre et les signes des racines de l'équation. On a :

1° $\rho = 25 - 8(a + 3) = 1 - 8a$.

2° $P = \dfrac{a+3}{2}$; P a le même signe que $a + 3$.

3° S = 2,5 qui est positif.

On voit qu'il faut étudier les signes des binômes $1 - 8a$ et $a + 3$ (**254**). Ils ont respectivement pour racine $\frac{1}{8}$ et -3. Dressons un tableau où nous résumerons l'étude des signes et où nous consignerons les conclusions.

a	ρ	P	S	
	+	−	+	Deux racines de signes contraires.
-3	+	0	+	Une racine nulle ; l'autre est 2,5.
	+	+	+	Deux racines positives.
$\frac{1}{8}$	0	+	+	Une racine double : $x' = x'' = \frac{5}{4}$.
	−	+	+	Pas de racine.

§ IV. — APPLICATIONS DES PROPRIÉTÉS DES RACINES.

340. Première application : *Décomposer en facteurs un trinôme du second degré en* x.

Un trinôme du second degré en x est une expression de la forme $ax^2 + bx + c$.

Les *racines* de ce trinôme sont les valeurs de x qui l'annulent. On les obtient en résolvant l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

341. Théorème. — 1° ***Si*** $b^2 - 4ac > 0$, ***le trinôme*** $ax^2 + bx + c$ ***est le produit par*** a ***de deux binômes obtenus en retranchant de*** x ***successivement chacune des deux racines.***

On a $$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Mais $x' + x'' = -\frac{b}{a}$ et $x'x'' = \frac{c}{a}$; le trinôme peut donc s'écrire
$$a[x^2 - (x' + x'')x + x'x''] = a(x^2 - xx' - xx'' + x'x'').$$

En groupant les termes, on trouve
$$ax^2 + bx + c = a[x(x - x') - x''(x - x')] = a(x - x')(x - x'').$$

2° ***Si*** $b^2 - 4ac = 0$, ***le trinôme est le produit par*** a ***du carré du binôme obtenu en retranchant de*** x ***la racine double.***

Puisque $b^2 - 4ac = 0$, on a $c = \frac{b^2}{4a}$ et par suite,
$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Or, on a $$x' = -\frac{b}{2a} \quad \text{ou} \quad \frac{b}{2a} = -x'.$$

Donc $$ax^2 + bx + c = a(x - x')^2.$$

3° ***Si*** $b^2 - 4ac < 0$, ***le trinôme est le produit par*** a ***d'une somme de deux carrés.***

Si on désigne par k une racine carrée du nombre positif $4ac - b^2$, on a $4ac - b^2 = k^2$. De là, on déduit $\frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} + \frac{k^2}{4a^2}$. On a donc
$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{k^2}{4a^2}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{k^2}{4a^2}\right].$$

Remarques. — I. Le trinôme du second degré est carré parfait quand on a $\rho = 0$ et $a > 0$, et dans ce cas seulement.

II. Si $b^2 - 4ac < 0$, le trinôme n'est pas décomposable en facteurs rationnels du premier degré en x.

342. Exemples. — I. *Décomposer en facteurs* $y = x^2 + 2x - 3$.

Ce trinôme a deux racines inégales, car a et c sont de signes contraires. En résolvant l'équation $x^2 + 2x - 3 = 0$, on trouve $x' = 1$ et $x'' = -3$.
Par suite, $y = (x - 1)(x + 3)$.

II. *Décomposer en facteurs* $y = 5x^2 + 30x + 45$.

Le réalisant de ce trinôme est nul; par suite, $x' = x'' = \frac{-30}{10} = -3$, et

$$y = 5(x+3)^2.$$

III. *Décomposer en facteurs*

$$y = 3x^2 - 3x + 8.$$

Le réalisant de ce trinôme est égal à -87. Par suite, le trinôme est égal au produit par 3 d'une somme de deux carrés.

343. 2e Application. — *Calculer la somme ou la différence des mêmes puissances des racines.*

Nous nous proposons de calculer les expressions.

$$S_m = x'^m + x''^m \quad \text{et} \quad D_m = x'^m - x''^m$$

dans quelques cas particuliers. On a :

$$S_2 = x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x'' = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}.$$

$$S_3 = x'^3 + x''^3 = (x' + x'')(x'^2 - x'x'' + x''^2)$$
$$= -\frac{b}{a}\left(\frac{b^2 - 2ac}{a^2} - \frac{c}{a}\right) = \frac{3abc - b^3}{a^3}.$$

$$S_4 = x'^4 + x''^4 = (x'^2 + x''^2)^2 - 2x'^2x''^2$$
$$= \left(\frac{b^2 - 2ac}{a^2}\right)^2 - \frac{2c^2}{a^2} = \frac{b^4 + 2a^2c^2 - 4ab^2c}{a^4}.$$

$$D_2 = x'^2 - x''^2 = (x' + x'')(x' - x'') = -\frac{b}{a^2}\sqrt{b^2 - 4ac}.$$

$$D_3 = x'^3 - x''^3 = (x' - x'')(x'^2 + x'x'' + x''^2) = \frac{b^2 - ac}{a^3}\sqrt{b^2 - 4ac}.$$

$$D_4 = x'^4 - x''^4 = (x'^2 + x^{2''})(x'^2 - x''^2) = \frac{2abc - b^3}{a^4}\sqrt{b^2 - 4ac}.$$

Remarque. — On peut aussi se proposer de calculer la somme ou la différence des inverses des mêmes puissances des racines. On a, par exemple,

$$\frac{1}{x'^2} + \frac{1}{x''^2} = \frac{x'^2 + x''^2}{x'^2x''^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}.$$

344. 3e Application. — *Calculer la valeur d'une fonction symétrique des racines.*

Une **fonction symétrique** *des racines est une expression qui renferme* x′ *et* x″ *et qui ne change pas quand on y remplace* x′ *par* x″ *et* x″ *par* x′.

Pour calculer une telle expression, on doit éviter de calculer x' et x''; on utilise les propriétés de la somme et du produit qui sont elles-mêmes des fonctions symétriques des racines.

Exemples. — *Si* x' *et* x'' *sont les racines de l'équation* $x^2 - 15x + 11 = 0$, *calculer l'expression*

$$A = \frac{(2x' - 5)(2x'' - 5)}{x'^2 + 3x'x'' + x''^2}.$$

On a : $$x' + x'' = 15 \quad \text{et} \quad x'x'' = 11;$$

$$A = \frac{4x'x'' - 10(x' + x'') + 25}{(x' + x'')^2 + x'x''} = \frac{4.11 - 10.15 + 25}{225 + 11} = -\frac{81}{236}.$$

345. 4e Application. — *Trouver deux nombres* α *et* β, *connaissant leur somme* s *et leur produit* p.

Si ces deux nombres existent, ils sont les racines de l'équation $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$, qu'on peut écrire

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - sx + p = 0.$$

1° Si $s^2 - 4p > 0$, on a

$$\alpha = \frac{s + \sqrt{s^2 - 4p}}{2}, \quad \beta = \frac{s - \sqrt{s^2 - 4p}}{2};$$

ou $$\alpha = \frac{s - \sqrt{s^2 - 4p}}{2}, \quad \beta = \frac{s + \sqrt{s^2 - 4p}}{2};$$

et le problème admet deux solutions.

2° Si $s^2 - 4p = 0$, on a $\alpha = \beta = \frac{s}{2}$.

3° Si $s^2 - 4p < 0$, le problème est impossible.

Remarque. — La question revient à résoudre le système en α et β

$$\alpha + \beta = s; \quad \alpha\beta = p.$$

On pourrait évidemment résoudre ce système par la méthode de substitution en remplaçant α dans la 2e équation par sa valeur tirée de la première.

346. 5e Application. — *Former une équation du second degré connaissant ses racines* α *et* β.

L'équation cherchée doit être équivalente à l'ensemble des équations $x - \alpha = 0$ et $x - \beta = 0$. Elle est donc de la forme (**153**)

$$k(x - \alpha)(x - \beta) = 0,$$

k étant une constante, indépendante de x. Ordinairement on prend $k = 1$. L'équation peut alors s'écrire

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0.$$

Remarque. — Lorsqu'il s'agit de *former une équation du second degré* dont les racines sont soumises à des conditions déterminées, on tâche de déduire de ces conditions la somme S et le produit P des racines. L'équation demandée est alors

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

Exemple. — *Former une équation ayant pour racines la somme et produit des racines de l'équation* $ax^2 + bx + c = 0$.

Supposons $b^2 - 4ac \geqslant 0$ et soient x' et x'' les racines de l'équation donnée. Désignons par S et P la somme et le produit des racines de l'équation à former. On a :

$$S = (x' + x'') + x'x'' = -\frac{b}{a} + \frac{c}{a} = -\frac{b - c}{a}.$$

$$P = (x' + x'')x'x'' = -\frac{b}{a} \times \frac{c}{a} = -\frac{bc}{a^2}.$$

L'équation demandée est donc

$$x^2 + \frac{b - c}{a}x - \frac{bc}{a^2} = 0 \quad \text{ou} \quad a^2x^2 + a(b - c)x - bc = 0.$$

347. 6e Application. — *Transformer une équation du second degré.*

Transformer une équation du second degré, c'est former une équation du second degré dont les racines soient liées aux racines de l'équation proposée par une relation donnée.

Exemple. — *Les racines de l'équation* $ax^2 + bx + c = 0$ *étant* x' *et* x'', *former l'équation ayant pour racines* $x' + h$ *et* $x'' + h$.

1re Méthode. — La somme et le produit des racines de l'équation cherchée sont :

$$S = (x' + x'') + 2h = \frac{-b + 2ah}{a};$$

$$P = (x' + h)(x'' + h) = x'x'' + h(x' + x'') + h^2 = \frac{ah^2 - bh + c}{a}.$$

L'équation cherchée est donc

$$ax^2 - (2ah - b)x + ah^2 - bh + c = 0.$$

2e Méthode. — Soit x une racine quelconque de l'équation donnée et y la racine correspondante de l'équation cherchée. On a

$$y = x + h \quad \text{ou} \quad x = y - h.$$

En remplaçant x par sa valeur dans l'équation donnée, on trouve

$$a(y-h)^2 + b(y-h) + c = 0$$

ou

$$ay^2 - (2ah - b)y + ah^2 - bh + c = 0. \qquad (1)$$

L'équation (1) peut s'écrire aussi

$$ax^2 - (2ah - b)x + ah^2 - bh + c = 0, \qquad (2)$$

car les équations (1) et (2) ont les mêmes racines.

Remarque. — L'équation (2) s'appelle **transformée** en $x + h$ de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. On peut montrer d'une façon analogue que ses transformées en $\frac{1}{x}$, kx et $-x$ sont respectivement :

$$\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + c = 0 \quad \text{ou} \quad cx^2 + bx + a = 0, \text{ si } c \neq 0;$$

$$a\left(\frac{x}{k}\right)^2 + b\left(\frac{x}{k}\right) + c = 0 \quad \text{ou} \quad ax^2 + bkx + ck^2 = 0;$$

$$a(-x)^2 + b(-x) + c = 0 \quad \text{ou} \quad ax^2 - bx + c = 0.$$

348. 7e Application. — *Déterminer des paramètres, ou chercher une relation entre des paramètres qui se trouvent dans une équation du second degré dont les racines sont soumises à certaines conditions.*

Exemples. — I. *Dans l'équation* $3x^2 + bx + 9 = 0$, *déterminer* b *pour que l'une des racines soit le triple de l'autre.*

La condition de l'énoncé et les propriétés des racines donnent un système de trois équations à trois inconnues.

$$x' = 3x''; \quad x' + x'' = -\frac{b}{3}; \quad x'x'' = 3.$$

Les deux premières sont du 1er degré en x' et x''. Elles donnent

$$x' = -\frac{b}{4} \quad \text{et} \quad x'' = -\frac{b}{12}.$$

En remplaçant dans la troisième, on trouve

$$\frac{b^2}{48} = 3; \quad b^2 = 144; \quad b = \pm 12.$$

II. *Dans l'équation* $x^2 + px + q = 0$, *déterminer* p *et* q *pour que l'une des racines soit double de l'autre et que la somme de leurs carrés soit* 45.

Ces deux conditions jointes aux propriétés des racines donnent un système de quatre équations à quatre inconnues.

$$x'' = 2x'; \quad x' + x'' = -p; \quad x'^2 + x''^2 = 45; \quad x'x'' = q.$$

Les deux premières donnent $x' = -\frac{p}{3}$; $x'' = -\frac{2p}{3}$.

En substituant, les deux dernières deviennent

$$\frac{5p^2}{9} = 45; \quad q = \frac{2p^2}{9}; \quad \text{d'où} \quad p = \pm 9; \quad q = 18.$$

III. *Quelle relation doit exister entre les coefficients de* $ax^2 + bx + c = 0$ *pour que les racines vérifient la relation* $mx' + nx'' = p$?

On a le système

$$mx' + nx'' = p; \quad x' + x'' = -\frac{b}{a}; \quad x'x'' = \frac{c}{a}.$$

Entre ces trois équations, éliminons x' et x''.

a) Si $m \neq n$, on tire des deux premières équations

$$x' = \frac{ap + bn}{a(m-n)}; \quad x'' = -\frac{ap + bm}{a(m-n)}.$$

Ces valeurs portées dans la troisième équation donnent la relation

$$-\frac{(ap + bn)(ap + bm)}{a^2(m-n)^2} = \frac{c}{a}$$

ou $$(ap + bn)(ap + bm) + ac(m-n)^2 = 0.$$

b) Si $m = n$, le système formé par les deux premières équations est impossible ou indéterminé, et il est impossible de trouver la relation demandée.

349. 8e Application. — *Rechercher la condition nécessaire et suffisante pour que deux équations du second degré aient deux racines communes.*

Soient $ax^2 + bx + c = 0$ et $a'x^2 + b'x + c' = 0$ deux équations du second degré *qui admettent des racines.*

I. Si ces racines sont les mêmes, elles auront même somme et même produit. De là, on déduit

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad \text{et} \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'};$$

puis, en supposant que b' et c' sont différents de zéro,

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

On voit que *les coefficients correspondants doivent être proportionnels.*

II. Cette condition est *suffisante*, car si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$, on a

$$a = a'k; \quad b = b'k; \quad c = c'k;$$

et la première équation peut s'écrire

$$ka'x^2 + kb'x + kc' = 0;$$

Elle est donc équivalente à la seconde (**152**).

Remarque. — Lorsque b' ou c' est nul, la condition précédente est encore applicable, pourvu qu'au coefficient nul de la seconde équation corresponde un coefficient nul de la première.

EXERCICES

Résoudre les équations suivantes :

421. (452)
1° $x^2 + 5x + 4 = 0$
2° $x^2 + 9x + 14 = 0$
3° $x^2 - 6x + 5 = 0$
4° $x^2 - 6x + 8 = 0$
5° $x^2 - 3x - 18 = 0$
6° $x^2 - 3x + 10 = 0$
7° $x^2 - 3x - 28 = 0$
8° $x^2 + 10x + 25 = 0$
9° $x^2 + 9x - 10 = 0$
10° $x^2 + x + 1 = 0$.

422. (453)
1° $3x^2 - 9x + 6 = 0$
2° $3x^2 - 15x + 18 = 0$
3° $4x^2 - 4x + 8 = 0$
4° $2x^2 - 14x + 12 = 0$
5° $7x^2 - 49x - 126 = 0$
6° $3x^2 + 24x + 21 = 0$
7° $2x^2 - 12x - 14 = 0$
8° $7x^2 + 21x - 28 = 0$.

423. (454)
1° $7x^2 + 58x = 45$
2° $11x^2 + 2(19x - 12) = 0$
3° $x - x^2 + 42 = 0$
4° $2x^2 + \frac{9}{16} = x$
5° $\frac{3x^2}{4} + 2x + \frac{4}{3} = 0$
6° $x^2 + 64 = 20x$
7° $2x^2 + 16(2 + x) = 0$
8° $49x^2 + 140x - 629 = 0$
9° $x^2 - \frac{17x}{6} = \frac{1}{2}$
10° $\frac{x^2}{3} + \frac{12}{25} = \frac{4x}{5}$.

424. (455) Résoudre les équations suivantes, sans appliquer la formule générale. — Reprendre également le n° **421**.

1° $3x^2 = 3072$
2° $3x^2 + 4x = 0$
3° $5x^2 = 2x$
4° $4x^2 - 4x + 1 = 0$
5° $x(x + 1) = 2(x + 1)$
6° $x^2 - 4 = x + 2$
7° $36 = x^2$
8° $9x^2 - 6x + 1 = 0$
9° $(x - 3)(x - 5) + x = 5$
10° $(x + 3)^2 - 7(x + 3) = 0$.
11° $(2x - 3)(x + 1) + 3 = 2x$
12° $x^2 - (a + b)x + ab = 0$
13° $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$
14° $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$
15° $a^2x^2 - 2abx + b^2 - c^2 = 0$
16° $a^2x^2 - 2a^3x + a^4 - 1 = 0$.

425. (456) Résoudre les équations suivantes :

1° $(5x-2)(x+3) = 7(x-1)$ -1 et -1/5

2° $(5x-3)(x-5) = (2x+5)^2 + 90$ -2 et -50

3° $(x-4)^2 + (x-3)^2 = (x-2)(3x-16)$

4° $14x^2 - (2x-11)(5x+4) - 33x = 32$

5° $(x+1)(4x-5) + (x+2)(3x-2) = (x+3)(3x-1)$

6° $(x+3)(2x-7) - (x-5)^2 - 2(x+2)(x-4) = 0.$

426. (457)

1° $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{35}$

2° $\dfrac{4}{x^2-1} + \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{2}{x-1} + 1$

3° $\dfrac{x-3}{x-1} + \dfrac{x-1}{x-3} = \dfrac{25}{12}$

4° $\dfrac{2x-1}{3} + \dfrac{3}{x-8} = \dfrac{x-5}{x-8} + 3$

5° $\dfrac{8x-3}{x+3} - 2x = 4 - \dfrac{3x^2}{x+3}$

6° $\dfrac{x+2}{x-1} + \dfrac{x-4}{2x} = \dfrac{4}{2x^2-2x}$

7° $\dfrac{x+3}{x+2} - \dfrac{x+2}{x+3} = \dfrac{x^2-75}{x^2+5x+6}$

8° $\dfrac{x-2}{3(x-1)} + \dfrac{x-1}{4(x-2)} = \dfrac{x+2}{x^2-3x+2}.$

N. B. *Les lettres* a, b, c, *qui interviennent dans les deux* n^{os} *suivants, représentent des nombres connus, différents de zéro.*

427. (458)

1° $x^2 + 6ax + 8a^2 = 0$

2° $6(x^2 + 2a^2) - 17ax = 0$

3° $ab(x^2+1) - (a^2+b^2)x = 0$

4° $abcx^2 - (a^2b^2 + c^2)x + abc = 0$

5° $(a-x)^2 + (x-b)^2 = (a-b)^2$

6° $x^2 - 2(a^2+b^2)x + (a^2-b^2)^2 = 0.$

428. (459)

1° $\dfrac{a-b}{4(x-a)} + \dfrac{x+2b}{a+b} = 2$

2° $\dfrac{(a-x)^2-(x-b)^2}{(a-x)(x-b)} = \dfrac{4ab}{a^2-b^2}$

3° $\dfrac{(a-x)^2+(x-b)^2}{(a-x)(x-b)} = \dfrac{13}{6}$

4° $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = \dfrac{3a^2+b^2}{a^2+3b^2}$

5° $\dfrac{(a-x)^2+(x-b)^2}{(a+b-2x)^2} = \dfrac{a^2+b^2}{(a+b)^2}$

6° $\dfrac{3a+b-x}{3a-b-x} = \dfrac{a+b}{a-b} \cdot \dfrac{a-b+x}{a+b+x}.$

429. (460) Déterminer m pour que 1 soit une racine des équations suivantes. Trouver l'autre racine.

1° $x^2 + (3-m)x + 2m - 1 = 0$

2° $m^2x^2 - (4m-1)x + m + 1 = 0$

3° $(m^2-1)x^2 - (2m-1)x - 3 = 0$

4° $m^2x^2 - m(3x+10) - (x^2+3x+10) = 0.$

430. (461) Déterminer m pour que -1 soit une racine des équations suivantes. Trouver les autres racines.

1° $x^3 + 6x^2 + 11x + m = 0$ 2° $x^3 + 2mx^2 - (m-1)x - 4 = 0.$

431. (462) Montrer que l'équation $x^2 - (a + c)x + ac - b^2 = 0$ admet toujours deux racines.

432. (463) Si l'équation $x^2 + px + q = 0$ admet deux racines, il en sera de même des équations suivantes :

1° $x^2 + x(p - 2q) + q(1 - p + q) = 0$
2° $x^2 + px + q + m(2x + p) = 0.$

NOMBRE ET SIGNES DES RACINES.

433. (464) Dans les équations des nos **421** et **422** indiquer, sans résoudre, le nombre et les signes des racines.

434. (465) Déterminer c pour que l'équation $3x^2 - 10x + c = 0$ admette :

1° deux racines distinctes, 4° des racines inverses,
2° deux racines positives, 5° deux racines de signes contraires,
3° une racine nulle, 6° pas de racine.

435. (466) Déterminer c pour que l'équation $x^2 + 4x + c + 2 = 0$ admette :

1° deux racines distinctes, 3° une racine double,
2° deux racines négatives, 4° une racine nulle.

436. (467) Quelles valeurs doit prendre c pour que l'équation

$$(c + 4)x^2 - 2(c - 2)x + c - 4 = 0$$

admette : 1° deux racines distinctes, 3° deux racines opposées,
2° une racine nulle, 4° deux racines inverses.

437. (468) Déterminer le nombre et les signes des racines des équations suivantes, lorsque m croît de $-\infty$ à $+\infty$.

1° $(m - 3)x^2 - 8x + 4 = 0$ 3° $(2m + 5)x^2 - 4x - 8 = 0$
2° $2x^2 - 5x + 3m - 1 = 0$ 4° $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 = 0.$

APPLICATIONS DES PROPRIÉTÉS DES RACINES.

438. (469) Décomposer en facteurs les trinômes suivants :

1° $x^2 - 9x + 18$	5° $2x^2 - 3x - 2$	9° $3x^2 - 2x - 4$
2° $x^2 + 3x - 28$	6° $x^2 - 5x - 6$	10° $18x^2 + 3x - 1$
3° $3x^2 - 21x + 36$	7° $x^2 + 4x + 3$	11° $4x^2 - 4x + 1$
4° $2x^2 - 12x + 18$	8° $x^2 + 10x + 20$	12° $63x^2 + 25x + 2$.

439. (470) Trouver deux nombres ayant respectivement pour somme et pour produit :

1° 17 et 30	5° $2a$ et $a^2 - b^2$
2° 1 et $-$ 56	6° $2a^2b$ et $a^4b^2 - a^2b^4$
3° $\frac{24}{5}$ et $-$ 1	7° $\frac{a^2 + b^2}{ab}$ et 1
4° $\frac{4}{5}$ et $- \frac{2}{5}$	8° $\frac{2a}{a^2 - b^2}$ et $\frac{1}{a^2 - b^2}$.

440. (471) Former une équation du second degré ayant pour racines :

1° 7 et $-$ 3	5° 3 et $-$ 7	9° $3 + \sqrt{2}$ et $3 - \sqrt{2}$
2° $-$ 2 et $-$ 5	6° $a + b$ et $a - b$	10° $2 + \sqrt{3}$ et $2 - \sqrt{3}$
3° 3 et $\frac{1}{3}$	7° $a + b$ et $-(a + b)$	11° $\frac{1}{a + b}$ et $\frac{1}{b - a}$
4° 2 et $- \frac{1}{2}$	8° $a + b$ et $\frac{1}{a + b}$	12° $\frac{a + b}{a - b}$ et $\frac{a - b}{a + b}$.

441. (472) Former l'équation ayant des racines triples de celles de l'équation

$$2x^2 - x - 10 = 0.$$

442. (473) Former l'équation dont les racines sont les nombres opposés aux racines de l'équation $x^2 - 3x - 1 = 0$.

443. (474) Équation dont les racines sont celles de l'équation $x^2 - 3x - 10 = 0$, augmentées de 2.

444. (475) Équation dont les racines sont celles de l'équation $x^2 - 3x - 4 = 0$, divisées par 3.

445. (476) Équation dont chaque racine égale 3 fois la correspondante de l'équation $x^2 - 4x - 1 = 0$, plus 2.

446. (477) Si x' et x'' sont les racines de l'éq. $x^2 + px + q = 0$, quelle est l'équation qui admet pour racines :

1° x'^2 et x''^2

2° $\dfrac{x'}{x''}$ et $\dfrac{x''}{x'}$

3° $x' + ax''$ et $x'' + ax'$

4° $x' + \dfrac{1}{x'}$ et $x'' + \dfrac{1}{x''}$

5° $x' + \dfrac{1}{x''}$ et $x'' + \dfrac{1}{x'}$

6° $x' + x''$ et $x'^2 + x''^2$

7° $\dfrac{x'}{x''} + 1$ et $\dfrac{x''}{x'} + 1$

8° $x'(1 - x')$ et $x''(1 - x'')$

9° $x'x'' + \dfrac{x'}{x''}$ et $x''x' + \dfrac{x''}{x'}$

10° $\dfrac{x'}{x' - 1}$ et $\dfrac{x''}{x'' - 1}$.

447. (478) L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a pour racines x' et x'';

1° Former l'équation qui admet pour racines $x' + h$ et $x'' + h$.

2° Pour quelle valeur de h, l'équation obtenue est-elle dépourvue de terme en x?

448. (479) Former l'équation du second degré dont les racines satisfont aux relations suivantes :

$$x'x'' + (x' + x'') - m = 0 \text{ et } x'x'' - m(x' + x'') + 1 = 0.$$

Conditions de possibilité.

449. (480) Former une équation du second degré connaissant la somme p des racines et la somme k^2 des carrés des racines.

~~**450.** (481)~~ Dans l'équation $x^2 - 3x + q = 0$, déterminer q de manière que l'une des racines soit égale 1° à 2; 2° à -2; 3° à $-\dfrac{1}{3}$; 4° à zéro.

451. (482) Dans l'équation $x^2 - px + 36 = 0$, déterminer p de manière que :

1° $x' = x''$; 2° $x' = -x''$; 3° $x'^2 + x''^2 = 184$; 4° $\dfrac{1}{x'} + \dfrac{1}{x''} = \dfrac{5}{12}$.

452. (483) Fixer q dans $x^2 - 5x + q = 0$ pour que :

1° $x' = \dfrac{1}{x''}$; 2° $x' - x'' = 3$; 3° $x' = 2x''$; 4° $2x' - x'' = 7$.

453. (484) Dans l'équation $8x^2 - (m - 1)x + m - 7 = 0$, déterminer m pour qu'on ait :

1° $x' = x''$; 2° $x' = -x''$; 3° $x' = \dfrac{1}{x''}$; 4° $x' = -\dfrac{1}{x''}$.

454. (485) Fixer m dans l'équation $x^2 - (9 + m)x + 7m - 1 = 0$ pour que

$$x' + x'' + x'x'' = (x' - x'')^2.$$

455. (486) Déterminer m dans l'éq. $3x^2 - 2x(m + 1) + m - 1 = 0$ pour que

$$9x'x''^2 + 3x'^3 + 9x''x'^2 + 3x''^3 = 3.$$

456. (487) Déterminer m dans l'éq. $(2m-1)x^2+2x(1-m)+3m=0$, pour que la somme des carrés des racines égale 4.

457. (489) Déterminer a dans l'équation $4x^2 - 15x + 4a^3 = 0$, pour qu'on ait

$$1^\circ \ x' = x''^2; \qquad 2^\circ \ \frac{x'}{x''} + \frac{x''}{x'} = -\frac{169}{80}.$$

458. (490) Déterminer m de manière que la somme des carrés des racines de l'équation $x^2 + (m - 2)x - (m + 3) = 0$ soit égale à k.

Quelle est la plus petite valeur de k pour que le problème soit possible?

459. (491) Dans $(m + 2n)x^2 - 2x(4m + 5n) + 20n + 3 = 0$, déterminer m et n pour que $x' + x'' = 5{,}75$ et $x'x'' = 7{,}875$.

460. (492) Dans $x^2 + px + q = 0$, déterminer p et q pour que :

1° $x'^2 + x''^2 = 5x'x''$ et $x'x'' = 5(x' + x'')$.

2° $x' - x'' = 4$ et $x'^3 - x''^3 = 208$.

3° $x' = p$; $x'' = q$.

461. (495) L'équation $x^2 + px + q = 0$ admet comme racines deux nombres entiers consécutifs. Montrer que l'on a $p^2 - 4q - 1 = 0$.

462. (496) Les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont différentes de zéro et $x' > x''$. A quelle relation doivent satisfaire les coefficients de cette équation, si l'on a :

$$1^\circ \ \frac{x'}{x''} = \frac{m}{n} \qquad 3^\circ \ x' - x'' = \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}$$

$$2^\circ \ x'^2 - x''^2 = m \qquad 4^\circ \ 2(x'^3 - x''^3) = 7(x'^2x'' - x'x''^2)?$$

463. (497) Étant donnée l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, montrer que si $a + b = c$, on a la relation $(1 - x')^2(1 - x'')^2 = 4x'^2x''^2$.

464. (499) Trouver la condition pour que $(a + bx)^2 + (a' + b'x)^2$ soit un carré parfait. Montrer que si $(a + bx)^2 + (a' + b'x)^2$ et $(a + cx)^2 + (a' + c'x)^2$ sont des carrés parfaits, il en est de même de $(b + cx)^2 + (b' + c'x)^2$.

465. (500) Démontrer que les polynômes suivants sont des carrés.

1° $a^2x^2 - (4a^2 + 2a)x + 4a^2 + 4a + 1$

2° $9x^2 - 30xy + 25y^2 - 24x + 40y + 16.$

466. (505) On demande de déterminer a et b pour que les équations suivantes aient deux racines communes.

1° $2x^2 + x - 6 = 0$ et $4x^2 + bx + 4a - 2b = 0.$

2° $(2a+b)x^2-(6a+3)x-(5b-1)=0$ et $4x^2-(2a+1)x-3=0.$

CHAPITRE XVI

Équations réductibles au second degré.

§ I. — ÉQUATIONS BICARRÉES.

350. Une équation bicarrée *est une équation du quatrième degré qui ne renferme que des puissances* **paires** *de l'inconnue.*

La forme canonique des équations bicarrées est donc

$$ax^4 + bx^2 + c = 0. \quad (1)$$

351. Résolution. — En posant $x^2 = y$, on obtient l'équation

$$ay^2 + by + c = 0. \quad (2)$$

L'équation (2) est *la résolvante* de l'équation bicarrée; y est *une inconnue auxiliaire.* Résoudre l'équation bicarrée revient à résoudre le système

$$ay^2 + by + c = 0, \ (2) \qquad x^2 = y. \ (3)$$

On commence par résoudre l'équation (2). Si cette équation est impossible, l'équation bicarrée n'a pas de racine. Dans le cas contraire, soit y' une racine de (2). Si y' est positif (ou nul), à cette racine de la résolvante correspondent deux racines opposées (ou nulles) $\pm\sqrt{y'}$ de l'équation bicarrée. Si y' est négatif, l'équation $x^2 = y'$ est impossible et à y' ne correspond aucune racine de l'équation bicarrée.

Exemple. — La résolvante de l'équation bicarrée $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ est $y^2 - 5y + 4 = 0$. Ses racines sont $y' = 1$ et $y'' = 4$. Les racines de l'équation bicarrée sont donc ± 1 et ± 2.

352. Discussion. — Si nous posons

$$\rho = b^2 - 4ac, \quad P = \frac{c}{a}, \quad S = -\frac{b}{a},$$

l'équation bicarrée n'a de racines que dans les quatre cas suivants :

1er Cas : $P < 0$. — La résolvante a deux racines de signes contraires. Soit y' la racine positive. Les racines de l'équation bicarrée seront $\pm\sqrt{y'}$.

2e Cas : $P = 0$. — Les racines de la résolvante sont 0 et S.

a) Si $S = 0$, l'équation bicarrée a une racine quadruple nulle.

b) Si $S > 0$, les racines de l'équation bicarrée sont $\pm\sqrt{S}$ et zéro, qui est une racine double.

c) Si $S < 0$, l'équation bicarrée a une racine double nulle.

3e Cas : $\rho > 0$, $P > 0$, $S > 0$. — La résolvante a deux racines positives y' et y''. L'équation bicarrée aura deux couples de racines opposées, qui sont $\pm\sqrt{y'}$ et $\pm\sqrt{y''}$.

4e Cas : $\rho = 0$, $S > 0$. — La résolvante a une racine double positive. L'équation bicarrée aura deux racines doubles qui sont

$$\pm\sqrt{\frac{S}{2}} \quad \text{ou} \quad \pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}.$$

353. Radicaux doubles. — I. On appelle radicaux doubles les expressions

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} \quad \text{et} \quad \sqrt{A - \sqrt{B}},$$

dans lesquelles A est rationnel et B rationnel, non carré parfait.

Nous nous proposons de transformer chacun de ces radicaux doubles en une somme ou en une différence de deux radicaux simples.

II. Transformation. — Soient x et y deux nombres positifs. On a

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 = x + y + 2\sqrt{xy} = x + y + \sqrt{4xy}$$

et par suite, $$\sqrt{x + y + \sqrt{4xy}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}. \qquad (1)$$

On a aussi

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 = x + y - \sqrt{4xy}$$

et par suite, $$\sqrt{x + y - \sqrt{4xy}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}, \qquad (2)$$

pourvu que x soit supérieur à y, le second membre de (2) devant être positif comme le premier membre.

Des identités (1) et (2), il résulte qu'on peut écrire

$$\sqrt{\mathrm{A} + \sqrt{\mathrm{B}}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad \text{et} \quad \sqrt{\mathrm{A} - \sqrt{\mathrm{B}}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

quand on peut déterminer deux nombres positifs x et y tels qu'on ait

$$x + y = \mathrm{A}, \quad 4xy = \mathrm{B} \quad \text{ou} \quad xy = \frac{\mathrm{B}}{4},$$

x *désignant le plus grand de ces deux nombres.*

Dans beaucoup d'exercices proposés, on peut déterminer aisément x et y en décomposant $\frac{\mathrm{B}}{4}$ en un produit de deux facteurs dont la somme est A. Dans les autres cas, on obtiendra x et y en résolvant l'équation (**345**)

$$z^2 - \mathrm{A}z + \frac{\mathrm{B}}{4} = 0. \qquad (3)$$

Exemples. — 1° On a $\sqrt{3 + \sqrt{8}} = \sqrt{2} + \sqrt{1} = 1 + \sqrt{2}$, car on a

$$\frac{\mathrm{B}}{4} = \frac{8}{4} = 2 = 2 \times 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{A} = 3 = 2 + 1.$$

2° On a $\sqrt{8 - 2\sqrt{15}} = \sqrt{8 - \sqrt{60}} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$, car on a

$$\frac{\mathrm{B}}{4} = \frac{60}{4} = 15 = 5 \times 3 \quad \text{et} \quad \mathrm{A} = 8 = 5 + 3.$$

3° On trouve $\sqrt{5 - \sqrt{21}} = \sqrt{\frac{7}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}}$ après avoir résolu l'équation

$$z^2 - 5z + \frac{21}{4} = 0.$$

III. Discussion. — La transformation des radicaux doubles n'est possible que si l'équation (3) admet *deux racines positives et rationnelles.*

L'équation (3) n'admet deux racines *rationnelles* que si son réalisant $A^2 - B$ est carré parfait.

Ces racines ne sont *positives* que si leur somme A et leur produit $\frac{B}{4}$ sont positifs.

En résumé, les conditions de possibilité sont

$$A > 0, \quad B > 0, \quad A^2 - B \text{ est un carré parfait.}$$

354. Application aux racines de l'équation bicarrée. — Les racines de l'équation $ax^4 + bx^2 + c = 0$, si elles existent, sont données par les formules

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} = \pm\sqrt{-\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}}. \qquad (1)$$

Supposons a, b, c rationnels et $b^2 - 4ac$ non carré parfait. Les racines (1) sont alors des radicaux doubles. Les conditions requises pour que l'une quelconque de ces racines puisse être transformée en une somme ou en une différence de deux radicaux simples sont :

$$A = -\frac{b}{2a} > 0; \; B = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0; \; A^2 - B = \frac{c}{a} \text{ est carré parfait;}$$

ou encore, $\quad b^2 - 4ac > 0; \quad -\frac{b}{a} > 0; \quad \frac{c}{a}$ est carré parfait.

On voit que *la résolvante doit admettre deux racines positives dont le produit est carré parfait.*

Exemple. — La résolvante de l'équation $x^4 - 8x^2 + 4 = 0$ est

$$y^2 - 8y + 4 = 0.$$

Elle admet deux racines positives, car on a

$$\rho = 48 > 0; \quad S = 8 > 0; \quad P = 4 > 0.$$

De plus, le produit de ces racines est un carré parfait. Les formules de transformation appliquées aux racines de l'équation bicarrée conduiront donc à des radicaux simples. En effet, on trouve

$$x = \pm\sqrt{4 \pm \sqrt{12}} = \pm(\sqrt{3} \pm 1).$$

§ II. — ÉQUATIONS RÉCIPROQUES.

355. *L'équation entière* f(x) = 0 *dont le premier membre est ordonné par rapport à* x, *est* **une équation réciproque** *lorsque les coefficients de deux termes quelconques équidistants des extrêmes sont égaux; ou encore, lorsque les coefficients de deux termes quelconques équidistants des extrêmes sont opposés.*

356. Formes générales. — Les équations réciproques *du troisième degré* ont une des formes

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0, \tag{1}$$

$$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0; \tag{2}$$

celles *du quatrième degré* ont une des formes

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0, \tag{3}$$

$$ax^4 + bx^3 - bx - a = 0. \tag{4}$$

Cette dernière équation ne peut avoir de terme milieu, car il devrait être son propre opposé.

Remarques. — I. Dans ces équations, on suppose $a \neq 0$. Il en résulte qu'une équation réciproque n'est jamais vérifiée par $x = 0$ et qu'en divisant ses deux membres par une puissance de x, on obtient une équation équivalente.

II. Il existe de même deux types d'équations réciproques du 5e, 6e, ... degré.

357. Théorème. — ***Si x' est une racine d'une équation réciproque, son inverse est aussi une racine.***

En effet, si x' est, par exemple, une racine de l'équation (1), on a

$$ax'^3 + bx'^2 + bx' + a = 0.$$

En divisant par x'^3, on obtient l'égalité

$$a + b\frac{1}{x'} + b\frac{1}{x'^2} + a\frac{1}{x'^3} = 0 \quad \text{ou} \quad a\left(\frac{1}{x'}\right)^3 + b\left(\frac{1}{x'}\right)^2 + b\left(\frac{1}{x'}\right) + a = 0,$$

qui exprime que l'inverse de x' est une racine de l'équation (1).

358. Résolution de l'équation

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0. \tag{3}$$

Cette équation se résout à l'aide d'*une inconnue auxiliaire.*

Soit à résoudre l'équation

$$x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0.$$

Divisons les deux membres par x^2; il vient

$$x^2 + x - 4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 4 = 0.$$

En posant $x + \dfrac{1}{x} = y$, on a $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = y^2 - 2$ et l'éq. devient

$$y^2 + y - 6 = 0.$$

C'est *la résolvante* de l'équation proposée. Elle donne

$$y' = 2; \quad y'' = -3.$$

1° Si $y' = 2$, on a $x + \dfrac{1}{x} = 2$ ou $x^2 - 2x + 1 = 0$.

Cette équation donne $x = 1$; 1 est une racine double.

2° Si $y'' = -3$, on a $x + \dfrac{1}{x} = -3$ ou $x^2 + 3x + 1 = 0$.

Cette équation donne $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

359. Résolution des équations (1), (2) **et** (4). — Ces équations se résolvent *en décomposant le premier membre en facteurs.*

Soit, par exemple, à résoudre l'équation (1)

$$3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$3(x^3 + 1) - 7x(x + 1) = 0 \quad \text{ou} \quad (x + 1)(3x^2 - 10x + 3) = 0.$$

Elle est donc équivalente à l'ensemble des équations suivantes.

1° $x + 1 = 0$; d'où $x' = -1$.

2° $3x^2 - 10x + 3 = 0$; d'où $x'' = \dfrac{1}{3}$; $x''' = 3$.

§ III. — ÉQUATIONS BINOMES ET ÉQUATIONS TRINOMES.

360. Une équation binôme *est une équation qui peut être ramenée à la forme* $x^m = a$, m étant un nombre entier supérieur à 1.

361. Résolution. — L'équation $x^m = a$ exprime que x est une racine m^e de a. Dès lors (**284**) :

1° *Si* m *est pair et* a *positif*, l'équation a deux solutions, qui sont les deux racines m^{es} de a;

2° *Si* m *est pair et* a *négatif*, l'équation n'a pas de solution;

3° *Si* m *est impair*, l'équation a toujours une solution.

EXEMPLES. — I. *Résoudre l'équation* $x^4 = 5$.

Les solutions sont les deux racines quatrièmes de 5, c'est-à-dire $\pm \sqrt[4]{5}$.

II. *Résoudre l'équation* $x^3 + 1000 = 0$. — On a

$$x^3 = -1000 = -2^3.5^3; \quad \text{d'où} \quad x = -\sqrt[3]{2^3.5^3} = -10.$$

362. Une équation trinôme *est une équation qui peut être ramenée à la forme* $ax^{2m} + bx^m + c = 0$, m étant entier et supérieur à 1.

L'équation bicarrée est une équation trinôme dans laquelle $m = 2$.

363. Résolution. — En posant $x^m = y$, on obtient l'équation $ay^2 + by + c = 0$, qui est *la résolvante* de l'équation trinôme.

On résout cette équation; chaque racine trouvée permet de former une équation binôme que l'on devra résoudre.

EXEMPLE. — *Résoudre l'équation* $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$.

Les racines de la résolvante $y^2 + 7y - 8 = 0$ sont -8 et $+1$.

1° L'équation $x^3 = -8$ donne $x' = -2$.

2° L'équation $x^3 = 1$ donne $x'' = 1$.

Les racines cherchées sont 1 et -2.

§ IV. — ÉQUATIONS IRRATIONNELLES.

364. Théorème. — ***L'équation*** $A^2 = B^2$, ***obtenue en élevant au carré les deux membres de l'équation*** $A = B$, ***est vérifiée par les solutions de l'équation*** $A = B$, ***mais elle peut admettre d'autres solutions.***

En effet :

1° L'équation $A^2 = B^2$ peut s'écrire

$$A^2 - B^2 = 0 \quad \text{ou} \quad (A - B)(A + B) = 0.$$

Donc elle est vérifiée par les solutions de l'équation $A = B$, qui annulent le facteur $A - B$, et par les solutions de l'équation $A = -B$, qui annulent le facteur $A + B$.

2° D'autre part, si l'équation $A = B$ est irrationnelle, l'équation $A^2 = B^2$ peut admettre des solutions qui ne vérifient aucune des équations $A = B$ et $A = -B$, parce qu'elles ne donnent pas une valeur définie à tous les radicaux contenus dans A et B.

365. Résolution des équations irrationnelles. — Nous considérons des équations à une inconnue, ne contenant que des radicaux du second degré.

Par une ou plusieurs élévations au carré, on peut souvent transformer une telle équation en une équation rationnelle qu'on sait résoudre. Mais en vertu du théorème précédent, les élévations au carré peuvent introduire des racines étrangères. On devra exclure ces racines.

Cette exclusion peut se faire en vérifiant si les racines de l'équation rationnelle satisfont à l'équation proposée. Elle peut se faire aussi en appliquant la règle que nous donnerons plus loin (**368**).

366. Exemple I. — Soit à résoudre l'équation

$$\sqrt{x-1} - \sqrt{x^2 - 5x - 6} = 0.$$

Isolons un radical dans chaque membre en vue de faire disparaître les deux radicaux par une seule élévation au carré.

$$\sqrt{x-1} = \sqrt{x^2 - 5x - 6}.$$

Élevons au carré; il vient :

$$x - 1 = x^2 - 5x - 6 \quad \text{ou} \quad x^2 - 6x - 5 = 0.$$

Les racines de cette équation sont $3 \pm \sqrt{14}$. La racine $3 - \sqrt{14}$ ne convient pas, car elle rend négatif le radicand $x - 1$. L'autre racine $3 + \sqrt{14}$ convient; on peut le vérifier en substituant dans l'équation proposée.

367. Exemple II. — Soit à résoudre l'équation

$$2x + \sqrt{6x+6} = 4.$$

Isolons le radical dans le premier membre.

$$\sqrt{6x+6} = 4 - 2x. \tag{1}$$

Élevons au carré; il vient

$$6x + 6 = (4 - 2x)^2 \quad \text{ou} \quad 2x^2 - 11x + 5 = 0.$$

Les racines de cette équation sont 0,5 et 5. La racine 5 ne convient pas, car elle rend négatif le second membre de l'équation (1). La racine 0,5 convient; on peut le vérifier en substituant dans l'équation (1).

368. Règle. — Pour écarter les solutions étrangères, on peut appliquer la règle suivante.

1° *On transforme l'équation proposée en une autre équivalente,* A = B, *dont le premier membre est un radical ou une somme de radicaux.*

2° *On élève ensuite au carré; puis, s'il y a lieu, on reprend les mêmes opérations, de façon à aboutir finalement à une équation rationnelle qu'on résout.*

3° *On exclut les racines de l'équation rationnelle qui rendent négative l'une ou l'autre des expressions placées sous les divers radicaux contenus dans* A *et* B.

4° *On rejette également les solutions qui rendent négatif le second membre de l'équation* A = B; *ou qui rendent négatif le second membre d'une des équations intermédiaires, transformées comme il a été dit au* 1°.

369. Exemple III. — *Résoudre l'équation*

$$\sqrt{4x+1} = 4 - \sqrt{x-1}.$$

Cette équation peut s'écrire

$$\sqrt{4x+1} + \sqrt{x-1} = 4. \qquad (1)$$

Élevant au carré, on trouve

$$5x + 2\sqrt{(4x+1)(x-1)} = 16$$

ou

$$2\sqrt{(4x+1)(x-1)} = 16 - 5x. \qquad (2)$$

Élevons une seconde fois au carré :

$$4(4x+1)(x-1) = (16-5x)^2 \quad \text{ou} \quad 9x^2 - 148x + 260 = 0.$$

Les racines de cette équation sont 2 et $\frac{130}{9}$. La racine $\frac{130}{9}$ ne convient pas, car elle rend négatif le second membre de l'équation (2); l'autre convient.

370. Emploi d'une inconnue auxiliaire. — *Résoudre l'équation*

$$\frac{5\sqrt{x^2-x+2}}{4} = \frac{7-\sqrt{x^2-x+2}}{\sqrt{x^2-x+2}}. \qquad (1)$$

Posons $y = \sqrt{x^2 - x + 2}$. L'équation (1) devient

$$\frac{5y}{4} = \frac{7 - y}{y} \quad \text{ou} \quad 5y^2 + 4y - 28 = 0.$$

Les racines de cette équation sont 2 et $-\frac{14}{5}$. Cette dernière est à écarter, car y représente un nombre positif. Il nous reste donc

$$\sqrt{x^2 - x + 2} = 2 \quad \text{ou} \quad x^2 - x - 2 = 0.$$

De cette dernière équation, on tire $x' = 2$; $x'' = -1$.

EXERCICES

467. (506) Résoudre les équations suivantes :

1° $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
2° $x^4 + 36 = 13x^2$
3° $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$
4° $4x^4 - 73x^2 + 144 = 0$
5° $x^4 + 29x^2 + 100 = 0$
6° $x^4 - 5x^2 = 36$
7° $9x^4 - 40x^2 + 16 = 0$
8° $x^4 + 42 = 13x^2$
9° $x^4 + 9 - 10x^2 = 0$
10° $5x^4 - 7x^2 + 10 = 0$
11° $2x^4 - 14x^2 + 24 = 0$
12° $x^4 + 15x^2 - 16 = 0$
13° $16x^4 - 8a^4x^2 + a^8 = 0$
14° $x^4 + 4abx^2 - (a^2 - b^2)^2 = 0$
15° $a^2x^4 - (1 + a^2b^2)x^2 + b^2 = 0$
16° $x^4 - a(a + b)x^2 + a^3b = 0.$

468. (509) Transformer les radicaux suivants :

1° $\sqrt{6 - \sqrt{20}}$
~~2°~~ $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$
3° $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$
4° $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$
~~5°~~ $\sqrt{5 - \sqrt{21}}$
6° $\sqrt{16 + 2\sqrt{55}}$
7° $\sqrt{\frac{1}{6}(7 + \sqrt{13})}$
8° $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$
9° $\sqrt{28 - 10\sqrt{3}}$
10° $\sqrt{28 + 5\sqrt{12}}$
11° $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$
12° $\sqrt{33 + 20\sqrt{2}}$.

469. (511) Montrer à priori que les racines des équations bicarrées suivantes peuvent être transformées en une somme ou une différence de deux radicaux simples; puis calculer ces racines.

1° $x^4 - 6x^2 + 4 = 0$
2° $3x^4 - 20x^2 + 27 = 0$
3° $3x^4 - 42x^2 + 75 = 0$
4° $2x^4 - 17x^2 + 18 = 0.$

470. (512) Simplifier l'expression $\sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{2}}{17 - 12\sqrt{2}}} - \sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{2}}{17 + 12\sqrt{2}}}$.

Résoudre les équations réciproques suivantes :

471. 1° $6x^3 - 7x^2 - 7x + 6 = 0$ 3° $5x^3 - 31x^2 + 31x - 5 = 0$
(583) 2° $3x^3 + 7x^2 - 7x - 3 = 0$ 4° $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$.

472. 1° $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$ 5° $5x^4 - 26x^3 + 26x - 5 = 0$
(584) 2° $x^4 - 6x^3 + 6x - 1 = 0$ 6° $4x^4 + 8x^3 - 37x^2 + 8x + 4 = 0$
3° $6x^4 - 5x^3 - 13x^2 - 5x + 6 = 0$ 7° $x^4 - x^3 - x + 1 = 0$
4° $x^4 - 5x^3 + 5x - 1 = 0$ 8° $2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0$.

473. 1° $6x^5 - 41x^4 + 97x^3 - 97x^2 + 41x - 6 = 0$
(585) 2° $x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = 0$
3° $x^6 + 8x^5 - 8x^4 + 8x^2 - 8x - 1 = 0$
4° $abx^3 - (a^2 + b^2 - ab)x^2 - (a^2 + b^2 - ab)x + ab = 0$.

474. (586) Résoudre les équations trinômes suivantes :
1° $x^6 - 19x^3 - 216 = 0$ 4° $x^8 - 97x^4 + 1296 = 0$
2° $8x^6 - 63x^3 - 8 = 0$ 5° $x^8 - 626x^4 + 625 = 0$
3° $8x^6 + 65x^3 + 8 = 0$ 6° $x^{10} + 31x^5 - 32 = 0$.

475. (587) Résoudre en faisant usage d'inconnues auxiliaires :

1° $(3x^2 - 5x + 1)^2 - 3x^2 + 5x - \dfrac{21}{16} = 0$

2° $(x^2 - 16)^2 - 2(x^2 - 16) = 8$

3° $x^2 + 3x - \dfrac{20}{x^2 + 3x} = 8$

4° $(x^2 - x + 1)^4 - 10x^2(x^2 - x + 1)^2 + 9x^4 = 0$

5° $\left(\dfrac{a - x}{x - b}\right)^2 = 8\left(\dfrac{a - x}{x - b}\right) - 15$.

Résoudre les équations irrationnelles :

476. 1° $x + \sqrt{5x + 10} = 8$ 4° $x - 2 = \sqrt{x^2 - 3x + 1}$
(588) 2° $\sqrt{169 - x^2} = x - 17$ 5° $\sqrt{2x^2 + 2} = 2x + 2$
3° $x - \sqrt{7 - x} = 3$ 6° $\sqrt{2x^2 - 5x + 7} = 7 + x$.

477. 1° $\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{19 - 3x^2}$ 3° $\sqrt{6x + 1} = \sqrt{7x + 4}$
(589) 2° $\sqrt{2 + \sqrt{x - 5}} = \sqrt{13 - x}$ 4° $\sqrt{1 + \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 1$.

478. 1° $\sqrt{x + 5} - \sqrt{x + 2} = 1$ 4° $\sqrt{x - 2} - \sqrt{x - 14} = 1$
(590) 2° $\sqrt{36 + x} = 2 + \sqrt{x}$ 5° $\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x - 1} = 2$
3° $\sqrt{x - 3} = 3 - \sqrt{x}$ 6° $2\sqrt{3x - 5} - \sqrt{x + 2} = 5$.

479. (591) 1° $\sqrt{2x+9}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x-4}$ 3° $\sqrt{x+6}-\sqrt{7x+4}=\sqrt{x+1}$

2° $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20}=2\sqrt{x+1}$ 4° $\sqrt{2-x}=\sqrt{1-x}+\sqrt{3-x}$.

480. (594) Résoudre en faisant usage d'inconnues auxiliaires :

1° $x^2 + 4x - 6 = 2\sqrt{x^2 + 4x - 3}$

2° $3x^2 - 4x + \sqrt{3x^2 - 4x + 6} = 6$

3° $\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 3 = \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 7}{2\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$

4° $2x - x^2 + \sqrt{6x^2 - 12x + 7} = 0$

5° $2\sqrt{x} - \dfrac{x-8}{\sqrt{x}} = 6$

6° $\dfrac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{2} = \dfrac{12 - \sqrt{x^2 - 5x + 6}}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$

7° $(2x + \sqrt{x})^4 + 4(2x + \sqrt{x})^2 = 5$

8° $(x + \sqrt{x})^4 - (x + \sqrt{x})^2 = 159\,600$.

CHAPITRE XVII

Trinôme du second degré.

§ I. — SIGNE DU TRINOME.

371. Remarque préliminaire. — Nous désignons le trinôme $ax^2 + bx + c$ par y ou par $f(x)$, et sa valeur numérique pour $x = \alpha$ par $f(\alpha)$.

Lorsque le trinôme admet des racines distinctes, nous représenterons la plus grande par x' et l'autre par x''.

372. Théorème. — ***Si le trinôme*** $ax^2 + bx + c$ ***admet deux racines distinctes, il est du signe de*** a ***pour toutes les valeurs***

de x extérieures aux racines; il est du signe contraire pour les valeurs de x intérieures aux racines.

Si le trinôme admet une racine double x', il est toujours du signe de a sauf pour la valeur $x = x'$ qui l'annule.

Si le trinôme n'a pas de racine, il est toujours du signe de a.

1^er^ CAS : $b^2 - 4ac > 0$. — Le trinôme admet deux racines x' et x''.

$-\infty$ .... x'' .... x' .... $+\infty$

Dans ce cas, on peut écrire (**341**)

$$y = a(x - x')(x - x'').$$

1° *Si* x *est plus petit que* x'', il est aussi plus petit que x' et les deux différences $x - x'$ et $x - x''$ sont négatives. Le produit $(x - x')(x - x'')$ est donc positif et y a le signe de a.

2° *Si* x *est compris entre* x' *et* x'', $x - x''$ est positif et $x - x'$ est négatif. Le produit $(x - x')(x - x'')$ est donc négatif et y a un signe contraire à celui de a.

3° *Si* x *est plus grand que* x', il est aussi plus grand que x'' et les deux différences $x - x'$ et $x - x''$ sont positives. Le produit $(x - x')(x - x'')$ est donc positif et y a le signe de a.

2^e^ CAS : $b^2 - 4ac = 0$. — Le trinôme admet une racine double $x' = -\dfrac{b}{2a}$ et on peut écrire (**341**)

$$y = a(x - x')^2.$$

Le second facteur est essentiellement positif, sauf pour la valeur $x = x'$, qui l'annule. Par suite, y a toujours le signe de a, sauf pour $x = x'$.

3^e^ CAS : $b^2 - 4ac < 0$. — Dans ce cas, le trinôme est le produit par a d'une somme de deux carrés. On a

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{k^2}{4a^2}\right],$$

k étant une racine carrée de $4ac - b^2$ (**341**). La somme des deux carrés entre crochets est positive. Donc y a t

REMARQUE. — Voici un autre énoncé du

Le trinôme $ax^2 + bx + c$ est toujours c
quand il a deux racines distinctes et q

valeur comprise entre les deux racines. Il s'annule quand on donne à x une valeur égale à une racine.

373. Conséquences. — I. ***Lorsqu'un nombre α donne au trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ une valeur $f(\alpha)$ de signe contraire à celui de a, le trinôme admet deux racines distinctes et α est compris entre les racines.***

En effet :

1° L*e trinôme a deux racines distinctes,* car s'il avait deux racines égales ou s'il n'avait pas de racine, il ne pourrait pas prendre une valeur de signe contraire à celui de a.

2° L*e nombre α est compris entre les racines,* car s'il était égal à l'une d'elles, le trinôme serait nul; et s'il était extérieur aux racines, le trinôme aurait le signe de a.

II. ***Lorsque deux nombres, α et β, donnent au trinôme des valeurs $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ de signes contraires, il admet deux racines distinctes et l'une d'elles est comprise entre α et β.***

En effet, $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ étant de signes contraires, l'un de ces résultats a le signe de a et l'autre a le signe contraire.

Supposons, par exemple, que $f(\beta)$ ait un signe contraire à celui de a. Le trinôme admet deux racines distinctes et β est compris entre

a le signe de a et α est extérieur aux racines.

hypothèses des deux théorèmes précédents ctivement

< 0 et $f(\alpha) \times f(\beta) < 0$.

— *Reconnaître la position d'un nombre α par une équation du second degré, sans résoudre*

on $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ et calculons $f(\alpha)$. présenter.

— L'équation admet deux racines et α est 3).

- Nous devons d'abord examiner s'il y a des

1° Si $b^2 - 4ac < 0$, l'équation n'a pas de racine et il n'y a pas de classement à faire.

2° Si $b^2 - 4ac = 0$, l'équation admet une racine double et on voit de suite si α est plus grand ou plus petit que cette racine.

3° Si $b^2 - 4ac > 0$, l'équation admet deux racines et α est extérieur aux racines.

$$-\infty \ldots\ldots\ldots\ldots x'' \ldots\ldots\ldots\ldots -\frac{b}{2a} \ldots\ldots\ldots\ldots x' \ldots\ldots\ldots\ldots +\infty$$
$$\text{(I)} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(III)}$$

Pour voir si α se trouve dans l'intervalle (I) ou dans l'intervalle (III), *il suffit de comparer α à la demi-somme des racines.* En effet, celle-ci est comprise entre les racines, car l'inégalité $x'' < x'$ donne

$$2x'' < x' + x'' \quad \text{et} \quad x' + x'' < 2x';$$

et par suite,
$$x'' < \frac{x' + x''}{2} < x'.$$

Donc, si $\alpha < -\frac{b}{2a}$, α est inférieur aux racines; et si $\alpha > -\frac{b}{2a}$, α est supérieur aux racines.

3e Cas : $f(\alpha) = 0$. — Une racine est α; l'autre est $-\frac{b}{a} - \alpha$.

375. Tableau des résultats.

1° $af(\alpha) < 0$; α est compris entre les racines.

$$2^\circ\ af(\alpha) > 0 \begin{cases} b^2 - 4ac \leqslant 0; \text{ pas de racine ou une racine double.} \\ b^2 - 4ac > 0 \begin{cases} \alpha < -\frac{b}{2a};\ \alpha \text{ est inférieur aux racines.} \\ \alpha > -\frac{b}{2a};\ \alpha \text{ est supérieur aux racines.} \end{cases} \end{cases}$$

3° $f(\alpha) = 0$; les racines sont α et $-\frac{b}{a} - \alpha$.

376. Exemple. — *Ranger par ordre de grandeur les nombres* 0, 1, 2 *et les racines de l'équation* $f(x) = 325x^2 - 783x + 287 = 0$.

Comme a est positif, $af(\alpha)$ a le signe de $f(\alpha)$; il suffira donc d'examiner le signe de $f(\alpha)$. On a

$$f(0) = 287; \quad f(1) = -171; \quad f(2) = 21.$$

1° $f(1) = -171 < 0$. Donc l'équation admet deux racines et 1 est compris entre ces racines.

2° $f(0) = 287 > 0$. Donc 0 est extérieur aux racines. Comme le nombre zéro est inférieur au nombre 1, qui est compris entre les racines, zéro sera inférieur aux deux racines.

3° On montre d'une façon analogue que 2 est supérieur aux racines.

On a donc l'ordre

$$0 < x'' < 1 < x' < 2.$$

§ II. — VARIATION DE VALEUR DU TRINOME DU SECOND DEGRÉ.

377. Exemple I. — *Variations et graphique de la fonction* $y = x^2$. — Calculons les valeurs de la fonction qui correspondent à une suite de valeurs de x.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

Ce tableau montre que la fonction décroît quand x croît de $-\infty$ à 0; et qu'elle croît quand x croît de 0 à $+\infty$.

Pour $x = 0$, la fonction s'annule; de plus, pour cette valeur de x, la fonction cesse de décroître pour commencer à croître. On dit que la fonction est *minimum* pour $x = 0$.

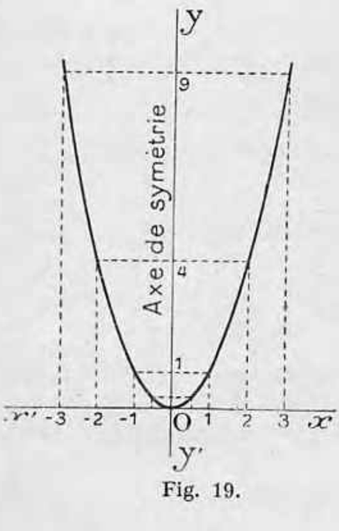


Fig. 19.

Pour construire le graphique de la fonction, on marque quelques-uns de ses points; les coordonnées de ces points sont prises dans le tableau dressé plus haut. On réunit ensuite ces points par une courbe continue.

La courbe ainsi obtenue s'appelle **parabole.** Elle est symétrique par rapport à Oy, car à deux valeurs opposées de x correspond une même valeur de y. La droite Oy est appelée **axe de symétrie** de la parabole. Le point O est son **sommet.**

Remarques. — I. Le graphique de la fonction montre que la fonction $y = x^2$ tend vers $+\infty$

quand x décroît ou croît indéfiniment. On peut donc résumer les variations de la fonction dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	décroît	0	croît	$+\infty$

II. Le graphique met encore en relief la propriété suivante : *Une fonction croît ou décroît suivant que son graphique monte ou descend, de gauche à droite.*

C'est pourquoi nous remplacerons dans les tableaux des variations qui suivent, le mot *décroît* par une flèche *descendante* et le mot *croît* par une flèche *montante.*

378. Exemple II. — *Étudier les variations et construire le graphique de la fonction* $y = -x^2$.

On procède comme dans l'étude précédente et on constate que la fonction admet *un maximum* égal à zéro pour $x = 0$.

379. Définitions. — *Une fonction passe par un* **minimum,** *lorsqu'elle cesse de decroître pour commencer à croître.*

Une fonction passe par un **maximum,** *lorsqu'elle cesse de croître pour commencer à décroître.*

Pour étudier les variations de la fonction $y = ax^2 + bx + c$, nous utiliserons les théorèmes suivants.

380. Théorèmes. — I. ***La fonction*** $f(x) + C$, ***où*** C ***est une constante, varie dans le même sens que la fonction*** $f(x)$.

II. ***Le produit d'une fonction*** $f(x)$ ***par un facteur constant*** C ***varie dans*** *le même sens* ***que la fonction*** $f(x)$ ***si*** C ***est*** *positif* ; ***il varie*** *en sens contraire* ***si*** C ***est*** *négatif.*

III. ***Le carré d'une fonction*** $f(x)$ ***varie dans*** *le même sens* ***que la fonction si*** $f(x)$ ***est*** *positif*; ***il varie*** *en sens contraire* ***si*** $f(x)$ ***est*** *négatif.*

Les démonstrations de ces théorèmes sont analogues. Démontrons *le premier.*

Si, par exemple, la fonction $f(x)$ est croissante, $x_2 > x_1$ entraîne l'inégalité $f(x_2) > f(x_1)$. Or, en ajoutant C aux deux membres de cette inégalité, il vient

$$f(x_2) + C > f(x_1) + C.$$

Donc la fonction $f(x) + C$ est également croissante, car à la plus grande valeur de x correspond toujours la plus grande valeur de la fonction.

381. Applications. — I. *Étudier les variations et construire le graphique de la fonction* $y = -\frac{1}{2}x^2$.

Le théorème II nous permet de dresser le tableau des variations de la fonction.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y = -\frac{1}{2}x^2$	$-\infty$	$\nearrow$	0 *Maximum*	$\searrow$	$-\infty$

Pour pouvoir construire son graphique, calculons les coordonnées de quelques points de ce graphique.

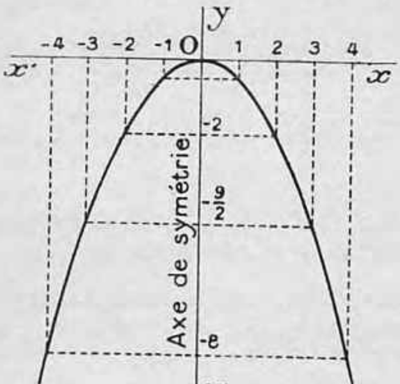


Fig. 20.

$x = 0$; $y = 0$;

$x = \pm 1$; $y = -\frac{1}{2}$;

$x = \pm 2$; $y = -2$;

$x = \pm 3$; $y = -\frac{9}{2}$;

$x = \pm 4$; $y = -8$.

II. *Étudier les variations et construire les graphiques des fonctions :*

$y = x^2 + 2$; $y = 3x^2$;

$y = 3x^2 + 1$; $y = -x^2 + 3$.

On procède comme dans l'exercice précédent. Pour la première fonction on applique le théorème I ; pour la deuxième, le théorème II ; et pour les deux dernières, successivement les théorèmes II et I.

382. Variation de la fonction $y = ax^2 + bx + c$. — Cette fonction peut s'écrire

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \quad \text{et aussi} \quad y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a_2}\right],$$

en ajoutant et en retranchant $\frac{b^2}{4a^2}$ dans la parenthèse. Posons

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad z = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}.$$

1° Étudions d'abord les variations des fonctions $x - \alpha$ et $(x - \alpha)^2$.

Si nous faisons croître x de $-\infty$ à α, le binôme $x - \alpha$ *croît* de $-\infty$ à 0 (**255**); comme il est constamment *négatif*, son carré *décroît* de $+\infty$ à 0 (**380**, III).

Si nous faisons croître x de α à $+\infty$, le binôme $x - \alpha$ *croît* de 0 à $+\infty$; comme il est constamment *positif*, son carré *croît* de 0 à $+\infty$.

2° Nous obtenons z en ajoutant une constante à $(x - \alpha)^2$. Par suite (**380**, I), z varie dans le même sens que $(x - \alpha)^2$ et nous pouvons dresser le tableau des variations de z.

x	$-\infty$		$\alpha = -\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$(x-\alpha)^2 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$
$z = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}$	$+\infty$	↘	$\frac{4ac-b^2}{4a^2}$	↗	$+\infty$

3° Pour obtenir y, il suffit de multiplier z par la constante a, qui peut être positive ou négative.

Si a *est positif*, y varie dans le même sens que z (**380**, II) et on a le tableau :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	↗	$+\infty$
			Minimum		

Si a *est négatif*, y varie en sens contraire de z et on a le tableau :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	↘	$-\infty$
			Maximum		

En résumé, le trinôme du second degré admet un minimum quand a est positif; il admet un maximum quand a est négatif.

Le maximum ou le minimum du trinôme du second degré a lieu pour $x = -\frac{b}{2a}$ et il vaut $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

Le théorème suivant est utile pour la construction du graphique.

383. Théorème. — ***Pour des valeurs de x équidistantes de $-\frac{b}{2a}$, le trinôme prend des valeurs égales.***

En effet, si l'on remplace x dans le trinôme par l'un ou l'autre des deux nombres $-\frac{b}{2a} \pm k$, on trouve dans les deux cas,

$$y = a\left(k^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right).$$

REMARQUE. — On démontre en géométrie analytique que le graphique de la fonction $y = ax^2 + bx + c$ est *une parabole*. Il résulte du théorème précédent que la droite $x = -\frac{b}{2a}$ est *un axe de symétrie* de cette parabole.

384. Applications. — I. *Étudier les variations du trinôme*

$$y = x^2 - 5x + 4.$$

Le coefficient de x^2 est positif. Le trinôme admet donc un *minimum*, qui a lieu pour $x = -\frac{b}{2a} = \frac{5}{2}$; il vaut $\frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{9}{4}$.

Le tableau suivant résume les variations de y.

x	$-\infty$		$2{,}5$		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$-2{,}25$ (*Min.*)	↗	$+\infty$

Les points remarquables du graphique sont le point (2,5, – 2,25) *et les points où il coupe les axes.*

Le point où il coupe Oy *a une abscisse nulle.* On obtient son ordonnée, en faisant $x = 0$ dans la fonction; elle est 4.

Les points où il coupe Ox *ont une ordonnée nulle.* On trouve leurs abscisses, en résolvant l'équation $x^2 - 5x + 4 = 0$. Les abscisses cherchées sont 1 et 4.

Le graphique est une parabole. La droite $x = 2,5$ est son axe de symétrie et le point (2,5 — 2,25) est son sommet.

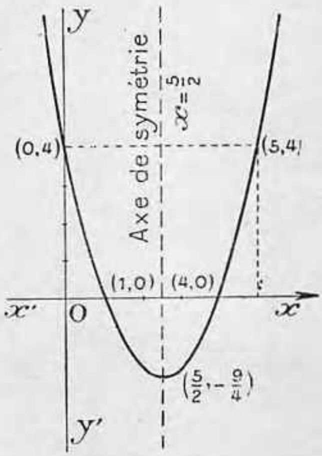


Fig. 21.

II. *Étudier les variations des fonctions suivantes et construire leurs graphiques.*

1° $y = 9x^2 - 6x + 1$.
2° $y = 4x^2 - 5x + 3$.
3° $y = -x^2 + 4x - 3$.
4° $y = -x^2 + 4x - 4$.
5° $y = -x^2 + 6x - 17$.

385. Application géométrique. — *Inscrire un rectangle dans un carré donné et étudier les variations de sa superficie.*

Portons à partir des sommets A et C et dans les deux sens une même longueur variable x. Le quadrilatère A'B'C'D' est un rectangle.

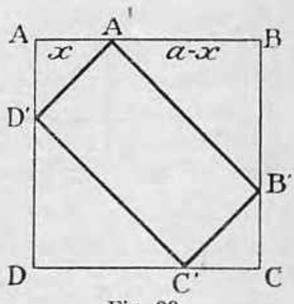


Fig. 22.

Désignons par a le côté du carré et par S la superficie du rectangle. Il vient

$$S = ABCD - 2AA'D' - 2A'BB'$$

$$= AB^2 - AA'^2 - BB'^2 = a^2 - x^2 - (a-x)^2;$$

d'où $\quad S = -2x^2 + 2ax.$

S admet un *maximum* pour $x = \dfrac{-2a}{-4} = \dfrac{a}{2}$ et ce maximum vaut $\dfrac{a^2}{2}$.

Le *rectangle maximum est un carré, qui a pour sommets les milieux des côtés du carré donné.*

Avant de dresser le tableau des variations, *remarquons que* x *ne peut varier que de* 0 *à* a.

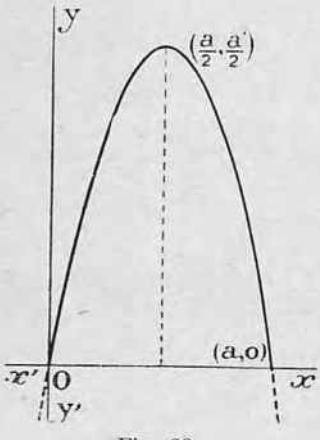


Fig. 23.

x	0		$\frac{a}{2}$		a
S	0	↗	$\frac{a^2}{2}$	↘	0

Maximum

La fig. 23 donne le graphique représentant les variations de l'aire du rectangle inscrit. La partie inutile de la parabole

$$y = -2x^2 + 2ax$$

est indiquée en traits discontinus.

Remarque. — Dans les applications de ce genre, il faut avoir soin de préciser entre quelles limites la variable indépendante doit rester comprise.

386. Résolution graphique de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a comme solutions les racines du trinôme $y = ax^2 + bx + c$. Or les racines du trinôme sont les abscisses des points de la parabole $y = ax^2 + bx + c$ qui ont une ordonnée nulle.

Résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ *revient donc à chercher les abscisses des points où la parabole* $y = ax^2 + bx + c$ *coupe l'axe* Ox *ou est tangente à cet axe.*

Nous allons montrer que par l'examen des diverses positions de la parabole, on peut retrouver les résultats de la discussion de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (**325**).

1er Cas : $a > 0$. — Le trinôme admet un minimum et la concavité de la parabole est tournée vers le haut. Suivant que ce minimum $\frac{4ac - b^2}{4a}$ est négatif, nul ou positif, l'ordonnée du sommet de la

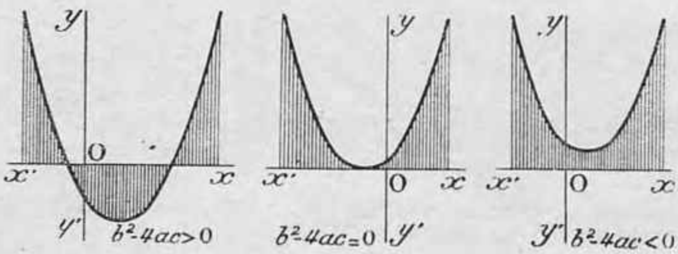


Fig. 24.

parabole est négative, nulle ou positive (Fig. 24). Il en résulte que *la parabole coupe l'axe* Ox *en* 2, 1 *ou* 0 *points selon que le réalisant* $b^2 - 4ac$ *est positif, nul ou négatif.*

2e CAS : $a < 0$. — Le trinôme admet un maximum et la concavité de la courbe est tournée vers le bas. La parabole peut occuper trois positions différentes (Fig. 25) et on retrouve la conclusion du 1er cas.

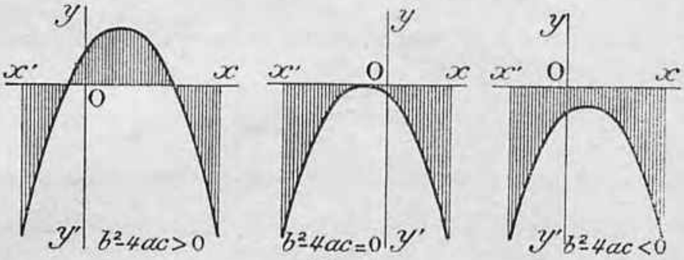


Fig. 25.

REMARQUE. — Les tracés précédents (Fig. 24 et 25) permettent de constater que *le signe du trinôme* est bien celui indiqué par la règle du nº **372**. En effet, les ordonnées des points de la courbe sont du signe de a pour toutes les valeurs de l'abscisse, excepté pour celles comprises entre les racines du trinôme.

EXERCICES

481. (514) Pour quelles valeurs de x les trinômes suivants sont-ils positifs, négatifs ou nuls?

1º $x^2 - 7x + 6$
2º $3x^2 - 5x - 2$
3º $4x^2 - 4x + 1$
4º $2 - x^2$
5º $(x - 3)(2x + 1)$
6º $(2 - 7x)(x + 2)$
7º $- 3x^2 - 3x - 1$
8º $(1 - 3x)^2 - 1$
9º $(5 - x)^2 - 4x^2$
10º $(x - 1)^2 + (x + 1)^2$.

482. (519) Ranger par ordre de grandeur croissante, les nombres $- 1, 0, 3$, et les racines des équations suivantes, sans résoudre celles-ci.

1º $x^2 + 2x - 3 = 0$
2º $x^2 + 2x + 5 = 0$
3º $4x^2 - 4x + 1 = 0$
4º $x^2 - 6x - 7 = 0$
5º $x^2 + 2x + 1 = 0$
6º $x^2 - 6x + 5 = 0$
7º $3x^2 - 13x + 12 = 0$
8º $10x^2 - 11x - 18 = 0$.

483. (520) Sans résoudre les équations suivantes, montrer qu'elles admettent deux racines.

1° $(x-2)(x-1)-5=0$

2° $(x-a)(x-b)=k^2$

3° $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-1}{x+1}=4$

4° $\dfrac{2x}{x-2}-\dfrac{3x-12}{x-3}=1$

5° $(b-x)^2-4(a-x)(c-x)=0$

6° $(x-a)+(x-b)=k(x-a)(x-b)$

7° $\dfrac{(a+b)^2}{c^2(x-a)}+\dfrac{(b+c)^2}{a^2(x-c)}+b=0$

8° $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}+\dfrac{1}{x-c}=0.$

484. (522) Trouver le maximum ou le minimum des fonctions suivantes et construire leur graphique.

1° $y=-2x^2$

2° $y=\dfrac{x^2}{2}$

3° $y=4-x^2$

4° $y=x^2-8x+7$

5° $y=\dfrac{x^2}{2}-3$

6° $y=2x^2-4x+5$

7° $y=-4x^2+16x-7$

8° $y=-\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{2x}{3}-1$

9° $y=9x^2-12x+4.$

485. (523) Trouver la valeur de x qui rend maximum ou minimum les expressions suivantes. Chercher ensuite ce maximum ou ce minimum.

1° $y=(2x-1)^2-5x^2$

2° $y=(x-3)^2+(x+3)^2$

3° $y=(ax+b)^2+(a'x+b')^2.$

4° $y=(ax+b)^2-(a'x+b')^2.$

486. (524) Sachant que $x+y$ est égal à une constante a, trouver le maximum ou le minimum des fonctions :

1° $z=xy$

2° $z=x^2+y^2$

3° $z=(x+y)(x^2+y^2)$

4° $z=x^3+y^3.$

487. (525) Trouver les coefficients p et q du trinôme x^2+px+q :

1° S'il admet pour $x=-2$ un minimum égal à 3;

2° S'il admet 2 pour racine et devient minimum pour $x=\dfrac{5}{4}$;

3° S'il admet 1 pour racine et a un minimum égal à -9.

488. (526) On donne l'équation $2x^2+(a+1)x+a^2-1=0.$

2 1° Quelle valeur faut-il donner à a pour que le produit des racines soit minimum? Trouver ce minimum.

2° Quelle valeur faut-il donner à a pour que la somme des carrés des racines soit maximum? Trouver ce maximum.

489. (527) Déterminer a, b, et c dans les deux cas suivants :

1° Le trinôme ax^2+bx+c admet un maximum égal à 3 pour $x=2$ et il vaut -2 pour $x=-1$.

2° Le trinôme ax^2+bx+c a un minimum égal à -16 pour $x=1$ et la somme des cubes des racines est $\dfrac{38}{3}$.

490. (531) Étudier les variations de l'aire d'un triangle équilatéral inscrit dans un triangle équilatéral donné.

491. (532) On a un rectangle de périmètre constant $4p$. Sur les quatre côtés pris pour diamètres, on décrit des demi-circonférences extérieures au rectangle. Étudier les variations de la surface ainsi formée.

492. (533) Étudier les variations de l'aire d'un carré inscrit dans un carré donné.

493. (534) Les dimensions d'un rectangle sont a et $3a$. A partir de chaque sommet, et dans le même sens, on porte une même longueur x Étudier les variations de l'aire du parallélogramme obtenu en joignant les quatre points ainsi trouvés.

494. (535) Étudier les variations de l'aire d'un rectangle inscrit dans un losange donné.

495. (536) Sur un segment AB donné, on marque un point variable M et on construit trois demi-cercles, situés d'un même côté de AB et ayant respectivement pour diamètres AB, AM, MB.

Étudier les variations de la surface comprise entre les trois demi-circonférences.

496. (537) Sur les segments AM et MB de la question précédente, on construit deux triangles équilatéraux. Étudier les variations de la somme des aires de ces deux triangles.

497. (538) Dans le triangle donné ABC, on inscrit un rectangle dont un côté est parallèle à AB. Étudier les variations de l'aire de ce rectangle.

498. ~~(539)~~ Dans un cercle de rayon R, on inscrit un trapèze isocèle, dont une des bases est un diamètre. Étudier les variations de la longueur de son périmètre.

499. (540) On donne un segment AB de longueur a. Sur AB, on marque un point M et on construit le carré de côté MA et le triangle équilatéral de côté MB. Étudier les variations de la somme de leurs aires.

500. (541) On donne sur une droite deux points A et B, distants de a. On marque sur cette droite un autre point M et on demande d'étudier les variations de la somme $MA^2 + MB^2$.

CHAPITRE XVIII

Inéquations et Applications.

§ I. — INÉQUATIONS.

387. Inéquations du second degré. — *Pour résoudre une inéquation du second degré, on commence toujours par faire passer tous les termes dans le premier membre; puis on applique les résultats de l'étude du signe d'un trinôme du second degré.*

EXEMPLES. — I. *Résoudre l'inéquation* $x^2 - 6x + 5 > 0$.

Le trinôme $x^2 - 6x + 5$ admet deux racines, car le réalisant est $9 - 5$ ou 4. Ces racines sont 1 et 5. D'autre part, le 1er terme du trinôme a un coefficient positif.

Le trinôme $x^2 - 6x + 5$ doit être positif, c'est-à-dire du signe du coefficient de x^2. Il faut donc que x soit extérieur aux racines et on devra avoir

$$x < 1 \quad \text{ou} \quad x > 5.$$

II. *Résoudre l'inéquation* $-2x^2 + 3x > 5$.

Cette inéquation peut s'écrire $-2x^2 + 3x - 5 > 0$. Le 1er membre est un trinôme qui n'admet pas de racine, car $\rho = -31$. Le coefficient du 1er terme est négatif. Par suite, le trinôme $-2x^2 + 3x - 5$ est toujours négatif et l'inéquation n'est vérifiée par aucune valeur de x.

III. *Résoudre l'inéquation* $(3 - x)^2 \leqslant 2(3 - x)$.

Cette inéquation peut s'écrire

$$(3 - x)^2 - 2(3 - x) \leqslant 0 \quad \text{ou} \quad (3 - x)(1 - x) \leqslant 0.$$

Il faut bien se garder d'effectuer le 1er membre. Il représente un trinôme du second degré dont le 1er terme est x^2 et dont les racines sont 1 et 3. Ce trinôme doit être nul ou de signe contraire au coefficient de x^2. Par suite, on devra avoir

$$1 \leqslant x \leqslant 3.$$

388. Inéquations fractionnaires. — *On commence toujours par ramener l'inéquation à l'une des formes* $\frac{A}{B} \gtrless 0$; *puis on multiplie les deux membres par* B^2 *et on résout l'inéquation ainsi obtenue.*

Exemple. — *Résoudre l'inéquation* $\frac{x-3}{x+1} \leqslant 2.$

Cette inéquation peut s'écrire successivement :

$$\frac{x-3}{x+1} - 2 \leqslant 0; \quad \frac{-x-5}{x+1} \leqslant 0; \quad (x+5)(x+1) \geqslant 0.$$

Le 1^{er} membre de cette dernière inéquation est un trinôme du second degré; son 1^{er} terme est x^2 et ses racines sont -5 et -1. L'inéquation proposée est satisfaite quand on a

$$x \leqslant -5 \quad \text{ou} \quad x > -1.$$

Nous avons écarté $x = -1$, car pour cette valeur de x, l'inéquation donnée n'a pas de sens.

389. Inéquations simultanées. — *On résout les diverses inéquations séparément; puis, après avoir classé les valeurs remarquables de* x *par ordre de grandeur croissante, on souligne les solutions de chaque inéquation. On voit ainsi quelles sont les valeurs de* x *qui vérifient à la fois toutes les inéquations.*

Exemple. — *Résoudre le système*

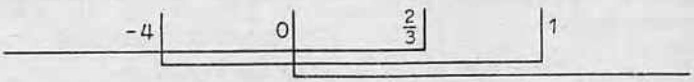
$$2 - 3x \geqslant 0; \quad x^2 + 3x - 4 < 0; \quad \frac{x-5}{x} < 1.$$

1° L'inéquation $2 - 3x \geqslant 0$ est vérifiée quand on a $x \leqslant \frac{2}{3}\cdot$

2° L'inéquation $x^2 + 3x - 4 < 0$ exige $-4 < x < 1$.

3° L'inéq. $\frac{x-5}{x} < 1$ peut s'écrire $\frac{x-5}{x} - 1 < 0$ ou $\frac{-5}{x} < 0$; on voit qu'elle est vérifiée quand on a $x > 0$.

Classons les valeurs remarquables de x et soulignons.



Les trois inéquations sont vérifiées quand on a $0 < x \leqslant \frac{2}{3}\cdot$

§ II. — APPLICATIONS.

390. Les applications suivantes conduisent à une inéquation ou à un système d'inéquations à résoudre.

391. 1re Application : *Trinôme gardant un signe invariable.* — De l'étude du signe d'un trinôme du second degré, il résulte qu'un trinôme ne garde un signe *invariable* que dans le cas où il n'admet *pas de racine*; et *ce signe invariable* est alors celui du coefficient de *son premier terme.*

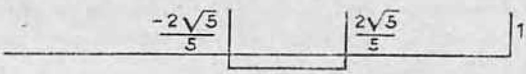
Exemples. — I. *Déterminer* m *pour avoir, quel que soit* x,

$$(m-1)x^2 + mx - (m+1) < 0.$$

On doit avoir :

1° $m - 1 < 0$ ou $m < 1$.

2° $m^2 + 4(m^2 - 1) = 5m^2 - 4 < 0$ ou $-\frac{2}{5}\sqrt{5} < m < \frac{2}{5}\sqrt{5}$.



Les valeurs de m qui conviennent sont $-\frac{2}{5}\sqrt{5} < m < \frac{2}{5}\sqrt{5}$.

II. *Montrer qu'on a* $a^2 + b^2 > ab$, *sauf quand* $a = b = 0$.

Cette inégalité peut s'écrire $a^2 - ab + b^2 > 0$. Le 1er membre peut être considéré comme un trinôme du second degré en a. Le coefficient de son 1er terme est positif et son réalisant est égal à $-3b^2$, qui est négatif quand $b \neq 0$.

Si $b \neq 0$, le trinôme est donc toujours positif. Si $b = 0$, le trinôme se réduit à a^2 et il est positif ou nul, suivant qu'on a $a \neq 0$ ou $a = 0$.

On montrerait de même que $a^2 + ab + b^2 > 0$, *sauf quand* $a = b = 0$.

392. 2e Application : *Nombre et signes des racines d'une équation du second degré.*

Exemples. — I. *Déterminer* m, *pour que l'équation*

$$x^2 - 2(m-1)x + m - 1 = 0$$

admette deux racines distinctes.

On doit avoir

$$\rho = (m-1)^2 - (m-1) = (m-1)(m-2) > 0.$$

Cette inégalité est vérifiée quand on a $m < 1$ ou $m > 2$.

II. *Trouver les valeurs que doit prendre* m, *pour que l'équation*

$$mx^2 + (m-1)x + m - 2 = 0$$

admette deux racines négatives, égales ou inégales.

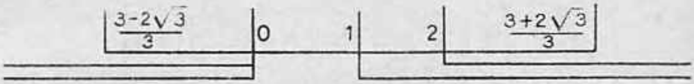
On doit avoir (**338**) :

1° $\rho = (m-1)^2 - 4m(m-2) = -3m^2 + 6m + 1 \geqslant 0$

ou $$\frac{3-\sqrt{12}}{3} \leqslant m \leqslant \frac{3+\sqrt{12}}{3}.$$

2° $P = \dfrac{m-2}{m} > 0$ ou $m(m-2) > 0$, ce qui exige $m < 0$ ou $m > 2$.

3° $S = \dfrac{1-m}{m} < 0$ ou $m(1-m) < 0$, ce qui exige $m < 0$ ou $m > 1$.



Les valeurs de m qui conviennent sont

$$\frac{3-2\sqrt{3}}{3} \leqslant m < 0; \quad 2 < m \leqslant \frac{3+2\sqrt{3}}{3}.$$

393. 3e Application : *Positions d'un nombre α par rapport aux racines d'une équation du second degré.*

L'étude faite au n° **374** conduit aux propositions suivantes :

L'équation du second degré $f(x) = 0$ admet deux racines, et

1° ***α est inférieur aux deux racines, si on a :***

$$b^2 - 4ac > 0; \qquad af(\alpha) > 0; \qquad \alpha < \frac{S}{2}.$$

2° ***α est compris entre les racines, si on a :***

$$af(\alpha) < 0.$$

3° ***α est supérieur aux deux racines, si on a :***

$$b^2 - 4ac > 0; \qquad af(\alpha) > 0; \qquad \alpha > \frac{S}{2}.$$

EXEMPLE. — *Déterminer les valeurs que doit prendre* m, *pour que* 1 *soit inférieur aux racines de l'équation* $x^2 - 2(m-1)x + 4m - 7 = 0$.

On doit avoir :

1° $\rho = (m-1)^2 - (4m-7) = m^2 - 6m + 8 > 0$, ce qui exige $m < 2$ ou $m > 4$.

2° $af(1) = 2m - 4 > 0$ ou $m > 2$.

3° $1 < m - 1$ ou $m > 2$.

On voit que m doit être supérieur à 4.

394. 4e Application : *Positions de deux nombres* α *et* β *par rapport aux racines d'une équation du second degré.*

Les nombres α et β peuvent occuper six positions remarquables par rapport aux racines de l'équation $f(x) = 0$. Nous supposerons que α désigne le plus petit des deux nombres donnés.

1° α et β *sont inférieurs aux deux racines.* — Il suffit pour cela que β soit inférieur aux racines ou que l'on ait :

$$b^2 - 4ac > 0; \qquad af(\beta) > 0; \qquad \beta < \frac{S}{2}.$$

2° α et β *séparent la plus petite racine.* — Il suffit d'avoir :

$$af(\alpha) > 0; \quad af(\beta) < 0.$$

En effet, l'inégalité $af(\beta) < 0$ indique que l'équation admet deux racines et que β est compris entre ces racines. L'inégalité $af(\alpha) > 0$ indique que α est extérieur aux racines; mais α est inférieur à β, qui est compris entre les deux racines; donc α est inférieur aux racines.

3° α et β *comprennent les deux racines.* — On voit facilement qu'il suffit d'avoir :

$$b^2 - 4ac > 0; \; af(\alpha) > 0; \; af(\beta) > 0; \; \alpha < \frac{S}{2}; \; \beta > \frac{S}{2}.$$

4° α et β *sont compris entre les racines.* — Il suffit d'avoir :

$$af(\alpha) < 0; \quad af(\beta) < 0.$$

5° α et β *séparent la plus grande racine.* — Il suffit d'avoir :

$$af(\alpha) < 0; \quad af(\beta) > 0.$$

6° α et β *sont supérieurs aux deux racines.* — Il suffit pour cela que α soit supérieur aux racines ou que l'on ait :

$$b^2 - 4ac > 0; \qquad af(\alpha) > 0; \qquad \alpha > \frac{S}{2}.$$

REMARQUE. — La relation

$$f(\alpha) \times f(\beta) < 0$$

exprime que l'équation $f(x) = 0$ a deux racines dont *une seule est comprise entre* α *et* β.

EXEMPLE. — *Déterminer* m *pour que l'équation*

$$f(x) = x^2 - 2mx + m - 3 = 0$$

ait deux racines comprises entre -2 *et* 3.

On doit avoir :

1° $\rho = m^2 - m + 3 > 0$, condition toujours réalisée.

2° $f(-2) = 5m + 1 > 0$ ou $m > -0{,}2$.

3° $f(3) = -5m + 6 > 0$ ou $m < 1{,}2$.

4° $-2 < m < 3$.

En résumé, on doit avoir $-0{,}2 < m < 1{,}2$.

§ III. — GÉNÉRALISATION DES APPLICATIONS PRÉCÉDENTES.

395. Les problèmes suivants demandent l'étude du signe de deux ou de plusieurs fonctions. Nous résumerons chaque fois cette étude dans un tableau.

396. 1re Application. — *Étant donnée l'équation*

$$(69 + 4m)x^2 - 15(9 - m)x + 25(4 - m) = 0,$$

déterminer le nombre et le signe des racines quand m *croît de* $-\infty$ *à* $+\infty$.

Nous devons étudier le signe du réalisant, de la somme et du produit.

1° $\rho = 225(9-m)^2 - 100(69 + 4m)(4 - m) = 625(m^2 + 2m - 15)$.

C'est un trinôme du second degré en m. Le coefficient de son 1er terme est positif et ses racines sont -5 et 3.

2° Le produit $$P = \frac{25(4 - m)}{69 + 4m}$$

a le même signe que le trinôme $(69 + 4m)(4 - m)$; le coefficient du 1er terme de ce trinôme est négatif et ses racines sont $-\frac{69}{4}$ et 4.

3° La somme $$S = \frac{15(9 - m)}{69 + 4m}$$

a le même signe que le trinôme $(69 + 4m)(9 - m)$; le coefficient du 1er terme de ce trinôme est négatif et ses racines sont $- 17,25$ et 9.

A remarquer que S et P n'ont pas de valeur quand $m = - 17,25$.

m	ρ	P	S	CONCLUSIONS
	+	−	−	Racines de signes contraires; $\lvert x'' \rvert > x'$;
$-\frac{69}{4}$				Équation du 1er degré; $x = \frac{85}{63}$;
	+	+	+	Racines positives ;
-5	0	+	+	Une racine double positive; $x' = x'' = \frac{15}{7}$;
	−	+	+	Pas de racine ;
3	0	+	+	Une racine double positive; $x' = x'' = \frac{5}{9}$;
	+	+	+	Racines positives ;
4	+	0	+	$x'' = 0$; $x' = \frac{15}{17}$;
	+	−	+	Racines de signes contraires ; $\lvert x'' \rvert < x'$;
9	+	−	0	Deux racines opposées ; $x = \pm \frac{5}{21}\sqrt{21}$;
	+	−	−	Racines de signes contraires; $\lvert x'' \rvert > x'$.

Dans la 1re colonne sont marquées les valeurs remarquables de m, rangées par ordre de grandeur croissante. Pour remplir les trois colonnes suivantes, on marque d'abord les zéros en face des racines de ρ, de P et de S; puis les signes voulus dans les divers intervalles.

397. 2e Application. — *Comparer au nombre* 1 *les racines de l'équation*

$$f(x) = (m + 1)x^2 + (2m + 1)x + m - 2 = 0.$$

Les applications précédemment traitées (**393**) montrent qu'il faut étudier le signe des expressions ρ, $af(1)$ et $1 - \frac{S}{2}$.

Lorsque $1 - \frac{S}{2} > 0$, on a $1 > \frac{S}{2}$ et le nombre 1 est supérieur aux racines pourvu qu'on sache déjà qu'il leur est extérieur.

De même, $1 - \frac{S}{2} < 0$ indique que le nombre 1 est inférieur aux racines s'il n'est pas compris entre elles.

On a :

1° $\rho = (2m + 1)^2 - 4(m + 1)(m - 2) = 8m + 9$.

La racine de ce binôme est $-\frac{9}{8}$.

2° $af(1) = (m + 1)4m$. Les racines de ce trinôme sont -1 et 0.

3° $1 - \frac{S}{2} = 1 + \frac{2m+1}{2(m+1)} = \frac{4m+3}{2(m+1)}$.

Cette fraction a le même signe que le produit $(m + 1)(4m + 3)$ dont les racines sont -1 et $-\frac{3}{4}$.

m	ρ	$af(1)$	$1 - \frac{S}{2}$	CONCLUSIONS
	$-$	$+$	$+$	Pas de racine.
$-\frac{9}{8}$	0	$+$	$+$	$x'' = x' < 1$.
	$+$	$+$	$+$	$x'' < x' < 1$.
-1				Équation du 1er degré ; $x = -3 < 1$.
	$+$	$-$	$-$	
$-\frac{3}{4}$	$+$	$-$	0	$x'' < 1 < x'$.
	$+$	$-$	$+$	
0	$+$	0	$+$	$x'' < x' = 1$.
	$+$	$+$	$+$	$x'' < x' < 1$.

398. 3e Application. — *On donne l'équation*

$$f(x) = x^2 - 2mx - m + 2 = 0,$$

et on demande de comparer ses racines aux nombres -2 *et* 2.

On a :

1° $\rho = m^2 + m - 2$; les racines sont -2 et 1.

2° $af(-2) = f(-2) = 3m + 6$; la racine est -2.

3° $-2-\frac{S}{2} = -m-2$; la racine est -2.

4° $af(2) = f(2) = -5m+6$; la racine est 1,2.

5° $2-\frac{S}{2} = -m+2$; la racine est 2.

m	ρ	$f(-2)$	$-2-\frac{S}{2}$	$f(2)$	$2-\frac{S}{2}$	CONCLUSIONS
	+	−	+	+	+	$x'' < -2 < x' < 2.$
-2	0	0	0	+	+	$x'' = x' = -2 < 2.$
	−	+	−	+	+	Pas de racine.
1	0	+	−	+	+	$-2 < x'' = x' = 1 < 2.$
	+	+	−	+	+	$-2 < x'' < x' < 2.$
1,2	+	+	−	0	+	$-2 < x'' < x' = 2.$
	+	+	−	−	+	
2	+	+	−	−	0	$-2 < x'' < 2 < x'.$
	+	+	−	−	−	

EXERCICES

501. (542) Résoudre les inéquations suivantes :

1° $x^2+2x-15>0$ 6° $x^2-10>3x$ 11° $x^2>3x$
2° $x^2-5x+4<0$ 7° $-x^2<x-12$ 12° $100>x^2$
3° $-2x^2+3x+2>0$ 8° $x^2+7>3x$ 13° $x(x+2)<3x$
4° $-3x^2+7x-2<0$ 9° $x^2<8-7x$ 14° $3x(x-3)>5(x-3)$
5° $x^2+31x+150>0$ 10° $x^2<4$ 15° $(2-x)(4x-5)<0.$

Les résultats de ces quinze exercices peuvent être vérifiés graphiquement.

502. (543 *bis*)
1° $\frac{x-3}{x+2}<0$ 4° $\frac{1}{4x^2-x-3}<0$ 7° $\frac{2}{2x-3}<\frac{1}{x}$
2° $\frac{x+5}{5-x}>0$ 5° $\frac{2x+1}{x-3}\geqslant 1$ 8° $\frac{x^2+1}{x^2-2x-3}>0$
3° $\frac{3x+1}{3-x}\geqslant 0$ 6° $\frac{x}{2x+3}>\frac{1}{2}$ 9° $\frac{x-1}{x^2-2x-8}<0.$

503. (546) Résoudre les systèmes suivants :

1° $x^2 + 3x - 10 < 0$; $5x^2 - 2x - 3 > 0$

2° $x^2 < 9$; $x^2 - 16 > 4(x - 4)$

3° $(x + 1)(x^2 + 2x - 1) > 0$; $-(x + 1)(x^2 + x - 2) < 0$

4° $2x^2 - 5x - 3 > 0$; $x^2 - 3x - 4 < 0$; $x^2 - 1 > 0$

5° $\dfrac{12x - 32}{x} < x < \dfrac{11x - 10}{x}$.

504. (547) Quelles valeurs faut-il donner à x pour que $x^2 - 8x + 20$ reste compris entre 5 et 8? Vérification graphique.

505. (548) Quelles valeurs faut-il donner à x pour que $x^2 - 7x + 10$ reste compris entre -2 et 4? Vérification graphique.

506. (550) Déterminer m pour que les inéquations suivantes soient vérifiées pour toutes les valeurs de x.

1° $mx^2 + (m - 1)x + m - 1 < 0$

2° $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 3(m - 1) < 0$

3° $(m - 1)x^2 - 4mx - 2(m + 2) \leqslant 0$

4° $(m - 2)x^2 + 2(2m - 3)x + 5m - 6 > 0$.

507. (554) Dans l'équation $(m - 2)x^2 - 2x(m + 1) + 2m + 1 = 0$, déterminer m pour que les deux racines soient positives.

508. (555) Déterminer m pour que les équations suivantes admettent deux racines négatives.

1° $mx^2 + 2x(m - 1) - (m + 1) = 0$

2° $(m - 2)x^2 + 2x(m - 2) + 4m - 7 = 0$

3° $(m - 3)x^2 + x(m - 1) + m + 2 = 0$.

509. (556) Dans l'équation $(m - 6)x^2 - 4(m - 1)x + m - 3 = 0$, déterminer m pour que les racines soient de signes contraires.

510. (557) Dans l'équation $(3m - 4)x^2 - x(2m + 1) - (3m + 1) = 0$, déterminer m pour que les racines soient de signes contraires, la négative ayant la plus grande valeur absolue.

511. (559) Déterminer m si l'éq. $(m - 1)x^4 - 2mx^2 + m - 2 = 0$ admet quatre racines.

512. (560) Déterminer m si l'équation $(3m - 1)x^4 - x^2(2m + 1) + m = 0$ n'admet pas de racine.

513. (562) On donne les équations suivantes et on demande de déterminer m pour que leurs racines et un nombre donné soient rangés dans l'ordre indiqué.

1° $(2m-1)x^2 - x(m+2) + 2m = 0$ $\quad 0 < x'' < x'$
2° $(m-2)x^2 - 2x(m+1) + 2m + 1 = 0$ $\quad 0 < x'' < x'$
3° $mx^2 + (m-1)x + m^2 + 2 = 0$ $\quad x'' < -3 < x'$
4° $(m-1)x^2 + (m+1)x + m - 1 = 0$ $\quad x'' < x' < 5.$

514. (563) On donne les équations suivantes et on demande de déterminer m pour que leurs racines et deux nombres donnés soient rangés dans l'ordre indiqué.

1° $(m-6)x^2 - x(m-3) + 2m - 11 = 0$ $\quad x'' < 0 < x' < 4$
2° $x^2(m+4) - 2x(3m+10) + 3(3m+4) = 0$ $\quad 0 < x'' < x' < 4$
3° $mx^2 + 2mx + m - 4 = 0$ $\quad -6 < x'' < 0 < x'$
4° $(2m-3)x^2 + (m-1)x - 2(m-1) = 0$ $\quad -5 < x'' < x' < 4.$

515. (564) Dans l'équation $mx^2 - (2m+1)x + 2(m-1) = 0$, déterminer m pour que les racines soient positives et inférieures à 3.

516. (565) Dans l'équation $(2m-3)x^2 - x(3m+4) + 4m + 1 = 0$, déterminer m pour que les nombres 0 et 5 comprennent une racine et une seule.

517. (567) L'équation $(m+1)x^2 - 3(m-1)x + 4 = 0$ admet une racine inférieure à 1 et l'autre comprise entre 2 et 3; déterminer m.

518. (568) Combien, suivant les valeurs de m, l'équation

$$(m+3)x^2 + (2m+3)x + m + 5 = 0$$

admet-elle de racines négatives?

519. (569) Combien l'équation $(m+1)x^2 + 3mx - 1 = 0$ admet-elle de racines supérieures à 2, suivant les valeurs de m?

520. (576) Discuter le nombre et les signes des racines des équations suivantes :

1° $(m-6)x^2 - 4x(m-1) + m - 3 = 0$
2° $(m-2)x^2 + 2x(m-3) + 5m - 6 = 0$
3° $(m-1)x^2 + 2x(2m-3) + 4m - 5 = 0$
4° $x^2 - 2x(m-1) + 3m^2 - 4m + 1 = 0$
5° $(m^2 + m - 2)x^2 + 2x(m+1) - (m+1) = 0.$

521. (578) Comparer le nombre 1 aux racines des équations suivantes :

1° $mx^2 + 7x + 1 = 0$ $\quad$ 3° $(3-2m)x^2 + 2mx + 2(3+2m) = 0$
2° $x^2 - (2m+1)x - 2m^2 = 0$ $\quad$ 4° $(m^2-1)x^2 + 2m(x+1) = 0.$

522. (579) Classer les nombres 0 et 1 par rapport aux racines des équations suivantes :

$$1^\circ \ (m+1)x^2 - x(m-5) + m - 1 = 0$$
$$2^\circ \ (m-4)x^2 - 2x(m-2) + m - 3 = 0.$$

CHAPITRE XIX

Équations simultanées d'un degré supérieur au premier.

399. *Pour résoudre un système dont toutes les équations ne sont pas du premier degré*, on peut procéder par élimination, en employant l'une ou l'autre des trois méthodes qui nous ont servi pour résoudre les systèmes d'équations du 1er degré. Seulement, ce procédé n'est pas toujours applicable et, quand il est applicable, il conduit souvent à une équation à une inconnue d'un degré supérieur au second, qui, pour l'ordinaire, ne peut être résolue par les méthodes élémentaires.

Beaucoup de systèmes du second degré ou d'un degré supérieur au second peuvent être résolus en déduisant des équations données les valeurs de deux quantités choisies parmi les trois suivantes :

$$x + y; \qquad xy; \qquad x - y.$$

Nous allons montrer, en effet, que deux de ces quantités étant connues, on peut trouver x et y.

400. Systèmes particuliers. — I. *Résoudre le système*

$$x + y = a; \quad xy = b.$$

Ces équations expriment que x et y sont les racines de l'équation

$$z^2 - az + b = 0.$$

Si $a^2 - 4b > 0$, cette équation a deux racines :

$$z' = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad \text{et} \quad z'' = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Le système a deux solutions $x = z', y = z''$ et $x = z'', y = z'$.

Si $a^2 - 4b = 0$, on trouve $x = y = \frac{a}{2}$.

II. *Résoudre le système*

$$x + y = a; \quad x - y = b.$$

Il admet une solution unique : $x = \frac{a+b}{2}$; $y = \frac{a-b}{2}$.

III. *Résoudre le système*

$$x - y = a; \ (1) \quad xy = b. \ (2)$$

Posons $z = -y$. Le système devient

$$x + z = a; \quad xz = -b. \tag{3}$$

Par suite, x et z sont les racines de l'équation $X^2 - aX - b = 0$.

Si $a^2 + 4b > 0$, cette équation a deux racines

$$X' = \frac{a + \sqrt{a^2+4b}}{2} \quad \text{et} \quad X'' = \frac{a - \sqrt{a^2+4b}}{2}.$$

Les solutions du système (3) sont

$$x = X', \ z = X'' \quad \text{et} \quad x = X'', \ z = X'.$$

Celles du système proposé sont donc

$$x = X', \quad y = -X'' \quad \text{et} \quad x = X'', \quad y = -X'.$$

Si $a^2 + 4b = 0$, on trouve $x = \frac{a}{2}$, $y = -\frac{a}{2}$.

Remarques. — I. Pour résoudre le système précédent, on pourrait employer la méthode de substitution, en remplaçant y dans (2) par sa valeur tirée de (1).

II. *Un système est* **symétrique** *en* x *et* y, *quand il ne change pas si l'on y permute ces deux inconnues.*

On résout d'ordinaire les systèmes symétriques en les ramenant au premier des trois systèmes qu'on vient de résoudre et qui est lui-même un système symétrique.

401. Systèmes de deux équations à deux inconnues.

I. *Résoudre le système symétrique en* x *et* y

$$x + y = 3; \quad x^2 + y^2 = 29.$$

La deuxième équation peut s'écrire successivement

$$(x + y)^2 - 2xy = 29; \quad 9 - 2xy = 29; \quad xy = -10.$$

Par suite, x et y sont les racines de l'équation

$$X^2 - 3X - 10 = 0.$$

Le système admet deux solutions :

$$x' = 5, \quad y' = -2; \quad x'' = -2, \quad y'' = 5.$$

II. *Résoudre le système* $x^2 + y^2 = 17$; $xy = 4$.

Additionnons ces deux équations membre à membre, après avoir multiplié les deux membres de la deuxième équation par $+ 2$; puis, par $- 2$. Nous obtenons ainsi le système équivalent

$$\begin{cases} (x + y)^2 = 25; \\ (x - y)^2 = 9; \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x + y = \pm 5; \\ x - y = \pm 3. \end{cases}$$

Les doubles signes sont indépendants l'un de l'autre. Le dernier système comprend en réalité quatre systèmes de deux équations du 1er degré à deux inconnues. On peut les résoudre en une fois et on trouve :

$$x = \frac{1}{2}(\pm 5 \pm 3); \quad y = \frac{1}{2}(\pm 5 \mp 3).$$

Les signes semblablement placés dans les valeurs de x et de y se correspondent. Si on prend, par exemple, les deux signes supérieurs, $+$ et $+$, dans l'expression de x, il faut prendre de même les signes supérieurs, $+$ et $-$, dans l'expression de y. Les solutions détaillées du système sont :

$$x_1 = 4, \quad y_1 = 1; \quad x_2 = 1, \quad y_2 = 4;$$
$$x_3 = -1, \quad y_3 = -4; \quad x_4 = -4, \quad y_4 = -1.$$

III. *Résoudre le système symétrique en* x *et* y

$$2(x + y) + x^2 + y^2 = 2; \quad xy + x^2 + y^2 = 13.$$

Prenons comme inconnues la somme $z = x + y$ et le produit $u = xy$.

Le système devient

$$2z + z^2 - 2u = 2; \quad z^2 - u = 13.$$

En éliminant u, on obtient l'équation $z^2 - 2z - 24 = 0$, qui donne

$$z' = 6; \quad z'' = -4.$$

Les valeurs correspondantes de u sont $u' = 23$; $u'' = 3$.

1° Si $z = 6$ et $u = 23$, x et y sont les racines de l'équation

$$X^2 - 6X + 23 = 0.$$

Cette équation est impossible, car son réalisant est négatif.

2° Si $z = -4$ et $u = 3$, x et y sont les racines de l'équation

$$X^2 + 4X + 3 = 0,$$

qui donne les deux solutions du système :

$$x' = -3, \quad y' = -1; \quad x'' = -1, \quad y'' = -3.$$

402. Systèmes d'un degré supérieur au second.

I. *Résoudre le système* $x^5 + y^5 = 242$; $x + y = 2$.

La première équation peut s'écrire

$$(x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) = 242.$$

Remplaçons $x + y$ par 2 et divisons les deux membres par ce nombre,

$$x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 = 121. \quad (1)$$

Cette équation est symétrique en x et y. Calculons les différentes parties du 1er membre en fonction de $x + y$, que nous remplaçons par 2, et de xy, que nous poserons égal à z. On a

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (4 - 2z)^2 - 2z^2 = 16 - 16z + 2z^2;$$

$$x^3y + xy^3 = xy(x^2 + y^2) = z(4 - 2z) = 4z - 2z^2.$$

L'équation (1) devient après substitution $z^2 - 4z - 21 = 0$ et on a $z = -3$ ou 7.

1° Si $z = -3$, x et y sont les racines de $X^2 - 2X - 3 = 0$. On trouve ainsi les deux solutions

$$x' = -1, \quad y' = 3; \quad x'' = 3, \quad y'' = -1.$$

2° Si $z = 7$, on a l'équation $X^2 - 2X + 7 = 0$ qui n'a pas de racine, car son réalisant est négatif.

II. *Résoudre le système* $x^2 + y^2 - xy = 19$; $x^4 + y^4 - x^2y^2 = 61$.

Prenons comme inconnues les quantités $x^2 + y^2 = z$ et $xy = u$. Les équations du système deviennent

$$z - u = 19; \quad z^2 - 3u^2 = 61.$$

On a ainsi un système du second degré, renfermant une équation du 1er degré. En éliminant z, on obtient le système équivalent

$$z = u + 19; \quad u^2 - 19u - 150 = 0.$$

Ses solutions sont :

$$z' = 44, \quad u' = 25; \quad z'' = 13, \quad u'' = -6.$$

1° $z = 44$, $u = 25$. — On a le système

$$x^2 + y^2 = 44, \quad xy = 25,$$

qui donne $\quad (x + y)^2 = 94 \quad$ et $\quad (x - y)^2 = -6.$

On voit qu'il est impossible.

2° $z = 13$, $u = -6$. — On a le système

$$x^2 + y^2 = 13, \quad xy = -6,$$

qui donne $\quad (x + y)^2 = 1 \quad$ et $\quad (x - y)^2 = 25.$

Par suite, $\quad x + y = \pm 1; \quad x - y = \pm 5.$

Les doubles signes sont indépendants l'un de l'autre; par suite, le système admet quatre solutions, qui sont :

$$x_1 = 3, \quad y_1 = -2; \quad x_2 = -3, \quad y_2 = 2;$$
$$x_3 = -2, \quad y_3 = 3; \quad x_4 = 2, \quad y_4 = -3.$$

403. Équations simultanées à plus de deux inconnues.

I. En se servant *des artifices de calcul* précédemment étudiés, on peut souvent éliminer des inconnues et aboutir à une équation à une seule inconnue. Soit à résoudre le système

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14; \tag{1}$$
$$x + y + z = 6; \tag{2}$$
$$xy = 6. \tag{3}$$

Les équations (2) et (3) permettent de calculer $x^2 + y^2$ en fonction de z. On trouve

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = (6 - z)^2 - 12.$$

En substituant dans (1), on obtient l'équation $z^2 - 6z + 5 = 0$, dont les racines sont $z' = 5$; $z'' = 1$.

1° $z = 5$. — Les équations (2) et (3) donnent :

$$x + y = 1; \quad xy = 6.$$

L'équation correspondante $X^2 - X + 6 = 0$ n'a pas de racine.

2° $z = 1$. — On trouve $x + y = 5$; $xy = 6$, et on peut former l'équation $X^2 - 5X + 6 = 0$, ayant pour racines 2 et 3. Les solutions du système proposé sont :

$$x' = 2, \quad y' = 3, \quad z' = 1; \quad x'' = 3, \quad y'' = 2, \quad z'' = 1.$$

II. Il existe encore *d'autres artifices de calcul* que l'habitude du calcul fait découvrir. Voici un exemple très simple. Soit à résoudre le système

$$x(x + y + z) = 2; \qquad (1)$$
$$y(x + y + z) = -4; \qquad (2)$$
$$z(x + y + z) = 6. \qquad (3)$$

En ajoutant ces équations membre à membre, on trouve

$$(x + y + z)(x + y + z) = 4 \quad \text{ou} \quad x + y + z = \pm 2.$$

En remplaçant $x + y + z$ dans les équations (1), (2), (3), on trouve

$$x = \pm 1; \quad y = \mp 2; \quad z = \pm 3.$$

Les signes supérieurs sont en correspondance ainsi que les signes inférieurs. Le système admet donc deux solutions.

EXERCICES

Résoudre les systèmes suivants :

523. (598)
1° $x^2 + y^2 = 585$, $x = 8y$
2° $x^2 + 2y^2 = 297$, $x - y = 5$
3° $x + y = 13$, $(x + 3)(y + 10) = 120$
4° $x + y = 11$, $(x + 9)(y + 2) = 72$.

524. (599)
1° $x^2 + y^2 + 8y - 6x - 1 = 0$; $3x - 2y = 4$.
2° $x^2 + y^2 + xy + y - x - 18 = 0$; $3x - 2y = 5$.
3° $x^2 - y^2 + 2xy + 3x + y - 6 = 0$; $5x - 4y + 3 = 0$.
4° $2x^2 - y^2 + 3x + 2y + 2xy + 6 = 0$; $2x + 3y = 2$.

525. (600)
1° $x^2 + 2y^2 = 43$, $x^2 - y^2 = 16$
2° $3xy - 4x = 6$, $x^2 + 9xy = 63$
3° $2xy - 3y - 3 = 0$, $y^2 - 4xy + 15 = 0$
4° $x^2 + y^2 + x + y = 62$, $x^2 - y^2 + x - y = 50$.

526. (601)
1° $x - y = 7$, $xy = 30$
2° $x + y = 15$, $x^2 + y^2 = 125$
3° $x - y = 10$, $x^2 + y^2 = 148$
4° $x + y = 16$, $x^2 - y^2 = 128$
5° $x - y = 7$, $x^2 - y^2 = 161$
6° $x^2 + y^2 = 100$, $xy = 48$
7° $x^2 - y^2 = 48$, $xy = 32$
8° $x^2 - y^2 = 48$, $x^2 + y^2 = 80$.

527. (602)

1° $x + y = 12$
$x^2 + xy + y^2 = 109$

2° $x - y = 7$
$x^2 + xy + y^2 = 139$

3° $x^2 + xy + y^2 = 13$
$(x + y)^2 + (x - y)^2 = 34$

4° $x^2 + y^2 - (x + y) = 48$
$x + y + xy = 31$

5° $x^2 + y^2 + 3xy = 40$
$x + y + 2xy = 14$

6° $x(x + y) + y(x - y) = 158$
$7x(x + y) = 72y(x - y)$.

528. (603)

1° $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{5}{6}$
$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{97}{36}$

2° $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -\frac{29}{10}$
$x + y = 3$

3° $\frac{x + y}{x - y} + \frac{x - y}{x + y} = \frac{5}{2}$
$x^2 + y^2 = 90$

4° $\frac{x + y}{x - y} - \frac{x - y}{x + y} = \frac{15}{4}$
$xy = 15.$

529. (604)

1° $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 25$
$x + y = 533$

2° $x + y = 1 + 2\sqrt{xy}$
$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$

3° $xy + \sqrt{xy} = 90$
$x + y = 30$

4° $x + y - 5(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 62$
$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy} = 23.$

530. (605)

1° $xy + x^2 - 5x - 10 = 0$
$y^2 - 3y + 2 = 0$

2° $11(x - y) = x^2 - y^2$ $(x+y)(x-y)$
$xy = 28$

3° $(y - 2x)^2 + 2(y - 2x) - 8 = 0$
$xy + 2x - y - 2 = 0$

4° $x^2 + 4xy + 4y^2 = 4$
$3x^2 + 2xy - 2y - 8 = 0.$

531. (606)

1° $x^3 + y^3 = 189$
$xy = 20$

2° $x^3 - y^3 = 448$
$xy = 32$

3° $x + y = 10$
$x^3 + y^3 = 370$

4° $x - y = 3$
$x^4 + y^4 = 2657$

5° $x + y = 8$
$x^4 + y^4 = 1312$

6° $x^4 + y^4 = 706$
$xy = 15$

7° $x + y = 7$
$x^4y + xy^4 = 1092$

8° $xy(x + y) = 30$
$x^3 + y^3 = 35.$

532. (608)

1° $x^2 + y^2 + z^2 = 374$
$x - y = 6$
$x - z + 11 = 0$

2° $x^2 + y^2 + z^2 = 14$
$x + y = 3$
$z + x = 4$

3° $x^2 + y^2 = 26$
$xy = z$
$x + y = 4$

4° $xy = 6$
$x^2 - y^2 = 35$
$x + y = z$

5° $x + y + z = 4$
$x^2 = y^2 + z^2$
$x^2 + y^2 + z^2 = 50$

6° $x^2 + z^2 = 85$
$x^2 + y^2 = 29$
$y^2 + z^2 = 106.$

533. (609)

1° $xy = 5$
$x + y - z = 8$
$x^2 + y^2 + z^2 = 30$

2° $x + y + z = 6$
$x^2 + y^2 + z^2 = 14$
$x(y + z) - 2yz = 5$

3° $x + y + z = 4$
$x^3 + y^3 + z^3 = 34$
$xy + z = 1$

4° $yz = 2(y + z)$
$4xz = 3(x + z)$
$xy + 6(x + y) = 0.$

534. (610*bis*) *Résoudre et discuter les systèmes suivants dans lesquels* a *et* b *représentent des nombres différents de zéro.*

1° $x^2 + y^2 = a^2$
$xy = b^2$

2° $x^2 + y^2 = a^2$
$x + y = b$

3° $x^2 + y^2 = a^2$
$x - y = b$

4° $x^2 - y^2 = a^2$
$x + y = b$

5° $x^2 - y^2 = a^2$
$xy = b^2$

6° $x^2 + y^2 = a^2$
$2x^2 = ay.$

CHAPITRE XX

Problèmes d'un degré supérieur au premier.

§ I. — PROBLÈMES NUMÉRIQUES.

404. Problème I. — *Trouver deux nombres consécutifs dont le produit dépasse la somme de 11 unités.*

Soit x le plus petit nombre; $x + 1$ sera le plus grand.

L'équation du problème est

$$x(x + 1) - (2x + 1) = 11 \quad \text{ou} \quad x^2 - x - 12 = 0;$$

d'où $x' = 4$ et $x'' = -3$.

Les nombres cherchés sont 4 et 5 ou -3 et -2.

405. Problème II. — *Une somme de 1050 fr doit être distribuée en parts égales à un certain nombre de personnes. Si cinq d'entre elles se* *retiraient, la part de chacune des autres serait augmentée de 7 fr. Trouver le nombre de personnes.*

Soit x le nombre des personnes entre lesquelles on veut partager 1050 fr. Chacune recevra $\frac{1050}{x}$ fr. Si cinq d'entre elles se retirent, le nombre de partageants sera $x - 5$ et chaque part devient $\frac{1050}{x-5}$.

L'équation du problème sera donc

$$\frac{1050}{x-5} = \frac{1050}{x} + 7 \quad \text{ou} \quad x^2 - 5x - 750 = 0;$$

d'où $x' = 30, \quad x'' = -25.$

La seconde solution ne convient pas au problème, car le nombre de partageants doit être positif.

406. Problème III. — *On donne un demi-cercle* AB *de rayon* R=5 *m. et la tangente* AC *à l'extrémité du diamètre* AB. *D'un point* M *de la demi-circonférence, on abaisse une perpendiculaire* MC *sur la tangente ; puis, on trace* MB. *Déterminer le point* M *de manière que la somme des longueurs des segments* MC *et* MB *soit* 8 *m.*

Traçons MH perpendiculaire au diamètre AB et soit AH $= x$.

Le triangle rectangle AMB donne

$$MB^2 = BA.BH;$$

d'où $\quad MB = \sqrt{10(10-x)}.$

L'équation du problème sera

$$x + \sqrt{10(10-x)} = 8$$

ou $\quad \sqrt{10(10-x)} = 8 - x. \qquad (1)$

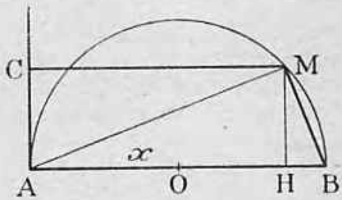


Fig. 26.

Cette équation n'est possible que si on a $x \leqslant 8$. Supposons cette condition réalisée. On obtient après élévation au carré et réduction

$$x^2 - 6x - 36 = 0.$$

D'où $\quad x' = 3 + \sqrt{45}; \quad x'' = 3 - \sqrt{45}.$

La 1re racine ne vérifie pas l'équation (1) parce qu'elle est supérieure à 8. La seconde racine vérifie l'équation (1), mais elle ne convient pas au problème parce qu'elle est négative. Donc *les deux solutions sont inacceptables* et *le problème est impossible.*

407. Solutions inacceptables. — Les exemples précédents montrent que nous devons faire une distinction entre *les solutions* *de l'équation traduisant* ***directement*** *l'énoncé du problème* et *les solutions de l'équation finale.*

Il peut arriver qu'une solution de l'équation finale ne soit pas une solution du problème :

1° Parce qu'elle ne satisfait pas à certaines conditions restrictives provenant de la nature de la grandeur que l'on cherche **(405).**

2° Parce qu'elle ne vérifie pas l'équation initiale **(406).** *Ce dernier cas se présente souvent quand l'équation initiale est irrationnelle.*

Les mêmes considérations s'appliquent aux problèmes à deux ou à plusieurs inconnues.

408. Problème impossible. — Un problème est impossible lorsqu'il conduit *à des équations qui n'ont pas de solution, ou à des équations dont toutes les solutions sont inacceptables.*

§ II. — DISCUSSION DE PROBLÈMES.

409. Problème I. — *La base* BC *et la hauteur* AH *d'un triangle* ABC *ont pour longueur* a. *Inscrire dans ce triangle un rectangle ayant deux de ses sommets sur* BC *et les deux autres sur* AB *et* AC, *de façon que sa diagonale ait une longueur donnée* l.

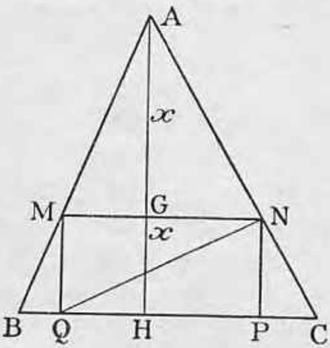


Fig. 27.

Soit MN $= x$.

Le triangle AMN est semblable au triangle ABC. Par suite, sa hauteur AG est égale à sa base MN et on a

$$MQ = a - x.$$

Le triangle rectangle MNQ donne l'équation du problème

$$x^2 + (a - x)^2 = l^2$$

ou $\quad 2x^2 - 2ax + a^2 - l^2 = 0. \qquad (1)$

Discussion. — L'équation (1) admet *au plus deux racines,* qui seront les solutions du problème si elles sont *positives et inférieures à* a.

La discussion revient à classer par ordre de grandeur les racines x″ *et* x *de l'équation* (1) *et les nombres* 0 *et* a.

Désignons l'équation (1) par $f(x) = 0$ et calculons $f(0)$ et $f(a)$. On trouve

$$f(0) = f(a) = a^2 - l^2.$$

Comme $f(0)$ et $f(a)$ sont de même signe, les nombres 0 et a ne peuvent pas séparer les racines de l'équation (1) et le problème n'admettra *jamais une solution unique*. Pour qu'il y ait *deux solutions*, on doit avoir l'ordre

$$0 < x'' < x' < a,$$

ce qui exige :

1° $\rho = 2l^2 - a^2 = (l\sqrt{2} + a)(l\sqrt{2} - a) > 0$ ou $l\sqrt{2} - a > 0$,

car le premier facteur est positif. Cette inégalité donne $l > \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

2° $f(0) = f(a) = a^2 - l^2 = (a + l)(a - l) > 0$ ou $l < a$.

3° $0 < \dfrac{a}{2} < a$, condition toujours réalisée.

En résumé, on doit avoir $\dfrac{a\sqrt{2}}{2} < l < a$.

CAS PARTICULIERS. — 1° $l = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; on a $x = \dfrac{a}{2}$; $MQ = MN = \dfrac{a}{2}$.

Au lieu d'un rectangle ou a un carré inscrit.

2° $l = a$. — On trouve dans ce cas, $x'' = 0$; $x' = a$. Le rectangle se réduit à la hauteur AH ou à la base BC.

410. Problème II. — *Sur le diamètre* AB, *qui limite une demi-circonférence de rayon* R, *on porte une longueur* AC = x. *Par le point* C, *on élève la demi-corde* CD, *perpendiculaire au diamètre* AB. *Déterminer* x, *de manière que la somme* AC + CD *soit égale à une longueur donnée* a.

On a $CD^2 = AC.CB = x(2R - x)$ et l'équation du problème est

$$x + \sqrt{x(2R - x)} = a,$$

ou $\sqrt{x(2R - x)} = a - x$. (1)

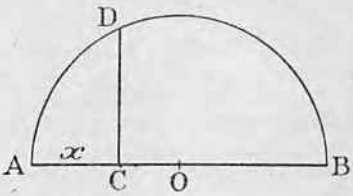


Fig. 28.

Cette équation n'est possible que si $a - x \geqslant 0$ ou $x \leqslant a$.

Supposons cette condition remplie; alors l'équation (1) est équivalente à

$$f(x) = (a - x)^2 - x(2R - x) = 0, \tag{2}$$

ou

$$f(x) = 2x^2 - 2(a + R)x + a^2 = 0. \tag{3}$$

Discussion. — Nous traiterons les cas particuliers plus loin. *Dans ces conditions, une solution de l'équation* (3) *ne vérifie l'équation* (1) *que si elle est inférieure à* a. *De plus, il est facile de voir qu'elle ne convient au problème que si elle est* positive *et inférieure à* 2R.

Remarquons que *cette dernière condition* $(0 < x < 2R)$ *est remplie par toute racine inférieure à* a des équations (3) et (2). En effet, une telle racine rend positif le produit $x(2R - x)$, puisqu'elle le rend égal à $(a - x)^2$ qui est positif. Cette racine est donc comprise entre 0 et 2R. Ainsi, *il suffira d'avoir* $x < a$.

1° *Le problème admet une solution*, si on a $2f(a) < 0$ ou $f(a) < 0$, car l'équation (3) admet alors deux racines positives, séparées par a et la plus petite convient au problème.

Pour calculer $f(a)$, remplaçons x par a dans le 1er membre de l'équation (2) non développée. On trouve ainsi la condition

$$f(a) = -a(2R - a) < 0 \quad \text{ou} \quad a(2R - a) > 0.$$

Comme a est positif, il faut avoir $a < 2$ R.

2° *Pour que le problème ait deux solutions*, l'équation (3) doit avoir deux racines inférieures à a. Ce qui exige :

$a)$ $\rho = (a + R)^2 - 2a^2 = [a(1 + \sqrt{2}) + R]\,[a(1 - \sqrt{2}) + R] > 0$

c'est-à-dire $\quad a(1 - \sqrt{2}) + R > 0 \quad$ ou $\quad a < R(1 + \sqrt{2})$.

$b)$ $f(a) = -a(2R - a) > 0 \quad$ ou $\quad a > 2R$.

$c)$ $a > \dfrac{a + R}{2} \quad$ ou $\quad a > R$.

En somme, on doit avoir $2R < a < R(1 + \sqrt{2})$.

Résumons les résultats de la discussion précédente et joignons-y l'étude des cas particuliers.

1° $a < 2R$; une solution.

2° $a = 2R$; l'équation (3) se réduit à $x^2 - 3Rx + 2R^2 = 0$. Elle a pour racines $x' = 2R$, $x'' = R$; ce sont des solutions du problème.

3° $2R < a < R(1 + \sqrt{2})$; deux solutions.

4° $a = R(1 + \sqrt{2})$; l'équation (3) a une racine double

$$x' = x'' = \frac{a + R}{2} = \frac{R(2 + \sqrt{2})}{2}.$$

Elle convient au problème, car elle est inférieure à $a = R(1 + \sqrt{2})$.

411. Problème III. — *Calculer les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse* a *et la bissectrice* d *d'un angle aigu.*

En posant AB $= x$ et AC $= y$, les triangles rectangles ABC et ABD donnent

$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad (1)$$

et $$x^2 + \mathrm{AD}^2 = d^2. \qquad (2)$$

Mais on a

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{CD}} = \frac{x}{a} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{AD}}{y} = \frac{x}{x+a}.$$

Par suite, l'équation (2) devient

$$x^2 + \frac{x^2y^2}{(x+a)^2} = d^2. \qquad (3)$$

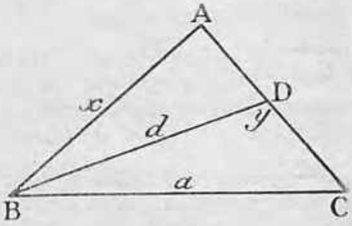


Fig. 29.

En remplaçant dans cette équation y^2 par sa valeur tirée de l'équation (1), on trouve, après avoir simplifié par le facteur positif $x + a$,

$$2ax^2 - d^2x - ad^2 = 0. \qquad (4)$$

Discussion. — Une valeur de x ne peut convenir au problème que si elle est positive. De plus, à cette valeur de x doit correspondre une valeur positive de y. Or, l'équation (1) peut s'écrire

$$y^2 = a^2 - x^2 = (a + x)(a - x).$$

A une valeur positive de x correspondra une valeur positive de y^2 et aussi de y, si l'on a $a - x > 0$ ou $x < a$. *Donc une racine de l'équation* (4) *ne convient que si elle est positive et inférieure à* a.

L'examen de l'équation (4) montre qu'elle admet toujours deux racines de signes contraires. La négative est à écarter. Pour que la positive soit acceptable, il suffit que a soit extérieur aux racines de l'équation (4), car a ne peut pas être inférieur à la racine négative. On doit donc avoir

$$2af(a) = 2a.2a(a^2 - d^2) = 4a^2(a + d)(a - d) > 0 \quad \text{ou} \quad a > d.$$

EXERCICES

PROBLÈMES A UNE INCONNUE.

535. (619) Trouver deux nombres consécutifs, tels que la somme de leurs carrés soit 545.

536. (620) Deux nombres sont entre eux comme 4 est à 7 et la somme de leurs carrés est 3185. Trouver ces nombres.

537. (622) Par quel nombre faut-il diviser 333 pour avoir un quotient double du reste et égal au diviseur?

538. (625) J'ai acheté des livres pour 60 fr. Si j'en avais eu trois de plus pour ce même prix, chacun coûterait un franc de moins. Combien de livres ai-je achetés?

539. (626) Un héritage, qui s'élève à 405 000 fr doit être partagé également entre un certain nombre de personnes. Trois héritiers viennent à être exclus, et par ce fait la part de chacun des autres est augmentée de 22 500 fr. Combien y avait-il d'héritiers?

540. (627) Deux mobiles partent du sommet d'un angle droit en suivant chacun un côté de l'angle. L'un part une seconde avant l'autre et parcourt 6 m par seconde, tandis que l'autre ne parcourt que 5 m par seconde. A quel moment seront-ils éloignés de 75 m?

541. (628) Une lumière électrique se trouve à 40 m d'un bec de gaz. En quel point de la droite joignant les deux lumières faut-il placer un écran, pour qu'il soit également éclairé par les deux lumières, la 1re étant 16 fois plus intense que l'autre?

542. (629) Deux voyageurs A et B distants de 66 km, vont l'un vers l'autre. A part 3 heures après B. Après la rencontre, B met 1 h. 36 m. pour achever le trajet et A, 6 h. 15 m. Déterminer le point de rencontre.

543. (630) Un rentier a placé 20 000 fr à un certain taux, pendant cinq ans; après ce temps, il retire le capital et les intérêts simples, place le tout à un taux inférieur d'un franc au premier, et retire annuellement 1300 fr d'intérêts. Trouver le premier taux.

544. (631) Quelle longueur ont les deux aiguilles d'une horloge, si la distance de leurs extrémités est 17 cm à midi et 85 cm à 9 heures?

545. (633) La base et la hauteur d'un rectangle mesurent 50 m et 24 m. Mener une parallèle au petit côté, de manière que les deux rectangles qu'elle détermine soient semblables.

546. (634) Deux cordes qui se coupent dans un cercle ont chacune 80 pour produit de ses segments. Trouver la distance du point d'intersection au centre, le rayon mesurant 12 cm.

547. (635) Un trapèze rectangle ABCD a pour hauteur BC = 3 m et pour base AB = 8 m. La distance CH du sommet C au côté AD mesure 2,4 m. Calculer la longueur de la base CD.

548. (636) Par un point M situé à 12 m du centre O d'un cercle dont le rayon est 8 m, on mène une sécante. Quelle est la longueur de cette sécante, sachant que l'un des segments déterminés sur elle par la circonférence est double de l'autre?

25

549. (637) Dans un triangle ABC on donne AB = 20 m, BC = 18 m; l'angle BAC mesure 60°. Trouver la longueur du 3e côté.

550. (638) On lance un projectile verticalement de bas en haut avec une vitesse initiale de 39,24 m par seconde. On demande :

1° Au bout de combien de temps la vitesse du projectile s'annulera et quelle sera la hauteur atteinte à ce moment;

2° Au bout de combien de temps le projectile se trouvera à une hauteur de 58,86 m au-dessus de son point de départ.

Construire le graphique du mouvement pendant les 8 premières secondes, en portant en abscisses les temps, et en ordonnées les hauteurs atteintes.

PROBLÈMES A DEUX OU PLUSIEURS INCONNUES.

551. (639) Partager 16 en deux parties telles que si à leur produit, on ajoute la somme de leurs carrés, le résultat soit 208.

552. (641) Trouver deux nombres, sachant que leur somme, leur produit et la différence de leurs carrés sont égaux entre eux.

553. (642) Un nombre est formé de deux chiffres; si on lui ajoute 9, on trouve le même nombre renversé, et si on divise le nombre par le produit des deux chiffres, on a 6 pour quotient; trouver le nombre.

554. (644) Deux marchands ont mis ensemble 500 fr; l'un a laissé son argent 5 mois et l'autre, 2 mois. L'affaire terminée, chacun a 450 fr. Déterminer les deux mises.

555. (646) Deux ouvriers reçoivent l'un 400 fr, l'autre 225 fr; le premier a travaillé cinq jours de plus que l'autre. Si chacun avait travaillé le nombre de jours qu'a travaillé l'autre, ils auraient reçu la même somme; on demande le nombre de journées de travail de chaque ouvrier et le prix de sa journée.

556. (647) Deux capitaux sont placés à des taux différents; le premier capital, qui produit 500 fr par an, surpasse de 4000 fr le second capital, qui produit 390 fr; mais le taux de ce dernier surpasse de 1,5 le taux du premier; déterminer ces deux capitaux.

557. (649) Trois enfants reçoivent de leurs parents un certain nombre d'oranges. La somme de ces trois nombres est 18; la somme de leurs carrés est 126; le produit des deux derniers est 54. Trouver ces trois nombres.

558. (650) Trouver quatre nombres en proportion, connaissant la somme de leurs carrés 62,5; sachant de plus que le premier surpasse le deuxième de 4, et que le troisième surpasse le quatrième de 3.

559. (651) Dans une proportion continue, la somme des trois termes est 28, la différence entre les deux premiers termes est 8; déterminer cette proportion.

560. (654) Le périmètre d'un triangle rectangle est de 48 m et la médiane tombant sur l'hypoténuse mesure 10 m. Calculer la longueur des trois côtés.

561. (657) Deux carrés ont ensemble une superficie de 325 m^2; le produit de leurs diagonales est 300. Déterminer le côté de chacun de ces carrés.

562. (658) Les deux côtés d'un champ rectangulaire sont dans le rapport de 2 à 5 1/4. Si l'on diminue de moitié chacun des côtés, la superficie n'est plus que de 168 m^2. Déterminer les dimensions de ce champ.

563. (659) Le produit des deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle est 1512. L'hypoténuse égale la somme des deux autres côtés, moins 18. Trouver les trois côtés.

564. (660) Trouver le périmètre d'un triangle rectangle isocèle, sachant que la hauteur abaissée sur l'hypoténuse mesure 4 mètres.

565. (661) Calculer les côtés d'un triangle rectangle sachant que la hauteur relative à l'hypoténuse est de 7 m et que la somme des côtés de l'angle droit est 24 m.

566. (662) Deux cordes parallèles placées de part et d'autre du centre d'un cercle mesurent respectivement 6 m et 10 m. Leur distance égale 8 m. Trouver le rayon du cercle.

567. (663) Deux côtés d'un triangle ont 666 pour somme de leurs carrés. Trouver ces côtés, sachant que la bissectrice de l'angle compris détermine sur le 3^e côté deux segments qui mesurent 14 m et 10 m.

568. (664) Aux extrémités d'un segment AB, qui mesure 18 m, on élève deux perpendiculaires de même sens, l'une de 4 m, l'autre de 8 m. Trouver sur le segment AB un point tel qu'en le joignant aux extrémités des perpendiculaires, on forme un angle droit.

569. (665) Deux circonférences tangentes extérieurement ont leur tangente commune longue de 15 m. Trouver les rayons respectifs, sachant que leur différence égale quatre fois l'excès de leur somme sur la tangente.

570. (666) Trouver les quatre côtés d'un trapèze isocèle circonscrit à un cercle dont le rayon mesure 2 m, sachant que le périmètre du trapèze mesure 20 m.

571. (667) Calculer les trois côtés d'un triangle rectangle connaissant le périmètre 132 m et la somme 6050 des carrés des trois côtés.

PROBLÈMES A DISCUTER.

572. (673) Étant donné un quart de cercle AOB de rayon R, trouver sur l'arc AB un point M tel que sa distance au point A égale sa distance au rayon OB. (x = MA).

573. (674) Un trapèze convexe a pour bases a et b ($a>b$) et pour hauteur h. A quelle distance x de la base a faut-il mener une parallèle aux bases pour partager la surface en deux parties équivalentes?

574. (675) Inscrire dans un triangle ABC, de base BC = a et de hauteur AH = h, un rectangle ayant deux de ses sommets sur BC et les deux autres sur AB et AC, de façon que son aire ait pour mesure un nombre donné k^2. (x = distance du sommet A au côté supérieur du rectangle).

575. (678) Dans un triangle ABC, on donne BC = a, AB = c, A = 60°. Calculer la longueur x du 3e côté et déterminer pour quelles valeurs de a le problème est possible.

576. (679) Calculer la profondeur d'un puits, sachant qu'il s'est écoulé t secondes entre l'instant où l'on a laissé tomber une pierre et celui où le bruit qu'elle a fait en frappant le fond est arrivé à l'oreille. La vitesse du son dans l'air est v mètres à la seconde.

577. (680) Tracer dans un cercle de rayon R, une corde AB telle que la somme de sa longueur et de sa distance OM au centre soit égale à l.(OM = x).

---

578. (686) Calculer les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse et le rayon du cercle inscrit.

579. (687) Calculer les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse et la différence des deux côtés.

580. (689) Un triangle rectangle est circonscrit à un cercle de rayon R. Calculer la longueur des côtés de l'angle droit sachant que le périmètre mesure $2p$.

581. (690) Inscrire dans un cercle de rayon R un triangle isocèle, connaissant la somme l de la base et de la hauteur correspondante.

582. (692) Calculer les quatre côtés d'un trapèze isocèle circonscrit à un cercle de rayon inconnu R, sachant que la somme des bases parallèles est $2a$ et que son aire égale celle d'un carré de côté b.

CHAPITRE XXI

Progressions.

§ I. — PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES.

412. Suites de nombres. — Considérons *successivement* plusieurs nombres, puis écrivons-les, à la suite l'un de l'autre, dans l'ordre même dans lequel ils ont été considérés.

On dit que **des nombres considérés successivement forment une suite**, *lorsqu'ils répondent à une loi constante, telle que l'un quelconque d'entre eux est déterminé, quand on connaît son rang.*

Exemples : la suite naturelle des nombres entiers; la suite des multiples croissants de 7; la suite des racines carrées de 2, approchées par défaut, à moins de 0,1; 0,01; 0,001; ...

Les nombres qui forment une suite en sont *les termes*. Une suite est *limitée* lorsqu'elle a un dernier terme; elle est *illimitée* lorsque après chaque terme il y en a encore un autre.

Une suite est **croissante** (*décroissante*) quand chaque terme est supérieur ou égal (*inférieur ou égal*) à celui qui le précède, pourvu que tous les termes ne soient pas égaux à partir de l'un d'eux.

Exemples. — Les quotients approchés de 305 par 999 forment les suites :

(D)	0,3,	0,30,	0,305,	0,3053,	...
(E)	0,4,	0,31,	0,306,	0,3054,	...

La suite (D) est croissante; la suite (E) est décroissante.

413. Définition. — Une progression arithmétique *est une suite de nombres tels que chacun d'eux est égal au précédent plus un nombre constant, différent de zéro, appelé* **raison** *de la progression.*

Une progression arithmétique est *croissante* lorsque la raison est *positive ;* elle est *décroissante* lorsque la raison est *négative.*

EXEMPLES : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15.
100, 50, 0, —50, —100.

La première progression est croissante; sa raison est 2. La seconde est décroissante; sa raison est —50.

414. Conséquences de la définition. — I. ***La différence entre un terme et le précédent est constante.***

Soit la progression arithmétique $a, b, c, d, \ldots, h, k, l, \ldots$, dont la raison est r. On a, par définition,

$$b = a + r;\ c = b + r;\ \ldots;\ l = k + r;$$

d'où

$$b - a = c - b = \ldots = l - k = r.$$

II. ***Un terme est la moyenne arithmétique des termes qui le comprennent.***

On a

$$k = h + r;\quad k = l - r;$$

et par suite,

$$2k = h + l \quad \text{ou} \quad k = \frac{h + l}{2}.$$

415. Calcul d'un terme. — ***Dans une progression arithmétique, un terme de rang quelconque est égal au premier plus autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui.***

Soit l le n^{e} terme de la progression

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,\ h,\ k,\ l,\ \ldots$$

dont la raison est r. Par définition, chaque terme est égal au précédent augmenté de r. On a donc :

$$b = a + r;\quad c = b + r;\quad \ldots;\quad k = h + r;\quad l = k + r.$$

Additionnons ces $n - 1$ égalités, membre à membre, et remarquons que les termes $b, c, \ldots, h, k$ se trouvent dans les deux membres de l'égalité obtenue. Il vient, après réduction,

$$\boldsymbol{l = a + (n - 1)r.}$$

Cette formule permet de calculer un terme de rang quelconque d'une progression, quand on connaît le premier terme et la raison.

416. Théorème. — ***Dans une progression arithmétique limitée, la somme de deux termes équidistants des extrêmes est égale à la somme des termes extrêmes.***

Considérons la progression arithmétique limitée

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,\ x,\ \ldots,\ y,\ \ldots,\ h,\ k,\ l.$$

S'il y a p termes avant x et p termes après y, on a :

$$x = a + pr; \quad l = y + pr \quad \text{ou} \quad y = l - pr.$$

D'où $x + y = a + l$.

Remarque. — *Lorsque le nombre des termes d'une progression est* impair, *le terme du milieu est égal à la moyenne arithmétique des termes extrêmes.* — La démonstration de cette propriété est analogue à celle du théorème précédent.

417. Somme des termes. — ***La somme des termes d'une progression arithmétique limitée est égale à la demi-somme des termes extrêmes, multipliée par le nombre de termes.***

Soit S la somme des n termes de la progression limitée

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,\ h,\ k,\ l.$$

On a $\quad S = a + b + c + \ldots + h + k + l;$

et $\quad S = l + k + h + \ldots + c + b + a.$

Additionnons membre à membre :

$$2S = (a + l) + (b + k) + (c + h) + \ldots + (k + b) + (l + a).$$

Le second membre renferme n parenthèses et chacune est égale à $a + l$ (**416**). On a donc

$$2S = (a + l)n \quad \text{et} \quad \mathbf{S = \frac{(a + l)n}{2}}.$$

Remarque. — Les formules

$$l = a + (n - 1)r, \quad S = \frac{(a + l)n}{2}$$

renferment cinq quantités, a, l, r, n, S. On pourra calculer deux de ces cinq quantités, quand les trois autres sont données.

418. Applications. — I. *Calculer la somme* S_1 *des* n *premiers nombres entiers.*

La suite des nombres entiers forme une progression arithmétique dont la raison est 1. On a donc

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \mathbf{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

II. *Calculer la somme des* n *premiers nombres impairs.*

La suite des nombres impairs forme une progression arithmétique dont la raison est 2. Le n^e terme de cette progression est $2n - 1$. En appliquant la formule générale (**417**), il vient donc

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = \frac{(1 + 2n - 1)n}{2} = \mathbf{n^2}.$$

III. *Calculer la somme* S_2 *des carrés des* n *premiers nombres entiers.*

Dans l'identité

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1,$$

faisons successivement $n = 0, 1, 2, \dots, n$; on obtient $n + 1$ égalités :

$$\begin{aligned}
1^3 &= 1 \\
(1+1)^3 = 2^3 &= 1^3 + 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1 \\
(2+1)^3 = 3^3 &= 2^3 + 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1 \\
(3+1)^3 = 4^3 &= 3^3 + 3 \times 3^2 + 3 \times 3 + 1 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
(n+1)^3 &= n^3 + 3 \times n^2 + 3 \times n + 1.
\end{aligned}$$

Additionnons membre à membre ces $n + 1$ égalités, et dans l'égalité obtenue, supprimons les termes $1^3, 2^3, 3^3, \dots, n^3$, communs aux deux membres. On trouve ainsi

$$(n+1)^3 = 3S_2 + 3S_1 + (n+1).$$

Remplaçons S_1 par $\frac{n}{2}(n+1)$ et tirons $3S_2$. Il vient

$$3S_2 = (n+1)^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - (n+1)$$

$$= \frac{n+1}{2}[2(n+1)^2 - 3n - 2] = \frac{n+1}{2}(2n^2 + n).$$

Par suite, $$\mathbf{S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}.$$

IV. *Calculer la somme* S_3 *des cubes des* n *premiers nombres entiers.*

On se sert de l'identité

$$(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1,$$

dans laquelle on fait n successivement égal à $0, 1, 2, 3, \dots, n$. On trouve

$$\mathbf{S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (S_1)^2}.$$

419. Insertion de moyens. — **Insérer** $m - 1$ **moyens arithmétiques** *entre deux nombres donnés* a *et* b, *c'est former une progression arithmétique de* m + 1 *termes dont les extrêmes soient* a *et* b; *les* m — 1 *termes intermédiaires sont les moyens cherchés.*

Pour pouvoir former cette progression, il suffirait de connaître sa raison x. Or le dernier terme b en a m avant lui. On a donc

$$b = a + mx; \quad \text{d'où} \quad x = \frac{b-a}{m}.$$

Ainsi la raison de la progression cherchée s'obtient en divisant l'excès du second nombre sur le premier par le nombre des moyens à insérer augmenté d'une unité.

La progression cherchée est

$$a,\ a + \frac{b-a}{m},\quad a + \frac{2(b-a)}{m},\quad \ldots,\quad b.$$

420. Théorème. — ***La suite obtenue, en insérant un même nombre de moyens arithmétiques entre les termes consécutifs d'une progression arithmétique, est une progression arithmétique.***

Dans la progression $a, b, c, \ldots, h, k, l, \ldots$ dont la raison est r, insérons $m - 1$ moyens arithmétiques entre les termes consécutifs.

1° Les raisons des progressions partielles sont :

$$\frac{b-a}{m},\quad \frac{c-b}{m},\quad \ldots,\quad \frac{k-h}{m},\quad \frac{l-k}{m},\quad \ldots$$

On voit qu'elles sont toutes égales à $\frac{r}{m}$.

2° De plus, le dernier terme de la première progression partielle est le premier terme de la seconde; le dernier terme de la seconde est le premier de la troisième, et ainsi de suite. Donc toutes ces progressions partielles forment une seule et même progression arithmétique.

§ II. — PROGRESSIONS GÉOMÉTRIQUES.

421. Une progression géométrique *est une suite de nombres tels que chacun d'eux est égal au précédent multiplié par un nombre constant, différent de* ± 1, *appelé* **raison** *de la progression.*

Nous ne considérons que des progressions géométriques dont tous les termes sont positifs. Le premier terme et la raison d'une telle progression sont positifs.

Une progression géométrique est *croissante* quand sa raison est *supérieure* à l'unité; elle est *décroissante* quand sa raison est *inférieure* à l'unité.

EXEMPLES : $1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \dots$

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \dots$$

La première progression est croissante; sa raison est 2. La seconde est décroissante; sa raison est 0,5.

422. Conséquences de la définition. — I. ***Le rapport d'un terme quelconque au précédent est constant.***

Soit la progression géométrique $a, b, c, d, \dots, h, k, l, \dots$, dont la raison est q. On a, par définition,

$$b = aq;\quad c = bq;\quad \dots;\quad l = kq;$$

d'où
$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \dots = \frac{l}{k} = q.$$

II. ***Un terme est la moyenne géométrique des termes qui le comprennent.***

On a
$$k = hq \quad \text{et} \quad k = \frac{l}{q};$$

et par suite,
$$k^2 = hl \quad \text{ou} \quad k = \sqrt{hl},$$

car par hypothèse, les nombres h, k, l sont positifs.

423. Calcul d'un terme. — ***Dans une progression géométrique, un terme de rang quelconque est égal au premier multiplié par la raison affectée d'un exposant égal au nombre des termes qui précèdent le terme considéré.***

Soit l le n^e terme de la progression géométrique

$$a,\ b,\ c,\ \dots,\ h,\ k,\ l,\ \dots,$$

dont la raison est q. Par définition, chaque terme est égal au produit du terme précédent par la raison q. On a donc :

$$b = aq;\quad c = bq;\quad \dots;\quad k = hq;\quad l = kq.$$

Multiplions ces $n - 1$ égalités, membre à membre, et remarquons que les facteurs $b, c, \ldots, h, k$ se trouvent dans les deux membres de l'égalité obtenue. Il vient, après simplification,

$$\boldsymbol{l = aq^{n-1}}.$$

Cette formule permet de calculer un terme de rang quelconque d'une progression, quand on connaît le premier terme et la raison.

424. Théorème. — ***Dans une progression géométrique limitée, le produit de deux termes équidistants des extrêmes est égal au produit des termes extrêmes.***

Considérons la progression géométrique limitée

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,\ x,\ \ldots,\ y,\ \ldots,\ h,\ k,\ l.$$

Supposons qu'il y ait p termes avant x et p termes après y. On a :

$$x = aq^p;$$

$$l = yq^p \quad \text{ou} \quad y = \frac{l}{q^p}.$$

D'où $xy = al$.

425. Produit des termes. — ***Le carré du produit des termes d'une progression géométrique limitée est égal à la puissance du produit des termes extrêmes, dont l'exposant est le nombre des termes de la progression.***

Soit P le produit des n termes de la progression limitée

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,\ h,\ k,\ l.$$

On a $$\mathrm{P} = abc \ldots hkl;$$

et $$\mathrm{P} = lkh \ldots cba.$$

Multiplions membre à membre; il vient

$$\mathrm{P}^2 = (al).(bk).(ch) \ldots (hc).(kb).(la).$$

Le second membre renferme n parenthèses et chacune est égale à al (**424**). On a donc

$$\mathbf{P}^2 = (\boldsymbol{al})^n.$$

426. Somme des termes. — Soit S la somme des n termes de la progression *limitée* $a, b, c, \ldots, h, k, l$.

On a $$\mathrm{S} = a + b + c + \ldots + h + k + l;$$

et $$\mathrm{S}q = aq + bq + cq + \ldots + hq + kq + lq.$$

Retranchons membre à membre la première égalité de la seconde en remarquant que

$$aq = b, \quad bq = c, \quad \ldots, \quad hq = k, \quad kq = l.$$

Nous aurons $\qquad S(q-1) = lq - a.$

La formule qui donne la somme des termes est donc

$$\mathbf{S} = \frac{\boldsymbol{lq - a}}{\boldsymbol{q - 1}} \quad \text{ou} \quad \mathrm{S} = \frac{aq^n - a}{q-1} = \frac{\boldsymbol{a(q^n - 1)}}{\boldsymbol{q - 1}}.$$

Remarque. — Les deux formules

$$l = aq^{n-1} \quad \text{et} \quad \mathrm{S} = \frac{lq - a}{q - 1}$$

renferment cinq quantités a, l, q, n, S. On pourra donc calculer deux de ces cinq quantités quand les trois autres sont données.

Si $q < 1$, la seconde formule s'écrit ordinairement

$$\mathrm{S} = \frac{a - lq}{1 - q} \quad \text{ou} \quad \mathrm{S} = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}.$$

427. Insertion de moyens. — **Insérer** $m - 1$ **moyens géométriques** *entre deux nombres* **positifs** *donnés* a *et* b, *c'est former une progression géométrique de* m + 1 *termes, dont les extrêmes soient* a *et* b; *les* m — 1 *termes intermédiaires sont les moyens cherchés.*

Pour pouvoir former cette progression, il suffit de connaître sa raison x. Or le dernier terme b en a m avant lui. On a donc

$$b = ax^m \quad \text{ou} \quad x^m = \frac{b}{a}.$$

Comme a et b sont positifs, cette équation admet toujours une racine positive et une seule, qui est la racine m^{e} arithmétique du quotient du dernier nombre par le premier.

428. Théorème. — ***La suite obtenue, en insérant un même nombre de moyens géométriques entre les termes consécutifs d'une progression géométrique, est une progression géométrique.***

Considérons la progression a, b, c, ..., h, k, l, ..., dont la raison est q; insérons $m - 1$ moyens entre les termes consécutifs.

1° Les raisons des progressions partielles sont :

$$\sqrt[m]{\frac{b}{a}};\ \sqrt[m]{\frac{c}{b}};\ \dots;\ \sqrt[m]{\frac{k}{h}};\ \sqrt[m]{\frac{l}{k}};\ \dots$$

On voit qu'elles sont toutes égales à $\sqrt[m]{q}$.

2° De plus, le dernier terme de la première progression partielle est le premier terme de la seconde; le dernier terme de la seconde est le premier de la troisième; et ainsi de suite. Donc toutes les progressions partielles forment une seule et même progression géométrique.

429. Problème. — *Trouver les nombres rationnels qui peuvent faire partie d'une même progression géométrique avec* 1 *et* 10.

Soit x un nombre entier ou fractionnaire, faisant partie d'une même progression avec 1 et 10.

Si entre 1 et 10 se trouvent $n-1$ termes de la progression, la raison de la progression est $\sqrt[n]{10}$. Mais la m^e puissance d'un radical s'obtient en élevant le radicand à la m^e puissance (**305**, V). La progression est donc

$$\dots,\ \frac{1}{\sqrt[n]{10^m}},\ \dots,\ \frac{1}{\sqrt[n]{10^2}},\ \frac{1}{\sqrt[n]{10}},\ 1,\ \sqrt[n]{10},\ \sqrt[n]{10^2},\ \dots,\ \sqrt[n]{10^m},\ \dots$$

1° *Si* x *est supérieur à* 1, supposons qu'on ait $x=\sqrt[n]{10^m}$. Cette égalité montre que x ne sera rationnel que si 10^m ou $2^m.5^m$ est une puissance n^e exacte, c'est-à-dire si m est un multiple de n. Soit alors $m=nk$, k étant entier. On aura $x=\sqrt[n]{10^{nk}}$ ou $x=10^k$.

Par suite, les seuls nombres rationnels supérieurs à 1 *qui conviennent sont les puissances de* 10.

2° *Si* x *est inférieur à* 1, supposons qu'on ait

$$x=\frac{1}{\sqrt[n]{10^m}},\quad \text{c'est-à-dire,}\quad \frac{1}{x}=\sqrt[n]{10^m}.$$

La dernière égalité exige (1°) $\frac{1}{x}=10^k$ ou $x=\frac{1}{10^k}$.

Par suite, les seuls nombres rationnels inférieurs à 1 *qui conviennent sont les inverses des puissances de* 10.

§ III. — LIMITES.

430. Limite d'une variable. — Considérons une variable x, qui passe successivement par une infinité de valeurs, de telle sorte qu'aucune ne soit la dernière.

I. *On dit que la variable* x **tend vers zéro**, *ou qu'elle a* **pour limite zéro**, *lorsque sa valeur absolue peut devenir et rester plus petite que tout nombre positif* ε *donné arbitrairement, si petit qu'il soit.*

Cette définition revient à dire qu'il existe une valeur de x, telle que toutes les valeurs suivantes soient inférieures en valeur absolue à ε; ou encore, que x finit par être compris entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$.

Si x *est positif*, la définition se simplifie : il suffit que la variable x elle-même devienne et reste inférieure à ε.

Exemples. — *La variable* x *tend vers zéro*, si elle devient successivement égale à chacun des termes de l'une des suites :

$$1,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{5},\quad \ldots\ldots$$

$$-1,\quad -\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{3},\quad -\frac{1}{4},\quad -\frac{1}{5},\quad \ldots\ldots$$

$$1,\quad -\frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad -\frac{1}{4},\quad \frac{1}{5},\quad \ldots$$

En effet, si on prend, par exemple, $\varepsilon = 0{,}000\,001$, les termes qui suivent le 1 000 000^e terme de chaque suite sont inférieurs en valeur absolue à ε.

II. *On dit que la variable* x **tend vers la constante** a, *ou qu'elle a* **pour limite** a, *lorsque la différence* x — a *tend vers zéro.*

Exemple. — *La variable* x *tend vers* 1, si elle devient successivement égale à chacun des termes de la suite

$$\frac{1}{2},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{3}{4},\quad \frac{4}{5},\quad \frac{5}{6},\quad \ldots$$

En effet, la valeur absolue de la différence $x - 1$ est successivement égale à

$$\frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{5},\quad \frac{1}{6},\quad \ldots$$

et elle tend vers zéro.

Application. — Vérifier que 1,8 est la limite des suites 1,79; 1,799; 1,7999;... et 1,81; 1,801; 1,8001;...

III. *On dit que la variable* x **tend vers l'infini**, *ou qu'elle a* **pour limite l'infini**, *lorsque sa valeur absolue devient et reste supérieure à tout nombre positif* N *donné arbitrairement, si grand qu'il soit.*

Cette définition revient à dire que x tend vers l'infini quand il existe une valeur de x telle que toutes les valeurs suivantes soient supérieures en valeur absolue à un nombre positif arbitraire N, si grand qu'il soit.

EXEMPLES. — *La variable* x *tend vers l'infini*, si elle devient successivement égale à chacun des termes d'une des suites :

$$5, \quad 10, \quad 15, \quad 20, \ \ldots$$
$$-5, \quad -10, \quad -15, \quad -20, \ \ldots$$
$$5, \quad -10, \quad 15, \quad -20, \ \ldots$$

En effet, la valeur absolue du n^{e} terme de chaque suite est $5n$; et si on prend par exemple, $N = 1\,000\,000$, tous les termes qui suivent le 200 000e terme de chaque suite sont supérieurs en valeur absolue à N.

REMARQUES. — I. Si x devient définitivement supérieur *à tout nombre positif* arbitraire, on dit que x a pour limite $+\infty$ (plus l'infini). Si x devient définitivement inférieur à *tout nombre négatif* arbitraire, on dit que x a pour limite $-\infty$ (moins l'infini).

II. Si la variable x croît (*décroît*) sans cesse et qu'elle tend vers l'infini, on dit qu'elle croît (*décroît*) indéfiniment.

431. Théorème. — ***Les termes successifs d'une progression arithmétique croissante tendent vers*** $+\infty$.

Soit $l = a + (n-1)r$ le n^{e} terme d'une progression arithmétique croissante. Pour prouver que l croît indéfiniment, il suffit de montrer que l devient définitivement supérieur au nombre positif arbitraire N. Or, r étant positif, l'inégalité $a + (n-1)r > N$ peut s'écrire $n > \dfrac{N-a}{r} + 1$. Donc l est plus grand que N pour toutes les valeurs entières de n qui sont supérieures à $\dfrac{N-a}{r} + 1$; ce qui démontre le théorème.

REMARQUE. — *Les termes d'une progression arithmétique décroissante ont pour limite* $-\infty$, car si r est négatif et si N est un nombre négatif arbitraire, l'inégalité $a + (n-1)r < N$ est vérifiée dès que

$$n > \frac{N-a}{r} + 1.$$

432. Théorème. — ***Les puissances successives d'un nombre plus grand que l'unité forment une suite croissante et tendent vers l'infini.***

Soit q un nombre supérieur à l'unité.

1° *Les puissances successives de* q *forment une suite croissante*, car en multipliant les deux membres de l'inégalité $q > 1$ par le nombre positif q^{n-1}, il vient $q^n > q^{n-1}$.

2° *Les puissances successives de* q *tendent vers l'infini.*

En effet, l'hypothèse $q > 1$ peut s'écrire

$$q - 1 = \alpha,$$

α étant un nombre positif. Multiplions le premier membre de cette égalité successivement par les nombres q, q^2, q^3, ..., q^{n-1} qui sont plus grands que l'unité. Nous aurons les relations :

$$\begin{aligned} q - 1 &= \alpha; \\ q^2 - q &> \alpha; \\ q^3 - q^2 &> \alpha; \\ &\dots\dots\dots \\ q^n - q^{n-1} &> \alpha. \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre ces relations et en réduisant, il vient

$$q^n - 1 > n\alpha \quad \text{ou} \quad q^n > 1 + n\alpha.$$

L'inégalité $q^n > 1 + n\alpha$ montre que q^n est supérieur au nombre positif arbitraire N, dès que l'on a

$$1 + n\alpha > \mathrm{N}.$$

Or cette inégalité peut s'écrire $n > \frac{\mathrm{N} - 1}{\alpha}$, car α est positif. Donc q^n est plus grand que N pour toutes les valeurs entières de n qui sont supérieures à $\frac{\mathrm{N} - 1}{\alpha}$, ce qui démontre le théorème.

433. Corollaire. — ***Les termes successifs d'une progression géométrique croissante tendent vers l'infini.***

En effet, pour que aq^{n-1} soit plus grand que N, il suffit que l'on ait $q^{n-1} > \frac{\mathrm{N}}{a}$, ce qui a lieu en vertu du théorème précédent pour toutes les valeurs suffisamment grandes de l'entier n.

434. Théorème. — ***Les puissances successives d'un nombre positif plus petit que l'unité, forment une suite décroissante et tendent vers zéro.***

Soit q un nombre positif plus petit que l'unité.

1° *Les puissances successives de* q *forment une suite décroissante,* car en multipliant les deux membres de l'inégalité $q < 1$ par le nombre positif q^{n-1}, il vient $q^n < q^{n-1}$.

2° *Les puissances successives de* q *tendent vers zéro.*

Posons $q = \frac{1}{q'}$, q' étant supérieur à l'unité. Pour que q^n soit inférieur au nombre positif arbitraire ε, il suffit que nous ayons

$$\frac{1}{q'^n} < \varepsilon \quad \text{ou} \quad q'^n > \frac{1}{\varepsilon};$$

ce qui a lieu pour toutes les valeurs suffisamment grandes de n, car les puissances successives du nombre q' supérieur à l'unité tendent vers l'infini. Donc q^n tend vers zéro.

435. Corollaire. — ***Les termes successifs d'une progression géométrique décroissante tendent vers zéro.***

436. Théorème. — ***Quand le nombre des termes d'une progression géométrique décroissante croît indéfiniment, la somme de ses termes a pour limite le quotient du premier terme par l'excès de l'unité sur la raison de la progression.***

La somme S_n des n premiers termes de la progression géométrique décroissante $a, aq, aq^2, \ldots, aq^{n-1}, \ldots$ est

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

Nous devons prouver (**430**, II) que si $q < 1$, la différence

$$\frac{a}{1-q} - S_n = \frac{aq^n}{1-q},$$

qui est positive, tend vers zéro; ce qui a lieu, car l'inégalité

$$\frac{aq^n}{1-q} < \varepsilon \quad \text{peut s'écrire} \quad q^n < \frac{\varepsilon(1-q)}{a}$$

et nous avons démontré que les puissances successives d'un nombre positif q plus petit que l'unité tendent vers zéro.

EXERCICES

PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES.

583. (697) Trouver le 20ᵉ terme des progressions arithmétiques suivantes, puis calculer la somme des 20 premiers termes.

1° 2, 6, 10, 14, ... 2° -5; $-3{,}5$; -2; $-0{,}5$;...

584. (698) Trouver le n^e terme des progressions arithmétiques suivantes, puis calculer la somme des n premiers termes.

1° 4, 6, 8, 10, ... 3° 17, 14, 11, 8, ...

2° $1; \frac{n-1}{n}; \frac{n-2}{n}; \frac{n-3}{n}; \ldots$ 4° $\frac{n^2-1}{n}; n; \frac{n^2+1}{n}; \frac{n^2+2}{n}; \ldots$

585. (699) Dans une progression arithmétique on donne :

1° $a = 4, r = 2, n = 8$; trouver l et S.
2° $r = 4, l = 39, n = 10$; trouver a et S.
3° $a = 3, l = 21$, S $= 120$; trouver r et n.
4° $l = 199, n = 100$, S $= 10\,000$; trouver a et r.
5° $a = 23, r = -2$, S $= 140$; trouver l et n.
6° $r = 2, n = 13$, S $= 195$; trouver a et l.
7° $l = 20, r = 5$, S $= 20$; trouver a et n.
8° $a = -7, r = 3$, S $= 430$; trouver l et n.

586. (701) Former une progression arithmétique dont le 4ᵉ terme soit 40 et le 12ᵉ, 52.

587. (702) Dans une progression arithmétique, la somme du 8ᵉ et du 14ᵉ terme est égale à 50 et le 5ᵉ terme est 13. Déterminer cette progression.

588. (704) Insérer 8 moyens arithmétiques entre -2 et $\frac{1}{4}$.

589. (707) Dans une progression arithmétique de 10 termes, la somme des termes est 245 et la différence des extrêmes est 45. Quelle est cette progression?

590. (708) La somme des n premiers nombres entiers est 496. Trouver n.

591. (709) Trouver x nombres entiers consécutifs, sachant que le premier est 8 et que leur somme est x^3.

592. (710) La somme de trois nombres en progression arithmétique est 33 et leur produit est 1287. Quels sont ces nombres?

593. (711) Le produit de cinq nombres en progression arithmétique est 1155 et leur somme 15. Quels sont ces nombres?

594. (713) La somme de quatre nombres rationnels en progression arithmétique est 24 et leur produit 945. Quels sont ces nombres?

595. (714) Calculer x pour que les carrés de $1 + x$, $q + x$, $q^2 + x$ soient trois termes consécutifs d'une progression arithmétique; q est un nombre donné.

596. (715) Si $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{b+c}$ sont trois termes consécutifs d'une progression arithmétique, il en sera de même de a^2, b^2, c^2.

597. (716) Si a, b, c sont trois termes consécutifs d'une progression arithmétique, il en sera de même de $a^2 + ab + b^2$, $c^2 + ac + a^2$, $b^2 + bc + c^2$.

598. (717) Si a, b, c, d sont quatre termes consécutifs d'une progression arithmétique, l'expression $abcd + (b - c)^4$ est un carré.

PROGRESSIONS GÉOMÉTRIQUES.

599. (723) Dans une progression géométrique, on donne :

1° $a = 3$; $q = 4$; $n = 5$; trouver l et S.

2° $l = \frac{3}{64}$; $a = 12$; $n = 9$; trouver q et S.

3° $n = 6$; $q = \frac{1}{4}$; S $= 2730$; trouver a et l.

4° $l = \frac{32}{81}$; $a = 3$; $q = \frac{2}{3}$; trouver n et S.

600. (724) Trouver la somme :

1° des 8 premiers termes de la progression $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 1; $\frac{3}{\sqrt{3}}$; ...;

2° des n premiers termes de la suite $a^2 + 2b$, $a^4 + 4b$, $a^6 + 6b$, ...;

3° des n premiers termes de la suite $2n - 1$, $4n + 2$, $6n - 4$, ...

601. (725) Dans une progression géométrique, le premier et le troisième terme sont 8 et 18. Trouver le cinquième terme.

602. (726) Dans une progression géométrique, le premier terme est 32 et le produit du 3ᵉ par le 6ᵉ est égal à 17 496. Calculer le 8ᵉ terme.

603. (727) Insérer 1 ou 3 moyens géométriques entre 2 et 8.

604. (729) Trouver la somme des carrés et la somme des cubes des termes d'une progression géométrique limitée.

605. (730) La somme de trois nombres en progression géométrique est 21 et la somme de leurs carrés est 189. Trouver ces nombres.

606. (732) Une progression géométrique a 5 termes. La raison est égale au quart du premier terme, et la somme des deux premiers est 24. Trouver les cinq termes.

607. (733) La somme des termes d'une progression géométrique de cinq termes est 484; celle des termes de rang pair est 120. Trouver la progression.

608. (734) Si a, b, c, d sont quatre termes consécutifs d'une progression géométrique, montrer que

$$(b - c)^2 = ac + bd - 2ad.$$

609. (735) Si $\dfrac{1}{b-a}$, $\dfrac{1}{2b}$, $\dfrac{1}{b-c}$ sont en progression arithmétique, montrer que a, b, c sont en progression géométrique.

610. (736) Si a, b, c, sont en progression géométrique montrer que :

$$a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) = a^3 + b^3 + c^3.$$

611. (737) Calculer les nombres x, y, z, sachant que x, y, z est une progression arithmétique, y, x, z une progression géométrique et que le produit xyz vaut 216.

612. (738) Partager a en trois parties formant une progression géométrique, sachant que la troisième partie dépasse la première de d.

613. (740) Trouver cinq termes consécutifs d'une progression géométrique, connaissant le produit p des deux extrêmes et la somme s des trois moyens. *Application :* $p = 4/9$, $s = 1$.

614. (741) Trouver 6 termes consécutifs d'une progression géométrique, connaissant la somme a des deux extrêmes et la somme b des deux moyens.

LIMITES.

615. (743) Quelles sont les limites des sommes des n premiers termes des progressions géométriques illimitées :

1° $8;\ 2;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{8};\ldots$

2° $\frac{1}{3};\ \frac{2}{9};\ \frac{4}{27};\ \frac{8}{81};\ldots$

3° $8;\ \frac{24}{10};\ \frac{72}{100};\ldots$

4° $\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}};\ 1;\ \frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}};\ldots$

5° $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1};\ \frac{1}{2-\sqrt{2}};\ \frac{1}{2};\ldots$

6° $\sqrt{\frac{3}{2}};\ \frac{1}{3}\sqrt{2};\ \frac{2}{9}\sqrt{\frac{2}{3}};\ldots$

616. (744) Dans un carré dont le côté est a, on joint les milieux des quatre côtés et on forme un autre carré dont on joint encore les milieux des côtés pour former un nouveau carré, et ainsi de suite. Calculer la limite de la somme des aires de ces carrés.

617. (745) Dans un cercle de rayon R on inscrit un carré; dans ce carré on inscrit un cercle; dans celui-ci un autre carré; et ainsi de suite indéfiniment. On demande : 1° la limite de la somme des aires des cercles; 2° la limite de la somme des aires des carrés.

618. (746) On considère une suite de triangles ABC, $A_1B_1C_1$, ..., $A_nB_nC_n$, dont chacun a pour sommets les milieux des côtés du précédent. Calculer la limite de la somme des aires de ces triangles, lorsque n croît indéfiniment. On suppose connue l'aire S du premier triangle.

619. (747) Dans un triangle équilatéral de côté a_1, on inscrit un cercle dont le rayon est désigné par r_1; dans ce cercle on inscrit un triangle équilatéral et on désigne de son côté par a_2; puis par r_2 le rayon du cercle inscrit dans ce second triangle; et ainsi de suite indéfiniment. Calculer :

1° La limite de la somme des rayons des cercles inscrits;

2° La limite de la somme des côtés des triangles équilatéraux;

3° La limite de la somme des aires des cercles;

4° La limite de la somme des aires des triangles.

CHAPITRE XXII

Logarithmes.

§ I. — DÉFINITIONS.

437. Termes de deux progressions mis en correspondance. — Considérons deux progressions, l'une géométrique (G) commençant par 1 et ayant pour raison 10, l'autre arithmétique (A) commençant par 0 et ayant pour raison 1. Prolongeons-les indéfiniment dans les deux sens.

$$\ldots,\ \frac{1}{10^p},\ \ldots,\ \frac{1}{10^2},\ \frac{1}{10},\ 1,\ 10,\ 10^2,\ \ldots,\ 10^p,\ \ldots \quad (G)$$

$$\ldots,\ -p,\ \ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p,\ \ldots \quad (A)$$

Insérons ensuite un même nombre $n-1$ de moyens entre les termes des deux progressions. Nous obtenons deux progressions *élargies* (G′) et (A′), dont les raisons sont $q = \sqrt[n]{10}$ et $r = \frac{1}{n}\cdot$

$$\ldots\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10^2}},\ldots,\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}},\ \ldots,\ \frac{1}{q^2},\ \frac{1}{q},\ \mathbf{1},\ q,\ q^2\ \ldots,\ q^{n-1},\ \mathbf{10},\ q^{n+1},\ \ldots,\ \mathbf{10^2},\ \ldots$$

$$\ldots\mathbf{-2},\ldots,\ \mathbf{-1},\ldots,-2r,\ -r,\ \mathbf{0},\ r,\ 2r,\ \ldots,\ (n-1)r,\ \mathbf{1},\ (n+1)r,\ \ldots,\ \mathbf{2},\ \ldots$$

Nous appellerons **termes correspondants** *des deux progressions* (G′) *et* (A′) *d'abord les termes* 1 *et* 0, *puis ceux qui occupent le même rang, ces rangs étant comptés dans* (G′) *à partir du terme* 1, *et dans* (A′) *à partir du terme* 0, *et d'un même côté de ces termes.*

438. Définition. — *On appelle* **logarithme** *d'un nombre faisant partie de la progression géométrique* (G′) *le terme correspondant de la progression arithmétique* (A′).

En vertu de cette définition, on peut écrire :

$$\log 1 = 0;\ \log 10^5 = 5;\ \log q^2 = 2r;\ \log q^p = pr;$$

$$\log\frac{1}{10} = -1;\ \log\frac{1}{1000} = -3;\ \log\frac{1}{q^2} = -2r;\ \log\frac{1}{q^p} = -pr.$$

Remarques. — I. Si le logarithme du nombre A est a, on dit aussi que A est *l'antilogarithme* de a.

II. On sait (**315, 317**) que l'on a

$$\sqrt[n]{10^m} = 10^{\frac{m}{n}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{10^p} = 10^{-p}.$$

Les progressions (G′) et (A′) peuvent donc s'écrire

$$\ldots,\ 10^{-2},\ \ldots,\ 10^{-1},\ \ldots,\ 10^{-\frac{1}{n}},\ 1,\ 10^{\frac{1}{n}},\ 10^{\frac{2}{n}},\ \ldots,\ 10^{\frac{n-1}{n}},\ 10,\ \ldots,\ 10^2,\ \ldots$$

$$\ldots,\ -2,\ \ldots,\ -1,\ \ldots,\ -\frac{1}{n},\ 0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \ldots,\ \frac{n-1}{n},\ 1,\ \ldots,\ 2,\ \ldots$$

On voit que *chaque puissance de* 10 *a pour logarithme l'exposant entier ou fractionnaire, positif ou négatif de cette puissance.*

439. Extension de la définition précédente. — Jusqu'ici les nombres qu'on ne peut pas insérer dans la progression (G) n'ont pas de logarithme. Parmi ces nombres se trouvent tous les nombres rationnels positifs autres que les puissances de 10 et leurs inverses, car nous avons montré que ces nombres ne peuvent pas faire partie d'une même progression géométrique avec 1 et 10 (**429**).

La définition exacte du logarithme d'un nombre qu'on ne peut pas insérer dans la progression (G) relève d'une autre partie du cours d'algèbre. Dans ce qui suit, nous nous bornerons à montrer comment on peut obtenir une valeur suffisamment approchée de ce logarithme.

Soit N un nombre *positif* qui ne peut être inséré dans la progression (G). Ce nombre N sera compris entre deux termes consécutifs de la progression (G′), car celle-ci s'étend de 0 à $+\infty$. Soit

$$q^m < N < q^{m+1} \quad \text{ou} \quad 10^{\frac{m}{n}} < N < 10^{\frac{m+1}{n}}. \tag{1}$$

On démontre que *si le nombre* a *est plus grand que le nombre* b, *on a aussi* $\log a > \log b$. Les relations (1) peuvent donc s'écrire

$$\log 10^{\frac{m}{n}} < \log N < \log 10^{\frac{m+1}{n}}$$

ou

$$\frac{m}{n} < \log N < \frac{m+1}{n}. \tag{2}$$

Ces relations montrent que les deux multiples consécutifs de $\frac{1}{n}$, $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$, sont les valeurs approchées de log N à moins de $\frac{1}{n}$. En remplaçant log N par une de ces valeurs approchées, on commet une erreur inférieure à un n^{me}. Ainsi, **les logarithmes approchés à moins d'un n**^{me} *du nombre* N *sont les logarithmes des deux moyens qui comprennent* N, *quand on insère* n — 1 *moyens dans* (G) *et* (A).

Si n augmente de plus en plus, l'erreur qu'on commet en remplaçant log N par $\frac{m}{n}$ ou $\frac{m+1}{n}$ peut devenir et rester aussi petite qu'on le désire.

Dans les tables ordinaires, on donne les logarithmes avec 5 décimales, c'est-à-dire avec une erreur inférieure à un cent-millième; leur calcul demanderait donc l'insertion de 99 999 moyens. En face du nombre 2, par exemple, on lit 0,30 103; c'est un de ses logarithmes à moins de 0,000 01; dans la pratique, on écrit $\log 2 = 0{,}30\,103$.

Remarques. — I. *Les nombres négatifs n'ont pas de logarithmes,* car les termes des progressions (G) et (G′) sont positifs.

II. Les logarithmes que nous venons de définir, sont appelés *logarithmes décimaux,* parce que le logarithme de 10 est 1.

440. Généralisation. — Au lieu de considérer les progressions (G) et (A), prenons les progressions plus générales

$$\ldots\quad \frac{1}{a^p},\quad \ldots,\quad \frac{1}{a^2},\quad \frac{1}{a},\quad 1,\quad a,\quad a^2,\quad \ldots,\quad a^p,\quad \ldots$$

$$\ldots\ -p,\quad \ldots,\ -2,\ -1,\quad 0,\quad 1,\quad 2,\quad \ldots,\quad p,\quad \ldots$$

la raison a de la première étant un nombre positif, différent de 1.

Insérons un même nombre $n-1$ de moyens entre les termes des progressions, et regardons comme correspondants, d'abord les termes 1 et 0, puis les termes des deux progressions élargies qui occupent le même rang, ces rangs étant comptés respectivement à partir des termes 1 et 0, et d'un même côté de ces termes. Nous pouvons alors reprendre, point par point, l'exposé précédent; il suffit de remplacer partout 10 par a; toutefois, si a était inférieur à 1, le sens des inégalités (2) du n° **439** serait à changer.

L'ensemble des deux progressions géométrique et arithmétique définit *un système de logarithmes.* Il existe une infinité de systèmes de logarithmes, car a peut prendre une infinité de valeurs.

La base *d'un système est le nombre qui a pour logarithme l'unité,*

§ II. — PROPRIÉTÉS DES LOGARITHMES.

441. Remarque préliminaire. — Dans les démonstrations des propriétés des logarithmes, nous ne considérons que des nombres qui font partie de la progression géométrique (G) ou qui peuvent y être insérés comme moyens.

Nous appliquerons pourtant ces propriétés à des nombres positifs quelconques. Il en résultera des erreurs; mais ces erreurs seront d'autant plus faibles que l'on prendra les valeurs des logarithmes de ces nombres avec une approximation plus grande.

442. Théorème I. — ***Le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes des facteurs.***

I. Deux facteurs. — Nous supposons que les deux facteurs du produit $\alpha\alpha'$ sont supérieurs à 1; les raisonnements seraient analogues s'il en était autrement.

Si on considère les nombres $\alpha = q^p$ et $\alpha' = q^{p'}$, on a

$$\alpha\alpha' = q^p \times q^{p'} = q^{p+p'}.$$

Mais par définition (438), on a

$$\log \alpha = pr; \quad \log \alpha' = p'r; \quad \log \alpha\alpha' = (p + p')r.$$

Par suite, $$\log \alpha\alpha' = \log \alpha + \log \alpha'.$$

II. Plusieurs facteurs. — On a, par exemple,

$$\log \alpha\alpha'\alpha'' = \log[(\alpha\alpha') \times \alpha''] = \log \alpha\alpha' + \log \alpha''$$
$$= \log \alpha + \log \alpha' + \log \alpha''.$$

443. Théorème II. — ***Le logarithme d'une fraction est égal à l'excès du logarithme du numérateur sur le logarithme du dénominateur.***

Soit la fraction $q = \frac{A}{B}$. On a $qB = A$; d'où

$$\log q + \log B = \log A \quad \text{et} \quad \log q = \log A - \log B.$$

444. Théorème III. — ***Le logarithme d'une puissance d'un nombre est égal au produit du logarithme de ce nombre par l'exposant de la puissance.***

On a, par exemple, $A^4 = A.A.A.A$; d'où

$$\log A^4 = \log A + \log A + \log A + \log A = 4 \log A.$$

445. Théorème IV. — ***Le logarithme d'une racine arithmétique est égal au quotient du logarithme du radicand par l'indice de la racine.***

Soit $x = \sqrt[n]{A}$; on a $x^n = A$; d'où

$$n \log x = \log A \quad \text{et} \quad \log x = \frac{1}{n} \log A.$$

REMARQUE. — *Le théorème III peut être étendu aux cas où l'exposant est fractionnaire ou négatif.*

I. Si n est *fractionnaire* et égal à $\frac{p}{q}$, p et q étant des entiers positifs, on a

$$A^n = A^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{A^p}.$$

Par suite, $\log A^n = \frac{1}{q} \log A^p = \frac{p}{q} \log A = n \log A.$

II. Si n est *négatif* et égal à $-n'$, n' étant positif, on a

$$A^n = A^{-n'} = \frac{1}{A^{n'}}.$$

Par suite, $\log A^n = \log 1 - n' \log A = -n' \log A = n \log A.$

446. Applications. — I. En vertu des théorèmes précédents, l'usage des logarithmes simplifie le calcul des expressions numériques, puisqu'ils permettent de remplacer :

une *multiplication* par une *addition*;
une *division* par une *soustraction*;
une *élévation à une puissance* par une *multiplication*;
une *extraction de racine* par une *division*.

II. En appliquant les quatre théorèmes, on peut calculer le logarithme de *tout monôme*. Voici deux exemples.

1° $\log \frac{ab^3}{c^2} = \log ab^3 - \log c^2 = (\log a + \log b^3) - 2 \log c$
$= \log a + 3 \log b - 2 \log c.$

2° $\log (3a^5 \sqrt[3]{b^2})^2 = 2 \log 3a^5 \sqrt[3]{b^2} = 2\left(\log 3 + \log a^5 + \frac{1}{3} \log b^2\right)$
$= 2\left(\log 3 + 5 \log a + \frac{2}{3} \log b\right) = 2 \log 3 + 10 \log a + \frac{4}{3} \log b.$

§ III. — DES LOGARITHMES VULGAIRES.

447. Dans les calculs numériques, on emploie exclusivement les logarithmes décimaux définis en partant des progressions

$$\ldots,\ \frac{1}{10^p},\ \ldots,\ \frac{1}{10^2},\ \frac{1}{10},\ 1,\ 10,\ 10^2,\ 10^3,\ \ldots,\ 10^p,\ \ldots$$

$$\ldots,\ -p,\ \ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ p,\ \ldots$$

On les appelle encore *logarithmes vulgaires* ou *logarithmes de Briggs.* Dans ce système :

1° *Le logarithme d'une puissance de* 10 *est égal à l'exposant de cette puissance.* On a, par exemple,

$$\log 10 = 1; \quad \log 10^2 = \log 100 = 2.$$

2° *Le logarithme de l'unité décimale du* p^e *ordre est égal à* $-$ p. On a, par exemple,

$$\log 0{,}1 = -1; \quad \log 0{,}01 = -2.$$

Les autres nombres rationnels ne peuvent pas être insérés dans la progression géométrique; leurs logarithmes sont des nombres irrationnels. Les tables en donnent des valeurs approchées sous la forme de nombres décimaux. *La partie entière* s'appelle **caractéristique** du logarithme; *la partie décimale* en est la **mantisse.**

448. Caractéristique du logarithme d'un nombre supérieur à 1. — ***Elle est positive et contient autant d'unités moins une que le nombre a de chiffres à sa partie entière.***

En effet, si le nombre A a n chiffres à sa partie entière, on a

$$10^{n-1} \leqslant A < 10^n,$$

car 10^{n-1} est le plus petit nombre entier de n chiffres et 10^n est le plus petit nombre entier de $n+1$ chiffres. Le logarithme de A est donc compris entre $n-1$ et n et sa caractéristique est $n-1$.

449. Logarithmes des nombres positifs inférieurs à l'unité. — Les logarithmes de ces nombres sont des nombres négatifs. On a trouvé avantageux de les transformer de telle sorte que la caractéristique seule soit négative. On a, par exemple,

$$-3{,}27\,514 = -3 - 0{,}27\,514 = -4 + (1 - 0{,}27\,514).$$

De là, on déduit

$$-3{,}27\,514 = -4 + 0{,}72\,486 \quad \text{qu'on écrit} \quad \bar{4}{,}72\,486.$$

450. Théorème. — ***Si l'on multiplie ou si l'on divise un nombre par*** 10^n, ***la mantisse de son logarithme ne change pas et la caractéristique est augmentée ou diminuée de*** n ***unités.***

C'est ce que montrent les égalités :

$$\log(\mathrm{A}.10^n) = \log \mathrm{A} + \log 10^n = \log \mathrm{A} + n;$$

$$\log \frac{\mathrm{A}}{10^n} = \log \mathrm{A} - \log 10^n = \log \mathrm{A} - n.$$

Conséquence. — *La mantisse du logarithme d'un nombre écrit dans le système décimal ne change pas quand on déplace la virgule dans le nombre.*

Par exemple, si $\log 45{,}3 = 1{,}65\,610$, on a, en vertu du théorème,

$$\log 4530 = 3{,}65\,610; \quad \log 4{,}53 = 0{,}65\,610; \quad \log 0{,}0453 = \bar{2}{,}65\,610.$$

451. Caractéristique du logarithme d'un nombre décimal positif inférieur à 1. — ***Elle est négative et égale, en valeur absolue, au rang du*** 1^er^ ***chiffre significatif après la virgule.***

Considérons le nombre décimal 0,0524 et montrons que la caractéristique de son logarithme est -2.

En effet, la caractéristique du logarithme de 5,24 est 0; et si on divise 5,24 par 100 ou 10^2 en vue d'obtenir le nombre 0,0524, la caractéristique diminue de 2.

452. Cologarithme. — *Le cologarithme d'un nombre est le logarithme de l'inverse de ce nombre.*

I. Montrons que le cologarithme d'un nombre est égal *à l'opposé* du logarithme de ce nombre. — En effet, on a

$$\operatorname{colog} \mathrm{A} = \log \frac{1}{\mathrm{A}} = \log 1 - \log \mathrm{A} = -\log \mathrm{A}.$$

II. On a trouvé avantageux de transformer les cologarithmes de façon à rendre leur partie décimale positive. Voici des exemples :

$\mathrm{Log}\, 78 = 1{,}89\,209$; $\operatorname{colog} 78 = -1{,}89\,209 = -2 + (1 - 0{,}89\,209) = \bar{2}{,}10\,791.$

$\mathrm{Log}\, 7 = 0{,}84\,510$; $\operatorname{colog} 7 = -0{,}84\,510 = -1 + (1 - 0{,}84\,510) = \bar{1}{,}15\,490.$

$\mathrm{Log}\, 0{,}08 = \bar{2}{,}90\,309$; $\operatorname{colog} 0{,}08 = -\bar{2}{,}90\,309 = 1 + (1 - 0{,}90\,309) = 1{,}09\,691.$

III. Règle. — *Pour avoir* **la caractéristique** *du cologarithme d'un nombre, on ajoute 1 à la caractéristique du logarithme du nombre et on change le signe de cette somme.*

Pour avoir **la mantisse** *du cologarithme d'un nombre, on retranche de 9 chacun des chiffres de la mantisse du logarithme, à partir de la gauche, sauf le dernier chiffre significatif à droite qu'on retranche de* 10. *S'il y a des zéros à la droite du dernier chiffre significatif, on les recopie.*

IV. Usage du cologarithme. — L'emploi du cologarithme permet de remplacer une soustraction de logarithmes par une addition : *le logarithme d'une fraction est égal au logarithme du numérateur plus le cologarithme du dénominateur.*

§ IV. — DES TABLES DE LOGARITHMES.

453. Les tables de logarithmes que nous avons publiées, donnent à la page 5 les logarithmes des nombres entiers de 1 à 100. Aux pages 6 à 23, on trouve les mantisses des logarithmes des nombres entiers de quatre chiffres.

454. Problème I. — *Trouver le logarithme d'un nombre entier ou décimal.*

1er cas : *Le nombre, abstraction faite de la virgule et des zéros qui le terminent, n'a pas plus de 4 chiffres.* — On lit directement la mantisse du logarithme dans les tables et on la fait précéder de la caractéristique voulue. Voici des exemples :

$$\log 67{,}3 = 1{,}82\,802; \qquad \log 6730 = 3{,}82\,802;$$
$$\log 35\,000 = 4{,}54\,407; \qquad \log 0{,}3731 = \overline{1}{,}57\,183.$$

2e cas : *Le nombre, abstraction faite de la virgule et des zéros qui le terminent, a plus de 4 chiffres.* — Soit à chercher le logarithme de 524,258. Les tables donnent

$$\log 5242 = 3{,}71\,950 \quad \text{et} \quad \log 5243 = 3{,}71\,958.$$

Le logarithme de 5242,58 est compris entre les logarithmes trouvés dont la différence, appelée *différence tabulaire*, est 8 (unités du 5e ordre décimal). Pour trouver le nombre qu'il faut ajouter à log 5242, et qu'on appelle *correction*, on suppose que *l'accroissement du logarithme est proportionnel à l'accroissement du nombre,* ce qui conduit d'ordinaire à des résultats suffisamment approchés. On dit alors :

Si 5242 croît de 1, la mantisse croît de $\Delta = 8$.

Si 5242 croît de 0,58, elle croît de $8 \times 0{,}58 = 4{,}64$, soit 5.

Il vient ainsi

$$\log 5242{,}58 = 3{,}71\,955 \quad \text{et} \quad \log 524{,}258 = 2{,}71\,955.$$

Voir la disposition pratique ci-dessous, à gauche.

$$\begin{array}{lll}
\log 5242 & = 3{,}71\,950 & \Delta = 8 \\
\quad 8 \times 0{,}58 = & \qquad\quad 5 & \\
\hline
\log 5242{,}58 & = 3{,}71\,955 & \\
\log 524{,}258 & = 2{,}71\,955. &
\end{array}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{array}{lll}
\log 5242 & = 3{,}71\,950 & \Delta = 8 \\
\qquad 0{,}5 & \longrightarrow \quad 4{,}0 & \\
\qquad 0{,}08 & \longrightarrow \quad 0{,}6 & \\
\hline
\log 5242{,}58 & = 3{,}71\,9546 & \\
\log 524{,}258 & = 2{,}71\,955. &
\end{array}$$

Le calcul de la correction s'appelle *interpolation par parties proportionnelles.* La correction $8 \times 0{,}58$ peut s'obtenir aussi à l'aide *du tableau des parties proportionnelles* correspondant à $\Delta = 8$; il contient les produits de 8 par 0,1; 0,2; ...; 0,9. Pour 0,5 la correction est 4,0; pour 0,08, elle est $6{,}4 : 10 = 0{,}64$, soit 0,6. — Voir la disposition pratique ci-dessus à droite.

RÈGLE. — 1° *On place la virgule de manière que le nombre ait quatre chiffres à sa partie entière;* 2° *On cherche le logarithme de la partie entière;* 3° *On ajoute au logarithme trouvé le produit arrondi de la différence tabulaire* Δ *par la partie décimale du nombre modifié au* 1°; 4° *On rectifie la caractéristique, s'il y a lieu.*

455. Problème II. — *Trouver le nombre qui a un logarithme donné.*

On remplace mentalement par 3 la caractéristique du logarithme, puis on cherche sa mantisse dans la partie des tables qui va de 1000 à 10 000.

1er cas : *La mantisse se trouve dans les tables.* — On lit le nombre correspondant.

Si la caractéristique est nulle ou positive, on donne au nombre trouvé autant de chiffres entiers, plus un, que la caractéristique contient d'unités. Si elle est négative, on écrit à la gauche du nombre trouvé autant de zéros que la caractéristique contient d'unités négatives et on place une virgule entre le premier et le second zéro.

Voici deux exemples :

$$\operatorname{Log} x = 5{,}69\,011; \quad \log 4899 = 3{,}69\,011; \quad x = 489\,900.$$
$$\operatorname{Log} x = \bar{2}{,}86\,130; \quad \log 7266 = 3{,}86\,130; \quad x = 0{,}072\,66.$$

2e cas : *La mantisse n'est pas dans les tables.* — Soit $\log x = 4{,}84\,841$. En considérant les deux mantisses qui comprennent 84 841, on a

$$\log 7053 = 3{,}84\,837; \quad \log 7054 = 3{,}84\,844.$$

La différence entre 84 841 et la mantisse immédiatement inférieure 84 837 est 4 (unités du 5e ordre décimal); la différence tabulaire est 7. On dira :

Si la mantisse croît de 7, le nombre 7053 croît de 1.

Si la mantisse croît de 4, le nombre 7053 croît de

$$\frac{1 \times 4}{7} = 0,571 \ldots, \text{ soit de } 0,57.$$

On aura $\log 7053,57 = 3,84\,841$ et $x = 70\,535,7$.

Voir la disposition pratique ci-dessous à gauche.

$$\begin{array}{rll}
\log x & = 4,84\,841 & \\
\log 7053 & = 3,84\,837 & \Delta = 7 \\
0,57 & = 4:7 & \\
\hline
\log 7053,57 & = 3,84\,841 & \\
x & = 70\,535,7. &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rll}
\log x & = 4,84\,841 & \\
\log 7053 & = 3,84\,837 & \Delta = 7 \\
0,5 & \longleftarrow \quad 3,5 & \\
0,07 & \longleftarrow \quad 0,49 & \\
\hline
\log 7053,57 & = 3,84\,841 & \\
x & = 70\,535,7. &
\end{array}$$

Le calcul de la correction peut se faire à l'aide du tableau des parties proportionnelles correspondant à $\Delta = 7$. Pour 3,5 la correction est 0,5. Il reste $4 - 3,5 = 0,5$. Pour 4,9 la correction est 0,7 et pour 0,49 ou 0,5 elle est 0,07. — Voir la disposition pratique ci-dessus à droite.

Règle. — 1° *On remplace la caractéristique par* 3; 2° *On cherche dans les tables la mantisse égale ou immédiatement inférieure à la mantisse du logarithme donné et on lit le nombre correspondant;* 3° *On ajoute au nombre trouvé, le quotient de la différence des deux logarithmes par la différence tabulaire* Δ; 4° *On met la virgule à la place voulue.*

Remarque. — Quand on calcule la correction en divisant la différence des logarithmes par la différence tabulaire, on arrondit le résultat à sa deuxième décimale; il serait illusoire de pousser le calcul plus loin.

§ V. — CALCULS LOGARITHMIQUES.

456. Les opérations qu'on peut avoir à faire sur des logarithmes ne présentent de particularités que si une ou plusieurs caractéristiques sont négatives.

457. Addition. — Exemple. — Pour obtenir la somme des logarithmes ci-contre, on additionne d'abord les mantisses et on trouve 1,61 920.

On écrit ensuite la partie décimale de cette somme et on ajoute 1 à la somme des trois caractéristiques qui est $\bar{2}$.

$$\begin{array}{r}
2,52\,740 \\
0,30\,259 \\
\bar{4},78\,921 \\
\hline
\bar{1},61\,920
\end{array}$$

458. Soustraction. — Toute soustraction d'un logarithme se ramène à une addition. Au lieu de soustraire log a, on ajoute colog a, qui est le nombre opposé. On a, par exemple,

$$\log \frac{23{,}5}{0{,}03} = \log 23{,}5 - \log 0{,}03 = \log 23{,}5 + \operatorname{colog} 0{,}03.$$

459. Multiplication d'un logarithme par un nombre entier.— Soit à multiplier $\overline{2},71\ 512$ par 3. On multiplie d'abord la mantisse par 3, et on trouve 2,14 536.

On écrit la partie décimale et on ajoute 2 au produit de -2 par 3; on trouve ainsi la caractéristique $\overline{4}$.

$$\begin{array}{r} \overline{2},71\ 512 \\ 3 \\ \hline \overline{4},14\ 536 \end{array}$$

460. Division d'un logarithme par un nombre entier.

Exemples. — I. Soit à diviser $\overline{3},27\ 523$ par 3. La caractéristique est divisible par 3 et on trouve immédiatement $\overline{1},09\ 174$.

II. Soit à diviser $\overline{4},27\ 523$ par 3. La caractéristique n'est pas divisible par 3, mais le dividende peut s'écrire $-6 + 2{,}27\ 523$. Le quotient cherché est donc $-2 + 0{,}75\ 841$ ou $\overline{2},75\ 841$.

461. Problème. — *Calculer l'expression*

$$x = \frac{89\ 748\sqrt[4]{0{,}003\ 78}}{\sqrt{47{,}526^3\sqrt[3]{0{,}025}}}.$$

On a

$$\log x = \log 89\ 748 + \frac{1}{4}\log 0{,}003\ 78 + \frac{3}{2}\operatorname{colog} 47{,}526 + \frac{1}{6}\operatorname{colog} 0{,}025.$$

Calculs auxiliaires

1° $\log 8974 = 3{,}95\ 299 \quad \Delta = 4$
$4 \times 0{,}8 = \quad 3$
$\log 8974{,}8 = 3{,}95\ 302$

2° $\log 0{,}00378 = \overline{3},57\ 749$

3° $\log 4752 = 3{,}67\ 688 \quad \Delta = 9$
$9 \times 0{,}6 = \quad 5$
$\log 47{,}526 = 1{,}67\ 693$
$\operatorname{colog} 47{,}526 = \overline{2},32\ 307$
$3 \operatorname{colog} 47{,}526 = \overline{6},96\ 921$

4° $\log 0{,}025 = \overline{2},39\ 794$
$\operatorname{colog} 0{,}025 = 1{,}60\ 206$

Calculs principaux

$\log 89\ 748 = 4{,}95\ 302$
$\frac{1}{4}\log 0{,}003\ 78 = \overline{1},39\ 437$
$\frac{3}{2}\operatorname{colog} 47{,}526 = \overline{3},48\ 461$
$\frac{1}{6}\operatorname{colog} 0{,}025 = 0{,}26\ 701$

$\log x = 2{,}09\ 901$
$\log 1256 = 3{,}09\ 899 \quad \Delta = 35$
$0{,}06 = 2 : 35$

$\log 1256{,}06 = 3{,}09\ 901$
$x = 125{,}606.$

462. *On appelle* **équation exponentielle** *toute équation de la forme* $a^x = b$, *dans laquelle* a *et* b *sont des nombres positifs.*

I. Au moyen des logarithmes, on peut résoudre les équations exponentielles.

Résoudre l'équation $3^x = \frac{2}{3}$. — On a

$$x \log 3 = \log 2 + \operatorname{colog} 3.$$

D'où $x = \frac{\log 2 + \operatorname{colog} 3}{\log 3} = \frac{0,30\,103 + \overline{1},52\,288}{0,47\,712} = \frac{-0,17\,609}{0,47\,712} = -0,37.$

II. Certaines équations exponentielles peuvent être résolues sans employer les logarithmes.

Ainsi l'équation $3^x = 243$ peut s'écrire $3^x = 3^5$, et on a $x = 5$.

III. *Résoudre l'équation* $5766 = 25\,000(1,04^x - 1)$.

On commence par isoler $1,04^x$. On trouve

$$1,04^x = \frac{30\,766}{25\,000}.$$

La résolution de cette équation donne environ $x = 5,29$.

IV. *Résoudre l'équation* $2^x - 125 = \frac{384}{2^x}$.

En faisant disparaître le dénominateur, on obtient l'équation

$$2^{2x} - 125.2^x - 384 = 0,$$

qui est une équation du second degré en 2^x. Elle donne $2^x = -3$ ou 128.

La racine -3 est à écarter, car par définition des équations exponentielles, la valeur de 2^x doit être positive. La 2^e racine donne

$$2^x = 128 = 2^7 \quad \text{ou} \quad x = 7.$$

EXERCICES

620. (761) Trouver les logarithmes des nombres suivants :

1° 375,21	4° 6309,25	7° 0,598 37
2° 527 209	5° 1,978 57	8° 0,007 207
3° 23,875	6° 0,0209	9° 0,046 792.

~~**621.**~~ (762) Trouver les antilogarithmes des nombres suivants :

1° 3,84 938	5° 2,99 132	9° 0,94 912
2° 4,94 041	6° $\overline{3}$,75 024	10° $\overline{2}$,14 320
3° 1,76 235	7° $\overline{1}$,20 202	11° $\overline{1}$,07 710
4° 5,42 085	8° $\overline{4}$,83 281	12° 0,49 086.

622. (763) Trouver les cologarithmes des nombres
0,005; 36; 523; 3420,5; 0,876; 5,6717.

623. (764) Exprimer en fonction de log a, log b et log c les logarithmes des expressions suivantes :

1° ab^2c	4° $\sqrt[3]{a^5b^3c}$	7° $a^2\sqrt[5]{b^2c^3}$
2° $0,1a^3bc^2$	5° $(10a^2b\sqrt[3]{c^2})^2$	8° $\sqrt[3]{a^4b\sqrt{c}}$
3° $\dfrac{a^2\sqrt{b}}{c}$	6° $\sqrt[5]{\dfrac{ab^2}{c^3}}$	9° $\left(\dfrac{a}{b^2}\right)^3\sqrt{\dfrac{a^2}{b}}$.

624. (765) Trouver, sans le secours des tables, les nombres dont les logarithmes sont :

1° $\log 3 + \log 5$	4° $\log 4 + 2$	7° $3 \log 2 + \log 5$
2° $\log 7 - \log 2$	5° $\log 7 - 3$	8° $1 + \log 5 - 2 \log 6$.
3° $\frac{1}{3}\log 27$	6° $1 - \frac{3}{2}\log 9$	9° $2 \log 4 - \frac{1}{3}\log 8$.

625. (766) Étant donnés :

1° $\log 2 = 0{,}30\,103$, trouver $\log 5$;

2° $\log 5 = 0{,}69\,897$, trouver $\log 8$;

23/10 3° $\log 0{,}8 = \bar{1}{,}90\,309$, trouver $\log 1250$;

4° $\log 2 = 0{,}30\,103$ et $\log 3 = 0{,}47\,712$, trouver $\log 2{,}88$;

5° $\log 6 = 0{,}77\,815$, $\log 4{,}4 = 0{,}64\,345$ et $\log 1{,}8 = 0{,}25\,527$, trouver $\log 2$, $\log 3$ et $\log 11$.

626. (767) Vérifier: $\log \frac{133}{65} + 2 \log \frac{13}{7} + \operatorname{colog} \frac{143}{90} + \log \frac{77}{171} = \log 2$.

627. (768) Trouver le nombre de chiffres de 2^{60}.

628. (769) Calculer par logarithmes les expressions suivantes :

1° $23\,571 \times 0{,}027\,38$	5° $(0{,}830\,57)^3$	9° $\sqrt[4]{937\,507}$
2° $0{,}839\,57 \times 94\,005 \times 0{,}03$	6° $(0{,}067\,005)^2$	10° $\sqrt[5]{0{,}006\,429\,5}$
3° $(2{,}81)^7$	7° $0{,}007 \times (341{,}94)^2$	11° $41\sqrt{0{,}004\,276\,81}$
4° $\dfrac{7{,}901\,75}{0{,}000\,374\,17}$	8° $\dfrac{3^2 \times 0{,}076}{457{,}61}$	12° $\dfrac{0{,}078\,189}{0{,}0085 \times 460{,}314}$

629. (770) Même question pour les expressions :

1° $\sqrt[4]{\dfrac{48 \times 0{,}081}{4{,}9447}}$ 5° $\sqrt[5]{\dfrac{(238{,}4)^2}{(2{,}6345)^3}}$ 9° $\dfrac{41{,}9}{(3{,}4115)^2}\sqrt[3]{(0{,}049)^2}$

2° $\dfrac{(0{,}378\,45)^2}{706{,}34}$ 6° $\dfrac{0{,}000\,925}{\sqrt{(4{,}015\,62)^3}}$ 10° $\left(\dfrac{(4{,}1327)^3 \times 3{,}706}{\pi\sqrt{0{,}921}}\right)^3$

3° $\left(\dfrac{\sqrt{37{,}406}}{0{,}017}\right)^3$ 7° $\dfrac{(401{,}29)^2}{93{,}24}\sqrt[4]{6129{,}43}$ 11° $\sqrt[3]{0{,}263\,09\sqrt{\dfrac{2{,}307}{(3{,}2)^3}}}$

4° $6{,}71\sqrt[3]{\dfrac{17\,841}{0{,}307}}$ 8° $\dfrac{0{,}0329\sqrt[5]{6087{,}3}}{(0{,}086\,986)^2}$ 12° $\dfrac{\sqrt[4]{19} \times \sqrt[3]{(0{,}201)^2}}{9371{,}5 \times \sqrt{3{,}7408}}$.

630. (772) On donne $a = 3{,}7937$, $b = 5{,}293$, $c = 4{,}601$. Calculer par logarithmes :

1° $x = a^3 - 3a + 2$

2° $x = a^2b + 1 - a^2 - b$

3° L'aire du triangle ayant pour côtés a, b, c.

631. (773) Résoudre les équations :

1° $\log(x^2 - 7) = 2\log(x + 3)$

2° $2\log x - 1 = \log\left(x - \dfrac{25}{10}\right)$

3° $\log(x^2 - 1) - \log(x^2 - 7x + 12) = \log 4$

4° $\log\sqrt{7x + 5} + \log\sqrt{2x + 3} = 1 + \log 4{,}5$

5° $\log(7x - 9)^2 + \log(3x - 4)^2 = 2$

6° $\log\sqrt{5x + 8} + \dfrac{1}{2}\log(2x + 3) = \log 15$.

632. (774) Résoudre les systèmes :

1° $x + y = 70$
$\log x + \log y = 3$

2° $\log x = \log y + 1$
$\log x + \log y = 1{,}95\,424$

3° $\log x - \log 5 = 1$
$\log x^3 + \log y^2 = \log 32$

4° $\log\sqrt{x} - \log\sqrt{5} = 0{,}5$
$2\log x - \log y = 1{,}39\,794$

5° $\log x + \log y = 3$
$5x^2 - 3y^2 = 11\,300$

6° $2\log x - \log y = 2$
$x^2 - 32y^2 = 23$.

633. (775) Résoudre les équations :

1° $7^x = 87,848$ 3° $24^{3x-2} = 10\,000$ 5° $2^x + 4^x = 272$

2° $\left(\frac{225}{28}\right)^x = \frac{8000}{7}$ 4° $3.3^x + \frac{18}{3^x} = 29$ 6° $4^{x+1} + \frac{64}{4^x} = 257.$

Résoudre les équations suivantes sans recourir aux tables.

634. 1° $4^x = 0,0625$ 4° $\sqrt{8^x} = 0,125$ 7° $(4^{3-x})^{2-x} = 1$

(281) 2° $4.2^x = 0,25$ 5° $144^x = 2\sqrt{3}$ 8° $3^{\sqrt{x}} = 243$

3° $\left(\frac{5}{3}\right)^{x^2-3x} = \left(\frac{3}{5}\right)^{2x-3}$ 6° $54^{x+1} = \frac{\sqrt[3]{4}}{6}$ 9° $\sqrt[x+1]{4} = \sqrt[3x-1]{16}.$

635. 1° $2^{x+3} + 4^{x+1} = 320$ 4° $x^x - x^{-x} = 3(1 + x^{-x})$

(282) 2° $5.9^x - 7.3^x = 3456$ 5° $3^{x+1} + 3^{x-2} - \frac{15}{3^{x-1}} = \frac{247}{3^{x-2}}$

3° $3.2^{x+3} = 192.3^{x-3}$ 6° $3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4} = 363.$

CHAPITRE XXIII

Intérêts composés.

§ I. — INTÉRÊTS COMPOSÉS.

463. Définition. — *Un capital est placé à intérêts composés, lorsque à la fin de chaque période (ordinairement une année) les intérêts rapportés s'ajoutent au capital pour produire des intérêts pendant les périodes qui suivent.*

On dit dans ce cas que les intérêts *se capitalisent* à la fin de chaque période.

464. Formule des intérêts composés. — *Calculer la valeur acquise* C *par un capital* c *placé à intérêts composés pendant* n *années au taux* i *pour un franc.*

Un franc rapporte i fr par an. Les c fr rapportent ci fr et c devient à la fin de la première année $c + ci$ ou $c(1 + i)$.

Le capital placé à intérêts pendant la 2e année est $c(1 + i)$. Il rapporte $c(1 + i)i$ fr d'intérêts et devient à la fin de la 2e année

$$c(1 + i) + c(1 + i)i = c(1 + i)^2.$$

On montrerait de même que le capital primitif devient à la fin de la troisième année $c(1 + i)^3$, et ainsi de suite.

Donc, après n années, la valeur acquise C par le capital c sera $c(1 + i)^n$ et on peut écrire, en posant $1 + i = u$,

$$\mathbf{C = cu^n}.$$

Remarques. — I. $u, u^2, u^3, \ldots, u^n$ représentent *les valeurs acquises* par 1 fr placé à intérêts composés au taux i pour 1, à la fin de la 1re, 2e, 3e, ..., ne année. La table I donne les valeurs de u^n.

On trouvera cette table I, ainsi que les tables II à V dont il sera question dans la suite, aux pages 154 à 163 de nos *Tables de logarithmes et autres tables.* Nous avons aussi publié séparément les mêmes tables I à V sous le titre de *Tables.*

II. Si le capital c était placé pendant p semestres (trimestres, mois, ...) au taux semestriel (trimestriel, mensuel, ...) de r pour 1 fr, on trouverait de même pour la valeur acquise $C = c(1 + r)^p$.

465. Application numérique. — *Calculer la valeur acquise après 12 ans par un capital de 40 000 fr, placé à intérêts composés, au taux 4,5 %.*

1° Par logarithmes. — On a

$$C = 40\,000\,(1{,}045)^{12} \text{ ou } \log C = \log 40\,000 + 12 \log 1{,}045.$$

$$\log 40\,000 = 4{,}60\,206$$

$$12 \log 1{,}045 = 12 \times 0{,}019\,1163 = 0{,}22\,940$$

$$\log C = 4{,}83\,146\,; \quad C = 67\,835{,}70 \text{ fr.}$$

Remarques. — I. Les logarithmes marqués dans les tables ne sont que des valeurs approchées des logarithmes exacts. Lorsque $\log u$ doit être multiplié par n, on prend $\log u$ avec 7 décimales pour ne pas rendre l'erreur trop considérable.

II. Dans le cas actuel, on a $12 \log 1{,}045 = 0{,}229\,3956$. Nous ne conservons au produit que 5 chiffres décimaux, mais nous forçons le dernier chiffre conservé, *parce que le premier chiffre qui suit est plus grand que* 4.

2° Par la table I. — Pour $n = 12$, on trouve dans la colonne 4,5 %

$$(1{,}045)^{12} = 1{,}695\,8814.$$

D'où $$C = 40\,000 \times 1{,}695\,8814 = 67\,835{,}27.$$

466. Cas particulier. — *Si la durée du placement n'est pas un nombre entier d'années,* on applique encore la formule $C = cu^n$, dans laquelle n représente le temps, *exprimé en années.*

EXEMPLE. — *Trouver la valeur acquise après 8 ans et 8 mois par une somme de 100 000 fr placée à intérêts composés, au taux de 4%.*

8 ans et 8 mois font $\frac{26}{3}$ d'années. On a donc

$$C = 100\,000(1{,}04)^{\frac{26}{3}} \quad \text{et} \quad \log C = \log 100\,000 + \frac{26}{3}\log 1{,}04.$$

$$\log 10\,000 = 5$$

$$\frac{26}{3}\log 1{,}04 = \frac{26}{3} \times 0{,}017\,0333 = 0{,}14\,762$$

$$\log C = 5{,}14\,762;\ C = 140\,481 \text{ fr.}$$

467. Calcul du capital placé. — La formule $C = cu^n$ donne

$$c = \frac{C}{u^n} \quad \text{ou} \quad c = Cv^n, \quad \text{en posant } \frac{1}{u} = v.$$

La table II donne les valeurs de v^n.

APPLICATION NUMÉRIQUE. — *Quel est le capital qui, placé à intérêts composés au taux de 5% pendant 10 ans, est devenu 12 640 fr?*

1° PAR LOGARITHMES. — On a :

$$c = \frac{12\,640}{1{,}05^{10}} \quad \text{ou} \quad \log c = \log 12\,640 + 10 \operatorname{colog} 1{,}05.$$

$$\log 12\,640 = 4{,}10\,175$$

$$10 \operatorname{colog} 1{,}05 = 10 \times \bar{1}{,}978\,8107 = \bar{1}{,}78\,811$$

$$\log c = 3{,}88\,986;\ c = 7760 \text{ fr.}$$

2° PAR LA TABLE II. — Pour $n = 10$, on trouve dans la colonne 5%

$$v^{10} = 0{,}613\,9133.$$

D'où $$c = 12\,640 \times 0{,}613\,9133 = 7759{,}86 \text{ fr.}$$

468. Calcul du temps. — La formule $C = cu^n$ donne

$$u^n = \frac{C}{c} \quad \text{et} \quad n \log u = \log C + \operatorname{colog} c.$$

D'où $$n = \frac{\log C + \operatorname{colog} c}{\log u}.$$

APPLICATION NUMÉRIQUE. — *Combien de temps faut-il pour qu'une somme placée à intérêts composés à 4%, soit augmentée de sa moitié?*

1° PAR LOGARITHMES. — Soit a le capital placé; lorsqu'il aura été augmenté de sa moitié, il sera $\frac{3a}{2}$. On a donc :

$$\frac{3a}{2} = a(1,04)^n \quad \text{ou} \quad 1,5 = 1,04^n;$$

$$n = \frac{\log 1,5}{\log 1,04} = \frac{0,17\,609}{0,01\,703} = 10,34,$$

ou environ 10 ans, 4 mois, 2 jours.

2° PAR LES TABLES. — La table I donne :

$$1,04^{10} = 1,480\,2443; \quad 1,04^n = 1,5; \quad 1,04^{11} = 1,539\,4541.$$

Par suite, n est compris entre 10 et 11. Une interpolation nous donnera une valeur plus approchée. On a :

$$1,04^{11} - 1,04^{10} = 0,059\,2098 = \text{appr. } 5921 \text{ unités du } 5^{e} \text{ ordre.}$$
$$1,04^{n} - 1,04^{10} = 0,019\,7557 = \text{appr. } 1976 \text{ unités du } 5^{e} \text{ ordre.}$$

Si u^n croît de 5921, n croît de 1;

Si u^n croît de 1976, n croîtra de $\frac{1 \times 1976}{5921} = 0,333...$, soit 0,33.

On a donc $n = 10,33$.

469. Calcul du taux. — 1° En prenant les logarithmes des deux membres de l'égalité $C = cu^n$, on trouve finalement

$$\log u = \frac{\log C + \text{colog}\, c}{n}.$$

2° On peut aussi se servir de la table I et faire une interpolation.

§ II. — ESCOMPTE A INTÉRÊTS COMPOSÉS.

470. Notion. — Lorsque l'échéance d'une dette est à long terme, l'escompte et la valeur actuelle de la dette se calculent par la méthode de l'escompte en dedans et à intérêts composés : *La somme payée aujourd'hui pour acquitter la dette est telle que, placée à intérêts composés jusqu'au moment de l'échéance, elle acquerrait une valeur égale au montant de la dette.*

471. Formule de l'escompte à intérêts composés. — *Quelle est la valeur actuelle* c *d'une somme* C *payable dans* n *années, le taux de l'intérêt composé étant* i *pour* 1 *fr?*

La valeur actuelle d'une dette est le capital dont la valeur acquise aprés n années de placement, est égale au montant de la dette. On doit donc avoir

$$C = c(1+i)^n = cu^n.$$

Par suite,
$$c = \frac{C}{u^n} = Cv^n.$$

C'est sous une autre forme, la formule des intérêts composés.

Remarques. — I. v représente la valeur d'un franc, *un an avant son échéance*, le taux de l'intérêt étant i pour un. De même v^2, v^3, ..., v^n représentent les valeurs d'un franc, 2, 3, ..., n années avant son échéance, le taux de l'intérêt étant i pour un.

II. La formule de l'escompte à intérêts composés donne lieu aux quatre mêmes problèmes que la formule de l'intérêt composé. Nous ne les exposerons pas, car ils ne diffèrent que par la forme de l'énoncé de ceux que nous avons résolus plus haut. On aura, par exemple, l'énoncé :

Calculer le taux de l'intérêt, sachant qu'une dette de C *fr devant échoir dans* n *années a été remboursée aujourd'hui par* c *fr.*

472. Valeur d'un capital. — *La valeur d'un capital dépend de l'époque d'évaluation.*

Exemples. — I. Un capital placé autrefois à intérêts composés dans une banque au taux i pour un est devenu aujourd'hui c. Il y a deux ans, sa valeur était cv^2 (**471**); dans cinq ans, il sera devenu cu^5 (**464**); etc.

II. Une dette c doit échoir dans n années. Trois ans avant l'échéance, on peut l'acquitter en payant cv^3; un an après l'échéance, il faudra payer cu; etc.

Règle. — *Si la valeur d'un capital à une certaine époque est* c

1° *On obtient la valeur qu'il avait* n *années plus tôt, en multipliant* c *par* v^n;

2° *On obtient la valeur qu'il aura* n *années plus tard, en multipliant* c *par* u^n.

473. Problème I. — *On se propose de remplacer par un paiement unique, à effectuer dans* q *années, les dettes* a, b, c, *payables respectivement dans* m, n, p *années. Trouver le montant de ce paiement unique,* i *étant le taux pour* 1 *fr.* (Problème de l'échéance commune).

Pour que les deux intervenants consentent à la substitution de la dette unique x aux dettes a, b, c, il faut qu'*aujourd'hui* la valeur de x soit égale à la somme des valeurs des trois paiements distincts; autrement dit, la valeur actuelle de x doit égaler la somme des valeurs actuelles des trois dettes a, b, c. On doit donc avoir

$$xv^q = av^m + bv^n + cv^p \quad \text{ou} \quad x = \frac{av^m + bv^n + cv^p}{v^q}.$$

474. Problème II. — *Trois dettes,* a, b, c, *payables respectivement dans* m, n, p *années, doivent être remplacées par un paiement unique* a + b + c. *Trouver l'échéance de ce paiement.* (Problème de l'échéance moyenne).

Supposons que la somme unique soit payable dans x années, et prenons le moment actuel comme époque d'évaluation. On aura

$$(a + b + c)v^x = av^m + bv^n + cv^p.$$

D'où
$$v^x = \frac{av^m + bv^n + cv^p}{a + b + c}.$$

On calculera x comme au nº **468**, en se servant de la table II et en faisant une interpolation, s'il y a lieu.

EXERCICES

636. (776) Calculer la valeur acquise par un certain capital.

1º 2000 fr placés à intérêts composés à 5% pendant 8 ans;
2º 18 400 fr » » 6% » 10 ans;
3º 14 112 fr » » 4% » 4 ans, 6 mois.

c. p. 316

637. (777) Calculer les intérêts composés produits par un capital de 25 000 fr placé au taux semestriel de 3% pendant 8 ans, 6 mois.

638. (779) Un capital de 30 000 fr a été placé au taux de 4% pendant 10 années. Calculer l'intérêt produit pendant les 5 dernières années.

639. (780) Calculer le capital qui, placé à intérêts composés,

1º au taux 5% est devenu 4332,98 fr après 5 ans;
2º » 5,5% » 8214,37 fr » 4 ans.

640. (781) Calculer la valeur actuelle d'une dette de 30 000 fr exigible dans 8 années; taux 6 %.

641. (782) En payant une dette douze ans avant l'échéance, on a obtenu une réduction de 2570,62 fr. Calculer la valeur nominale de la dette et la somme payée pour l'acquitter. Le taux de l'intérêt composé est 5 %.

642. (783) Si on acquittait dans 7 ans un emprunt contracté aujourd'hui, on devrait payer 1146,80 fr de plus que si on l'acquittait dans 5 ans. Le taux de l'intérêt composé est 4 %. Trouver le montant de l'emprunt. C = 11.550 fr.

643. (785) Dans deux ans, un capital placé autrefois à intérêts composés au taux 4 %, sera devenu 41 500 fr.

1° Quelle sera sa valeur dans 5 ans?

2° Quelle était sa valeur il y a 4 ans?

644. (786) Quel est le temps nécessaire pour qu'un capital, placé à intérêts composés au taux 6 %, soit doublé?

645. (788) Pour acquitter une dette de 24 000 fr 3 ans avant son échéance, j'ai dû payer 21 000 fr. Trouver le taux de l'intérêt composé.

646. (789) De combien de temps faut-il avancer le payement d'une dette pour ne devoir payer que la moitié de la valeur nominale? Le taux de l'intérêt composé est 5,5 %.

647. (790) Deux capitaux égaux sont placés à intérêts composés, le premier à 3 %, le second à 6 %. Après combien de temps le second sera-t-il devenu le double du premier?

648. (792) Une dette de 6083,26 fr, exigible dans 5 ans, et une dette de 6579,66 fr exigible dans 7 ans ont même valeur actuelle. Trouver le taux de l'intérêt composé et la valeur actuelle.

649. (794) Une personne doit 8000 fr payables dans 2 ans, 7000 fr payables dans 5 ans et 9000 fr payables dans 6 ans. Que doit-elle payer dans 3 ans pour acquitter les trois dettes? Le taux de l'intérêt composé est 6 %.

650. (795) Deux dettes de 12 000 fr chacune sont exigibles, la première dans 7 ans, la seconde dans 30 ans. Trouver le moment de l'échéance moyenne, si le taux de l'intérêt composé est 4 %.

651. (798) Un effet de 40 000 fr ayant été protesté, le tiré s'engage à payer 50 000 fr dans 5 ans. Quelle somme doit-il débourser actuellement pour compléter le payement, le taux de l'intérêt composé étant 5 %?

652. (799) Trois dettes de 6000 fr, 7500 fr, 9300 fr sont respectivement payables dans 2 ans, 4 ans, 5 ans. Le débiteur paie de suite 10 000 fr et souscrit pour le reste un billet payable dans 4 ans. Quel est le montant de ce billet, si le taux de l'intérêt composé est 6 %?

CHAPITRE XXIV

Annuités.

§ I. — CONSTITUTION D'UN CAPITAL.

475. Définition. — *On appelle* **annuité** *ou* **rente** *une suite de versements égaux, effectués annuellement, en vue de constituer un capital ou d'éteindre une dette.*

Chaque versement est **un terme** de l'annuité.

Dans ce paragraphe, nous étudierons la constitution d'un capital par une annuité.

476. Problème fondamental. — *Quelle est la valeur* A *d'une annuité de* n *termes égaux à* a **au moment du dernier versement,** *le taux étant* i *pour* 1 *franc?*

Les divers termes de l'annuité restent placés pendant

$$n-1,\quad n-2,\quad n-3,\quad \ldots,\quad 2,\quad 1,\quad 0 \text{ années.}$$

Ils deviennent donc respectivement

$$au^{n-1},\quad au^{n-2},\quad au^{n-3},\quad \ldots,\quad au^2,\quad au,\quad a.$$

Par suite, $\quad A = a(u^{n-1} + u^{n-2} + \ldots\ldots + u + 1).$

Les parenthèses renferment la somme des termes d'une progression géométrique. En la remplaçant par sa valeur, il vient

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}\,\frac{\mathbf{u}^n - 1}{\mathbf{i}}.$$

Remarque. — La valeur d'une annuité à une époque quelconque s'obtient en multipliant A par une puissance convenable de u ou de v (**472**).

Ainsi, au moment du versement du 1er terme, elle vaut Av^{n-1}.

Un an après le versement du dernier terme, elle vaut

$$Au = \frac{au(u^n - 1)}{i}.$$

477. Recherche du capital constitué. — 1° *Par logarithmes.* — On calcule d'abord u^n; puis $u^n - 1 = x$. On a ensuite

$$\log A = \log a + \log x + \operatorname{colog} i.$$

2° *Par les tables.* — La table III donne les valeurs de $\frac{u^n - 1}{i}$.

Application. — *Quel est le capital constitué par* 10 *versements annuels de* 500 *fr, au moment du dernier versement, le taux de l'intérêt étant* 4,5 %?

1° Par logarithmes. — On a

$$A = 500 \times \frac{(1{,}045)^{10} - 1}{0{,}045}.$$

Or, $\log (1{,}045)^{10} = 0{,}19\,116$; $(1{,}045)^{10} = 1{,}552\,96$.

Par suite, $$A = \frac{500 \times 0{,}552\,96}{0{,}045}.$$

$$\begin{aligned}
\log 500 &= 2{,}69\,897\\
\log 0{,}552\,96 &= \bar{1}{,}74\,270\\
\operatorname{colog} 0{,}045 &= 1{,}34\,679\\
\log A &= 3{,}78\,846; \qquad A = 6144{,}14.
\end{aligned}$$

2° Par la table III. — On a

$$A = 500 \times \frac{(1{,}045)^{10} - 1}{0{,}045} = 500 \times 12{,}288\,2094 = 6144{,}10.$$

478. Recherche du terme de l'annuité.

1° *Par logarithmes.* — La formule fondamentale donne

$$a = \frac{Ai}{u^n - 1}.$$

Après avoir calculé d'abord $u^n - 1 = x$, on a

$$\log a = \log A + \log i + \operatorname{colog} x.$$

2° *Par la table* V. — Cette table donne les valeurs de l'expression $i + \frac{i}{u^n - 1}$ dont on déduira celle de $\frac{i}{u^n - 1}$ en retranchant i.

479. Recherche du nombre de termes.

1° *Par logarithmes.* — La formule fondamentale donne

$$u^n = \frac{Ai + a}{a} \quad \text{ou} \quad n \log u = \log(Ai + a) + \operatorname{colog} a.$$

Par suite, $$n = \frac{\log(Ai + a) + \operatorname{colog} a}{\log\ u}.$$

2° *Par la table* III. — La formule fondamentale donne

$$\frac{u^n - 1}{i} = \frac{A}{a}.$$

En utilisant la table III, on pourra déterminer n ou ses valeurs approchées à moins d'une unité. Dans ce dernier cas, on aura recours à un arrangement comme dans l'application suivante.

480. Application numérique. — *Trouver le nombre de versements annuels de* 2500 *fr nécessaires pour qu'au moment du dernier versement le capital constitué soit* 22 500 *fr. Le taux de l'intérêt est* 4 %.

On a $$\frac{1{,}04^n - 1}{0{,}04} = \frac{22\,500}{2500} = 9.$$

En consultant la table III, colonne 4 %, on voit que n est compris entre 7 et 8. Par suite, 7 versements annuels de 2500 fr ne suffisent pas pour constituer le capital de 22 500 fr.

1er Arrangement. — *Effectuer un versement supplémentaire un an après le versement du dernier terme, de manière que le capital de* 22 500 *fr soit constitué à ce moment.*

La valeur de l'annuité de 7 termes, un an après le dernier versement, est

$$\frac{a(u^7 - 1)}{i} \times u.$$

Le versement supplémentaire sera égal à

$$A - \frac{a(u^7 - 1)}{i} \times u = 22\,500 - 2500 \times \frac{1{,}04^7 - 1}{0{,}04} \times 1{,}04.$$

La table III donne $\dfrac{1,04(1,04^7 - 1)}{0,04} = 8,214\,2263.$

En effectuant les calculs, on trouve que le versement supplémentaire est

$$22\,500 - 20\,535,57 = 1964,43 \text{ fr.}$$

2e Arrangement. — *Modifier le terme de manière que 7 ou 8 termes suffisent.* Le terme sera

$$22\,500 \times \frac{0,04}{1,04^7 - 1} \quad \text{ou bien} \quad 22\,500 \times \frac{0,04}{1,04^8 - 1} \text{ (Table V).}$$

481. Recherche du taux. — Si $n > 3$, la formule fondamentale conduit à une équation d'un degré supérieur au second en u ou en i. Pour ce motif, *la recherche du taux se fait d'ordinaire au moyen de la table* III. On a

$$\frac{u^n - 1}{i} = \frac{A}{a}.$$

On cherche à la n^e ligne de la table III, les deux nombres qui comprennent $\dfrac{A}{a}$, puis on fait une interpolation s'il y a lieu.

Application. — *Le capital constitué au moment du dernier versement par* 20 *versements annuels de* 2000 *fr est* 68 000 fr. *Trouver le taux.*

On a $\quad 68\,000 = 2000 \times \dfrac{u^{20} - 1}{i} \quad$ et $\quad \dfrac{u^{20} - 1}{i} = 34.$

Dans la table III, on trouve :

$$\frac{(1,05)^{20} - 1}{0,05} = 33,065\,9541; \quad \frac{(1,055)^{20} - 1}{0,055} = 34,868\,3180.$$

Le taux est donc compris entre 5% et 5,5%. Désignons le taux par $5 + h$. On aura approximativement

$$\frac{h}{0,5} = \frac{34 - 33,065\,9541}{34,868\,3180 - 33,065\,9541} = \frac{0,934\,0459}{1,802\,3639}.$$

De cette égalité on déduit $h = 0,259$ et le taux est environ 5,259%.

§ II. — EMPRUNTS REMBOURSABLES PAR ANNUITÉS.

482. Problème fondamental. — *Un emprunt* V *doit être remboursé par une annuité de* n *termes* a; *le taux de l'intérêt composé est* i *pour un franc. Calculer* V, *sachant que le premier terme de l'annuité doit être versé* **un an après l'emprunt.**

Le capital V qu'on peut emprunter est égal à la valeur de l'annuité au moment de l'emprunt. Or au moment du dernier versement, la valeur de l'annuité est A et l'emprunt a lieu un an avant le premier versement, c'est-à-dire n années avant le dernier versement. Donc (**472**) au moment de l'emprunt, la valeur de l'annuité est $\mathrm{A}v^n$ et on a $\mathrm{V} = \mathrm{A}v^n$. Comme $v^n = \dfrac{1}{u^n}$ et $v^n u^n = 1$, on déduit de là

$$\mathrm{V} = \frac{a(u^n - 1)}{i} \times \frac{1}{u^n} = \frac{\mathbf{a(u^n-1)}}{\mathbf{iu^n}}; \qquad (1)$$

et aussi

$$\mathrm{V} = \frac{a(u^n - 1)v^n}{i} = \mathbf{a}\,\frac{\mathbf{1 - v^n}}{\mathbf{i}}. \qquad (2)$$

L'expression $\dfrac{1 - v^n}{i}$ dépend uniquement de n et de i; voilà pourquoi on la représente par $f(n, i)$, qu'on lit f de n et de i. On a donc

$$\mathbf{V = a}f\mathbf{(n, i)}. \qquad (3)$$

Remarque. — La valeur V d'une annuité, *un an avant le versement du premier terme*, est appelée *valeur actuelle* de l'annuité.

483. Recherche du capital emprunté.

1° *Par logarithmes.* — La formule (1) donne

$$\log \mathrm{V} = \log a + \log (u^n - 1) + \operatorname{colog} i + n \operatorname{colog} u.$$

2° La table IV donne les valeurs de $f(n, i)$.

484. Recherche du terme de l'annuité.

1° *Par logarithmes.* — La formule (1) donne $a = \dfrac{\mathrm{V}iu^n}{u^n - 1}$. D'où

$$\log a = \log \mathrm{V} + \log i + n \log u + \operatorname{colog}(u^n - 1).$$

2° On a $a = \mathrm{V} \times \dfrac{1}{f(n, i)}$ et la table V donne $\dfrac{1}{f(n, i)}$.

485. Recherche du nombre de termes.

1° *Par logarithmes.* — De la formule (1), on déduit

$$u^n = \frac{a}{a - \mathrm{V}i} \quad \text{ou} \quad n \log u = \log a - \log(a - \mathrm{V}i).$$

Par suite, $n = \dfrac{\log a - \log(a - \mathrm{V}i)}{\log u}$.

2° *Par les tables.* — On a $f(n, i) = \dfrac{\mathrm{V}}{a}$.

En utilisant la table IV, on pourra déterminer n ou ses valeurs approchées à moins d'une unité. Dans ce dernier cas, on aura recours à un arrangement, comme dans l'application du n° **480**.

486. Recherche du taux. — La formule des emprunts conduit à une équation d'un degré supérieur au second en u ou en i. Aussi se sert-on des tables. On a

$$f(n, i) = \frac{\mathrm{V}}{a}.$$

On cherchera dans la table IV, à la n^{e} ligne, les deux nombres qui comprennent $\dfrac{\mathrm{V}}{a}$; puis on fera une interpolation s'il y a lieu.

§ III. — AMORTISSEMENT PROGRESSIF.

487. Notion. — Dans ce système, on divise le terme annuel a en *deux parties variables.*

La première partie représente l'intérêt de la partie de l'emprunt qui n'est pas encore amortie. Cette première partie va en diminuant.

La deuxième partie sert à rembourser une partie de la dette restante. Cette partie, appelée *terme d'amortissement*, va en augmentant.

A la fin de la première année, l'intérêt à payer est $\mathrm{V}i$. Le premier terme d'amortissement est donc

$$a - \mathrm{V}i = \frac{\mathrm{V}iu^{n}}{u^{n} - 1} - \mathrm{V}i = \frac{\mathrm{V}i}{u^{n} - 1}.$$

Ce premier terme d'amortissement s'appelle *fonds d'amortissement* et on le désigne par m.

488. Loi de l'amortissement progressif. — *Les termes d'amortissement successifs forment une progression géométrique dont le premier terme est le fonds d'amortissement* m *et dont la raison est* u.

Considérons deux années consécutives quelconques, p et $p + 1$, et soit V' le capital restant dû au commencement de la p^{e} année.

A la fin de la p^e année, l'intérêt à payer sera $V'i$ et le terme d'amortissement, $a - V'i$, que nous désignerons par k.

Au commencement de la $(p+1)^e$ année, la dette est réduite à $V' - k$. A la fin de la $(p+1)^e$ année, l'intérêt à payer sera $(V' - k)i$ et le terme d'amortissement,

$$a - (V' - k)i = (a - V'i) + ki = k(1+i) = ku.$$

Ainsi, le terme d'amortissement d'une année est égal au produit du précédent par u. Les termes d'amortissement sont donc m, mu, mu^2, ..., mu^{n-1}.

489. Problème. — *Calculer le capital amorti à la fin de la* p^e *année.*

Soit X ce capital. On a

$$X = m + mu + mu^2 + \ldots + mu^{p-1} = m(1 + u + u^2 + \ldots + u^{p-1})$$
$$= m \times \frac{u^p - 1}{i} = \frac{Vi}{u^n - 1} \times \frac{u^p - 1}{i} = \frac{V(u^p - 1)}{u^n - 1}.$$

490. Tableau d'amortissement. — *Un emprunt de* 100 000 fr *doit être remboursé en six ans, d'après le système de l'amortissement progressif. Le taux de l'intérêt est* 5%. *On demande de dresser un tableau renfermant pour chaque année :*

1° *Le capital restant à amortir au commencement de l'année;*

2° *L'intérêt à payer à la fin de l'année;*

3° *L'amortissement à effectuer à la fin de l'année.*

Règle. — 1° Calculer le terme de l'annuité.

$$a = 100\,000 \times \frac{1}{f(6;0{,}05)} = 100\,000 \times 0{,}197\,0175 = 19\,701{,}75 \text{ fr.}$$

2° Calculer le fonds d'amortissement en retranchant de a l'intérêt dû à la fin de la première année.

$$m = a - Vi = 19\,701{,}75 - 5000 = 14\,701{,}75.$$

3° Calculer tous les termes d'amortissement, en appliquant la loi de l'amortissement progressif.

4° Inscrire d'abord les amortissements annuels, puis remplir les deux colonnes restantes.

On a, dans le cas actuel :

1er amortissement	14 701,75
5% ou $\frac{1}{20}$ du précédent	735,088
2e amortissement	15 436,838
	771,842
3e amortissement	16 208,680
	810,434
4e amortissement	17 019,114
	850,956
5e amortissement	17 870,070
	893,504
6e amortissement	18 763,574

Avant de dresser le tableau d'amortissement, on calcule la somme des amortissements trouvés, en s'arrêtant aux centimes. On trouve, dans le cas actuel, 1 centime de trop. Pour annuler cette erreur, on diminuera l'un des amortissements d'un centime. Nous avons diminué le 5e amortissement.

Tableau d'amortissement d'un emprunt de 100 000 fr remboursable par une annuité de 6 termes; taux 5%; terme de l'annuité, 19 701,75 fr.

ANNÉES	CAPITAL RESTANT A AMORTIR AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE	INTÉRÊTS A PAYER A LA FIN DE L'ANNÉE	AMORTISSEMENTS A PAYER A LA FIN DE L'ANNÉE
1	100 000	5000	14 701,75
2	85 298,25	4264,92	15 436,83
3	69 861,42	3493,07	16 208,68
4	53 652,74	2682,64	17 019,11
5	36 633,36	1831,69	17 870,06
6	18 763,57	938,18	18 763,57

Vérification. — 1° La somme des amortissements est égale à 100 000 fr.

2° Le dernier amortissement est égal au capital restant à amortir au commencement de la 6e année.

§ IV. — EMPRUNTS PAR OBLIGATIONS.

491. Une obligation *est un titre représentant une part d'un emprunt fait généralement par un État ou une société à des particuliers.*

Le propriétaire d'une obligation reçoit un intérêt à des époques déterminées, contre remise d'un coupon à détacher du titre.

Lors de l'émission d'un emprunt divisé en obligations, on dresse un tableau d'amortissement où se trouve consigné le nombre d'obligations à rembourser aux diverses époques.

492. Problème. — *Construire le tableau d'amortissement d'un emprunt de* 100 000 *fr divisé en* 200 *obligations de* 500 *fr et remboursable par six tirages annuels; taux* 5%.

A remarquer que l'amortissement annuel doit être un multiple de 500 fr. Par suite, il y aura à considérer *un terme d'annuité théorique et un terme d'annuité réel.*

Il existe différentes méthodes pour dresser un tableau d'amortissement. Nous nous contenterons d'exposer celle qui est la plus rapide.

Règle : 1° *Calculer le terme d'annuité théorique.*

2° *Calculer le premier amortissement théorique en retranchant de* a *l'intérêt dû à la fin de la première année; puis les* 5 *amortissements théoriques suivants en appliquant la loi de l'amortissement progressif.*

3° *Diviser les amortissements théoriques par* 500.

On cherche les quotients avec une ou deux décimales; on forme ensuite le total des parties entières et on force des quotients en nombre suffisant pour arriver au total de 200.

4° *Dresser alors le tableau.*

Dans le cas actuel, on a : $a = 19\,701{,}75$; $m = 14\,701{,}75$.

ANNÉES	AMORTISSEMENTS THÉORIQUES	QUOTIENTS PAR 500	
1	14 701,75	29,40	29
2	15 436,83	30,87	31
3	16 208,68	32,42	32
4	17 019,11	34,04	34
5	17 870,06	35,74	36
6	18 763,57	37,53	38
		197	200

TABLEAU D'AMORTISSEMENT.

	NOMBRE D'OBLIGATIONS		INTÉRÊTS A PAYER A LA FIN DE L'ANNÉE	AMORTISSEMENTS RÉELS	TERMES D'ANNUITÉ RÉELS
	VIVANTES AU DÉBUT DE L'ANNÉE	AMORTIES A LA FIN DE L'ANNÉE			
1	200	29	5000	14 500	19 500
2	171	31	4275	15 500	19 775
3	140	32	3500	16 000	19 500
4	108	34	2700	17 000	19 700
5	74	36	1850	18 000	19 850
6	38	38	950	19 000	19 950

EXERCICES

CONSTITUTION D'UN CAPITAL — EMPRUNTS.

653. (806) Dans les exercices suivants, on désigne par n le nombre de versements annuels et par A le capital constitué au moment du dernier versement. Le terme annuel est a fr et le taux $p\,\%$. Calculer chaque fois l'élément inconnu.

1° $a = 1200$	$n = 15$	$p = 6$
2° $a = 8000$	$n = 17$	$p = 5$
3° $A = 200\,000$	$n = 10$	$p = 4{,}5$
4° $A = 150\,000$	$n = 30$	$p = 5{,}5$
5° $A = 137\,189{,}33$	$a = 7500$	$p = 4$
6° $A = 100\,000$	$a = 3024{,}26$	$p = 5$
7° $A = 216\,042{,}28$	$a = 20\,000$	$n = 9$
8° $A = 75\,000$	$a = 4600$	$n = 12.$

654. (807) Par 20 placements annuels on veut former un capital de 160 000 fr. Le taux de l'intérêt composé est 6 %. Quel doit être le terme de l'annuité si le capital doit être constitué 2 un an après le dernier versement? 1. au moment du dernier versement
3. 3 ans après

655. (809) Une personne a placé 105 000 fr dans une banque au taux de 6 %. Elle retire chaque année 1200 fr et le reste des intérêts se cumule avec le capital. Quelle sera la valeur de son dépôt après 6 années?

656. (811) Dans les exercices suivants, on désigne par V le capital emprunté et par n le nombre des termes de l'annuité qui sert à le rembourser. Le terme annuel est a fr et le taux $p\,\%$. Le 1er versement a lieu un an après l'emprunt. Calculer chaque fois l'élément inconnu.

1° $a = 3000$	$n = 20$	$p = 6$
2° $a = 9700$	$n = 15$	$p = 4$
3° $V = 60\,000$	$n = 8$	$p = 3$
4° $V = 250\,000$	$n = 12$	$p = 6$
5° $V = 83\,037{,}26$	$a = 8000$	$p = 5$
6° $V = 22\,800$	$a = 4420{,}43$	$p = 4{,}5$
7° $V = 100\,000$	$a = 10\,129{,}42$	$n = 15$
8° $V = 350\,000$	$a = 35\,000$	$n = 14.$

657. (813) Un emprunt de 110 000 fr doit être remboursé par des versements annuels de 20 000 fr, plus, le cas échéant, un versement supplémentaire à effectuer un an après le versement du dernier terme. Calculer le nombre de termes et le versement supplémentaire, le taux de l'intérêt composé étant 6 %.

658. (816) Une ville a emprunté 150 000 fr au taux de 4 %. Elle se propose de l'amortir en 20 années.

1° Trouver le terme de l'annuité.

2° Quelle somme doit-elle ajouter au 12ᵉ terme pour éteindre la partie restante de la dette?

659. (819) Un emprunt de 150 000 fr doit être remboursé par une annuité de 15 termes, dont le premier est payable 6 ans après l'emprunt. Calculer le montant de chaque terme, le taux de l'intérêt composé étant 6 %.

660. (821) Une personne a effectué 4 versements annuels de 5000 fr pour recevoir une rente de 4 termes annuels, dont le 1ᵉʳ est payable 10 ans après le dernier versement. Calculer le terme de cette rente, sachant que le taux est 5,5 %.

661. (823) Une personne place annuellement et 10 fois de suite, une somme de 1000 fr dans une banque. Elle retire ensuite annuellement et 10 fois de suite, 1000 fr. Que lui reste-t-il alors de placé? Le premier retrait a lieu un an après le dernier versement. Le taux de l'intérêt composé est 4 %.

662. (824) Un employé a placé chaque année et 25 fois de suite une somme de 2500 fr dans une banque: Il laisse écouler une année, puis retire chaque année, d'abord 10 fois 5000 fr, puis 5 fois 7500 fr. Que lui reste-t-il de placé? Le taux de l'intérêt composé est 4,5 %.

AMORTISSEMENT PROGRESSIF.

663. (826) Un emprunt de 1 200 000 fr est remboursable par une annuité de 30 termes égaux. Le taux de l'intérêt est 5 %. Calculer le fonds d'amortissement et le terme de l'annuité.

664. (828) Dresser le tableau d'amortissement d'un emprunt de 1 000 000 fr remboursable en 10 années. Le taux est 5 % et on sait que

$$\frac{1}{f(10;\,0{,}05)} = 0{,}129\,504\,58.$$

665. (830) Un emprunt de 750 000 fr est remboursable en 20 années. Le taux de l'intérêt est 6%.

1° Quelle est la partie du capital amortie après 10 années?

2° Calculer la partie non amortie après 15 années.

666. (831) Une société a émis un emprunt de 500 000 fr divisé en 1000 obligations de 500 fr et remboursable en 8 années. Le taux de l'intérêt est 5%. Construire le tableau d'amortissement.

CHAPITRE XXV

Limites et continuité.

§ I. — DES FONCTIONS.

N. B. — Revoir le premier paragraphe du chapitre XIII dont le premier paragraphe de ce chapitre n'est qu'un complément.

493. Utilité de l'étude des fonctions. — I. Les sciences ont pour objet l'étude des phénomènes de la nature et des lois qui les régissent. Quand on a reconnu par l'observation ou l'expérimentation qu'une certaine propriété se manifeste dans des conditions déterminées, on peut énoncer *une loi*. C'est alors qu'interviennent les mathématiques. D'ordinaire, une loi où entrent des grandeurs mesurables peut se traduire par *une formule* qui contient ces grandeurs et des constantes.

Voici un exemple. On peut montrer expérimentalement qu'à une température donnée, le volume d'une certaine masse gazeuse est inversement proportionnel à la pression qu'elle supporte (*Loi de Mariotte*). Si p est la pression qui correspond au volume v, on peut écrire $pv =$ constante. Pour déterminer cette constante, il suffit d'effectuer une expérience, en prenant la masse gazeuse à la température donnée, et de mesurer les valeurs de p et de v. Si k est le produit des valeurs trouvées, on a

$$pv = k. \tag{1}$$

La formule ainsi obtenue présente de grands avantages.

1° Elle permet de prévoir le résultat d'expériences non effectuées.

Ainsi, la formule (1) permet de calculer la pression qu'il faut réaliser pour arriver à un volume donné.

2° La formule indique que l'une des grandeurs qui y interviennent est une fonction des autres. Si l'on est à même d'étudier les variations de cette fonction, on peut suivre l'évolution du phénomène.

Ainsi, après avoir étudié les variations de la fonction $v = \frac{k}{p}$, on peut construire le graphique ci-contre. De l'examen de ce graphique, on déduit immédiatement les conclusions suivantes : Si $p = 1$, on a $v = k$; si p décroît à partir de 1, v croît toujours, et de plus en plus vite; si p croît à partir de 1, v décroît toujours, mais de moins en moins vite.

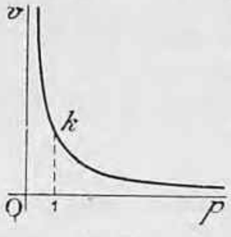


Fig. 30.

II. Cependant, on commettrait une grave erreur, si l'on attribuait aux lois physiques et aux formules qui les traduisent, une valeur absolue qu'elles n'ont pas pour l'ordinaire.

Si l'on effectue, par exemple, des expériences très précises, on constate que la loi de Mariotte n'est jamais parfaitement exacte. Mais on constate aussi que pour des gaz très éloignés de leur point de liquéfaction, elle est suffisamment exacte en ce sens que les erreurs auxquelles elle conduit ne sont pas sensiblement supérieures aux erreurs expérimentales inévitables. Dans ces limites, son application est donc légitime.

Beaucoup de lois physiques sont relativement simples : cela tient à diverses causes. Souvent elles ont été découvertes à une époque où la science de l'expérimentation et les mathématiques étaient encore peu avancées. D'autres fois, c'est par convention qu'on adopte une loi simple et d'un maniement facile parce qu'elle donne dans les conditions ordinaires des résultats suffisamment approchés. L'application de ces lois présente d'ailleurs un autre avantage : en confrontant avec les résultats expérimentaux les résultats obtenus par l'application des formules, on peut être amené à une modification heureuse de la loi, de manière à la rendre applicable dans des limites plus étendues.

C'est par des approximations successives, en employant tour à tour l'expérimentation et les mathématiques, que les sciences s'efforcent à serrer de plus en plus près la réalité.

494. *On appelle* **fonction** *ou* **variable dépendante** *une variable dont la valeur dépend des valeurs attribuées à une ou plusieurs autres variables indépendantes.*

Nous ne considérons que des fonctions d'une seule variable x. Pour représenter une fonction de x, nous emploierons souvent le symbole $f(x)$, qu'on lit fonction de x.

495. Classification. — I. *On dit que* y *est* **une fonction algébrique** *de* x *si la relation entre* x *et* y *peut être exprimée par une équation dont les deux membres sont des polynômes entiers en* y *et en* x.

On appelle **fonction transcendante** *toute fonction qui n'est pas une fonction algébrique.*

Les fonctions $y = 3^x$, $y = \log x$, $y = \sin x$ sont des fonctions transcendantes.

II. Une fonction algébrique de x est *une fonction explicite* ou *une fonction implicite* de x suivant que l'équation qui définit y, comme fonction de x, est résolue ou non par rapport à y.

Si $3x^2 + 5x - 7 + 2y = 0$, y est une fonction algébrique implicite de x. Voici des fonctions algébriques explicites :

$$y = x^3 - 3x^2 - 5x + 7 \quad (1) \qquad\qquad y = \sqrt{x^2 - 4} \quad (3)$$

$$y = \frac{x^2 - x - 2}{x - 1} \quad (2) \qquad\qquad y = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 3} \quad (4)$$

III. Nous ne nous occuperons que des fonctions algébriques explicites. On distingue :

1° *Les polynômes entiers* (et rationnels) *en* x. — Voir l'exemple (1).

2° *Les fractions rationnelles* qui sont des quotients de deux polynômes entiers en x. — Voir l'exemple (2).

3° *Les fonctions irrationnelles* qui peuvent être entières ou fractionnaires. — Voir les exemples (3) et (4).

496. Intervalles. — *Étant donnés deux nombres* a *et* b, *dont le plus petit est* a, *on appelle intervalle* (a, b) *l'ensemble des nombres* a *et* b *et de tous les nombres compris entre* a *et* b.

L'intervalle $(b, +\infty)$ est formé par le nombre b et les nombres plus grands que b. L'intervalle $(-\infty, a)$ est formé par le nombre a et les nombres plus petits que a.

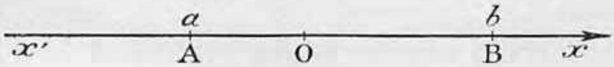


FIG. 31.

Sur l'axe $x'x$ marquons les points A et B dont les abscisses sont respectivement a et b. L'intervalle (a, b) est représenté par le vecteur AB; l'intervalle $(b, +\infty)$ par la demi-droite Bx et l'intervalle $(-\infty, a)$ par la demi-droite Ax'.

497. Fonction définie. — *La fonction* $f(\mathrm{x})$ *est définie pour* $\mathrm{x} = \mathrm{a}$, *lorsque à cette valeur de* x *correspond une valeur numérique unique de l'expression* f(x). — Cette valeur numérique se représente par $f(a)$.

La fonction $f(x)$ est définie *dans l'intervalle* (a, b), lorsqu'elle est définie pour chaque valeur de x appartenant à cet intervalle.

Règles. — 1° *Un polynôme entier en* x *est défini pour toutes les valeurs de* x, car si on attribue à x une valeur particulière, il devient une somme algébrique de nombres relatifs.

2° *Une fraction rationnelle n'est pas définie pour les valeurs de* x *qui annulent son dénominateur*, car on sait (**50**) que la division ne peut se faire quand le diviseur est nul.

3° *Les fonctions irrationnelles* que nous considérons ne contiennent que des radicaux du second degré; *elle ne sont définies que si tous les radicands sont positifs ou nuls*, car les nombres négatifs n'ont pas de racine carrée; de plus, *si elles sont fractionnaires, il faut encore exclure les valeurs de* x *qui annulent le dénominateur.*

La fonction $y = \sqrt{x^2 - 4}$ est définie dans les intervalles $(-\infty, -2)$ et $2, +\infty)$, car pour $-2 < x < 2$, le trinôme $x^2 - 4$ est négatif.

La fonction $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 3}$ est définie dans les mêmes intervalles, sauf pour $x = 3$ qui annule son dénominateur.

La fonction $y = \sqrt{(x-1)^2 (x-2)}$ est définie pour $x = 1$ et pour $x \geqslant 2$.

498. Représentation graphique d'une fonction. — Soit $y = f(x)$ une fonction définie dans l'intervalle (a, b). A tout nombre x de cet intervalle correspond une valeur unique de y et par suite un point unique M, dont les coordonnées sont x et y. Si le lieu du point M est une courbe quand x croît de a à b, on dit que cette courbe représente la fonction dans l'intervalle (a, b).

Nous avons vu que la fonction $y = ax + b$ est représentée par une droite et la fonction $y = ax^2 + bx + c$ par une parabole.

Le graphique d'une fonction n'est pas toujours une ligne continue. La fonction y définie par l'équation $x^2 + y^2 = 0$ est représentée par l'origine (0, 0). La fonction $y = \sqrt{(x-1)^2 (x-2)}$ est représentée par le point isolé (1, 0) et par une courbe qui, partant du point (2, 0), s'étend vers la droite, au-dessus de l'axe Ox.

499. Note sur les représentations graphiques. — Pour que l'étude d'une fonction soit complète, il est indispensable de construire son graphique : d'un coup d'œil, on pourra alors se rendre compte des variations de la fonction et de ses particularités.

On peut essayer d'obtenir un graphique en déterminant un nombre suffisant de ses points et en les réunissant par une courbe continue. C'est le procédé qui nous a servi pour les fonctions $y = 2x$ (**258**) et $y = x^2$ (**377**). Mais cette méthode est fort aléatoire.

Par exemple, si on calcule les valeurs de la fonction $y = \frac{6}{8x - 13}$ qui correspondent aux valeurs entières de x, on est conduit au graphique de la figure 32 qui est loin d'être exact (voir Fig. 33).

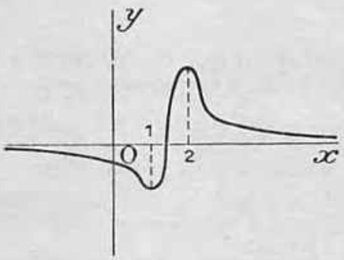


Fig. 32.

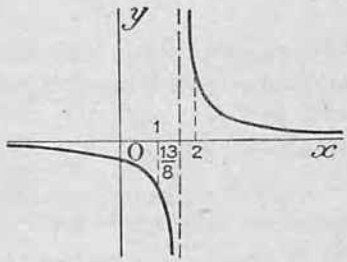


Fig. 33.

Le résultat est si défectueux parce que la fonction n'est pas définie pour $x = \frac{13}{8} = 1{,}625$ et qu'il faudrait savoir comment la fonction se comporte dans le voisinage de cette valeur de x. On pourrait améliorer le graphique en attribuant à x les valeurs 1,6 et 1,7; 1,62 et 1,63. Mais les calculs seraient laborieux et de plus, entre 1,62 et 1,63, il y a encore une infinité de nombres à essayer. *La théorie des limites* nous donnera un procédé plus rapide et plus sûr. Voilà pourquoi, nous commencerons par étudier cette théorie qui présente d'ailleurs d'autres avantages :

1° Elle nous permettra d'établir les conditions dans lesquelles le graphique est effectivement *une courbe continue.*

2° Elle est à la base de la méthode ordinairement suivie pour étudier les variations d'une fonction (Chap. XXVI et XXVII).

§ II. — LIMITE D'UNE FONCTION.

500. Remarques préliminaires. — I. Revoir les définitions du nº **430**.

II. La valeur absolue d'un nombre relatif a s'écrit $|a|$. L'inégalité $|a| < 2$ peut s'écrire $-2 < a < 2$.

III. La valeur absolue d'un produit est égale au produit des valeurs absolues des facteurs. La valeur absolue d'un quotient est égale au quotient de la valeur absolue du dividende par celle du diviseur.

501. Limite d'une fonction $f(x)$ quand x tend vers a. — Considérons une fonction $f(x)$ définie dans un intervalle comprenant a, sauf peut-être pour $x = a$. Faisons tendre x vers a. Trois cas peuvent se présenter :

1er Cas : Il existe une constante A telle que la différence entre la valeur de la fonction et cette constante A tende vers zéro.

On dit alors que *la limite de la fonction est* A *quand* x *tend vers* a et on écrit

$$\lim f(x) = \mathrm{A}, \text{ quand } x \to a.$$

2e Cas : Il existe une valeur de la fonction telle que toutes les valeurs suivantes soient supérieures en valeur absolue à un nombre positif arbitraire N, si grand qu'il soit.

On dit alors que *la fonction a pour limite l'infini* (ou qu'elle devient infinie) *quand* x *tend vers* a et on écrit

$$\lim f(x) = \infty, \text{ quand } x \to a.$$

3e Cas : Si les valeurs de la fonction ne répondent à aucune des deux conditions précédentes, *la fonction n'a pas de limite* quand x tend vers a.

Exemple I. — *La limite de la fonction* $y = 3x + 2$ *est* 5 *quand* x *tend vers* 1.

Cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x. Pour prouver que sa limite est 5 quand x tend vers 1, il suffit de montrer que la différence entre la fonction et la constante 5 a zéro pour limite quand x tend vers 1.

En effet, on a

$$y - 5 = (3x + 2) - 5 = 3(x - 1).$$

On voit que la valeur absolue de la différence $y - 5$ sera inférieure à 0,000 001, par exemple, dès que l'on a

$$3\,|x - 1| < \frac{1}{1\,000\,000} \quad \text{ou} \quad |x - 1| < \frac{1}{3\,000\,000}.$$

Or la valeur absolue de la différence $x - 1$ peut devenir et rester inférieure à $\frac{1}{3\,000\,000}$, car, par hypothèse, x tend vers 1. On a donc

$$\lim\,(y - 5) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim y = 5.$$

Définition I. — *La limite de la fonction* $f(x)$ *est* A *quand* x *tend vers* a *lorsque, étant donné un nombre positif arbitraire* ε, *si petit qu'il soit, il existe un nombre positif* δ *tel que l'on ait*

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \text{dès que} \quad |x - a| < \delta.$$

L'étude de cette définition n'est pas indispensable pour comprendre la suite. La même remarque s'applique aux trois définitions qui suivent.

Exemple II. — *La fonction* $\frac{1}{x}$ *tend vers l'infini quand* x *tend vers zéro.*

Cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x, sauf pour $x = 0$. Nous devons prouver que sa valeur absolue peut devenir et rester supérieure à tout nombre positif arbitraire N quand x tend vers zéro.

En effet, on a $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$ et l'inégalité $\frac{1}{|x|} > N$ peut s'écrire $|x| < \frac{1}{N}$.

Par suite, pour que $\left|\frac{1}{x}\right|$ devienne et reste supérieur à N, il suffit que la valeur absolue de x devienne et reste inférieure à $\frac{1}{N}$; ce qui a lieu, car x tend vers zéro.

Définition II. — *La fonction* $f(x)$ *devient infinie quand* x *tend vers* a *lorsque, étant donné un nombre positif arbitraire* N, *si grand qu'il soit, il existe un nombre positif* δ *tel que l'on ait*

$$|f(x)| > N \quad \text{dès que} \quad |x - a| < \delta.$$

Remarque. — L'exemple II permet d'énoncer le théorème suivant :

Lorsqu'une variable tend vers zéro, son inverse tend vers l'infini.

502. Limite d'une fonction $f(x)$ pour x infini. — Considérons une fonction $f(x)$ définie pour toutes les valeurs de x supérieures en valeur absolue à un nombre positif donné p. Faisons tendre x vers l'infini. Trois cas peuvent se présenter :

1er Cas : Il existe une constante A, telle que la différence entre la valeur de la fonction et cette constante A tende vers zéro.

On dit alors que *la limite de la fonction est* A *pour* x *infini* et on écrit

$$\lim f(x) = A \quad \text{pour} \quad x \text{ infini.}$$

2e Cas : Il existe une valeur de la fonction telle que toutes les valeurs suivantes soient supérieures en valeur absolue à un nombre positif arbitraire N, si grand qu'il soit.

On dit alors que *la fonction a pour limite l'infini* (ou qu'elle devient infinie) *pour* x *infini* et on écrit

$$\lim f(x) = \infty, \quad \text{pour } x \text{ infini.}$$

3e Cas : Si les valeurs de la fonction ne répondent à aucune des deux conditions précédentes, *la fonction n'a pas de limite*, quand x tend vers l'infini.

Exemple III. — *La limite de la fonction* $\frac{1}{x}$ *est zéro pour* x *infini.*

En effet, cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x, sauf pour $x = 0$. Sa valeur absolue est inférieure à 0,000 001, par exemple, dès qu'on a

$$\frac{1}{|x|} < 0{,}000\,001 \quad \text{ou} \quad |x| > 1\,000\,000.$$

Or la valeur absolue de x peut devenir et rester supérieure à 1 000 000, car x tend vers l'infini par hypothèse. On a donc

$$\lim \frac{1}{x} = 0, \quad \text{pour } x \text{ infini.}$$

Définition III. — *La fonction* f(x) *a pour limite* A *quand* x *tend vers l'infini lorsque, étant donné un nombre positif arbitraire* ε, *si petit qu'il soit, il existe un nombre positif* B *tel que l'on ait*

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \text{dès que} \quad |x| > B.$$

Remarque. — L'exemple III permet d'énoncer le théorème suivant :

Lorsqu'une variable tend vers l'infini, son inverse tend vers zéro.

Exemple IV. — *La limite de* x^2 *est* $+\infty$ *pour* x *infini.*

En effet, cette fonction est essentiellement positive et on a

$$x^2 > N \quad \text{dès que} \quad |x| > \sqrt{N}.$$

DÉFINITION IV. — *La fonction* f(x) *devient infinie quand* x *tend vers l'infini lorsque, étant donné un nombre positif arbitraire* N, *si grand qu'il soit, il existe un nombre positif* B *tel que l'on ait* $|f(x)| > N$ *dès que* $|x| > B$.

503. Théorèmes. — Les limites de beaucoup de fonctions s'obtiennent aisément en appliquant les théorèmes suivants que nous admettons sans démonstration. Dans ces théorèmes, nous considérons des fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... *admettant des limites finies* A_1, A_2, A_3, ... quand x tend vers a ou vers l'infini.

I. *La limite d'une somme* (ou d'une différence) *de fonctions est égale à la somme* (ou à la différence) *des limites de ces fonctions.*

Ce théorème permet de chercher la limite d'une somme algébrique telle que $F(x) = f_1(x) - f_2(x) + f_3(x)$. On a successivement :

$$\begin{aligned} \lim F(x) &= \lim \{[f_1(x) + f_3(x)] - f_2(x)\} = \lim[f_1(x) + f_3(x)] - \lim f_2(x) \\ &= (A_1 + A_3) - A_2 = A_1 - A_2 + A_3. \end{aligned}$$

II. *La limite d'un produit de fonctions est égale au produit des limites des fonctions.*

III. *La limite du quotient de deux fonctions est égale au quotient des limites des fonctions,* pourvu que la limite du diviseur soit différente de zéro.

COROLLAIRE. — *Si le diviseur seul tend vers zéro, le quotient tend vers l'infini.* — En effet, si $A_1 \neq 0$ et $A_2 = 0$, la limite du quotient $\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}$ est zéro en vertu du théorème III. Donc l'inverse de ce quotient, qui est $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$, tend vers l'infini (**501**, Rem.).

IV. *La limite de la* n^e^ *puissance d'une fonction est égale à la* n^e^ *puissance de la limite de cette fonction* (n est entier et positif).

V. *La limite de la racine carrée d'une fonction est égale à la racine carrée de la limite de la fonction,* pourvu que la fonction ait une limite positive ou nulle.

Applications. — Si x tend vers a, c'est-à-dire si $\lim x = a$, on a :

$$\lim x^2 = (\lim x)^2 = a^2; \quad \lim (x^2 + x) = a^2 + a;$$

et aussi, si $a \geqslant 0$, $\lim \sqrt{x} = \sqrt{a}$.

504. Limite d'une constante. — Par extension, une constante R peut être considérée comme étant une fonction de x définie pour toute valeur de x.

On pourra dire également que *la limite d'une constante, quand* x *tend vers* a *ou vers l'infini, est cette constante elle-même.*

Il en résulte, par exemple, que si x tend vers a, on a

$$\lim 3x^2 = 3 \times \lim x^2 = 3a^2.$$

§ III. — LIMITE D'UNE FONCTION ALGÉBRIQUE QUAND x TEND VERS a.

505. Limite d'un polynôme entier en x quand x tend vers a. — *On obtient cette limite en remplaçant dans le polynôme* x *par* a.

Considérons, par exemple, le polynôme entier en x

$$P(x) = 3x^2 - 5x + 7.$$

Quand x tend vers 2, on a, en appliquant successivement les théorèmes I, II et IV (**503**),

$$\lim P(x) = \lim 3x^2 - \lim 5x + 7 = 3 \lim x^2 - 5 \lim x + 7$$
$$= 3(\lim x)^2 - 5 \lim x + 7 = 3 \times 2^2 - 5 \times 2 + 7 = 9.$$

506. Limite d'une fraction rationnelle quand x tend vers a. — On commence par faire $x = a$ dans les deux termes de la fraction. Trois cas peuvent se présenter :

1er Cas : *Si le dénominateur ne s'annule pas pour* x = a, *la limite de la fraction est sa valeur numérique pour* x = a.

En effet, considérons, par exemple, la fraction

$$y = \frac{x + 1}{x^2 + 3},$$

dont le dénominateur ne s'annule pas pour $x = 1$ et cherchons sa limite quand x tend vers 1.

Le numérateur tend vers 2 et le dénominateur vers 4 (**505**). Cette dernière limite étant différente de zéro, on obtient la limite de la fraction en divisant la limite du numérateur par celle du dénominateur (**503**, III, Cor.). On a donc

$$\lim y = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

2e Cas : *Si le dénominateur seul s'annule pour* x = a, *la fraction tend vers l'infini.*

En effet, considérons la fraction

$$y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$$

dont le dénominateur seul s'annule pour $x = -1$ et cherchons sa limite quand x tend vers -1.

Le numérateur tend vers 4 et le dénominateur vers zéro. La fraction tend donc vers l'infini (**503**, III).

Le numérateur de la fraction est toujours positif. Le dénominateur est négatif pour $x < -1$ et positif pour $x > -1$. Par suite, si x tend vers -1 par valeurs croissantes, y tend vers $-\infty$; et si x tend vers -1 par valeurs décroissantes, y tend vers $+\infty$. On dit que pour $x = -1$ *la limite à gauche* est $-\infty$ et *la limite à droite*, $+\infty$.

3e Cas : *Les deux termes de la fraction s'annulent pour* x = a. — Le numérateur et le dénominateur d'une telle fraction sont des polynômes entiers en x, divisibles par $x - a$ (**115**). Pour trouver la limite cherchée, on procède comme suit :

1° *On décompose le numérateur et le dénominateur en deux facteurs dont l'un est* x — a, *ou bien une puissance de* x — a, *et dont l'autre ne s'annule plus pour* x = a.

2° *On simplifie la fraction en divisant les deux termes par celle des puissances de* x — a, *dont l'exposant est le moins élevé.*

3° *On cherche la limite de la fraction ainsi simplifiée, en appliquant la règle du* 1er *ou du* 2e *cas.*

Considérons à titre d'exemple, la fraction

$$y = \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1}$$

dont les deux termes s'annulent pour $x = 1$ et cherchons sa limite quand x tend vers 1. Si x tend vers 1, mais sans devenir égal à 1, on a constamment

$$y = \frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+5}{x+1}.$$

Or le dénominateur de la fraction $\frac{x+5}{x+1}$ ne s'annule plus pour $x = 1$. Sa limite est donc égale à sa valeur numérique pour $x = 1$ (1er cas) et on a

$$\lim y = \frac{6}{2} = 3.$$

En cherchant la limite de la fraction $y = \frac{x^2 + 4x - 5}{x^3 - x^2 - x + 1}$ quand x tend vers 1, on trouve

$$y = \frac{(x-1)\ (x+5)}{(x-1)^2 (x+1)} = \frac{x+5}{(x-1)(x+1)};$$

puis, $\lim y = \infty$, car le dénominateur seul de la dernière fraction s'annule pour $x = 1$. Si on étudie les signes des deux termes de la fraction $\frac{x+5}{x^2-1}$, on voit que la limite à gauche est $-\infty$ et la limite à droite, $+\infty$.

507. Formes indéterminées. — I. En remplaçant x par 1 dans la fraction $F(x) = \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1}$, celle-ci prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ (**50**).

Quand x tend vers 1, la limite de la fraction est 3. Cette limite est souvent appelée *vraie valeur* de $F(x)$ pour $x = 1$. Chercher cette limite, c'est *lever l'indétermination.*

II. Dans la suite, nous rencontrerons trois autres formes indéterminées :

$$\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Quand une fonction prend une forme indéterminée, on ne peut pas obtenir sa limite en appliquant les théorèmes généraux (**503**). On doit commencer par transformer la fonction en une autre constamment égale à la proposée et telle qu'on puisse lui appliquer les théorèmes généraux. Si cette transformation est possible, il suffit alors de chercher la limite de cette autre fonction. Voici encore trois exemples.

I. *Limite de* $y = \dfrac{3}{x(x-1)} - \dfrac{2}{x^2-1}$ *quand* x *tend vers* 1.

Quand $x = 1$, les deux dénominateurs s'annulent. Quand x tend vers 1, les deux fractions deviennent infinies et y prend la forme $\infty - \infty$. Mais on a

$$y = \frac{3(x+1)}{x(x^2-1)} - \frac{2x}{x(x^2-1)} = \frac{x+3}{x(x^2-1)}.$$

Or, $\lim(x+3) = 4$ et $\lim x(x^2-1) = 0$. Donc $\lim y = \infty$.

II. *Limite de* $y = x^3 \times \dfrac{1}{x^2+x}$ *quand* x *tend vers zéro.*

Quand $x = 0$, le premier facteur s'annule et le second n'est pas défini. Quand $x \to 0$, le premier facteur tend vers 0 et le second vers l'infini; l'expression prend la forme $0 \times \infty$. Mais on peut écrire

$$y = \frac{x^3}{x^2+x} = \frac{x^2}{x+1}.$$

Or, $\lim x^2 = 0$ et $\lim(x+1) = 1$. Donc $\lim y = 0$.

III. *Limite de* $y = \dfrac{5 + \dfrac{1}{x-1}}{x - \dfrac{x}{x-1}}$ *quand* x *tend vers* 1.

Quand $x = 1$, le numérateur et le dénominateur ne sont pas définis. Quand $x \to 1$, ils deviennent infinis et y prend la forme $\dfrac{\infty}{\infty}$. Mais en multipliant haut et bas par $x - 1$, il vient

$$y = \frac{5(x-1)+1}{x(x-1)-x} = \frac{5x-4}{x^2-2x}.$$

Or, $\lim(5x-4) = 1$ et $\lim(x^2-2x) = -1$. Donc $\lim y = -1$.

508. Limites de quelques expressions irrationnelles. — I. Soit la fonction $y = \sqrt{x^2-4}$. Le trinôme $x^2 - 4$ n'est positif que pour $x < -2$ et $x > 2$; la fonction n'est définie que dans les intervalles $(-\infty, -2)$ et $(2, +\infty)$.

Si $x \to 3$, on a $\lim(x^2-4) = 5$ et $\lim y = \sqrt{5}$.

Si x tend vers 2 par valeurs décroissantes, $x^2 - 4$ tend vers 0 par valeurs positives; y a une limite à droite qui est 0.

Si $x \to 1$, $x^2 - 4$ est négatif; la fonction n'a pas de limite parce que la fonction n'est définie dans aucun intervalle comprenant $x = 1$.

II. *Limite de* $y = \dfrac{3}{\sqrt{x-1}}$ *quand* x *tend vers* 1.

Le radical n'est défini que pour $x \geqslant 1$. On devra donc faire tendre x vers 1 par valeurs décroissantes. Le dénominateur tend alors vers zéro par valeurs positives et on a $\lim y = +\infty$.

III. *Limite de* $y = \dfrac{\sqrt{x-3}-1}{x-4}$ *quand* x *tend vers* 4.

Le radical n'est défini que pour $x \geqslant 3$. Pour $x = 4$, y prend la forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$.

Multiplions les deux termes de la fraction par le binôme conjugué du numérateur. Il vient

$$y = \frac{(x-3)-1}{(x-4)(\sqrt{x-3}+1)} = \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x-3}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x-3}+1}.$$

Or, $\lim (x-3) = 1$ et $\lim \sqrt{x-3} = 1$. Donc $\lim y = \dfrac{1}{2}$.

509. Règles. — De ce qui précède, on peut déduire les règles suivantes :

Pour chercher la limite d'une fonction algébrique F(x) *quand* x *tend vers* a, *on commence toujours par faire* x = a *dans* F(x).

1° *Si la valeur numérique de* F(x) *pour* x = a *existe, elle est la limite de* F(x) *quand* x → a.

2° *Si la fonction prend la forme* $\dfrac{m}{0}$, m *étant différent de zéro, la fonction tend vers l'infini.*

3° *Si la fonction prend une forme indéterminée, on la transforme en une autre constamment égale à* F(x), *en employant les procédés que nous indiquons; puis, on cherche la limite de cette autre fonction.*

Cette règle suppose que $F(x)$ soit une fonction algébrique définie **dans un intervalle** comprenant a, sauf peut-être pour $x = a$. Elle n'est pas applicable, par exemple, à la fonction $y = \sqrt{x^2(x-1)}$, quand x tend vers 0, car cette fonction n'est pas définie dans le voisinage de $x = 0$.

§ IV. — LIMITE D'UNE FONCTION ALGÉBRIQUE POUR x INFINI.

510. Remarque préliminaire. — Lorsqu'on fait tendre x vers l'infini, on doit souvent distinguer deux cas, suivant que x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. Voici des exemples.

I. Si $x \to +\infty$, les fonctions $3x$, x^2, $5x^3$, $x-7$, x^2+5, x^3+2x tendent vers $+\infty$, car chacune d'elles est évidemment supérieure au nombre positif arbitraire N, si grand qu'il soit, pour les valeurs suffisamment grandes de x.

II. Si $x \to -\infty$, la limite des fonctions $3x$, $5x^3$, $x-7$, x^3+2x est $-\infty$; celle des fonctions x^2, x^2+5 est $+\infty$.

511. Limite d'un polynôme entier en x pour x infini.

Exemple. — Considérons le polynôme $y = 2x^2 + 3x + 5$.

Si $x \to +\infty$, $2x^2$ et $3x$ tendent vers $+\infty$. Donc $\lim y = +\infty$.

Si $x \to -\infty$, $2x^2$ tend vers $+\infty$ et $3x$ vers $-\infty$. La fonction prend donc la forme indéterminée $\infty - \infty$. Mais on a constamment

$$y = 2x^2\left(1 + \frac{3}{2x} + \frac{5}{2x^2}\right)$$

et les fractions $\frac{3}{2x}$ et $\frac{5}{2x^2}$ tendent vers zéro. On a donc

$$\lim\left(1 + \frac{3}{2x} + \frac{5}{2x^2}\right) = 1; \quad \text{puis,} \quad \lim y = \lim 2x^2 = +\infty.$$

Théorème. — *Si* x *tend vers* $\pm\infty$, *tout polynôme entier en* x *tend vers l'infini en prenant le signe de son terme du degré le plus élevé.*

Soit le polynôme $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. On a constamment

$$y = ax^3\left(1 + \frac{b}{ax} + \frac{c}{ax^2} + \frac{d}{ax^3}\right).$$

Si x tend vers $\pm\infty$, le premier facteur tend vers l'infini et le second vers 1. De là, on conclut que y tend vers l'infini. De plus, y finit par prendre le signe de ax^3 puisque la limite du second facteur est positive.

APPLICATIONS. — Montrer qu'on a :

1° $\lim (3x - 7) = -\infty$ ou $+\infty$, suivant que x tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$.

2° $\lim (-5x^2 + x - 3) = -\infty$, si x tend vers $\pm\infty$.

3° $\lim (2x^3 - x^2 + 3x - 4) = -\infty$ ou $+\infty$, suivant que x tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$.

512. Limite d'une fraction rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)}$ pour x infini.

1° *Si* P(x) *est de degré moindre que* Q(x), *la fraction tend vers zéro.*

2° *Si* P(x) *est de degré supérieur à* Q(x), *la fraction tend vers l'infini.*

3° *Si* P(x) *est du même degré que* Q(x), *la fraction a pour limite le rapport des coefficients de la plus haute puissance de* x *dans les deux termes de la fraction.*

Les démonstrations de ces trois principes sont analogues. On commence toujours par diviser les deux termes de la fraction par la plus haute puissance de x qui figure dans les deux termes de la fraction.

Considérons à titre d'exemple, la fraction rationnelle

$$y = \frac{6x^2 - x + 7}{3x^2 + 2x - 5}.$$

Quand x tend vers l'infini, on a constamment

$$y = \frac{6 - \frac{1}{x} + \frac{7}{x^2}}{3 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}}.$$

Le numérateur de cette dernière fraction tend vers 6 et son dénominateur vers 3. On a donc (**503**, III)

$$\lim y = \frac{6}{3} = 2 \quad \text{pour } x \text{ infini.}$$

513. Limites de quelques expressions irrationnelles.

I. *Trouver la limite de* $y = \frac{\sqrt{4x^2 - 11x - 3}}{x}$ *pour* x *infini.*

Cette fonction est définie dans les intervalles $(-\infty, -0{,}25)$ et $(3, +\infty)$. Quand x tend vers l'infini, elle prend la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

1° *Si x tend vers* $+\infty$, on a $x = \sqrt{x^2}$. Par suite,

$$y = \sqrt{4 - \frac{11}{x} - \frac{3}{x^2}} \quad \text{et} \quad \lim y = 2,$$

car les fractions $\frac{11}{x}$ et $\frac{3}{x^2}$ ont zéro pour limite.

2° *Si x tend vers* $-\infty$, on a $x = -\sqrt{x^2}$. Par suite,

$$y = -\sqrt{4 - \frac{11}{x} - \frac{3}{x^2}} \quad \text{et} \quad \lim y = -2.$$

II. *Trouver la limite de* $y = \sqrt{4x^2 + 7} - 2x$ *pour* x *infini.*

Cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x.

1° *Si x tend vers* $-\infty$, on voit immédiatement que y a pour limite $+\infty$.

2° *Si x tend vers* $+\infty$, la fonction prend la forme indéterminée $\infty - \infty$. En multipliant et en divisant le binôme donné par le binôme conjugué, on trouve

$$y = \frac{(4x^2 + 7) - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + 7} + 2x} = \frac{7}{\sqrt{4x^2 + 7} + 2x}.$$

Le numérateur de cette dernière fraction est une constante et le dénominateur tend évidemment vers $+\infty$. Par suite (**502**, Rem.), $\lim y = 0$.

§ V. — CONTINUITÉ DES FONCTIONS.

514. Notion élémentaire de la continuité. — Supposons que les figures I, II, III, IV soient les représentations graphiques des fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$. Le graphique II est formé par un point isolé A et par une branche de courbe.

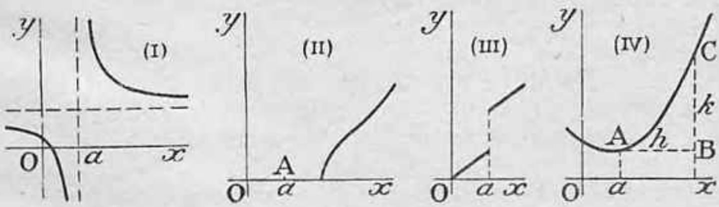


Fig. 34.

Le 4e graphique est *une courbe continue*, qu'on peut tracer sans lever la main : on dit que $f_4(x)$ est *une fonction continue*. Les trois autres graphiques sont *discontinus*; on dit que $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ sont *des fonctions discontinues*.

Analysons les choses de plus près, en vue de découvrir les éléments qui caractérisent la continuité.

1° C'est pour $x = a$ que les trois premières fonctions sont discontinues et voici pourquoi : la fonction $f_1(x)$ n'est pas définie pour $x = a$. La fonction $f_2(x)$ est définie pour $x = a$, car on a $f_2(a) = 0$; mais elle n'est pas définie dans le voisinage de $x = a$. La fonction $f_3(x)$ croît par saut brusque quand x passe par a.

2° La fonction $f_4(x)$ est continue pour $x = a$: Elle est définie pour $x = a$ et dans le voisinage de $x = a$. De plus, elle ne varie pas par saut brusque quand x passe par a; au contraire, on conçoit que l'accroissement $BC = k$ de la fonction qui correspond à l'accroissement $AB = h$ de x, puisse devenir inférieur à toute longueur donnée si h devient suffisamment petit.

515. Accroissement d'une variable. — *On appelle accroissement d'une variable qui passe d'une valeur à une autre, l'excès de la seconde valeur sur la première*; cet accroissement peut être positif ou négatif.

Soit, par exemple, la fonction $y = x^2 - 2x + 2$. Si x passe de 3 à 4, l'accroissement de x est 1; l'accroissement correspondant de y est $10 - 5 = 5$. Si x passe de 3 à 1, l'accroissement de x est -2; l'accroissement correspondant de y est $1 - 5 = -4$.

Considérons une fonction $f(x)$ et attribuons à x successivement les valeurs a et $a + h$, ces valeurs étant prises dans un intervalle où la fonction est définie. L'accroissement de x à partir de a est h. L'accroissement correspondant de la fonction est

$$k = f(a + h) - f(a).$$

516. Fonction continue pour $x = a$. — *Une fonction* f(x) *est continue pour* x = a,

1° *si elle est définie dans un intervalle comprenant* x = a; et 2°, *si l'accroissement* f(a + h) — f(a) *de la fonction tend vers zéro en même temps que l'accroissement* h *de la variable* x.

Remarque. — En posant $a + h = x$, on a

$$f(a + h) - f(a) = f(x) - f(a) \quad \text{et} \quad h = x - a.$$

La 2e condition revient donc à dire que la différence $f(x) - f(a)$ tend vers zéro en même temps que $x - a$; ou encore (**430**, II) que la limite de $f(x)$ est $f(a)$ quand x tend vers a.

Ainsi, *la fonction* f(x) *définie dans un intervalle comprenant* x = a, *est continue pour* x = a *quand sa limite pour* x → a *est sa valeur numérique pour* x = a.

517. Continuité des fonctions algébriques. — *Lorsqu'une fonction algébrique* f(x) *est définie dans un intervalle, elle est continue dans cet intervalle,* car si a est une valeur de x prise dans cet intervalle, la limite de $f(x)$ est $f(a)$ quand x tend vers a (**509**, 1°).

518. Propriétés des fonctions continues. — Une fonction continue dans un intervalle (a, b) peut être représentée d'ordinaire par un arc de courbe continue. Il en résulte qu'*elle ne peut passer d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires.*

EXERCICES

667. (265) Trouver la limite des fractions rationnelles suivantes :

1° $\dfrac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2}$, quand x tend vers 0, vers 1, ou vers l'infini;

2° $\dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 6x + 5}$, » x » » 1, » 5, » » l'infini;

3° $\dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{3x^3 - 18x^2 + 36x - 24}$, » x » » 2, -1, » » l'infini;

4° $\dfrac{8x^3 + 2x^2 - 5x + 1}{8x^3 + 10x^2 - 11x + 2}$, » x » » $\dfrac{1}{2}$, » 0, » » l'infini;

5° $\dfrac{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{x^4 - 2x^3 + x^2}$, » x » » 1, » 0, » » l'infini;

6° $\dfrac{x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8}{x^3 - 4x^2 + 4x}$, » x » » 2, » 0, vers 1 ou vers l'infini.

668. (265*bis*). Trouver les limites des racines des équations

$$(m^2 - m - 2)x = m + 1$$
$$(m^2 + m - 6)x = m^2 - m - 2$$

quand m tend vers -1, vers 2 ou vers l'infini.

669. (269) Trouver la limite des expressions suivantes :

A $1^o\ \dfrac{x^2+\dfrac{x+1}{x-3}}{2x+1-\dfrac{x^2}{x-3}}$, pour $x=3$; $\quad 2^o\ \dfrac{x+3+\dfrac{x+1}{x-2}}{x+\dfrac{x^2}{x-2}}$, pour $x=2$;

A $3^o\ \dfrac{x+6}{x^2-16}-\dfrac{x+1}{x(x-4)}$, pour $x=4$; $\quad 4^o\ \dfrac{2}{1-x^2}-\dfrac{3}{1-x^3}$, pour $x=1$;

A $5^o\ (x^2-6x+5)\times\dfrac{x-3}{x^2-7x+10}$, pour $x=5$;

$6^o\ \dfrac{2x-7}{x^2-x-2}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}$, pour $x=2$.

670. (267) Trouver la limite des expressions suivantes :

A $1^o\ \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$, pour $x=3$; $\quad 4^o\ \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}-1}$, pour $x=-1$;

A $2^o\ \dfrac{1+x-\sqrt{1+x}}{\sqrt{x+1}-1}$, pour $x=0$; $\quad 5^o\ \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2(x-1)}}{\sqrt{x-3}}$, pour $x=3$;

$3^o\ \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-2}}$, pour $x=2$; $\quad 6^o\ \dfrac{\sqrt[3]{x-3}+1}{x-2}$, pour $x=2$.

671. (270) Trouver la limite des expressions suivantes pour x infini.

$1^o\ \dfrac{x+3\sqrt{x}}{7\sqrt{x}+2x}$

$2^o\ \dfrac{\sqrt{x+1}-x}{x}$

$3^o\ \dfrac{3x}{2x-1+\sqrt{4x^2+x+1}}$

$4^o\ \sqrt{x^2-4}-x$

$5^o\ 3x-\sqrt{x^2-x+1}$

$6^o\ \sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

$7^o\ 2x-1-\sqrt{4x^2-4x-3}$

$8^o\ \sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-3x+2}$

$9^o\ \sqrt[3]{x^3+5x^2}-\sqrt[3]{x^3+8x}$.

CHAPITRE XXVI

Dérivées.

§ I. — NOTIONS.

519. Exemple. — Considérons la fonction $y = x^2 - 3x + 2$, définie pour toutes les valeurs de x. Pour $x = 4$, sa valeur est $y = 6$. Donnons à x un accroissement positif ou négatif, que nous désignerons indifféremment par h ou par Δx (à lire, delta x). L'accroissement correspondant Δy de la fonction est

$$\Delta y = [(4 + h)^2 - 3(4 + h) + 2)] - 6 = h^2 + 5h.$$

Le rapport entre l'accroissement de y et celui de x est

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{h^2 + 5h}{h}.$$

Ce rapport est une fraction rationnelle en h. Cherchons sa limite quand h tend vers zéro (**506**).

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{h^2 + 5h}{h} = \lim (h + 5) = 5.$$

Cette limite est *la dérivée* de la fonction $y = x^2 - 3x + 2$ pour $x = 4$.

520. Définition. — Soient $y = f(x)$ une fonction définie dans l'intervalle (a, b) et x_0 un nombre compris entre a et b.

Donnons à x un accroissement positif ou négatif $\Delta x = h$. L'accr. correspondant de la fonction est $\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$, et le rapport de ces accroissements

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Si le rapport des accroissements tend vers une limite **finie** *ou* **infinie** *lorsque* h *tend vers zéro d'une manière quelconque, on dit que cette limite est* **la dérivée** *de la fonction* f(x) *pour* $x = x_0$.

521. Remarques. — I. *Dans la pratique*, on cherche en une seule fois la dérivée de la fonction proposée pour toutes les valeurs de x pour lesquelles cette fonction est définie. On la représente par y' ou par $f'(x)$. La dérivée de $f(x)$ pour $x = x_0$ est alors $f'(x_0)$.

Exemple. — La fonction $y = x^2 - 3x + 2$ est définie pour toutes les valeurs de x. Quelle que soit la valeur particulière de x que l'on considère, on peut écrire

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[(x+h)^2 - 3(x+h) + 2] - (x^2 - 3x + 2)}{h} = \frac{h^2 + 2hx - 3h}{h};$$

$$\text{puis,} \quad y' = \lim \frac{h^2 + 2hx - 3h}{h} = \lim (h + 2x - 3) = 2x - 3,$$

car on obtient la limite d'un polynôme entier en h pour $h \to 0$ en y remplaçant h par zéro.

La fonction a une dérivée finie pour toutes les valeurs de x.

II. Comme dans l'exercice précédent, la dérivée de la fonction $f(x)$ est ordinairement elle-même une fonction de x. On peut chercher la dérivée de cette fonction; on représente cette nouvelle dérivée par y'' ou $f''(x)$ et on l'appelle *dérivée seconde* de la fonction $f(x)$.

La dérivée de y'' sera *la dérivée troisième* de y et se représentera par y''' ou $f'''(x)$, et ainsi de suite.

522. Théorème. — ***Toute fonction qui a une dérivée finie est continue.***

La question revient à montrer que Δy tend vers zéro en même temps que Δx. En effet, on peut écrire

$$\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \times \Delta x.$$

Or, si Δx tend vers zéro, le premier facteur du second membre tend vers $f'(x)$ qui est fini. Donc le second membre et Δy tendent vers $f'(x) \times 0$ qui est égal à zéro.

523. Tangente à une courbe. — Soit M un point de la courbe C (fig. 35). Prenons sur cette courbe un second point M′ voisin du point M, le point M′ pouvant être situé à gauche ou à droite du point M. Traçons ensuite la sécante MM′.

Si, lorsque le point M′ *se rapproche indéfiniment du point* M, *la sécante* MM′ *se rapproche elle-même indéfiniment d'une droite* MT, *cette droite limite* MT *est appelée* **la tangente** *à la courbe* C *au point* M.

Le point M est *le point de contact* de la tangente.

524. Signification géométrique de la dérivée. — Supposons que la fonction $f(x)$ soit continue et admette une dérivée pour $x = x_0$. Traçons la courbe C qui a pour équation $y = f(x)$ et considérons les points M et M′ ayant pour coordonnées (x_0, y_0) et $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

Par le point M, traçons la droite dont le coefficient angulaire est $f'(x_0)$. A cet effet, on trace d'abord la droite OA, puis par M, on mène la parallèle MT à la droite OA.

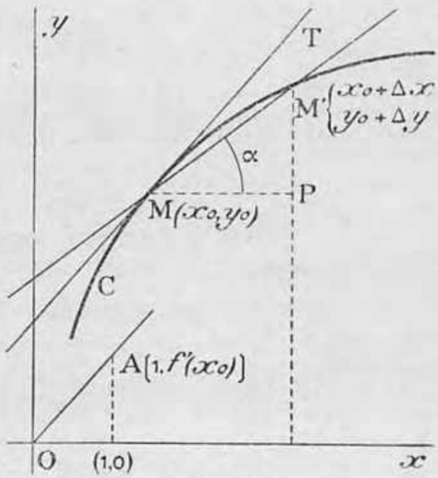


Fig. 35.

Le coefficient angulaire de la sécante MM′ est **(267)**

$$\frac{(y_0 + \Delta y) - y_0}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Lorsque le point M′ se rapproche indéfiniment du point M, l'accroissement Δx tend vers zéro et le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend vers sa limite $f'(x_0)$.

Le coefficient angulaire de la droite MM′ a donc pour limite le coefficient angulaire $f'(x_0)$ de la droite MT. La droite MM′ elle-même tendra vers la position limite MT, qui sera, d'après la définition précédente, la tangente à la courbe C au point M.

On voit donc que *si la fonction* $f(x)$ *est continue et a une dérivée pour* $x = x_0$, *la courbe* $y = f(x)$ *admet une tangente au point* (x_0, y_0) et *le coefficient angulaire de cette tangente est* $f'(x_0)$.

Remarques. — I. On obtient la représentation graphique du coefficient angulaire d'une droite en menant par l'origine O une parallèle à cette droite et en construisant l'ordonnée du point de cette parallèle qui a comme abscisse 1 (**265**). Or on vient d'établir que la dérivée de la fonction $y = f(x)$ pour $x = x_0$ est le coefficient angulaire de la tangente en $M(x_0, y_0)$. Cette dérivée est donc représentée par l'ordonnée du point A (Fig. 35). De là, on déduit :

1° Si la dérivée pour $x = x_0$ est *positive*, la tangente en $M(x_0, y_0)$ *monte de gauche à droite*; et réciproquement.

2° Si la dérivée est *négative*, la tangente correspondante *descend* de gauche à droite; et réciproquement.

3° Si la dérivée est *nulle*, la tangente correspondante est *parallèle* à l'axe des x; et réciproquement.

II. Le coefficient angulaire de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point (x_0, y_0) étant $f'(x_0)$, l'équation de la tangente au point (x_0, y_0) sera (**267**)

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Ainsi (**333**), l'équation de la tangente à la parabole $y = x^2 - 3x + 2$ au point (4,6) est

$$y - 6 = 5(x - 4) \quad \text{ou} \quad y = 5x - 14.$$

Pour construire cette tangente, on joint le point (4, 6) au point (0, — 14), où elle coupe l'axe des y.

§ II. — CALCUL DES DÉRIVÉES.

525. Dérivée d'une constante : ***La dérivée d'une constante est nulle.***

En effet, à un accroissement Δx de la variable correspond un accroissement nul de la constante. On a donc

$$\Delta y = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

Ce rapport étant nul, quel que soit Δx, sa limite est zéro.

REMARQUE. — On démontre aussi que *si la dérivée d'une fonction est nulle dans un intervalle, la fonction est constante dans cet intervalle.*

526. Dérivée d'une puissance de x. — ***Pour obtenir la dérivée d'une puissance de x, on diminue l'exposant d'une unité et on multiplie la puissance nouvelle par l'exposant primitif.***

Considérons la fonction $y = x^m$, m étant entier et positif. On a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+h)^m - x^m}{h} = \frac{(x+h)^m - x^m}{(x+h) - x}.$$

La différence $(x + h)^m - x^m$ est divisible par $(x + h) - x$, car en remplaçant dans la différence, $x + h$ par x, on trouve zéro. Effectuons la division; il vient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = (x+h)^{m-1} + x(x+h)^{m-2} + x^2(x+h)^{m-3} + \dots + x^{m-1}.$$

On obtient la limite d'un polynôme entier en h, quand h tend vers zéro, en remplaçant h par zéro. On a donc

$$y' = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = mx^{m-1}.$$

Remarque. — On démontre que le théorème précédent reste applicable si m est *fractionnaire* ou si m est *négatif*. Par suite, *il permet de calculer la dérivée du radical arithmétique* $y = \sqrt[m]{x}$.

En effet, on a

$$y = x^{\frac{1}{m}} \quad \text{et} \quad y' = \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1} = \frac{1}{m} x^{\frac{1-m}{m}} = \frac{1}{m}\sqrt[m]{x^{1-m}}.$$

Cas particulier. — *La dérivée de* $y = \sqrt{x}$ *est* $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

En effet, on a

$$y = x^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad y' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

527. Dans les nos suivants, nous supposons que les fonctions u, v, w admettent *des dérivées finies*. De cette façon, nous pourrons appliquer les théorèmes sur les limites (**503**). De plus (**522**), si on donne à x un accroissement Δx, les accroissements correspondants Δu, Δv, Δw tendent vers zéro en même temps que Δx.

528. Dérivée d'une somme algébrique. — ***La dérivée d'une somme algébrique de fonctions est égale à la somme algébrique correspondante des dérivées des fonctions.***

Soit $y = u + v - w$ une somme algébrique de fonctions. L'accroissement Δy de y qui correspond à un accroissement Δx de x est

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w;$$

d'où

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Si Δx tend vers zéro, les termes du second membre tendent vers des limites finies u', v', w'. On a donc

$$\mathbf{y' = u' + v' - w'}.$$

529. Dérivée d'un produit. — I. ***La dérivée d'un produit*** *de deux fonctions* ***est égale à la somme des produits obtenus en multipliant chaque facteur par la dérivée de l'autre.***

Considérons le produit $y = uv$. On a

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v.$$

et

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Faisons tendre Δx vers zéro; $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ et $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ tendent vers des limites finies u' et v'; u et v ne changent pas, car ils ne renferment pas Δx.

Le dernier terme tend vers zéro comme Δu (**527**). Donc

$$\mathbf{y' = uv' + vu'}. \tag{1}$$

II. Cas particulier. — *La dérivée du produit* av *d'une fonction par une constante s'obtient en multipliant la dérivée de la fonction par la constante.*

En effet, si u se réduit à une constante, on a $u' = 0$ et la formule (1) devient $y' = av'$.

III. Extension. — *La dérivée d'un produit de plusieurs fonctions est égale à la somme des produits obtenus en multipliant la dérivée de chaque fonction par le produit des autres fonctions.*

Soit la fonction $y = uvw$. En posant $uv = z$, il vient

$$y = zw \quad \text{et} \quad y' = zw' + wz'.$$

On a donc, en remplaçant z par uv et z' par $vu' + uv'$,

$$z = vwu' + uwv' + uvw'.$$

D'une façon analogue, on peut démontrer ensuite le théorème pour un produit de 4, 5, ... fonctions.

APPLICATION : *Dérivée d'un polynôme entier en* x. — En appliquant les règles précédentes, on trouve :

$$\begin{array}{ll} y = 3x - 7; & y' = 3; \\ y = 6 - 5x; & y' = -5; \\ y = x^2 - 5; & y' = 2x; \\ y = 2x^2 - 3x; & y' = 4x - 3; \\ y = 7x^2 + 2x - 3; & y' = 14x + 2; \\ y = 2x^3 - 5x^2 - 3x + 9; & y' = 6x^2 - 10x - 3. \end{array}$$

530. Dérivée du quotient $y = \frac{u}{v}$. — Nous supposons que *les valeurs considérées de* x *n'annulent pas le dénominateur* v, car pour ces valeurs de x, la fonction y n'est pas définie et n'admet pas de dérivée. Nous avons

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

et
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) \times \frac{1}{v(v + \Delta v)}.$$

Faisons tendre Δx vers zéro. Le 1er facteur tend vers $vu' - uv'$; le second a pour limite $\frac{1}{v^2}$, car v est différent de zéro et Δv tend vers zéro (**527**). Donc

$$\mathbf{y'} = \frac{\mathbf{vu' - uv'}}{\mathbf{v^2}}.$$

APPLICATION : *Dérivée d'une fraction rationnelle.* — En appliquant la formule précédente, on trouve que la dérivée de la fraction rationnelle

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2}$$

est $$y' = \frac{2x(x^2 - 3x + 2) - (2x - 3)(x^2 + 1)}{(x^2 - 3x + 2)^2} = \frac{-3x^2 + 2x + 3}{(x^2 - 3x + 2)^2}.$$

La dérivée n'existe pas pour $x = 1$ et $x = 2$, qui sont les racines du dénominateur, car pour ces valeurs de x la fonction n'est pas définie.

531. Fonctions de fonctions. — Les règles du nº **526** ne s'appliquent qu'aux puissances et aux racines de la variable indépendante. Elles ne s'appliquent donc pas à des fonctions telles que

$$y = (x^2 - 3x)^4 \quad \text{et} \quad z = \sqrt{4x^4 + 3x^2 + 1}.$$

Dans ces deux exemples, y est une puissance d'une fonction et z est une racine d'une fonction; on dit que y et z sont *des fonctions de fonctions.*

Pour obtenir la dérivée de $y = (x^2 - 3x)^4$, par exemple, on introduit une variable intermédiaire u en écrivant

$$y = u^4; \quad u = x^2 - 3x.$$

Dans ces deux relations, u est successivement variable indépendante et fonction. Nous savons calculer la dérivée de y par rapport à u et la dérivée de u par rapport à x. Nous allons voir comment, connaissant ces deux dérivées, on peut obtenir la dérivée de y par rapport à x.

DÉFINITION. — *On dit que* y *est une fonction de fonction de* x *lorsque* y *est une fonction d'une variable* u *qui est elle-même une fonction de* x.

Ainsi, y sera une fonction de fonction de x si l'on a

$$y = \mathrm{F}(u) \quad \text{et} \quad u = f(x).$$

Supposons que u admette une dérivée finie u'_x par rapport à x, et y une dérivée finie y'_u par rapport à u. Dans ces conditions, on a le théorème suivant.

THÉORÈME. — *La dérivée de* y *par rapport à* x *est égale au produit des dérivées de* y *par rapport à* u *et de* u *par rapport à* x.

En effet, donnons à x un accroissement Δx; u prend un accroissement Δu et y un accroissement Δy. On peut écrire

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Si Δx tend vers zéro, $\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ tend vers u'_x; $\dfrac{\Delta y}{\Delta u}$ tend vers y'_u, car u'_x étant fini, Δu tend vers zéro en même temps que Δx (**527**). Il vient donc

$$y'_x = y'_u \times u'_x.$$

APPLICATIONS. — I. Soit la fonction $y = (x^2 - 3x)^4$.

En posant $u = x^2 - 3x$, on a $y = u^4$; puis,

$$u'_x = 2x - 3;\ y'_x = 4u^3u'_x = 4(x^2 - 3x)^3(2x - 3).$$

II. Soit la fonction $y = \sqrt{4x^4 + 3x^2 + 1}$.

En posant $u = 4x^4 + 3x^2 + 1$, on a $y = \sqrt{u}$; puis,

$$u'_x = 16x^3 + 6x;\ y'_x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{u}} \times u'_x = (8x^3 + 3x)\sqrt{\frac{1}{4x^4 + 3x^2 + 1}}.$$

§ III. — APPLICATION A LA MÉCANIQUE.

532. Vitesse moyenne. — Le mouvement d'un train n'est pas uniforme. Quand on dit qu'un train parcourt le trajet Bruxelles-Ostende avec une vitesse horaire de 90 km, on indique *la vitesse moyenne* qu'on obtient en divisant la distance Bruxelles-Ostende par la durée du parcours.

D'une façon générale, *la vitesse moyenne d'un mobile entre deux points* A *et* B *est le quotient de la longueur* AB *par la durée du parcours.*

Dans ce qui suit, nous considérons un mobile animé d'un mouvement rectiligne. L'espace est exprimé en centimètres et le temps en secondes.

533. Vitesse à l'instant t. — Considérons un corps qui tombe librement en partant du repos. L'expérience montre que l'espace e parcouru pendant un temps t est proportionnel au carré du temps. Cet espace est donc donné par la formule $e = kt^2$, k étant une constante.

A partir d'un instant déterminé t, calculons la vitesse moyenne du mobile pendant un temps Δt. L'espace parcouru pendant ce temps est

$$\Delta e = k(t + \Delta t)^2 - kt^2.$$

La vitesse moyenne pendant le temps Δt est donc

$$\frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{k[(t + \Delta t)^2 - t^2]}{\Delta t} = k(2t + \Delta t).$$

Cette formule montre que la vitesse moyenne diminue en même temps que Δt; elle montre aussi que la vitesse moyenne tend vers $2kt$ quand Δt tend vers zéro. Cette limite $2kt$ est appelée *vitesse du mobile à l'instant* t. A remarquer que $2kt$ est aussi la dérivée de kt^2 par rapport à t.

D'une façon générale, *si* $e = f(t)$ *est l'équation d'un mouvement rectiligne, la vitesse à l'instant* t *est la dérivée de la fonction* f(t) *pour la valeur considérée de* t.

Remarque. — L'équation du mouvement rectiligne et uniforme est (**270**)

$$e = e_0 + v(t - t_0).$$

On voit que la dérivée de e par rapport à t est effectivement la vitesse v, qui dans ce mouvement est une constante.

534. Accélération. — La vitesse à l'instant t d'un corps qui tombe librement en partant du repos, étant $v = 2kt$, les vitesses aux instants 0, 1, 2, ... sont 0, $2k$, $4k$, ... Il en résulte que la vitesse augmente chaque seconde d'une quantité constante $2k$. Cette quantité $2k$ est appelée *accélération*; à remarquer que $2k$ est aussi la dérivée de la vitesse $v = 2kt$ par rapport à t.

D'une manière générale, *l'accélération est la dérivée de la vitesse par rapport à* t; c'est aussi la dérivée seconde de la fonction $e = f(t)$. Quand l'accélération est une constante, comme dans l'exemple précédent, on dit que le mouvement est *uniformément accéléré*.

Remarque. — Quand un corps tombe librement en partant du repos, on désigne d'ordinaire l'accélération par g. On a donc $2k = g$; l'équation du mouvement devient $e = \frac{1}{2} gt^2$ et la vitesse est gt.

EXERCICES

672. (304) Calculer, en partant de la définition, la dérivée des fonctions suivantes pour les valeurs indiquées de x.

1° $3x - 1$; $x = 2$;
2° $x^2 - 5$; $x = 1$;
3° $x^2 - 2x + 5$; $x = 1$;
4° $\frac{x+1}{1-2x}$; $x = 0$ ou 1;
5° $\sqrt{x}$; $x = 1$;
6° $\sqrt{2x - x^2}$; $x = 1$;
7° $\sqrt{5 + 4x - x^2}$; $x = 0$;
8° $\frac{3x-2}{2-x}$; $x = 0$ ou 1.

Calculer les dérivées des fonctions suivantes;

673. (304bis)
1° $3x$
2° $7x - 5$
3° $1 - 2x$
4° $x^2 - x + 2$
5° $4x^2 - 2x - 5$
6° $x(x + 3)$
7° $(x + 1)(x - 2)$
8° $(2x - 3)(x + 2)$
9° $(3x + 1)(1 - 2x)$
10° $(2 - x)(1 - 5x)$
11° $2x^3 + 3x^2 - 6x$
12° $3x^4 + 9$
13° $2x^4 - 3x^2 - 3$
14° $1 - 2x^2 + 3x^4$
15° $(x^2 - 1)(2 - x)$.

674. (305) 1° x^2-3x+7 2° x^3-3x^2+4x 3° x^4-5x^3+3x 4° $(x^2+3)(2-x)$ 5° $(x-2)^5$ 6° $(4-3x^2)^7$ 7° $x^3+(x^2-1)^2$ 8° $(x^2-3x+9)^4$ 9° $(x^2-6)(2x+3)^2$ 10° $x(x-1)^2$ 11° $(x+2)(x-3)(x+4)$ 12° $(x-7)(3x^2-4x+2)$ 13° $(2+x)^2(1-x)^3$ 14° $(x^2-1)^3(1-2x^3)^4$ 15° $x^2(1+x)^3(2-x)^2$.

675. (306) 1° $\frac{1}{1-3x^2}$ 2° $\frac{3-x}{x}$ 3° $\frac{x+1}{2x-1}$ 4° $\frac{2x+1}{x+3}$ 5° $\frac{x}{x^2-1}$ 6° $\frac{x^2+1}{x^3-1}$ 7° $\frac{2x+1}{4x^2+3x-1}$ 8° $\frac{x^2+9}{x^2+12x+11}$ 9° $\frac{x^2-6x+8}{x^2-2x+1}$ 10° $\frac{x^3-3x+2}{x^2-x+2}$ 11° $\frac{x^3+1}{x^3+3x-2}$ 12° $\frac{(x-1)^2}{x^3+9x-9}$ 13° $\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ 14° $\frac{(2x-1)^3}{(x^2+3)^4}$ 15° $\frac{(x^2+1)(x-2)^4}{(x+7)^3}$.

676. (307) 1° $\sqrt{2-x}$ 2° $\sqrt{3x^2-5x+7}$ 3° $\sqrt[3]{5x^2-4x+1}$ 4° $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}$ 5° $3x-\sqrt[3]{x^2-9}$ 6° $2x-1-\sqrt{x^2+x+1}$ 7° $x\sqrt{2x^2+1}$ 8° $(2x-3)\sqrt{1-x^2}$ 9° $(x^2+x+1)\sqrt{1-x^2}$ 10° $(x-1)^2\sqrt{x^2+2x-1}$.

CHAPITRE XXVII

Variations des fonctions.

§ I. — NOTIONS.

535. Définitions. — Soient x_1 et x_2 deux nombres *quelconques* de l'intervalle (a, b) dans lequel la fonction $f(x)$ est définie.

La fonction f(x) *est* **croissante** *dans l'intervalle* (a, b) *quand l'inégalité* $x_1 < x_2$ *entraîne la relation* $f(x_1) < f(x_2)$; *elle est* **décroissante** *dans l'intervalle* (a, b) *quand l'inégalité* $x_1 < x_2$ *entraîne la relation* $f(x_1) > f(x_2)$.

Ces définitions reviennent à dire que la fonction $f(x)$ est croissante (*décroissante*) dans l'intervalle (a, b) quand les accroissements correspondants $x_2 - x_1$ et $f(x_2) - f(x_1)$ sont toujours de mêmes signes (*de signes contraires*).

536. Maximum et minimum. — Considérons une fonction $f(x)$ définie dans l'intervalle (a, b) et soit x_0 un nombre compris entre a et b.

La fonction f(x) *est* **maximum** *pour* $x = x_0$, *lorsque pour cette valeur de* x, *elle cesse de croître pour commencer à décroître.*

Cette définition revient à dire qu'une fonction est maximum pour $x = x_0$, s'il existe un nombre positif δ, tel que la fonction soit croissante dans l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0)$ et décroissante dans l'intervalle $(x_0, x_0 + \delta)$.

La fonction est **minimum** *pour* $x = x_0$, *lorsque pour cette valeur de* x, *elle cesse de décroître pour commencer à croître.*

Cette définition revient à dire qu'une fonction est minimum pour $x = x_0$, s'il existe un nombre positif δ, tel que la fonction soit décroissante dans l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0)$ et croissante dans l'intervalle $(x_0, x_0 + \delta)$.

537. Étudier les variations d'une fonction *c'est rechercher les intervalles dans lesquels la fonction est croissante ou décroissante, et les valeurs de* x *qui la rendent maximum ou minimum.*

La méthode la plus générale pour étudier les variations d'une fonction est *la méthode des dérivées*, que nous allons exposer.

§ II. — THÉORÈMES FONDAMENTAUX.

538. Conventions. — La démonstration générale des théorèmes fondamentaux présente certaines difficultés. Voilà pourquoi, nous nous bornerons à considérer dans ce paragraphe une fonction $f(x)$ qui jouit des propriétés suivantes :

1° *La fonction* f(x) *est continue dans tout intervalle* (a, b) *où elle est définie.*

2° *Elle admet une dérivée finie et continue dans le même intervalle.*

3° *L'intervalle* (a, b) *peut être partagé en d'autres où la fonction est constamment croissante, constamment décroissante ou constante.*

Ces propriétés s'appliquent aux polynômes entiers en x et aux fractions rationnelles. Elles s'appliquent aussi aux fonctions irrationnelles que nous avons à considérer.

539. Exemples. — Les six théorèmes fondamentaux peuvent être vérifiés en considérant les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ représentées par les Fig. 36 à 38 et en appliquant le principe suivant (**524**, Rem.) :

La dérivée d'une fonction pour $x = x_0$ *est positive ou négative suivant que la tangente au point* (x_0, y_0) *du graphique monte ou descend, de gauche à droite; elle est nulle si la tangente est parallèle à l'axe* Ox.

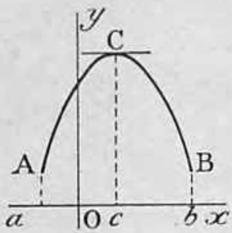


Fig. 36.

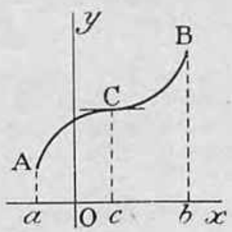


Fig. 37.

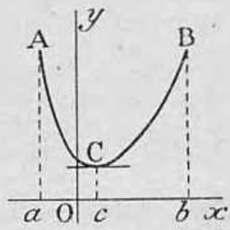


Fig. 38.

On commencera par étudier les signes des dérivées des trois fonctions. A cet effet, on imagine une tangente mobile dont le point de contact se déplace de A en B. On constate ainsi que si on exclut $x = c$, qui annule les trois dérivées, on peut dire ;

La dérivée $f'_1(x)$ est positive dans (a, c) et négative dans (c, b).

La dérivée $f'_2(x)$ est positive dans l'intervalle (a, b).

La dérivée $f'_3(x)$ est négative dans (a, c) et positive dans (c, b).

I. L'examen des trois graphiques montre alors que si l'une des fonctions est croissante dans un intervalle, sa dérivée est positive ou nulle. C'est le théorème I. On vérifie d'une façon analogue les théorèmes II, III, IV.

II. Les points remarquables des trois graphiques sont ceux où la dérivée s'annule.

Si la dérivée s'annule en changeant de signe, la fonction passe par un maximum (Fig. 36) ou par un minimum (Fig. 38). Si elle s'annule sans changer de signe, on a *un point d'inflexion* (Fig. 37), c'est-à-dire un point où la concavité de la courbe change de sens.

540. Théorème I. — *Si la fonction* $f(x)$ ***est*** *croissante* ***dans l'intervalle*** (a, b), ***sa dérivée est*** *positive ou nulle* ***pour chaque valeur de*** x ***prise dans cet intervalle.***

En effet, soient x et $x + \Delta x$ deux nombres quelconques de l'intervalle (a, b); puis y et $y + \Delta y$ les valeurs correspondantes de la fonction.

Comme la fonction est croissante, les différences

$$(y + \Delta y) - y = \Delta y \quad \text{et} \quad (x + \Delta x) - x = \Delta x$$

sont de mêmes signes (**537**) et le rapport $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ est toujours positif. Il en résulte que la limite y' de ce rapport, quand Δx tend vers zéro, ne peut évidemment être négative.

Remarque. — La dérivée ne peut s'annuler que pour des valeurs isolées de x; car si elle s'annulait dans un intervalle faisant partie de (a, b), la fonction serait constante dans cet intervalle. — Le théorème II donne lieu à la même remarque.

541. Théorème II. — *Si la fonction* $f(x)$ ***est*** *décroissante* ***dans l'intervalle*** (a, b), ***sa dérivée est*** *négative ou nulle* ***pour chaque valeur de*** x ***prise dans cet intervalle.***

La démonstration est analogue à celle du théorème I.

542. Théorème III. — *Si la dérivée de la fonction* $f(x)$ ***est*** *positive* ***pour les valeurs de*** x ***comprises entre*** a ***et*** b, ***la fonction est*** *croissante* ***dans l'intervalle*** (a, b).

En effet, si la fonction était décroissante dans l'intervalle ou dans une partie de l'intervalle, sa dérivée ne serait jamais positive, tant que la fonction serait décroissante (**541**).

Si la fonction était constante dans l'intervalle ou dans une partie de l'intervalle, la dérivée serait nulle, tant que la fonction serait constante (**525**).

La fonction est donc croissante dans l'intervalle.

543. Théorème IV. — ***Si la dérivée de la fonction** $f(x)$ **est** négative **pour les valeurs de** x **comprises entre** a **et** b, **la fonction est** décroissante **dans l'intervalle*** (a, b).

La démonstration est analogue à celle du théorème III.

544. Théorème V. — ***Si la dérivée de la fonction** $f(x)$ **s'annule pour** $x = x_0$ **en passant du signe** $+$ **au signe** $-$, **la fonction est maximum pour*** $x = x_0$.

En effet, par hypothèse, il existe un nombre positif δ tel que la dérivée soit positive pour les valeurs de x comprises entre $x_0 - \delta$ et x_0; et négative pour les valeurs de x comprises entre x_0 et $x_0 + \delta$.

La fonction est donc croissante dans l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0)$ et décroissante dans l'intervalle $(x_0, x_0 + \delta)$. Par suite, elle est maximum pour $x = x_0$.

On démontre d'une façon analogue le théorème suivant :

545. Théorème VI. — ***Si la dérivée de la fonction** $f(x)$ **s'annule pour** $x = x_0$, **en passant du signe** $-$ **au signe** $+$, **la fonction est minimum pour*** $x = x_0$.

546. Exemples. — I. La fonction $y = 2x - 5$ a pour dérivée $y' = 2$.

Comme cette dérivée est toujours positive, la fonction est toujours croissante et *elle n'a ni maximum, ni minimum.*

II. La fonction $y = x^2 - 4x + 3$ a pour dérivée $y' = 2x - 4$.

Cette dérivée s'annule pour $x = 2$, en passant du signe $-$ au signe $+$. La fonction est donc *minimum* pour $x = 2$. En remplaçant x par 2 dans la fonction, on voit que le minimum vaut -1.

III. La fonction $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ a pour dérivée

$$y' = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x - 1)^2.$$

Cette dérivée s'annule pour $x = 1$, mais sans changer de signe. La fonction n'a *ni maximum, ni minimum.*

IV. La fonction $y = \dfrac{2x - 3}{x + 1}$ a pour dérivée

$$y' = \frac{5}{(x + 1)^2}.$$

Cette dérivée ne s'annule pour aucune valeur de x et la fonction n'a *ni maximum, ni minimum.*

V. La fonction $y = \dfrac{2x^2 + 3x + 2}{x^2 + x + 1}$ a pour dérivée

$$y' = \frac{1 - x^2}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

Cette dérivée s'annule pour $x = \pm 1$. Elle est positive dans l'intervalle $(-1, 1)$ et négative dans les intervalles $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$. Par suite :

1° La fonction est *minimum* pour $x = -1$; le minimum vaut 1.

2° La fonction est *maximum* pour $x = 1$; le maximum vaut $\dfrac{7}{3}$.

§ III. — ÉTUDE DES VARIATIONS DE QUELQUES FONCTIONS.

547. Règles. — I. *Pour étudier les variations d'une fonction*, on procède dans l'ordre suivant :

1° Chercher les intervalles où *la fonction* est continue; les valeurs de x qui l'annulent; la limite de la fonction pour x infini.

2° *Calculer la dérivée*; chercher les valeurs de x qui l'annulent ou la rendent discontinue; étudier son signe.

3° *Former le tableau des variations*. Pour cela, on range les valeurs remarquables de x par ordre de grandeur croissante; on inscrit les valeurs correspondantes de la dérivée et de la fonction; on marque les signes de la dérivée dans les divers intervalles. On pourra alors déterminer facilement *le sens de la variation* de la fonction dans chaque intervalle, les *maximums* et les *minimums*, les signes à placer devant le symbole ∞.

548. Représentation graphique. — 1° *Chercher les coordonnées des points remarquables* : points maximums et points minimums, points de rencontre avec les axes, etc.

2° *Marquer ces points* et au besoin quelques autres.

En tenant compte du tableau des variations, on pourra alors obtenir un tracé approché du graphique.

549. Variations de la fonction $y = ax + b$. — Sa dérivée est

$$y' = a.$$

a) Si $a > 0$, la dérivée est toujours *positive* et la fonction est *croissante* dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

b) Si $a < 0$, la dérivée est toujours *négative* et la fonction est *décroissante* dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

c) Si $a = 0$, la fonction se réduit à la constante b.

La droite qui représente les variations de y a comme coefficient angulaire a. Elle est parallèle à l'axe $x'x$ quand a est nul (**261, 265**).

550. Variations de la fonction $y = ax^2 + bx + c$.

1° La dérivée $y' = 2ax + b$ s'annule pour

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

2° Suivant que a est positif ou négatif, on a l'un ou l'autre des tableaux suivants :

a > 0.

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ *minimum*	$\nearrow$	$+\infty$

a < 0.

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ *maximum*	$\searrow$	$-\infty$

La courbe qui représente les variations de la fonction est une parabole.

551. Variations de la fonction $y = \frac{1}{6}x^3 - 2x^2 + 6x$.

1° La dérivée de cette fonction est

$$y' = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 = \frac{1}{2}(x-2)(x-6).$$

Elle s'annule pour $x = 2$ et pour $x = 6$. Le trinôme $(x-2)(x-6)$ est négatif, quand x est compris entre les racines, et positif quand x est extérieur aux racines.

2° On a le tableau :

x	$-\infty$		2		6		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{16}{3}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
			Max.		*Min.*		

3° Pour obtenir le graphique de la fonction, on commence par marquer le point maximum $\left(2, \frac{16}{3}\right)$ et le point minimum (6,0).

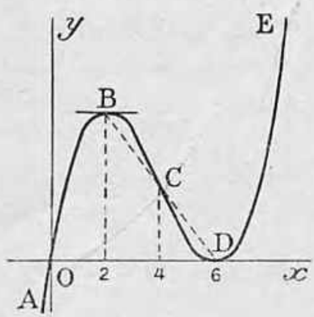


Fig. 39.

La fonction s'annule pour $x = 0$ et $x = 6$. Pour $x = 0$, on a $y = 0$ et la courbe passe par l'origine. Pour $x = 6$, on a $y = 0$; le point (6,0) est déjà marqué. La courbe est tangente en ce point à l'axe des x.

Remarque. — Le graphique de la fonction se compose visiblement de deux parties : une première partie ABC concave vers les y négatifs et une deuxième partie CDE concave vers les y positifs. Entre le point maximum B et le point minimum D se trouve un point C où la concavité change de sens. Ce point est *un point d'inflexion.*

On démontre que *si la dérivée seconde s'annule pour* x = a *en changeant de signe, cette valeur de* x *est l'abscisse d'un point d'inflexion.* La dérivée seconde de la fonction proposée est $x - 4$; elle s'annule en changeant de signe pour $x = 4$. Les coordonnées du point d'inflexion C sont 4 et $\frac{8}{3}$; c'est le point d'intersection de la courbe avec la droite BD.

552. Variations de la fonction $y = \frac{x-2}{x+1}$.

1° Cette fonction est discontinue pour $x = -1$, qui est la racine du dénominateur. La fonction s'annule pour $x = 2$ et elle a comme limite 1 pour x infini.

2° Prenons la dérivée

$$y' = \frac{(x+1) - (x-2)}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}.$$

La dérivée est positive, excepté pour $x = -1$. Pour cette valeur de x, la dérivée cesse d'exister, car la fonction n'est pas définie pour $x = -1$.

3° On a le tableau

x	$-\infty$		-1			$+\infty$
y'		$+$	|		$+$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$		$\nearrow$	1

4° Pour obtenir le graphique, on commence par tracer les droites $x = -1$ et $y = 1$. La courbe est *asymptote* (**553**) à ces droites. Elle rencontre l'axe Ox au point (2,0) et l'axe des y au point (0, $-$ 2).

La courbe est une *hyperbole*. Comme ses deux asymptotes sont rectangulaires, on dit qu'elle est *équilatère*.

553. Asymptotes. — *Une droite est asymptote à une branche infinie de courbe (ou inversement, la courbe est asymptote à la droite), lorsque la distance d'un point de la courbe à cette droite tend vers zéro, quand le point s'éloigne indéfiniment sur la branche de courbe.*

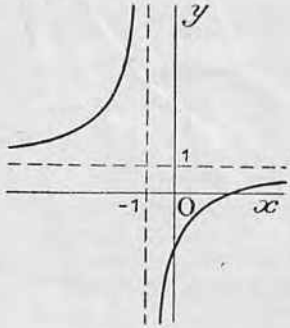


Fig. 40.

Ainsi, la droite $y = 1$ est asymptote à la courbe $y = \frac{x-2}{x+1}$. En effet, la distance du point M d'abscisse x de la courbe à la droite $y = 1$ est $\frac{x-2}{x+1} - 1$ et cette distance tend vers zéro quand M s'éloigne indéfiniment vers la droite ou vers la gauche, car $\lim \frac{x-2}{x+1} = 1$ quand x croît ou décroît indéfiniment.

La courbe qui représente les variations d'une fraction rationnelle $\frac{f(x)}{F(x)}$ peut admettre des asymptotes *horizontales*, *verticales* ou *obliques*. On obtient les équations de ces asymptotes en appliquant les règles suivantes.

I. Si le degré de $f(x)$ est inférieur ou égal au degré de F(x), *la courbe admet une asymptote horizontale*. On obtient son équation en égalant y à la limite de la fraction pour x infini (**512**).

II. Si l'équation F$(x) = 0$ admet des racines $a_1, a_2, \ldots$ qui n'annulent pas $f(x)$, *la courbe admet des asymptotes verticales*. Les équations de ces asymptotes sont $x = a_1$, $x = a_2, \ldots$

III. Si le degré de $f(x)$ dépasse d'une unité le degré de F(x), *la courbe admet une asymptote oblique aux axes*. On obtient son équation en égalant y au quotient de la division de $f(x)$ par F(x).

Ainsi la courbe $y = \frac{x^2 - x - 4}{x - 1}$ admet, en dehors de l'asymptote verticale $x = 1$, une asymptote oblique $y = x$, car son équation peut s'écrire

$$y = x - \frac{4}{x-1}.$$

554. Variations de la fonction $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 1}$.

1° Cette fonction est discontinue pour $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; ces valeurs sont les racines du dénominateur; elles valent approximativement $-0{,}618$ et $1{,}618$. La fonction ne s'annule pour aucune valeur de x et sa limite est 1 pour x infini.

2° Prenons la dérivée

$$y' = \frac{(x^2 - x - 1)(2x + 1) - (x^2 + x + 1)(2x - 1)}{(x^2 - x - 1)^2} = \frac{-2x(x + 2)}{(x^2 - x - 1)^2}.$$

La dérivée s'annule pour $x = -2$ et pour $x = 0$. Elle a le signe de son numérateur; elle est donc positive pour x compris entre -2 et 0; elle est négative pour x inférieur à -2 ou supérieur à 0. Toutefois, il faut remarquer que la dérivée cesse d'exister pour les valeurs de x qui rendent la fonction discontinue.

3° On a le tableau :

x	$-\infty$		-2		$-0{,}618$		0		$1{,}618$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	
y	1	$\searrow$	$\frac{3}{5}$	$\nearrow$	$+\infty \vert -\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty \vert +\infty$	$\searrow$	1
			Min.				*Max.*				

Les signes placés à la troisième ligne du tableau devant le symbole ∞ sont en rapport avec le sens de la variation de y.

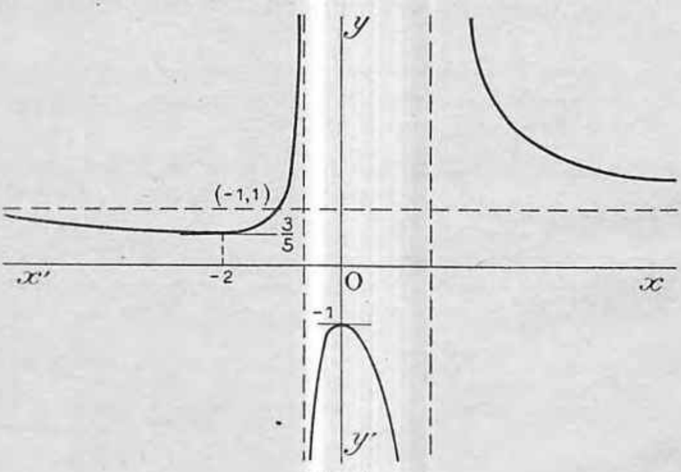


Fig. 41.

TRACÉ DU GRAPHIQUE. — 1° Tracer les droites

$$x = -0{,}618; \quad x = 1{,}618; \quad y = 1.$$

La courbe est *asymptote* à ces droites. L'asymptote $y = 1$ rencontre la courbe au point $(-1, 1)$.

2° La courbe ne rencontre pas l'axe des x, car le numérateur $x^2 + x + 1$ n'a pas de racine.

3° La courbe rencontre l'axe des y au point $(0, -1)$.

555. Variations de la fonction $y = \sqrt{4 - x^2}$.

Cette fonction est continue dans l'intervalle $(-2, 2)$. De plus, elle a une dérivée finie et continue

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 4}} \times (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

pour les valeurs de x comprises entre -2 et $+2$. Cette dérivée s'annule pour $x = 0$, en passant du signe $+$ au signe $-$. On a le tableau :

x	-2		0		2
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0
			Maximum		

Le graphique est une demi-circonférence ABC de centre O et de rayon 2.

556. Problème. — *Aux quatre coins d'une feuille carrée de carton, on enlève des carrés égaux. Étudier les variations du volume de la boîte obtenue en relevant les quatre rectangles du pourtour.*

Soient a le côté du carré de carton et x le côté du carré à enlever. La hauteur de la boîte est x et l'aire du fond $(a - 2x)^2$.

En appelant V le volume, on aura

$$V = x(a - 2x)^2 = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x.$$

La question revient à étudier les variations de cette fonction dans l'intervalle $\left(0, \frac{a}{2}\right)$.

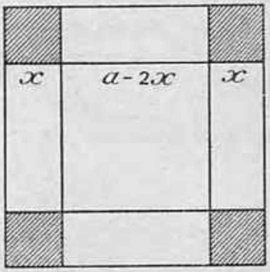


Fig. 42.

La dérivée $V' = 12x^2 - 8ax + a^2$ s'annule pour

$$x = \frac{a}{2} \text{ et } x = \frac{a}{6}.$$

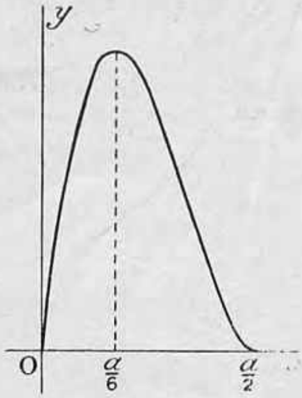


Fig. 43.

On a le tableau

x	0		$\frac{a}{6}$		$\frac{a}{2}$
V'	a^2	$+$	0	$-$	0
V	0	$\nearrow$	$\frac{2a^3}{27}$ *Maximum*	$\searrow$	0

Le graphique de la fonction est tangent à l'axe Ox au point $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$.

557. Problème. — *Étudier les variations du volume d'un cône circonscrit à une sphère.*

Soit x la hauteur du cône; x devra rester supérieur à 2R. Le volume cherché est donné par l'expression

$$V = \frac{\pi}{3} BC^2 \times SC = \frac{\pi x}{3} BC^2.$$

Les deux triangles rectangles SBC et SOD donnent la proportion

$$\frac{BC}{OD} = \frac{SC}{SD} \quad \text{ou} \quad \frac{BC}{R} = \frac{x}{SD}.$$

Mais SD est une tangente et l'on a

$$SD^2 = SC \times SE = x(x - 2R).$$

La proportion devient ainsi

$$\frac{BC}{R} = \frac{x}{\sqrt{x(x-2R)}} \text{ ou } BC = \frac{Rx}{\sqrt{x(x-2R)}}.$$

En substituant, on trouve

$$V = \frac{\pi}{3} \times \frac{R^2x^2}{x - 2R}$$

On est ainsi amené à étudier la fonction

$$y = \frac{x^2}{x - 2R}$$

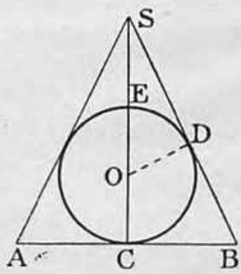


Fig. 44.

dans l'intervalle (2R, $+\infty$) où elle est définie, sauf pour $x = 2R$. La dérivée de cette fonction est

$$y' = \frac{2x(x-2R) - x^2}{(x-2R)^2} = \frac{x^2 - 4Rx}{(x-2R)^2}.$$

Elle s'annule pour $x = 4R$ et pour $x = 0$; cette dernière racine est à écarter. Son signe est celui du numérateur.

On a le tableau :

x	2R		4R		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$\vert +\infty$	$\searrow$	8R	$\nearrow$	$+\infty$
V	$\vert +\infty$	$\searrow$	$\frac{8\pi R^3}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$
			Min.		

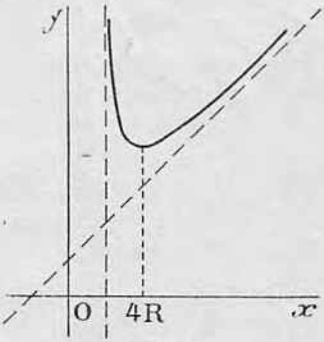


Fig. 45.

La courbe qui représente les variations de y est asymptote aux droites $x = 2R$ et $y = x + 2R$, car l'équation peut s'écrire

$$y = x + 2R + \frac{4R^2}{x - 2R}.$$

On peut encore remarquer que le minimum de V est le double du volume de la sphère donnée.

§ IV. — MAXIMUMS ET MINIMUMS ABSOLUS.

558. Définitions. — Une fonction peut passer par plusieurs maximums et minimums. Un maximum n'est pas nécessairement la plus grande valeur de la fonction et un minimum n'est pas nécessairement sa plus petite valeur. Un minimum peut même être plus grand qu'un maximum (**554**). Aussi les maximums et les minimums que nous venons de considérer, sont-ils appelés **maximums et minimums relatifs.**

Lorsque parmi les valeurs que peut prendre une fonction, il y en a une telle qu'aucune autre n'est plus grande, on dit que cette valeur est **le maximum absolu** *de la fonction.*

Lorsque parmi les valeurs que peut prendre une fonction, il y en a une telle qu'aucune autre n'est plus petite, on dit que cette valeur est **le minimum absolu** *de la fonction.*

EXEMPLES. — I. La fonction $y = x^2 - 5x + 4$ (voir n° **384**) n'a pas de maximum absolu. Son minimum absolu est $-2,25$, qui est aussi un minimum relatif.

Si l'on fait croître x de 0 à 2,5, la même fonction a pour maximum absolu 4, et pour minimum absolu $-2,25$.

II. La fonction $y = \frac{1}{6}x^3 - 2x^2 + 6x$ (voir n° **551**) n'a ni maximum absolu, ni minimum absolu.

III. La fonction $y = \sqrt{4 - x^2}$ (voir n° **555**) a un minimum absolu qui est zéro; son maximum absolu est 2, qui est aussi un maximum relatif.

La méthode des dérivées peut servir dans beaucoup de cas à déterminer le maximum absolu et le minimum absolu d'une fonction. Les deux principes suivants sont également fort utiles à cet effet.

559. 1er Principe. — ***Un produit de deux facteurs variables dont la somme est constante, est maximum absolu lorsque les deux facteurs sont égaux, s'ils peuvent le devenir.***

Soient u et v les facteurs variables dont la somme est constante et égale à $2a$. L'identité

$$(u + v)^2 - (u - v)^2 = 4uv$$

donne

$$uv = a^2 - \frac{(u - v)^2}{4}.$$

Cette relation prouve que le produit uv sera le plus grand possible lorsque le carré $(u - v)^2$ sera le plus petit possible, c'est-à-dire quand il sera nul, s'il peut le devenir. Alors on a $u = v = a$.

560. 2e Principe. — ***Une somme de deux termes positifs variables dont le produit est constant, est minimum absolu quand ces deux termes sont égaux, s'ils peuvent le devenir.***

Soient u et v les deux variables positives dont le produit est constant et égal à a^2. De l'identité

$$(u + v)^2 - (u - v)^2 = 4uv$$

on déduit

$$(u + v)^2 = 4a^2 + (u - v)^2.$$

Cette relation prouve que $(u + v)^2$ et $u + v$ (qui est positif) sont le plus petits possible quand le carré $(u - v)^2$ est le plus petit possible, c'est-à-dire quand il est nul, s'il peut le devenir. Alors on a

$$u = v = a.$$

561. Applications. — I. *Quel est parmi les rectangles de même périmètre, celui dont l'aire est maximum absolu?*

Désignons par $2p$ le périmètre constant et par x l'un des côtés du rectangle. L'autre côté du rectangle est $p - x$ et son aire S est donnée par la formule

$$S = x(p - x).$$

Les deux facteurs du produit ont une somme constante. L'aire est donc maximum absolu quand on a

$$x = p - x \quad \text{ou} \quad x = \frac{p}{2}.$$

Le rectangle d'aire maximum est *un carré*. Son aire est $\frac{p^2}{4}$.

II. *Quel est parmi les rectangles de même aire celui dont le périmètre est minimum absolu?*

Désignons par S l'aire constante et par x et y les deux côtés du rectangle. Si le périmètre est $2p$, on aura les relations

$$p = x + y; \qquad S = xy.$$

Comme le produit xy est constant, la somme $x + y$ sera minimum absolu quand on aura

$$x = y = \sqrt{S}.$$

Le rectangle de périmètre minimum est *un carré*. Son périmètre est $4\sqrt{S}$.

EXERCICES

Étudier les variations des fonctions suivantes par la méthode des dérivées.

677. (315*bis*) 1° $y = 3x^2$ — 4° $y = x^2 + 2x + 2$

2° $y = x^2 + 3x$ — 5° $y = x^2 - 4x + 4$

3° $y = x(4 - x)$ — 6° $y = (x + 1)(5 - x)$.

678. (316) 1° $y = x(9 - x^2)$ — 6° $y = x^4 - 10x^2 + 9$

2° $y = \frac{1}{4}(x^3 + x - 10)$ — 7° $y = x^4 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{4}$

3° $y = x^3 - 3x^2 + 2$ — 8° $y = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$

4° $y = 3x - 4x^3$ — 9° $y = 8 + 2x^2 - x^4$

5° $y = 3x^2 - x^3$ — 10° $y = (x + 1)(x + 2)(x - 3)$.

679. (317) 1° $y = \frac{x-1}{x+1}$ 3° $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ 5° $y = \frac{1}{x^2 + x - 2}$

2° $y = \frac{1-x}{2x-1}$ 4° $y = \frac{12}{x^2 + 2x + 5}$ 6° $y = \frac{1}{4x^2 + 4x + 1}$.

680. (318) 1° $y = \frac{x^2 - 6x - 1}{x^2 + 2x + 3}$ 5° $y = \frac{x^2 - 5x + 1}{x^2 - x + 1}$ 9° $y = \frac{x^2 + 8x}{x^2 - 10x + 9}$

2° $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x - 3}$ 6° $y = \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 2x + 1}$ 10° $y = \frac{x^2 + 2x + 25}{(x+1)^2}$

3° $y = \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 1}$ 7° $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x - 3}$ 11° $y = \frac{2x^2 - 7x + 3}{x^2 - 7x + 12}$

4° $y = \frac{x^2 - 1}{4x + 5}$ 8° $y = \frac{(x-1)^2}{x - 2}$ 12° $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{3x^2 - 12x + 12}$

681. (324) La fonction $y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$ peut-elle devenir maximum ou minimum?

682. (325) Chercher les conditions requises pour que le trinôme $ax^4 + bx^2 + c$ admette un maximum sans admettre un minimum.

683. (326) On donne la fonction $y = x^3 + px - 1$. Quelles valeurs doit prendre p pour que la fonction n'admette ni maximum ni minimum?

684. (327) Déterminer un polynôme du 3e degré en x, qui admette deux valeurs extrêmes, l'une pour $x = 1$ et l'autre pour $x = 2$, qui s'annule pour $x = 0$ et qui prenne la valeur $-\frac{10}{3}$ pour $x = 1$. Étudier les variations de ce polynôme.

685. (332) Déterminer le paramètre a pour que la fonction $y = \frac{ax^2 + 20x}{x^2 + 2x - 3}$ passe par un maximum pour $x = -2$. Étudier les variations de y après avoir remplacé a par la valeur trouvée.

N. B. *On peut traiter par la méthode des dérivées les exercices proposés aux numéros* **490** *à* **500**.

686. (346) Aux quatre coins d'une feuille rectangulaire de carton, on enlève des carrés égaux. Étudier les variations du volume de la boîte obtenue en relevant les quatre rectangles du pourtour.

687. (347) Étudier les variations du volume d'un cône de révolution dont la surface latérale est πa^2.

688. (348) Étudier les variations du volume engendré par un triangle rectangle à hypoténuse constante, quand il tourne autour d'un côté de l'angle droit.

689. (349) Étudier les variations du volume engendré par un rectangle à périmètre constant, quand il tourne autour d'un de ses côtés.

690. (353) Étudier les variations du volume d'un cône droit inscrit dans une sphère.

691. (354) Étudier les variations de l'aire d'un trapèze isocèle circonscrit à un cercle ($2x$ = base).

692. (355) Étudier les variations de l'aire d'un triangle isocèle circonscrit à un rectangle dont les dimensions sont a et b.

693. (356) Étudier les variations de l'aire d'un losange circonscrit à un rectangle dont les dimensions sont $2a$ et $2b$.

694. (357) Étudier les variations du périmètre d'un triangle isocèle circonscrit à un cercle.

695. (359) Étudier les variations de la surface totale d'un cylindre dont le volume est πa^3.

696. (360) Le volume d'un segment sphérique à une base est $\frac{\pi}{6}a^3$. Étudier les variations de sa surface convexe (x = hauteur du segment).

697. (365) Étudier les variations de la surface latérale et de la surface totale d'un cône droit circonscrit à une sphère.

N. B. *On peut traiter par la méthode des principes les exercices proposés aux numéros* **490** à **500, 691** à **693.**

698. (383) Décomposer le nombre positif $2a$ en deux parties positives telles que la somme des quotients obtenus en divisant chaque partie par l'autre, soit minimum absolu.

699. (384) Par un point pris sur la base d'un triangle, on mène des parallèles aux deux autres côtés. Trouver le maximum absolu de l'aire du parallélogramme ainsi obtenu.

700. (385) De tous les triangles de même périmètre et de même base, quel est celui qui a la plus grande aire?

701. (386) Trouver le maximum absolu de l'aire du triangle obtenu en joignant le centre d'un cercle aux extrémités d'une corde.

702. (388) Parmi les triangles rectangles de même aire, quel est celui qui a la plus petite hypoténuse?

TABLE DES MATIÈRES

Imprimé par les Établissements Casterman Tournai (Belgique). (D. 48)
Printed in Belgium.