COLLECTION N.-J. SCHONS

CALCUL NUMÉRIQUE

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES ERREURS

avec divers suppléments d'algèbre et d'analyse
à l'usage de toutes les sections scientifiques des humanités

par R. GRAAS
licencié-agrégé en sciences mathématiques
licencié en sciences actuarielles

NAMUR * LA PROCURE * BRUXELLES

CALCUL NUMÉRIQUE

* **Traité d'Algèbre** A; B (3).

* **Compléments d'Arithmétique et d'Algèbre** B (2, 1).

* **Éléments d'Algèbre** A; C.

* **Éléments de Calcul intégral** B (2, 1); C (2, 1).

Exercices d'Algèbre. — Corrigé des problèmes proposés dans les ouvrages précédents.

Calcul numérique — Théorie élémentaire des erreurs avec divers suppléments d'algèbre et d'analyse B (2, 1); C (3, 2, 1).

* **Les Premiers Éléments d'Algèbre** A.

Les Premiers Éléments d'Algèbre. — Corrigé des exercices du précédent.

---

* **Éléments d'Arithmétique** A.

Exercices et Problèmes d'Arithmétique. — Corrigé des exercices et problèmes des Éléments d'Arithmétique.

* **Traité d'Arithmétique** B; C.

Exercices d'Arithmologie. — Corrigé des exercices proposés dans le Traité d'Arithmétique.

---

* **Traité de Trigonométrie rectiligne** B.

* **Éléments de Trigonométrie** C.

Exercices de Trigonométrie. — Corrigé des exercices proposés dans les deux ouvrages précédents.

---

* **Tables de Logarithmes et autres tables** B; C.

Logarithmes des nombres entiers de 1 à 10 000. — Logarithmes (division sexag. et division centés.) et valeurs naturelles des nombres trigonométriques. — Tables financières et Tables arithmétiques. — Fonctions exponentielles et hyperboliques.

Tables. — Intérêts composés et annuités. — Nombres premiers. — Racines carrées et cubiques.

Signification des sigles.

A signifie que l'ouvrage est adapté aux classes de 6e, 5e et 4e des humanités, aux 1e, 2e et 3e moyennes ainsi qu'aux classes assimilées à ce niveau dans l'enseignement technique.

B signifie que l'ouvrage est adapté aux cycles supérieurs des humanités (y compris les écoles normales) et de l'enseignement technique, dénommés « utilisateurs forts » des mathématiques.

C signifie que l'ouvrage est adapté aux cycles supérieurs des humanités (y compris les écoles normales) et de l'enseignement technique, dénommés « utilisateurs faibles » des mathématiques.

Le(s) chiffre(s) accompagnant un sigle indiquent la (les) classe(s) intéressée(s).

Dans l'enseignement moyen, « utilisateurs forts » désigne les sections scientifiques A et latin-mathématiques; « utilisateurs faibles » désigne, à des degrés divers, les autres sections.

Les ouvrages marqués d'un astérisque sont inscrits par le Gouvernement au catalogue des ouvrages classiques dont l'emploi est autorisé dans les établissements officiels d'enseignement moyen.

COLLECTION N.-J. SCHONS

CALCUL NUMÉRIQUE
THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES ERREURS

avec divers suppléments d'algèbre et d'analyse à l'usage de toutes les sections scientifiques des humanités

par R. GRAAS

licencié-agrégé en sciences mathématiques
licencié en sciences actuarielles

1960

LA PROCURE * BOULEV. ERNEST MÉLOT, 14 * NAMUR
LA PROCURE * RUE DES TANNEURS, 161 * BRUXELLES
ÉTABLISSEMENTS CASTERMAN, S. A. * TOURNAI

BIBLIOGRAPHIE

BENOIT A. *Mécanique (Classe de mathématiques)*. Paris.
BOREL E. et DELTHEIL R. *Probabilités - Erreurs*. Paris.
BRUHAT G. *Mécanique*. Paris.
DAUBRESSE E. *Topographie des grands levés et plans généraux*. Bruxelles-Paris.
DE LA VALLÉE-POUSSIN E. *Cours d'analyse infinitésimale*. Louvain.
DESBATS J. *Mécanique (Classe de mathématiques élémentaires)*. Paris.
LEIB D. *Exercices méthodiques de calcul différentiel et intégral*. Paris.
FALLA et DEBOT. *Travaux pratiques de physique générale*. Liège.
F. J. *Éléments d'arithmétique*. Paris.
ROBERT Fr. et BERTRAND G. *Cours de géométrie analytique*. Montréal.
GABRIEL E. *Mécanique théorique et pratique*. Paris.
GOLIFMAN R. *Traité d'algèbre*. Liège.
HERBIET V. *Compléments d'algèbre*. Namur.
JONGMANS F. *Exercices d'analyse mathématique*. Liège.
LENTIN A. et RIVAUD J. *Éléments d'algèbre moderne*. Paris.
LORENT. *Algèbre 2B*. Bruxelles.
PHILIPPENS. *Arithmétique*. Anvers.
SCHONS N.-J. *Compléments d'arithmétique et d'algèbre (2e édition 1932)*.
VERRIEST G. *Cours de mathématiques générales*. Louvain, Paris.
VESSIOT E. et MONTEL P. *Cours de mathématiques générales*. Paris.
VREDENDUIN P. G. J. et VANHASELEN A. *Algebra IV H* Groningen.

REVUES

Journal de mathématiques élémentaires. Paris.
Mathematica & Paedagogia. La Louvière.
Revue de mathématiques spéciales. Paris.

LA PROCURE - NAMUR - 1960

AVERTISSEMENT

Dans ce fascicule se trouvent, à la fois, certains suppléments de théorie et des exercices sur des chapitres divers aussi bien d'algèbre et d'analyse que de trigonométrie. Les variations des programmes tout d'abord puis les vœux de nombreux professeurs tant de l'enseignement supérieur (1) que de l'enseignement moyen ont conduit à ces adaptations provisoires des ouvrages de N.-J. Schons comme on en trouve déjà en annexes dans le « Traité de Trigonométrie rectiligne » (3e édition 1959).

En ce qui concerne la section I du présent supplément, il a semblé préférable de placer en tête les calculs logarithmiques avec lesquels de toutes manières les élèves sont déjà initiés : leur classement en permettra un usage mieux gradué. Il est superflu de redire ici toute l'importance du calcul numérique pour justifier le nombre des exercices proposés. Quelques questions en prolongement immédiat des programmes et des applications pratiques relèveront peut-être l'intérêt en renouvelant les sujets.

Pour la section II, elle est formée avant tout d'exercices. Quelques aperçus théoriques sont introduits pour faciliter l'étude des programmes.

Enfin la section III veut tenter un essai dans la ligne des « applications géométriques et physiques » du calcul des dérivées et de la trigonométrie que souhaitent les programmes.

Dans tout l'ensemble, le but poursuivi a été de donner un instrument plus adéquat aux étudiants qui se préparent à des études supérieures scientifiques, qu'ils soient utilisateurs forts ou faibles selon le vocable maintenu reçu. Le fait qu'un grand nombre de problèmes repris ici a été posé à des jurys d'admission est un argument en faveur de l'orientation ainsi prise.

On pourra malgré tout regretter certaines lacunes. L'usage d'échelles logarithmiques ne requiert pas d'initiation spéciale en ce qui a trait aux graphiques. Pour la règle à calcul, les notices ne manquent pas comme aussi pour les petites machines à calculer qui pourront se révéler très utiles dans le contrôle de certains exercices ou faciliter nombre d'opérations.

D'autre part, une collection d'initiation aux mathématiques modernes à l'usage de l'enseignement moyen, actuellement en cours de publication permet d'aborder des questions qui pénètrent dans les nouveaux programmes (2).

Nous remercions très vivement nos distingués collaborateurs : Messieurs les Professeurs Poncelet, Campé et Colmant et les dessinateurs Hocquet et Léonard. La firme Casterman a droit à une particulière gratitude pour le soin extrême de la présente réalisation.

Namur, le 9 juin 1960. *R. G.*

(1) Voir par exemple : « *Mathematica & Paedagogia* » 1959 n° 17, pages 71-75.

(2) *Notes d'Algèbre moderne* du même auteur chez le même éditeur. Avec une préface du professeur R. Ballieu de l'Université de Louvain.

INDICATIONS PRATIQUES

1. La numérotation des exercices est faite à partir du nº **601**, (sauf pour les points 2 et 3 ci-après) afin de faciliter l'adaptation prochaine des *Exercices d'Algèbre.*

2. Le chapitre XIII de la 2ᵉ section a reçu une numérotation qui le met en continuité avec celle des *Éléments de Calcul intégral.*

3. La section *Mécanique* a reçu une numérotation indépendante.

4. La lettre *e* désigne la base des logarithmes absolus; les symboles *log* et *Log* désignent respectivement les logarithmes *décimaux* et *absolus*; les logarithmes en base *a* sont représentés par log_a. Les fonctions hyperboliques *sh x*, *ch x*, *th x* utilisées ici de temps à autre sont exposées dans ST annexe V.

5. Les sigles ST et SC renvoient aux deux ouvrages de la collection N.-J. Schons :
Traité de Trigonométrie rectiligne (3ᵉ édition, 1959) et *Compléments d'Arithmétique et d'Algèbre* (3ᵉ édition, 1949).

6. Le présent volume prolonge les *Compléments* ci-dessus nommés ainsi que les *Éléments d'Algèbre* (6ᵉ édition, 1958). Cependant on trouvera la liste complète des questions d'algèbre aux examens d'admission à l'École Militaire à la fin du *Traité d'Algèbre* (9ᵉ édition, 1960).

Section I

CALCUL NUMÉRIQUE

CHAPITRE I

Calculs logarithmiques

1re série : expressions logarithmiques ne nécessitant que les tables de logarithmes.

601. *Calculer* $x = \sqrt[7]{\left(\frac{64,359 \times 0,32}{0,97\,194 \times 68}\right)^{10}}$. (E.M.-T.A.)

602. *Calculer* $x = \sqrt[19]{\frac{378,59 \times (3,1)^3}{1,31 \times 17^2 \times 29,791}}$. (E.M.-T.A.)

603. *Sachant que* $A = 11^\circ\,45'\,30''$ *et* $\sin x = \frac{2\sqrt{5}\,\mathrm{tg}\,A}{1,789\,125}$, *calculer la plus petite valeur de* x *positive satisfaisant à ces conditions.* (G.E.I.)

604. *Chercher toutes les solutions de*

$$\sin x = \frac{\cos 325^\circ\,17'\ \mathrm{tg}\ 162^\circ\,35'}{\sin 156^\circ\,29'}. \qquad \text{(G.E.I.)}$$

605. *Même question pour*

$$\mathrm{tg}\,x = \frac{\sqrt{427,35}\ \sin^2 210^\circ\,31'\,35''}{(5,27)^3 \cos 67^\circ\,34'\,42''}. \qquad \text{(G.E.I.)}$$

606. *On demande de calculer en grades la valeur de l'arc* x *compris entre* 0 gr *et* 200 gr *défini par la relation*

$$\mathrm{tg}\,x = \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{16}\sin\frac{\pi}{32}. \qquad \text{(E.M.-Poly)}$$

607. *Trouver* x *donné par la relation*

$$10^{\frac{ax^c}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{b-a}}$$

avec $a = -14\,527$; $b = -89\,574$; $c = 6,6081$. (E.M.-T.A.)

608. *On donne* $A = 123{,}4$, $\alpha = 88^\circ\,17'\,23''$ *et* $\beta = 41^\circ\,29'\,36''$.

On demande de calculer la plus petite valeur de x *comprise entre* 0° *et* 180° *définie par :*

$$A \operatorname{tg} 3x = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{\cos\beta/2}{\sin 2\alpha}}.$$ (E.M.-Poly)

609. *Résoudre* $$\frac{50\cos^3 x}{\sqrt[5]{0{,}002 \operatorname{tg} 120^\circ\,30'\,40''}} = 1.$$

610. *Trouver* x *si*

$$\sqrt[x]{3{,}981} = 2{,}5119 \operatorname{tg} 237^\circ\,15'.$$ (Lv)

611. *Trouver le plus petit angle* x *positif qui satisfasse à la relation*

$$\operatorname{tg} x = -(1{,}435)^{-\frac{3}{5}}\sqrt{\sin(p+q)\cos(p-q)}$$

où $p = 172^\circ\,13'\,14''$ *et* $q = 51^\circ\,19'\,43''$.

612. *Calculer le plus petit arc* x *positif vérifiant*

$$\operatorname{tg} x = \sqrt[3]{(8{,}68)^2}\cos 134^\circ\,44'\,45''.$$ (Gd)

613. *On donne* $\sin B = \frac{b}{a}\cos A$ *avec* $A = 97^\circ\,39'\,45''$, $b = \sqrt[5]{0{,}3}$ *et* $a = 10$. *On demande le plus petit angle* B *positif satisfaisant à cette relation.* (Lv)

614. *Calculer le plus petit angle positif* x *tel que*

$$\operatorname{tg}^2 x = \cos^3 A \log \operatorname{tg} B$$

si $A = 10^\circ\,27'\,36''$ *et* $B = 81^\circ\,17'\,27''$.

615. *Résoudre*

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{(\log\log\operatorname{tg} 82{,}286\text{ gr})\cos 135{,}344\text{ gr}\sin 43{,}725\text{ gr}}.$$

616. *On donne* $a = 1{,}2405$ *et* $\alpha = 146^\circ\,58'\,27''$.

On demande la plus petite valeur positive de l'arc x *(en degrés, minutes et secondes) satisfaisant à la relation*

$$\log\sin^2 x = (\log a^3)^2 \operatorname{tg}\alpha.$$ (E.M.-T.A.)

617. *Calculer* $y = \sqrt[6]{1332 \operatorname{tg}\frac{5x}{2}}$ *si* $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{2{,}03 \operatorname{tg} 42^\circ\,21'\,25''}$ $(0^\circ < x < 90^\circ)$.

618. *On donne*

$A = 73^\circ\,26'\,20''$ $B = 240^\circ\,36'\,15''$
$C = 123^\circ\,22'\,30''$ $a = 40\,367{,}3$

On demande de calculer la valeur de x *satisfaisant à la relation*

$$\frac{a \operatorname{tg} C}{\log x} = \frac{10^5\sqrt{\cos A}}{\sin B}.$$ (E.M.-T.A.)

619. *Résoudre*

$$m \sin^3 x = \operatorname{tg} A (\cos B)^{\log n}$$

$m = 7{,}2247 \qquad n = 0{,}073$

$A = 233^\circ\, 01'\, 05'' \qquad B = 24^\circ\, 00'\, 12''.$ (Lv)

620. *On demande les valeurs de* x *et de* y *en grades avec trois décimales satisfaisant à la relation*

$$10^{\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}}} = \sqrt[5]{\cos^{22} A}$$

sachant que x, y *et* A *sont les trois angles d'un triangle et que* A = 164,927 gr. (E.M.-T.A.)

621. *Trouver les arcs positifs inférieurs à* 360° *satisfaisant à l'équation*

$$(\cos A)^{\operatorname{tg} x} \operatorname{cotg} B = \sqrt[5]{\log \sin B}$$

$A = 52^\circ\, 39'\, 46'' \qquad B = 115^\circ\, 12'\, 20''.$ (B)

622. *On donne*

1) *la relation* $\operatorname{tg} A \cos C = \operatorname{tg} \alpha \quad (0^\circ < \alpha < 180^\circ)$;

2) *les valeurs des angles suivants :*
$A = 51^\circ\, 43'\, 25''$; $B = 75^\circ\, 21'\, 17''$ *et* $C = 62^\circ\, 14'\, 18''$.

On demande de calculer en degrés, minutes et secondes la plus petite valeur positive de E *qui satisfait à la relation :*

$$\cos[2E - (A + B)] = \frac{\cos A \cos (B + \alpha)}{\cos \alpha}.$$ (E.M.-Poly)

623. *Calculer* A *si*

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} \alpha \sec M \operatorname{cosec} (\varphi + M).$$

On a : $\operatorname{tg} M = \operatorname{cotg} \delta \cos \alpha$ *avec* $\alpha = 112^\circ\, 15'\, 30''$,

$\delta = 28^\circ\, 39'\, 15''$ *et* $\varphi = 42^\circ\, 32'\, 15''$ $\quad 0^\circ < M < 180^\circ$. (Gd)

624. *On donne* $A = 5, \quad a = \sqrt{2}, \quad b = \sqrt{3}, \quad \alpha = \frac{\pi}{10}.$

On demande de calculer la valeur de l'arc x *compris entre* 0 gr *et* 200 gr *défini par la relation*

$$A^{\operatorname{tg} x} = \frac{b^4 \cos \alpha}{\sqrt[3]{\cos \varphi}}$$

dans laquelle, à son tour, φ *est défini par la relation*

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \alpha \quad (0 \text{ gr} < \varphi < 100 \text{ gr}).$$ (E.M.-Poly)

625. *Calculer* x *si*

$e^{\operatorname{tg} x} = \sqrt{a^3 \sec \alpha}$ *où* $a = 2{,}456$ *et* $\alpha = 22^\circ\, 37'\, 18''$. (Lv)

626. *On donne* $a = 3876$; $b = 2415$ *et* $\alpha = 44^\circ\,25'\,36''$.
De plus

$$10^{4\,\mathrm{tg}\varphi} = \frac{b^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{a^2 \sqrt{\cos 2\alpha}}$$

On demande la valeur de x *définie par la relation*

$$x = \frac{a^3 \sin(\alpha + \varphi)}{10^7\, e \sin \varphi}.$$ (E.M.-Poly)

627. *On demande en grades (4 décimales) la plus petite valeur positive de* x, *solution de*

$$4\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) 10^{\log \cos x} = 6\, A \sin \alpha$$

si $A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *et* $\alpha = \mathrm{Arc\,tg}\,\frac{1}{10^{0,63\,491}}$ $(0\text{ gr} < \alpha < 100\text{ gr})$.

(E.M.-Poly)

628. *Résoudre*

$$C\,(10^e)^{\mathrm{tg}\,x} = \pi AB$$

$A = \mathrm{tg}\,\frac{2\pi}{9}$; $B = \mathrm{cotg}\,\frac{\pi}{4}$ *et* $C = \cos(\mathrm{Arc\,tg}\,A) \sin(\mathrm{Arc\,tg}\,B)$.

(E.M.-Poly)

2e série : expressions non logarithmiques à calculer par logarithmes (sans les rendre logarithmiques) en s'aidant éventuellement des tables de valeurs naturelles.

629. *Calculer* $x = \sqrt[7]{\frac{\sqrt[5]{2,62\,958} - 0,5133}{4 \times (5,246)^3}}$. (G.E.I.)

630. *Résoudre*

$$\mathrm{tg}\,x = a + 2b^3 \sqrt{\sin c}$$

avec $a = -2,512$; $b = 0,64\,197$ *et* $c = 103^\circ\,15'\,22''$. (Lv)

631. *Calculer le plus petit angle positif* x *tel que*

$$2,74 + \mathrm{tg}\,(225^\circ - x) = \frac{1 + \mathrm{tg}\,a}{\sqrt[3]{\sec \frac{2}{5} b}}$$

où $a = 606^\circ\,22'\,21''$ *et* $b = 72^\circ\,24'\,35''$. (Lv)

632. *On donne* $(\text{tg } x)^{\text{tg} B} = (\sqrt{2} + \cos A)^3$ *avec* $A = 96^\circ\, 20'\, 35''$ *et* $B = 87^\circ\, 09'\, 10''$. *On demande* x. (Lv)

633. *Calculer en degrés, minutes et secondes l'angle aigu* x *donné par la formule*

$$\text{tg } x = \frac{\sin \frac{y}{4} \, \text{cotg}^4 \frac{z}{5}}{\cos^3 \frac{y - z}{3}}.$$

Les valeurs de y *et de* z *sont définies par*

$$\cos^2 y = \sqrt[3]{2} - 1 \quad \textit{où } 180^\circ < y < 270^\circ$$

$$\textit{et} \quad \sin z = \frac{\sqrt[4]{2{,}35}}{\sqrt[5]{100}} \quad \textit{où } 90^\circ < z < 180^\circ.$$ (E.M.-Poly)

634. *On demande* x *solution de*

$$\text{tg } x = \sqrt[5]{4{,}2735}\, 5^{\sin a}\, (1 + \text{cotg } E)$$

où E *est donné par* $\text{cotg } E = \dfrac{\text{cotg} \frac{a}{2} \, \text{cotg} \frac{b}{2} + \cos C}{\sin C}$

et $a = 112^\circ\, 17'\, 14''$; $b = 89^\circ\, 27'\, 52''$; $C = 128^\circ\, 32'\, 46''$. (Lv)

635. *On donne*

$$\frac{\text{tg } A}{p} = \frac{\text{tg } B}{q} = \frac{\text{tg } C}{r} \qquad \textit{avec} \quad A + B + C = 180^\circ.$$

Les quantités algébriques p, q *et* r *peuvent être quelconques.*

On demande :

1) *Déduire de là :*

$$\frac{\sin 2A}{q + r} = \frac{\sin 2B}{p + r} = \frac{\sin 2C}{p + q}.$$

2) *Calculer* A, B *et* C *en fonction de* p, q, r *dans les conditions susdites (étudier la possibilité du problème).*

3) *Résoudre avec les données numériques suivantes :*

a) $p = 1;\quad q = 2;\quad r = 3;$

b) $p = 1;\quad q = \frac{1}{2};\quad r = \frac{3}{5}.$ (Lg)

636. *On demande la plus petite valeur de* z *supérieure à* 180° *telle que*

$$\sin z = \sqrt[3]{\frac{(0{,}1 + \cos^2 x)\, \text{tg } y}{100}}$$

avec $x = 91^\circ\, 03'\, 12''$ *et* $y = 340^\circ\, 15'\, 22''$. (Lv)

637. *On donne*

$$6^{\operatorname{cotg} x} - 0{,}71 = \frac{3461}{10^5 (\sin a - \sin b)(\cos c)^{\log \sqrt{d}}}$$

avec $a = 71^\circ 48' 35''$; $b = 11^\circ 32' 13''$; $c = 343^\circ 02' 04''$

et $d = 0{,}00\,081$.

On demande la valeur de x *la plus proche de zéro satisfaisant à cette relation.* (Lv)

638. *Trouver un arc* x *compris entre* 0 *et* 2π *radians tel que*

$$b = (200 \cos x + a)^2.$$

On donne :

1) $b = \dfrac{m+n}{m-n}$ *avec* $\log m = p$ *et* $\log n = q$.

$$0 < p < \frac{\pi}{2} \qquad 0 < q < \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{Arc\,cotg} p - \operatorname{Arc\,tg} q = 0{,}241\,13$$

$$\operatorname{Arc\,cotg} p + \operatorname{Arc\,tg} q = 1{,}363\,048.$$

2) a *est racine de*

$$\operatorname{Arc\,tg} 2a - \operatorname{Arc\,tg} a = \frac{1}{4}.$$

On prendra $0 < \operatorname{Arc\,tg} a < \dfrac{\pi}{4}$. (B)

3^e série : expressions à rendre logarithmiques par une formule.

639. *Calculer les angles* x *compris entre* 0° *et* 720° *tels que*

$$\operatorname{tg} x = \sqrt[3]{1 - \cos 26^\circ 08' 40''}.$$ (G.E.I.)

640. *Rechercher les valeurs des angles* x *compris entre* 0° *et* 360° *telles que l'on ait*

$$\operatorname{cotg} x = \sin a + \sin (a + r) + \sin (a + 2r)$$

avec $a = 18^\circ 25' 37''$ *et* $r = 7^\circ 17' 26''$. (G.E.I.)

641. *Résoudre* $\operatorname{tg} x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$. (Lg)

642. *On demande en degrés, minutes et secondes la plus petite valeur positive de* x *répondant à*

$$\frac{\sqrt{1 - \cos 4x}}{\cos x} = 10^{\sin a} \operatorname{cotg} b$$

où $a = 172^\circ 14' 32''$ *et* $b = 253^\circ 48' 14''$. (E.M.-T.A.)

643. *On donne* $a = 27^\circ\,43'\,17''$ *et* $b = 39^\circ\,18'\,36''$.

On demande l'expression générale des valeurs de x *qui satisfont à la relation*

$$\operatorname{tg} 3x = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{tg}^2 a}{1 - \operatorname{tg}^2 b}}. \qquad \text{(E.M.-Poly)}$$

644. *Donner les arcs* x *compris entre* 0° *et* 360° *et vérifiant la condition*

$$\sin \frac{5x}{4} = \frac{k\sqrt{\sin^2 a \sin^2 b - \cos^2 a \cos^2 b}}{\operatorname{cotg}^3 c}$$

On donne $k = 0{,}38\,572$; $a = 115^\circ\,36'\,09''$;
$b = 49^\circ\,16'\,14''$; $c = 307^\circ\,42'\,18''$. (B)

645. *Calculer la plus petite valeur positive de* x *satisfaisant à la relation*

$$10^{\sin x} = -\sqrt[3]{\frac{1}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} 2a} + \frac{1}{\operatorname{tg} a + \operatorname{cotg} a}}$$

avec $a = 74^\circ\,35'\,23''$. (Lv)

4e série : expressions classiques à rendre logarithmiques.

646. *Résoudre*

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}\sqrt{m^2 \sin^2 \alpha + n^2 \cos^2 \alpha}$$

où $m = 24{,}515$; $n = 13{,}51$; $\alpha = 103^\circ\,17'\,25''$. (Lv)

647. *Résoudre en degrés l'équation*

$$\operatorname{cotg} 2x = -\sqrt{\frac{a - b}{a + b}}$$

sachant que a *et* b *sont donnés par les relations*

$$a = \frac{\operatorname{tg}^3 p}{\cos^2 q}; \quad b = \sqrt{\sin p + \sin q}$$

avec $p = 47^\circ\,21'\,15''$ *et* $q = 29^\circ\,12'\,09''$. (B)

648. *Résoudre en degrés l'équation*

$$[\sin(x + a) + \cos(b - x)]^3 = \sin c$$

avec $a = 44^\circ\,20'\,12''$; $b = 16^\circ$; $c = 83^\circ\,10'$. (Lg)

649. *Résoudre en degrés l'équation* $a \cos x + b \sin x = c$ *dans le cas :* $a = 48\,578$; $b = 62\,601$; $c = 54\,375$. *On prendra* $0^\circ < x < 360^\circ$.

650. *On demande les valeurs de* x *telles que* $(-180^\circ < x < 180^\circ)$

$$435 \sin x - 351 \cos x = 498.$$

651. *On donne l'équation* $ax^2 + 2bx + c = 0$ *avec* $a = -100\sqrt{2}$ $b = \sqrt[3]{500}$ *et* $c = \pi$. *Calculer la plus grande racine.* (Lv)

652. *Calculer les racines de*

a) $x^2 \operatorname{tg} 44^\circ 50' 08'' + x \cos 1^\circ 00' 50'' + \sin 209^\circ 41' = 0$; (Lg)

b) $x^2 \cos 27{,}7561 \text{ gr} + x \operatorname{tg} 15{,}2403 \text{ gr} - \sin 58{,}1544 \text{ gr} = 0$. (E.M.)

653. *Trouver* z *si*

$$z = \operatorname{Arc\,tg} \sqrt[3]{\frac{1 + \cos^2 x}{a \operatorname{cosec} y}}$$

$x = 30^\circ 21' 37''$; $y = 124^\circ 18' 42''$; $a = 2{,}514$. (Lv)

654. *Trouver les arcs compris entre* 0° *et* 360° *satisfaisant à la relation*

$$a^{\sec x} = (\sqrt{b + c} + \sqrt{b - c}) \sqrt[5]{\log d}$$

sachant que :

1) a *positif est tel que* $\operatorname{tg}(\operatorname{Arc\,sin} a) = 3{,}21\,711$;

2) b *et* c *sont solutions de*

$\operatorname{Log} b = 3{,}21\,751$; $\operatorname{Log} c = 1{,}11\,571$;

3) d *positif est défini par la relation* $d^2 = b^2 + c^2$. (B)

655. *Déterminer les valeurs de* x *comprises entre* 0° *et* 360° *telles que*

$$a^{\sin x} = \sqrt{\frac{b - c}{b + c}}$$

où 1) a *est positif et tel que*

$$\operatorname{Arc\,tg} a + \operatorname{Arc\,tg}(a + \alpha) = 45^\circ$$

avec $\alpha = 0{,}21\,712$;

2) $b = 3{,}79\,815$;

3) $c = 1{,}02\,797$. (B)

5e série : applications.

656. *Dans le triangle plan* ABC, *on donne*

$a = 213$ cm; $b = 459$ cm *et* $C = 74^\circ 16'$.

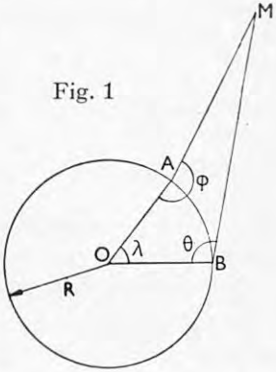
Calculer le volume du corps engendré par la rotation du triangle autour du côté AB *pris comme axe.* (G.E.I.)

657. *On donne dans la figure ci-contre (distance d'un astre à la terre) :*

$$\lambda = 11^\circ 28' 42'';$$
$$\varphi = 189^\circ 50' 58'';$$
$$\theta = 157^\circ 09' 54''.$$

R = 6370 km. *Calculer* AM. (Lv)

Fig. 1



658. *Calculer l'arête du tétraèdre régulier qui a un volume égal à celui du tétraèdre dont les éléments sont*

$$l = 2{,}354 \text{ dm}; \quad m = 1{,}891 \text{ dm}; \quad n = 1{,}625 \text{ dm}$$
$$a = 35^\circ 24' 15''; \quad b = 42^\circ 37' 50''; \quad c = 51^\circ 13' 13''.$$ (B)

659. *Un mobile veut se rendre d'un point* A_1 *à un point* A_2 *de la surface terrestre, supposée sphérique, en suivant l'arc de grand cercle passant par ces points.*

Les coordonnées géographiques de A_1 *et* A_2 *sont*

$$A_1 \begin{cases} L_1 = 75^\circ 04' 15'' \text{ W} \\ l_1 = 35^\circ 12' 49'' \text{ S} \end{cases} \qquad A_2 \begin{cases} L_2 = 174^\circ 46' 53'' \text{ E} \\ l_2 = 45^\circ 52' 37'' \text{ S} \end{cases}$$

Calculer :

1) *la distance* $x = A_1 A_2$ *en kilomètres;*

2) *l'angle de route du mobile au départ, c'est-à-dire l'angle du méridien sens Nord avec la direction du mobile;*

3) *l'angle de l'équateur avec l'arc de grand cercle* $A_1 A_2$*;*

4) *la longitude* L_3 *du point de rencontre* A_3 *de l'arc de grand cercle* $A_1 A_2$ *avec l'équateur* (arc $A_3 A_1 < \frac{\pi}{2}$).

Rayon terrestre : $\dfrac{20\,000}{\pi}$ km. (B)

660. 1) *Calculer* $n = \sin\dfrac{a+c}{2}\cos\dfrac{b+c}{2}$ *sachant que*

$$a = 122^\circ 29' 30'' \qquad b = 248^\circ 50' 42''$$

et $$\operatorname{tg} c = \sin a \cos b \operatorname{tg}\frac{a+b}{2} \qquad 0^\circ < c < 180^\circ.$$

2) *Déterminer l'argument et le module du nombre complexe*

$$z = \frac{n - i}{2 + i}.$$ (B)

661. 1) *Résoudre le système*

$$\begin{cases} u - v = 22^\circ 30' \\ \sqrt{2} \cos u = \cos v. \end{cases}$$

On désigne par $u = u_0$ *et* $v = v_0$ *la solution positive du système inférieure à* 90°.

2) *Calculer les coordonnées des deux points* A *et* B *de l'hyperbole*

$$xy = 3{,}5107$$

rapportée à ses asymptotes OX *et* OY *d'angle* $\theta = 73^\circ 15' 36''$ *et tels que l'angle* XOA $= u_0$ *et l'angle* XOB $= v_0$.

Les points A *et* B *sont dans la région du plan où* x *et* y *sont positifs.*

3) *Calculer l'aire du trapèze curviligne* A_1B_1BA, A_1 *et* B_1 *étant les pieds des ordonnées de* A *et de* B. (B)

CHAPITRE II

Erreurs expérimentales

1. Introduction.

Dans toute mesure physique s'introduisent des erreurs.

Il est obvie que l'expérimentateur doit éviter celles qui sont ou *grossières* (venant de sa négligence p. e.) ou *systématiques* (venant d'instruments faussés p. e.).

Celles-là éliminées, il subsiste des erreurs dites *accidentelles* qui se caractérisent par :

a) *leur grande fréquence;*

b) *leur petitesse;*

c) *leur répartition en nombre :* sensiblement moitié par défaut, moitié par excès.

A défaut de la valeur *exacte*, impossible à déterminer, on doit s'efforcer d'obtenir une valeur aussi correcte que possible. Pour ce faire, on adopte la *moyenne arithmétique* des mesures.

$$\boxed{m_a = \frac{\sum_{k=1}^{n} V_k}{n}}$$

V_k désignant les valeurs données par les n observations.

2. Erreurs.

1) Chaque valeur V_k est entachée d'une *erreur approchée*

$$\boxed{e_k = V_k - m_a}$$

2) Si on classe ces écarts pris *en valeur absolue*, on désigne la valeur médiane parmi eux comme étant l'*erreur probable* e_p.

3) On considère aussi une *erreur moyenne arithmétique* (le dénominateur contient un terme de correction justifié en théorie supérieure des erreurs)

$$\boxed{e_{ma} = \frac{\sum_{k=1}^{n} |e_k|}{n - \frac{1}{2}}}$$

4) On introduit aussi une *erreur moyenne quadratique* (voir méthode des moindres carrés p. 33) :

a) pour *une* opération répétée *n* fois, *chaque* mesure a l'erreur moyenne quadratique

$$\boxed{e_{mq} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} e_k^2}{n-1}}}$$

e_{mq} désigne toujours plus loin cette erreur-ci lorsque rien d'autre n'est indiqué.

b) pour une opération complexe, comportant plusieurs opérations partielles ayant chacune leur e_{mq}, on a une erreur moyenne quadratique totale donnée par

$$\boxed{E = \sqrt{\Sigma e^2_{mq}}}$$

c) Dans *le cas particulier* de la *moyenne arithmétique de* n *observations* ayant même précision, on aura pour la somme des observations :

$$E = \sqrt{ne^2_{mq}} = e_{mq}\sqrt{n}$$

et *pour la moyenne arithmétique adoptée comme valeur la plus approchée* (en divisant par *n*)

$$\boxed{(e_{mq})_{ma} = \frac{e_{mq}}{\sqrt{n}}}$$

5) *Pratiquement* on constate la relation suivante (à peu près) :

$$e_p = \frac{5}{6} e_{ma} = \frac{2}{3} e_{mq}.$$

3. Répartition des erreurs.

Même accidentelles, les erreurs ne sont d'évidence ni toutes égales ni toutes également fréquentes. Habituellement, elles se répartissent selon une loi dite *loi normale de Gauss* représentée par la fonction et la courbe suivantes :

$$\boxed{y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}}$$

y est la probabilité d'arrivée de l'erreur x; h est l'indice de précision

$$h = \frac{1}{(e_{mq})_{ma}\sqrt{2}}$$

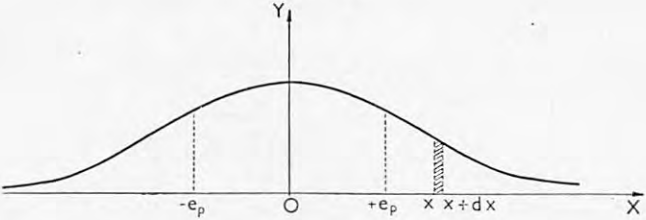


Fig. 2

La surface de la bande hachurée mesure la probabilité d'une erreur comprise entre x et $x + dx$; la surface totale vaut 1.

Les aires situées entre la courbe, l'axe des x, et d'une part, à gauche de $-e_p$, d'autre part à droite de $+e_p$ ont une valeur totale de 0,5 d'après la définition de e_p.

La loi de Gauss établit que sur 1000 erreurs en valeur absolue :

500	sont	inférieures à	e_p
823	»	»	$2\,e_p$
957	»	»	$3\,e_p$
993	»	»	$4\,e_p$
999	»	»	$5\,e_p$.

Comme e_p est incertain, on se base plutôt sur e_{mq} qui est beaucoup plus précis et on a alors que, sur 1000 erreurs, il y a *une* chance sur 900 de faire une erreur *supérieure* à $\boxed{2{,}5\,(e_{mq})_{ma}}$

Ainsi on adopte comme valeur de la mesure cherchée

$$\boxed{m_a \pm 2{,}5\,(e_{mq})_{ma}}$$

4. Exercices.

662. *Dans la mesure au palmer de la hauteur* h *et du diamètre* d *d'un cylindre, on a trouvé les résultats suivants en millimètres :*

h = 17,69; 17,68; 17,705; 17,70; 17,695; 17,69; 17,67; 17,71;

d = 19,85; 19,88; 19,86; 19,85; 19,85; 19,87; 19,85; 19,87.

On demande :

1) *les valeurs à admettre comme hauteur et diamètre;*

2) *l'erreur moyenne quadratique sur une mesure dans chaque cas;*

3) *l'erreur moyenne quadratique sur chacune des deux valeurs admises comme hauteur et diamètre;*

4) *les limites entre lesquelles on a la certitude pratique que hauteur et diamètre sont compris chacun.*

663. *Dans une mesure de rapidité d'une balance, on a trouvé successivement (en secondes) :* 16 s; 20 s; 18 s; 19 s; 20 s; 18 s.

On demande :

1) *la valeur à admettre;*

2) *l'e. m. q. d'une observation;*

3) *l'e. m. q. de la valeur admise;*

4) *les limites certaines entre lesquelles la valeur cherchée est comprise.*

664. *Les mesures d'un angle horizontal au théodolite ont donné les résultats suivants :*

$68^\circ 14' 50''$; $68^\circ 15' 10''$; $68^\circ 15' 00''$; $68^\circ 14' 40''$.

On demande :

1) *la valeur à admettre pour l'angle mesuré;*

2) *l'e. m. q. de la mesure dans une seule opération;*

3) *l'e. m. q. de la valeur à admettre comme mesure de l'angle;*

4) *les limites entre lesquelles on a la certitude pratique que l'angle est compris.* (G.E.I.)

665. *Mêmes questions avec les données :*

$42^\circ 12' 15''$; $42^\circ 12' 25''$; $42^\circ 12' 30''$;
$42^\circ 12' 20''$; $42^\circ 12' 22''$; $42^\circ 12' 26''$. (G.E.I.)

CHAPITRE III

Calculs approchés : Opérations abrégées

Soit qu'on travaille avec des nombres décimaux connus exactement (en principe du moins, comme pour $\sqrt{2} = 1{,}41\ldots$) et dont on ne peut pratiquement prendre qu'une partie des décimales, soit qu'on opère avec des mesures expérimentales dont p. e. les premières décimales seules sont exactes, quand on calcule, on commet des erreurs (non expérimentales) dont on doit s'efforcer de connaître la grandeur et qu'il faut essayer de limiter. Voici des procédés puis des formules fréquemment utiles voire nécessaires dans ces évaluations.

Pour les opérations abrégées, nous ne donnerons chaque fois qu'un exemple qui suffit à indiquer la méthode et à la justifier de manière intuitive. Le lecteur pourra démonter le mécanisme complet à titre d'exercice.

1. Addition.

a) Somme de moins de 10 *nombres.*

Soit à trouver à 0,01 près la somme

$$\begin{array}{r} 3{,}14\ 159 \\ 1{,}41\ 42 \\ 1{,}73\ 20 \\ 0{,}31\ 830 \end{array}$$

On prend à chaque nombre une décimale de plus qu'à l'approximation.

Ici on trouve 6,605. Le résultat à 0,01 près est donc 6,60 par défaut et 6,61 par excès.

b) Somme de plus de 10 *nombres.*

On prend *deux* (et non une seule) *décimales supplémentaires.*

. Soustraction.

On prend les deux termes avec autant de décimales qu'à l'approximation.

Soit à calculer 3,14 159 — 2,718 2818 à 0,001 près. Il vient :

$$\begin{array}{r} 3{,}141 \\ -\ 2{,}718 \\ \hline 0{,}423 \end{array}$$

3. Produit (règle d'Oughtred).

Soit à trouver à 0,01 près le produit 47,458 927 89 (M) par
3,789 129 34 (m).

a) On écrit m :

— de droite à gauche
sous M

— avec le chiffre des unités simples en dessous du chiffre de M donnant les unités 100 fois plus petites que celles correspondant à l'approximation.

b) On supprime tous les chiffres de M et m qui dépassent à droite et à gauche.

c) On multiplie M par chaque chiffre de m :

— en commençant dans M immédiatement au-dessus du chiffre multiplicateur

— en écrivant les produits partiels alignés verticalement sur la droite.

d) On additionne; dans le total, on abandonne les deux chiffres à droite, on arrondit la dernière décimale et on place la virgule.

```
  47,458 927 89
439 21 987,3
-------------
 1 42 376 7
   33 220 6
    3 796 0
      426 6
        4 7
          8
-------------
  179,825 4
```

Résultat : 179,83.

4. Autres règles.

On ne les mentionnera pas ici malgré leur relative simplicité; elles sont d'usage moins pratique.

5. Exercices.

666. *Calculer à* 0,01 *près* : 5,432 71 + 2,718 28 + 1,732.

667. *Calculer à* 0,001 *près* : $\sqrt{7} + \sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

668. *Calculer à* 0,001 *près* : 2,236 067 — 1,414 213 *et* $\sqrt{10} - \sqrt{5}$.

669. *Calculer avec quatre décimales exactes l'expression :*

$$(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}):(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}).$$

670. *Calculer*

à 0,01 *près* 667 546,487 542 × 4,932 475 8.
à 0,0001 *près* 3,141 5926 × 5,789 438 9.
à 0,001 *près* 347,589 438 × 1,732 050 8.
à 0,000 01 *près* 4,162 277 66 × 0,318 309 8.
à 0,1 *près* 2113,4589 × 152 375 894.
à 0,001 *près* 825,625 × 0,728 287. (Lv)

671. *La somme des racines d'une équation du deuxième degré vaut* 715,26 *et leur produit* 7059,5525. *Trouver les racines à* 10^{-2} *près sans employer les logarithmes.* (E.M.-T.A.)

CHAPITRE IV

Calculs approchés : Formules d'erreurs

1. Notations.

Soit A la valeur exacte mais inconnue de la mesure d'une grandeur. On n'en peut connaître (voir : Erreurs expérimentales, p. 18) que des limites que nous désignerons par la formule

$$A' - \alpha < A < A' + \alpha$$

où A' et α ont des significations connues : *m.a.* et 2,5 $(e_{ma})_{ma}$.

Dans les calculs qui suivent, nous devrons, selon le cas, majorer ou minorer A de manière nette : nous désignerons par A_1 une valeur *certainement* supérieure à $A' + \alpha$ et par a_1 une valeur *certainement* inférieure à $A' - \alpha$. Ces critères fort larges doivent être appliqués judicieusement, comme on le verra dans les applications suivantes, sous peine d'obtenir des estimations des erreurs hors de proportion et d'utilité.

Nous désignerons par L une limite supérieure d'erreur *absolue* globale sur une opération complexe et par les symboles L', α',..., des limites supérieures des erreurs *relatives*.

2. Formules.

1) *Somme.*

$$A' - \alpha < A < A' + \alpha$$
$$B' - \beta < B < B' + \beta$$
$$C' - \gamma < C < C' + \gamma.$$
$$A'+B'+C'-(\alpha+\beta+\gamma) < A+B+C < A'+B'+C'+(\alpha+\beta+\gamma)$$

$$\boxed{L_s = \alpha + \beta + \gamma}$$

2) *Différence.*

$$A' - \alpha < A < A' + \alpha$$
$$B' + \beta > B > B' - \beta$$
$$(A' - B') - (\alpha + \beta) < A - B < (A' - B') + (\alpha + \beta)$$
$$\boxed{L_D = \alpha + \beta}$$

3) *Produit.*

a) Deux facteurs.

$$A' - \alpha < A < A' + \alpha$$
$$B' - \beta < B < B' + \beta.$$
$$(A' - \alpha)(B' - \beta) < AB < (A' + \alpha)(B' + \beta)$$
$$A'B' - [A'\beta + (B' - \beta)\alpha] < AB < A'B' + [A'\beta + (B' + \beta)\alpha].$$

On tire de là immédiatement

$$L_P \leqslant A'\beta + (B' + \beta)\alpha.$$

Donc, a fortiori,

$$\boxed{L_P \leqslant A_1\beta + B_1\alpha}$$

Puis $$L'_P < \frac{A'\beta + (B' + \beta)\alpha}{AB} = \frac{A'}{A} \cdot \frac{\beta}{B} + \frac{B' + \beta}{B} \times \frac{\alpha}{A} =$$
$$\frac{A'}{A}\beta' + \frac{B' + \beta}{B}\alpha'$$

Ce qui permet d'écrire, *en général,*

$$\boxed{L'_P \leqslant \alpha' + \beta'}$$

b) Plusieurs facteurs.

$ABC/A'B'C'$: $\boxed{L_P \leqslant B_1C_1\alpha + C_1A_1\beta + A_1B_1\gamma;\quad L'_P \leqslant \alpha' + \beta' + \gamma'}$

c) Puissances.

A^n/A'^n : $\boxed{L \leqslant n(A_1)^{n-1}\alpha;\quad L' \leqslant n\alpha'}$

4) *Quotient.*

$$A' - \alpha < A < A' + \alpha$$
$$B' + \beta > B > B' - \beta$$
$$\frac{A' - \alpha}{B' + \beta} < \frac{A}{B} < \frac{A' + \alpha}{B' - \beta} \qquad (1)$$

Or $$\frac{A'}{B'} - \frac{A' - \alpha}{B' + \beta} = \frac{A'\beta + B'\alpha}{B'(B' + \beta)} \quad \text{et} \quad \frac{A' + \alpha}{B' - \beta} - \frac{A'}{B'} = \frac{A'\beta + B'\alpha}{B'(B' - \beta)} \qquad (2)$$

Ainsi (1) peut s'écrire par les égalités (2) :

$$\frac{A'}{B'}-\frac{A'\beta+B'\alpha}{B'(B'+\beta)}<\frac{A}{B}<\frac{A'}{B'}+\frac{A'\beta+B'\alpha}{B'(B'-\beta)}.$$

Dès lors $L_Q<\dfrac{A'\beta+B'\alpha}{B'(B'-\beta)}<\dfrac{A'\beta+B'\alpha}{(B'-\beta)^2}.$

A fortiori $$\boxed{L_Q\leqslant\frac{A_1\beta+B_1\alpha}{(b_1)^2}}$$

On trouve aussi comme ci-dessus

$$\boxed{L'_Q\leqslant\alpha'+\beta'}$$

5) *Racine carrée.*

$$\sqrt{A'-\alpha}<\sqrt{A}<\sqrt{A'+\alpha} \qquad (1)$$

Or $$\sqrt{A'}-\sqrt{A'-\alpha}=\frac{\alpha}{\sqrt{A'}+\sqrt{A'-\alpha}}$$

et $$\sqrt{A'+\alpha}-\sqrt{A'}=\frac{\alpha}{\sqrt{A'}+\sqrt{A'+\alpha}} \qquad (2)$$

(2) permet de transformer (1) en :

$$\sqrt{A'}-\frac{\alpha}{\sqrt{A'}+\sqrt{A'-\alpha}}<\sqrt{A}<\sqrt{A'}+\frac{\alpha}{\sqrt{A'}+\sqrt{A'+\alpha}}$$

Donc $L_{\sqrt{A}}<\dfrac{\alpha}{\sqrt{A'}+\sqrt{A'-\alpha}}$. A fortiori, on aura

$$\boxed{L_{\sqrt{A}}\leqslant\frac{\alpha}{2\sqrt{a_1}}}$$

D'autre part

$$L'_{\sqrt{A}}<\frac{\alpha}{\sqrt{A}(\sqrt{A'}+\sqrt{A'-\alpha})}=\frac{\alpha}{\sqrt{AA'}+\sqrt{A(A'-\alpha)}}.$$

Le dénominateur vaut sensiblement 2 A; dès lors

$$\boxed{L'_{\sqrt{A}}\leqslant\frac{\alpha'}{2}}$$

6) *Racine cubique.*

On a $$\boxed{L_{\sqrt[3]{A}}\leqslant\frac{\alpha}{3\sqrt[3]{a_1^2}} \text{ et } L'_{\sqrt[3]{A}}\leqslant\frac{\alpha'}{3}}$$

7) *Logarithmes.*

On remarque aux deux numéros précédents que L a la forme de la différentielle de la racine

$$d\sqrt{A} = \frac{dA}{2\sqrt{A}} \qquad d\sqrt[3]{A} = \frac{dA}{3\sqrt[3]{A^2}}.$$

On démontre qu'il en va de même pour les logarithmes. Ainsi pour $\log A$, on a : $d \log A = \frac{dA}{A} \log e$ et

$$\boxed{L_{\log A} \leqslant \frac{\alpha}{A} \log e < \frac{\alpha'}{2}}.$$

Rappel utile.

L'erreur commise en négligeant dans l'expression décimale d'un nombre tous les chiffres qui suivent le chiffre des unités du $n^{\text{ème}}$ ordre décimal, ne dépasse pas une demi-unité de cet ordre si on a soin de forcer le dernier chiffre conservé dans le cas où le premier chiffre supprimé est supérieur à 4.

Cette erreur est par défaut si on ne force pas le dernier chiffre, par excès dans le cas contraire.

Elle est en valeur absolue, inférieure au nombre d'unités de l'ordre du premier chiffre supprimé qu'on obtient en augmentant ce chiffre d'une unité dans le 1er cas et en prenant son complément à 10 dans le second cas.

Indications.

1. Sauf pour les soustractions qui modifient parfois fort l'ordre de grandeur, dans l'ensemble, les opérations usuelles modifient peu l'erreur relative et donc le nombre de chiffres exacts. En prenant un ou deux chiffres de plus que ceux de l'ordre requis, on a une bonne marge de sécurité que l'on recontrôlera par l'application des formules ci-dessus et en tenant compte des abandons successifs de chiffres décimaux.

2. Les procédés d'approximation vus en arithmétique sont évidemment applicables aussi : voir *Traité d'Arithmétique* de N.-J. Schons les nos 344 et suivants ainsi que les nos 416 et suivants.

3. Voir aussi, pour l'usage des Tables : ST nos 114, 116, 119 et 121.

4. Les mêmes formules ou procédés s'appliquent aux cas où une marge supérieure d'erreur est imposée au départ.

3. Exercices.

1^re série :

672. *On donne* $\frac{t}{u} = \frac{v}{w}$ *avec* $u \simeq 12{,}6$, $v \simeq 27{,}15$, $w \simeq 6{,}12$. *Les chiffres cités sont exacts. Trouver la valeur la plus approchée de* t *et donner des précisions sur l'erreur commise.* (Lv)

673. *Quelle est la racine carrée de* 0,765 432 *avec la plus grande approximation possible sachant que le nombre donné est connu à* 10^{-6} *près par défaut.* (Lv)

674. *On donne*

$$x = (-\sin a)^{\log \sqrt{b}} \quad \textit{avec } a = 614^\circ\, 43'\, 17'' \textit{ et } b = 0{,}00\,078.$$

On demande de calculer x *avec la précision permise par les tables.* (Lv)

675. *On donne* $z = [1 - (\sin x)^{\log \cos y}]^{-\frac{1}{3}}$ *avec*

$$x = 150^\circ\, 25'\, 40'' \quad \textit{et} \quad y = 310^\circ\, 12'\, 20''.$$

On demande z *au centième le plus rapproché.* (Lv)

676. *On donne :* 1) $11(\text{cotg}\, A + \text{cotg}\, B) = 5$ *avec* $B = 149^\circ\, 14'41''$;

2) $\sin^3 X = \sin^3 x = (1 - \text{tg}\, 2\, A)\, 10^{-5}$.

On demande :

1) *la mesure à moins de* 5″ *près du plus petit angle positif* X *satisfaisant à la deuxième relation ci-dessus;*

2) *la valeur à moins de* 10^{-4} *près du plus petit nombre* x *exprimé en radians qui satisfait à la même relation et est supérieur à* 10. (Lv)

2^e série :

677. *On a relevé les dimensions d'un terrain polygonal* ABCDEF *situé en bordure d'une route rectiligne.*

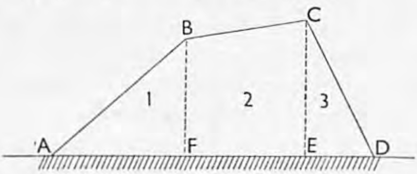


Fig. 3

Elles valent :

AF = 120,36 m;
FE = 108,28 m;
ED = 62,25 m;
FB = 109,16 m;
EC = 125,87 m.

1) *Calculer la superficie du terrain.*

2) *Donner une limite supérieure de l'erreur absolue du résultat sachant que chacune des mesures est entachée d'une erreur absolue moindre que* 2 cm. (B)

678. *L'allongement d'une barre est sensiblement proportionnel à sa longueur initiale et à son élévation de température. Si* L_0 *est la longueur d'une barre à* $0°$, *la longueur de cette barre à* $T°$ *est donnée par la formule*

$$L_T = L_0 (1 + \lambda T)$$

On donne : $L_0 = (432{,}2 \pm 0{,}1)$ cm; $\lambda = 12.10^{-6} \pm 10^{-6}$; $T = (42{,}9 \pm 0{,}1)°$.
Déterminer L_T *et une limite supérieure de l'erreur sur* l_T. (B)

679. *La densité d'un liquide mesurée au moyen d'un aréomètre de Fahrenheit, est donnée par la formule*

$$d = \frac{m + m_1}{m + m_2}$$

où d *est la densité cherchée,*

m, *la masse de l'aréomètre,*

m_1, *la masse de la surcharge nécessaire pour l'affleurement de l'aréomètre dans le liquide considéré,*

m_2, *la masse de la surcharge nécessaire pour l'affleurement dans l'eau distillée.*

1) *Calculer la densité du liquide répondant aux caractéristiques suivantes :*
$m = (26{,}74 \pm 0{,}05)$ g ; $m_1 = (2{,}4 \pm 0{,}1)$ g ; $m_2 = (6{,}4 \pm 0{,}1)$ g.

2) *Calculer une limite supérieure de l'erreur absolue commise sur le résultat.* (B)

680. *La fréquence* ν *du son fondamental émis par une corde vibrante est donnée par la formule*

$$\nu = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{P}{m}}$$

L *(longueur de la corde)* $= (71{,}25 \pm 0{,}01)$ cm.

P *(tension de la corde en dynes) : on tend la corde avec un poids de* $(16{,}175 \pm 0{,}001)$ kg'; $g = 981 \pm 0{,}2$ cm/s²; $1\ g' = g$ dyn.

m *(masse de la corde par unité de longueur ou masse spécifique linéaire). La masse totale de la corde est* $(3{,}2 \pm 0{,}01)$ g.

Calculer : 1) *la fréquence* ν;

2) *l'erreur absolue commise sur le résultat.* (B)

3e série :

681. *On donne les éléments suivants du triangle* ABC :

$a = 102{,}03$ m $b = 201{,}37$ m $c = 234{,}56$ m.

On demande de calculer les angles A, B, C *ainsi que le rayon du cercle circonscrit* R *et la surface* S *par les formules*

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}, \ldots ; r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} ; S = pr ; abc = 4RS.$$

Les angles sont à calculer en grades avec 4 *décimales;* R *et* S *auront* 2 *décimales.* (E.M.-Poly)

682. *On donne dans un triangle plan* ABC :
$$a_0 = 21{,}247 \text{ km}, \; B_0 = 66^\circ 31' 20'' \text{ et } C_0 = 65^\circ 45' 35''.$$
On demande : 1° *de calculer* b *si* $a = a_0$, $B = B_0$, $C = C_0$;

2° *de donner des limites supérieure et inférieure de* b *si* a_0 *mesure* a *à* 1 m *près et si* B_0 *et* C_0 *sont des valeurs de* B *et* C *approchées à* 5″ *près. On supposera* exacts *les résultats des tables et des interpolations.* (Lv)

683. *Dans une électrolyse, la masse* M *de métal déposé à la cathode est proportionnelle à la durée* t *et à l'intensité* I *du courant, c'est-à-dire que*
$$M = A\,I\,t$$
A *étant le coefficient électrochimique du métal. Déterminer :*

1) *l'intensité* I *sachant que*

a) $t = 1 \text{ h} \pm 1 \text{ s}$;

b) *la masse de la cathode passe de* $(29{,}63 \pm 0{,}01)$ g *à* $(30{,}42 \pm 0{,}01)$ g;

c) $A = (0{,}3294 \pm 0{,}0001)$ mg *par ampère et par seconde.*

2) *une limite supérieure de l'erreur absolue du résultat.* (B)

684. *Un corps en chute libre parcourt une distance* $s = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$.

v_0 : *vitesse de départ;* t : *temps de chute;* g : *accélération de la pesanteur. D'un dirigeable se trouvant à* 3500 m *d'altitude (erreur absolue* < 10 m), *on tire verticalement vers la terre une balle de revolver avec vitesse initiale de* 280 m/s *(erreur absolue* < 1 m/s). *On demande :*

1) *le temps nécessaire à la balle pour atteindre le sol (en négligeant la résistance de l'air).*
$$g = 9{,}81 \text{ m/s}^2 \text{ (erreur absolue} < 0{,}02 \text{ m/s}^2).$$
2) *une limite supérieure de l'erreur absolue sur le résultat.* (B)

685. *Un marteau de masse* M *et de vitesse* V *au moment du choc, enfonce sans rebondissement, un clou à une profondeur* e. *Il rencontre une résistance* F *donnée par la formule*
$$F = \frac{1}{2}\frac{MV^2}{e}$$
On demande de calculer la vitesse V *au moment du choc et l'erreur absolue commise sur le résultat sachant que*

$M = (3175 \pm 10)$ g; $F = (765 \times 10^6 \pm 25 \times 10^5)$ dyn;
$e = (1{,}25 \pm 0{,}01)$ cm. (B)

686. *On plonge un panier en laiton contenant* M *grammes de plomb en grains à la température* T *dans un calorimètre à eau contenant* M′ *grammes d'eau.*

1) *Déterminer la chaleur spécifique* x *du plomb sachant qu'elle est donnée par l'équation :*

$$(M_a + x\,M)\,(T - \theta) = (M' + M'_a)\,(\theta - t).$$

On sait que

M_a (*masse en eau du panier*) $= (3{,}67 \pm 0{,}01)$ g;
$M = (300 \pm 1)$ g; $T = (97 \pm 0{,}1)^o$; $M' = (750 \pm 5)$ g;
θ (*température finale du plomb*) $= (19{,}92 \pm 0{,}01)^o$;
M'_a (*masse en eau des accessoires*) $= (10{,}8 \pm 0{,}1)$ g;
t (*température initiale de l'eau du calorimètre*) $= (18{,}58 \pm 0{,}01)^o$.

2) *Donner une limite supérieure de l'erreur absolue du résultat.* (B)

687. *L'aiguille aimantée située au centre de la spire* (*diamètre* : 25,0 cm) *d'une boussole des tangentes orientée dans le méridien magnétique dévie d'un angle* $\alpha = 36^o\,30'$.

Quelle est l'intensité du courant parcourant la spire?

La composante horizontale du champ magnétique terrestre est

$$H_t = (0{,}21 \pm 0{,}01)\ \text{G}.$$

Quelle est la valeur maximum de l'erreur sur ce résultat si le diamètre de la spire a été mesuré avec une erreur de 5 mm *et si l'angle* α *a été mesuré à* 30′ *près?*

Formule : $I = \dfrac{10\,d\,H_t}{2\pi}\,\text{tg}\,\alpha \qquad \pi = 3{,}141\,592\,6...$ (B)

4e série :

688. 1) *Calculer à moins de* 1 dm³ *le volume de la sphère circonscrite à un cube de* 1 m³.

2) *Calculer à moins de* 1 mm *le rayon du décalitre qui sert à la mesure de matières sèches, sachant qu'il a la forme d'un cylindre dont le diamètre égale la hauteur.*

689. *La résistance électrique d'un fil cylindrique de* L m *de longueur,* r m *de rayon et dont la substance a une résistivité* ρ Ω/m *est donnée par la formule*

$$R\ (\text{en ohms}) : \bar{\rho}\,\frac{L}{\pi r^2}$$

ρ et r *ont été déterminés avec des erreurs absolues si petites qu'elles n'entacheront pas les résultats des calculs :*

$$\bar{\rho} = 1{,}7.10^{-8}\ \Omega/\text{m}; \quad \text{r} = 0{,}2 \text{ cm}.$$

Sachant que L = (178,50 ± 0,05) m, *on demande :*

1) *de calculer la résistance* R *avec une erreur inférieure à* 0,001 Ω *en justifiant l'approximation adoptée pour la valeur de* π

$$\pi = 3{,}141\,592\,6...$$

2) *de déterminer une limite supérieure de l'erreur commise sur* ρ *et* r *pour que cette erreur soit négligeable dans le calcul précédent.* (B)

690. *Lorsqu'un mobile ponctuel de masse* m *parcourt une circonférence de rayon* R *avec une vitesse angulaire de* ω *radians par seconde, la force centripète nécessaire pour maintenir ce mobile sur sa trajectoire est donnée par la formule*

$$\text{F} = \text{m}\,\omega^2\,\text{R}.$$

Quel serait le rayon d'une circonférence décrite par un mobile de masse égale à 12,500 g *soumis à une force centripète de* 535 dyn *et animé d'une vitesse angulaire de* 60° *par seconde?*

On donne $\pi = 3{,}141\,592\,653\,5...$

On demande de déterminer le rayon avec une erreur inférieure à 1 mm *en justifiant l'approximation faite sur la valeur de* π.

Pour la résolution de la question, les nombres donnés 12,500, 535 *et* 60 *seront considérés comme exacts.* (B)

691. *On propose de déterminer d'une manière approchée l'accélération de la pesanteur en utilisant les oscillations d'un pendule simple. Celui-ci a une longueur de* 81,8 cm. *La durée d'une oscillation complète est trouvée égale à* 1,820 s, *l'amplitude des oscillations étant petite. Quelle valeur peut-on en déduire pour* g*? Quelle est la valeur maximum de l'erreur possible sur ce résultat si la longueur du pendule a été mesurée avec une erreur possible de* 1 mm *et si la durée d'oscillation résulte de la mesure de la durée totale de* 70 *oscillations à l'aide d'un chronomètre dont l'usage comporte une erreur possible de* 0,2 s *à chaque pointage?*

Formule : $\text{T} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\text{L}}{\text{g}}}$ $\qquad \pi = 3{,}141\,592\,65...$ (B)

CHAPITRE V

Aperçu sur la méthode des moindres carrés

Dans les deux exercices suivants, on donne n résultats expérimentaux (x_k, y_k), et une loi théorique $y = f(x,a,b)$ qui doit les représenter de manière générale. Dans cette loi, deux paramètres a et b demeurent indéterminés; il s'agit de les obtenir aussi adaptés que possible aux données numériques.

A cet effet, on fait la différence, pour chaque expérimentation, entre le résultat numérique obtenu et le résultat théorique contenant les paramètres littéraux : $e_k = y_k - f(x_k, a, b)$.

La somme des carrés de ces écarts $S = \sum_{k=1}^{n} e_k^2$ devant être aussi faible que possible (minimum), il reste à trouver les valeurs convenables de a et de b. En généralisant ce qui est vu au chapitre des variations de fonctions, on dérive la somme des carrés par rapport à chacun des paramètres en supposant l'autre constant (dérivées partielles). Ceci donne deux équations en a et b qu'il suffit de résoudre : $S'_a = 0$ et $S'_b = 0$.

692. *La puissance* P(x), *d'une machine à vapeur (évaluée en chevaux-vapeur) est liée à la consommation en charbon par heure* C(y) *évaluée en kilogrammes par une formule linéaire* $C = a P - b$.

Calculer les constantes a *et* b *de cette formule avec les données numériques ci-dessous* (P, C), *tracer la courbe représentative et la comparer aux résultats expérimentaux :*

(190; 332); (142; 248); (108; 176); (65; 99).

693. *Mêmes questions pour les lois suivantes :*

1) *pression du vent en fonction de sa vitesse :* $p = av^b$.
(v, p) : (10; 0,27); (15; 0,64); (20; 1,11); (25; 1,79); (30; 2,5); (35; 3,46).

2) $y = a + bx^{-1}$.
(x,y) : (3; 11,2); (6; 7,65); (9; 6,57); (12; 5,98); (15; 5,69).

3) *loi fondamentale en radioactivité :* $y = ae^{bx}$.
(x, y) : (0; 1,8); (1; 6); (2; 14); (4; 42).

4) $y = a + bx + cx^2$.
(x, y) : (5; 18); (10; 22,4) (15; 26,4); (20; 30); (25; 33,2); (30; 36,1).

CHAPITRE VI

Approximation des racines d'une équation

1. Le problème.

Par un procédé quelconque, on a trouvé qu'un certain intervalle (a, b) contient une racine (non entière ou, du moins, simple) de l'équation $f(x) = 0$. On veut déterminer cette racine avec une certaine précision.

Le théorème des accroissements finis de Lagrange est très utile à cet effet (SC nº 339 - ST exercice nº 553).

2. Méthode élémentaire.

On construit la courbe $y = f(x)$ dans l'intervalle (a, b) où se trouve la racine. Celui-ci sera tel que $f(a) f(b) < 0$.

Par tâtonnements numériques et graphiques, on cherche à resserrer l'intervalle qui devient (a', b') avec $f(a') f(b') < 0$. Dans les graphiques, l'échelle utilisée devient plus large avec le resserrement des bornes.

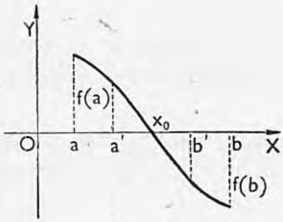


Fig. 4

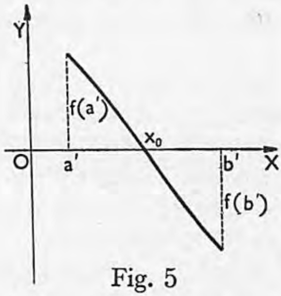


Fig. 5

Remarque. Si x_0 est la racine, $f(x_0) = 0$. Soit $x_0 + h$ une valeur approchée de x_0. Quelle *erreur* commet-on en remplaçant x_0 par $x_0 + h$?

Par la formule de Lagrange, on a $f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0 + \theta h)$. D'où

$$\boxed{h = \frac{f(x_0 + h)}{f'(x_0 + \theta h)}}$$

Si on peut connaître des bornes de $f'(x)$ dans l'intervalle (a, b) final, on en tire des limites supérieure et inférieure de h.

En se référant au graphique, on peut voir le sens de l'erreur dans chaque cas.

3. Méthode de fausse position ou des parties proportionnelles.

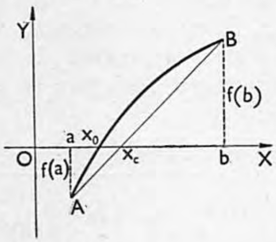


Fig. 6

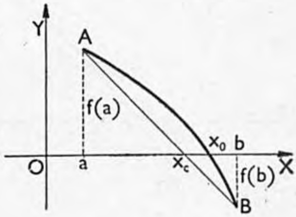


Fig. 7

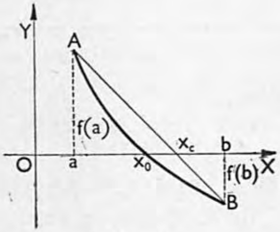


Fig. 8

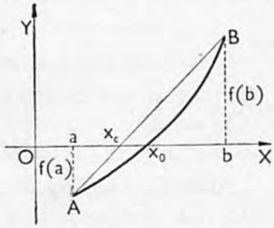


Fig. 9

x_c est une valeur approchée de x_0. On l'obtient en cherchant l'intersection de la corde AB avec OX :

$$(\mathrm{AB}) : y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Pour $y = 0$, on a : $$\boxed{x_c = a - f(a)\frac{b - a}{f(b) - f(a)}}$$

Remarques.

1. En intervertissant a et b, le même raisonnement donne

$$\boxed{x_c = b - f(b)\,\frac{b - a}{f(b) - f(a)}}$$

2. On peut comme dans les autres cas :

a) recommencer l'opération dans un intervalle plus resserré, par exemple, (a, x_c) ou (x_c, b);

b) évaluer l'approximation par la formule de Lagrange.

4. Méthode par les tangentes (Newton).

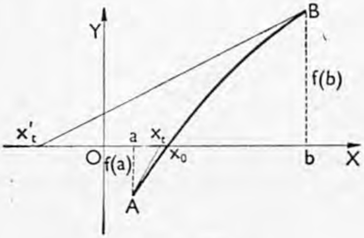


Fig. 10

Plusieurs cas peuvent ici aussi se présenter. Dans celui ci-contre, x_t est une valeur approchée de x_0 qu'on obtient par l'équation de la tangente :

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Si $y = 0$ $\quad \boxed{x_t = a - \frac{f(a)}{f'(a)}}$

En B, on aurait $x'_t = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$.

5. Méthode par itération.

Conditions d'application :

a) l'équation doit pouvoir s'écrire $x = f(x)$;

b) de plus $f'(x)$ doit être, *soit* compris entre 0 et 1, *soit* entre -1 et 0, *dans l'intervalle* de la racine.

Méthode : soit x_1 une valeur approchée de x_0 et soit $x_2 = f(x_1)$. On fait ensuite $x_3 = f(x_2)$, $x_4 = f(x_3)$,... Montrons que x_n tend vers x_0.

1^er^ *cas :* $0 < f'(x) < 1$ dans (a, b). Soit $x_1 \cong x_0$, $\quad x_2 = f(x_1)$. D'ailleurs $x_0 = f(x_0)$.

On a $\quad f(x_1) - f(x_0) = (x_1 - x_0) f'[x_1 + \theta(x_1 - x_0)] \quad 0 < \theta < 1.$

ou $\quad x_2 - x_0 = (x_1 - x_0) f'[x_1 + \theta(x_1 - x_0)].$

Comme la dérivée est comprise entre 0 et 1, x_2 est plus près que x_1 de x_0 et du même côté que x_1.

Le même raisonnement se refait pour x_3, x_4 etc. On obtient une série de x_k, croissante si $x_1 < x_0$, décroissante si $x_1 > x_0$; cette suite tend vers x_0 pour $k \to \infty$.

2^e^ *cas :* $-1 < f'(x) < 0$ dans (a, b). — Le même raisonnement conduit à des conclusions analogues. Seulement les valeurs x_k alternent de part et d'autre de x_0 et convergent vers la même limite x_0.

En effet, soient les deux séries

$$x_1, x_3, , \ldots, x_{2n+1}, \ldots \qquad (1)$$
$$x_2, x_4, x_6, \ldots, x_{2n}, \ldots \qquad (2)$$

Si (1) tend vers l et (2) vers l', démontrons que $\quad l = l'$.

On a $\quad x_{2n+1} = f(x_{2n})$ et donc si $n \to \infty$, $l' = f(l)$.

De même $\quad x_{2n} = f(x_{2n-1})$ et donc si $n \to \infty$, $l = f(l')$.

Par addition, $l + f(l) = l' + f(l')$.

Ceci est impossible, car $f'(x)$ étant comprise entre -1 et 0, $x + f(x)$ a une dérivée $1 + f'(x)$ comprise entre 0 et 1, donc toujours positive. Dès lors $x + f(x)$ dans l'intervalle toujours considéré est constamment continue croissante et ne peut prendre deux fois la même valeur en des points l et l' différents de cet intervalle.

6. Exercices.

694. *Résoudre graphiquement l'équation* $\sqrt[5]{x} = x + 0{,}2$. *On déterminera le nombre de racines réelles et on les calculera à* 10^{-1} *près (Université de Moscou).*

695. 1) *Démontrer que l'équation* $x^3 - 3x^2 + 6x - 6 = 0$ *n'admet qu'une racine réelle. La déterminer avec* 4 *décimales exactes.*

2) *Trouver la racine comprise dans l'intervalle indiqué :*

a) $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ $(1 < x < 2)$.

b) $x = \cos x$ $(0^0 < x < 90^0)$.

696. *On considère une demi-arche de cycloïde* $\left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$: $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ *(les axes* XOY *sont rectangulaires). Calculer l'ordonnée du point de cette courbe dont l'abscisse vaut* 1 *avec* 4 *décimales exactes.*

697. *Étant donné un demi-cercle de centre* O *et de diamètre* AA', *on demande de déterminer un point* M *sur ce demi-cercle de façon que la corde* AM *détache un segment* APM *dont la surface soit la moitié de celle du segment* A'P'M *détaché par la corde* A'M.

On prendra comme inconnue l'angle AOM $= x$ *radians.*

On calculera x *en degrés, minutes et secondes avec toute l'approximation permise par les tables.*

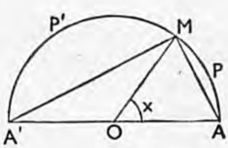


Fig. 11

698. *Montrer que l'équation* $x^x = 2$ *a une racine et une seule; la calculer de manière aussi approchée que possible (tables à* 5 *décimales).*

699. *On considère pour* $x \geqslant 0$ *la fonction* $y = \sin(x^2)$ *en axes rectangulaires* XOY *d'unité égale à* 4 cm.

1) *Calculer avec une erreur inférieure à* 0,01 *les valeurs de* x *entre* 0 *et* $\sqrt{3\pi}$ *où* y *est nul et celles où* y *est extrémé.*

2) *La courbe entière est formée d'arches situées alternativement au-dessus et au-dessous de* OX; *la* n^e *arche correspond à* $\sqrt{(n-1)\pi} \leqslant x < \sqrt{n\pi}$. *A partir de quelle valeur de* n, *la base des arches sur* OX *est-elle inférieure à* 1 mm ?

700. *Soient* OX *et* OY *deux axes rectangulaires sur lesquels on prend l'unité de longueur égale à deux centimètres.*

1) *Tracer la parabole* (P) *d'équation* $y = \frac{x^2}{4}$. *Déterminer le point* A *de* (P) *où la tangente a un coefficient angulaire égal à* 1 *et le point* N *où la normale en* A *à* (P) *coupe* OX.

2) *Soit l'équation* (E) *:*

$$x^4 + 16x^2 - 96x + 144 - 16\lambda^2 = 0.$$

Montrer que ses racines sont les abscisses des points d'intersection de la parabole (P) *et du cercle de centre* N *et de rayon* λ. *Déduire de là pour quelles valeurs de* λ *l'équation* (E) *a deux racines réelles.*

3) *Pour* $\lambda = 3$, *l'équation a une racine nulle et une autre racine réelle qui est positive. Donner la valeur de cette racine avec une erreur inférieure à* 0,001.

701. 1) x_n *désignant la mesure d'un angle en grades, on donne la formule de récurrence*

$$x_n = \frac{100}{\pi} \cos x_{n-1} + \frac{200}{\pi} \qquad (\pi = 3,141\,59).$$

Partant de la valeur $x_0 = 75$ *grades, calculer les valeurs de* x_1, x_2, x_3, x_4,... *avec une table à* 5 *décimales. On donne*

$$\frac{200}{\pi} = 63{,}6620; \quad \log \frac{100}{\pi} = 1{,}50\,285.$$

On gardera deux décimales seulement des premières valeurs calculées pour le calcul des suivantes jusqu'au moment où on atteindra une valeur x, *telle que* $|x_p - x_{p-1}| < 0{,}01$. *On prendra cette valeur* x_p *avec* 3 *décimales et l'on continuera le calcul avec* 3 *décimales pour* x_{p+1}, x_{p+2},... *jusqu'à ce qu'on obtienne une valeur* x_N *telle que* $|x_N - x_{N-1}| < 0{,}001$. *On s'arrêtera à cette valeur* x_N.

2) *Soient deux axes rectangulaires* OX, OY; *l'unité de longueur est* 1 mm *sur* OX *et* 10 cm *sur* OY. *Tracer l'arc de courbe* $y = \cos x$ $(0 < x < 100)$ x *étant la mesure d'un angle en grades. Tracer la droite* $y = \frac{\pi x}{100} - 2$. *Interpréter graphiquement le* 1°. — *Déduire de l'interprétation graphique que* x_n *a une limite* L *quand* n *augmente indéfiniment. Quelle valeur approchée de* L *peut-on donner et quelle est alors l'erreur commise sur* L ?

702. x *désignant la mesure d'un angle en radians, on considère la fonction*

$$y = \cos x \operatorname{ch} x.$$

1) *Calculer, avec des tables à* 5 *décimales, les valeurs de* y *pour*

$$x = \frac{\pi}{2} + n\frac{\pi}{12} = (n + 6)\frac{\pi}{12}$$

n *étant entier et tel que* $0 \leqslant n \leqslant 6$.

On donne $\frac{\pi}{12} \log e = 0{,}11\,370$.

2) *Tracer l'arc de courbe* $y = \cos x \operatorname{ch} x \left(\frac{\pi}{2} \leqslant x < \pi\right)$ *relativement à deux axes rectangulaires* OX *et* OY, *l'unité de longueur étant prise égale à* 5 cm *sur* OX *et à* 2 cm *sur* OY.

3) *Déduire du tracé une valeur approchée de la racine comprise entre* $\frac{\pi}{2}$ *et* π *de l'équation* $\cos x \operatorname{ch} x = 2.$

Calculer cette racine avec une erreur inférieure à 10^{-4} *à partir de*

$$x_0 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} = 2{,}094\,395.$$

703. *Soit la fonction* $y = -x \operatorname{Log} x.$

1) *Calculer les valeurs de* y *(tables à* 5 *décimales) pour*

$$x = \frac{n}{10} (n = 1, 3, 5, 7, 9)$$

2) OX *et* OY *étant deux axes rectangulaires sur lesquels l'unité de longueur vaut* 10 cm, *tracer l'arc de courbe défini par*

$$y = -x \operatorname{Log} x \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

On indiquera les tangentes aux points d'abscisses :

$$0 \qquad 0{,}5 \qquad 1.$$

3) *En utilisant l'arc tracé au* 2), *résoudre graphiquement l'équation*

$$x \operatorname{Log} x + 1 - \sqrt{1 - x^2} = 0. \qquad (1)$$

4) *Vérifier par le calcul que la racine non nulle de* (1) *est comprise entre* $\frac{2}{3}$ *et* 0,7. — *Calculer la racine par la méthode des parties proportionnelles à partir des nombres* $\frac{2}{3}$ *et* 0,7. *Indiquer l'approximation obtenue.*

704. x *désignant la mesure d'un angle en radians, on considère la fonction*

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{2x}{\pi}} \cos x$$

pour x *variant de* 0 *à* $\frac{\pi}{2}$.

1) *Calculer (à* 5 *décimales) les valeurs* $y_n = f\left(\frac{n\pi}{10}\right)$ *pour* $n = 1, 2, 3, 4.$ — *Évaluer l'erreur absolue chaque fois sur* y_n.

2) *Vérifier que le maximum de* f (x) *est obtenu pour une valeur* x_0 *de* x *comprise entre* $0{,}15\,\pi$ *et* $0{,}16\,\pi$; *donner une valeur approchée du maximum* y_0.

3) *Soient deux axes rectangulaires* OX *et* OY; *on prend une unité de longueur égale à* $\frac{30}{\pi}$ cm *sur* OX *et à* 20 cm *sur* OY. *Tracer l'arc de courbe représentant la fonction* $y = f(x)$ *pour* $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$. — *Vérifier que cet arc est concave vers les* y *négatifs.*

Section II

COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE ET D'ANALYSE INFINITÉSIMALE

CHAPITRE I

Nombres complexes
(Introduction axiomatique)

1. Forme algébrique.

1. *Définition :* un nombre complexe est un couple ordonné de nombres réels représenté (provisoirement) par (a, b) et soumis aux conventions et règles suivantes :

1) $(a, b) = (a', b')$ si $a = a'$ et $b = b'$;

2) $(a, 0)$ est le nombre réel a. En particulier $(1, 0) = 1$ (unité réelle);

3) $(0, b)$ est dit *nombre imaginaire*. En particulier, $(0, 1)$ est l'*unité imaginaire* qui se représente par i.

Ceci (avec les règles 4, 5, 6, etc.) assure que l'on fait bien un prolongement des nombres réels.

2. *Terminologie.*

La *norme* de (a, b) est $a^2 + b^2$. Son *module* est $\sqrt{a^2 + b^2}$; il se représente aussi par $|(a, b)|$.

Les nombres complexes (a, b) et $(-a, -b)$ sont dits *opposés*; (a, b) et $(a, -b)$ sont dits *conjugués*.

(a, b) $(-a, -b)$ et $(a, -b)$ ont mêmes norme et module.

$(a, -b)$ est aussi représenté par $\overline{(a, b)}$.

3. *Zéro.*

(a, b) est nul si $a = b = 0$ ou si sa norme est nulle.

4. *Addition.*

On pose : $\boxed{(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')}$

5. *Soustraction.*

$$(a, b) = (a', b') + (x, y) = (a' + x, b' + y)$$

et donc $a = a' + x$; $b = b' + y$. D'où $(x, y) = (a - a', b - b')$.

6. *Multiplication.*

On pose : $\boxed{(a, b)(a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')}$

Corollaires : Ils s'obtiennent par la règle de la multiplication et les règles et conventions qui la précèdent.

1) $(0, 1)(0, 1) = \left\langle \begin{array}{l} i.i = i^2; \\ (-1,0) = -1. \end{array}\right.$ Donc $\boxed{i^2 = -1}$

Ceci donne un sens aux radicaux d'indice pair à radicand négatif : c'est d'ailleurs la raison de l'introduction des nombres complexes.

2) $(b, 0)(0, 1) = \left\langle \begin{array}{l} bi; \\ (0, b). \end{array}\right.$ — Ainsi le nombre imaginaire $(0, b)$ peut s'écrire bi.

3) $(a, 0) + (0, b) = \left\langle \begin{array}{l} (a, b); \\ a + bi. \end{array}\right.$ — Ainsi un nombre complexe (a, b) peut s'écrire $a + bi$.

7. *Puissances.*

1) $i = \sqrt{-1}$ $\quad i^2 = -1$ $\quad i^3 = -i$ $\quad i^4 = 1$
$i^5 = i$ $\quad i^6 = -1$ $\quad i^7 = -i$ $\quad i^8 = 1$ etc.

2) $(a + bi)^m$ (m entier positif)
$(a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$
$(a + bi)^3 = a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i.$

Plus généralement, on se sert de la formule de Newton (SC n° 183).

8. *Division.*

$$\frac{a + bi}{a' + b'i} = \frac{(a + bi)(a' - b'i)}{a'^2 + b'^2} = \frac{aa' + bb' + i(a'b - ab')}{a'^2 + b'^2}$$

9. *Racine carrée* (SC n° 96).

10. *Équations du 2e degré ou associées.* Les procédés ordinaires avec les formules s'étendent de manière formelle.

11. *Exercices.*

705. *Réduire* $\dfrac{1 + i}{i} - \dfrac{2}{(1 + i)^2}$.

706. *Si α et β sont deux nombres complexes, prouver que*

$$|\alpha + \beta|^2 + |\alpha - \beta|^2 = 2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2. \qquad \text{(Lg)}$$

707. *Résoudre les équations suivantes :*

a) $x^3 + 3x + 2i = 0;$

b) $\dfrac{x + i}{x - i} = 3\dfrac{x - 1}{x + 1}.$

708. *On donne* $a^2 + b^2 + c^2 = r^2$ *et* $z = \dfrac{b + ic}{r + a}$.

Démontrer $\dfrac{c + ia}{r + b} = i\,\dfrac{1 - z}{1 + z}$. (Lg)

709. *Déterminer deux nombres complexes dont l'un a une partie réelle donnée* a, *l'autre une partie imaginaire donnée* bi *et dont le produit soit un nombre complexe imposé* c + di.

710. *Montrer que l'équation* $\dfrac{1}{x - a} + \dfrac{1}{x - b} + \dfrac{1}{x - c} = 0$ *où* a, b *et* c *sont réels et distincts n'admet pas de racine complexe et donc a toujours deux racines réelles. Généraliser avec plus de* 3 *termes ou en mettant des numérateurs différents de* 1. (Lg)

2. Forme goniométrique.

1. *Théorème fondamental :* SC n° 98 (sauf remarques). Nous utiliserons la notation anglo-saxonne condensée.

$$\boxed{\cos \alpha + i \sin \alpha = \operatorname{cis} \alpha}$$

2. *Multiplication :* SC n° 101 (sauf les petits caractères).

$$\boxed{(r_1 \operatorname{cis} \alpha_1)(r_2 \operatorname{cis} \alpha_2) = r_1 r_2 \operatorname{cis} (\alpha_1 + \alpha_2)}$$

3. *Division :* SC n° 102.

$$\boxed{\frac{r_1 \operatorname{cis} \alpha_1}{r_2 \operatorname{cis} \alpha_2} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis} (\alpha_1 - \alpha_2)}$$

4. *Puissances – Formule de Moivre :* SC n° 103 (sauf les petits caractères) :

$$\boxed{(r \operatorname{cis} \alpha)^m = r^m \operatorname{cis} m\alpha}$$

En particulier

$$\boxed{\text{MOIVRE}} \;:\; \boxed{\operatorname{cis}^m \alpha = \operatorname{cis} m\alpha}$$

Corollaire : calcul de $\cos m\alpha$, $\sin m\alpha$ (SC n° 184).

5. *Racines m^{es} de* 1 et de $a + bi$ (m entier positif).
SC nos 104 (jusqu'aux remarques exclusivement) et 105.

Remarque importante : *ces racines sont en progression géométrique.* On applique de manière formelle les formules des progressions et on vérifie immédiatement que

$$\boxed{\text{la somme des racines } m^{es} \text{ d'un nombre complexe est toujours } 0.}$$

6. *Exercices :* ST annexe II.

3. Forme géométrique (ou vectorielle).

1. *Diagramme d'Argand* (plan complexe ou plan de Gauss).

Dans un plan rapporté à deux axes cartésiens rectangulaires appelés, l'un $\mathcal{R}$ (réel) et l'autre, $\mathcal{J}$ (imaginaire), le nombre complexe $a + bi = r \text{ cis } \alpha$ admet l'*image* I dont il est l'*affixe*.

Ainsi a, b, r et α reçoivent une interprétation géométrique simple : coordonnées cartésiennes ou polaires de I.

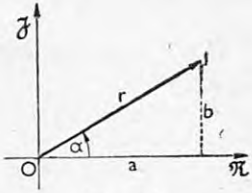


Fig. 12

2. *Addition (soustraction).*

La règle d'addition des vecteurs et la formule de Chasles sur les mesures algébriques de la résultante permettent de retrouver les règles d'addition et soustraction de la page 39.

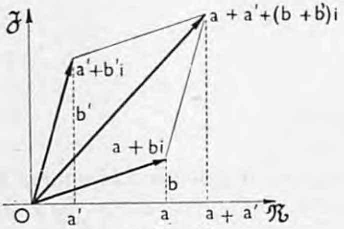


Fig. 13

3. *Multiplication (division).*

On construit sur r' un triangle semblable à celui formé par r et OU. On retrouve la règle de la page 42.

4. *Applications* (SC figures 6, 7 et 8 — n^{os} 103, 104, 106).

a) On peut effectuer géométriquement la puissance d'un nombre : la règle précédente s'applique avec r et r' confondus. Le contour polygonal obtenu s'appelle *myosotis*.

b) On peut représenter géométriquement les racines m^{es} d'un nombre complexe. Leurs images sont les sommets d'un polygone régulier.

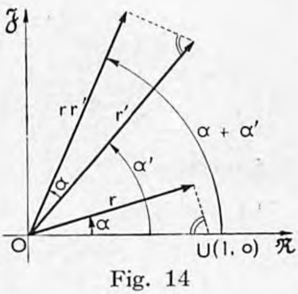


Fig. 14

5. *Exercices.*

711. *Lieu de* $z = x + yi$ *tel que :*

1) $|z - 1| = 1$; 2) $|z^2 - z| = \sqrt{2}$;

3) $z\bar{z} + 3(z + \bar{z}) = 7$. *Obtient-on aussi un lieu avec la condition*

$$z\bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 4 - 3i\ ?$$

4) $t = \dfrac{2i\,(z - ki)}{z - i}$ *où* k *est réel : a*) *soit réel; b*) *ait un module égal à* R *réel donné.*

712. *Trouver les conditions pour que les racines de*

$$az^2 + bz + c = 0$$

soient alignées avec un point A (p, q) *donné* (a, b, c, p *et* q *réels donnés*).

713. *Calculer la longueur d'un myosotis à* n *segments et partant de* U (1, 0). (Lg)

CHAPITRE II

Analyse combinatoire

1. Triangle de Pascal.

C'est une simple application de la formule

$$C_m^n = C_{m-1}^{n-1} + C_{m-1}^n$$

Dans chaque ligne du « triangle », tout terme intérieur est la somme de ses deux « voisins » dans la ligne précédente. On a ainsi un moyen commode de calculer des symboles combinatoires à un ou deux indices élevés, en tenant compte de la loi de symétrie ($C_m^n = C_m^{m-n}$).

$$C_0^0 = 1$$
$$C_1^0 = 1 \quad C_1^1 = 1$$
$$C_2^0 = 1 \quad C_2^1 = \mathbf{2} \quad C_2^2 = 1$$
$$C_3^0 = 1 \quad C_3^1 = \mathbf{3} \quad C_3^2 = \mathbf{3} \quad C_3^3 = 1$$
$$C_4^0 = 1 \quad C_4^1 = \mathbf{4} \quad C_4^2 = \mathbf{6} \quad C_4^3 = \mathbf{4} \quad C_4^4 = 1$$
$$C_5^0 = 1 \quad C_5^1 = \mathbf{5} \quad C_5^2 = \mathbf{10} \quad C_5^3 = \mathbf{10} \quad C_5^4 = \mathbf{5} \quad C_5^5 = 1$$

2. Exercices.

714. *Résoudre :*

a) $C_x^1 + C_x^2 + C_x^3 = 5x$;

b) $A_x^1 + A_x^3 = 9$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ C_{m-1}^2 & 2\,C_{m-1}^3 & C_m^3 \\ x^2 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$ (E.M.)

715. *Calculer* $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k} C_n^{k-1}$. (Lg)

716. *Combien de montants différents peut-on payer en employant une ou plusieurs pièces d'une bourse contenant* une *pièce de chacune des valeurs suivantes :* 0 F 20, 0 F 50, 1 F, 5 F, 20 F, 50 F *et* 100 F ?

717. *La serrure à secret d'un coffre-fort se compose de trois anneaux portant chacun toutes les lettres de l'alphabet latin. De combien de façons peut-on tenter un essai pour ouvrir le coffre-fort?*

718. *Combien y a-t-il de nouvelles plaques d'autos dans les séries contenant les lettres* D, E, F, G *et* H ?

719. *Combien de nombres de dix chiffres peut-on écrire en n'utilisant que les chiffres* 1, 2 *et* 3 *si le chiffre* 3 *ne peut intervenir au plus que deux fois dans un même nombre?* (Université de Moscou)

CHAPITRE III

Binôme de Newton

1. Démonstration par récurrence.

On veut établir la formule (pour m entier positif) :

$$\boxed{(a+b)^m = a^m + C_m^1\, a^{m-1}\, b + C_m^2\, a^{m-2}\, b^2 + C_m^3\, a^{m-3}\, b^3 + \ldots + b^m} \quad (1).$$

1° La formule est exacte pour :

$$m = 1 \quad (a+b)^1 = a + b;$$
$$m = 2 \quad (a+b)^2 = a^2 + C_2^1\, ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$m = 3 \quad (a+b)^3 = a^3 + C_3^1\, a^2b + C_3^2\, ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

2° Supposons-la établie pour l'exposant m. Montrons qu'alors elle est correcte pour $m+1$.

Par hypothèse, on a donc la formule (1) de l'énoncé. Pour obtenir $(a+b)^{m+1}$, il suffit de la multiplier par a puis par b et de faire la somme. Écrivons les termes semblables en regard :

$$\begin{aligned}(a+b)^{m+1} = a^{m+1} &+ C_m^1 a^m b + C_m^2 a^{m-1} b^2 + C_m^3 a^{m-2} b^3 + \ldots\ldots + \underline{C_m^m}\, ab^m \\ &+ \underline{C_m^0}\, a^m b + C_m^1 a^{m-1} b^2 + C_m^2 a^{m-2} b^3 + \ldots\ldots + C_{\underline{m}}^{m-1}\, ab^m \\ &+ C_{\underline{m+1}}^{\underline{m+1}}\, b^{m+1}\end{aligned}$$

(les symboles et chiffres soulignés sont d'effet nul mais permettent l'application générale de la formule du triangle de Pascal dans toute l'addition).

Il vient :

$$(a+b)^{m+1} = a^{m+1} + C_{m+1}^1\, a^m\, b + C_{m+1}^2\, a^{m-1}\, b^2 + C_{m+1}^3\, a^{m-2}\, b^3 + \ldots$$

C'est bien la formule (1) étendue au cas $m+1$.

3° En vertu des 1° et 2°, la formule (1) est donc exacte pour tout entier positif *m*.

Remarque : on démontre en analyse supérieure qu'elle est vraie pour toute valeur de *m* (formule de Mac-Laurin pour une puissance quelconque, voir page 61).

2. Exercices.

720. *Trouver le terme indépendant de* x *dans*

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^6;\ \left(x-\frac{1}{x}\right)^{10};\ \left(x-\frac{1}{x^3}\right)^{28};\ \left(\frac{4x^2}{3}-\frac{3}{2x}\right)^9;\ \left(x^2-\frac{1}{3x}\right)^9. \qquad \text{(Lg)}$$

721. *On demande* m *pour que le* 7e *terme de*

$$\left(\sqrt[3]{x^2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^m$$

contienne x *avec l'exposant* 3. — *Écrire ensuite ce terme.*

722. *On considère le développement de*

$$\left(2\sqrt[3]{x^5}-\frac{1}{\sqrt[6]{x}}\right)^m,$$

m *étant un entier positif. Quelle est la plus petite valeur de* m *pour que l'exposant de* x *dans le* 13e *terme soit un nombre entier et positif. Écrire ensuite ce terme.*

723. *Calculer le terme indépendant de* x *dans les produits :*

$$1)\ \left(x-\frac{1}{x}\right)^{10}\left(x+\frac{1}{x}\right)^6; \qquad 2)\ \left(1-\frac{1}{x^3}\right)^7\left(2-x\right)^{10}. \qquad \text{(Lg)}$$

724. *Écrire le terme :*

1) *en* x^{12} *de* $\quad (1-x^2+x^4)(1-2x^2)^{13}$;

2) *en* x^r *de* $\quad \sum_{k=0}^{n}(x+a)^k(x+b)^{n-k}$; (Lg)

3) *en* x^4 *de* $\quad (2-ix+3x^2)^4$. (Lv)

725. *Déterminer l'exposant* n *entier et positif si dans le développement de*

$$\left(\frac{x}{5}+\frac{2}{5}\right)^n$$

suivant les puissances décroissantes de x, *le* 10e *terme a le plus grand coefficient.* (Université de Moscou)

726. *Montrer que tout polynôme* $P_n(x)$ *du* n^e *degré en* x *peut se mettre sous la forme :*

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x(x-1) + a_3x(x-1)(x-2) + \dots\dots$$
$$+ a_nx(x-1)(x-2)\dots(x-n+1). \quad \text{(Lg)}$$

CHAPITRE IV

Déterminants

727. *Déterminants à calculer :* (Lg *sauf* 2 *et* 10)

1) $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} a(1+2a) & 2b+1 & 2-ab-a \\ 1 & 1 & b-a \\ a^2 & b & 1-ab \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} bb'+cc' & ba' & ca' \\ ab' & cc'+aa' & cb' \\ ac' & bc' & aa'+bb' \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} t^2-b^2-c^2 & ab & ac \\ ab & t^2-a^2-c^2 & bc \\ ac & bc & t^2-a^2-b^2 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} 3 & \Sigma x & \Sigma x^2 \\ \Sigma x & \Sigma x^2 & \Sigma x^3 \\ \Sigma x^2 & \Sigma x^3 & \Sigma x^4 \end{vmatrix}$ 6) $\begin{vmatrix} \Sigma x & \Sigma x^2 & \Sigma x^3 \\ \Sigma x^2 & \Sigma x^3 & \Sigma x^4 \\ \Sigma x^3 & \Sigma x^4 & \Sigma x^5 \end{vmatrix}$

Aux 5) *et* 6) *la sommation se fait en* x, y *et* z.

7) $\begin{vmatrix} ax-by-cz & ay+bx & az+cx \\ ay+bx & by-cz-ax & bz+cy \\ az+cx & bz+cy & cz-ax-by \end{vmatrix}$

8) $\begin{vmatrix} ax+by+cz & ay-bx & az-cx \\ bx-ay & ax+by+cz & bz-cy \\ cx-az & cy-bz & ax+by+cz \end{vmatrix}$

9) $\begin{vmatrix} a^2 & a\alpha & \alpha^2 \\ 2ab & a\alpha+b\beta & 2\alpha\beta \\ b^2 & b\beta & \beta^2 \end{vmatrix}$

10) $\begin{vmatrix} ab+a'b' & bc+b'c' & ca+c'a' \\ ab-a'b' & bc-b'c' & ca-c'a' \\ ab'+a'b & bc'+b'c & ca'+c'a \end{vmatrix}$

728. *Équations à résoudre en* x (1 *et* 2) *et en* λ (3) *:*

$$1)\ \begin{vmatrix} x^4 & x & 1 \\ a^4 & a & 1 \\ b^4 & b & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^3 & a^3 & b^3 \\ x^2 & a^2 & b^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad 2)\ \begin{vmatrix} a^3 & (a+x)^3 & (2a+x)^3 \\ b^3 & (b+x)^3 & (2b+x)^3 \\ c^3 & (c+x)^3 & (2c+x)^3 \end{vmatrix} = 0$$

$$3)\ \begin{vmatrix} ax-\lambda & ay & az \\ bx & by-\lambda & bz \\ cx & cy & cz-\lambda \end{vmatrix} = 0$$ (Lg)

CHAPITRE V

Systèmes linéaires

729. *Quand les solutions du système paramétrique en* a *et* b

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+y+z=0 \\ x+y+bz=0 \end{cases}$$

sont-elles en progression géométrique? (E.M.)

730. *Résoudre et discuter :*

$$1)\ \begin{cases} 2x+y-z=a \\ x+my+z=b \\ 3x+y-mz=c \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} bcx+y+az=\alpha \\ cax+y+bz=\beta \\ abx+y+cz=\gamma \end{cases}$$

$$3)\ (\lambda-a)\,x+(\lambda^2-a^2)\,y+(\lambda^3-a^3)\,z=1$$

avec deux équations analogues où μ *et* ν *remplacent* λ

$$4)\ \frac{ax+by+h}{c}=\frac{bx+cy+h}{a}=\frac{cx+ay+h}{b}.$$

731. *Conditions de compatibilité pour :*

$$1)\ \begin{cases} ax+by=1 \\ ax+y=b \\ x+by=a \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} ax+by=ab \\ bx+ay=(a-b)^2 \\ a^3x+b^3y=2\,a^2b^2. \end{cases}$$

CHAPITRE VI

Le nombre e

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, **$n$ étant entier positif.**

Considérons $E_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + C_n^1 \frac{1}{n} + C_n^2 \frac{1}{n^2} + \dots C_n^p \frac{1}{n^p} \dots$

$$= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!\,n^2} + \dots \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p! \times n^p} + \dots$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \frac{1}{p!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{p-1}{n}\right) + \dots$$

a) Dans E_n, il y a $(n + 1)$ termes.

Quand $n \to \infty$: *a*) le nombre de termes augmente;
b) chaque terme augmente.

Donc E_n augmente avec n.

b) E_n est borné.

$$E_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{p!} + \dots < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} \dots + \frac{1}{2^{p-1}} + \dots$$

Ceci est une progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$ à partir du 2e terme.

Donc $E_n < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$ en vertu de la formule $S_\infty = \frac{a}{1-q}$.

c) Ainsi E_n doit converger vers une limite finie puisqu'il est croissant mais borné.

De fait, on a : $(1 + 1)^1 = 2$

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2{,}25$$

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2\frac{10}{27}, \text{ etc.}$$

Finalement $\lim\limits_{n \to +\infty} E_n = e = 2{,}7\ 1828\ 1828\ 4590\ 4523\ 536\dots$

2. Plus généralement $\lim\limits_{\alpha \to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$.

1er CAS : $\alpha \to +0$.

On a toujours pour un n entier positif convenable : $\dfrac{1}{n+1} < \alpha < \dfrac{1}{n}$

D'où
$$1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \alpha < 1 + \frac{1}{n}$$
et
$$n < \frac{1}{\alpha} < n+1.$$
Puis
$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$
Ce qui s'écrit aussi
$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} < (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$
Quand $\alpha \to +0, n \to +\infty$ et alors les membres extérieurs de la dernière double inégalité tendent simultanément vers e et donc aussi $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$.

2e CAS : $\alpha \to -0$.

Posons $1 + \alpha = \dfrac{1}{1+\beta}$ ce qui entraîne que $\beta \to +0$.

On tire de là $\alpha = \dfrac{1}{1+\beta} - 1 = \dfrac{-\beta}{1+\beta}$ et donc,
$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{-\frac{\beta+1}{\beta}} = (1+\beta)^{\frac{\beta+1}{\beta}} = (1+\beta)^{1+\frac{1}{\beta}} =$$
$$(1+\beta)(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}.$$
Si $\alpha \to -0$, $\beta \to +0$ et le dernier produit (donc le 1er terme de la ligne précédente) tend vers e.

3. Exercices.

732. 1) $\lim\limits_{m \to \infty}$: $\left(1 + \dfrac{1}{m}\right)^{3m}$; $\left(\dfrac{m}{m+1}\right)^{2m+3}$; $\left(\dfrac{m^2+1}{m^2-1}\right)^{4m^2}$.

2) $\lim\limits_{h \to 0}$: $(1+h)^{\frac{2}{h}}$; $(1-3h)^{-\frac{4}{h}}$.

3) $\lim_{x \to 0} (1 + \sin x)^{\operatorname{cosec} x}$ 4) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]^{\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}$

5) $\lim_{x \to 0} (\cos ax)^{\frac{1}{\sin^2 ax}}$

CHAPITRE VII

Fonction et équation exponentielles

1. Introduction intuitive aux nombres irrationnels.

Les nombres entiers, par couplage, engendrent les fractions. Celles-ci associées à un signe + ou — donnent des nombres relatifs. Mais ces extensions successives de la notion de nombre par «cercles concentriques» laissent impossibles certains problèmes et on doit envisager un élargissement du domaine des nombres rationnels (entiers et fractionnaires, positifs, négatifs ou nul). Ceci se fait par la notion de *coupure* introduite par Dedekind. Elle permet comme dans les extensions précédentes la conservation des règles de calcul avec leurs propriétés (commutativité, associativité, etc.).

Considérons les valeurs approchées par défaut et par excès de la racine carrée de 2 :

1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ...
2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143; ...

Ces deux suites tendent à se rapprocher. Mais la limite commune étant pratiquement inaccessible, on dit que ces deux suites définissent une coupure en deux « classes » de l'ensemble des nombres rationnels. Cette coupure se caractérise par la création d'un symbole nouveau $\sqrt{2}$ qui désignera la frontière commune inconnue. On procède ainsi dans tous les cas semblables comme pour : $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{5}$,... π, e,... chaque fois que la frontière n'est pas un nombre rationnel, donc connu. Ces nouveaux nombres ainsi définis pourront s'additionner, se soustraire, se multiplier, etc, comme les rationnels. Donnons-en un exemple : multiplication des deux irrationnels α et β (qu'on pourra supposer positifs pour débuter) définis par les coupures :

$$\left.\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & \dots \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & \dots & a'_n & \dots \end{matrix}\right\rangle \alpha$$

$$\left.\begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n & \dots \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 & \dots & b'_n & \dots \end{matrix}\right\rangle \beta.$$

Nous créons la coupure (on vérifie aussitôt que c'en est bien une) :

$$\begin{array}{ccccc} a_1b_1 & a_2b_2 & a_3b_3 & \ldots\ldots & a_nb_n \\ a'_1b'_1 & a'_2b'_2 & a'_3b'_3 & \ldots\ldots & a'_nb'_n \end{array}$$

Par convention, on dira que la frontière sera désignée par $\alpha\beta$ et qu'elle représente le produit de α par β.

Ceci permet en particulier de donner à l'exponentielle a^x ($a > 0$ et $\neq 1$) une signification même si x n'est pas rationnel.

Si x est rationnel et vaut $\frac{m}{n}$, $a^x = \sqrt[n]{a^m}$, le signe global de $\frac{m}{n}$ étant pris par m dans le radical.

Si x est irrationnel et vaut α défini par la coupure

$$\left\{\begin{array}{llll} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \ldots \\ x'_1 & x'_2 & \ldots & x'_n \ldots \end{array}\right.$$

ces x_k et x'_k étant rationnels, on en déduit tout de suite une nouvelle coupure :

$$\left\{\begin{array}{llll} a^{x_1} & a^{x_2} & \ldots & a^{x_n} \ldots \\ a^{x'_1} & a^{x'_2} & \ldots & a^{x'_n} \ldots \end{array}\right.$$

dont la frontière, *par définition*, sera a^α.

De là, aussi, immédiatement la généralisation des règles des exposants.

Quels que soient α et β réels,

$$\boxed{\begin{array}{l} a^\alpha . a^\beta = a^{\alpha+\beta} \\ (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta} \end{array}}$$

NOTATION MODERNE : $\boxed{\exp(\alpha) = e^\alpha}$

2. Exercices.

733. *Résoudre graphiquement* $e^{\frac{x}{2}} = x^2$ *et* $e^x + me^{-x} = 1$.

734. *Construire les courbes*

$$y = \exp\left(\frac{1}{x}\right),\ \exp(-x^2),\ \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right),\ \exp\left(\frac{x^2-4}{x^2-1}\right),\ \exp\left[\frac{(x+3)^2}{x^2-3x+2}\right].$$

735. *Résoudre :* (Lv)

1) $12^{x^2-5x+k} = 144$. 2) $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$. 3) $2^{x^2-1} < \frac{1}{2^{1-x}}$.

736. *Trouver* a *pour avoir deux racines réelles à l'équation*

$$2^x + a2^{-x} + 1 = 0. \qquad \text{(Lv)}$$

737. *Chercher* λ *pour avoir* $x > 2$ *dans l'équation*

$$5^{x^2-4\lambda x+1} = 125. \qquad \text{(Lv)}$$

738. *Résoudre et discuter :* (Lv)

1) $2^x - a2^{-x} = 2a + 1.$
2) $4^x - (a-1)\,2^x + 1 = 0.$
3) $3^{2x} - (a-1)\,3^x + b = 0.$
4) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = \dfrac{15}{8}(\lambda^2 - 3\lambda + 2).$
5) $2^{2x} - 2^x + a - 2^{-x} + 2^{-2x} = 0.$

739. *Les racines de*

$$(2^a + 1)\,x^2 - (4^a + 2^{a+1} + 1)\,x + 8^{a-1} = 0$$

sont dans le rapport de 1 *à* 7. *Calculer* a.

740. *Calculer la somme*

$$S = \sum_{n=0}^{n=+\infty} (-1)^n e^{-\alpha(a+nb)}$$

où $0 < a < b$ *et* $\alpha > 0.$ (Lg)

CHAPITRE VIII

Logarithmes

1re série : définition des logarithmes.

741. *Rechercher les logarithmes suivants*

$$\log_{\sqrt{2}}16;\ \log_{2\sqrt{3}}144;\ \log_{27}81;\ \log_{0,01}1000;\ \log_{343}49;\ \log_{27}\frac{1}{81}. \qquad \text{(Lg)}$$

742. *Rechercher les bases des systèmes de logarithmes définis par*

$$\log_x 128 = \frac{7}{3};\quad \log_y 0{,}0625 = 4. \qquad \text{(Lg)}$$

743. *Calculer les expressions*

$$E_1 = a^{a^{\log_a \log_a x}}, \qquad E_2 = a^{a \log_a \log_a x} \; \textit{et} \; E_3 = b^{\frac{\log_a(\log_a b)}{\log_a b}}. \qquad \text{(Lg)}$$

2e série : graphiques.

744. *Construire les graphiques des fonctions*

$$y = \log_{10}(2x - 3); \quad y = \log_2\sqrt{1 - x^2}; \quad y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x-1}{x+1} \qquad \text{(Lv)}$$

$$y = 2^{\log \frac{x-1}{x^2-4}}.$$

745. *Le graphique de* $y = \log_2 (ax^2 + bx + c)$ *a deux asymptotes* $x = -2$ *et* $x = 6$. *Le maximum vaut* 4. *Chercher ses coupures avec* OX.

746. *A quelle condition la progression géométrique suivante converge-t-elle ?*

$$T_1 = x^2 \qquad T_2 = x^{\log_2 (4x^2 - 4)}$$

747. *Pour quelles valeurs de* a, *la fonction*

$$y = \log_x \frac{1-a}{1+a}$$

est-elle croissante en x ?

3e série : calculs logarithmiques.

748. *Calculer* $E_1 = a^{\frac{1}{2}\log_a k - \frac{3}{2}\log_a h}$

$$\textit{et} \quad E_2 = \sum_{k=1}^{n} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right). \qquad \text{(Lg)}$$

749. *Si* $a^2 + b^2 = 7ab$, *prouver que*

$$\log \frac{a+b}{3} = \frac{\log a + \log b}{2}. \qquad \text{(Lg)}$$

4e série : module relatif.

750. *Calculer*

$$E_1 = \log_a \frac{1}{b^2} . \log_b a \quad \textit{et} \quad E_2 = \log_y x . \log_z y . \log_x z. \qquad \text{(Lg)}$$

751. 1) *Trouver la relation entre* $\log_a x$ *et* $\log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{x}$; (Lg)

2) *Quelle relation existe entre* a, b *et* c *si*

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{c+b} a \log_{c-b} a \, ?$$

752. *Prouver les égalités suivantes :* (Lg)

1) $\log_{a^m} b^m \cdot \log_{b^n} a^n = 1$; 2) $\dfrac{1}{\log_m a} + \dfrac{1}{\log_n a} = \dfrac{1}{\log_{mn} a}$;

3) $\log_a bc \times \log_b ac \times \log_c ab = 2 + \log_c ab + \log_a bc + \log_b ac.$

5e série : équations.

753. *Résoudre :*

1) $\log_{\frac{1}{5}} \log_x \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{2}$; 3) $x = \sqrt{\dfrac{3 \log 1728}{1 + \frac{1}{2}\log 0,36 + \frac{1}{3}\log 8}}$; (G.E.I.)

2) $3^{\log \log x} = 9^{\log (2 \log x)}$;

4) $\dfrac{1}{\log_n 30n} + \dfrac{1}{\log_{2x} 30n} + \dfrac{1}{\log_{x-2} 30n} = 1$; (Lg)

5) $2 (\log x)^4 + (\log x^3)^2 = -(\log x\sqrt[3]{9})^3$;

6) $\log [2 (\log x^2)^4 + (\log x^3)^2] = \log 17 + 2 \log 5 - 2.$ (E.M.)

754. *Si* $f(x) = \dfrac{2 \log x + 1}{2 \log x - 1}$, *résoudre* $f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{10}{3}$.

755. *L'équation*

$$\log_{x+2} 8a = 1 + \log_2 \frac{a+8}{x+2}$$

admet la racine $x = 2$. *Calculer* a, *puis résoudre.*

756. *Trouver le nombre de racines réelles de l'équation*

$$e^{x^x + x \operatorname{Log} x} + 14\, e^{-x^x + x \operatorname{Log} x} - 8 = 0.$$

757. *Résoudre et discuter :*

1) $\log \sin x = \sqrt{1 - m^2}$;

2) $\log (x^2 - 2\lambda x + 2\lambda - 1) = 2.$ (Lv)

6e série : inéquations.

758. *Résoudre :* (Lv)

1) $\log \sqrt{x - 1} < \log x$; 2) $\log_2 \sqrt{1 - x^2} < \log_{\frac{1}{2}} 2$;

3) $\log_2 \dfrac{x+1}{x-2} < 1.$

759. *Résoudre et discuter :* (Lv)

1) $a^{\log_a x} < a$;

2) $(\mathrm{Log}\, x)\, x^{(\mathrm{Log}\, x) - 1} < 1$;

3) $\log_{\frac{1}{2}} (1 - x^2) < \log_{\frac{1}{2}} (mx + 1)$;

4) $\log_5 \sqrt{ax - 1} < \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{a}$;

5) $\log_{\frac{1}{2}} (1 - x) < \log_2 (mx + 1)$.

760. *Trouver* λ *pour avoir* $x > 1$ *dans*

$$2^{3x+1} < 1 - \lambda^2. \quad \text{(Lv)}$$

CHAPITRE IX

Dérivées

1. Exercices généraux.

761. *Rechercher* $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} (1 + \sin x)\, \mathrm{tg}^2 x$ *et* $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}}{\sin x}$.

762. *Démontrer que si* x_1 *et* x_2 *sont racines de*

$$(a + \lambda a')x^2 + (b + \lambda b')x + c + \lambda c' = 0$$

l'expression $E = \left(x_1 - \frac{ca' - c'a}{ab' - ba'}\right)\left(x_2 - \frac{ca' - ac}{ab' - ba'}\right)$ *est indépendante de* λ. (Lg)

763. *Résoudre* $x^7 + 7x^6 + px + q = 0$ *sachant qu'elle admet une racine triple.*

764. *On suppose* $f'(x) = x^2 - 3x + 2$*; déterminer le terme indépendant de* $f(x)$ *pour que* $f(x) = 0$ *ait trois racines réelles.*

765. *Former une équation* $f(x) = 0$ *à coefficients réels du* 7e *degré admettant* 1 *comme racine triple et telle que* $f(x) + i = 0$ *ait* i *comme racine triple.*

2. Dérivées particulières.

1. D e^x.

$$D\,e^x = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}.$$

Posons $e^h - 1 = \alpha$. Ceci entraîne $e^h = 1 + \alpha$, puis $h = \mathrm{Log}\,(1 + \alpha)$.

$$D\,e^x = e^x \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{\mathrm{Log}(1+\alpha)} = e^x \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{Log}\,(1+\alpha)} = e^x \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\mathrm{Log}\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}$$

$$= e^x \frac{1}{\mathrm{Log}\,e} = e^x \qquad \boxed{D\,e^x = e^x}$$

2. D a^x.

On a $a = e^{\mathrm{Log}\,a}$ et $a^x = e^{x\,\mathrm{Log}\,a}$.

$$\boxed{D\,a^x} = D_x e^{x\,\mathrm{Log}\,a} = D_x e^u = D_u e^u \,.\, D_x u = e^u\,\mathrm{Log}\,a = \boxed{a^x\,\mathrm{Log}\,a}$$

3. Dérivée d'une fonction inverse.

Soit $y = f(x)$ une fonction. La fonction inverse si elle existe s'écrit :

$$x = \varphi\,(y).$$

Supposons connue y'_x et cherchons x'_y.

$$\text{On a} \quad \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}. \tag{1}$$

Si y'_x est finie, on sait que y est continue et donc que Δy et Δx tendent vers zéro simultanément. Dès lors (1) entraîne :

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}\right] = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} \tag{2}$$

Si de plus y'_x *est non nulle et déterminée*, on aura par (2) :

$$\boxed{x'_y = \frac{1}{y'_x}}$$

4. D Log x.

Si $y = \text{Log}\, x$; $x = e^y$. Donc

$$\text{D}_x\text{Log}\, x = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\text{D}_y\, e^y} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

$$\boxed{\text{D Log}\, x = \frac{1}{x}} \qquad x \neq 0.$$

5. D $\log_a$ x.

$y = \log_a x$ entraîne $x = a^y$.

$$\boxed{\text{D}_x\log_a x = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\text{D}_y a^y} = \frac{1}{a^y\,\text{Log}\, a} = \frac{1}{x\,\text{Log}\, a}}$$

6. D x^a.

On a $x = e^{\text{Log}\, x}$ et $x^a = e^{a\,\text{Log}\, x}$.

$$\text{D}_x\, x^a = \text{D}_x\, e^{a\,\text{Log}\, x} = \text{D}_x\, e^u = \text{D}_u\, e^u\,.\,\text{D}_x\, u = e^u\left(\frac{a}{x}\right) = x^a\left(\frac{a}{x}\right) = ax^{a-1}.$$

$$\boxed{\text{D}\, x^a = ax^{a-1}}$$

7. D Arc sin x.

Si $y = \text{Arc sin}\, x$, $x = \sin y$. D'ailleurs : $-\frac{\pi}{2} \leqslant \text{Arc sin x} \leqslant +\frac{\pi}{2}$.

$$\text{D}_x\,\text{Arc sin}\, x = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\text{D}_y \sin y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\boxed{\text{D Arc sin}\, x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

8. D Arc tg x.

Si $y = \text{Arc tg}\, x$, $x = \text{tg}\, y$.

$$\text{D}_x\,\text{Arc tg}\, x = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\text{D}_y\,\text{tg}\, y} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\text{tg}^2\, y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\boxed{\text{D Arc tg}\, x = \frac{1}{1+x^2}}$$

9. Exercices.

766. *Pour quelle valeur de* α, *les courbes représentatives de* $y = x^\alpha$ *et* $y = \operatorname{Log} x$ *sont-elles tangentes? Quelles sont alors les coordonnées du point de contact?*

767. 1) *Les tangentes issues d'un point* P *à la courbe* $y = a^x$ *ont leurs points de contact situés sur une hyperbole équilatère passant par* P.

2) *Les pieds des normales issues de* P *à* $y = a^x$ *sont situés sur une parabole passant par* P *et par la projection de* P *sur* OX.

3) *Quel est le lieu des points de contact des tangentes issues du point* P *fixe à la courbe variable* $y = a^x$, *si* a *devient un paramètre.*

768. *Quel est l'angle des courbes*

$$e^x \cos y = e^a \cos b$$
$$e^x \sin y = e^a \sin b$$

au point (a, b)?

769. *Étudier les variations des fonctions suivantes :*
xe^x; $e^x \sin x$; $[\exp(-x^2)] \sin x$; $x \operatorname{Log}|x|$; $e^x \operatorname{Log}|x|$; $\operatorname{Log}|\operatorname{Log} x|$; $e^x \pm \operatorname{Log}|x|$; $\exp\left(\frac{1}{\operatorname{Log} x}\right)$; $x \operatorname{Arc\,tg} x$; $\operatorname{Log} \operatorname{ch} x$.

Note : on trouvera d'autres exercices dans ST (annexes III et V).

CHAPITRE X

Extrémés

770. *La vitesse* v *d'une vague de longueur* l *dans l'eau profonde est donnée par la formule*

$$v = \sqrt{\frac{l}{a} + \frac{a}{l}}$$

où a *est une constante connue. Quelle est la longueur de la vague quand la vitesse est minimum?*

771. *Un poids* P *donné doit être soulevé au moyen d'un levier pesant* n kg' *par mètre linéaire. Le point d'appui est à une extrémité du levier et le poids* P *est suspendu à une distance* a *fixe de cette extrémité. Trouver la longueur du levier de façon que la force nécessaire pour soulever le poids soit minimum.*

772. *Trouver la trajectoire d'un mobile depuis un point* A *appartenant à un milieu* I *jusqu'à un point* B *appartenant à un milieu* II *de manière que le temps du trajet soit minimum. Le mobile a la vitesse uniforme* v_1 *dans* I *et* v_2 *dans* II. *On suppose les deux milieux séparés par un plan. (Problème de Fermat-Loi de la réfraction de Descartes).*

773. *Un bateau se rend de* A *en* B *par une rivière dont le courant possède une vitesse* v. *On demande quelle doit être la vitesse* V *du bateau par rapport à l'eau pour que le trajet* AB *soit effectué avec une consommation minimum. On suppose que cette consommation dans l'unité de temps est proportionnelle au cube de la vitesse.*

774. *Soit* ABCDEF *la base hexagonale régulière de côté* c *d'un prisme droit de hauteur* h. *Par les droites* AC, CE *et* EA, *on mène trois plans également inclinés sur la base* ABCDEF. *On obtient ainsi un solide se terminant en une pyramide de sommet* S *et dont le volume est celui du prisme originel. On demande quelle doit être l'inclinaison* α *des trois plans construits pour que la surface totale du solide final soit minimum. (En fait on obtient l'angle que les abeilles donnent au fond de leurs alvéoles).*

CHAPITRE XI

Séries

1. Introduction.

Les notions sont expliquées dans le *Traité d'algèbre* où un exemple typique est donné par les progressions géométriques décroissantes indéfinies. C'est en se référant à ce modèle qu'on obtient les deux critères de convergence suivants applicables aux séries *à termes positifs*, seules considérées ici.

2. Premier critère de convergence (Cauchy).

Si $\sqrt[n]{a_n}$ tend vers l pour n infini, la série converge si $l < 1$; elle diverge si $l > 1$; il y a doute si $l = 1$.

3. Deuxième critère de convergence (d'Alembert).

Si $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ tend vers l pour n infini, la série converge si $l < 1$; elle diverge si $l > 1$, il y a doute si $l = 1$.

4. Formule de Mac-Laurin.

En se basant notamment sur le théorème de Rolle, on établit, en analyse supérieure, sur des conditions assez générales que

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \ldots}$$

L'étude de la convergence de cette série et de son reste (ensemble des termes négligés) sont des problèmes importants en analyse.

5. Exercices.

775. *Démontrer les deux critères de convergence ci-dessus.*

776. *Étudier la convergence des séries suivantes* $(x > 0)$ *:*

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n+1)!}$; $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{n!}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\left(1 \pm \sin\frac{1}{n}\right)}{(1+\operatorname{Arc tg} n)^n}$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$; $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$; $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} C_{n+1}^2 x^{n-1}$; $\sum_{n=0}^{\infty} D_m^n x^n$.

777. *Appliquer la formule de Mac-Laurin à* $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\operatorname{Log}(1+x)$, $(1+x)^m$ *pour* m *quelconque*, Arc tg x, Arc sin x, sh x, ch x, th x, Arg sh x, Arg th x. *Étudier la convergence.*

CHAPITRE XII

Inégalités (Lg)

Démontrer les inégalités suivantes où les lettres $a, b, c, \ldots, a_1, a_2, \ldots,$ *désignent des constantes positives et* n, *un entier positif :*

778. $\sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}$ — *Idem avec* n *lettres* a_k.

779. $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

780. $ab + bc + ca \leqslant (a+b-c)^2 + (a-b+c)^2 + (b+c-a)^2$.

781. *Avec* n *lettres :* a, b, c ... l :

$$n(a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + l^2) \geqslant (a + b + c \ldots + l)^2.$$

CHAPITRE XIII

Applications géométriques du calcul intégral

(présentation intuitive : en analyse supérieure, des conditions rigoureuses sont indispensables)

Remarques :

1. Un « *élément* » d'aire, de volume, etc., est un infiniment petit : aire dA, volume dV, etc.

2. Les formules sont données dans le cas d'une courbe d'équation cartésienne explicite $y = f(x)$. Elles s'étendent aux cas d'équations implicites ou en coordonnées polaires ou paramétriques par des transformations connues.

1. Volume de révolution.

Rappel : volume du cylindre $= \pi R^2 h$.

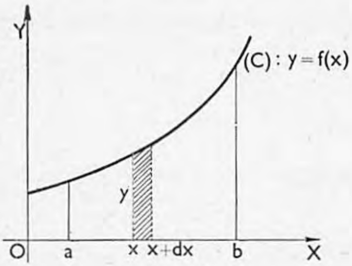


Fig. 15

Élément de volume de révolution engendré par la bande hachurée :

$$\boxed{dV_r = \pi y^2 \, dx}$$

Volume entre a et b :

$$\boxed{V_r = \pi \int_a^b y^2 \, dx}$$

EXERCICES.

1. *Chaînette* : $y = \text{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $(a \leqslant x \leqslant b)$.

2. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = 4t - t^3 \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2)$. 3. $\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{3} \\ y = 3t - t^2 \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 3)$.

4. *Arche de sinusoïde.* 5. *Arche de cycloïde* $\begin{cases} x = a\,(t - \sin t) \\ y = a\,(1 - \cos t). \end{cases}$

2. Longueur d'un arc (rectification).

Rappel : théorème de Pythagore : $a^2 = b^2 + c^2$.

Élément d'arc entre x et $x + dx$:

$$\boxed{ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}$$

Arc entre a et b :

$$\boxed{s = \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}$$

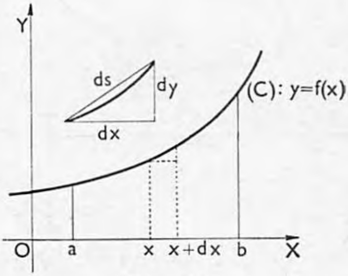


Fig. 16

EXERCICES.

1. *Cycloïde (une arche).*
2. *Chaînette* $(-a \leqslant x \leqslant +a)$.
3. *Astroïde* : $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.
4. *Cardioïde* : $\rho = a(1 + \cos\theta)$.
5. $y = \operatorname{Log} \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$ $(1 \leqslant x \leqslant 2)$.

3. Aire de révolution.

Rappel : aire latérale du tronc de cône $A_l = \pi(R + R')g$.

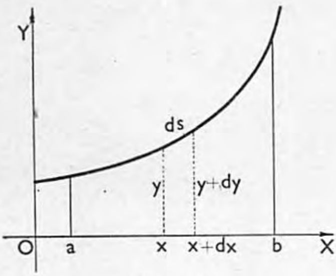


Fig. 17

Élément d'aire de révolution engendré par ds :

$$\boxed{dA_r = \pi(2y)\, ds}$$

Aire engendrée par (C) entre a et b :

$$\boxed{A_r = 2\pi \int_a^b y\, ds}$$

EXERCICES.

1. *Chaînette* $(-a \leqslant x \leqslant a)$.
2. *Arche de cycloïde.*
3. *Cardioïde.*

4. Aire en coordonnées polaires.

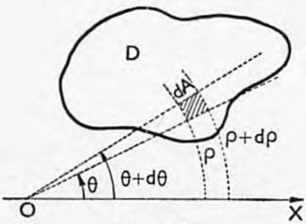


Fig. 18

Élément d'aire :

$$dA = (d\rho)(\rho d\theta) = \boxed{\rho d\rho d\theta}.$$

Aire totale :

$$\boxed{A = \iint_D \rho d\rho\, d\theta}$$

Pratiquement :

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\rho=\varphi(\theta)}^{\rho=\psi(\theta)} \rho d\rho \quad \text{ou} \quad \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho d\rho \int_{\theta=\varphi(\rho)}^{\theta=\psi(\rho)} d\theta.$$

Les bornes de la 2e intégrale indiquent les courbes limites. On intègre donc d'abord en ρ (ou en θ) puis le résultat obtenu est intégré à son tour en θ (ou en ρ).

EXERCICES.

1. *Lemniscate :* $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$.
2. *Cardioïde.*
3. *Aire commune aux deux courbes :* $\rho = \sqrt{2 \sin \theta}$ et $\rho^2 = \cos 2\,\theta$.
4. *Montrer que l'on peut aussi calculer ces aires par* $\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho\, d\theta$.

5. Volume.

Élément de volume sur le petit rectangle de centre (x, y) :

$$\boxed{dV = z\, dx\, dy}$$

Volume total :

$$\boxed{V = \iint_D z\, dx\, dy}$$

On peut aussi avoir dans le plan horizontal des coordonnées polaires (ρ, θ). Alors (ρ, θ, z) s'appellent « coordonnées cylindriques ». Les deux formules précédentes s'écrivent dans ce cas :

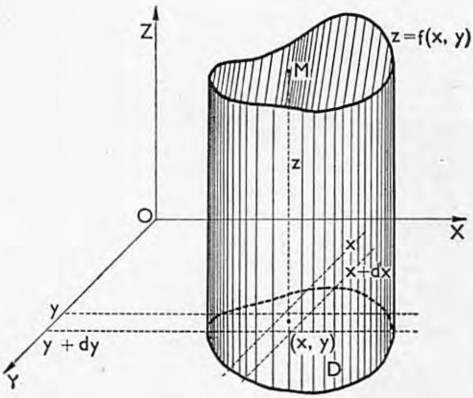


Fig. 19

$$\boxed{dV = z\rho\, d\rho\, d\theta}$$

$$\boxed{V = \iint_D z\,\rho\, d\rho\, d\theta}$$

Pratiquement, on intègre donc en x (ou en y) puis le résultat obtenu en y (ou en x) en mettant chaque fois les bornes appropriées.

EXERCICES.

1. $z = (3 - y)\,x^2$ *sur le domaine* $-2 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 3$.
2. $z = (2 - x)(3 - y)$ » » $0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 3$.
3. $z = xy\,(x - y)$ » » $0 \leqslant x \leqslant 5, y = x, y = 4$.
4. $z = x^2 + y^2$ *a*) » » $a \leqslant x \leqslant 2a;\ y = x;\ y = 2x$.
   b) » » $\rho = a\,(1 + \cos\theta)$.
5. $z = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ *a*) » » $0 \leqslant x \leqslant 1;\ y = x;\ y = x^2$.
   b) » » $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$.

Section III

ÉLÉMENTS DE MÉCANIQUE

CHAPITRE I

Cinématique et dynamique

1. Vitesse.

1. MOUVEMENT RECTILIGNE.

Si un point occupe sur un axe X'X les positions M (x) et M' $(x + \Delta x)$ aux temps t et $t + \Delta t$, on définit sa *vitesse moyenne* sur l'axe dans l'intervalle $(x, x + \Delta x)$ par

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

X'   0   M (x, t) M' $(x + \Delta x, t + \Delta t)$ X

En passant à la limite pour $\Delta t \to 0$, on obtient la *vitesse instantanée* de M en x à l'instant t. C'est la dérivée de x par rapport à t.

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \mathrm{D}_t x = x'_t = \dot{x}}$$

La dernière notation est la seule utilisée ici pour sa commodité. On suppose donc que $x = \varphi(t)$ et ceci autorise aussi la notation $\dot{\varphi}$.

2. MOUVEMENT CURVILIGNE.

a) *Mouvement plan.*

Sur une courbe plane (C), rapportée au système d'axes rectangulaires XOY, le point en mouvement occupe les positions M (x, y) et

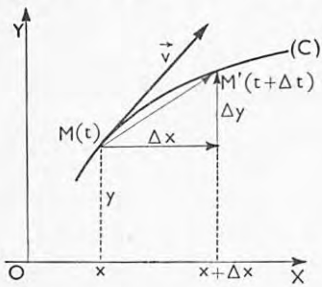


Fig. 20

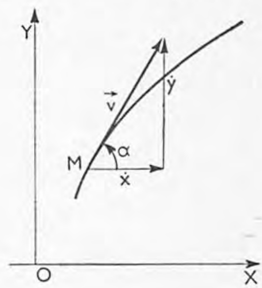


Fig. 21

M′ ($x + \Delta x, y + \Delta y$) aux instants t et $t + \Delta t$. Entre M et M′, on peut définir une *vitesse moyenne* sur $\overset{\frown}{MM'}$. Ici il faut introduire la direction et on aura que le vecteur $\vec{v}_m$ sera caractérisé par son module $|v_m| = \dfrac{|M\,M'|}{\Delta t}$ et la direction MM′ (sens MM′).

Si Δt tend vers zéro, la direction de $\vec{v}_m$ devient celle de la tangente (supposée existante) à (C) en M. On obtient la *vitesse instantanée* en M par l'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{\Delta x} + \overrightarrow{\Delta y}.$$

considérée à la limite. Ainsi a-t-on les composantes horizontale et verticale de $\vec{v}$ en M :

$$\boxed{\dot{x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}} \qquad \boxed{\dot{y} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}}$$

D'où l'on tire aussitôt :

$$\boxed{|v| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg}(\widehat{OX, \vec{v}}) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}}$$

REMARQUE :

En *coordonnées polaires* (ρ, θ), on obtient par un procédé analogue (θ et ρ étant des fonctions de t supposées dérivables) :

la *vitesse angulaire :*

$$\boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \dot{\theta}}$$

la *vitesse radiale :*

$$\boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \rho}{\Delta t} = \dot{\rho}}$$

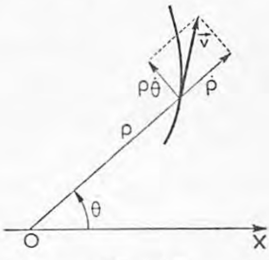


Fig. 22

et la *vitesse tranversale :* $\boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \left(\rho \frac{\Delta \theta}{\Delta t}\right) = \rho\dot{\theta}}$

b) *Mouvement dans l'espace.*

De la même façon on obtient les composantes de la vitesse (qui est toujours tangentielle) d'un point en mouvement sur une courbe quelconque.

$\vec{v}$	$\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$ en coordonnées cartésiennes. $\dot{\rho}$, $\rho\dot{\theta}$ et $\dot{z}$ en coordonnées cylindriques.

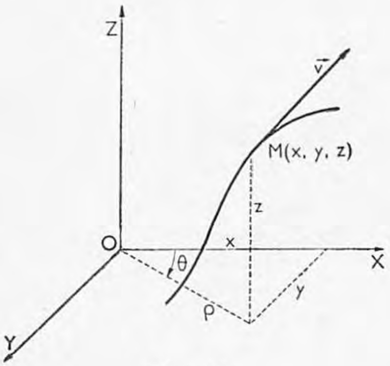


Fig. 23

3. HODOGRAPHE.

Si à partir d'un point P quelconque, dans le plan ou dans l'espace, on porte à chaque instant un vecteur $\overrightarrow{PQ}$ équipollent à $\vec{v}$, le point Q décrit l'*hodographe* du mouvement.

2. Accélération.

1. MOUVEMENT RECTILIGNE.

Si sur l'axe X′X, le point M a une position x et une vitesse v à l'instant t, à l'instant $t + \Delta t$, il occupera sur X′X une position M′ d'abscisse $x + \Delta x$ et il y aura une vitesse $v + \Delta v$.

X′ — O — M $(x, v, t,)$ — M′ $(x + \Delta x, v + \Delta v, t + \Delta t)$ → X

Dans l'intervalle M M′, on peut définir une *accélération moyenne* :

$$j_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Pour $\Delta t \to 0$, on obtient l'*accélération instantanée*.

$$\boxed{j = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = D_t v = D_t \dot{x} = \ddot{x}}$$

selon une notation convenue.

2. MOUVEMENT CURVILIGNE.

Si (fig. 24) sur une courbe plane (C), un point mobile occupe à l'instant t une position M (x, y) en ayant une vitesse $\vec{v}$, à l'instant $t + \Delta t$, il sera en M′ $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ où il aura une vitesse $\overrightarrow{v + \Delta v}$.

On peut définir sur $\widehat{MM'}$ une *accélération moyenne* :

$$\vec{j}_m = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$$

qui aura en général une direction quelconque.

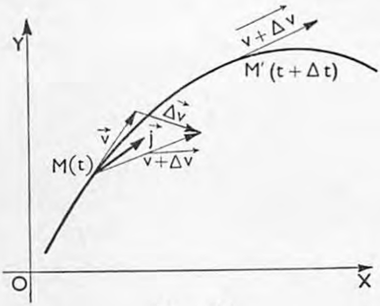


Fig. 24

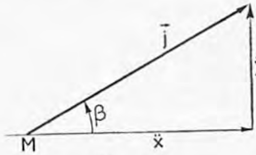


Fig. 25

A la limite, on obtient *l'accélération instantanée* $\vec{j}$ en M qui ne sera pas tangentielle de manière permanente. Analytiquement, elle est caractérisée par (fig. 25)

$$\boxed{|j| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg}(\mathrm{OX}, \vec{j}) = \operatorname{tg}\beta = \frac{\ddot{y}}{\ddot{x}}}$$

REMARQUE : les formules de l'accélération en coordonnées polaires sont plus difficiles à établir; elles sont fondamentales en astronomie.

3. Phénomènes périodiques.

1. GÉNÉRALITÉS : Un phénomène est dit périodique s'il est constitué de la répétition d'un même phénomène élémentaire appelé *cycle*. Un cycle a une durée fixe dénommée *période* (T). La *fréquence* ν est le nombre de phénomènes élémentaires par seconde : $\nu = \frac{1}{\mathrm{T}}$.

2. MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORME.

Si un point M décrit un cercle de rayon a avec une vitesse angulaire ω constante (le rayon de M balaie un angle constant ω par seconde); les équations du mouvement de M seront, si on suppose que le départ se prend sur OX (fig.26) à l'instant $t = 0$:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= a \cos \omega t \\ y &= a \sin \omega t \end{aligned}}$$

ω est ici appelé *pulsation*. On a

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} = 2\pi\nu}$$

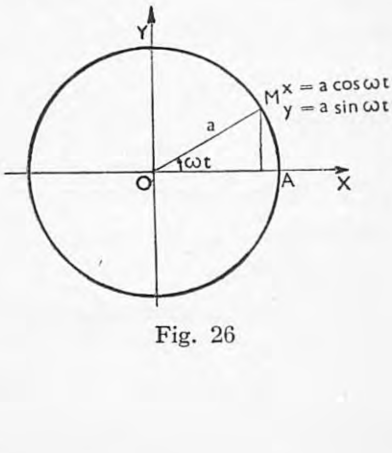


Fig. 26

D'où la vitesse de M par les formules générales vues plus haut :

$$\boxed{\begin{matrix} \dot{x} = -a\omega \sin \omega t \\ \dot{y} = a\omega \cos \omega t \end{matrix} ; \quad |v| = a\omega; \quad \alpha = 90^o + \omega t}$$

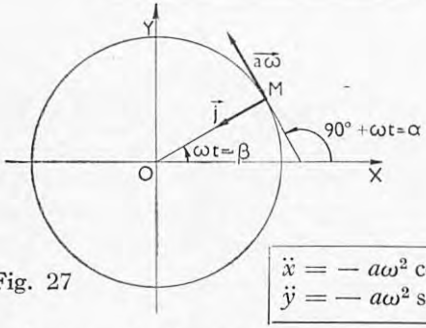


Fig. 27

$\vec{v}$ est la vitesse linéaire. On voit qu'elle est tangentielle et proportionnelle au rayon et à la pulsation.

De même, on obtient l'accélération de M :

$$\boxed{\begin{matrix} \ddot{x} = -\ a\omega^2 \cos \omega t \\ \ddot{y} = -\ a\omega^2 \sin \omega t \end{matrix} ; \quad |j| = a\omega^2; \quad \beta = \omega t}$$

Cette accélération est radiale uniquement.

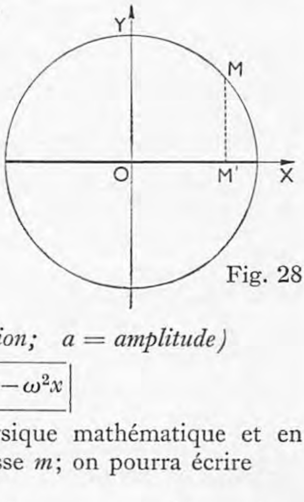


Fig. 28

4. Mouvement harmonique.

1. DÉFINITION.

Si M décrit un mouvement circulaire uniforme, sa projection M′ sur OX décrit un mouvement harmonique.

2. CARACTÉRISTIQUES DE M′.

$$\left.\begin{matrix} x = a \cos \omega t \\ \dot{x} = -\ a\omega \sin \omega t \\ \ddot{x} = -\ a\omega^2 \cos \omega t \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} (x = \textit{élongation};\ a = \textit{amplitude}) \\ \text{D'où} \quad \boxed{\ddot{x} = -\omega^2 x} \end{matrix}$$

Cette relation est fondamentale en physique mathématique et en astronomie. Supposons que M′ ait une masse m; on pourra écrire

$$m\ddot{x} = -m\omega^2 x$$

Or $m\ddot{x}$ est une force et on a la loi qui régit le mouvement harmonique (HOOKE) :

la force de rappel est proportionnelle à l'élongation

3. EXEMPLES.

a) *Pendule simple.*

$F_n = P \cos \varphi$ est neutralisé par la tension du fil.
$F_t = P \sin \varphi$ engendre le mouvement et l'entretient.

Si φ est assez petit, on a $\sin \varphi \simeq \varphi$ (rad) et on a $F_t \simeq P\varphi$; le mouvement est harmonique : $\ddot{\varphi} = -\omega^2\varphi$.

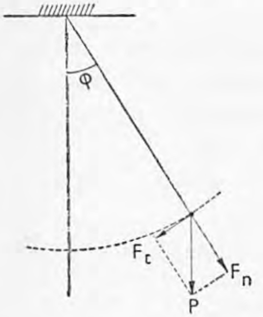


Fig. 29

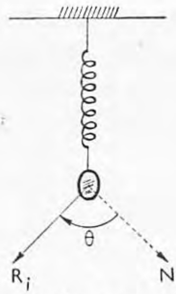


Fig. 30

b) *Masse attachée à un ressort.*

$m\ddot{x} = -fx$ où f est le coefficient de raideur du ressort.

D'où ici $\boxed{\omega^2 = \frac{f}{m}}$

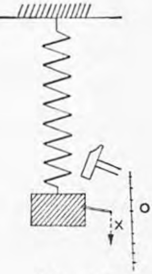


Fig. 31

c) *Pendule de torsion.*

Le rayon lumineux renvoyé par le miroir oscille suivant la loi de la force de rappel

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta.$$

4. GÉNÉRALISATIONS.

Ceci s'étend à d'autres domaines que la mécanique, notamment à l'électricité.

De plus, on étudie le mouvement dans des cas plus complexes : par exemple, pendule double ou bien, en prenant des conditions plus complexes pour les cas élémentaires (freinage, excitation extérieure permanente) ou encore en étendant ceci à l'électricité (circuits oscillants).

5. Exercices.

1re série : mouvement rectiligne.

1. *L'abscisse* x *d'un mobile sur une droite est fournie par l'équation*

$$x = t \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \cos \omega t.$$

Calculer la vitesse et l'accélération du mobile.

2. *Un point est animé d'un mouvement rectiligne d'équation*

$$x = t^4 - 8t^3 + 18t^2 - 4nt + 1$$

où n *désigne un nombre donné.*

1) *Calculer la vitesse et l'accélération ainsi que leurs extrémés.*

2) *Construire le diagramme des vitesses pour les différentes valeurs de* n. *Pour combien de valeurs de* t, *la vitesse acquiert-elle une valeur donnée et notamment la valeur zéro?*

2e série : mouvement curviligne.

3. *Trajectoire, vitesse, hodographe et accélération du mouvement*

$$x = 3 \sin t + \cos t$$
$$y = \sin t - 3 \cos t.$$

4. *Un point* M *a un mouvement plan défini par les équations*

$$x = a(1 + \cos t)$$
$$y = b \sin t$$

où a *et* b *sont des longueurs données* (a > b).

1) *Trajectoire de* M.

2) *Vitesse de* M. *Quand vaut-elle un nombre* V *donné en valeur absolue?*

3) *La vitesse peut-elle être normale à l'accélération?*

4) *Hodographe.*

5. *On donne en axes rectangulaires* XOY *le mouvement :*

$$\begin{cases} x = a\left(\cos\frac{\pi}{2}t - \sin\frac{\pi}{2}t\right) \\ y = b\left(\cos\frac{\pi}{2}t + \sin\frac{\pi}{2}t\right) \qquad a > b > 0. \end{cases}$$

On demande la trajectoire, la vitesse, l'hodographe et l'accélération.

6. *Un point décrit la parabole* $y = ax^2$ *de telle sorte que sa projection sur l'axe des* x *soit animée du mouvement*

$$x = \frac{1}{\sqrt{a}}(t + 3) \qquad a > 0.$$

Vitesse, hodographe et accélération du mouvement.

7. *Soient* OX *et* OY *deux axes rectangulaires. Deux points* M et M' *se déplacent l'un sur* OX *et l'autre sur* OY *de telle sorte que leurs mouvements respectifs soient donnés par les équations*

$$x = a\frac{1+t^2}{1-t^2} \quad \textit{et} \quad y = a\frac{1+t^2}{2t}$$

1) *Étudier les mouvements des deux points.*

2) *Calculer en fonction de* t *la distance* MM′ *puis la distance* OH *du point* O *à la droite* MM′. *Interpréter le résultat trouvé.*

3) *Montrer que le point d'intersection* P *de la droite* MM′ *avec la droite* $x = a$ *est animé d'un mouvement uniforme.*

8. *Soit une ellipse de foyers* F *et* F′. *Un point* M *la décrit sous l'action d'une force passant toujours par le centre. Les axes de symétrie étant pris pour axes de coordonnées, prouver que* M (x, y) *vérifie*

$$x\dot{y} - y\dot{x} = c^{te}.$$

9. *Un point est soumis à deux mouvements vibratoires rectangulaires d'équations* : $x = 10 \sin \omega t$ *et* $y = 4 \sin (\omega' t + \varphi)$. *Rechercher la courbe décrite par le point :*

1° *si* $\omega' = \omega$; 2° *si* $\omega' = 2\omega$ *ou* 3ω. *Dans quel sens la courbe est-elle décrite?*

Les figures obtenues sont dites de Lissajous.

10. *Vitesse et accélération de* $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$.

3e série : mouvement circulaire uniforme.

11. *On donne deux cercles de centre* A *et* B. *Le point* A *est sur le cercle de centre* B. *Deux mobiles* M *et* P *parcourent respectivement ces deux cercles de telle sorte que* A, M *et* P *demeurent alignés.*

1) *Montrer que si* M *a un mouvement uniforme, il en est de même de* P.

2) *Si* T *est la période de* M *et si* a *et* b *sont les rayons des cercles, calculer la vitesse et l'accélération de chacun des mobiles.*

12. *Un mobile* M *décrit un cercle de* 10 m *de rayon d'un mouvement uniforme; il fait* 3 *tours par minute.*

1) *Calculer avec* 3 *décimales exactes, en prenant comme unités le centimètre et la seconde, la vitesse linéaire et l'accélération de ce point.*

2) *On imagine en outre que le plan du cercle est animé d'une translation uniforme de* 500 mm *à la seconde, perpendiculaire à son plan. Déterminer le nouveau mouvement du point* M : *trajectoire, vitesse, accélération. Avec les mêmes unités qu'au* 1), *calculer les valeurs numériques de la vitesse et de l'accélération avec* 2 *décimales exactes.*

13. *Un fil est enroulé sur un cercle de rayon* R *dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre. On prend pour origine* A *des arcs, l'extrémité libre du fil supposé complètement enroulé. On déroule le fil en le tendant et de* *manière que le rayon* ON *aboutissant au point de contact tourne avec une vitesse angulaire constante* ω, *le fil demeurant tangent en* N *au cercle.*

1) *Calculer les coordonnées de l'extrémité libre* M *du fil à l'instant* t, *puis sa vitesse et son accélération.*

2) *Montrer que le mouvement de* M *est uniformément accéléré.*

3) *Dessiner la trajectoire de* M.

14. *Soit un trièdre* OXYZ. *On considère le cône de sommet* O, *d'axe* OZ *et ayant* θ *pour angle générateur.*

Un point M *se déplace sur une génératrice du cône d'un mouvement uniforme de vitesse* v. *La projection de cette génératrice sur le plan* OXY *est animée d'un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire* ω. *A l'origine du temps, le point* M *est en* O.

1) *Exprimer les coordonnées de* M *en fonction du temps.*

2) *Donner à l'instant* t *les composantes cartésiennes de la vitesse de* M.

3) *Caractériser l'accélération.*

15. *Soient trois axes rectangulaires* OXYZ. *Un cercle de centre* O, *de diamètre* $AA' = 2a$ *situé sur* Z'OZ, *tourne autour de* OZ *avec une vitesse angulaire constante* ω.

Un point M *décrit le cercle avec la même vitesse* ω. *A l'instant* $t = 0$, *le cercle est dans le plan* XOZ *et le point* M *dans le plan* XOY.

1) *Déterminer à l'instant* t *les coordonnées cartésiennes de* M.

2) *Calculer la vitesse et l'accélération.*

4e série : mouvement circulaire non uniforme.

16. *Trouver la vitesse et l'accélération dans le cas d'un mouvement circulaire non uniforme.*

17. *La trajectoire d'un point est une circonférence* (C); *l'hodographe relatif à un point* I *de cette circonférence est une circonférence* (C') *tangente en* I *à* (C) *et de rayon moitié de celui de* (C). *Trouver le mouvement.*

18. *On donne un cercle* (C), *un point* P *sur la circonférence et* PQ *perpendiculaire au plan de* (C). *Un point* M *décrit* PQ *d'un mouvement uniforme en partant de* P. *Si une barre* MN *de longueur égale au diamètre de* (C) *a son extrémité* N *sur le cercle, quels sont les mouvements de* N *et du milieu de* MN ?

5e série : mouvement harmonique.

19. *Trouver le centre des oscillations, la période et l'amplitude du mouvement* $x = 5 - 2\cos^2 t.$

Calculer la vitesse et l'accélération.

20. *Déterminer un mouvement harmonique de période* 0,75 s, *l'origine des abscisses étant au centre des oscillations. On sait qu'à l'instant initial l'élongation est* $+4$ *et la vitesse* -8.

21. *Déterminer un mouvement harmonique sachant que pour* $t = 0$, *l'élongation est* $+1$ *et la vitesse* $+\frac{\sqrt{2}}{4}$. *Aux temps* $+1$ et $+3$, *l'élongation est* $+3$ *et* $+2$.

22. *Ramener l'équation*

$$x = 5\sin^2 3t + 2\cos^2 3t - \frac{7}{2}$$

du mouvement d'un mobile à la forme

$$x = A\cos(\omega t - \varphi).$$

23. *Idem avec* $x = 3\cos(\omega t + \frac{\pi}{3}) + 5\sin(\omega t - \frac{\pi}{4})$.

24. *Deux mobiles situés sur un même arc ont les mouvements harmoniques*

$$x_1 = a\cos\omega t \quad \textit{et} \quad x_2 = a\cos(\omega t + \frac{\pi}{3})$$

a *et* ω *sont des constantes positives données.*

1) *Quel est le maximum de la distance des deux mobiles? Quand est-il atteint?*

2) *Pour quelles valeurs de* t, *la distance des deux mobiles sera-t-elle égale à* $\frac{a}{4}(\sqrt{5} - 1)$? *Donner les plus petites solutions.*

3) *On prend midi pour instant origine, la seconde pour unité de temps et* $\omega = \frac{\pi}{3600}$; *quelle heure marquera l'horloge au moment où la distance des mobiles sera* $\frac{a}{4}(\sqrt{5} - 1)$?

25. *On considère deux oscillateurs linéaires* M *et* N *se mouvant sur un même axe* X'OX. *Leurs périodes sont* 5 *et* 4 *secondes; leurs positions initiales sont données par* $\overline{OM_0} = -25$ m *et* $\overline{ON_0} = -2\sqrt{2}$ m ; *leur vitesse* *initiale commune est* $\pi\sqrt{2}$ m/s. *Les amplitudes étant* a *et* b, *quand aura-t-on* $\frac{\overline{OM}}{\overline{ON}} = \frac{a}{b}$?

26. *Composer graphiquement les* 6 *vibrations suivantes* (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)

$$y_k = (-1)^{k+1} \frac{5}{k} \sin kx$$

si x *varie de* 0 *à* 2π *radians.*

27. *Une plate-forme exécute un mouvement harmonique vertical avec amplitude* 10 cm. *Quelle est la fréquence maximum pour laquelle un corps posé sur la plate-forme restera en contact permanent avec elle?*

CHAPITRE II

Statique

Les problèmes proposés reposent sur des principes élémentaires : 1° Un vecteur $\vec{V}$ de composantes X et Y sur des axes cartésiens rectangulaires est nul si X et Y sont nuls et réciproquement. 2° Un point qui se meut sur une courbe sans pouvoir la quitter y demeure en équilibre quand les forces qui le meuvent ont une résultante tangentielle nulle. 3° La force de frottement est donnée par le produit d'un coefficient spécifique f par la composante normale de la force agissante.

Remarque : Dans les séries suivantes d'exercices, s'il est fait mention d'un système d'axes XOY, celui-ci est toujours supposé *rectangulaire.*

1re série : équilibre sans frottement.

28. *Équilibre d'un point pesant de masse* m *soumis à une force horizontale de grandeur donnée* F *et attiré par un centre fixe proportionnellement à sa distance à ce centre.*

29. *Un point matériel pesant, de masse* m, *est placé sans frottement sur une ligne de plus grande pente d'un plan incliné de l'angle* α *sur l'horizon. Il est attaché en un point* O *de la ligne de plus grande pente considérée par un fil élastique de longueur naturelle* l. *Lorsque la longueur du fil est devenue* x, *la force exercée sur le point est* $m\,\omega^2 (x - l)$ *où* ω *est une constante.*

On demande :

1) *pour quelle valeur de* x *l'équilibre est réalisé;*

2) *de calculer la réaction du plan;*

3) *s'il y a une valeur maximum de* α, *supposé compris entre* 0° *et* 90°, *qui ne puisse être dépassée sans rupture du fil si celui-ci ne peut dépasser la longueur* 1,25 l.

30. *Un point pesant de masse* m *est attaché à l'une des extrémités* M *d'un fil de longueur* λ, *flexible et inextensible dont l'autre extrémité est fixée en un point* O. *Le point* M *est attaché d'autre part à un fil élastique de longueur naturelle* l *qui développe une force de traction proportionnelle à l'allongement, le coefficient de proportionnalité étant* $m\,\omega^2$ *où* ω *est une constante. L'autre extrémité du fil élastique est attachée en un point* A, *placé à la distance* a *du point* O *sur une horizontale* OA.

Étudier l'équilibre en supposant que les fils ont une masse négligeable.

31. *L'axe* OY *étant vertical, un point matériel* M *de masse* m *décrit la parabole* $y = ax^2$ $(a > 0)$ *qu'il ne peut quitter. Il est repoussé par un point* P *de l'axe, de cote positive, proportionnellement à la distance, le facteur de répulsion ayant pour valeur numérique* $m\,\omega^2$ *(*ω*, constante donnée). Trouver les positions d'équilibre.*

32. *Un point matériel pesant de masse* m *est mobile sans frottement sur la branche positive de l'hyperbole* $xy = a$ $(a > 0)$; *il ne peut quitter la courbe dont* OY *est une asymptote verticale. Quelle force horizontale faut-il appliquer à ce point dans le plan* XOY *pour qu'il demeure en équilibre?*

(Problème de Fuhrman).

33. *Un point pesant* M *de masse* m *est mobile sans frottement sur une sphère de centre* O *rapportée à trois axes rectangulaires* OXYZ *(liaison bilatérale). Si on a les coordonnées* x, y, z *de* M *et si celui-ci est sollicité par une force* F *dont les projections sur les axes sont* $\lambda\,mx$, $\lambda\,my$ *et* 0 (λ, *coefficient fixe), quelles sont les positions d'équilibre?*

2^e série : équilibre avec frottement.

34. *Un cercle* (C) *de centre* A *et de rayon* 1 *est tangent en* O *à une demi-droite* OX. *Un point matériel* M *non pesant est assujetti à rester sur* OX. *Soit* F *le point de contact, autre que* O, *d'une tangente au cercle* (C) *menée par* M. *Le point* M *est sollicité par deux forces : l'une représentée par le vecteur* $\overrightarrow{MF}$, *l'autre par le vecteur* $\overrightarrow{MP}$ *équipollent au vecteur* $\overrightarrow{AO}$. *Calculer les composantes de la résultante des deux forces suivant* OX *et* *suivant la perpendiculaire à* OX *en fonction de* θ = *angle* OAM *puis de* $x = \overline{OM}$. *Déterminer les positions d'équilibre de* M *en supposant :*

1) *qu'il n'y a pas de frottement;*

2) *qu'il y a un coefficient de frottement* f = 0,5.

35. *Étudier l'équilibre d'un point matériel pouvant glisser sur un cercle fixe donné* (C), *avec frottement (coefficient* f*), dans les trois cas suivants :*

1) *le point* M *est uniquement soumis à son poids et le plan du cercle est vertical;*

2) *le point* M *est uniquement soumis à son poids et le plan du cercle fait un angle aigu donné* α *avec le plan horizontal;*

3) *le plan du cercle est vertical et le point* M *dont le poids est supposé négligeable cette fois, est soumis à deux forces dirigées vers les extrémités* A *et* B *du diamètre horizontal du cercle* (C) *et proportionnelles aux distances* MA *et* MB.

36. *L'axe* OY *étant la verticale ascendante, on considère la demi-parabole* $y = ax^2$ $(a > 0, x > 0)$. *Un petit anneau matériel de poids* p *est mobile sur cette demi-parabole, le contact ayant lieu avec un frottement de coefficient* f. *Déterminer l'arc de la courbe sur lequel l'anneau peut rester en équilibre.*

37. *Un disque elliptique homogène est placé verticalement sur un clou rugueux horizontal, le plan du disque étant perpendiculaire au clou. Le coefficient de frottement est* f. *Trouver la limite que ne doit pas dépasser l'excentricité* e *de l'ellipse pour que le disque soit en équilibre quel que soit le point de l'ellipse choisi comme point de contact.*

38. *Un petit anneau de poids négligeable est mobile sur une ellipse réalisée matériellement. L'ellipse est rugueuse et le coefficient de frottement est* f. *Le point représenté par l'anneau est attiré par les foyers de l'ellipse proportionnellement à la distance, le facteur de proportionnalité étant le même pour les deux foyers. Trouver les positions d'équilibre.*

TABLE DES MATIÈRES

SECTION I

Calcul numérique

SECTION II

Compléments d'algèbre et d'analyse infinitésimale

SECTION III

Éléments de mécanique

Imprimé en Belgique par les Établissements Casterman, S. A., Tournai JL 238 - 4836